

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Журнал обчислювальної та прикладної
2017 М А Т Е М А Т И К И 1(124)
Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Заступник головного редактора В. Л. Макаров

Редакційна колегія

В. М. Булавацький, М. М. Войтович, І. П. Гаврилюк (Німеччина),
Ф. Г. Гаращенко, Б. І. Голденгорін (Голландія), О. Я. Григоренко,
В. Ф. Губарев, Ю. М. Данилін, О. К. Закусило, М. З. Згурівський,
С. С. Зуб, Д. А. Клюшин, М. В. Кутнів, С. В. Ленков,
П. П. Матус, О. Г. Наконечний, А. О. Пашко, С. Д. Погорілий,
Т. Є. Романова, А. Г. Руткас, В. В. Семенов, І. В. Сергієнко,
С. Г. Солодкий, О. Б. Стелья (відп. секретар), В. М. Терещенко,
Р. С. Халко (відп. редактор), О. М. Хіміч, В. В. Хлобистов,
Д. Я. Хусайнов, А. А. Чикрій, Г. А. Шинкаренко

Редакційна група

Я. С. Гарасим, І. П. Сіренко, Л. І. Потапенко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjourn@gmail.com [html://www.opmj.univ.kiev.ua](http://www.opmj.univ.kiev.ua)

Затверджено Вченого радою факультету кібернетики
9 жовтня 2017 року, протокол №2

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2017
©"TBiMC", 2017

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Включено в Перелік наукових фахових видань у відповідності до
Наказу МОН України №1222 від 07.10.2016

Підписано до друку 9.10.2017

УДК 517.9

MSC 41A60

**PREDICTION FILTER MATERIALS OPTIMAL USE
IN RAPID MULTILAYER FILTERS WITH PIECEWISE-
HOMOGENEOUS POROUS LOADS**

ANDRIJ BOMBA, JURIJ KLIMJUK

Department of Informatics and Applied Mathematics, Rivne State University of Humanities,
Rivne, Ukraine, E-mail: abomba@ukr.net, klimyuk@ukr.net.

**ПРОГНОЗУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ
ФІЛЬТРУЮЧИХ МАТЕРІАЛІВ У ШВИДКИХ
БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ ІЗ
КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ
ЗАВАНТАЖЕННЯМИ**

А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк

Кафедра інформатики та прикладної математики, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна, E-mail: abomba@ukr.net, klimyuk@ukr.net.

ABSTRACT. A mathematical model to predict the process of water purification from impurities in rapid multilayer filter with piecewise-homogeneous porous load, each layer of which has different coefficients of the filter, active porosity and diffusion, subject to constant rate filtration is proposed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem for a filter that has the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces flow, separated by some given specified of the equipotential surfaces on several subdomains, is developed. The proposed model allows by conducting computer experiments to obtain optimal use of the filtering materials and the increase in the length work filters due to the choice of their form and and position of surfaces of section.

KEYWORDS: mathematical model, process of water purification, rapid multilayer filter, piecewise-homogeneous porous load.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями, кожен шар яких характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, активної пористості і дифузії домішок у фільтраційній течії та осаді, адсорбованому на зернах завантаження, при додержанні сталої швидкості фільтрування. Отримано алгоритм чисельно-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями і

четирима поверхнями течії та розділеним деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель дозволяє для заданої сталої швидкості фільтрування шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та положення поверхонь розділу.

Ключові слова: математична модель, процес доочистки води, швидкий багатошаровий фільтр, кусково-однорідне пористе завантаження.

Вступ

Прісні підземні води широко використовуються для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності. Попереднє видалення нерозчинених і колоїдно-розчинених речовин (домішок) з води досягається шляхом її відстоювання. Наступним етапом підготовки води є її фільтрування, для чого у більшості випадків використовуються швидкі одношарові і багатошарові фільтри із завантаженнями з піску і гравію або інших фільтруючих матеріалів завдяки більш високій швидкості фільтрування [1–4].

Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [5–12]. У якості математичної моделі процесу доочистки рідини від домішок вітчизняними дослідниками найчастіше використовується модель Д. М. Мінца при стадії швидкості фільтрування або деяка її модифікація (вдосконалена модель). У [13] запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). У [14] її вдосконалено шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж фільтру. У [15] ще додатково враховано дифузію домішок у осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Математичні моделі у [13–15] описані нелінійними сингулярно-збуреними крайовими задачами (у моделях прийнято, що конвективні компоненти масоперенесення й адсорбції переважають над вкладом дифузійних процесів й десорбції) і розв'язуються з використанням числово-асимптотичних методів. При цьому суттєвим є перехід від початкової задачі для складної конфігурації криволінійної області (обмеженої поверхнями течії й еквіпотенціальними поверхнями) до задачі для відповідної канонічної області комплексного потенціалу, яка має вигляд прямокутного паралелепіпеда.

Зростаюча вартість фільтруючих матеріалів вимагає проведення досліджень для їх більш якісного використання. Тому актуальну задачею є

математичне моделювання процесу доочистки води від домішок у багатошарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями та прогнозування оптимальних варіантів використання фільтрувальних матеріалів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та положення еквіпотенціальних поверхонь розділу шарів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай маємо деяку модельну область $G_{\mathbf{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ — однов'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою у кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathbf{z} = (x, y, z) : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathbf{z} : f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathbf{z} : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathbf{z} : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathbf{z} : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathbf{z} : f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{\mathbf{z} : f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на p підобластей $G_{\mathbf{z}}^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_1E_1$, $G_{\mathbf{z}}^s = E_sF_sF_{s+1}E_{s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_{\mathbf{z}}^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*p-1}F_{*p-1}C_*D_*$ (рис. 1 а). Для області $G = G_{\mathbf{z}} \times (0, \infty)$ розглянемо модельну задачу, описану системами рівнянь

$$\{\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0; (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot C)'_t = \text{div}(D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C - \alpha \cdot C + \beta \cdot U; \\ (\sigma \cdot U)'_t = \text{div}(D^* \cdot \text{grad } U) + \alpha \cdot C - \beta \cdot U, \sigma'_t = -\gamma \cdot U; \\ (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p} \end{cases} \quad (2)$$

за крайових умов

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*; \\ \varphi'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} C|_{ABB_*A_*} = c^*, C'_{\vec{n}}|_{CDD_*C_*} = 0; \\ C'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \\ U|_{ABB_*A_*} = u^*, U'_{\vec{n}}|_{CDD_*C_*} = 0; \\ U'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

початкових умов

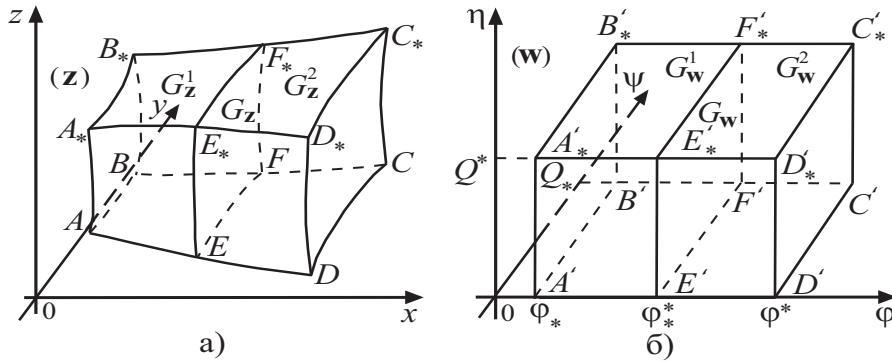
$$\{C|_{t=0} = c_0^0, U|_{t=0} = u_0^0, \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0 \quad (5)$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$)

$$\begin{cases} \varphi|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \varphi|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*; \\ \kappa_s \cdot \varphi'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, U|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = U|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ (\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = (\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ D_s \cdot C'_{\vec{n}} - v_n^s \cdot C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_{\vec{n}} - v_n^s \cdot C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ D_s^* \cdot U'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1}^* \cdot U'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (7)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$, $0 < \varphi_* = \varphi_{*0}^* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* < \varphi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$, κ — коефіцієнт фільтрації, $\kappa = \{\kappa_s, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\kappa_s > 0$ ($s = \overline{1, p}$), \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної поверхні, $C = C(x, y, z, t)$ і $U = U(x, y, z, t)$ — відповідно концентрації домішок у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ — активна пористість, D — коефіцієнт дифузії домішок у фільтраційній течії, $D = \{D_s, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $D_s = \varepsilon \cdot d_s$, $d_s > 0$ ($s = \overline{1, p}$), D^* — коефіцієнт дифузії домішок у осаді, $D^* = \{D_s^*, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $D_s^* = \varepsilon \cdot d_s^*$, $d_s^* > 0$ ($s = \overline{1, p}$), α і β — коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованих і десорбованих за одиницю часу домішок, $\alpha = \{\alpha_s, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\beta = \{\beta_s, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\beta_s = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_s$ ($s = \overline{1, p}$), γ — коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості завантаження, $\gamma = \{\gamma_s, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\gamma_s = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_s$ ($s = \overline{1, p}$), $\alpha_s = \alpha_s(x, y, z, t)$, $\bar{\beta}_s = \bar{\beta}_s(x, y, z, t)$ і $\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_s(x, y, z, t)$ ($s = \overline{1, p}$) — неперервні обмежені функції, ε — малий параметр ($\varepsilon > 0$), $c_0^0 = \{c_s^0, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $u_0^0 = \{u_s^0, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\sigma_0^0 = \{\sigma_s^0, (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $c_* = c_*(M, t)$, $c_s^0 = c_s^0(x, y, z)$, $u_* = u_*(M, t)$, $u_s^0 = u_s^0(x, y, z)$ і $\sigma_s^0 = \sigma_s^0(x, y, z)$ ($s = \overline{1, p}$) — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G [16], $M \in ABB_*A_*$, v_n^s ($s = \overline{1, p-1}$) — нормальні складові швидкості відповідно на поверхнях розділу $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$).



РІС 1. Двошарова просторова область фільтрації $G_{\mathbf{z}}$ (а)
та відповідна їй область комплексного потенціалу $G_{\mathbf{w}}$ (б)

Аналогічно [16] шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \eta$ [17] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$,

$\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, фільтраційна задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області $G_{\mathbf{z}}$ на відповідну область комплексного потенціалу — прямокутний паралелепіпед $G_{\mathbf{w}} = A'B'C'D'A'_*B'_*C'_*D'_*$, який розділено деякими поверхнями $E'_s F'_s E'_{*s} F'_{*s}$ ($s = \overline{1, p}$) на p підобластей $G_{\mathbf{w}}^1 = A'B'E'_1 F'_1 A'_*B'_*E'_{*1} F'_{*1}$, $G_{\mathbf{w}}^s = E'_s F'_s F'_{s+1} E'_{s+1} E'_{*s} F'_{*s} F'_{*s+1} E'_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_{\mathbf{w}}^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_* D'_*$ (рис. 1 б), де $G_{\mathbf{w}}^s = \left\{ \mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^* \right\}$ ($s = \overline{1, p}$), φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* — невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ — повна фільтраційна витрата. Припустимо, що ця задача є розв'язаною [16], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} , параметри φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримаємо відповідну „дифузійну задачу“ для області $G_{\mathbf{w}} \times (0, \infty)$

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot c)'_t = D \cdot (b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{\psi} + b_5 \cdot c'_{\eta}) - \\ - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} - \tilde{\alpha} \cdot c + \tilde{\beta} \cdot u, (\tilde{\sigma} \cdot u)'_t = D^* \cdot (b_1 \cdot u''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{\psi\psi} + \\ + b_3 \cdot u''_{\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{\psi} + b_5 \cdot u'_{\eta}) + \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\gamma} \cdot u; \\ (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} c|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*, c'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi^*} = 0; \\ c'_{\psi}|_{\psi=0} = c'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = c'_{\eta}|_{\eta=0} = c'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0; \\ u|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_*, u'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi^*} = 0; \\ u'_{\psi}|_{\psi=0} = u'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = u'_{\eta}|_{\eta=0} = u'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\{c|_{t=0} = \tilde{c}_0^0, u|_{t=0} = \tilde{u}_0^0, \tilde{\sigma}|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} c = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} u = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} u; \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c + u))'_t = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c + u))'_t; \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_s \cdot c'_{\varphi} - \kappa_s \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1} \cdot c'_{\varphi} - \kappa_{s+1} \cdot c); \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} D_s^* \cdot u'_{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} D_{s+1}^* \cdot u'_{\varphi}, s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (11)$$

$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$, $u = u(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_* = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{u}_* = \tilde{u}_*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_0^0 = \{\tilde{c}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{u}_0^0 = \{\tilde{u}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\sigma}_0^0 = \{\tilde{\sigma}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\beta} = \{\tilde{\beta}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\gamma} = \{\tilde{\gamma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $b_r = \{b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, ($r = \overline{1, 5}$), $\tilde{v} = \{\tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\beta}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\beta}_s$, $\tilde{\gamma}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\gamma}_s$, $\tilde{c}_s^0 = \tilde{c}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{u}_s^0 = \tilde{u}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{\sigma}_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\beta}_s = \tilde{\beta}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta)$ ($r = \overline{1, 5}$)

$= \overline{1,5}$), $b_{1,s} = \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_s^2 \cdot \kappa_s^{-2}$, $b_{2,s} = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2$, $b_{3,s} = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2$, $b_{4,s} = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz}$, $b_{5,s} = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz}$ ($s = \overline{1,p}$) [16].

2. Розв'язання задачі

Аналогічно до [13–16] знайдено числово-асимптотичне наближення $c = \{c_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1,p}\}$, $u = \{u_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1,p}\}$, $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1,p}\}$ розв'язку задачі (8)–(11) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів

$$\begin{aligned} c_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{P}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{\breve{P}}_{s,i} + R_{s,n+1} (s = \overline{1,p}); \\ u_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{H}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{\breve{H}}_{s,i} + \breve{R}_{s,n+1} (s = \overline{1,p}); \\ \tilde{\sigma}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{h}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \breve{\breve{h}}_{s,i} + \breve{\breve{R}}_{s,n+1} (s = \overline{1,p}), \end{aligned}$$

де $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_{s,i} = u_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma}_{s,i} = \tilde{\sigma}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1,p}$, $i = \overline{0,n}$) — члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$, $\widehat{P}_{s,i} = \widehat{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{H}_{s,i} = \widehat{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{h}_{s,i} = \widehat{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{\tilde{P}}_{s,i} = \widehat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\widehat{\tilde{H}}_{s,i} = \widehat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\breve{P}_{s,i} = \breve{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\breve{H}_{s,i} = \breve{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\breve{h}_{s,i} = \breve{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\breve{\breve{P}}_{s,i} = \breve{\breve{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\breve{\breve{H}}_{s,i} = \breve{\breve{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\breve{\breve{h}}_{s,i} = \breve{\breve{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($s = \overline{1,p}$, $i = \overline{0,2n+1}$) — функції типу примежового шару у околах $\varphi = \varphi_{*s}^*$ ($s = \overline{0,p}$) (поправки у околі меж шарів модельної області), $\breve{\breve{R}}_{s,n+1} = \breve{\breve{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $R_{s,n+1} = R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\phi}}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$ ($s = \overline{0,p-1}$), $\tilde{\tilde{\phi}}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1,p}$), $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ — відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\breve{R}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\breve{\breve{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = \overline{1,p}$) — залишкові члени. Зокрема, для знаходження $c_{s,i}$, $u_{s,i}$, $\tilde{\sigma}_{s,i}$ ($s = \overline{1,p}$, $i = 0, n$) одержано формули

$$c_{s,0} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot c_{s-1,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \tilde{c}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \cdot c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} + \tilde{u}_s^0, \quad \tilde{\sigma}_{s,0} = \tilde{\sigma}_s^0 \ (s = \overline{1, p}),$$

$$c_{s,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \tilde{g}_{1,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{1,1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\tilde{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \tilde{g}_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\tilde{\varphi} + \tilde{g}_{s,i}, & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_0^t \tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t})} d\tilde{t}, & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \tilde{\sigma}_{s,i} = \int_0^t \tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} \ (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}),$$

де

$$\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi},$$

$$\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t},$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \frac{g_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) = \frac{g_{s,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{s,i} = \tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot c_{s-1,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$g_{s,i} = I(i, 1) \cdot (d_s \cdot (b_{1,s} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{2,s} \cdot c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{3,s} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{4,s} \times \\ \times c'_{(s,i-1)\psi} + b_{5,s} \cdot c'_{(s,i-1)\eta}) + \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,i-l})),$$

$$\tilde{g}_{s,i} = \tilde{\alpha}_s \cdot c_{s,i} + I(i, 1) \cdot (d_s^* \cdot (b_{1,s} \cdot u''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{2,s} \cdot u''_{(s,i-1)\psi\psi} +$$

$$+b_{3,s} \cdot u''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{4,s} \cdot u'_{(s,i-1)\psi} + b_{5,s} \cdot u'_{(s,i-1)\eta}) - \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} -$$

$$- \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,i-l}), \tilde{g}_{s,i} = -I(i,1) \cdot \tilde{\gamma}_s \cdot u_{s,i-1},$$

$$\tilde{f}_s = \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi}$$

— час проходження відповідною час-тинкою шляху від точки $(x(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta)) \in G_{\mathbf{z}}^{s-1}$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_{\mathbf{z}}^s$ вздовж відповідної лінії течії, \tilde{f}_s^{-1} — функція, обернена відповідно до \tilde{f}_s відносно змінної φ ($s = \overline{1, p}$), $I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b; \\ 0, & a < b. \end{cases}$

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

У ході комп’ютерного експерименту під час моделювання процесу дочистки води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі довжиною 1.5 м проведено дослідження ефективності використання фільтруючих матеріалів завантаження у залежності від вибору його форми і положення поверхні розділу. При цьому кожен шар фільтру характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa_1 = 8.5 \text{ м}/\text{добу}$, $\kappa_2 = 5.6 \text{ м}/\text{добу}$, активної пористості $\tilde{\sigma}_1^0 = 0.4$, $\tilde{\sigma}_2^0 = 0.35$ і дифузії $D_1 = 0.0003 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_2 = 0.0002 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_1^* = 0.000005 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_2^* = 0.000002 \text{ м}^2/\text{добу}$. Форму першого модельного фільтру описано поверхнями:

$$f_1^1(x, y, z) = (x - 4.0777343)^2 + y^2 + z^2 - 0.3169799,$$

$$f_2^1(x, y, z) = x - 2,$$

$$f_3^1(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438,$$

$$f_4^1(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438,$$

$$f_5^1(x, y, z) = f_6^1(x, y, z) = (x^2 - 4x + y^2 + z^2)^2 + 16y^2 - 93.254834z^2$$

і вибрано п’ять положень поверхні розділу:

$$f_{*1}^{*1}(x, y, z) = (x - 4.168968)^2 + y^2 + z^2 - 0.7044223,$$

$$f_{*2}^{*1}(x, y, z) = (x - 4.3073801)^2 + y^2 + z^2 - 1.324003,$$

$$f_{*3}^{*1}(x, y, z) = ,$$

$$= (x - 4.7154278)^2 + y^2 + z^2 - 3.3735479,$$

$$f_{*4}^{*1}(x, y, z) = (x - 5.4580334)^2 + y^2 + z^2 - 7.957995,$$

$$f_{*5}^{*1}(x, y, z) = (x - 7.5521066)^2 + y^2 + z^2 - 26.8258873.$$

Форму другого модельного фільтру описано поверхнями:

$$f_1^2(x, y, z) = f_2^1(x, y, z), f_2^2(x, y, z) = f_1^1(x, y, z), f_i^2(x, y, z) = f_i^1(x, y, z), (i = \overline{3, 6})$$

і вибрано також п’ять положень поверхні розділу:

$$f_{*i}^{*2}(x, y, z) = f_{*(6-i)}^{*1}(x, y, z), (i = 1, 2, 4, 5),$$

$$f_{*3}^{*2}(x, y, z) = (x - 4.5748068)^2 + y^2 + z^2 - 2.6296302.$$

Функції $f_i^1(x, y, z)$ ($i = \overline{1, 6}$) і $f_i^2(x, y, z)$ ($i = \overline{1, 6}$) підібрані так, щоб забезпечити відповідно „монотонне розширення“ і „монотонне звуження“ у напрямку від його входу до виходу та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і у кутових точках. У результаті побудовано розрахункові сіткові області G_z^1 і G_z^2 з різними положеннями поверхні розділу при $n = n_1 + n_2 = 21$, $m = 9$, $l = 7$, $\varphi_* = 0$ (рис. 2). Значення φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища $v_{\text{sep}}(\varphi)$ становила 5 м/год (див. табл. 1). Для областей G_z^1 і G_z^2 знайдено фільтраційну витрату $Q = 1.78 \text{ м}^3/\text{год}$ і значення потенціалу φ_*^* на поверхнях розділу (табл. 1) та обчислено величини швидкостей фільтрації (рис. 3) і функції $b_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = \overline{1, 5}$).

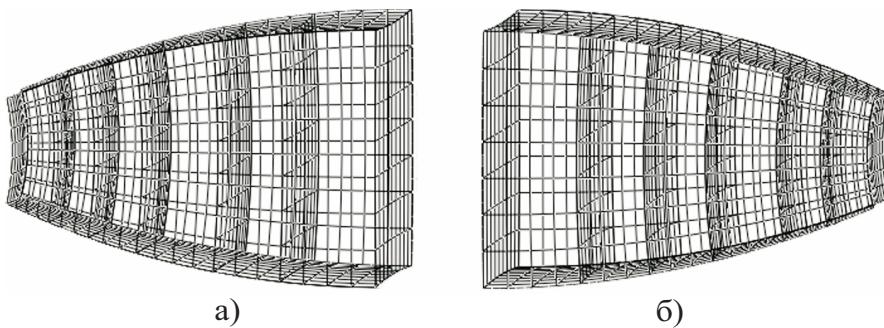


Рис 2. Розраховані сіткові області G_z^1 (а) і G_z^2 (б)
з різними положеннями поверхонь розділу

ТАБЛИЦЯ 1. Характеристики областей G_z^1 і G_z^2 при різних n_1 і n_2

№	n_1	n_2	$\varphi_1^*, \text{м}$	$\varphi_{*1}^*, \text{м}$	$t_{31}, \text{год}$	$\varphi_2^*, \text{м}$	$\varphi_{*2}^*, \text{м}$	$t_{32}, \text{год}$
1	4	17	28.12	3.72	15	29.30	3.87	18
2	7	14	26.67	6.52	23	27.79	6.79	32
3	10	11	25.21	9.33	24	26.27	9.73	35
4	14	7	23.26	13.11	27	24.23	13.67	36
5	17	4	21.78	15.96	31	22.69	16.65	35

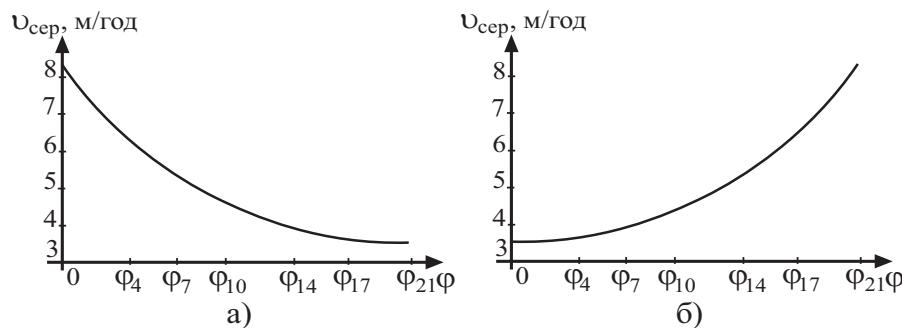


Рис 3. Розподіл $v_{\text{sep}}(\varphi)$ відповідно вздовж областей G_z^1 (а) і G_z^2 (б)
для різних положень поверхні розділу

На рис. 4–6 представлено розподіли середніх величин концентрацій дотішок $c_{\text{sep}}(\varphi, t)$ і $u_{\text{sep}}(\varphi, t)$ відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, та середньої величини активної пористості $\tilde{\sigma}_{\text{sep}}(\varphi, t)$ завантаження фільтру для областей G_z^1 і G_z^2 у момент часу t_3 (табл. 1) при $c_{\text{kp}} = 0.00005 \text{ г/л}$, $c_* = 0.0005 \text{ г/л}$, $c_0^0 = 0$, $u_0^0 = 0$, $\tilde{\alpha}_1 = 0.43 - 0.05 \cdot \tilde{v} \text{ с}^{-1}$, $\tilde{\alpha}_2 = 0.28 - 0.023 \cdot \tilde{v} \text{ с}^{-1}$, $\tilde{\beta}_s = 0.00001 \cdot \tilde{\alpha}_s \text{ с}^{-1}$ ($s = 1, 2$), $\tilde{\gamma}_1 = 0.000043 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{с})$, $\tilde{\gamma}_2 = 0.000036 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{с})$.

Згідно результатів експерименту найкращим із запропонованих є вибір поверхні розділу $f_{*4}^{*2}(x, y, z)$ для області G_z^2 , при якому час захисної дії фільтру становить 36 год, а найгіршим — вибір поверхні розділу $f_{*1}^{*1}(x, y, z)$ для області G_z^1 , при якому час захисної дії фільтру становить лише 15 год.

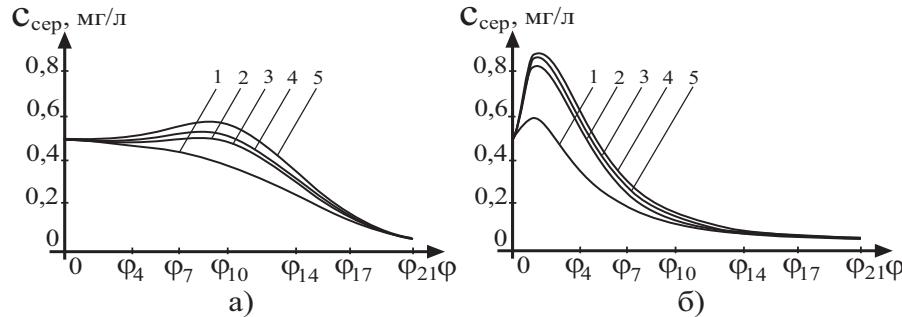


Рис 4. Розподіл $c_{\text{sep}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей G_z^1 (а) і G_z^2 (б)
для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

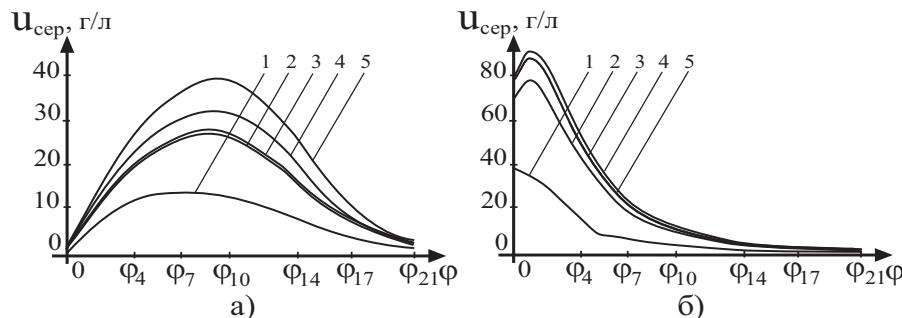


Рис 5. Розподіл $u_{\text{sep}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей G_z^1 (а) і G_z^2 (б)
для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

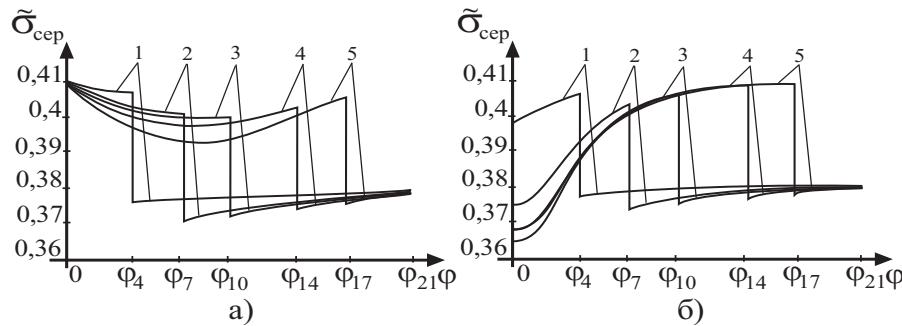


Рис 6. Розподіл $\tilde{\sigma}_{\text{sep}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей G_z^1 (а) і G_z^2 (б) для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

Висновки

Сформовано просторову математичну модель процесу доочистки води від домішок у багатошарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями, яка враховує зворотній вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на активну пористість. Отримана модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості фільтроцикли фільтрів за рахунок підбору їх форми та положення поверхонь розділу шарів. Згідно отриманих результатів комп'ютерних експериментів моделювання процесу доочистки води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі найкращим із запропонованих є вибір поверхні розділу $f_{*4}^{*2}(x, y, z)$ для області G_z^2 , що забезпечує „монотонне звуження“ у напрямку від його входу до виходу, при якому час захисної дії фільтру становить 36 год, а найгіршим — вибір поверхні розділу $f_{*1}^{*1}(x, y, z)$ для області G_z^1 , що забезпечує „монотонне розширення“ у напрямку від його входу до виходу, при якому час захисної дії фільтру становить лише 15 год.

ЛІТЕРАТУРА

1. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. — Рівне : НУВГП, 2005. — 163 с.
2. Cheremisinoff N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies. — Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. — 645 p. DOI:10.1016/B978-075067498-0/50000-0
3. Hendricks D. W. Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological. — Boca Raton : CRC Press, 2011. — 883 p.
4. Quevauviller Ph., Thompson K. C. Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis. — John Wiley & Sons Ltd, 2006. — 188 p. DOI:10.1002/0470094931

5. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі // Математичне та комп’ютерне моделювання: Кам’янець-Подільський національний університет. — 2011. — Вип. 5. — С. 36–44.
6. Мельцер В. З. Фильтровальные сооружения в коммунальном водоснабжении / В. З. Мельцер. — М. : Стройиздат, 1995. — 176 с.
7. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. — М. : Стройиздат, 1964. — 156 с.
8. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. — 212 с.
9. Ives K. J. Deep-bed water filters // New developments. Filtr. And Separ. — Vol. 6, № 1. — 1969. — P. 42–48.
10. Kalteh A. M., Hjorth P. and Berndtsson R. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application // Environmental Modelling and Software. — Vol. 23, № 7. — 2008. — P. 835–845. DOI:10.1016/j.envsoft.2007.10.001
11. Maier H. R., Dandy G. C. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications // Environmental Modelling and Software. — Vol. 15, № 1. — 2000. — P. 101–124. DOI:10.1016/s1364-8152(99)00007-9
12. Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T. and Hiltunen Y. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process // Mathematics and Computers in Simulation. — Vol. 82, № 3. — 2011. — P. 450–459. DOI:10.1016/j.matcom.2010.10.021
13. Бомба А. Я., Климюк Ю. Є., Сафоник А. П., Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв’язків просторових модельних задач процесу фільтрування // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 29–39.
14. Климюк Ю. Є., Сівак В. М. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Вип. 7 (16). — Рівне : РДГУ, 2010. — С. 93–109.
15. Климюк Ю. Є. Математичне моделювання процесу доочистки води від домішок у швидких фільтрах з однорідними пористими завантаженнями // Матеріали XVIII міжнародної науково-практичної інтернет-конференції „Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації“: Зб. наук. праць. — Переяслав-Хмельницький, 2016. — Вип. 18. — С. 272–277.
16. Бомба А. Я., Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія. — Рівне : ТзОВ фірма „Ассоль“, 2014. — 273 с.
17. Рауз Х. Механика жидкості. — М. : Стройиздат, 1967. — 390 с.

Надійшла 31.05.2017

УДК 517.9
MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

A NEW MIRROR-PROX ALGORITHM FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

S. V. DENISOV, V. V. DUDAR, V. V. SEMENOV, YA. I. VEDEL

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University,
Kiev, Ukraine, E-mail: sireukr@gmail.com, slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com,
yandex@ukr.net.

НОВИЙ ДЗЕРКАЛЬНО-ПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВАРИАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

С. В. ДЕНИСОВ, В. В. ДУДАР, В. В. СЕМЕНОВ, Я. І. ВЕДЕЛЬ

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: sireukr@gmail.com, slavko123@ukr.net,
volodya.semenov@gmail.com, yandex@ukr.net.

ABSTRACT. In this paper, we consider a variational inequalities with Lipschitz continuous pseudo-monotone operators. Quite a number of operational research problems in applications can be stated in this form. We propose new variant of mirror descent method (mirror-prox algorithm) for solving the variational inequalities. This method can be interpreted as the modification of two-step L. D. Popov algorithm with the projection onto the feasible set in the sense of Bregman divergence. Our method, like other mirror descent schemes, can effectively take into account the structure of the feasible set of the problem. The main theoretical result is the proof of the theorem about the convergence of the method. Several preliminary numerical experiments have been also performed to illustrate the convergence of the method.

KEYWORDS: Variational inequality, Bregman divergence, Mirror-Prox Algorithm, Convergence.

РЕЗЮМЕ. В статті розглядаються варіаційні нерівності з ліпшицевими та псевдомонотонними операторами. Велика кількість важливих прикладних задач дослідження операцій може бути сформульована у цій формі. Для розв'язання варіаційних нерівностей пропонується новий метод типу дзеркального спуску (дзеркально-проксимальний алгоритм). Метод можна проінтерпретувати як модифікацію алгоритму Попова з використанням проектування на допустиму множину у розумінні відстані Брегмана. Основний теоретичний результат — теорема про збіжність методу. Також наведено результати декількох чисельних експериментів.

Ключові слова: варіаційна нерівність, відстань Брегмана, дзеркально-проксимальний алгоритм, збіжність.

1. INTRODUCTION

There are a lot of interesting and actual problems in operation research that can be written in the form of variational inequalities. The solving of the last is the actively developing field of applied nonlinear analysis [1–9]. There are currently a lot of methods to solve variational inequalities, including projection type methods, i.e. using a metric projection onto the feasible set [1, 3, 10–13]. It's known that in the saddle point search, Nash equilibrium problems the convergence of the most simple projection method requires strengthened monotonicity conditions [1]. In the case of non-compliance there are several approaches. One of them is a regularization of the original problem in order to give it the desired property. In extra-gradient type methods first proposed by G. M. Korpelevich [13] the convergence is achieved without the modification of problems. The study of these methods was performed in many papers [14–24]. In 2011, the authors in [16, 17] have replaced the second projection onto any closed convex set in the extra-gradient method by one onto a half-space and proposed the subgradient extra-gradient method for variational inequalities in Hilbert spaces, see also [23, 24].

In 1980, L. D. Popov [25] proposed very interesting modification of Arrow-Hurwicz scheme for approximation of saddle points of convex-concave functions in Euclidean space. Let X and Y are closed convex subset of Euclidean spaces \mathbb{R}^d and \mathbb{R}^p , respectively, and $L : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable convex-concave function. Then, the method [25] approximation of saddle points of L on $X \times Y$ can be written as

$$\begin{cases} x_1, \bar{x}_1 \in X, y_1, \bar{y}_1 \in Y, \lambda > 0, \\ x_{n+1} = P_X(x_n - \lambda L'_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n)), \\ y_{n+1} = P_Y(y_n + \lambda L'_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n)), \\ \bar{x}_{n+1} = P_X(x_{n+1} - \lambda L'_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n)), \\ \bar{y}_{n+1} = P_Y(y_{n+1} + \lambda L'_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n)), \end{cases}$$

where P_X and P_Y are metric projection onto X and Y , respectively, L'_1 and L'_2 are partial derivatives. Under some suitable assumptions, L.D. Popov proved the convergence of this method. In recent works [26, 27] proved the convergence of this algorithm for variational inequalities with monotone and Lipschitz operators in infinite-dimensional Hilbert space, and proposed some modifications of this algorithm.

Euclidean distance and projection were used in all these methods. And often this does not allow to take into account the structure of feasible sets and solve problems effectively. A possible solution to the situation is a more flexible selection of the distance for projection onto the feasible set. One of the first successful implementations of this strategy is the work of L. M. Bregman [28] proposed a cyclic non-Euclidean projection method for finding a common point of convex sets. This work has opened the wide scientific field in mathematical programming and nonlinear analysis.

The mirror descent method was proposed in the late 70-ies of the last century by A. S. Nemirovski and D. B. Yudin for solving convex optimization problems [29]. Since then the method has been widely used for solving large-scale problems

[30–32]. For problems with constraints this method can be interpreted as a variant of the subgradient projection method when projecting is understood in the sense of Bregman divergence (Bregman distance) [32]. The mirror descent method allows to take into account the structure of feasible set of optimization problems. For example, for the probability simplex we can use the Kullback–Leibler divergence that is the Bregman divergence built on negative entropy. And then we have explicitly calculated projection operator on the simplex [32]. Versions of the mirror descent method for solving variational inequalities and saddle problems based on the Korpelevich extra-gradient algorithm are studied in [2, 30, 33–35]. These includes also stochastic methods [30, 34].

In this paper we study a new version of the mirror descent method for solving variational inequalities with Lipschitz continuous and pseudo-monotone operators based on the two-step L. D. Popov algorithm [25–27].

The remainder of the paper is organized as follows. In Sect. 2 we formulate the problem and introduce all necessary constructions. In Sect. 3 we propose a new variant of mirror descent method (mirror-prox algorithm) for the variational inequalities and consider several versions for solving more specific problems. The convergence behavior of the proposed algorithm is studied in Sect. 4. In Sect. 5 we perform several numerical experiments to illustrate the computational performance of the proposed algorithm. Finally, Sect. 6 contains concluding remark.

2. PRELIMINARIES

For any finite-dimensional real vector space E , we denote by E^* its dual. We denote the value of a linear function $a \in E^*$ at $b \in E$ by (a, b) . Let $\|\cdot\|$ denote some norm on E (not necessary Euclidean) and $\|\cdot\|_*$ denote the norm on E^* , which is dual to $\|\cdot\|$

$$\|a\|_* = \max \{(a, b) : \|b\| = 1\} .$$

Let C be a nonempty subset of space E , A be a operator, that acts from E to E^* . Consider the variational inequality problem:

$$\text{find } x \in C \text{ such that } (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

The set of solutions of the problem (1) is denoted S .

Assume that the following conditions are satisfied:

- the set $C \subseteq E$ is convex and closed;
- operator $A : E \rightarrow E^*$ is pseudo-monotone and Lipschitz continuous with a constant $L > 0$ on C ;
- the set S is nonempty.

Remark 1. Recall, that operator A on the set C is called pseudo-monotone if for all $x, y \in C$ from $(Ax, y - x) \geq 0$ follows $(Ay, y - x) \geq 0$ [1].

Consider, so-called, dual variational inequality [1]:

$$\text{find } x \in C \text{ such that } (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2)$$

The set of solutions of (2) we will denote as S^d . Inequality (2) sometimes is called weak or dual formulation of (1), and solutions of (2) – weak solutions

of (1) [1]. Indeed, if A is pseudo-monotone we have that $S \subseteq S^d$. With our conditions we have that $S^d = S$. Particularly, the set S is convex and closed [1].

We will set the construction necessary for algorithm formulation. Let function $\varphi : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfies the condition [34]:

- φ is continuous and convex on C . Particularly, the set

$$C^o = \{x \in C : \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$$

is nonempty;

- φ is regular on C^o , i.e. subdifferential $\partial\varphi$ on the set C^o has continuous selector $\nabla\varphi$;
- function φ is strongly convex with respect to the chosen norm $\|\cdot\|$ with constant of strong convexity $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \geq \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) + \frac{\sigma}{2} \|a - b\|^2 \quad \forall a \in C, b \in C^o.$$

Remark 2. Such functions are called «distance generating functions» [34].

Remark 3. The minimization problem

$$(a, y) + \varphi(y) \rightarrow \min_{y \in C}, \quad a \in E^*,$$

has only one solution that lies in C^o .

The Bregman divergence associated with φ is defined as

$$d(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) \quad \forall a \in C, b \in C^o.$$

Remark 4. Consider two main examples. If $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$, where $\|\cdot\|_2$ is Euclidean norm, we will have $d(x, y) = \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$. For probability simplex

$$S_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

and negative Boltzmann-Shannon entropy $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$ (it is strongly convex with respect to the ℓ_1 -norm on S_m) we obtain Kullback-Leibler divergence (KL-divergence)

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln \frac{x_i}{y_i}, \quad x \in S_m, y \in \text{ri}(S_m).$$

Also it is performed useful 3-point identity [32]:

$$d(a, c) = d(a, b) + d(b, c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a - b). \quad (3)$$

From strong convexity φ we can estimate

$$d(a, b) \geq \frac{\sigma}{2} \|a - b\|^2 \quad \forall a \in C, b \in C^o. \quad (4)$$

Suppose, that we have an ability to solve effectively following strongly convex minimization problems:

$$\pi_x(a) = \arg \min_{y \in C} \{-(a, y - x) + d(y, x)\} \quad \forall a \in E^*, x \in C^o.$$

The point $\pi_x(a)$ in Euclidean case coincides with Euclidean metric projection

$$P_C(x + a) = \arg \min_{y \in C} \|y - (x + a)\|_2.$$

For probability simplex case S_m and KL-divergence we have [32]

$$\pi_x(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \dots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \quad a \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \text{ri}(S_m).$$

Operator $\pi_x : E^* \rightarrow C^o$ is called prox mapping.

3. THE ALGORITHM

Let us describe the Mirror-Prox Algorithm for problems (1).

Algorithm 1. Mirror-Prox Algorithm for Variational Inequalities

Choose initial points $x_1 \in C^o$, $y_1 \in C$, and number $\lambda > 0$. Generate the sequence of elements x_n , y_n using iterative scheme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \pi_{x_n}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} &= \pi_{x_{n+1}}(-\lambda A y_n). \end{aligned}$$

The rule how to choose the parameter λ we will specify in the next section.

Remark 5. If $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$, then Algorithm 1 takes the form [25, 26, 40, 42]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n). \end{cases}$$

We will show several specific versions of Algorithm 1.

Consider the variational inequality on the probability simplex:

$$\text{find } x \in S_m \text{ such that } (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in S_m.$$

If we choose KL-divergence we obtain the next version of Algorithm 1:

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = \frac{x_i^n \exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^n \exp(-\lambda(Ay_n)_j)}, & i = 1, \dots, m, \\ y_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} \exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^{n+1} \exp(-\lambda(Ay_n)_j)}, & i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

where $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ is i -th coordinate of vector $Ay_n \in \mathbb{R}^m$, $\lambda > 0$.

In network equilibrium problems, machine learning and game theory we have to work with variational inequalities with direct products of scaled simplex's

$$C = \prod_{k=1}^p r_k S_{m_k} \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k},$$

where $r_k S_{m_k} = \{x \in \mathbb{R}^{m_k} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m_k} x_i = r_k\}$, $r_k > 0$, i.e. with problems

$$\text{find } x \in \prod_{k=1}^p r_k S_{m_k} \text{ such that } (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}. \quad (5)$$

From separable function

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} \frac{x_{k,i}}{r_k} \ln \frac{x_{k,i}}{r_k},$$

where $x = (x_1, \dots, x_p) = \left(\underbrace{x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}}_{x_1}, \dots, \underbrace{x_{p,1}, \dots, x_{p,m_p}}_{x_p} \right) \in \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k}$,

we build Bregman divergence on $\prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}$:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^p d_k(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} \frac{x_{k,i}}{r_k} \ln \frac{x_{k,i}}{y_{k,i}}.$$

Algorithm 1 for variational inequality (5) with such choose of Bregman divergence takes the form:

$$\begin{cases} x_{k,i}^{n+1} = r_k \frac{x_{k,i}^n \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k} x_{k,j}^n \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,j})}, & k = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m_k, \\ y_{k,i}^{n+1} = r_k \frac{x_{k,i}^{n+1} \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k} x_{k,j}^{n+1} \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,j})}, & k = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m_k, \end{cases}$$

where $(Ay_n)_{k,i} - \left(\sum_{t=1}^{k-1} m_t + i \right)$ -th coordinate of vector $Ay_n \in \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k}$, $\lambda > 0$.

Notice, that if for some $n \in \mathbb{N}$ the equality is fulfilled

$$x_{n+1} = x_n = y_n \quad (6)$$

then $y_n \in S$ and the following stationarity condition holds $x_k = y_k = y_n$ for all $k \geq n$. Indeed, the equality $x_{n+1} = \pi_{x_n}(-\lambda Ay_n)$ means that

$$(Ay_n, y - x_{n+1}) + \lambda^{-1} (\nabla \varphi(x_{n+1}) - \nabla \varphi(x_n), y - x_{n+1}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

From (6) we have that $(Ay_n, y - y_n) \geq 0 \quad \forall y \in C$, i.e. $y_n \in S$.

Further, we assume that for all numbers $n \in \mathbb{N}$ the condition (6) doesn't hold. In the following section the convergence of the sequences (x_n) , (y_n) generated by the Algorithm 1 is proved.

4. MAIN RESULTS

We start the analysis of the convergence with the proof of important inequality for sequences (x_n) and (y_n) , generated by the Algorithm 1.

Lemma 1. *Let sequences (x_n) , (y_n) be generated by the Algorithm 1, and let $z \in S$. Then, we have*

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &\leq d(z, x_n) - \left(1 - \left(1 + \sqrt{2} \right) \frac{\lambda L}{\sigma} \right) d(y_n, x_n) - \\ &\quad - \left(1 - \sqrt{2} \frac{\lambda L}{\sigma} \right) d(x_{n+1}, y_n) + \frac{\lambda L}{\sigma} d(x_n, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Proof. We have (using twice the identity (3))

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &= d(z, x_n) - d(x_{n+1}, x_n) + (\nabla \varphi(x_{n+1}) - \nabla \varphi(x_n), x_{n+1} - z) = \\ &= d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) - \\ &\quad - (\nabla \varphi(y_n) - \nabla \varphi(x_n), x_{n+1} - y_n) + (\nabla \varphi(x_{n+1}) - \nabla \varphi(x_n), x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (8)$$

From definition of points x_{n+1} and y_n it follows that

$$\lambda(Ay_n, z - x_{n+1}) + (\nabla \varphi(x_{n+1}) - \nabla \varphi(x_n), z - x_{n+1}) \geq 0, \quad (9)$$

$$\lambda(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (\nabla \varphi(y_n) - \nabla \varphi(x_n), x_{n+1} - y_n) \geq 0. \quad (10)$$

Using inequalities (9), (10) for estimation in (8), we obtain

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &\leq d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) + \\ &\quad + \lambda \{(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, z - x_{n+1})\} = \\ &= d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) + \\ &\quad + \lambda \{(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, z - y_n)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Operator A is pseudo-monotone, so $(Ay_n, z - y_n) \leq 0$. Using this inequality in (11), we get

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &\leq d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) + \\ &\quad + \lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Now we will estimate the term $\lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$. We have

$$\begin{aligned} \lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq \lambda \|Ay_{n-1} - Ay_n\|_* \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \lambda L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \lambda L \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{\lambda L}{2\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + (2 + \sqrt{2}) \|x_n - y_n\|^2 \right\} + \frac{\lambda L}{\sqrt{2}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 = \\ &\leq \frac{\lambda L}{2} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + \lambda L \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \|x_n - y_n\|^2 + \frac{\lambda L}{\sqrt{2}} \|x_{n+1} - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Here we used elementary inequalities

$$ab \leq \frac{\varepsilon^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} b^2, \quad (a + b)^2 \leq \sqrt{2}a^2 + (2 + \sqrt{2})b^2.$$

After estimation the norms in (13) using inequality (4), we obtain

$$\begin{aligned} \lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq \frac{\lambda L}{\sigma} d(x_n, y_{n-1}) + \\ &\quad + \frac{\lambda L}{\sigma} (1 + \sqrt{2}) d(y_n, x_n) + \frac{\lambda L}{\sigma} \sqrt{2} d(x_{n+1}, y_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Applying (14) in (12), we have

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &\leq d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) + \\ &\quad + \lambda L \sigma^{-1} d(x_n, y_{n-1}) + \lambda L \sigma^{-1} (1 + \sqrt{2}) d(y_n, x_n) + \lambda L \sigma^{-1} \sqrt{2} d(x_{n+1}, y_n) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq d(z, x_n) - \left(1 - \lambda L\sigma^{-1}\sqrt{2}\right) d(x_{n+1}, y_n) - \\ &- \left(1 - \lambda L\sigma^{-1}(1 + \sqrt{2})\right) d(y_n, x_n) + \lambda L\sigma^{-1}d(x_n, y_{n-1}), \end{aligned}$$

i.e. the inequality (7). \square

To prove the convergence we need next elementary fact.

Lemma 2. *Let non-negative sequences (a_n) , (b_n) such that*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Then exists the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Now we can formulate the main result.

Theorem 1. *Let $C \subseteq E$ is nonempty convex closed set, operator $A : E \rightarrow E^*$ is pseudo-monotone and Lipschitz continuous with a constant $L > 0$ and $S \neq \emptyset$. Assume that $\lambda \in (0, (\sqrt{2} - 1) \frac{\sigma}{L})$. Then sequences (x_n) , (y_n) , that generated by the Algorithm 1, converge to the solution $\bar{z} \in C$ of the problem (1).*

Proof. Let $z \in S$. Assume

$$\begin{aligned} a_n &= d(z, x_n) + \lambda L\sigma^{-1}d(x_n, y_{n-1}), \\ b_n &= (1 - \lambda L\sigma^{-1}(1 + \sqrt{2})) (d(y_n, x_n) + d(x_{n+1}, y_n)). \end{aligned}$$

The inequality (7) takes the form

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Then from Lemma 2 we can conclude, that it exists the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(z, x_n) + \lambda L\sigma^{-1}d(x_n, y_{n-1}))$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda L\sigma^{-1}(1 + \sqrt{2})) (d(y_n, x_n) + d(x_{n+1}, y_n)) < +\infty.$$

Wherfrom we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, y_n) = 0 \quad (15)$$

and convergence of sequence $(d(z, x_n))$ for all $z \in S$. From (15) follows

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0 \quad (16)$$

and naturally

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (17)$$

From inequality

$$d(z, x_n) \geq \frac{\sigma}{2} \|z - x_n\|^2$$

and (16) follows that sequences (x_n) , (y_n) are bounded.

Consider the subsequence (x_{n_k}) , which converges to some point $\bar{z} \in C$. Then from (16) follows that $y_{n_k} \rightarrow \bar{z}$ and $x_{n_k+1} \rightarrow \bar{z}$. Show that $\bar{z} \in S$. We have

$$(Ay_{n_k}, y - x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda} (\nabla \varphi(x_{n_k+1}) - \nabla \varphi(x_{n_k}), y - x_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (18)$$

Passing to the limit (18) taking into account (17), we get

$$(A\bar{z}, y - \bar{z}) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

i.e. $\bar{z} \in C$.

Now we show that $x_n \rightarrow \bar{z}$ (then from $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ it will follow that also $y_n \rightarrow \bar{z}$). It is known, that the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\bar{z}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla \varphi(x_n), \bar{z} - x_n)\}$$

exists. Because the $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\bar{z}, x_n) = 0$. Wherefrom we have $\|x_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$. \square

Remark 6. If $\sigma = 1$, so we can use the scheme:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pi_{x_n} \left(-\frac{1}{3L} A y_n \right), \\ y_{n+1} = \pi_{x_{n+1}} \left(-\frac{1}{3L} A y_n \right). \end{cases}$$

5. COMPUTATIONAL EXPERIMENTS

This section studies the numerical behavior of Algorithm 1 on a test problem which is related to the PageRank computation.

Consider the optimization problem on the probability simplex $S_N \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$\text{find } x \in S_N \text{ such that } \|Ax - x\|_\infty = \min_{\zeta \in S_N} \|A\zeta - \zeta\|_\infty, \quad (19)$$

with a $N \times N$ column-stochastic matrix A and the ℓ_∞ -norm $\|\cdot\|_\infty$.

We use game approach proposed in [36, 37] for original PageRank problem. Using representation

$$\|Ax - x\|_\infty = \max_{y \in B_1} (y, Ax - x), \quad B_1 = \{y \in \mathbb{R}^N : \|y\|_1 \leq 1\},$$

we transform the optimization problem (19) to the form of a saddle point problem:

$$\min_{x \in S_N} \max_{y \in B_1} (y, Ax - x) = \max_{y \in B_1} \min_{x \in S_N} (y, Ax - x). \quad (20)$$

Saddle point problem (20) is equivalent to the variational inequality

$$\begin{aligned} \text{find } x \in S_N, y \in B_1 \text{ such that } & (A^*y - y, \zeta - x) + \\ & +(x - Ax, \eta - y) \geq 0 \quad \forall \zeta \in S_N \quad \forall \eta \in B_1. \end{aligned} \quad (21)$$

For solving the problem (21) we apply the Algorithm 1. In this case it takes the form

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pi_{x_n}^{S_N} (\lambda(E - A^*) \eta_n), \\ y_{n+1} = \pi_{y_n}^{B_1} (\lambda(A - E) \zeta_n), \\ \zeta_{n+1} = \pi_{x_{n+1}}^{S_N} (\lambda(E - A^*) \eta_n), \\ \eta_{n+1} = \pi_{y_{n+1}}^{B_1} (\lambda(A - E) \zeta_n), \end{cases}$$

where $\pi_x^{S_N} : \mathbb{R}^N \rightarrow S_N$, $\pi_y^{B_1} : \mathbb{R}^N \rightarrow B_1$ are suitable prox mappings, $\lambda > 0$.

For the ℓ_1 -ball B_1 we used only the Euclidean distance (Euclidean setting). For probability simplex S_N we used Euclidean distance or KL-divergence (Entropy setting). Column-stochastic matrices dimensionality 100×100 , 1000×1000 and 2000×2000 are generated randomly. The projections onto

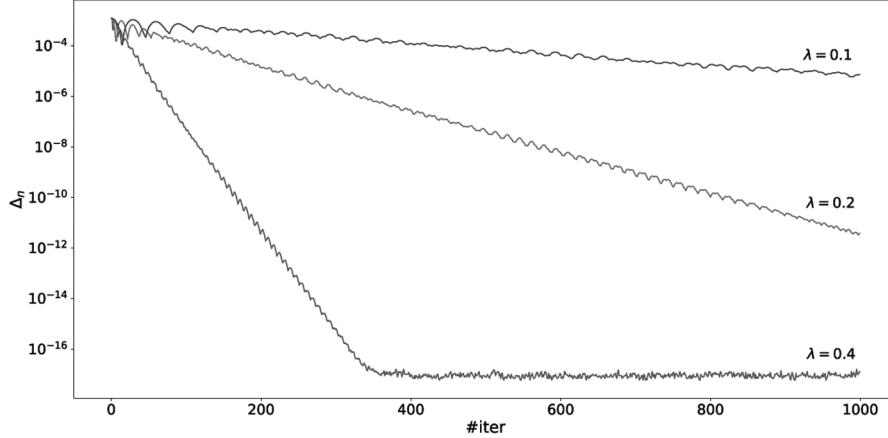


FIG. 1. Δ_n and # iter for $N = 100$, Euclidean–Euclidean, elapsed time 0.26 sec

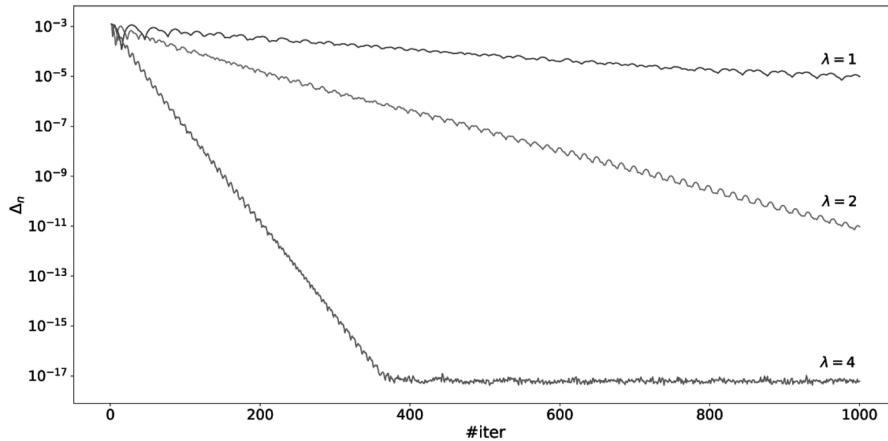


FIG. 2. Δ_n and # iter for $N = 100$, Entropy–Euclidean, elapsed time 0.25 sec

the simplex and ℓ_1 -ball are implemented by the efficient algorithm [38]. The starting points x_1, y_1, ζ_1 and η_1 are chosen as $(1/N, 1/N, \dots, 1/N)$.

To illustrate the numerical behavior of Algorithm 1, we have performed experiments for number of iterations (# iter). Figs. 1–6 describe the behavior of

$$\Delta_n = \|A\zeta_n - \zeta_n\|_\infty$$

generated by Algorithm 1 for various stepsizes λ . In these figures, the y -axes represent for value of Δ_n while the x -axes are for number of iterations.

All programs are implemented on a Asus Laptop Intel(R) Pentium(R) CPU B980 @ 2.40GHz 2.40 GHz, RAM 4.00 GB (using Code::Blocks environment on C++ language).

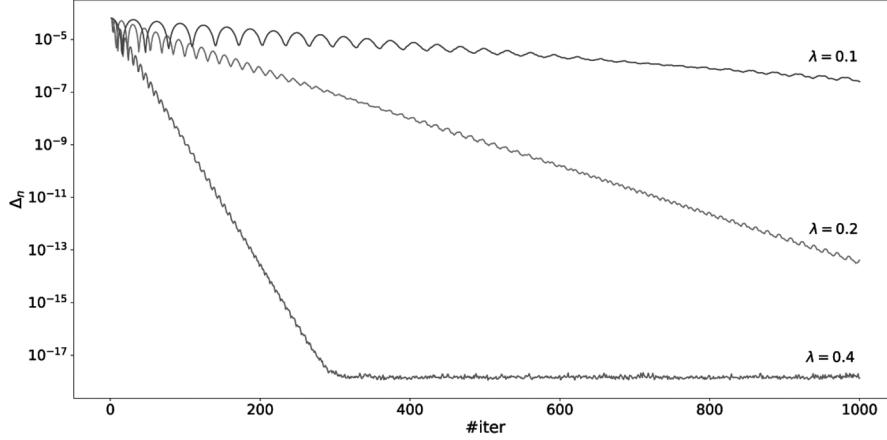


FIG. 3. Δ_n and # iter for $N = 1000$, Euclidean–Euclidean, elapsed time 26.682 sec

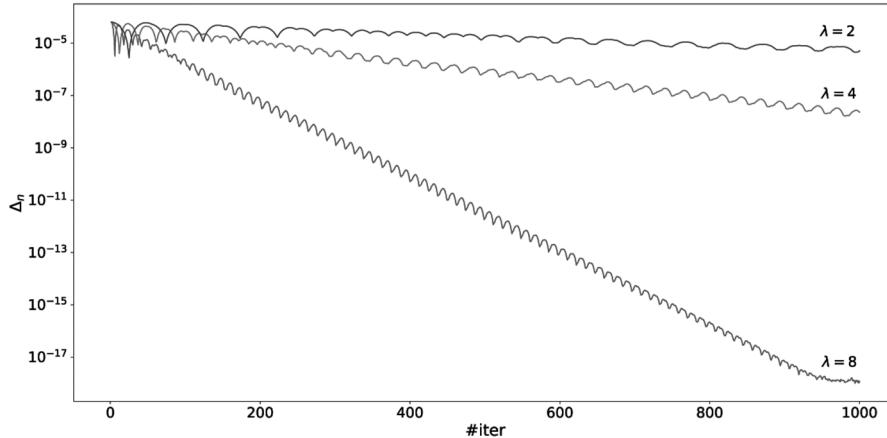


FIG. 4. Δ_n and # iter for $N = 1000$, Entropy–Euclidean, elapsed time 26.238 sec

6. CONCLUSION

In this paper we propose new variant of mirror descent method (mirror-prox algorithm) for solving the variational inequalities with pseudo-monotone operators. This method can be interpreted as the modification of two-step L. D. Popov algorithm with the projection on the feasible set in the sense of Bregman divergence. Our method, like other mirror descent schemes, can effectively take into account the structure of the feasible set of the problem. The main theoretical result is the proof of the theorem about the convergence of the method. Several preliminary numerical experiments have been also performed to illustrate the convergence of the method.

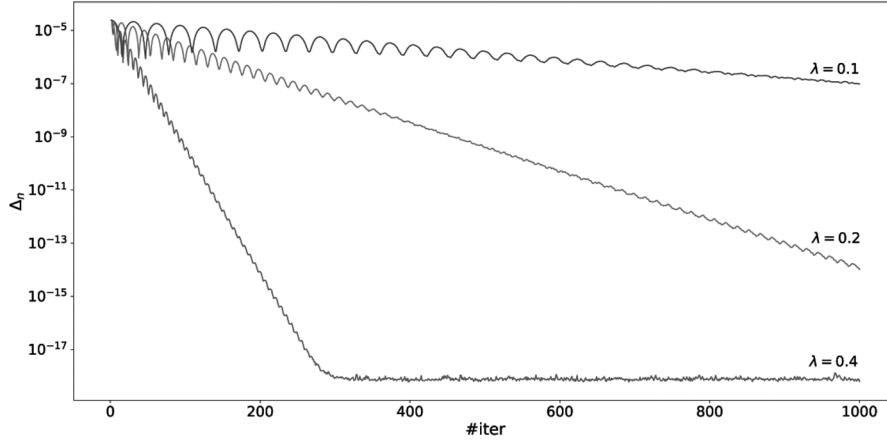


FIG. 5. Δ_n and # iter for $N = 2000$, Euclidean–Euclidean, elapsed time 104.461 sec

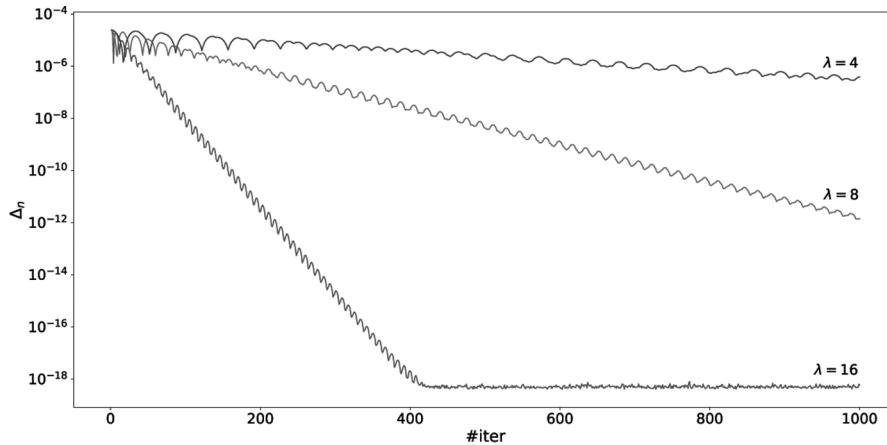


FIG. 6. Δ_n and # iter for $N = 2000$, Entropy–Euclidean, elapsed time 103.510 sec

In one of the future work we plan to consider a randomized version of Algorithm 1 and carry out the corresponding convergence analysis. It will help to have a progress in using this variant the mirror descent method for solving variational inequalities of huge size. Randomized versions of the mirror descent method, based on the extra-gradient algorithm are studied in [30, 34].

Also it is interesting to obtain similar results for the equilibrium programming problems [39–42].

In conclusion we note that, in our opinion, the proposed Algorithm is promising for the further investigation and can be used in practical applications.

This research is supported by the Ministry of Education and Science of Ukraine (project 0116U004777) and grant of the State Fund For Fundamental Research (President's of Ukraine grant, project F74/24921).

REFERENCES

1. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — New York: Springer-Verlag, 2001.
2. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems // Mathematical Programming. — 2007. — Vol. 109. — P. 319–344.
3. Nurminski E. A. The use of additional diminishing disturbances in Fejer models of iterative algorithms // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48. — P. 2154–2161.
4. Stetsyuk P. I. An Approximate Method of Ellipsoids // Cybernetics and Systems Analysis. — 2003. — Vol. 39. — P. 435–439.
5. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — Vol. 42, № 4. — P. 13–18.
6. Semenov V. V. On the convergence of methods for solving two-level variational inequalities with monotone operators // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2010. — № 1 (110). — P. 121–129.
7. Semenov V. V. Two methods for approximating a fixed point of a Fejer operator // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2013. — № 1 (111). — P. 46–56.
8. Chabak L. M., Dudar V. V., Semenov V. V., Vedel Ya. I. Outer approximations method for variational inequalities // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2015. — № 3 (120). — P. 77–84.
9. Denisov S. V., Semenov V. V. Proximal algorithm for two-level variational inequalities: strong convergence // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2011. — № 3 (106). — P. 27–32.
10. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM Journal on Optimization. — 2006. — Vol. 16. — P. 1230–1241.
11. Semenov V. V. An explicit splitting algorithm for variational inequalities with monotone operators // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2013. — № 2 (112). — P. 42–52.
12. Lyashko N. I., Semenov V. V., Chabak L. M. Splitting algorithm for variational inequalities with maximal monotone operators // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2014. — № 3 (117). — P. 131–139.
13. Korpelevich G. M. The extragradient method for finding saddle points and other problems // Matecon. — 1976. — Vol. 12, № 4. — P. 747–756.
14. Khobotov E. N. Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1987. — Vol. 27, № 5. — P. 120–127.
15. Tseng P. A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 38. — P. 431–446.
16. Censor Y., Gibali A., Reich S. The Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Space // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — Vol. 148. — P. 318–335.
17. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — Vol. 47. — P. 631–639.

18. Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Strongly convergent modification of Korpelevich's method for equilibrium programming problems // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2011. — № 1 (104). — P. 10–23.
19. Apostol R. Ya., Grynenko A. A., Semenov V. V. Iterative algorithms for monotone two-level variational inequalities // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2012. — № 1 (107). — P. 3–14.
20. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. SMIA, Vol. 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014. — P. 131–146.
21. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 741–749.
22. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, № 5. — P. 45–56.
23. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L.M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51. — P. 757–765.
24. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, № 7. — P. 31–46.
25. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points // Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. — 1980. — Vol. 28, № 5. — P. 845–848.
26. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 271–277.
27. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — Vol. 61. — P. 193–202.
28. Bregman L. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming // USSR Comput. Math. Phys. — 1967. — Vol. 7. — P. 200–217.
29. Nemirovski A., Yudin D. Problem complexity and method efficiency in optimization. — New York: Wiley. — 1983.
30. Baes M., Burgisser M., Nemirovski A. A randomized mirror-prox method for solving structured large-scale matrix saddle-point problems // SIAM Journal on Optimization. — 2013. — Vol. 23. — P. 934–962.
31. Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography // SIAM Journal on Optimization. — 2001. — Vol. 12. — P. 79–108.
32. Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Operations Research Letters. — 2003. — Vol. 31. — P. 167–175.
33. Auslender A., Teboulle M. Interior projection-like methods for monotone variational inequalities // Mathematical Programming. — 2005. — Vol. 104. — P. 39–68.

34. Juditsky A., Nemirovski A., Tauvel C. Solving variational inequalities with Stochastic Mirror-Prox algorithm. *Stochastic Systems.* — 2011. — Vol. 1, № 1. — P. 17–58.
35. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems // *SIAM Journal on Optimization.* — 2004. — Vol. 15. — P. 229–251.
36. Nazin A. V. Estimating the principal eigenvector of a stochastic matrix: Mirror Descent Algorithms via game approach with application to PageRank problem // In: 49th IEEE Conference on Decision and Control. — 2010. — P. 792–297.
37. Tremba A., Nazin A. Extension of a saddle point mirror descent algorithm with application to robust PageRank // In: 52nd IEEE Conference on Decision and Control. — 2013. — P. 3691–3696.
38. Duchi J., Shalev-Shwartz S., Singer Y., Chandra T. Efficient projections onto the ℓ_1 -ball for learning in high dimensions // In: Proceedings of the 25th international conference on Machine learning. — 2008. — P. 272–279.
39. Denisov S. V. Parallel decomposition scheme for finding a saddle point, and the Nash equilibrium // *Journal of Computational & Applied Mathematics.* — 2010. — № 3 (102). — P. 40–48.
40. Vedel Ya. I., Semenov V. V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming // *Journal of Computational & Applied Mathematics.* — 2015. — № 1 (118). — P. 15–23.
41. Vartuzova M. V., Semenov V. V., Chabak L. M. A new algorithm with Bregman distance for solving equilibrium problem // *Journal of Computational & Applied Mathematics.* — 2016. — № 3 (123). — P. 9–21.
42. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming // In: Boris Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. SOIA, Vol. 115, Springer International Publishing Switzerland, 2016. — P. 315–325.

Received May 4, 2017

COOPERATIVE GAMES IN ASSIGNMENT PROBLEM

SERGEI I. DOTSENKO

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: sergei204@ukr.net

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ В ЗАДАЧАХ О НАЗНАЧЕНИИ

С. И. Доценко

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: sergei204@ukr.net

RESUME. The application of cooperative game theory to assignment problem is considered. Two cooperation models are induced, in which the most/less productive agents are exempt from work. Such models are called „boss game“ and „housekeeper game“ respectively. For the proposed models the Shapley value, the nucleolus and the τ -value are calculated.

KEYWORDS: Assignment problem, cooperative game, Shapley value, nucleolus.

РЕЗЮМЕ. Рассматривается применение теории кооперативных игр к задачам о назначении. Вводятся две постановки задачи кооперації, названные игрой в босса и домохозяина, в которых от выполнения работ освобождается агент с максимальной/минимальной продуктивностью соответственно. Для предложенных моделей вычисляются вектор Шепли, n -ядро и τ -ядро.

Ключевые слова: Задача о назначении, кооперативная игра, вектор Шепли, n -ядро.

ВВЕДЕНИЕ

Теория кооперативных игр рассматривает ситуации, в которых два или более агента имеют своей целью увеличение собственной прибыли либо сокращения расходов путем кооперації. Одним из приложений кооперативной теории игр является „новое прочтение“ классических оптимизационных задач в предположении, что в ней участвуют несколько агентов с самостоятельными интересами. В [1] дан обзор такого рода результатов и рассмотрена кооперація агентов в таких задачах, как задача линейного программирования, задачи теории расписаний, задача коммивояжера, задача построения минимального остовного дерева, задача о размещении и др.

В данной статье рассматривается применение теории кооперативных игр для исследования двух модификаций задачи о назначениях, названные

игрой в домохозяина и игрой в босса. Статья имеет такую структуру. В разделе „предварительные сведения“ дается определение задачи о назначениях и на простом примере иллюстрируется необходимость перераспределения заработка между агентами с целью достижения справедливости. Затем дается определение и рассматриваются основные понятия кооперативных игр, такие, как С-ядро, вектор Шепли, n -ядро и τ -ядро. Затем точечные характеристики кооперативной игры (такие, как вектор Шепли, n -ядро и τ -ядро) вычисляются в явном виде для „игры в домохозяина“ и „игры в босса“ .

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача о назначениях является одной из основных задач комбинаторной оптимизации. Она состоит в нахождении максимально (либо же минимально) взвешенного паросочетания на двудольном графе с весами ребер. В наиболее общей форме задача формулируется так: пусть есть n агентов и n заданий. Нужно распределить задания для агентов так, чтобы каждый агент выполнял ровно одно задание и каждое задание выполнялось ровно одним агентом так, чтобы суммарная эффективность всех работ была бы максимальной (либо же суммарные затраты были бы минимальными).

Наиболее известный алгоритм, решающий задачу о назначениях, в котором время решения задачи полиномиально относительно количества агентов — это так называемый венгерский алгоритм или алгоритм Эгевари.

Однако, после решения задачи может оказаться, что оптимальное решение в определенной степени несправедливо по отношению к агентам. Рассмотрим простой пример — задачу о назначениях 2×2 .

		Работы	
		1	2
Агенты	A		
	B	$\begin{pmatrix} 6^* & 2 \\ 7 & 5^* \end{pmatrix}$	

Очевидно, что назначение A на 1-ю работу, а B на 2-ю дает суммарную эффективность $6 + 5 = 11$, что больше, чем при другом возможном назначении: $7 + 2 = 9$. Таким образом, A получает 6, B получает 5. Это выглядит несправедливо, поскольку B выполняет лучше все работы, чем A . Одним из возможных способов устранения такого рода несправедливости — это рассмотрение задачи о назначениях и перераспределение заработков.

2. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Кооперативная игра — это пара (N, V) , где $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков V — отображение $V : 2^N \rightarrow R$ с условием $V(\emptyset) = 0$. Отображение ставит в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ действительное число $V(S)$, называемое ценой S .

Ядром игры (N, V) называется множество

$$C(V) = \{x \in R^N \mid x(S) \leq V(S)\}$$

для всех $S \subseteq N$ и $x(N) = V(N)$, где $x(S)$ означает $\sum_{j \in S} x_j$.

Ядро игры может быть пустым.

Игра (N, V) называется монотонной, если $V(S) \subseteq V(T)$ для всех $S, T \subseteq N$ таких, что $S \subseteq T$.

Игра (N, V) называется супермодулярной (или супераддитивной), если $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$ для всех $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$.

Игра (N, V) называется выпуклой, если $V(S) + V(T) \leq V(S \cup T) + V(S \cap T)$ для всех $S, T \subseteq N$.

Вкладом игрока i в коалицию S называется величина

$$Add(i, S) = V(S \cup i) - V(S).$$

Говорят, что игра (N, V) обладает эффектом „снежного кома“, если $Add(i, S) \leq Add(i, T)$ для всех $S \subseteq T$, $i \notin T$.

Оказывается, что условие выпуклости и эффект „снежного кома“ эквивалентны (см. например [2]), но как правило эффект „снежного кома“ более легко проверить.

Решением кооперативной игры называется отображение $F : (N, V) \rightarrow R^N$. F ставит в соответствие каждой кооперативной игре n -мерный вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, где i -я компонента x_i означает заработок i -го игрока.

Наиболее известным решением кооперативной игры является ВШ, вычисляемый следующим образом

$$\varphi_i(N, V) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} Add(i, S).$$

Данная формула имеет простую вероятностную интерпретацию — i -я компонента ВШ — это вклад i -го игрока в „случайную коалицию случайного размера“. Это означает, что если вначале разыграть размер коалиции t согласно равномерного дискретного распределения от 0 до $n-1$, затем сформировать коалицию из t игроков, выбрав их случайным образом из $\{N/t\}$, то величина $\varphi_i(N, V)$ будет равна математическому ожиданию вклада i -го игрока в коалицию, разыгранную таким образом.

ВШ можно интерпретировать еще и по другому. Пусть $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка игроков, $\pi(i)$ — позиция i -го игрока в π , $S(i, \pi) = \{k \mid \pi(k) < \pi(i)\}$ — множество предшественников i в π . Оказывается, что i -я компонента ВШ — это вклад i -го игрока в коалицию, состоящую из его предшественников, усредненный по всем возможным $n!$

перестановкам, т.е.

$$\varphi_i(N, V) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} Add(i, S(i, \pi)).$$

Оказывается, что если игра выпуклая, то ВШ всегда принадлежит ядру, и более того, является „центром масс“ ядра в геометрическом смысле. Если же игра не выпуклая, то, к сожалению, ВШ может не принадлежать ядру, даже если ядро не пусто.

Другими известными решениями кооперативных игр являются n -ядро и τ -значение.

3. τ -ЗНАЧЕНИЕ

Понятие τ -значения было введено в [3] как компромисс между максимальными и минимальными заработками игроков в эффективном распределении. Вектор $M(v)$, называемый N -маргинальным вектором с координатами $M_i := V(N) - V(N/i)$, равными маргинальными вкладам игроков в гранд-коалицию. Это значит, что i -й игрок не может претендовать на заработок больший, чем M_i . Действительно, пусть i -й игрок претендует на $M_i + \Delta$. Значит, суммарный заработка коалиции N/i равен $V(N/i) - \Delta$. Значит, у этой коалиции есть мотив выйти из гранд-коалиции и получить больший заработка, равный $V(N/i)$. Значение $R_v(S, i) := V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j$ называется остаточным заработка i -го игрока в коалиции S . Вектором минимальных прав называется вектор с координатами $m_i := \max_{S: i \notin S} (V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j)$. Это значит, что i -му игроку нельзя платить меньше, чем m_i , поскольку в противном случае он подговорит членов коалиции $S_0 = \arg \max_{S: i \notin S} (V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j)$ выйти из гранд-коалиции, пообещав каждому из них M_j , оставив себе m_i .

τ -значение определяется как пересечение отрезка с концами в точках \vec{m} и \vec{M} и гиперплоскости эффективных решений $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$.

4. n -ЯДРО

Понятие n -ядра было введено в [4]. Его определение базируется на определениях эксцесса и лексикографического минимума.

Определение 1. Эксцессом коалиции называется величина

$$e(x, S) = V(S) - \sum_{i \in S} x_i, \quad \vec{x} \in D(V), S \in 2^N,$$

где $D(V)$ — множество распределений $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию эффективности и индивидуальной рациональности, т. е., $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$ и $x_i \geq V(i)$, $i = 1, n$ соответственно.

Эту величину можно интерпретировать как меру сожаления того, что суммарный заработка коалиции недостаточно большой.

Определение 2. Вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение 3. n -ядром кооперативной игры называется эффективное распределение $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, для которого достигается лексикографический эквивалент на множестве всех непустых коалиций $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, выписанный в убывающем порядке.

Оказывается, что для любой кооперативной игры n -ядро существует и единственное. Кроме того, если C -ядро игры не пусто, то n -ядро гарантированно принадлежит ему. Если C -ядро непусто, то n -ядро можно найти как элемент C -ядра, приняв во внимание, что все эквиваленты будут отрицательными. Тогда можно записать вспомогательную задачу максимизации минимума эквивалентов, взятых с обратным знаком на множестве всех непустых коалиций, которая по сути является задачей линейного программирования

$$\Psi(\vec{x}) = \min_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (-ex(\vec{x}, S)) \rightarrow \max, \quad \vec{x} \in Core.$$

Если окажется, что решение данной задачи единственно, то это и есть n -ядро. Если нет, то составляется редуцированная задача, допустимой областью которой является множество оптимальных решений предыдущей задачи и т.д.

5. ИГРА В ДОМОХОЗЯИНА

Пусть задано кооперативную игру с множеством игроков $N = \{1, \dots, n\}$ и пусть i -й игрок работает с продуктивностью a_i . Не нарушая общности рассуждений, можно упорядочить игроков в неубывающем порядке по продуктивностям, так, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Предположим, что в произвольной коалиции S каждый из игроков данной коалиции, кроме одного, например k -го, может работать с заданной продуктивностью при условии, что k -й игрок освобожден от своей работы, т.е. работает с нулевой продуктивностью. Данную ситуацию можно интерпретировать таким образом: один из членов коалиции освобождается от работы для того, чтобы обеспечить жизнедеятельность всей коалиции, например, работая поваром или занимаясь обеспечением быта остальных игроков. Пусть освобожденный игрок называется домохозяином, а соответствующая кооперативная игра — игрой в домохозяина.

Такая игра может иметь интересную историческую интерпретацию. На ранней стадии промышленной революции некоторые гильдии ремесленников следовали такой традиции для повышения культурного уровня работников. Один из членов гильдии читал остальным вслух книги, в то время как они работали. За это каждый из членов гильдии отдавал чтецу часть своего заработка.

Легко видеть, что для каждой коалиции наилучшим решением будет назначить домохозяином наименее квалифицированного члена. Назовем наименее продуктивного члена коалиции домохозяином, а всех остальных

— работниками. Таким образом, характеристическая функция игры имеет вид

$$V(S) = \sum_{i \in S} a_i - \min_{i \in S} (a_i). \quad (1)$$

Кооперативная игра с такой характеристической функцией обладает следующими свойствами:

1. Ядро игры не пусто.

Доказательство. Вектор платежей $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$, в котором наихудший работник ничего не получает, а все остальные игроки получают величины, равные своим продуктивностям, принадлежит ядру. \square

2. Характеристическая функция игры обладает свойством супераддитивности, т.е.,

$$(\forall S_1, S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset) \left(V(S_1 \cup S_2) \geq V(S_1) + V(S_2) \right).$$

Доказательство. Пусть a' , a'' — минимальные продуктивности игроков в S_1, S_2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} V(S_1 \cup S_2) &= \sum_{i \in S_1 \cup S_2} (a_i) - \min(a_i), \\ V(S_1) + V(S_2) &= \sum_{i \in S_1 \cup S_2} (a_i) - a' - a'' \leq V(S_1 \cup S_2). \end{aligned}$$

\square

3. Условие выпуклости характеристической функции может нарушаться.

$$(\forall S_1, S_2) \left(V(S_1 \cup S_2) + V(S_1 \cap S_2) \geq V(S_1) + V(S_2) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим пример с тремя игроками. Пусть

$$a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a > b > c, S_1 = \{1, 3\}, S_2 = \{1, 2\},$$

тогда

$$S_1 \cup S_2 = \{1, 2, 3\}, S_1 \cap S_2 = \{1\},$$

$$V(S_1 \cup S_2) + V(S_1 \cap S_2) = (a + b) + 0 = a + b,$$

$$V(S_1) + V(S_2) = a + a = 2a.$$

Таким образом, условие выпуклости нарушается. \square

6. ВЕКТОР ШЕПЛИ

Вначале предположим, что продуктивности никаких двух из игроков не совпадают между собой, т.е., $a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0$.

Вычислим ВШ, исходя из одного из определений, а именно как среднее значение маргинальных вкладов, усредненное по всем возможным $n!$ перестановкам игроков.

Пусть $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка игроков, $\pi(i)$ — номер позиции игрока i в перестановке π , $S(\pi, k) = \{j | \pi(j) < \pi(i)\}$ — множество игроков, предшествующих k в перестановке π , $Add(k, \pi) = V(S(\pi, k) \cup k) - V(S(\pi, k))$ — маргинальный вклад игрока в π (или, другими словами, приращение характеристической функции при добавлении k в коалицию, состоящую из игроков, предшествующих ему в перестановке π)

$$\sigma_k = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} Add(k, \pi). \quad (2)$$

Обозначим компоненту ВШ k -го игрока через σ_k .

Вначале найдем σ_1 . Согласно (1), первый игрок вносит нулевой вклад во все перестановки, в которых он стоит первым (т.е., $\pi(1) = 1$, доля таких перестановок равна $\frac{1}{n}$) и вклад a_1 во все остальные перестановки (т.е., $\pi(1) \neq 1$, доля таких перестановок равна $\frac{n-1}{n}$), отсюда $\sigma_1 = \frac{n-1}{n} a_1$.

Найдем компоненты ВШ при $k \geq 2$. Зафиксируем k и разобьем все множество перестановок на три непересекающиеся группы, образующие полную группу перестановок.

Первая группа — это перестановки, в которых $\pi(k) = 1$. Доля таких перестановок равна $\frac{1}{n}$ и вклад k -го игрока в такие перестановки равен $Add(k, \pi) = 0$.

Вторая группа — это группа, в которой среди игроков $(k+1), \dots, n$ хотя бы один стоит левее k (поскольку доля дополнительной группы, в которой k стоит левее всех игроков $(k+1), \dots, n$, равна $\frac{1}{n-k+1}$), тогда искомая доля перестановок равна $\frac{n-k}{n-k+1}$.

Для всех перестановок второй группы k -й игрок, присоединяясь к коалиции, становится работником, поэтому $Add(k, \pi) = a_k$.

Третья группа — это перестановки, в которых k стоит не на первом месте и все игроки $(k+1), \dots, n$ стоят правее k . Для любой перестановки из данной группы всегда найдется по крайней мере один игрок из множества $\{1, \dots, k-1\}$, стоящих левее k .

Разобьем множество перестановок третьей группы на $k-1$ непересекающихся подгрупп. В i -ю подгруппу отнесем все перестановки, в которых i стоит левее k , а все игроки из множества $\{i+1, \dots, k-1; k+1, \dots, n\}$ — правее (или формально $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j), j \in \{i-1, \dots, k-1\} \cup \{k+1, \dots, n\}$).

Поскольку на множестве перестановок i -й подгруппы третьей группы налождается условие относительно взаимного расположения $(n-k+1)$ игроков, причем позиции двух игроков (а именно i и k) фиксированы, а порядок остальных игроков произвольный, то доля таких

перестановок среди общего числа равна

$$\frac{(n-i-1)!}{(n-i+1)!} = \frac{1}{(n-i)(n-i+1)}.$$

Для всех перестановок третьей группы k -й игрок, присоединяясь к коалиции, становится домохозяином, высвобождая i -го игрока, который переходит из домохозяина в работники, поэтому $Add(k, \pi) = a_i$.

Таким образом,

$$\sigma_k = \frac{n-k}{n-k+1} a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} a_i. \quad (3)$$

Заметим, что найденное как отдельный случай значение σ_1 может быть также найдено исходя из данной формулы, если полагать сумму равной нулю в случае, когда нижний индекс суммирования превышает верхний.

Покажем теперь, что данная формула вычисления компонент ВШ применима и в случае, когда некоторые из продуктивностей игроков совпадают. Для этого достаточно показать, что $\sigma_k = \sigma_{k+1}$ при $a_k = a_{k+1}$ для всех $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Пусть $a_2 = a_1$, тогда $\sigma_2 = \frac{n-2}{n-1} a_1 + \frac{1}{(n-1)n} a_1 = \frac{n-1}{n} a_1 = \sigma_1$.

Пусть $a_{k+1} = a_k$, $k = 2, \dots, n-1$, тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \frac{n-k-1}{n-k} a_k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} a_i = \\ &= \left[\frac{n-k-1}{n-k} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} \right] \cdot a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} a_i = \\ &= \frac{n-k}{n-k+1} a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} a_i = \sigma_k. \end{aligned}$$

Частные случаи (3) при $n = 2, 3$ и 4 имеют вид

$$n = 2 : \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} a_1, \quad n = 3 : \sigma_1 = \frac{2}{3} a_1, \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{2} a_2,$$

$$n = 4 : \sigma_1 = \frac{3}{4} a_1, \sigma_2 = \frac{1}{12} a_1 + \frac{2}{3} a_2, \sigma_3 = \sigma_4 = \frac{1}{12} a_1 + \frac{1}{6} a_{21} + \frac{1}{2} a_3.$$

Заметим, что ВШ может и не принадлежать C -ядру. Действительно, пусть $n \geq 3$, $a_1 = 1$; $a_i = 0$, $i = 2, \dots, n$. Тогда из (3) находим: $\sigma_1 = \frac{n-1}{n}$; $\sigma_i = \frac{1}{n(n-1)}$, $i = 2, \dots, n$, и для коалиций, содержащих первого и любого другого игрока, нарушается условие устойчивости: $(\sigma_1 + \sigma_i = \frac{n-2}{n-1}) < < (V(1 \cup i) = 1)$.

7. τ -ЯДРО

Рассмотрим так называемый маргинальный вектор $M(v)$ с координатами $M_i := V(N) - V(N/i)$, тогда $\vec{M} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-1})$.

Вектор минимальных прав $m(V)$ — это вектор с координатами

$$m_i := \max_{S:i \in S} \left(V(S) - \sum_{j \in S/i} M_j \right). \quad (4)$$

Вычислим компоненты данного вектора в явном виде.

Для n -го игрока все выражения, стоящие под знаком максимума в (4), равны нулю, следовательно $m_n = 0$

$$V(S) - \sum_{j \in S \setminus n} M_j = \sum_{j \in S \setminus n} a_j - \sum_{j \in S \setminus n} a_j = 0.$$

Вычислим остальные компоненты m_i .

Пусть $n \notin S$, тогда

$$V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j = \left(\sum_{j \in S} a_j - \min_{j \in S} a_j \right) - \left(\sum_{j \in S} a_j - a_i \right) = a_i - \min_{j \in S} a_j.$$

Данное выражение достигает максимума, когда $(n-1) \in S$ и равно $a_i - a_{n-1}$.

Пусть $n \in S$, тогда

$$V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j = \left(\sum_{j \in S \setminus n} a_j \right) - \left(\sum_{j \in S \setminus n} a_j - a_i + a_{n-1} \right) = a_i - a_{n-1}.$$

Таким образом, $m_i = a_i - a_{n-1}$,

$$\vec{m} = (a_1 - a_{n-1}, a_2 - a_{n-1}, \dots, a_{n-2} - a_{n-1}, 0, 0),$$

$$\vec{l} = \vec{M} - \vec{m} = (a_{n-1}, \dots, a_{n-1}) \sim (1, \dots, 1).$$

τ -ядро находится как пересечение луча

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{l}t = (a_1 - a_{n-1} + t, \dots, a_{n-2} - a_{n-1} + t, t, t)$$

и гиперплоскости эффективных решений

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = V(N) = a_1 + \dots + a_{n-1}$$

и равно

$$\tau = \left(a_1 - \frac{a_{n-1}}{n}, a_2 - \frac{a_{n-1}}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a_{n-1}, \frac{n-1}{n}a_{n-1} \right).$$

8. n -ЯДРО

Покажем, что в точке τ к тому же достигается и лексикографический минимум экспессов на наборе множеств $2^N \setminus N$, упорядоченных в порядке убывания.

Заметим, что $\sum_{i \in S} \tau_i = \sum_{i \in S} a_i - \frac{|S|}{n}a_{n-1}$, тогда

$$ex(\tau, S) = V(S) - \sum_{i \in S} \tau_i = \frac{|S|}{n}a_{n-1} - \min_{i \in S}(a_i).$$

Данное выражение достигает максимума, равного $-\frac{1}{n}a_{n-1}$ для всех $(n-1)$ -элементных коалиций, а для всех прочих коалиций значение эксцесса будет строго меньше, чем $-\frac{1}{n}a_{n-1}$.

Пусть τ' — произвольный эффективный дележ, отличный от τ , тогда τ' можно представить в виде $\tau' = \tau + (u_1, \dots, u_n)$, где $\sum u_i = 0$, $|u_1| + \dots + |u_n| > 0$, таким образом найдется такой индекс k , что $u_k > 0$, тогда

$$ex(\tau', N \setminus k) = V(N \setminus k) - \sum_{i \in N \setminus k} \tau'_i = ex(\tau, N \setminus k) + u_k = -\frac{1}{n}a_{n-1} + u_k.$$

Значит, в дележе τ' существует коалиция, в которой эксцесс превышает максимальный эксцесс в дележе τ . В силу произвольности выбора τ' приходим к заключению, что лексикографический минимум на множестве упорядоченных в порядке убывания эксцессов достигается при дележе τ , т.е., τ является n -ядром для данной кооперативной игры.

9. ИГРА В БОССА

Пусть в игре, подобно ранее рассмотренной игре в домохозяина, принимает участие n игроков с продуктивностями $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Пусть первый игрок, который имеет максимальную продуктивность, назначается боссом. Босс сам ничего не производит, он лишь контролирует работу остальных. Тогда характеристическая функция игры имеет вид

$$V(S) = \sum_{i \in S} a_i - \max_{i \in S} (a_i). \quad (5)$$

Покажем, что такая характеристическая функция является выпуклой. Для этого нужно проверить условие выпуклости

$$(\forall S, T) (V(S) + V(T) \leq V(S \cup T) + V(S \cap T)).$$

Подставляя (5) в данное неравенство, имеем

$$\sum_{i \in S} a_i - \max_{i \in S} a_i + \sum_{i \in T} a_i - \max_{i \in T} a_i \leq \sum_{i \in S \cup T} a_i - \max_{i \in S \cup T} a_i + \sum_{i \in S \cap T} a_i - \max_{i \in S \cap T} a_i.$$

Это равносильно неравенству

$$\max_{i \in S} a_i + \max_{i \in T} a_i \geq \max_{i \in S \cup T} a_i + \max_{i \in S \cap T} a_i.$$

Заметим, что оба слагаемых в левой части неравенства не меньше, чем второе слагаемое правой части, и, кроме того, либо первое, либо второе слагаемое левой части равно первому слагаемому правой части, следовательно, данное неравенство и равносильное ему условие справедливо.

Выпуклость функции (5) можно также доказать, доказав выполнение эквивалентного условию выпуклости так называемого „эффекта снежного кома“

$$(\forall S \subset T, k \notin T) (Add(k, S) \leq Add(k, T)). \quad (6)$$

Для характеристической функции (2) маргинальный вклад игрока в коалицию, если полагать, что максимум по пустой коалиции равен нулю, представим в виде: $Add(k, S) = \min \left(\max_{i \in S} (a_i); a_k \right)$. И поскольку $(S \subset T) \Rightarrow \left(\max_{i \in S} (a_i) \leq \max_{k \in S} (a_k) \right)$, то эффект снежного кома (6) и эквивалентное ему условие выпуклости выполняется.

10. ВЕКТОР ШЕПЛИ

Подобно предыдущему случаю предположим, что продуктивности никаких двух из игроков не совпадают между собой, т.е., $a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0$. Снова вычислим ВШ, как среднее значение маргинальных вкладов, усредненное по всем возможным $n!$ перестановкам игроков.

Если в перестановке π хотя бы один игрок с номером, меньшим k , входит в перестановку раньше k (т.е., $(\exists j) ((j < k) \wedge (\pi(j) < \pi(k)))$), то маргинальный вклад k в π равен $Add(k, \pi) = a_k$ и доля таких перестановок равна

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Множества перестановок будем описывать с помощью вектора, в котором если элементы разделены точкой с запятой, то их взаимное расположение существенно, и запятой в противном случае, например, запись $(k+1; k; 1, \dots, k-1)$ означает совокупность условий $\pi(k+1) < \pi(k) < \pi(j)$, $j = 1, \dots, k-1$. Доля таких перестановок равна $\frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)}$ и $Add(k, \pi) = a_{k+1}$.

Доля перестановок вида $(k+2; k; 1, \dots, k-1, k+1)$ равна $Add(k, \pi) = a_{k+2}$, и т.д., доля перестановок вида

$$(n; k; 1, \dots, k-1, .k+1, \dots, n-1)$$

равна $\frac{1}{(n-1)n}$ и $Add(k, \pi) = a_n$ и наконец, доля перестановок вида

$$(k; 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

(т.е., перестановок, в которых k -й элемент стоит на первом месте, а порядок остальных произвольный) равна $\frac{1}{n}$ и $Add(k, \pi) = 0$.

Поскольку все множество перестановок было разбито на непересекающиеся группы, образующие полную группу перестановок, то k -я компонента ВШ равна сумме произведений долей перестановок на соответствующие им маргинальные вклады

$$\sigma_k = \frac{k-1}{k} a_k + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j(j-1)} a_j. \quad (7)$$

Покажем теперь, что данная формула вычисления компонент ВШ применима и в случае, когда некоторые из продуктивностей игроков совпадают. Для этого достаточно показать, что $\sigma_k = \sigma_{k+1}$ при $a_k = a_{k+1}$ для всех $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Пусть $a_{k+1} = a_k$, $k = 1, \dots, n - 1$, тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{k+1} &= \frac{k}{k+1}a_k + \sum_{j=k+2}^n \frac{1}{j(j-1)}a_j = \\ &= \left[\frac{k}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)} \right] \cdot a_k + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j(j-1)} \cdot a_j = \frac{k-1}{k}a_k + \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j(j-1)}a_j = \sigma_k.\end{aligned}$$

Частные случаи (7) при $n = 2, 3$ и 4 имеют вид

$$\begin{aligned}n = 2 : \sigma_1 &= \sigma_2 = \frac{1}{2}a_2, n = 3 : \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{6}a_3, \sigma_3 = \frac{2}{3}a_3, \\ n = 4 : \sigma_1 &= \sigma_2 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{12}a_4, \sigma_3 = \frac{2}{3}a_3 + \frac{1}{12}a_4, \sigma_4 = \frac{3}{4}a_4.\end{aligned}$$

11. n -ЯДРО

В данной задаче нахождение формулы для вычисления n -ядра в символьном виде для произвольного числа игроков представляется затруднительным. Оказывается, что даже для случая трех игроков n -ядро вычисляется по двум различным формулам в зависимости от соотношения параметров a_i . Воспользуемся формулой вычисления n -ядра для кооперативной игры трех игроков в 0-1-редуцированной форме, которая была приведена в [6, с. 316].

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $V(1) = V(2) = V(3) = 0$, $V(1, 2) = c_3$, $V(1, 3) = c_2$, $V(2, 3) = c_1$, $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq 1$, $V(1, 2, 3) = 1$. Тогда

$$Nc = \begin{cases} 100\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ if } c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \frac{1}{3}; \\ \left(\frac{1+c_3}{4}, \frac{1+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2}\right), \text{ if } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 \leq \frac{1-c_3}{2}; \\ \left(\frac{c_2+c_3}{2}, \frac{1-c_2}{2}, \frac{1-c_3}{2}\right), \text{ if } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 > \frac{1-c_2}{2}, c_2 \leq \frac{1-c_3}{2}; \\ \left(\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}, \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2}\right); \\ \text{if } c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 + c_2 \leq \frac{1+c_3}{2}; \\ \left(\frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3}\right); \\ \text{if } c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 + c_2 > \frac{1+c_3}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

Применимально к игре в босса $c_3 = \frac{a_2}{a_2+a_3}$, $c_2 = c_1 = \frac{a_3}{a_2+a_3}$. Подставляя данные значения c_1, c_2, c_3 в (8), получаем, что первые три условия не могут выполняться ни при каких значениях a_2, a_3 , а выполняются четвертое

либо пятое условие при $a_3 \leq \frac{2}{3}a_2$ либо $a_3 > \frac{2}{3}a_2$ соответственно. При этом значение n -ядра исходной характеристической функции равно

$$Nc = \begin{cases} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4}; \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4}; \frac{a_3}{2} \right), \text{ if } a_3 \leq \frac{2}{3}a_2; \\ \left(\frac{2}{3}a_2; \frac{2}{3}a_2; a_3 - \frac{1}{3}a_2 \right), \text{ if } a_3 > \frac{2}{3}a_2. \end{cases} \quad (9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Curiel I. Cooperative combinatorial games. Глава из сборника Springer optimization and it's applications — Springer, 2008. — V. 17.— P. 131–159.
2. Moulin H. Axioms of cooperative decision making — Cambridge university press, 1991. — 332 p.
3. Tijs S. Bounds for the core of a game and T-value. Game theory and Mathematical Economics — Amsterdam: North Holland, 1981. — P. 123–132.
4. Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game // SI AM Journal of applied mathematics. — 1969. — V. 17. — P. 1163–1170.
5. Tijs S. Introduction to Game theory — Hindustan Book Agency, 2003. — 176 p.
6. Мазалов В. Математическая теория игр и проложения — Спб., изд-во „Лань“, 2010. — 446 с.

Поступила 01.06.2017

**DYNAMIC SYSTEMS FOR FINDING BEST APPROXIMATION
PAIRS RELATIVE TO TWO SMOOTH CURVES IN
EUCLIDEAN SPACE**

S. S. ZUB¹, N. I. LYASHKO², V. V. SEMENOV¹

¹Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: stah@univ.kiev.ua,
volodya.semenov@gmail.com

²Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev,
Ukraine, E-mail: dept165@insyg.kiev.ua

**ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ДЛЯ ПОШУКУ НАЙБЛИЖЧИХ
ПАР НА ДВОХ ГЛАДКИХ КРИВИХ В ЕВКЛІДОВОМУ
ПРОСТОРІ**

С. С. Зуб¹, Н. І. Ляшко², В. В. Семенов¹

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: stah@univ.kiev.ua, volodya.semenov@gmail.com

²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
E-mail: dept165@insyg.kiev.ua

ABSTRACT. We consider the method of finding a nearest pair of points on two smooth curves in the Euclidean space, i.e., two points which achieve the minimum distance between two curves, which uses the model of physical interaction of material points with a given potential energy. The Lagrange and Hamilton equations of motion of points are obtained. Approximate integration of these equations gives algorithms for approximation of the nearest pair.

KEYWORDS: smooth curves, nearest pair, algorithm, dynamic system, Lagrange equation, Hamilton equation.

РЕЗЮМЕ. У роботі розглянуто метод пошуку найближчих пар на двох гладких кривих в евклідовому просторі, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Одержано рівняння Лагранжа та Гамільтона руху точок, наближене інтегрування яких дає алгоритми апроксимації найближчої пари.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гладкі криві, найближча пара, алгоритм, динамічна система, рівняння Лагранжа, рівняння Гамільтона.

1. ВСТУП

Нехай A, B — підмножини евклідового простору \mathbb{R}^n . Однією з популярних оптимізаційних задач є пошук найближчих пар елементів множин A ,

B (або обчислення відстані між A і B):

$$\text{знайти } a_0 \in A, b_0 \in B : \|a_0 - b_0\| = \min_{a \in A, b \in B} \|a - b\|. \quad (1)$$

Ефективне розв'язання задачі (1) є ключовим елементом у багатьох прикладних питаннях (наприклад, при створенні планувальників маршрутів у робототехніці). Тому природно, що багато дослідників приділяли свою увагу задачі (1) для різних класів множин [1–10].

У даній роботі ми розглянемо задачу (1) для двох гладких кривих у тривимірному евклідовому просторі та запропонуємо метод її розв'язання, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Схожу ідею використати фізичну силу Кулона та рівняння механіки Ньютона із зв'язками, але для пошуку найближчих пар на двох гладких кривих в евклідовому просторі, реалізовано в методі „заряджених кульок“ [8–10]. Зауважимо, що мабуть найбільш відомим прикладом використання фізичної аналогії в оптимізаційній алгоритміці є загально відомий метод „heavy ball“ [11].

Використання формалізмів Лагранжа та Гамільтона, які досягли високо-го рівня розвитку в класичній механіці, а надалі стали загально визнанною відправною точкою для отримання рівнянь у сучасній фізиці, дозволяє максимально узагальнити методи фізичної аналогії до згаданих вище задач оптимізації. Зокрема, на цьому шляху стало можливим реалізувати ідею застосування потенціалів довільного типу в задачах оптимізації, поставлених третім автором даної роботи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

У 3-вимірному евклідовому просторі \mathbb{R}^3 розглянемо дві гладкі параметризовані криві

$$\vec{x}(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)), \quad \vec{y}(\beta) = (y_1(\beta), y_2(\beta), y_3(\beta)),$$

де $\vec{x}, \vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — неперервно диференційовні вектор-функції скалярних параметрів α, β відповідно. Будемо шукати найближчі пари точок, що лежать на кривих. Тобто, розглянемо задачу мінімізації

$$\|\vec{x}(\alpha) - \vec{y}(\beta)\| \rightarrow \min_{\alpha, \beta}.$$

У роботі пропонується метод розв'язання цієї задачі, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із потенціальною енергією загального вигляду.

Щоб описати рух точки вздовж кривої у просторі, треба знати радіус-вектор точки на кривій $\vec{x}(t)$ та її швидкість $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ у будь який момент часу $t > 0$. А оскільки криві параметризовані, то рух вздовж них можна описати залежністю параметрів α та β від часу t .

Нехай рух відбувається під дією сили притягання між точками, які можуть рухатися тільки вздовж просторових кривих, заданих параметрично. Будемо вважати, що потенціальна енергія системи точок залежить тільки

від відстані між ними

$$U = U(\|\vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)\|).$$

Потенціальна енергія може бути довільною функцією $r > 0$, але має сенс обмежитися таким відрізком ряду Лорана по r

$$U(r) = U(\|\vec{y} - \vec{x}\|) = \frac{q^2}{r} + U_0 + g \cdot r + k_2 \cdot r^2 + k_3 \cdot r^3.$$

Далі отримаємо рівняння Лагранжа та Гамільтона руху цієї системи двох точок. Наближене інтегрування задач Коші для виведених диференціальних рівнянь дає алгоритми апроксимації найближчої пари. Результати обчислювальних експериментів та деяких узагальнення будуть представлені найближчим часом в іншій публікації.

3. ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА З ДИСИПАЦІЄЮ ЕНЕРГІЇ

Введемо такі позначення: \mathcal{L}_0 — функція Лагранжа без дисипації енергії; \mathcal{L} — функція Лагранжа з дисипацією енергії; $\vec{r}(\alpha, \beta) = \vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)$ — радіус-вектор між двома точками на заданих кривих. Для похідних будемо використовувати позначення

$$\vec{x}'_\alpha = \frac{d\vec{x}}{d\alpha}, \quad \vec{y}'_\beta = \frac{d\vec{y}}{d\beta} \quad \text{та} \quad \vec{x}''_\alpha = \frac{d^2\vec{x}}{d\alpha^2}, \quad \vec{y}''_\beta = \frac{d^2\vec{y}}{d\beta^2}.$$

Тоді функція Лагранжа від узагальнених координат α, β та швидкостей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ буде мати вигляд

$$\mathcal{L}_0(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}) = \frac{m_\alpha}{2} \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{m_\beta}{2} \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta}^2 - U(r), \quad (2)$$

де $r = \|\vec{r}\|$, $m_\alpha > 0$, $m_\beta > 0$.

Дисипацію енергії введемо через експоненціальний коефіцієнт [13]

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}; t) = e^{\lambda t} \mathcal{L}_0(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}), \quad (3)$$

де λ — додатня константа.

Зauważення 1. Функція Лагранжа (3) описує рух взаємодіючих частинок з масами m_α, m_β , на які, крім того, діють сили тертя, що пропорційні швидкостям частинок.

4. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

Отримаємо рівняння руху Лагранжа [12, 13] для нашої системи двох частинок

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\nu} = 0. \quad (4)$$

Знайдемо похідні $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\nu}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\nu}$ та $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\nu} \right)$. Маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} \right), & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} \right). \end{cases} \quad (5)$$

У функції Лагранжа \mathcal{L}_0 без дисипації (2) від параметра α залежить перший та третій доданок. Отже, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2} \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha}^2 - U(r) \right) = \\ &= m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \beta} = m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle. \quad (7)$$

У функції Лагранжа \mathcal{L}_0 від $\dot{\alpha}$ залежить лише перший доданок. Маємо

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha}. \quad (8)$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} = m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta}. \quad (9)$$

Обчислимо похідну за часом від $\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_\alpha \frac{d}{dt} \left(\|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} \right) = \\ &= m_\alpha \left(\frac{d}{dt} \left(\|\vec{x}'_\alpha\|^2 \right) \dot{\alpha} + \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} \right) = \\ &= m_\alpha \left(2 \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогічно обчислимо похідну за часом від $\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} \right) = m_\beta \left(2 \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + \|\vec{y}'_\beta\|^2 \ddot{\beta} \right). \quad (11)$$

Підставляючи (6)–(11) в (5), отримуємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = e^{\lambda t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha} \right) = e^{\lambda t} \left(m_\alpha \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = e^{\lambda t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \beta} \right) = e^{\lambda t} \left(m_\beta \langle \vec{y}_\beta'', \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} = e^{\lambda t} m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta}, \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} \right) = e^{\lambda t} \left(\lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \left(2 \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} \right) \right), \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} \right) = e^{\lambda t} \left(\lambda m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \left(2 \langle \vec{y}_\beta'', \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + \|\vec{y}'_\beta\|^2 \ddot{\beta} \right) \right). \end{cases} \quad (12)$$

Отже, підставляючи перше, третє та п'яте рівняння з (12) в (4), отримуємо

$$e^{\lambda t} \left(\lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \left(2 \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} \right) \right) - e^{\lambda t} \left(m_\alpha \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle \right) = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}$, приходимо до рівняння

$$\lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 + m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle = 0.$$

Аналогічно, підставляючи друге, четверте, шосте рівняння з (12) в (4) та скорочуючи на $e^{\lambda t}$, маємо

$$\lambda m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}_\beta'', \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \ddot{\beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle = 0.$$

Отримуємо рівняння Лагранжа руху частинок на кривих

$$\begin{cases} m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} + \lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}_\alpha'', \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle = 0, \\ m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \ddot{\beta} + \lambda m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}_\beta'', \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Заявлення 2. Частинний випадок системи (13) отримано в [10]. У цитованій роботі розглядалась система двох точкових зарядів (різних знаків), які рухались вздовж кривих під дією сили Кулона та сили тертя, що пропорційна швидкості.

5. ГАМІЛЬТОНІВ ФОРМАЛІЗМ

Побудуємо рівняння Гамільтона руху системи частинок. Функцію Гамільтона отримаємо з перетворення Лежандра за класичною схемою [12,13]

$$\mathcal{H}_0 = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}_0(q, \dot{q}) \right) \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p, q)}. \quad (14)$$

При побудові функції Гамільтона змінні q , p розглядаємо як незалежні. Покладемо

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha}, \\ p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} = m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta}. \end{cases} \quad (15)$$

Перепишемо (15) інакше, розв'язавши спiввiдношення вiдносно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \|\vec{x}'_\alpha\|^{-2} \frac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \|\vec{y}'_\beta\|^{-2} \frac{p_\beta}{m_\beta}. \end{cases} \quad (16)$$

Пiдставляючи (16) в (14), маємо

$$\mathcal{H}_0(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta) = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \|\vec{x}'_\alpha\|^{-2} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} \|\vec{y}'_\beta\|^{-2} + U(r). \quad (17)$$

У (17) вiд параметра α залежить перший та третiй доданок. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\|\vec{x}'_\alpha\|^{-2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle = -2 \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4}, \\ \frac{\partial U(r)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Рiвняння системи Гамільтона для p_α має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \alpha} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \|\vec{x}'_\alpha\|^{-2} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} \|\vec{y}'_\beta\|^{-2} + U(r) \right) = \\ &= \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогiчно для p_β маємо

$$\dot{p}_\beta = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \beta} = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}'''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle. \quad (19)$$

Виводимо функцiю Гамільтона з дисипацiєю з (14), де

$$\begin{cases} P_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} p_\alpha, \\ \dot{Q}_\alpha = \dot{q}_\alpha, \\ \mathcal{L} = e^{\lambda t} \mathcal{L}_0. \end{cases} \quad (20)$$

Отже,

$$\mathcal{H}(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta; t) = e^{\lambda t} \mathcal{H}_0(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta), \quad (21)$$

$$\dot{P}_\alpha = \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_\alpha) = e^{\lambda t} (\dot{p}_\alpha + \lambda p_\alpha). \quad (22)$$

Рівняння Гамільтона для P_α відповідно до

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = -e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \alpha}$$

мають вигляд

$$e^{\lambda t} (\dot{p}_\alpha + \lambda p_\alpha) = e^{\lambda t} \left(\frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle \right). \quad (23)$$

Аналогічно отримуємо

$$e^{\lambda t} (\dot{p}_\beta + \lambda p_\beta) = e^{\lambda t} \left(\frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle \right). \quad (24)$$

Скорочуючи в (23) та (24) на $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle - \lambda p_\beta. \end{cases} \quad (25)$$

Об'єднуючи (16) та (25), приходимо до такої системи Гамільтона

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{\|\vec{x}'_\alpha\|^2} \frac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\|\vec{y}'_\beta\|^2} \frac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{r}, \vec{x}'_\alpha \rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{r}, \vec{y}'_\beta \rangle - \lambda p_\beta. \end{cases} \quad (26)$$

Зауваження 3. У випадку ньютонівського потенціалу $U(r) = \frac{q^2}{r}$ система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (26) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{\|\vec{x}'_\alpha\|^2} \frac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\|\vec{y}'_\beta\|^2} \frac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} - \frac{q^2}{r^3} \langle \vec{r}, \vec{x}'_\alpha \rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} + \frac{q^2}{r^3} \langle \vec{r}, \vec{y}'_\beta \rangle - \lambda p_\beta. \end{cases}$$

6. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

У роботі розглянуто метод пошуку найближчих пар на двох гладких кривих у тривимірному евклідовому просторі, який використовує модель фізичної взаємодії системи матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Одержано рівняння Лагранжа та Гамільтона руху точок, наближене інтегрування яких дає алгоритми апроксимації найближчої пари. Для заданих параметрично кривих

$$\vec{x}(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)) \quad \text{та} \quad \vec{y}(\beta) = (y_1(\beta), y_2(\beta), y_3(\beta))$$

відповідні рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} + \lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle = 0, \\ m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \ddot{\beta} + \lambda m_\beta \|\vec{y}'_\beta\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle = 0 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{\|\vec{x}'_\alpha\|^2} \frac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\|\vec{y}'_\beta\|^2} \frac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{r}, \vec{x}'_\alpha \rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{r}, \vec{y}'_\beta \rangle - \lambda p_\beta, \end{cases}$$

де m_α , m_β , λ — додатні параметри, $r = \|\vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)\|$, $U = U(r)$ — потенціальна енергія взаємодії.

Результати обчислювальних експериментів та деякі узагальнення будуть представлені найближчим часом в іншій публікації. Зауважимо, що у загальній ситуації найближча пара не єдина, тому отриманий розв'язок буде залежати від початкових умов.

Можна узагальнити запропонований формалізм. Цікаво розглянути подібну динаміку для обчислення відстані між кривою та поверхнею або між двома поверхнями. Можна піти ще далі та узагальнити цей формалізм для евклідових просторів довільної розмірності.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проект „Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології“, 0116U004777) та Державного фонду фундаментальних досліджень (грант Президента України, проект F74/24921).

ЛІТЕРАТУРА

1. Gilbert E., Johnson D. W., Keerthi S. S. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space // IEEE Journal of Robotics and Automation. — 1988. — 4. — P. 193–203.

2. Gilbert E. G., Foo C.-P. Computing the distance between general convex objects in three-dimensional space // IEEE Transactions on Robotics and Automation. — 1990. — 6 (1). — P. 53—61.
3. Llanas B., Fernandez de Sevilla M., Feliu V. An Iterative Algorithm for Finding a Nearest Pair of Points in Two Convex Subsets of \mathbb{R}^n // Computers and Mathematics with Applications. — 2000. — 40. — P. 971—983.
4. Lin A., Han S.-P. On the distance between two ellipsoids // SIAM J. on Optimization. — 2002. — 13. — P. 298—308.
5. Bauschke H. H., Combettes P. L., Luke D. R. Finding best approximation pairs relative to two closed convex sets in Hilbert spaces // Journal of Approximation Theory. — 2004. — 127. — P. 178—192.
6. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в \mathbb{R}^n // Доклады РАН. — 2008. — Т. 419, № 4. — С. 471—474.
7. Malitsky Yu. Douglas-Rachford algorithm for best approximation pair // VII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка. Матеріали конференції. — Київ, 2014. — С. 123.
8. Abbasov M. E. Charged balls method for finding the minimum distance between two plane convex smooth curves in three-dimensional space // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, October 17–22, 2016: Proceedings: Vol. I. — M.: MAKS Press, 2016. — P. 12—13.
9. Аббасов М. Э. Метод заряженных шариков // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть 1. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 278—289.
10. Аббасов М. Э. Нахождение минимального расстояния между двумя гладкими кривыми в трёхмерном пространстве // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть 1. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 290—296.
11. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — Москва: ЛЕНАНД, 2014. — 392 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Электродинамика. — Москва: Наука, 1969. — 272 с.
13. Казаков К. А. Введение в теоретическую и квантовую механику. — Москва: МГУ, 2008. — 231 с.

Надійшла 10.06.2017

УДК 519.8

MSC 91A12, 90C70

BERGE'S EQUILIBRUM IN GAMES WITH FUZZY COALITION STRUCTURE

SERHII MASHCHENKO, VOLODYMYR MORENETS

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine.
E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com

РІВНОВАГА ЗА БЕРЖЕМ В ІГРАХ З НЕЧІТКОЮ КОАЛІЦІЙНОЮ СТРУКТУРОЮ

С. О. МАЩЕНКО, В. І. МОРЕНЕЦЬ

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com

ABSTRACT. The concept of Berge equilibrium in a non-cooperative games is generalized to the case of fuzzy coalitions of „sympathizers“ players. For this game it is shown that the set of Berge equilibria is a fuzzy set of type 2 (FST-2) in special form (a fuzzy set whose membership function takes fuzzy values). Furthermore, the corresponding membership function is given. The approaches to the construction of FST-2 of Berge equilibria are proposed with maximal reliability of their feasibility and the reliability of unfeasibility not exceeding a given threshold.

РЕЗЮМЕ. Узагальнюється поняття рівноваги за Бержем в некооперативних іграх на випадок нечітких коаліцій „співчуваючих“ гравців. Показано, що множина рівноваг за Бержем цієї гри буде нечіткою множиною типу 2 (НМТ-2) спеціального вигляду (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення). Побудовано її функцію належності. Запропоновано підходи до побудови НМТ-2 рівноваг за Бержем з максимальною достовірністю належності до неї та також з достовірністю неналежності, яка не перевищує задану величину.

ВСТУП

На відміну від рівноваги за Нешем, сенс якої інколи позиціонують як „egoїстичний“, концепція рівноваги за Бержем [1] є досить привабливою в силу її „альtruїстичного“ характеру. Рівновага за Бержем базується на ідеї некооперативної поведінки гравців для випадків, коли агентами гри можуть бути не тільки окремі гравці, а і деякі їхні коаліції, і також, коли одна коаліція гравців може максимізувати функції виграшу гравців іншої коаліції. Зокрема, в [1, 2] доповнююча коаліція кожного гравця максимізує

його функцію виграшу. Ця рівновага може використовуватися як альтернативне рішення конфлікту, коли рівноваги за Нешем не існує, або, коли їх багато. У рівновазі за Бержем кожний гравець одержує свій максимальний виграш, якщо ситуація для нього сприятлива зобов'язанням або готовністю інших гравців вибирати стратегії, сприятливі для нього. У даній роботі розглядається випадок, коли для кожного окремого гравця існує нечітка коаліція гравців, які намагаються покращити його виграш (співчувають йому).

Розглянемо гру G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множина з n гравців; X_i — множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ — функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій при $X = \prod_{i \in N} X_i$, приймає дійсні значення і максимізується.

Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in N}$ при називається рівновагою за Бержем [1], якщо

$$u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) \geq u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}), \forall x_{S_i} \in X_{S_i}, i \in N,$$

де $S_i \subseteq N$ — коаліція гравців, які співчувають гравцю $i \in N$; $U_i = N \setminus S_i$ — коаліція гравців, які не співчувають гравцю $i \in N$; $X_{S_i} = \prod_{j \in S_i} X_j$ — множина наборів стратегій $x_{S_i} = (x_j)_{j \in S_i}$ коаліції S_i , а $X_{U_i} = \prod_{j \in U_i} X_j$ — множина наборів стратегій $x_{U_i} = (x_j)_{j \in U_i}$ коаліції U_i .

Отже, у рівновазі за Бержем співчуваюча коаліція S_i кожного гравця $i \in N$ максимізує його виграш за умови, що стратегії гравців, які не співчувають йому (з коаліції U_i), залишаються незмінними.

Це означення іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації

$$u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) = \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}), i \in N.$$

Позначимо множину рівноваг за Бержем гри G через BE . Цілком зрозуміло, що її можна представити у вигляді

$$BE = \bigcap_{i \in N} BS_i, \tag{1}$$

де $BS_i = \{(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) : u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) = \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}), \hat{x}_{U_i} \in X_{U_i}\}$ — множина ситуацій гри, яка складається з найкращих для гравця $i \in N$ наборів стратегій гравців, які йому співчувають, при фіксованих наборах стратегій інших гравців (які йому не співчувають).

Для побудови множини BS_i необхідно для кожного фіксованого набору стратегій $\hat{x}_{U_i} \in X_{U_i}$ гравців, які не співчувають гравцю $i \in N$, розв'язати задачу $\hat{x}_{S_i} = \arg \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i})$ та побудувати вектор $(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i})$.

Практичне застосування рівноваги Бержа для розв'язання та дослідження конфліктів в економічних, соціальних, політичних, екологічних та багатьох інших системах з одного боку показало їх високу адекватність реальним умовам багатьох конфліктів [2], з іншого — дозволило виділити ряд таких класів ігор, для яких її можна успішно узагальнити [1]. Зокрема, у цій роботі досліджуватимуться рівноваги за Бержем в іграх з нечіткими коаліціями співчуваючих гравців.

1. РІВНОВАГА ЗА БЕРЖЕМ В ІГРАХ З НЕЧІТКИМИ КОАЛІЦІЯМИ
НЕСПІВЧУВАЮЧИХ ГРАВЦІВ

Припустимо, що важко чітко сказати, які гравці не співчують гравцю $i \in N$, а можна лише задати функцію належності $\eta_i(j)$, $j \in N$ деякої нечіткої коаліції (множини) гравців $\tilde{U}_i = \bigcup_{j \in N} (j, \eta_i(j))$, що йому не співчують.

Тоді множина рівноваг за Бержем гри G (позначимо її через FBE) може бути узагальнена так

$$FBE^* = \bigcap_{i \in N} FBS_i^*, . \quad (2)$$

де FBS_i^* — нечітка множина ситуацій гри, носій якої складається з „найкращих“ для гравця $i \in N$ наборів стратегій гравців, які йому співчують, при фіксованих наборах стратегій інших гравців (які йому не співчують). Далі будемо називати її нечіткою множиною сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$. Для побудови множини FBS_i^* необхідно для кожної фіксованої ситуації $\hat{x} \in X$ розв'язати таку задачу

$$\max_{x \in X} \{u_i(x) : x_j = \hat{x}_j, (j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i\}. \quad (3)$$

Формульовання такої задачі потребує пояснення. Для цього позначимо через $R_j(\hat{x}) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_j = \hat{x}_j\}$ множину ситуацій $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, які можуть бути отримані з ситуації \hat{x} при фіксованій стратегії $x_j = \hat{x}_j$ гравця $j \in N$. Тоді запис $x_j = \hat{x}_j, (j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i$ задає множину $\tilde{D}_i(\hat{x}) = \bigcap_{(j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i} R_j(\hat{x})$, де згідно [3] $\bigcap_{(j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i} R_j(\hat{x})$ — перетин нечіткої множини \tilde{U}_i чітких множин $R_j(\hat{x})$, який є нечіткою множиною типу 2 (НМТ-2). Отже, задача (3) полягає в максимізації цільової функції $u_i(x)$ на НМТ-2 $\tilde{D}_i(\hat{x})$.

НМТ-2 було уведено Л.А. Заде у 1975 році як розширення нечітких множин типу 1. У той час, коли ступені належності елементів в нечіткій множині типу 1 (НМТ-1) є значеннями з інтервалу $[0, 1]$, ступені належності елементів в НМТ-2 є нечіткою множиною на $[0, 1]$. НМТ-2 визначається функцією належності $\lambda : X \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, де $[0, 1] \times [0, 1]$ — множина відображенень з $[0, 1]$ в $[0, 1]$.

У [3, 4] запропоновано означення НМТ-2, у якому поняття функції належності з нечіткою множиною значень визначено як нечітке відображення.

Згідно [3, 4] НМТ-2 A , яке визначено на X , називається сукупністю трійок вигляду $(x, y, \psi(x, y))$, де

x — елемент множини X ;

y — елемент множини $[0, 1]$ ступенів належності НМТ-2 ;

$\psi : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — функція належності нечіткого відображення, яке задає нечітку функцію належності НМТ-2 A .

Оскільки функція приналежності $\psi(x, y)$ чітка і однозначно визначає НМТ-2 A , то зручно працювати з нею. Щоб не плутати $\psi(x, y)$ з нечіткою функцією належності, у [3, 4] вона називається функцією достовірності

значення ступеня належності $y \in Y = [0, 1]$ елемента $x \in X$ НМТ-2 або просто функцією достовірності НМТ-2 A .

Нехай \tilde{N} — нечітка множина індексів на N з функцією належності $\eta(j)$, $j \in N$. Згідно [3, 4] перетин $\tilde{D} = \bigcap_{(j, \eta(j)) \in \tilde{N}} R_j$ нечіткої множини \tilde{N} чітких множин R_j є НМТ-2 спеціального виду з дискретним носієм $Y = \{0, 1\}$ нечіткої множини ступенів належності. Функція достовірності $\psi(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y = \{0, 1\}$, НМТ-2 \tilde{D} може бути заданою у вигляді

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \begin{cases} \max_{j \in N} \{\eta(j) \mid x \notin R_j\}, & \exists j \in N \ x \notin R_j, \\ 0, & \forall j \in N \ x \in R_j; \end{cases} \\ \psi(x, 1) &= \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & \forall j \in J^* \ x \in R_j, \\ 0, & \exists j \in J^* \ x \notin R_j, \end{cases}\end{aligned}$$

де $J^* = \operatorname{Arg} \max_{j \in N} \eta(j)$ — множина індексів з максимальним ступенем належності до нечіткої множини \tilde{N} .

2. Нечітка множина сприятливих ситуацій

Позначимо через $U_i^* = \operatorname{Arg} \max_{j \in N} \eta_i(j)$ множину гравців з максимальним ступенем належності до нечіткої коаліції гравців \tilde{U}_i , які не співчують гравцю $i \in N$. З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина $\tilde{D}_i(\hat{x}) = \bigcap_{(j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i} R_j(\hat{x})$ допустимих розв'язків (3) являється НМТ-2, яка задається функцією достовірності $\psi_i^{\hat{x}}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, де

$$\psi_i^{\hat{x}}(x, 0) = \begin{cases} \max_{j \in N} \{\eta_i(j) \mid x_j \neq \hat{x}_j\}, & \exists j \in N \ x_j \neq \hat{x}_j, \\ 0, & \forall j \in N \ x_j = \hat{x}_j; \end{cases} \quad (4)$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta_i(j), & \forall j \in U_i^* \ x_j = \hat{x}_j, \\ 0, & \exists j \in U_i^* \ x_j \neq \hat{x}_j. \end{cases} \quad (5)$$

Слід зазначити, що величину $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1)$ можна інтерпретувати як достовірність допустимості ситуації $x \in X$, одержаної з \hat{x} у задачі (3). Відповідно, значення $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0)$ — достовірність недопустимості.

Можна встановити залежність значень $\psi_i^{\hat{x}}(x, y)$ від умови $x = \hat{x}$. З (4) та (5) випливає

$$\psi_i^x(x, 0) = 0, \quad \psi_i^x(x, 1) = \max_{j \in N} \eta_i(j). \quad (6)$$

Розв'язуючи задачу (3), гравці, які співчують гравцю $i \in N$, будуть намагатися максимізувати окрім його цільової функції ще й достовірність допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1)$ ситуації $x \in X$ у задачі (3), а також мінімізувати достовірність $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0)$ її недопустимості. Отже, перед гравцями постає така трикритеріальна задача

$$u_i(x) \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x, 0) \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$x \in X. \quad (10)$$

Позначимо через $SO_i(\hat{x})$ множину оптимальних за Слейтером розв'язків задачі (7)–(10). Нагадаємо, що ситуація x^* називається оптимальною за Слейтером для задачі вигляду (7)–(10), якщо $\exists x \in X$, для якої мають місце нерівності: $u_i(x) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$.

Нечіткою множиною сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації \hat{x} (це буде множина „оптимальних“ розв'язків задачі (3)), будемо називати НМТ-2 із функцією достовірності $\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, де

$$\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x, 1) = \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x, 1), & x \in SO_i(\hat{x}); \\ 0, & x \notin SO_i(\hat{x}), \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x, 0) = \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x, 0), & x \in SO_i(\hat{x}); \\ 1, & x \notin SO_i(\hat{x}). \end{cases}$$

Для побудови нечіткої множини сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації \hat{x} , необхідно задатися питанням знаходження елементів її носія $SO_i(\hat{x})$. У загальному випадку для розв'язання трикритеріальної задачі (7)–(10) можна використовувати відомі методи багатокритеріальної оптимізації. Оскільки цільові функції (8)–(9) є достатньо складними, то доцільно розробити метод, який врахує їхню специфіку і дозволить знаходити хоча б частину розв'язків (7)–(10).

Оптимальний за Слейтером розв'язок x^* задачі (7)–(10) будемо називати частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, яку одержано з фіксованої ситуації \hat{x} із достовірностями $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$ та $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1)$ відповідно її недопустимості та допустимості.

3. МАКСИМАЛЬНО ДОСТОВІРНІ РІВНОВАГИ ЗА БЕРЖЕМ

Спробуємо спростити задачу (7)–(10). Позначимо через

$$\eta_i^{\max} = \max_{j \in N} \eta_i(j), i \in N, \quad (11)$$

максимальний ступень належності до нечіткої коаліції гравців, які не співчують гравцю $i \in N$. Нагадаємо, що $U_i^* = \operatorname{Arg} \max_{j \in N} \eta_i(j)$.

Теорема 1. Якщо задача

$$\max_{x_{N \setminus U_i^*} \in X_{N \setminus U_i^*}} u_i(x_{N \setminus U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}) \quad (12)$$

має оптимальний розв'язок x^* , то він буде частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, одержаною з фіксованої ситуації \hat{x} з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$.

Доведення. Перепишемо задачу (12) у вигляді $\max_{x \in X} \{u_i(x) \mid x_j = \hat{x}_j, j \in U_i^*\}$. Згідно (5) цю задачу можна представити як

$$u_i(x) \rightarrow \max,$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max}, \quad (13)$$

$$x \in X. \quad (14)$$

Позначимо через x^* оптимальний розв'язок цієї задачі. Для доведення теореми достатньо показати, що $x^* \in SO(\hat{x})$.

Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO(\hat{x})$. Тоді $\exists \bar{x}$, який задовольняє умовам (13)–(14), і для якого мають місце такі нерівності: $u_i(\bar{x}) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$. Звідси, в силу умови (13) $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$. Отримали суперечність.

Теорему доведено.

Отже, для побудови носія НМТ-2 сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$ з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max}$ (позначимо її FBS_i) треба для кожного набору стратегій $\hat{x}_{U_i^*} \in X_{U_i^*}$ розв'язати задачу (12). Стосовно достовірності недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0)$ цих ситуацій можна сказати лише те, що вона може приймати відповідні значення згідно формули (4).

Нечіткою множиною максимально достовірних сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації \hat{x} (це буде підмножина „оптимальних“ розв'язків задачі (3), які мають максимальну достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max}$), будемо називати НМТ-2 (позначимо її $FBS_i(\hat{x})$) із функцією достовірності $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$ такого вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 1) &= \begin{cases} \eta_i^{\max}, & x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x})); \\ 0, & x \notin \text{supp}(FBS_i(\hat{x})), \end{cases} \\ \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0) &= \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x, 0), & x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x})); \\ 1, & x \notin \text{supp}(FBS_i(\hat{x})), \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

де $\text{supp}(FBS_i(\hat{x}))$ — множина оптимальних розв'язків задачі (12).

Тоді множиною сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$ буде НМТ-2 $FBS_i = \bigcup_{\hat{x} \in X} FBS_i(\hat{x})$. Зрозуміло, що носієм FBS_i (позначимо його $\text{supp}(FBS_i)$) буде множина

$$\text{supp}(FBS_i) = \bigcup_{\hat{x} \in X} \text{supp}(FBS_i(\hat{x})). \quad (16)$$

Теорема 2. Функція достовірності $\varphi_i(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$ НМТ-2 FBS_i , $i \in N$ має такий вигляд

$$\varphi_i(x, 1) = \begin{cases} \eta_i^{\max}, & x \in \text{supp}(FBS_i); \\ 0, & x \notin \text{supp}(FBS_i), \end{cases} \quad (17)$$

$$\varphi_i(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in \text{supp}(FBS_i); \\ 1, & x \notin \text{supp}(FBS_i). \end{cases} \quad (18)$$

Доведення. Нехай A_k — НМТ-2 на X з функціями достовірності відповідно $\varphi_k(x, y)$, $x \in X$, $y \in [0, 1]$, $k \in K$. Тоді функція достовірності об'єднання

$A = \bigcup_{k \in K} A_k$ має вигляд [5]

$$\varphi^U(x, y) = \max_{v_l \in [0, 1], l \in K: \max_{k \in K} v_k = y} \min_{j \in K} \varphi_j(x, v_j), x \in X, y \in [0, 1].$$

Використаємо цю формулу для побудови функції достовірності НМТ-2 FBS_i . Відмітимо, що в нашому випадку $y \in \{0, 1\}$. Позначимо множину векторів

$$V^U(y) = \{v = (v_z)_{z \in X} : v_z \in \{0, 1\}, z \in X; \max_{z \in X} v_z = y\}, y \in \{0, 1\}. \quad (19)$$

Для достовірності недопустимості ситуації $x \in X$ одержимо $\varphi_i(x, 0) = \max_{v \in V^U(0)} \min_{\hat{x} \in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, v_{\hat{x}})$. Оскільки умова $v \in V^U(0)$ виконується лише у випадку $\forall z \in X v_z = 0$, то

$$\varphi_i(x, 0) = \min_{\hat{x} \in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0). \quad (20)$$

Покажемо, що виконується (18). Спочатку припустимо, що $x \notin \text{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) для $\forall \hat{x} \in X x \notin \text{supp}(FBS_i(\hat{x}))$. Звідси за (15) $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0) = 1$. Тому $\varphi_i(x, 0) = \min_{\hat{x} \in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0) = 1$.

Тепер припустимо, що $x \in \text{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) $\exists \hat{x}^* \in X, x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$. У цьому випадку за (15) формула (20) набуває вигляду

$$\varphi_i(x, 0) = \min_{\hat{x} \in X} \psi_i^{\hat{x}}(x, 0). \quad (21)$$

Позначимо множину $\hat{X}(x) = \{\hat{x} \in X : x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}))\}$. Покажемо, що $x \in \hat{X}(x)$ також. Припустимо супротивне, що $x \notin \hat{X}(x)$. Тоді для кожного $\hat{x} \in \hat{X}$, тобто, і для \hat{x}^* можливі два випадки: $\exists j \in U_i^*$, для якого $x_j \neq \hat{x}_j^*$, або (i) $u_i(x) > u_i(\hat{x}^*)$.

Множиною оптимальних розв'язків задачі (12) є носій $\text{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$. Крім того

$$x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}^*)) \Leftrightarrow \forall j \in U_i^* x_j = \hat{x}_j^* \text{ та } u_i(x) = u_i(\hat{x}^*).$$

В обох випадках маємо $x \notin \text{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$ і отримуємо суперечність. Отже, $x \in \hat{X}(x)$.

Продовжимо далі. Оскільки $\hat{X}(x) \subseteq X$, то з (21) очевидно випливає $\varphi_i(x, 0) \leq \min_{\hat{x} \in \hat{X}(x)} \psi_i^{\hat{x}}(x, 0) \leq \psi_i^x(x, 0)$. Тоді за (6) $\varphi_i(x, 0) \leq 0$. Оскільки $\varphi_i(x, 0) \geq 0$, то очевидно, що $\varphi_i(x, 0) = 0$. Отже, формула (18) є справедливою.

Для достовірності допустимості ситуації $x \in X$ одержимо

$$\varphi_i(x, 1) = \max_{v \in V^U(1)} \min_{\hat{x} \in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, v_{\hat{x}}). \quad (22)$$

Розглянемо два випадки. Спочатку припустимо, що $x \notin \text{supp}(FBS_i)$. Покажемо, що $\varphi_i(x, 1) = 0$. Припустимо супротивне, що $\varphi_i(x, 1) > 0$. Тоді з (22) випливає, що $\max_{v \in V^U(1)} \min_{\hat{x} \in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, v_{\hat{x}}) > 0$. Оскільки $v \in V^U(1)$, то за

(19) це означає, що $\exists \hat{x} \in X v_{\hat{x}} = 1$, для якого $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 1) > 0$. Тоді за (15)

$x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}))$. Звідси за (16) $x \in \text{supp}(FBS_i)$. Одержали суперечність. Отже, $\varphi_i(x, 1) = 0$ для $x \notin \text{supp}(FBS_i)$.

Тепер припустимо, що $x \in \text{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) $\exists \hat{x} \in X$, для якого $x \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}))$. Позначимо множину таких ситуацій $\hat{X} = \{z \in X : z \in \text{supp}(FBS_i(\hat{x}))\}$. Виберемо $v_{\hat{x}} = 1$ для $\hat{x} \in \hat{X}$ та $v_{\hat{x}} = 0$ для $\hat{x} \in X \setminus \hat{X}$. Тоді з (22) випливає

$$\varphi_i(x, 1) \geq \min\{\min_{\hat{x} \in X} \{\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 1) \mid \hat{x} \in \hat{X}\}, \min_{\hat{x} \in X} \{\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0) \mid \hat{x} \in X \setminus \hat{X}\}\}.$$

Оскільки за (15) $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max} \forall \hat{x} \in \hat{X}$ та $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x, 0) = 1 \forall \hat{x} \in X \setminus \hat{X}$, то $\varphi_i(x, 1) \geq \min\{\eta_i^{\max}, 1\} = \eta_i^{\max}$. Отримали формулу (17).

Теорему 2 доведено.

Узагальнення поняття множини рівноваг за Бержем гри G відповідно (2) приводить до такого означення.

Будемо говорити, що FBE називається НМТ-2 максимально достовірних рівноваг за Бержем, якщо $FBE = \bigcap_{i \in N} FBS_i$.

Очевидно, що носій FBE (позначимо його $\text{supp}(FBE)$) буде також представлено у вигляді

$$\text{supp}(FBE) = \bigcap_{i \in N} \text{supp}(FBS_i). \quad (23)$$

Тому на підставі теореми 1 $\text{supp}(FBE)$ складається з розв'язків системи взаємозв'язаних оптимізаційних задач

$$u_i(\hat{x}_{N \setminus U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}) = \max_{x_{N \setminus U_i^*} \in X_{N \setminus U_i^*}} u_i(x_{N \setminus U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}), \quad i \in N. \quad (24)$$

Знайдемо функцію достовірності НМТ-2 FBE , яку ми позначимо через $\varphi^{FBE}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$.

Теорема 3. Функція достовірності $\varphi^{FBE}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$ HMT-2 FBE має такий вигляд

$$\varphi^{FBE}(x, 1) = \begin{cases} \min_{i \in N} \max_{j \in N} \eta_i(j), & x \in \text{supp}(FBE); \\ 0, & x \notin \text{supp}(FBE), \end{cases} \quad (25)$$

$$\varphi^{FBE}(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in \text{supp}(FBE); \\ \max_{v \in V} \min_{i \in N} \varphi_i(x, v_i), & x \notin \text{supp}(FBE). \end{cases} \quad (26)$$

Доведення. Нехай A_i — НМТ-2 на X з функціями достовірності відповідно $\varphi_i(x, y)$, $x \in X$, $y \in [0, 1]$, $i \in N$. Тоді функція достовірності перетину $A = \bigcap_{i \in N} A_i$ має вигляд [5]

$$\varphi^A(x, y) = \max_{v_k \in [0, 1], k \in N: \min_{j \in N} v_j = y} \min_{i \in N} \varphi_i(x, v_i), \quad x \in X, y \in [0, 1]. \quad (27)$$

Використаємо цю формулу для побудови функції достовірності НМТ-2 FBE . Відмітимо, що у нашому випадку $y \in \{0, 1\}$. Позначимо множину векторів

$$V^\cap(y) = \{v = (v_i)_{i \in N} : v_i \in \{0, 1\}, i \in N; \min_{i \in N} v_i = y\}, \quad y \in \{0, 1\}. \quad (28)$$

Для достовірності допустимості ситуації $x \in X$ одержимо $\varphi^{FBE}(x, 1) = \max_{v \in V^\cap(1)} \min_{i \in N} \varphi_i(x, v_i)$. Оскільки за (28) умова $v \in V^\cap(1)$, виконується лише у випадку $\forall i \in N v_i = 1$, то $\varphi^{FBE}(x, 1) = \min_{i \in N} \varphi_i(x, 1)$. Тоді з (11) та (17) одержимо $\varphi^{FBE}(x, 1) = \min_{i \in N} \eta_i^{\max} = \min_{i \in N} \max_{j \in N} \eta_i(j)$ для $x \in \text{supp}(FBE)$ і $\varphi^{FBE}(x, 1) = 0$ для $x \notin \text{supp}(FBE)$. Одержали формулу (25).

Достовірність недопустимості ситуації $x \in X$ за (27) буде такою

$$\varphi^{FBE}(x, 0) = \max_{v \in V^\cap(0)} \min_{i \in N} \varphi_i(x, v_i). \quad (29)$$

Розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $x \in \text{supp}(FBE)$. Покажемо, що $\varphi^{FBE}(x, 0) = 0$. Припустимо супротивне, що $\varphi^{FBE}(x, 0) > 0$. Тоді $\exists \bar{v} = (\bar{v}_k)_{k \in N} \in V$, що $\forall i \in N \varphi_i(x, \bar{v}_i) > 0$. Оскільки $\bar{v} \in V$, то за (28) $\exists j \in N$, для якого $v_j = 0$. Тому $\varphi_j(x, 0) > 0$. Звідси за (18) $x \notin \text{supp}(FBS_i)$. Тому $x \notin \bigcap_{i \in N} \text{supp}(FBS_i)$. Тоді за (23) $x \notin \text{supp}(FBE)$. Отримали суперечність. Звідси та з (29) випливає (26).

Теорему 3 доведено.

Певний інтерес може представляти оцінка знизу значення достовірності недопустимості НМТ-2 максимально достовірних рівноваг за Бержем у випадку $x \notin \text{supp}(FBE)$. Дійсно, у цьому випадку за (23) $\exists i \in N$, для якого $x \notin \text{supp}(FBS_i)$. Позначимо $N_0(x) = \{i \in N : x \notin \text{supp}(FBS_i)\} \neq \emptyset$ та $N_1(x) = \{i \in N : x \in \text{supp}(FBS_i)\}$. Побудуємо вектор $\bar{v} = ((0)_{k \in N_0}, (1)_{k \in N_1})$. Тоді з (29) випливає

$$\varphi^{FBE}(x, 0) \geq \min_{i \in N} \varphi_i(x, \bar{v}_i) = \min\left\{\min_{i \in N_0(x)} \varphi_i(x, 0), \min_{i \in N_1(x)} \varphi_i(x, 1)\right\}.$$

Звідси за (18) $\varphi^{FBE}(x, 0) \geq \min_{i \in N_1(x)} \eta_i^{\max}$.

4. МАКСИМАЛЬНО ДОСТОВІРНІ РІВНОВАГИ ЗА БЕРЖЕМ ІЗ ЗАДАНИМ РІВНЕМ ДОСТОВІРНОСТІ НЕДОПУСТИМОСТІ

Якщо НМТ-2 FBE максимально достовірних рівноваг за Бержем достатньо інформативна для гравців, то її можна вважати розв'язком поставленої задачі. У протилежному випадку її можна звузити, якщо задати рівень достовірності недопустимості ситуацій з її носія.

Повернемося знову до задачі (7)–(10). Будемо шукати не просто максимально достовірні сприятливі ситуації для гравця $i \in N$, одержані з фіксованої ситуації \hat{x} , а такі, що мають ступені належності нечіткій множині гравців \tilde{U}_i , які не співчують гравцю $i \in N$, не більше за задане число $\xi \in (0, 1)$ (позначимо цю множину через $U_i^\xi = \{j \in N \mid \eta_i(j) \leq \xi\}$).

Позначимо також множини

$$D_i^+(\hat{x}, k, \xi) = \{x \in X \mid x_k > \hat{x}_k; x_j = \hat{x}_j, j \in N \setminus U_i^\xi\}, k \in U_i^\xi, \quad (30)$$

$$D_i^-(\hat{x}, k, \xi) = \{x \in X \mid x_k < \hat{x}_k; x_j = \hat{x}_j, j \in N \setminus U_i^\xi\}, k \in U_i^\xi. \quad (31)$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 4. Нехай $\xi \in (0, 1)$ — задане значення параметра, тоді, якщо задача

$$\min_{k \in U_i^\xi} \max\left\{ \max_{x \in D_i^-(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x), \max_{x \in D_i^+(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x) \right\}, x \in X \quad (32)$$

має оптимальний розр'язок x^* , то він буде частково сприятливимою ситуацією для гравця $i \in N$, одержаною з фіксованої ситуації \hat{x} з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$ та з достовірністю недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$ не більше за ξ .

Доведення. Розглянемо множину

$$Q_i(\hat{x}, \xi) = \{x \in X \mid 0 < \psi_i^{\hat{x}}(x, 0) \leq \xi; x_j = \hat{x}_j, j \in N \setminus U_i^\xi\}. \quad (33)$$

Позначимо $P_i(\hat{x}, \xi) = \bigcup_{k \in U_i^\xi} (D_i^+(\hat{x}, k, \xi) \cup D_i^-(\hat{x}, k, \xi))$. Звідси, ураховуючи (30), (31) отримаємо

$$\begin{aligned} P_i(\hat{x}, \xi) &= \bigcup_{k \in U_i^\xi} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k; x_j = \hat{x}_j, j \in N \setminus U_i^\xi\} = \\ &= \{x \in X \mid x_j = \hat{x}_j, j \in N \setminus U_i^\xi\} \cap \left(\bigcup_{k \in U_i^\xi} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k\} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Спочатку доведемо

$$P_i(\hat{x}, \xi) = Q_i(\hat{x}, \xi). \quad (35)$$

Покажемо включення $P_i(\hat{x}, \xi) \subseteq Q_i(\hat{x}, \xi)$. Якщо $P_i(\hat{x}, \xi) = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in P_i(\hat{x}, \xi) \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, якщо $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Тоді відповідно (33) можливі два випадки. У першому випадку $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) > \xi$. Звідси із (4) отримаємо $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = \max_{j \in N} \{\eta_i(j) \mid x_j^* \neq \hat{x}_j\} > \xi$.

Тоді $\exists j \in N \setminus U_i^\xi$, для якого $x_j^* \neq \hat{x}_j$. Тому відповідно до (34) $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. Отримали суперечність.

У другому випадку $\exists j \in N \setminus U_i^\xi$, для якого $x_j^* \neq \hat{x}_j$. Звідси, із (34) отримаємо $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. У цьому випадку також отримали суперечність. Отже, $x^* \in Q_i(\hat{x}, \xi)$, а отже $P_i(\hat{x}, \xi) \subseteq Q_i(\hat{x}, \xi)$.

Покажемо включення $Q_i(\hat{x}, \xi) \subseteq P_i(\hat{x}, \xi)$. Якщо $Q_i(\hat{x}, \xi) = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in Q_i(\hat{x}, \xi) \neq \emptyset$. Припустимо супротивне. Нехай $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. Тоді відповідно до (34) можливі два випадки. У першому випадку $\exists j \in N \setminus U_i^\xi$ $x_j^* \neq \hat{x}_j$. Звідси із (33) випливає, що $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Отримали суперечність. У другому випадку $x^* \notin \bigcup_{k \in U_i^\xi} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k\}$.

Тоді $\forall k \in U_i^\xi$ $x_k^* = \hat{x}_k$. Оскільки $U_i^\xi = \{j \in N \mid \eta_i(j) \leq \xi\}$, то із (4) очевидно випливає, що або $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = \max_{j \in N} \{\eta_i(j) \mid x_j^* \neq \hat{x}_j\} > \xi$, або $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = 0$.

В обох випадках згідно (33) $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Також отримали суперечність. Отже, $x^* \in P_i(\hat{x}, \xi)$ і тому $Q_i(\hat{x}, \xi) \subseteq P_i(\hat{x}, \xi)$. Рівність (35) доведено.

Завершимо доведення теореми. Із (35) очевидно випливає еквівалентність задач (32) та такої

$$u_i(x) \rightarrow \max_{x \in Q_i(\hat{x}, \xi)} \quad (36)$$

Покажемо, що для будь-якого заданого значення параметра $\xi \in (0, 1)$, при якому задача (36) має оптимальний розв'язок, він буде частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, яку одержано з фіксованої ситуації \hat{x} із достовірністю допустимості $\eta_i^{\max} = \max_{j \in N} \eta_i(j)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ . Позначимо через x^* оптимальний розв'язок задачі (36) для деякого значення $\xi \in (0, 1)$. Тоді із (33) та (5) випливає

$$\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \max_{j \in N} \eta_i(j) = \eta_i^{\max}. \quad (37)$$

Також із (33) очевидно, що $0 < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) \leq \xi$.

Покажемо, що $x^* \in SO_i(\hat{x})$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO_i(\hat{x})$. Тоді $\exists \bar{x} \in X$, для якого виконуються нерівності $u_i(\bar{x}) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$. Звідси отримаємо $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$. Отримали суперечність із (37). Отже, $x^* \in SO_i(\hat{x})$. Причому $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \max_{j \in N} \eta_i(j) = \eta_i^{\max}$ та $0 < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) \leq \xi$.

Теорему 4 доведено.

Отже, носій НМТ-2 (позначимо через FBS_i^ξ) сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$, отриманих з фіксованої ситуації \hat{x} з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max}$ та з достовірністю недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0)$ не більше за ξ , буде об'єднанням розв'язків задачі (32), отриманих для кожної ситуації $\hat{x} \in X$. Функція достовірності FBS_i^ξ буде звуженням функції достовірності $\varphi_i(x, y)$ на носій $\text{supp}(FBS_i^\xi)$ і може бути знайденою за формулами (17), (18).

НМТ-2 рівноваг за Бержем рівня $\xi \in (0, 1)$ визначимо як $FBE^\xi = \bigcap_{i \in N} FBS_i^\xi$. Очевидно, що носій FBE^ξ (позначимо його $\text{supp}(FBE^\xi)$) буде мати вигляд $\text{supp}(FBE^\xi) = \bigcap_{i \in N} \text{supp}(FBS_i^\xi)$ і на підставі теореми 4 буде складатись із розв'язків системи взаємозв'язаних оптимізаційних задач

$$u_i(\hat{x}) = \min_{k \in U_i^\xi} \max\left\{ \max_{x \in D_i^-(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x), \max_{x \in D_i^+(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x) \right\}, i \in N.$$

Функція достовірності FBE^ξ буде звуженням функції достовірності $\varphi^{FBE}(x, y)$ на носій $\text{supp}(FBE^\xi)$ і може бути знайденою за формулами (25), (26).

Висновки

У даній роботі основну увагу зосереджено на побудові концепції рівноваги за Бержем у некооперативних іграх, у яких коаліції гравців, що співчують один іншому, є нечіткими. Згідно до запропонованого підходу ця множина розглядається як НМТ-2, яку отримано шляхом відомої операції перетину нечіткої множини чітких множин. Особливістю такого представлення є те, що елементи носія цієї множини характеризуються двома показниками: достовірністю їхньої належності множині рівноваг за Бержем та достовірністю неналежності. Безпосередньо носій представляє

собою множину оптимальних за Слейтером розв'язків трикритеріальної задачі оптимізації. Розроблено методи знаходження його елементів із максимальною достовірністю належності НМТ-2 рівноваг за Бержем, а також з достовірністю неналежності не більше за задане число. Розроблений підхід розширяє область застосування теорії нечітких множин на випадок некооперативних ігор з нечіткою коаліційною структурою і може дати новий підхід до розв'язання інших задач теорії ігор в умовах нечіткої інформації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мащенко С. О. Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие / С.О. Мащенко // Журнал обчисл. та прикладн. матем. — 2012. — № 1(107). — С. 40–65.
2. Гусейнов А. А. Математические основы Золотого правила нравственности / А. А. Гусейнов, В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев; под ред. В. И. Заляпина. — М.: URSS, 2016. — 275 с.
3. Мащенко С. О. Задача оптимизации с нечетким множеством нечетких ограничений / С. О. Мащенко, Мохаммед Саад Ибрахим Аль-Саммарраи // Международный научно-технический журнал „Проблемы управления и информатики“. — 2014. — № 4 . — С. 47–57.
4. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С. О. // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 1. — С. 62 – 68.
5. Мащенко С. О. Принятие решений при нечетком множестве состояний природы. Теория и методы / Сергей Мащенко. — GmbH: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. — 112 с.

Надійшла 03.03.2017

УДК 517.9

MSC 34E05, 34E13, 34L15

HOMOGENIZATION OF MATHIEU EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATION POTENTIAL

GENNADIY SANDRAKOV, MARIANA BAZILEVA

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: gsandrakov@gmail.com, mbazileva91@gmail.com

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. САНДРАКОВ, М. И. БАЗИЛЕВА

Факультет комп'ютерних наук и кибернетики, Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: gsandrakov@gmail.com, mbazileva91@gmail.com

ABSTRACT. Spectral problems for Mathieu equation with rapidly oscillation potential and periodic boundary value conditions on a finite interval are considered. Asymptotic expansions for eigenvalues and eigenfunctions of the problem are constructed. Statements on the asymptotic accuracy estimates between the constructed asymptotic expansions and an exact solution, which are depending on the eigenvalue number, are proved. Firstly, the dependence is presented in explicit forms with the asymptotic precise estimate.

KEYWORDS: homogenization, Mathieu equation, asymptotic expansion, eigenvalue, eigenfunction.

РЕЗЮМЕ. Рассматриваются спектральные задачи для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на конечном интервале. Построены асимптотические разложения собственных значений и функций такой задачи. Доказаны утверждения об оценках асимптотической близости построенных асимптотических разложений и точных решений исходной задачи, зависящие от номера соответствующего собственного значения. Впервые, такая зависимость выражена в виде явных формул с асимптотически точной оценкой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: осреднение, уравнение Матье, асимптотическое разложение, собственное значение, собственная функция.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной науки и техники предусматривает необходимость исследования разнообразных спектральных задач для дифференциальных уравнений с краевыми условиями, характеризующих квантовые эффекты в решетках, кристаллах и наноструктурах. В основе анализа некоторых из таких задач находятся асимптотические методы и теория осреднения.

Спектральные задачи для общего оператора Штурма-Лиувилля изучаются достаточно давно [1, 2]. Такие задачи с периодическим потенциалом обычно рассматриваются на всей прямой [2, 3]. Задачи об асимптотическом разложении собственных значений и функций для уравнения второго порядка с малым периодическим потенциалом, рассматриваемые на расширяющемся интервале, впервые были поставлены и изучены в [3].

Следует подчеркнуть, что задачи на всей прямой более простые, и исследуются во многих работах [1]–[5], где можно найти и более обширную библиографию по таким исследованиям. Задачи, рассматриваемые на интервале, который асимптотически расширяется, более сложные, поскольку содержат зависимость от некоторого большого параметра N . После перехода к пределу при $N \rightarrow \infty$ такие задачи переходят, в некотором смысле, в задачи на всей прямой, имеющие непрерывный спектр лакунарной структуры [6, 7]. Спектральные задачи на расширяющемся интервале могут быть сведены к задачам с быстро осциллирующим потенциалом на конечном интервале. Более того, такие задачи эквивалентны и для фиксированного N имеют дискретный спектр, зависимость которого от N является достаточно сложной. Исследованию такой зависимости для начальных собственных значений и функций в спектральной задаче для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и посвящена данная работа.

Рассматриваемые здесь задачи возникают, например, в физике твердого тела [3, 6, 7] и наноматериалов [8]–[12]. Так, задача Штурма-Лиувилля на всей прямой с периодическим кусочно-постоянным потенциалом называется задачей Кронига-Пенни и является одной из основных упрощенных моделей в физике твердого тела [7]. Исследования данной работы являются начальным шагом к исследованию задач на решетках, которые моделируют кристаллические решетки [6], решетчатые и трубчатые наноструктуры, например, карбоновые трубы [8] и пленки [9], наноструктуры из графена [10]. В статье [13] рассмотрена спектральная задача на фрагментах кристаллических решеток как первый этап рассмотрения модельных спектральных задач для уравнений с потенциалами на простых решетках. Такие задачи для уравнений без потенциалов рассматривались в работах [14]–[16].

В данной работе при исследовании спектральной задачи для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями используются методы асимптотических разложений и теории осреднения. Вопросы осреднения спектральных задач изучались во многих работах [17, 18], где можно найти и более обширную библиографию по таким исследованиям. Следует отметить, что в этих работах изучались задачи с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, но с нулевым потенциалом. Здесь будут использованы

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

методы работы [19], применимые к уравнениям с произвольными быстро осциллирующими потенциалами и коэффициентами.

Структура данной работы следующая. В первом параграфе описываются собственные числа и функции уравнения Матье [20], используемые в дальнейших построениях. Спектральная задача для уравнения Матье с F -периодическим потенциалом на отрезке $[0, \pi]$ будет рассмотрена во втором параграфе, где сформулировано и основное утверждение о структуре решений этой задачи. В третьем параграфе методами работы [19] строится и обосновывается асимптотика решений рассматриваемой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будет рассматриваться следующая спектральная задача для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на отрезке $[0, \pi]$: найти такие собственное значение λ_ε и ненулевую собственную функцию u_ε , что

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2(u_\varepsilon)'' + 2q u_\varepsilon \cos\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right) &= \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{для } x \in (0, \pi), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\pi), \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(\pi), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon = (N)^{-1}$ с некоторым положительным целым N . Основной целью работы является исследование собственных значений и функций этой задачи при достаточно больших N и, соответственно, при достаточно малых ε . Уравнение задачи (1) зависит от дополнительного параметра q и записано в форме, принятой в теории специальных функций Матье, определяемых рассматриваемой задачей при $\varepsilon = 1$ в соответствии с [1, 20].

Уравнение задачи (1) можно разделить на ε^2 и рассматривать, таким образом, спектральную задачу для одномерного уравнения Шредингера с очень большим осциллирующим потенциалом (при достаточно малых ε) на конечном интервале. Эта задача является основной составляющей при исследовании прохождения, отражения и рассеяния волн на тонких кристаллических пленках и будет рассмотрена в дальнейших работах.

Кроме того, в задаче (1) можно ввести новую переменную $y = xN$ и рассматривать эквивалентную задачу с периодическим потенциалом на расширяющемся интервале $(0, \pi N)$ (впервые исследованную в [3] для достаточно малых потенциалов), где N обозначает фактически число атомов, составляющих кристалл, рассматриваемый как одномерная структура. В физике твердого тела решения такой задачи на расширяющемся интервале принято заменять решениями аналогичной задачи на всей прямой [3, 6, 7]. Однако, совершенно не изучена корректность такой замены. Точнее, практически не исследована корректность и точность этой замены решений задачи на расширяющемся интервале решениями задачи на всей прямой. Такое исследование представляется существенным, поскольку реальные кристаллы имеют конечные размеры и не заполняют все окружающее пространство. Первые шаги в этом направлении будут приведены

здесь в форме утверждения о точности приближений собственных значений и функций задачи (1) для одномерного уравнения Маттье.

Для фиксированного ε известно [21, 22], что существуют счетные множества собственных значений $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^s, \dots$ и ортонормированных собственных функций $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^s, \dots$, являющихся решениями задачи (1), для которых с учетом возможной кратности выполняются неравенства

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^s \leq \dots \quad \text{и} \quad \lambda_\varepsilon^s \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Под кратностью здесь понимается возможное совпадение собственных чисел $\lambda_\varepsilon^s, \lambda_\varepsilon^{s+1}, \dots$ для различающихся собственных функций $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}, \dots$. Таким образом, учет кратности означает нумерацию собственных чисел в соответствии с нумерацией различающихся собственных функций.

Основной целью работы является построение и обоснование асимптотики для собственных значений и функций задачи (1) с не очень большими номерами s . Для этого рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{aligned} -u'' + 2q u \cos(2x) &= \lambda u \quad \text{для } x \in (0, \pi), \\ u(0) &= u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{aligned} \tag{2}$$

совпадающую с задачей (1) при $\varepsilon = 1$. Для $q \neq 0$ известно [1, 20], что существуют счетные множества однократных собственных значений $\lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots$ и ортонормированных собственных функций $u_1^0, u_1^1, \dots, u_1^s, \dots$, являющихся решениями задачи (2), для которых выполняются строгие неравенства

$$\lambda_1^0 < \lambda_1^1 < \dots < \lambda_1^s < \dots \quad \text{и} \quad \lambda_1^s \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Собственные функции задачи (2), нормированные соответствующим образом, принято называть *функциями Маттье*.

Исследованию функций Маттье посвящены целые главы в справочниках и даже книги, например, [1]. Для таких функций приняты специальные обозначения [1, 20], например, собственное значение и функцию с нулевым номером принято называть основными и обозначать a_0 и $ce_0(x)$. Традиционно, основную функцию $ce_0(x)$ принято нормировать условиями

$$ce_0(0) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi ce_0(x)^2 dx = \frac{1}{2}.$$

При этом известно [1], что $ce_0(0) \neq 0$ для каждого фиксированного q , от которого зависят a_0 и $ce_0(x)$ в соответствии с уравнением из (2). Таким образом, в обозначениях, принятых для задачи (2), можно положить

$$\lambda_1^0 = a_0 \quad \text{и} \quad u_1^0 = \sqrt{2} ce_0(x),$$

где корень появляется в силу условия ортонормирования $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (u_1^0)^2 dx = 1$ и известно, что число a_0 всегда отрицательно при $q \neq 0$ и $a_0 = 0$ при $q = 0$.

Непосредственно проверяется, что функция $u_1^0(x/\varepsilon)$ является собственной функцией задачи (1) с собственным значением λ_1^0 , и можно определить

$$\lambda_\varepsilon^0 = a_0 \quad \text{и} \quad u_\varepsilon^0 = u_1^0(x/\varepsilon) = \sqrt{2} ce_0(x/\varepsilon).$$

Однако, определить последующие собственные функции $u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^s, \dots$ задачи (1) с собственными значениями $\lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^s, \dots$ значительно сложнее.

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Уравнение задачи (2) имеет второй порядок и поэтому можно определить два базисных решения $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ этого уравнения. Такие решения называются *фундаментальными*, если выполнены следующие условия

$$\phi_2(0) = \phi'_1(0) = 0, \quad \phi'_2(0) = \phi_1(0) = 1. \quad (3)$$

Известно [1], что при $\lambda = a_0$ в уравнении задачи (2) функция $\phi_1(x)$ кратна основной функции Матье. Таким образом, имеем

$$\phi_1(x) = ce_0(x)(ce_0(0))^{-1}.$$

Для фиксированного q также известно [1, 23], что однозначно определена такая периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$, что $f(0) = f(\pi) = 0$ и

$$\phi_2(x) = \alpha x \phi_1(x) + \alpha f(x), \quad (4)$$

где постоянная α выбирается из условия выполнения равенств (3). Из этих равенств и определения (3) следует, что $\alpha = (1 + f'(0))^{-1}$.

Функция $\phi_2(x)$ не может быть периодической [23] и поэтому $\phi_2(\pi) \neq 0$. Для каждого фиксированного q из равенств (3) и (4) следует, что

$$\phi_2(\pi) = \alpha\pi$$

и поэтому $\alpha \neq 0$. Кроме того, для $q = 0$ имеем $\alpha = 1$, таким образом $\alpha > 0$ для каждого фиксированного q в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров решений обыкновенных дифференциальных уравнений [23].

Для фундаментального решения ϕ_2 известно [1, 23] также представление

$$\phi_2(x) = C x ce_0(x) + f_0(x),$$

где постоянная $C = \alpha(ce_0(0))^{-1}$ и периодическая функция $f_0 = \alpha f(x)$ однозначно определены условиями (3) и представлением (4).

Для задачи (2) определим энергетическое пространство $L^2(0, \pi)$ как пространство Лебега квадратично интегрируемых функций. Основным утверждением данной работы является следующая утверждение.

Теорема 1. Для собственных значений λ_ε^s и собственных функций u_ε^s задачи (1) существует такая постоянная C , не зависящая от ε и s , что

$$|\lambda_\varepsilon^s - (a_0 + \varepsilon^2 \lambda^s)| \leq C(\varepsilon s)^3, \quad \|u_\varepsilon^s - v_\varepsilon^s\|_{L^2(0, \pi)} \leq C \varepsilon s^2$$

при $s^2 \ll \varepsilon^{-1}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для некоторого положительного ε_0 , где λ^s и v_ε^s определяются собственными значениями и собственными функциями подходящей осредненной задачи, которая будет определена в дальнейшем.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Следуя общим принципам работы [19], разложение собственных функций u_ε задачи (1) будем определять в виде асимптотической суммы u_ε^a , слагаемые которой представимы в виде функций $u_0(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y)$ двух переменных $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$, рассматриваемых при $y = \frac{x}{\varepsilon}$ и имеющих разделенные переменные. Таким образом, введем обозначение

$$u_\varepsilon^a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (5)$$

где $u_0(x, y) = N_0(y)v_0(x)$, $u_1(x, y) = N_1(y)v_1(x)$, $u_2(x, y) = N_2(y)v_2(x)$ с неизвестными функциями v_0, v_1, v_2 и неизвестными периодическими функциями $N_0(y), N_1(y), N_2(y)$ (с периодом, равным π), которые будут найдены из условия приближенного выполнения условий задачи (1) при малых ε .

Разложение собственных значений λ_ε задачи (1) выберем в виде

$$\lambda_\varepsilon^a = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 \quad (6)$$

с неизвестными числами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, определяемыми в процессе построений.

Используя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \left(u_\varepsilon^a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right)'' &= \left(u_{0xx}'' + \frac{2}{\varepsilon} u_{0xy}'' + \frac{1}{\varepsilon^2} u_{0yy}'' + \varepsilon u_{1xx}'' + \right. \\ &\quad \left. + 2u_{1xy}'' + \frac{1}{\varepsilon} u_{1yy}'' + \varepsilon^2 u_{2xx}'' + 2\varepsilon u_{2xy}'' + u_{2yy}'' \right) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя разложения (5), (6) вместо решений в (1) и применяя (7), имеем

$$\begin{aligned} L^y N_0(y)v_0 + \varepsilon L^y N_1(y)v_1 + \varepsilon^2 L^y N_2(y)v_2 - \lambda_0 N_0(y)v_0 - \lambda_0 \varepsilon N_1(y)v_1 - \\ - \lambda_0 \varepsilon^2 N_2(y)v_2 - \lambda_1 \varepsilon N_0(y)v_0 - \lambda_1 \varepsilon^2 N_1(y)v_1 - \lambda_1 \varepsilon^3 N_2(y)v_2 - \lambda_2 \varepsilon^2 N_0(y)v_0 - \\ - \lambda_2 \varepsilon^3 N_1(y)v_1 - \lambda_2 \varepsilon^4 N_2(y)v_2 - 2\varepsilon N'_0(y)v'_0(x) - 2\varepsilon^2 N'_1(y)v'_1(x) - 2\varepsilon^3 N'_2(y)v'_2(x) - \\ - \varepsilon^2 N_0(y)v''_0(x) - \varepsilon^3 N_1(y)v''_1(x) - \varepsilon^4 N_2(y)v''_2(x) = 0 \quad \text{при } y = \frac{x}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где, например, введено обозначение $L^y N_0(y) = -(N_0(y))'' + 2q \cos(2y)N_0(y)$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в полученном соотношении для определения неизвестных функций и чисел из (5) и (6). При $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ и ε^2 , соответственно, получаем следующие уравнения

$$L^y N_0(y)v_0(x) - \lambda_0 N_0(y)v_0(x) = 0, \quad (8)$$

$$(L^y N_1(y) - \lambda_0 N_1(y))v_1(x) = 2N'_0(y)v'_0(x) + \lambda_1 N_0(y)v_0(x), \quad (9)$$

$$(L^y N_2(y) - \lambda_0 N_2(y))v_2 = 2N'_1(y)v'_1 + N_0(y)v''_0 + \lambda_1 N_1(y)v_1 + \lambda_2 N_0(y)v_0. \quad (10)$$

Уравнение (8) буде выполнено, если определить $\lambda_0 = a_0$ и

$$N_0(y) = \sqrt{2}ce_0(y) = \varkappa \phi_1(y),$$

где $\varkappa = \sqrt{2}ce_0(0)$ выбрано из условия нормировки $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_0^2(y) dy = 1$.

Рассмотрим соотношение (9) как уравнение относительно $N_1(y)$ для каждого $x \in [0, \pi]$. Известно [7] и непосредственно проверяется, что такое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна $N_0(y)$. Последнее условие записывается в виде

$$v'_0 \int_0^\pi 2N'_0 N_0 dy = -\lambda_1 v_0 \int_0^\pi N_0^2 dy.$$

Интегрируя по частям периодические функции, для левой части имеем

$$\int_0^\pi N'_0 N_0 dy = - \int_0^\pi N_0 N'_0 dy,$$

поэтому этот интеграл равен нулю. Таким образом, уравнение (9) может быть разрешимым, только если $\lambda_1 = 0$.

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Определим $v_1(x) = v'_0(x)$. Тогда соотношение (9) будет выполнено, если выбрать $N_1(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^y N_1(y) - a_0 N_1(y) = 2N'_0(y). \quad (11)$$

Это уравнение разрешимо в силу последнего равенства для интегралов и можно попытаться найти решение этого уравнения методом вариации постоянных [21, 22]. Однако, известно [1, 23] и непосредственно проверяется, что периодическая функция $f(y) = \alpha^{-1}\phi_2(y) - y\phi_1(y)$, заданная равенством (4), является частным решением уравнения

$$L^y f(y) - a_0 f(y) = 2\phi'_1(y).$$

Сравнивая это уравнение с (11) заключаем, что общее периодическое (с периодом, равным π) решение уравнения (11) определяется равенством

$$N_1(y) = \varkappa (\alpha^{-1}\phi_2(y) - y\phi_1(y)) + \gamma N_0(y) \quad (12)$$

где $\varkappa = \sqrt{2}ce_0(0)$ и постоянная γ может быть выбрана из условия ортогональности $\int_0^\pi N_1(y)N_0(y) dy = 0$, которое будет использовано далее.

Рассмотрим соотношение (10) как уравнение относительно $N_2(y)$. Это уравнение имеет решение, если правая часть ортогональна $N_0(y)$. Последнее условие ортогональности можно записать в виде

$$\lambda_2 v_0 + \left(2\pi^{-1} \int_0^\pi N'_1(y)N_0(y) dy \right) v''_0 + v''_0 = 0, \quad (13)$$

поскольку $v_1(x) = v'_0(x)$ и $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_0^2(y) dy = 1$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} I &= 2\pi^{-1} \int_0^\pi N'_1(y)N_0(y) dy = -2\pi^{-1} \int_0^\pi N_1(y)N'_0(y) dy = \\ &= -2\varkappa^2 \pi^{-1} \alpha^{-1} \left(\int_0^\pi \phi_2(y)\phi'_1(y) dy - \alpha \int_0^\pi y\phi_1(y)\phi'_1(y) dy \right). \end{aligned}$$

где учтено интегрирование по частям и определения $N_0 = \varkappa\phi_1(y)$ и (12).

Для фундаментальных решений выполнено [1, 22] тождество Бронского

$$\phi_1(y)\phi'_2(y) - \phi'_1(y)\phi_2(y) = 1$$

и правило Лейбница $(\phi_2\phi_1)' = \phi'_1\phi_2 + \phi_1\phi'_2$. Таким образом, получаем $2\phi_2(y)\phi'_1(y) = (\phi_2(y)\phi_1(y))' - 1$ и

$$\begin{aligned} I &= \varkappa^2 \pi^{-1} \alpha^{-1} \left(\int_0^\pi (1 - (\phi_2(y)\phi_1(y))') dy + \alpha \int_0^\pi y (\phi_1^2(y))' dy \right) = \\ &= \varkappa^2 \pi^{-1} \alpha^{-1} \left((y - \phi_2(y)\phi_1(y)) \Big|_0^\pi + \alpha y\phi_1^2(y) \Big|_0^\pi - \alpha \int_0^\pi \phi_1^2 dy \right) = \\ &= \varkappa^2 \alpha^{-1} ((1 - \alpha) + \alpha - \alpha \varkappa^{-2}) = \varkappa^2 \alpha^{-1} - 1. \end{aligned}$$

Учитывая эти вычисления, уравнение (13) можно представить в виде

$$-(\varkappa^2 \alpha^{-1}) v''_0(x) = \lambda_2 v_0(x) \quad \text{для } x \in (0, \pi).$$

Известно и непосредственно проверяется, что функция e^{isx} для целого не-нулевого s определяет собственную функцию уравнения (13) с периодическими граничными условиями и положительным собственным двукратным

значением $s^2 (\varkappa^2 \alpha^{-1})$. Удобно пронумеровать такие собственные функции и значения (с учетом кратности) следующим образом

$$\begin{aligned} v_0^1 &= e^{ix}, \quad v_0^2 = e^{-ix}, \quad v_0^3 = e^{i2x}, \quad v_0^4 = e^{-i2x}, \quad v_0^5 = e^{i3x}, \quad v_0^6 = e^{-i3x}, \dots, \\ \lambda_2^1 &= \beta, \quad \lambda_2^2 = \beta, \quad \lambda_2^3 = 2^2 \beta, \quad \lambda_2^4 = 2^2 \beta, \quad \lambda_2^5 = 3^2 \beta, \quad \lambda_2^6 = 3^2 \beta, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где введено обозначение $\beta = \varkappa^2 \alpha^{-1}$. Таким образом, заключаем, что

$$\begin{aligned} v_0^s &= e^{ikx}, \quad \lambda_2^s = ((s+1)/2)^2 (\varkappa^2 \alpha^{-1}) \quad \text{для } s = 2k - 1, \\ v_0^s &= e^{-ikx}, \quad \lambda_2^s = (s/2)^2 (\varkappa^2 \alpha^{-1}) \quad \text{для } s = 2k \text{ при } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

определяют собственные функции и числа для уравнения (13) с периодическими граничными условиями. Решения этой задачи можно также представить в виде линейных комбинаций $\cos(kx)$ и $\sin(kx)$ для $k = 1, 2, \dots$, если интересоваться только действительнозначными решениями.

Определим $v_2 = v_0''(x)$, зафиксируем некоторые s и v_0^s и учтем осредненное уравнение (13) в (10). Тогда соотношение (10) будет выполнено, если определить $N_2(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^y N_2(y) - a_0 N_2(y) = 2N_1'(y) + (1 - \varkappa^2 \alpha^{-1}) N_0(y),$$

которое разрешимо в силу приведенных вычислений и можно найти такое решение этого уравнения, что $\int_0^\pi N_2(y) N_0(y) dy = 0$.

Таким образом, для целых положительных s определены приближенные решения задачи (1), которые можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \lambda_a^s &= a_0 + \varepsilon^2 \lambda_2^s, \\ u_a^s &= N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^s(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (v_0^s(x))' + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (v_0^s(x))''. \end{aligned} \quad (16)$$

Естественно, что эти приближения актуальны для не слишком больших s , точнее для $s \ll \varepsilon^{-1}$ (при $s \leq c\varepsilon^{-1+\sigma}$ для некоторых c и σ при $0 < \sigma \leq 1$). Отметим также, что эти приближенные решения согласованы и при $s = 0$, поскольку в этом случае $v_0^0 = 1$ и $\lambda_2^0 = 0$ являются решением задачи (13) и $u_\varepsilon^0 = N_0(x/\varepsilon)$ и $\lambda_\varepsilon^0 = a_0$ являются точным решением задачи (1).

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Для доказательства теоремы 1, обосновывающей построенные приближенные решения задачи (1), будут использованы метод Релея-Ритца, представленный в [7], теорема Вишника-Люстерника из [24, 25] и вспомогательное утверждение, обобщающее лемму Римана-Лебега, доказанное, например, в [15]. Для точной формулировки этих утверждений введем следующее обозначение для оператора задачи (1)

$$L^\varepsilon v = -\varepsilon^2(v)'' + 2q v \cos\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right), \quad (17)$$

где периодическая функция $v \in H_{per}^1(0, \pi)$ (определение этого пространства приведено, например, в [15, 17]). Этот оператор естественно рассматривать как неограниченный оператор на $L^2(0, \pi)$ с плотной (и компактно

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

вложенной [7]) областью определения $H_{per}^1(0, \pi)$, для собственных значений и функций которого уже были введены обозначения $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^s, \dots$ и $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^s, \dots$. Следующие два утверждения доказаны в [7] и [25].

Теорема 2. (*Метод Релея-Ритца*). *Фиксируем положительные ε и целое d . Пусть H_d обозначает d -мерное подпространство в $L^2(0, \pi)$ и P_d является ортогональным проекtorом на H_d .*

Тогда для упорядоченных (по возрастанию с учетом кратности) собственных значений $\mu_\varepsilon^0, \mu_\varepsilon^1, \dots, \mu_\varepsilon^{d-1}$ оператора $P_d L^\varepsilon P_d$ на H_d и собственных значений $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^{d-1}$ оператора L^ε выполнены следующие неравенства

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \mu_\varepsilon^0, \quad \lambda_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^1, \quad \dots, \quad \lambda_\varepsilon^{d-1} \leq \mu_\varepsilon^{d-1}.$$

Теорема 3. *Фиксируем положительные ε и ϱ . Предположим, что найдутся такие число μ и функция $u \in H_{per}^1(0, \pi)$, что $\|u\|_{L^2(0, \pi)} = 1$ и*

$$\|L^\varepsilon u - \mu u\|_{L^2(0, \pi)} \leq \varrho.$$

Тогда существует такое собственное число λ_ε^s , что $|\mu - \lambda_\varepsilon^s| \leq \varrho$, и для каждого $\sigma > \varrho$ существует такое $v \in H_{per}^1(0, \pi)$, что $\|v\|_{L^2(0, \pi)} = 1$ и

$$\|u - v\|_{L^2(0, \pi)} \leq 2\varrho\sigma^{-1},$$

где v является линейной комбинацией собственных функций оператора L^ε , отвечающих собственным значением из интервала $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Следующее утверждение доказано, например, в [15] и будет приведено с доказательством, которое используется в дальнейшем изложении.

Теорема 4. *Для функции $U \in L^2(0, \pi)$, продолженной периодически на всю прямую, и функции $v \in H_{per}^2(0, \pi)$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy \int_0^\pi v(x) dx \right| \leq \\ \leq \varepsilon^2 \|U\|_{L^2(0, \pi)} \|v''\|_{L^2(0, \pi)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим $M \in H_{per}^2(0, \pi)$ как периодическое решение (с периодом π и $\int_0^\pi M(y) dy = 0$) разрешимого уравнения

$$M''_{yy}(y) = U(y) - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy$$

и продолжим $M(y)$ периодически на всю прямую. Используя то, что

$$\varepsilon^2 M''_{xx}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = M''_{yy}(y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy,$$

умножим это соотношение на v и проинтегрируем. В таком случае имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy \int_0^\pi v(x) dx = \\ = \varepsilon^2 \int_0^\pi \left(M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)'' v(x) dx = \varepsilon^2 \int_0^\pi M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v''(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy \int_0^\pi v(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon^2 \|M\|_{L^2(0,\pi)} \|v''\|_{L^2(0,\pi)}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left\| M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(0,\pi)}^2 &= \int_0^{\pi\varepsilon} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \cdots + \int_{\pi(N-1)\varepsilon}^{\pi N\varepsilon} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^N \|M\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \|M\|_{L^2(0,\pi)}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Остается учесть хорошо известное неравенство $\|M\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|U\|_{L^2(0,\pi)}$ для решения соответствующего разрешимого уравнения для M . \square

Доказательство теоремы 1. Используя обозначения (16) для приближенных решений и соотношения (7)–(14), получаем

$$\begin{aligned} L^\varepsilon u_a^s - \lambda_a^s u_a^s &= -\varepsilon^3 N_1(y) v_0^s(x)''' - \varepsilon^3 \lambda_2^s N_1(y) v_0^s(x)' - \\ &- 2\varepsilon^3 N_2'(y) v_0^s(x)''' - \varepsilon^4 N_2(y) v_0^s(x)''''' - \varepsilon^4 \lambda_2^s N_2(y) v_0^s(x)'' \end{aligned} \quad (19)$$

при $y = x\varepsilon^{-1}$. Из определений (14) и (15) для функции v_0^s следует, что $|v_0^s| \leq 1$. Аналогично, для l -й производной этой функции имеем

$$|(v_0^s)^{(l)}| \leq ((s+1)/2)^l \quad \text{для каждого } s = 1, 2, \dots.$$

Функции $N_1(y)$ и $N_2(y)$ являются решениями периодических задач для уравнений с гладкими коэффициентами (не зависящими от ε и s) и поэтому являются гладкими [22] и имеют конечные $H^1(0, \pi)$ -нормы. Таким образом, учитывая для этих функций равенства (18), из соотношений (19) получаем

$$\begin{aligned} \|L^\varepsilon u_a^s - \lambda_a^s u_a^s\|_{L^2(0,\pi)} &\leq (\varepsilon)^3 ((s+1)/2)^3 \|N_1\|_{L^2(0,\pi)} + \\ &+ \cdots + (\varepsilon s)^4 C \|N_2\|_{L^2(0,\pi)} \leq C(\varepsilon s)^3 \end{aligned} \quad (20)$$

при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Здесь и в дальнейшем постоянные C не зависят от ε и s .

Из определений (16) и теоремы 4 следует, что

$$\begin{aligned} \|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)}^2 &= \pi^{-1} \int_0^\pi (u_a^s)^2 dx = \pi^{-1} \int_0^\pi \left(N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^s(x) \right)^2 dx + \\ &+ \cdots + \varepsilon^4 \pi^{-1} \int_0^\pi \left(N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (v_0^s(x))'' \right)^2 dx = \\ &= \pi^{-1} \int_0^\pi N_0^2(y) dy \pi^{-1} \int_0^\pi (v_0^s(x))^2 dx + O((\varepsilon s)^2) = 1 + O((\varepsilon s)^2), \end{aligned}$$

где последние два равенства понимаются в смысле выполнения неравенства

$$\left| \|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)}^2 - 1 \right| \leq C(\varepsilon s)^2 \quad (21)$$

из теоремы 4, в которой учтено, например, что $\|((v_0^s)^2)''\|_{L^2(0,\pi)} \leq (s+1)^2$, $\pi^{-1} \int_0^\pi (v_0^s(x))^2 dx = 1$, $\int_0^\pi N_1(y) N_0(y) dy = 0$ и $\int_0^\pi N_2(y) N_0(y) dy = 0$.

Аналогично проверяется, что

$$\left| \int_0^\pi u_a^s u_a^i dx \right| \leq C(\varepsilon s)^2 + C(\varepsilon i)^2$$

при $s \neq i$ и $s, i \ll \varepsilon^{-1}$. Последние соотношения означают, что система функций $u_a^1, u_a^2, \dots, u_a^s, \dots$ асимптотически почти ортонормирована в $L^2(0, \pi)$. Поэтому несложно проверить, что функции из этой системы линейно независимы при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Здесь важно, что система собственных функций $v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^s, \dots$ является ортонормированной в $L^2(0, \pi)$.

Из (21) следует, что $\|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)} \neq 0$ при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Поэтому, используя (20) и обозначив $v_a^s = u_a^s \|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)}^{-1}$, получим $\|v_a^s\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и

$$\|L^\varepsilon v_a^s - \lambda_a^s v_a^s\|_{L^2(0,\pi)} \leq C(\varepsilon s)^3,$$

где постоянная C не зависит от ε и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$.

Таким образом, из теоремы 3 следует, что найдется такое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{k(s)}$ задачи (1), что выполняется неравенство

$$|\lambda_\varepsilon^{k(s)} - \lambda_a^s| \leq C(\varepsilon s)^3, \quad (22)$$

где постоянная C не зависит от ε и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Из этого неравенства будет следовать первое неравенство из теоремы 1 для собственных значений задачи (1), если доказать, что $k(s) = s$ для каждого $s = 1, 2, \dots$

Отметим, что неравенства (20)–(22) выполнены и для $s = 0$ в силу определения приближенных решений (16), согласованного при $s = 0$ с выбором $u_\varepsilon^0 = u_a^0 = N_0(x/\varepsilon)$, $v_0^0 = 1$ и $\lambda_\varepsilon^0 = \lambda_a^0 = a_0$. Обозначим также $w_a^0 = N_0(x/\varepsilon)$. Тогда $\|w_a^0\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и $w_a^0 \in H_{per}^1(0, \pi)$. Ортонормируем в $L^2(0, \pi)$ функции

$$w_a^0, w_a^1, \dots, w_a^s, \dots$$

Определим постоянную $A_\varepsilon^{10} = \pi^{-1} \int_0^\pi u_a^1 w_a^0 dx$. Из теоремы 4 следует, что

$$A_\varepsilon^{10} = \pi^{-1} \int_0^\pi N_0^2 dy \pi^{-1} \int_0^\pi v_0^1 dx + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

поскольку $\int_0^\pi v_0^1 dx = 0$. Таким образом, $A_\varepsilon^{10} = \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10}$, где $|a_\varepsilon^{10}| \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε . Обозначим

$$\nu_a^1 = u_a^1 - \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10} w_a^0.$$

Функция ν_a^1 ортогональна к w_a^0 и выполнено представление

$$(L^\varepsilon - \lambda_a^1) \nu_a^1 = (L^\varepsilon - \lambda_a^1) u_a^1 - \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10} ((L^\varepsilon - \lambda_a^0) w_a^0 + (\lambda_a^1 - \lambda_a^0) w_a^0).$$

Поэтому, используя неравенство (20), получаем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^1) \nu_a^1\|_{L^2(0,\pi)} \leq C \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \lambda_2^1 |a_\varepsilon^{10}| \|w_a^0\|_{L^2(0,\pi)} \leq C \varepsilon^3.$$

Таким образом, функция ν_a^1 также удовлетворяет неравенствам (20), (21) и $w_a^1 = \nu_a^1 \| \nu_a^1 \|_{L^2(0,\pi)}^{-1} \in H_{per}^1(0, \pi)$ ортогональна к w_a^0 и удовлетворяет (20).

Аналогично проверяется, что для постоянных α_1 и α_0 имеем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^1) (\alpha_1 w_a^1 - \alpha_0 w_a^0)\|_{L^2(0,\pi)} \leq C \varepsilon^2, \quad (23)$$

если $|\alpha_1| \leq C$ и $|\alpha_0| \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε .

Далее, предположим по индукции, что определены ортонормированные $w_a^0, w_a^1, \dots, w_a^{s-1}$ из $H_{per}^1(0, \pi)$, удовлетворяющие неравенству (20), и для постоянных $\alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}) (\alpha_{s-1} w_a^{s-1} + \dots + \alpha_0 w_a^0)\|_{L^2(0, \pi)} \leq C(\varepsilon(s-1))^2, \quad (24)$$

если $|\alpha_j| \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε для $j = 0, \dots, s-1$.

Определим $A_\varepsilon^{sj} = \pi^{-1} \int_0^\pi u_a^s w_a^j dx$ для $j = 0, \dots, s-1$. Из теоремы 4 имеем

$$A_\varepsilon^{sj} = \pi^{-1} \int_0^\pi N_0^2 dy \pi^{-1} \int_0^\pi v_0^s v_0^j dx + O((\varepsilon s)^2) = O((\varepsilon s)^2),$$

поскольку $\int_0^\pi v_0^s v_0^j dx = 0$ для $j = 0, \dots, s-1$. Таким образом, $A_\varepsilon^{sj} = (\varepsilon s)^2 a_\varepsilon^{sj}$, где $|a_\varepsilon^{sj}| \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε и s для $j = 0, \dots, s-1$.

Обозначим $w_a^{s0} = a_\varepsilon^{s,s-1} w_a^{s-1} + \dots + a_\varepsilon^{s0} w_a^0$ и

$$\nu_a^s = u_a^s - (\varepsilon s)^2 w_a^{s0}.$$

Функция ν_a^s ортогональна к w_a^{s-1}, \dots, w_a^0 и выполнено представление

$$(L^\varepsilon - \lambda_a^s) \nu_a^s = (L^\varepsilon - \lambda_a^s) u_a^s - (\varepsilon s)^2 ((L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}) w_a^{s0} + (\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}) w_a^{s0}).$$

Поэтому, используя неравенства (20) и (24), получаем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^s) \nu_a^s\|_{L^2(0, \pi)} \leq C(\varepsilon s)^3 + (\varepsilon s)^2 (\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}) \|w_a^{s0}\|_{L^2(0, \pi)} \leq C(\varepsilon s)^3, \quad (25)$$

поскольку в обозначениях из (14)–(16) либо $\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1} = 0$ либо

$$\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1} = \varepsilon^2 \beta (k^2 - (k-1)^2) = \varepsilon^2 \beta (2k-1) = \varepsilon^2 \beta s$$

и функция w_a^{s0} содержит s слагаемых единичной нормы, умноженных на ограниченные постоянные. Таким образом, функция ν_a^s также удовлетворяет неравенствам (20) и (21). Кроме того, $w_a^s = \nu_a^s \|\nu_a^s\|_{L^2(0, \pi)}^{-1} \in H_{per}^1(0, \pi)$ ортогональна к w_a^{s-1}, \dots, w_a^0 и удовлетворяет (20).

Проверим выполнение (24) для w_a^s, \dots, w_a^0 . Для постоянных $\alpha_s, \dots, \alpha_0$ обозначим $w_a^{ss} = \alpha_{s-1} w_a^{s-1} + \dots + \alpha_0 w_a^0$ и $\nu_a^{ss} = \alpha_s w_a^s + w_a^{ss}$. Тогда

$$(L^\varepsilon - \lambda_a^s) \nu_a^{ss} = \alpha_s (L^\varepsilon - \lambda_a^s) w_a^s + (L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}) w_a^{ss} - (\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}) w_a^{ss}.$$

Поэтому, используя неравенства (20) и (24), как и в (25), получаем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^s) \nu_a^{ss}\|_{L^2(0, \pi)} \leq C(\varepsilon s)^2 + (\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}) \|w_a^{ss}\|_{L^2(0, \pi)} \leq C(\varepsilon s)^2.$$

Таким образом, выполнено неравенство (24) с номером, большим на 1 (совпадающее с (23) при $s = 1$), используемое в индуктивных предположениях.

Определим s -мерное подпространство $H_s \subset L^2(0, \pi)$ как линейную оболочку функций $w_a^0, w_a^1, \dots, w_a^{s-1}$ и обозначим через P_s ортогональный проектор на H_s . По определению для $w \in L^2(0, \pi)$ имеем

$$P_s w = \sum_{i=0}^{s-1} w_a^i \pi^{-1} \int_0^\pi w_a^i w dx$$

и поэтому $P_s w_a^i = w_a^i$ при $i = 0, \dots, s-1$. Для оператора $L_s^\varepsilon = P_s L^\varepsilon P_s$ определены ортонормированные собственные функции $\omega_\varepsilon^0, \dots, \omega_\varepsilon^{s-1}$ и такие

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

собственные значения $\mu_\varepsilon^0, \dots, \mu_\varepsilon^{s-1}$, что $\mu_\varepsilon^0 \leq \dots \leq \mu_\varepsilon^{s-1}$ с учетом кратности. Из теоремы 2 вытекает также, что $\lambda_\varepsilon^0 \leq \mu_\varepsilon^0, \dots, \lambda_\varepsilon^{s-1} \leq \mu_\varepsilon^{s-1}$.

Непосредственно из определений следует, что

$$L_s^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i = P_s(L^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i)$$

и

$$\|L_s^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|P_s(L^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i)\|_{L^2(0,\pi)} \leq C(\varepsilon i)^3,$$

где $i = 0, \dots, s-1$ и постоянная C не зависит от ε, i и s , поскольку операторная норма проектора ограничена единицей и выполнено неравенство (25).

Таким образом, из теоремы 3 следует, что найдется такое собственное значение $\mu_\varepsilon^{j(i)}$ оператора L_s^ε , что выполняется неравенство

$$|\mu_\varepsilon^{j(i)} - \lambda_a^i| \leq C(\varepsilon i)^3, \quad (26)$$

где $i = 0, \dots, s-1$ и постоянная C не зависит от ε, i и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Отметим, что неравенство (26) выполнено при $i = 0$ для каждого s в силу определения приближенных решений (16), согласованного при $i = 0$ с выбором $u_\varepsilon^0 = u_a^0 = w_a^0$ и $\lambda_\varepsilon^0 = \lambda_a^0 = \mu_\varepsilon^0 = a_0$.

Следуя [24] и [25], проверим, что фактически $j(i) = i$ в (26) для каждого $i = 0, \dots, s-1$. Здесь необходимо иметь в виду, что $j(i)$ может зависеть и от s , поскольку рассматриваемый оператор L_s^ε зависит от этого параметра.

Для $s = 2$ неравенства (26) записываются в виде

$$|\mu_\varepsilon^0 - \lambda_a^0| \leq C(\varepsilon 0)^3, \quad |\mu_\varepsilon^{j(1)} - \lambda_a^1| \leq C\varepsilon^3$$

и возможны только два варианта: либо $j(1) = 1$, что и требуется, либо $j(1) = 0$. В последнем случае $|\lambda_a^0 - \lambda_a^1| \leq C\varepsilon^3$, что невозможно в силу (16).

Для $s = 3$ неравенства (26) записываются в виде $\mu_\varepsilon^0 = \lambda_a^0$,

$$|\mu_\varepsilon^{j(1)} - \lambda_a^1| \leq C(\varepsilon 1)^3, \quad |\mu_\varepsilon^{j(2)} - \lambda_a^2| \leq C(\varepsilon 2)^3,$$

где $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$ в соответствии с определением (16). Как и в предыдущем случае, обязательно выполнено равенство $j(1) = 1$, но возможно также, что $j(2) = 1$ и для μ_ε^2 не выполнено неравенство в (26) для $i = 2$ при $s = 3$. В последнем случае найдутся такие положительные δ и $\kappa < 3$, что

$$\lambda_a^2 + \varepsilon^\kappa \delta < \mu_\varepsilon^2,$$

иначе для μ_ε^2 будет выполнено (26) при $i = 2$, поскольку уже известно, что

$$\lambda_a^2 - \varepsilon^3 C \leq \mu_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^2.$$

Таким образом, σ -окрестность числа $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$ при $\sigma = \varepsilon^\kappa \delta$ содержит только одно собственное значение μ_ε^1 оператора L_3^ε и из теоремы 3 следует, что

$$\|w_a^1 - \omega_\varepsilon^1\|_{L^2(0,\pi)} \leq C\varepsilon^{3-\kappa} \delta^{-1}, \quad \|w_a^2 - \omega_\varepsilon^1\|_{L^2(0,\pi)} \leq C\varepsilon^{3-\kappa} \delta^{-1}.$$

Однако, это невозможно [25], поскольку нормированная функция ω_ε^1 не может приближать сразу две ортонормированные функции w_a^1 и w_a^2 . Поэтому $j(2) = 2$ и для μ_ε^2 выполнено последнее неравенство в (26) при $s = 3$.

Далее, применяя индукцию по s , аналогично проверяется, что $j(i) = i$ в (26) для каждого $i = 0, \dots, s-1$, поскольку, предположив обратное, имеем либо противоречивое неравенство $|\lambda_a^{i-1} - \lambda_a^i| \leq C(\varepsilon i)^3$, либо противоречивое утверждение о приближении нескольких ортонормированных функций.

Аналогично доказывается, что $k(s) = s$ в (22). Действительно, для $s = 0$ это выполнено в силу определений. Далее, для $s = 1, 2$ уже известно, что

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^1 \leq \lambda_a^1 + \varepsilon^3 C, \quad \lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \mu_\varepsilon^2 \leq \lambda_a^1 + \varepsilon^3 C,$$

поскольку $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$. Используя (14)–(16), также получаем

$$a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq a_0 + \varepsilon^2 \beta + \varepsilon^3 C, \quad a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq a_0 + \varepsilon^2 \beta + \varepsilon^3 C. \quad (27)$$

Предположим, что последнему неравенству удовлетворяют также и другие собственные значения задачи (1), например, λ_ε^3 и

$$a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \lambda_\varepsilon^3 \leq a_0 + \varepsilon^2 \beta + \varepsilon^3 C.$$

В этом случае σ -окрестность числа $\lambda_a^0 = a_0$ при $\sigma = \varepsilon^2(\beta + \varepsilon C)$ содержит четыре собственных значения $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2, \lambda_\varepsilon^3$ оператора L^ε и из неравенств (25) для w_a^0, w_a^1, w_a^2 и теоремы 3 следует, что каждая из трех ортонормированных функций w_a^0, w_a^1, w_a^2 может быть приближена линейной комбинацией четырех ортонормированных функций $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, u_\varepsilon^3$, что невозможно [25].

Таким образом, найдутся такие положительные δ и $\kappa < 3$, что

$$\lambda_a^2 + \varepsilon^\kappa \delta < \lambda_\varepsilon^3 \leq \lambda_\varepsilon^4,$$

и из (27) следует, что $k(1) = 1$ и $k(2) = 2$ в (22). Далее, применяя индукцию по s , аналогично получаем $k(s) = s$ в (22) при $s \ll \varepsilon^{-1}$, что доказывает оценку теоремы 1 для собственных значений спектральной задачи (1).

Здесь существенно, что для каждого s и ε выполняются соотношения

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^s \leq \mu_\varepsilon^s \leq \lambda_a^s + (\varepsilon s)^3 C,$$

предоставляющие контроль над количеством собственных значений задачи (1) на конкретном отрезке. Такой контроль важен, поскольку выражение $k(s)$ в (22) может фактически зависеть от ε . Точнее, теорема 3 гарантирует только, что для фиксированных s и ε целое число $k(s)$ определено.

Для фиксированного нечетного s имеем

$$\lambda_a^{s-1} < \lambda_a^s = \lambda_a^{s+1} < \lambda_a^{s+2}.$$

В обозначениях из (14)–(16) для $s = 2k-1$ при $k = 1, \dots$ эти соотношения записываются также в следующем виде

$$a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta - \varepsilon^2 s \beta < \lambda_a^s = a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta < a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta + \varepsilon^2 (s+2) \beta.$$

Поэтому из неравенства (22) следует, что σ -окрестность числа λ_a^s при $\sigma = \varepsilon^2 s \beta$ содержит только два собственных значения $\lambda_\varepsilon^s, \lambda_\varepsilon^{s+1}$ задачи (1).

Таким образом, в силу теоремы 3 и неравенств (25) для w_a^s, w_a^{s+1} найдутся такие постоянные α_i^j (возможно зависящие от ε) для $i, j = 1, 2$, что

$$\begin{aligned} \|w_a^s - \alpha_1^1 u_\varepsilon^s - \alpha_2^1 u_\varepsilon^{s+1}\|_{L^2(0,\pi)} &\leq C \varepsilon s^2, \\ \|w_a^{s+1} - \alpha_1^2 u_\varepsilon^s - \alpha_2^2 u_\varepsilon^{s+1}\|_{L^2(0,\pi)} &\leq C \varepsilon s^2, \end{aligned} \quad (28)$$

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

где

$$\|\alpha_1^1 u_\varepsilon^s + \alpha_2^1 u_\varepsilon^{s+1}\|_{L^2(0,\pi)} = 1, \quad \|\alpha_1^2 u_\varepsilon^s + \alpha_2^2 u_\varepsilon^{s+1}\|_{L^2(0,\pi)} = 1,$$

и потому

$$(\alpha_1^1)^2 + (\alpha_2^1)^2 = 1, \quad (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 = 1,$$

поскольку функции $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}$ являются ортонормированными по определению. Таким образом, матрица $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$ является ортогональной.

Определим функции $v_\varepsilon^s, v_\varepsilon^{s+1}$ как результат ортогонального преобразования функций w_a^s, w_a^{s+1} матрицей $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$. Тогда из (28) получаем

$$\|v_\varepsilon^s - u_\varepsilon^s\|_{L_2(0,\pi)} \leq C \varepsilon s^2, \quad \|v_\varepsilon^{s+1} - u_\varepsilon^{s+1}\|_{L_2(0,\pi)} \leq C \varepsilon s^2,$$

что завершает доказательство теоремы 1 при $s^2 \ll \varepsilon^{-1}$.

Отметим, что для фиксированного нечетного s выполнено равенство приближенных собственных значений $\lambda_a^s = \lambda_a^{s+1}$. Таким образом, имеется произвол в выборе ортонормированных функций w_a^s, w_a^{s+1} , определяемый некоторой ортогональной матрицей. Поэтому и возникает необходимость в использовании ортогональной матрицы $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$ для коррекции этого произвола, учитывая конкретный выбор ортонормированных функций $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}$, являющихся точными решениями рассматриваемой задачи.

4. Выводы

Рассмотрена спектральная задача для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на конечном отрезке. Исследованы собственные значения и функции, определяющие решения такой задачи. На основе общих принципов осреднения построены приближенные разложения таких решений в виде асимптотических сумм с быстро осциллирующими слагаемыми. Доказаны утверждения об оценках асимптотической близости построенных асимптотических разложений и точных решений исходной задачи, зависящих от номера соответствующего собственного значения. Впервые такая зависимость выражена в виде явных формул с асимптотически точной оценкой.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье — М.: Издательство иностранной литературы, 1953. — 476 с.
2. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 1 — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 277 с.
3. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 2 — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 555 с.
4. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля — Киев: Наукова думка, 1972. — 202 с.
5. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака — М.: Наука, 1988. — 432 с.

6. Борн М. Динамическая теория кристаллических решеток — М: Издательство иностранной литературы, 1958. — 488 с.
7. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4 — М: Мир, 1982. — 426 с.
8. Harris P. J. F. Carbon nanotubes and related structures — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 294 с.
9. Kuchment P., Post O. On the spectra of carbon nano-structures // Commun. Math. Phys. — 2007. — V. 275. — P. 805–826.
10. Do N. T., Kuchment P. Quantum graph spectra of a graphyne structure // Nanoscale Systems MMTA. — 2013. — V. 2. — P. 107–123.
11. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 2016. — V. 53. — P. 343–414.
12. Do N. T., Kuchment P., Ong Beng-Seng. On resonant spectral gap opening in quantum graph networks // Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. — 2017. — P. 213–222.
13. Сандрakov Г. В., Базілєва М. І. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фіз.-мат. науки. — 2013. — V. 1. — С. 231–234.
14. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. Дифференциальные уравнения и геометрические графы — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
15. Krylova A. S., Sandrakov G. V. Homogenization of spectral problem on small-periodic networks // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2012. — V. 8. — P. 336–356.
16. Крилова А. С., Сандрakov Г. В. Усереднення спектральної задачі на дрібно-періодичній сітці в комплекснозначному випадку // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №1 (111). — С. 57–72.
17. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах — М.: Наука, 1984. — 352 с.
18. Олейник О. А., Шамаев А. С., Иосифьян Г. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред — М.: Издательство МГУ, 1990. — 312 с.
19. Сандрakov Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // Матем. сборник. — 1989. — Т. 180, №12. — С. 1634–1679.
20. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами — М.: Наука, 1979. — 832 с.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976. — 585с.
22. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики — М.: МЦНМО, 2003. — 304 с.
23. Arscott F. M., Periodic Differential Equations — Oxford: Pergamon Press, 1964. — 284 р.
24. Люстерник Л. А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // Успехи мат. наук. — 1954. — Т. 9, В. 2. — С. 3–66.
25. Вишник М.И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, В. 5. — С. 3–122.

Поступила 28.06.2017

QUADRATIC PROBLEM FOR MAXIMUM k -PLEX IN UNDIRECTED GRAPH

PETRO STETSYUK¹, TAMARA BARDADYM², VOLODYMYR LYASHKO³

¹Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: stetsyukp@gmail.com

²Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: tbardadym@gmail.com

³National University of „Kyiv-Mohyla Academy“, Kyiv, Ukraine, E-mail: v.lyashko@ukr.net

КВАДРАТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО k -ПЛЕКСА В НЕОРИЄНТОВАНОМУ ГРАФІ

П. І. СТЕЦЮК¹, Т. О. БАРДАДИМ², В. І. ЛЯШКО³

¹Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

²Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
E-mail: tbardadym@gmail.com

³Національний університет „Києво-Могилянська академія“, Київ, Україна,
E-mail: v.lyashko@ukr.net

ABSTRACT. The quadratic optimization problem of finding maximum k -plex in undirected graph is formulated. It is demonstrated that the quadratic problem can be obtained from well-known linear Boolean problem for maximum k -plex. Two families of functionally superfluous quadratic constraints obtained from Boolean problem constraints are reported.

KEYWORDS: maximum k -plex, quadratic optimization problem, Boolean linear programming problem, superfluous constraint.

РЕЗЮМЕ. У статті сформульовано квадратичну оптимізаційну задачу для знаходження максимального k -плекса у неоріентованому графі. Показано, що квадратичну задачу можна отримати з відомої лінійної булевої задачі для максимального k -плекса. Наведено два сімейства функціонально надлишкових квадратичних обмежень, які отримано за допомогою обмежень булевої задачі.
Ключові слова: максимальний k -плекс, квадратична оптимізаційна задача, задача булевого лінійного програмування, функціонально надлишкові обмеження.

ВСТУП

Структурні властивості графа суттєво залежать від того, чи мають окремі підмножини з множини вершин графа певні, наперед задані властивості. Задачі знаходження максимальних за потужністю таких підмножин мають різноманітні застосування [1]. Окремим випадком таких підмножин

є k -плекси. Це поняття для неоріентованого графа було введено в [2], а задача знаходження максимального k -плекса неоріентованого графа [2, 3] виникає та активно використовується при аналізі соціальних, телекомунікаційних та інших мереж [4]. При $k = 1$ k -плекс збігається з клікою (повним підграфом) графа. При $k > 1$ k -плекс є ослабленням поняття кліки графа і відповідає слабкішим вимогам на включення вершини в k -плекс, ніж вимоги на включення вершини до кліки.

У статті [3] задачу знаходження максимального k -плекса сформульовано у формі задачі булевого лінійного програмування. Нижче цю задачу сформульовано як квадратичну оптимізаційну задачу та проведено її аналіз, орієнтований на застосування техніки лагранжевих двоїстих оцінок [5].

Послідовність викладу матеріалу буде такою: у розділі 1 наведено загальні відомості про k -плекс, у розділі 2 описано множину допустимих розв'язків для k -плекса графа G за допомогою системи квадратичних обмежень. У розділі 3 розглянуто квадратичну задачу знаходження максимального k -плекса та проаналізовано її зв'язок із булевою лінійною постановкою з [3]. Там же розглянуто сімейства функціонально надлишкових обмежень для уточнення лагранжевих двоїстих оцінок у квадратичній задачі, що базуються на використанні обмежень лінійної булевої задачі для максимального k -плекса.

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО k -ПЛЕКС

Нехай $G=(V, E)$ — неоріентований граф із множиною вершин $V=\{1, \dots, n\}$ та множиною ребер E . Ребро графа G , що зв'язує вершини $i \in V$ та $j \in V$, будемо позначати $(i, j) \in E$. Для графа G буде використовуватися також інша форма його представлення: $G = (V, \Gamma)$, де $\Gamma = \{\Gamma(i), i = 1, \dots, n\}$, а $\Gamma(i)$ — кінцеві вершини тих дуг, у яких початковою вершиною є вершина i . Кількість ребер графа G в обох представленнях зв'язані співвідношенням: $|E| = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} |\Gamma(i)|$. Комплементарний до G граф будемо позначати $\overline{G} = (V, \overline{E})$ або $\overline{G} = (V, \overline{\Gamma})$, де $(i, j) \in \overline{E}$ і $\overline{\Gamma} = \{\overline{\Gamma}(i), i = 1, \dots, n\}$.

Означення 1. Підмножина вершин S із V називається k -плексом графа G , якщо ступінь кожної вершини в індукованому підграфі $G[S]$ (підграфі, породженному підмножиною S) є не меншою, ніж $|S| - k$.

Підмножина $S \subset V$ є k -плексом, якщо виконується така умова

$$\deg_{G[S]}(i) = |\Gamma(i) \cap S| \geq |S| - k \quad \forall i \in S.$$

k -Плекс є максимальним за включенням (maximal), якщо він не міститься ні в якому іншому k -плексі. Найбільший з максимальних за включенням k -плексів називається максимальним (maximum), його розмір називається k -плексним числом графа G та позначається $\rho_k(G)$ [3]. Очевидно, що 1-плекс є клікою графа G , тому що ступінь кожної вершини в індукованому підграфі $G[S]$ не менше, ніж $|S| - 1$, а це означає, що кожна з вершин у підграфі $G[S]$ зв'язана з усіма іншими вершинами, тобто підграф $G[S]$ є повним підграфом (клікою) графа G . У даному випадку $\rho_1(G) = \omega(G)$, де $\omega(G)$ — клікове число графа G (розмір його максимальної кліки).

Поняття *co- k* -плекса графа G , також введене в [3], є узагальненням поняття незалежної множини вершин графа G . При $k = 1$ *co- k* -плекс збігається з незалежною множиною вершин графа. При $k > 1$ *co- k* -плекс є ослабленням поняття незалежної множини вершин графа (відомої також як внутрішньо стійка множина).

Означення 2. Підмножина вершин S з V називається *co- k* -плексом графа G , якщо виконується така умова

$$\deg_{G[S]}(i) = |\Gamma(i) \cap S| \leq k - 1 \quad \forall i \in S.$$

Отже, $S \subset V$ є *co- k* -плексом, якщо ступінь кожної вершини в індукованому підграфі $G[S]$ є не більшою, ніж $k - 1$. Очевидно, що *co-1*-плекс є незалежною множиною вершин графа G , оскільки ступінь кожної вершини в індукованому підграфі $G[S]$ дорівнює нулю, а це означає, що кожна з вершин у підграфі $G[S]$ не зв'язана з жодною з інших вершин підграфа $G[S]$. Відмітимо, що *co- k* -плекс і k -плекс для графа G знаходяться в такому ж зв'язку як кліка графа G і незалежна множина вершин графа G . Тому підмножина S є *co- k* -плексом графа G тоді й тільки тоді, коли S є k -плексом для комплементарного графа \bar{G} .

2. КВАДРАТИЧНІ ОБМЕЖЕННЯ ДЛЯ k -ПЛЕКСА

Нехай вершині $i \in V$ ($i = 1, 2, \dots$) відповідає булева змінна $x_i \in \{0, 1\}$ така, що

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \in S, \\ 0, & \text{якщо } i \in V \setminus S. \end{cases}$$

Булеві змінні x_i , $i = 1, \dots, n$ будуть описуватися за допомогою квадратичних обмежень-рівностей

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \forall i \in V. \quad (1)$$

Побудуємо такі квадратичні обмеження, щоб підмножина S була k -плексом. Ці обмеження повинні задавати вимоги на те, щоб ступінь кожної вершини $i \in S$ у підграфі $G[S]$ була не меншою за $|S| - k$, тобто, щоб у підграфі $G[S]$ кількість дуг, що виходять із кожної вершини $i \in S$ була не меншою за $|S| - k$.

Нехай вершина i належить підмножині S , тобто $x_i = 1$. Позначимо через $N_e(i)$ ступінь вершини i у підграфі $G[S]$, тобто кількість дуг, що виходять з вершини $i \in S$. Тоді в підграфі $G[S]$ ступені вершин із підмножини S задаються за допомогою сімейства співвідношень

$$N_e(i) = \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j \quad \forall i \in S. \quad (2)$$

З рівняння $|S| = \sum_{j \in V} x_j$ та умови, що множина S є k -плексом, одержуємо нерівності

$$N_e(i) \geq |S| - k = \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j - k \quad \forall i \in S. \quad (3)$$

Із співвідношень (2) та (3) одержуємо сімейство нерівностей

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} x_j \geq \sum_{j \in V} x_j - k \quad \forall i \in S, \quad (4)$$

при виконанні яких всі ті вершини $i \in V$, для яких $x_i = 1$, будуть утворювати k -плекс.

Однак, нерівності типу (4) не будуть виконуватися для тих вершин $i \in V$, для яких $x_i = 0$, тобто для всіх $x_i \in V \setminus S$. Для того, щоб одержати квадратичні нерівності, що будуть справедливими і для змінних $x_i = 0$, досить обидві частини нерівності вигляду (4), що відповідає вершині i , помножити на змінну x_i . З огляду на невід'ємність змінної x_i знак нерівності після множення не зміниться, і в результаті одержимо такі нерівності

$$x_i \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} x_j \right) \geq x_i \left(\sum_{j \in V} x_j - k \right) \quad \forall i \in V,$$

які можна переписати у вигляді

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} x_i x_j \geq \sum_{j \in V} x_i x_j - k x_i \quad \forall i \in V. \quad (5)$$

Квадратичні нерівності (5) разом із обмеженнями (1) повністю описують умови, за яких вершини i належать k -плексу. Дійсно, нерівності (5) будуть справедливі для тих вершин i , для яких $x_i = 1$, оскільки вони переходять в обмеження (4). Нерівності (5) будуть справедливі також для усіх вершин i , для яких $x_i = 0$, тому що вони переходять у тривіальну нерівність $0 \geq 0$.

Зрозуміло, що за допомогою обмежень у вигляді рівностей (1) та у вигляді нерівностей (5) можна описати допустимі булеві розв'язки, які відповідають k -плексу. При цьому зміст обмежень (5) буде пов'язаний із інтерпретацією ступеня вершини, як цього вимагає поняття k -плекса, — в ньому ступінь вершини $i \in S$ більше або дорівнює $|S| - k$. Дійсно, права частина обмеження (5) для вершини i , що належить k -плексу, вказує кількість ребер, що виходять з i -ї вершини, з урахуванням того, що $x_i x_j = 1$ лише тоді, коли обидві змінні x_i та x_j дорівнюють одиниці.

Нерівність (5) можна спростити. Помітимо, що

$$\sum_{j \in V} x_j = \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j + \sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j + x_i.$$

Тоді нерівності (5) можна переписати так

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} x_i x_j \geq \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} x_i x_j + \sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j + x_i^2 \right) - k x_i, \quad \forall i \in V,$$

звідки

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j \leq k x_i - x_i^2 \quad \forall i \in V.$$

З урахуванням того, що $x_i = x_i^2$ (див. формулу (1)), останні нерівності можна переписати так

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j \leq (k-1)x_i \quad \forall i \in V. \quad (6)$$

Нерівності (6) разом із рівностями (1) ми покладемо в основу квадратичної моделі для знаходження максимального k -плекса графа G .

Відмітимо, що квадратичним нерівностям (6) можна надати інший зміст, ніж нерівностям (5). Нерівності (6) пов'язані з комплементарним графом \bar{G} і описують таку підмножину вершин S , що ступінь вершини в індукційованому цією підмножиною підграфі $\bar{G}[S]$ не більша за $(k-1)$. Дійсно, для тих вершин $i \in V$, для яких $x_i = 1$, нерівності (6) рівносильні таким нерівностям

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq (k-1) \quad \forall i \in S,$$

а для тих вершин i , для яких $x_i = 0$, вони рівносильні тривіальним нерівностям $0 \leq 0$. Тому опис підмножини S за допомогою нерівностей (6) та рівностей (1) логічно інтерпретувати як опис $co-k$ -плекса для комплементарного графа \bar{G} .

3. КВАДРАТИЧНА БУЛЕВА ЗАДАЧА ДЛЯ $\rho_k(G)$

Ураховуючи, що обмеження (1) та (6) описують множину допустимих варіантів утворення k -плекса, для знаходження максимального k -плекса графа G оптимізаційну квадратичну задачу можна сформулювати в такій формі

$$\rho_k(G) = \max_x \sum_{i \in V} x_i \quad (7)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j \leq (k-1)x_i \quad \forall i \in V, \quad (8)$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \forall i \in V. \quad (9)$$

Зрозуміло, що задачу (7)–(9) можна інтерпретувати як задачу знаходження максимального $co-k$ плекса графа \bar{G} . Із (7)–(9) легко одержати формуллювання квадратичної оптимізаційної задачі для $co-k$ -плекса графа \bar{G} . Для цього досить у сумі лівої частини обмеження (8) замість підсумовування по $j \in \bar{\Gamma}(i)$ використовувати підсумовування по $j \in \Gamma(i)$. Тобто, якщо обмеження (8) замінити на

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} x_i x_j \leq (k-1)x_i \quad \forall i \in V, \quad (10)$$

то ми одержимо формуллювання квадратичної оптимізаційної задачі знаходження максимального $co-k$ -плекса графа \bar{G} .

Формулювання задачі (7)–(9) можна одержати із задачі булевого лінійного програмування, запропонованої в [3]:

$$\rho_k(G) = \max_x \sum_{i \in V} x_i \quad (11)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq (k-1)x_i + \bar{d}_i(1-x_i) \quad \forall i \in V, \quad (12)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \quad (13)$$

де $\bar{d}_i = |\bar{\Gamma}(i)|$. Лінійні обмеження (12) побудовано за схемою, подібною тій, що використовувалася у попередньому розділі при переході від обмежень (4), справедливих для $i \in S$ (при $x_i = 1$), до обмежень (5), що є справедливими також для $i \in V \setminus S$ (при $x_i = 0$). Однак, правило для того, щоб обмеження (12) виконувалися для будь-яких $i \in V \setminus S$, тут буде іншим. При $x_i = 1$ обмеження (12) виконуються як нерівності

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq (k-1) \quad \forall i \in S,$$

які повинні бути справедливими для *co-k*-плекса графа \bar{G} , що збігається з k -плексом графа G . При $x_i = 0$ обмеження (12) переходять у нерівності

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq \bar{d}_i = |\bar{\Gamma}(i)| \quad \forall i \in V \setminus S,$$

які є справедливими, бо в якості верхньої границі на ступені вершин, що не входять у *co-k*-плекс графа \bar{G} , використовується максимально можлива кількість ребер, що виходять з кожної з вершин графа \bar{G} . Ті з цих обмежень, де не всі змінні під знаком суми дорівнюють одиниці, будуть надлишковими.

Із задачі лінійного булевого програмування (11)–(13) легко одержати квадратичну задачу (7)–(9). Для цього слід обмеження (13) замінити на відповідний нелінійний аналог (9), а обмеження, яке відноситься до i -ї вершини з (12), помножити на змінну x_i . В силу невід'ємності змінних x_i , $i = 1, 2, \dots$ знаки нерівностей при множенні не зміняться, і в результаті одержимо

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j \leq (k-1)x_i^2 + \bar{d}_i(1-x_i)x_i \quad \forall i \in V,$$

звідки, з урахуванням того, що $(1-x_i)x_i = x_i - x_i^2 = 0$ для всіх $i \in V$, приходимо до обмежень (8).

Зрозуміло, що кожна з задач (7)–(9) та (11)–(13) має свої переваги та свої недоліки. Так, наприклад, найсуттєвіша перевага квадратичної задачі над лінійною булевою полягає в тому, що незначним удосконаленням

задачі (7)–(9) можна сформулювати квадратичні оптимізаційні задачі знаходження максимальних за розміром підмножин графа із сильнішими властивостями, ніж k -плекс або *co- k* -плекс, — достатньо лише посилити вимогу на включення вершин у ці підмножини. Так, наприклад, умовимося під „строгим“ k -плексом графа G розуміти підмножину його вершин, для яких ступінь вершини дорівнює $|S| - k$. Аналогічно введемо поняття „строго“ *co- k* -плекса: в ньому ступінь вершини дорівнює $k - 1$. Для того щоб сформулювати квадратичні задачі знаходження максимальних із цих підмножин, досить в обмеженнях (8) та (10) замість нерівностей використовувати рівності. Для знаходження „строго“ k -плекса графа G обмеження (8) слід замінити на обмеження

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_i x_j = (k - 1)x_i, \quad \forall i \in V,$$

а для знаходження „строго“ *co- k* -плекса графа G обмеження (10) слід замінити на такі:

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} x_i x_j = (k - 1)x_i, \quad \forall i \in V.$$

До переваги лінійної булевої задачі над квадратичною можна віднести той факт, що для задачі (11)–(13) легко підраховувати верхні оцінки для $\rho_k(G)$ за допомогою релаксації обмеження (13). У ряді випадків, наприклад, коли $\rho_k(G)$ буде більше $n/3$, ці оцінки, як правило, можуть виявитися більш ефективними оцінками зверху для $\rho_k(G)$. У результаті для деяких спеціальних графів на базі методу гілок та границь можна реалізувати швидкі алгоритми для знаходження $\rho_k(G)$.

Знаходження верхніх оцінок для квадратичної задачі (7)–(9) є більш трудомістким, ніж для релаксованої задачі (11)–(13). Так, наприклад, якщо в такій якості використовувати лагранжеві двоїсті оцінки [4], [5], то знаходження таких оцінок за допомогою методів недиференційованої оптимізації вимагатиме більше часу, чим у випадку задач лінійного програмування. Однак, для ряду графів лагранжеві двоїсті оцінки можуть виявитися значно точнішими верхніми оцінками, ніж лінійні оцінки. Більш того, існує резерв для уточнення лагранжевих двоїстих оцінок задачі (7)–(9): це введення функціонально надлишкових обмежень [5].

Лінійні обмеження (12) можна використовувати для побудови функціонально надлишкових обмежень з метою покращити точність лагранжевих двоїстих оцінок у багатоекстремальних квадратичних задачах (7)–(9). Якщо скористатися схемою, що використовувалася Н. З. Шором для задачі про максимальну незалежну множину вершин графа [5, с. 250], то при цьому до задачі (7)–(9) додаються два види функціонально надлишкових обмежень. Обмеження першого виду одержано домноженням кожного з лінійних обмежень у (12) на ті змінні x_l , які не входять у це обмеження, тобто додаються $n(n - 1)$ надлишкових обмежень вигляду

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_l x_j \leq (k - 1)x_l x_i + \bar{d}_i(1 - x_i)x_l \quad \forall i, l \in V, \quad i \neq l. \quad (14)$$

Функціонально надлишкові обмеження другого типу можна одержати з лінійних обмежень (12) домноженням на $1-x_l$, $l = 1, 2, \dots$. Тут уже можна використовувати $i = l$, бо вони дають нові квадратичні обмеження у формі нерівностей. У результаті маємо n^2 обмежень

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_l x_j - \sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq (k-1)x_l x_i + \bar{d}_i(1-x_i)x_l \quad \forall i, l \in V. \quad (15)$$

Зауважимо, що використання надлишкових обмежень (14), (15) значно збільшує розміри квадратичної задачі. Однак, якщо до попередньої задачі додавати тільки невелику кількість тих надлишкових обмежень, які уточнюють двоїсту оцінку для наступної задачі, то тоді загальна кількість обмежень у кінцевій квадратичній задачі буде невеликою. За такою ж схемою можна використовувати і інші види функціонально надлишкових обмежень для булевих задач, які розглядалися у роботах [6], [7].

Висновки

У роботі побудовано квадратичне формулювання оптимізаційної задачі знаходження максимального k -плекса для неоріентованого графа. Спорідненість понять k -плекса та клікі дає підстави рекомендувати для її розв'язання підхід, пов'язаний з лагранжевими оцінками та використанням надлишкових обмежень. Цей підхід був запропонований Н. З. Шором та дав ряд важливих теоретичних результатів для задачі про максимальну незалежну множину вершин графа [5].

Роботу виконано за підтримки НАН України, проект 0117U000327.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кристофідес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — Мир: Москва, 1978. — 432 с.
2. Seidman S. B., Foster B. L. A graph theoretic generalization of the clique concept // J. of Math. Sociology. — 1978. — Vol. 6. — P. 139–154.
3. Balansundaram B., Butenko S., Hicks I. V. Clique Relaxations in Social Network Analysis: The Maximum k -plex Problem // Operations Research. — 2011. — Vol. 59, Number 1. — P. 133–142.
4. Нові мережево-орієнтовані методики для інформаційного аналізу великих масивів даних / П. І. Стецюк, М. Г. Журбенко, І. В. Сергієнко та інші // Звіт про науково-дослідну роботу М/163-2006, № держ. реєстрації 0106U010005. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2006. — 112 с.
5. Shor N. Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. — London/Boston/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. — 394 p.
6. Стецюк П. И. О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 168–172.
7. Стецюк П. И. Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 63–75.

Надійшла 28.04.2017

**TWO-STEP SECANT-TYPE METHOD
FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS**

STEPAN SHAKHNO, YURIY SHUNKIN

Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Ivan Franko National University of Lviv,
Lviv, Ukraine, E-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua

**ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ТИПУ ХОРД
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ**

С. М. ШАХНО, Ю. В. ШУНЬКІН

Факультет прикладної математики та інформатики, Львівський національний
університет імені Івана Франка, Львів, Україна, E-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua

RESUME. A two-step method for solving of nonlinear operator equations in Banach spaces, which is based on the Secant method, is proposed and its semilocal convergence under weak ω -conditions for divided differences of the first order is proved. The conditions of convergence and rate of convergence of this method are analyzed, uniqueness ball of the solution of the problem is found. The results of the numerical solving of nonlinear equations with nondifferentiable operator are presented.

KEYWORDS: nonlinear equation, two-step iterative method, Secant method, divided difference, difference method, semilocal convergence.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано двокроковий метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь в банахових просторах, побудований на базі методу хорд, та обґрунтовано його напівлокальну збіжність за слабких ω -умов для поділених різниць першого порядку. Встановлено умови збіжності та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдності розв'язку задачі. Наведено результати чисельного розв'язування нелінійних систем рівнянь з недиференційовним оператором.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійне рівняння, двокроковий ітераційний метод, метод хорд, поділена різниця, різницевий метод, напівлокальна збіжність.

ВСТУП

Нехай задано рівняння

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

де $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ — неперервний оператор, диференційовності якого, взагалі кажучи, не вимагається, X, Y — банахові простори, D — відкрита опукла множина в X .

Класичним методом розв'язування нелінійного рівняння (1) є метод Ньютона [1, 2]

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

який потребує обчислення похідної Фреше і має квадратичний порядок збіжності. У [3, 4] досліджено двокроковий метод, який не потребує білінійних операторів і має третій порядок збіжності. Ітераційна формула цього методу має вигляд

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F'(x_n)^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F'(x_n)^{-1}F(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Однак ці методи потребують обчислення оператора похідної Фреше, що не завжди можливо або важко обчислити.

Відомим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь, який не вимагає похідних, є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

де $F(x_n, x_{n-1})$ — поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} — задані. Неперервний лінійний оператор $F(x, y)$ з X в Y називають поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y ($x \neq y$), якщо справджується рівність

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \quad (5)$$

Ітераційні різницеві методи розв'язування нелінійних операторних рівнянь розглядалися у працях [2]–[12] за різних умов. Зокрема, метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі досліджувався авторами [2, 7, 8, 10] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора F задовольняють умову Ліпшиця (Гольдера) з невід'ємною постійною L . У праці [13] вперше запропоновано узагальнену умову Ліпшиця, де замість сталої Ліпшиця використовується деяка додатна інтегровна функція, і за цієї умови вивчено збіжність методу Ньютона. Нами у [6, 12] подібну узагальнену умову введено для поділених різниць при вивчені методу хорд.

У праці [3] запропоновано модифікацію методу Стеффенсена (3), яка використовує поділені різниці

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F(x_n - \alpha_n F(x_n), x_n + \alpha_n F(x_n))^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n - \alpha_n F(x_n), x_n + \alpha_n F(x_n))^{-1}F(y_n), \end{aligned} \quad (6)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha_n \in [0, 1]$ — малий числовий параметр, який вибирається користувачем. Він може використовуватися для контролю доброї апроксимації першої похідної Фреше. Проте не задано конструктивного способу вибору параметра α_n .

У цій праці ми пропонуємо двокроковий метод без використання похідних, у якому нема потреби задавати ніяких параметрів,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

та досліджуємо його напівлокальну збіжність (за умов типу Канторовича).

Зауважимо, що цей метод відрізняється від звичайного двокрокового методу хорд

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

тим, що у першій формулі (7) замість знака „мінус“ взято знак „плюс“. Методи (7) і (8), як і метод хорд (4), на відміну від методів (2) і (3), можна застосовувати для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором.

1. ОЗНАЧЕННЯ

Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту кулю радіуса r з центром в точці x_0 , а через $\overline{B(x_0, r)} = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ замкнену кулю радіуса r з центром в точці x_0 .

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (9)$$

називають умовою Ліпшиця в області D з постійною L .

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути константою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку умова (9) може бути замінена на

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-y\|+\|u-v\|} L(z) dz \quad \forall x, y, u, v \in D. \quad (10)$$

Умову (10) називають узагальненою умовою Ліпшиця, або такою, що містить L у середньому [6]. Поклавши $L = const$, ми отримаємо розглянуту вище класичну умову Ліпшиця (9).

У працях [3, 9] розглянуто інше узагальнення умов Ліпшиця для поділених різниць.

Будемо казати, що поділена різниця задовольняє ω -умову, якщо

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D, \quad (11)$$

де $\omega : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ є неперервна функція, неспадна за обома змінними.

При $\omega(u_1, u_2) = L(u_1 + u_2)$ отримаємо умову Ліпшиця, а при $\omega(u_1, u_2) = L(u_1^p + u_2^p)$ — умову Гольдера. В загальному, умова (11) не вимагає диференційності F .

Вивчення напівлокальної збіжності методу (7) ми проведемо саме за ω -умов для поділених різниць першого порядку.

2. НАПІВЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ (7)

Використовуючи означення поділеної різниці, з формул (7) отримаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}(F(x_n) - F(y_n)) = \\ &= x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)(x_n - y_n) = \\ &= x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)(-(F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n))) = \\ &= x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= F(x_n, x_{n-1}), \\ \Phi_n &= \Gamma_n F(x_n, x_n + \Gamma_n^{-1}F(x_n))^{-1}\Gamma_n. \end{aligned}$$

Умови існування розв'язку, його єдиноті та збіжності до нього ітерацій методу (7) встановлює

Теорема 1. *Нехай F — неперервний нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y . Припустимо, що існує поділена різниця першого порядку оператора F , яка задовільняє умову*

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D, \quad (13)$$

де $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ є неперервна функція, неспадна за обома змінними, причому $\omega(0, x) = \omega(x, 0) = \frac{1}{2}\omega(x, x)$.

Нехай $x_0 \in D$. Припустимо, що:

- 1) $\|x_1 - x_0\| \leq \eta$, $\|x_0 - x_{-1}\| = \alpha$,
- 2) лінійний оператор Γ_0 має обернений і $\|\Gamma_0^{-1}\| \leq \beta$,
- 3) $\max\{\|\Gamma_0^{-1}F(x_0)\|, \|\Phi_0^{-1}F(x_0)\|\} \leq \eta$.

4) Позначимо $\gamma = \max\{\eta, \alpha\}$, $m = \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)$ і припустимо, що рівняння

$$t\left(1 - \frac{m}{1 - 2\beta\omega(t + \gamma, t + \gamma)}\right) - \eta = 0 \quad (14)$$

має принаймні один додатний корінь, причому R найменший додатний корінь. Якщо $\beta\omega(R + \gamma, R + \gamma) < \frac{1}{3}$ і $\overline{B(x_0, R)} \subset D$, тоді

$M = \frac{m}{1 - 2\beta\omega(R + \gamma, R + \gamma)} \in (0, 1)$ і метод (7) є коректно визначений і

генерована ним послідовністю $\{x_n\}_{n \geq 0}$ належить $B(x_0, R)$ і збігається до єдиного розв'язку $F(x) = 0$ в $\overline{B(x_0, R)}$.

Доведення. З умов теореми випливає, що x_1 коректно визначене і

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta < R.$$

Отже, $x_1 \in B(x_0, R)$.

Оскільки ω є неспадна функція, то маємо

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0^{-1}\Gamma_1\| &\leq \|\Gamma_0^{-1}\| \|\Gamma_0 - \Gamma_1\| \leq \|\Gamma_0^{-1}\| \|F(x_0, x_{-1}) - F(x_1, x_0)\| \leq \\ &\leq \|\Gamma_0^{-1}\| \omega(\|x_0 - x_1\|, \|x_{-1} - x_0\|) \leq \beta \omega(\eta, \alpha) \leq \beta \omega(R + \gamma, R + \gamma) < 1. \end{aligned}$$

Отже, Γ_1^{-1} добре визначений і

$$\|\Gamma_1^{-1}\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \beta \omega(\eta, \alpha)} \leq \frac{1}{1 - \beta \omega(R + \gamma, R + \gamma)},$$

$$\|\Gamma_1^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(\eta, \alpha)} \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(R + \gamma, R + \gamma)}.$$

Зокрема, Φ_1^{-1} і x_2 добре визначені. Далі ми отримаємо

$$\begin{aligned} F(x_1) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_0) = \\ &= F(x_1) - F(x_0) - \Phi(x_0)(x_1 - x_0) = (F(x_1, x_0) - \Phi_0)(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|\Phi_1^{-1}F(x_1)\| = \|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\Gamma_1^{-1}F(x_1)\| \leq \|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\| \|\Gamma_1^{-1}F(x_1)\| \leq \\ &\leq \|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\| \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0)\| \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Оцінимо перші два множники. Отримаємо спочатку оцінку для $\|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0)\|$. З нерівностей

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0^{-1}F(x_0, y_0)\| &\leq \|\Gamma_0^{-1}\| \|\Gamma_0 - F(x_0, y_0)\| \leq \beta \omega(0, \|x_{-1} - y_0\|) \leq \\ &\leq \beta \omega(0, \|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - y_0\|) \leq \beta \omega(0, \eta + \alpha) \leq \beta \omega(R + \gamma, R + \gamma) < 1, \end{aligned}$$

$$\|F(x_0, y_0)^{-1}\| \leq \|F(x_0, y_0)^{-1}\Gamma_0\| \|\Gamma_0^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(0, \eta + \alpha)},$$

$$\begin{aligned} \|I - F(x_0, y_0)^{-1}\Gamma_0\| &= \|F(x_0, y_0)^{-1}(F(x_0, y_0) - \Gamma_0)\| \leq \\ &\leq \|F(x_0, y_0)^{-1}\| \|F(x_0, y_0) - F(x_0, x_{-1})\| \leq \|F(x_0, y_0)^{-1}\| \omega(0, \|y_0 - x_{-1}\|) \leq \\ &\leq \|F(x_0, y_0)^{-1}\| \omega(0, \|y_0 - x_0\| + \|x_0 - x_{-1}\|) \leq \\ &\leq \frac{\beta \omega(0, \eta + \alpha)}{1 - \beta \omega(0, \eta + \alpha)} \leq \frac{\beta \omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{2 - \beta \omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} \leq \frac{\beta \omega(R + \gamma, R + \gamma)}{2 - \beta \omega(R + \gamma, R + \gamma)} < 1 \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
 \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0)\| &= \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0 + \Gamma_0 - \Gamma_0)\| \leq \\
 &\leq \|\Gamma_1^{-1}\| \|(F(x_1, x_0) - \Gamma_0\| + \|\Gamma_1^{-1}\Gamma_0\| \|F(x_0, y_0)^{-1}\Gamma_0 - I\| \leq \\
 &\leq \frac{\beta\omega(\eta, 0)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} + \frac{1}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \frac{\beta\omega(0, \eta + \alpha)}{1 - \omega(0, \eta + \alpha)} = \\
 &= \frac{1}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \left(\beta\omega(\eta, 0) + \frac{\beta\omega(0, \eta + \alpha)}{1 - \omega(0, \eta + \alpha)} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \left(\frac{1}{2} \beta\omega(\eta, \eta) + \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{1 - \frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} \right) \leq \\
 &\leq \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} \right) \leq \\
 &\leq \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \frac{4 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{2 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} < 1.
 \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку для $\|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\|$. Спочатку

$$\begin{aligned}
 \|y_1 - x_1\| &= \|\Gamma_1^{-1}F(x_1)\| = \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0)(x_1 - x_0)\| \leq \\
 &\leq \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - \Phi_0)\| \|x_1 - x_0\| < \eta.
 \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
 \|I - \Gamma_1^{-1}F(x_1, y_1)\| &\leq \|\Gamma_1^{-1}(\Gamma_1 - F(x_1, y_1))\| \leq \\
 &\leq \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1, x_0) - F(x_1, y_1))\| \leq \|\Gamma_1^{-1}\| \omega(0, \|x_0 - y_1\|) \leq \\
 &\leq \|\Gamma_1^{-1}\| \omega(0, \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y_1\|) \leq \frac{\beta\omega(0, 2\eta)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \frac{\beta\omega(2\eta, 2\eta)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} < 1, \\
 \|F(x_1, y_1)^{-1}\Gamma_1\| &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{\beta\omega(2\eta, 2\eta)}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)}} \leq \frac{2 - 2\beta\omega(\eta, \alpha)}{2 - \beta\omega(2\eta, 2\eta) - 2\beta\omega(\eta, \alpha)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|F(x_1, y_1)^{-1}\| &\leq \|F(x_1, y_1)^{-1}\Gamma_1\| \|\Gamma_1^{-1}\| \leq \\
 &\leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(\eta, \alpha)} \frac{2 - 2\beta\omega(\eta, \alpha)}{2 - \beta\omega(2\eta, 2\eta) - 2\beta\omega(\eta, \alpha)} \leq \frac{2\beta}{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}.
 \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
 \|I - \Gamma_1^{-1}\Phi_1\| &= \|I - F(x_1, y_1)^{-1}\Gamma_1\| \leq \|F(x_1, y_1)^{-1}\| \|F(x_1, y_1) - \Gamma_1\| \leq \\
 &\leq \|F(x_1, y_1)^{-1}\| \|F(x_1, y_1) - F(x_1, x_0)\| \leq \|F(x_1, y_1)^{-1}\| \omega(0, \|y_1 - x_0\|) \leq \\
 &\leq \frac{2\beta\omega(0, 2\eta)}{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \leq \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} < 1.
 \end{aligned}$$

Далі

$$\|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}} \leq \frac{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{2 - 4\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}.$$

З іншого боку, оскільки $\omega(\eta, \eta) \leq \omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{2 - 4\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{1 - \beta\omega(\eta, \eta)} \frac{4 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{2 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} < \\ & < \frac{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{4(1 - 2\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))} \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{1 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \frac{4}{2 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}. \end{aligned}$$

Співвідношення

$$\begin{aligned} & \frac{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{(1 - 2\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))} \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{1 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \frac{1}{2 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} < \\ & < \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{1 - 2\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \end{aligned}$$

еквівалентно наступній нерівності

$$2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma) < (1 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))(2 - \beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))$$

або

$$-(\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))^2 < 0.$$

Очевидно, остання нерівність виконується завжди.

Тоді

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| & \leq \\ & \leq \frac{2 - 3\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{4(1 - 2\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma))} \frac{\beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{1 - \beta\omega(\eta, \eta)} \frac{4 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)}{2 - \beta\omega(\eta + \alpha, \eta + \alpha)} \times \\ & \quad \times \|x_1 - x_0\| < \frac{\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)}{1 - 2\beta\omega(\eta + \gamma, \eta + \gamma)} \|x_1 - x_0\| < M\eta. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи (14) і $M < 1$, отримаємо

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (M + 1)\eta < \frac{1}{1 - M}\eta = R.$$

Отже, $x_2 \in B(x_0, R)$. Далі за індукцією можна довести:

- (a) $\|x_n - x_0\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M^k \eta < R$, а отже $x_n \in B(x_0, R)$;
- (b) з оцінки $\|x_n - x_{n-1}\| \leq M^{n-1} \|x_1 - x_0\|$ робимо висновок, що $\{x_n\}$ є фундаментальною послідовністю, що означає збіжність її до деякого $x^* \in B(x_0, R)$;
- (c) оскільки

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| & = \|(F(x_n, x_{n-1}) - \Phi_{n-1})(x_n - x_{n-1})\| \leq \\ & \leq \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n^{-1}(F(x_n, x_{n-1}) - \Phi_{n-1})\| \|x_n - x_{n-1}\| \leq \|\Gamma_n\| \|x_n - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

і $\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, ми отримуємо, що $F(x^*) = 0$.

Зауважимо, що

$$\|\Gamma_n\| \leq \|\Gamma_0\| + \|\Gamma_n - \Gamma_0\| \leq \|\Gamma_0\| + \omega(R, R + \alpha).$$

Також доведемо єдиність розв'язку рівняння $F(x) = 0$. Припустимо, що y^* — інший розв'язок цього рівняння в $B(x_0, R)$, тобто, $F(y^*) = 0$. Оскільки

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0^{-1}F(x^*, y^*)\| &\leq \|\Gamma_0^{-1}\| \|F(x_0, x_{-1}) - F(x^*, y^*)\| \leq \\ &\leq \beta \omega(\|x_0 - x^*\|, \|x_{-1} - y^*\|) \leq \beta \omega(\|x_0 - x^*\|, \|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - y^*\|) \leq \\ &\leq \beta \omega(R, R + \alpha) < 1, \end{aligned}$$

то оператор $F(x^*, y^*)$ оборотний і з рівності

$$F(x^*, y^*)(x^* - y^*) = F(x^*) - F(y^*)$$

ми маємо $x^* = y^*$. □

3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для вивчення реальних обчислювальних властивостей запропонованого методу (7) та інших подібних різницевих методів нами проведено обчислювальний експеримент на низці тестових задач. Обчислення проводились до виконання таких умов:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon \quad \text{i} \quad \|F(x_{k+1})\| \leq \varepsilon.$$

Ми використовували у розрахунках „максимум“-норму $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i|$ і точність $\varepsilon = 10^{-15}$.

Щоб забезпечити добру початкову апроксимацію матриці Якобі та вдалий старт різницевих ітераційних методів, ми вибирали додаткове початкове наближення $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$. Поділена різниця першого порядку для оператора $F : R^n \rightarrow R^n$, тобто, для $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, є матрицею $F(x, y)$ розмірності $n \times n$. Її елементи обчислюються за формулою

$$F(x, y)_{i,j} = \frac{F_i(x^1, \dots, x^j, y^{j+1}, \dots, y^n) - F_i(x^1, \dots, x^{j-1}, y^j, \dots, y^n)}{x^j - y^j}, \quad (15)$$

де $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Як тестові задачі вибрано системи нелінійних рівнянь, які містять недиференційовну частину. Зауважимо, що метод Ньютона (2) та його двокрокову модифікацію (3) не можна застосувати для розв'язування таких систем.

Приклад 1 [5].

$$\begin{aligned} 3x^2y - y^2 - 1 + |x - 1| &= 0, \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| &= 0, \\ (x^*, y^*) \approx (0, 8946553733346867, 0, 3278265217462975). \end{aligned}$$

Приклад 2 [9].

$$\begin{aligned}x^2 - y + 1 + \frac{1}{9}|x - 1| &= 0, \\x + y^2 - 7 + \frac{1}{9}|y| &= 0,\end{aligned}$$

$$(x^*, y^*) \approx (1, 159360850193451, 2, 361824342093).$$

Приклад 3 [3].

$$\begin{aligned}|x^2 - 1| + y - 1 &= 0, \\x + y^2 - 2 &= 0,\end{aligned}$$

$$(x^*, y^*)_1 = (1, 1), \quad (x^*, y^*)_2 = (-2, -2),$$

$$(x^*, y^*)_3 \approx (1, 618033988749895, -0, 6180339887498949).$$

Приклад 4 [5].

$$\begin{aligned}z^2(1 - y) - xy + |y - z^2| &= 0, \\z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| &= 0, \\6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| &= 0,\end{aligned}$$

$$(x^*, y^*, z^*) = (-1, 2, 3).$$

ТАБЛИЦЯ 1. Кількість ітерацій для знаходження розв'язку рівняння

Приклад, розв'язок	Початкове наближення	Метод		
		хорд (4)	(7)	(8)
1	(1, 0)	9	8	9
	(3, 1)	13	11	13
	(4, 2)	15	13	14
2	(3, 1)	9	8	8
	(3, 2)	9	7	8
	(4, 3)	9	7	9
3 $(x^*, y^*)_1$	(1,5, 1,5)	7	5	6
	(3,5, 3,5)	9	7	8
	(-2, 2)	25	9	-
3 $(x^*, y^*)_2$	(-3, -3)	8	6	7
	(-5, -5)	9	7	8
	(-10, -10)	11	8	10
3 $(x^*, y^*)_3$	(2, -2)	9	7	8
	(5, -5)	11	8	10
	(10, -10)	12	9	11
4	(-1,5, 2,5, 3,5)	10	9	9
	(-1,5, 3,5, 5,5)	11	10	10
	(-3,5, 4,5, 5,5)	14	12	14
	(-5, 4, 5)	15	13	15

У таблиці 1 наведено результати чисельного експерименту стосовно швидкості збіжності деяких ітераційних методів до розв'язків нелінійних систем за різних початкових наближень. Для коректності порівняння у таблиці подано початкові наближення, з яких всі методи збігаються до однакового розв'язку. Якщо система рівнянь має декілька розв'язків, то у таблиці вказано, до якого з них методи збігаються із заданого початкового наближення. Знак ”–” вказує на розбіжність методу. Зазначимо, що запропонований метод (7), зазвичай, швидше збігається за метод хорд (4) та його двокрокову модифікацію (8).

4. Висновки

У [9] вивчено напівлокальну збіжність методу хорд (4) за слабких ω -умов для поділених різниць першого порядку для оператора F . Ми дослідили за ω -умов для поділених різниць напівлокальну збіжність двокрокового методу типу хорд (7). Отримані нами теоретичні результати співпадають і для рівнянь з недиференційовним оператором. Числові експерименти показують ефективність запропонованого методу та доцільність його застосування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г.П. Функциональный анализ — М.: Наука, 1984. — 752 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
3. Amat S., Bernández C., Busquier S. and Plaza S. On a third-order Newton-type method free of bilinear operators // Numer. Linear Algebra Appl. — 2010. — Vol. 17. — P. 639–653.
4. Kou J., Li Y., Wang X. A modification of Newton method with third-order convergence // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 181. — P. 1106–1111.
5. Шахно С. М., Мельник І. В., Ярмола Г. П. Аналіз збіжності комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мат. поля. — 2013. — Т. 56, № 1. — С. 31–39.
6. Шахно С. М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т. 4. — С. 296–305.
7. Argyros I. K. On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1991. — Vol. 10. — P. 83–92.
8. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method and divided differences Hölder continuous // Applied Mathematics and Computation. — 2001. — Vol. 124. — P. 139–149.
9. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15. — P. 395–399.
10. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banach Räumen I, II // ZAMM — 1963. — Vol.43. — P. 1–8, 97–110.

11. Shakhno S. M. Convergence of the two-step combined method and uniqueness of the solution of nonlinear operator equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 261. — P. 378–386.
12. Shakhno S. M. On the Secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator // PAMM — Proc. Appl. Math. Mech. — 2007. — Vol. 7. — P. 2060083–2060084.
13. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 20. — P. 123–134.

Надійшла 23.01.2017

**STABILITY OF SOLUTIONS OF MATHEMATICAL MODELS
OF INFORMATION SPREADING PROCESS
WITH EXTERNAL CONTROL**

IULIIA SHEVCHUK

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: nysya@hotmail.com

**СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ
РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ З ЗОВНІШНІМИ
ВПЛИВАМИ**

Ю. М. ШЕВЧУК

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: nysya@hotmail.com

ABSTRACT. We consider mathematical model with stationary parameters of spreading any number of information type with external influences. The number of information made by each of the sides is taken as key parameter promoting accomplishment of aim. Information is spread in the community along internal (interpersonal communication of the member of social community) and external threads (mass media). The model takes the form of N (number of information channels) non-linear ordinary differential equations. Conditions of existence of range of first-approximation stability of the solutions are considered for general stationary model and the special cases of this model (models with the different type of external control and models with a fixed number of information type). The results of work allow simulating the dynamics of information spreading process in neighbourhood of the equilibrium point. The offered model of information spreading process except theoretical interest has an important practical meaning. It is shown that, due to the nonlinearity of the process of spreading information, it allows not always obvious ways of managing the resource. The offered results allows choosing strategy, to select values of stationary parameters (characteristic of actions) and to achieve desirable results.

KEYWORDS: information spreading process, stationary parameters, first-approximation stability.

РЕЗЮМЕ. У статті наводиться загальна схема аналізу стійкості за першим наближенням в околі точок стійкості моделей розповсюдження довільної кількості типів інформації із стаціонарними параметрами на прикладі узагальненої моделі та моделей із спеціальним представленням зовнішнього впливу. Результати

числового експерименту демонструють практичні можливості даної схеми. Отримані результати дозволяють визначати для стаціонарних параметрів моделі допустимі області, значення з яких будуть гарантувати стійкість за першим наближенням в околі стаціонарних точок.

Ключові слова: розповсюдження інформації, стаціонарні параметри, стійкість за першим наближенням.

ВСТУП

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L , на яку провадиться інформаційна дія по N каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу, залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Якщо позначимо через $x_k(t)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу в момент t , через b_k — інтенсивність спілкування, $u_k(t)$ — зовнішні дії, то зміну з часом величини $x_k(t)$ можливо описати системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} &= b_k(t) x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right) + u_k(t), \quad k = \overline{1, N}. \\ x_k(0) &= x_{0k}, \end{aligned} \quad (1)$$

У роботах [1–4] проводився аналіз рівнянь (1) при постійних параметрах і спеціальному виборі функцій $u_k(t)$. Аналіз властивостей розв'язків системи (1) при спеціальному виборі $u_k(t)$ проводився у роботі [5].

1. АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОЇ МОДЕЛІ

Далі аналізуватимемо випадок, коли зовнішня дія моделюється як $u_k(t) = \sum_{i=1}^N a_{ki} x_i(t) + c_k$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} &= b_k x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right) + \sum_{i=1}^N a_{ki} x_i(t) + c_k, \quad k = \overline{1, N}. \\ x_k(0) &= x_{0k}, \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, що система диференціальних рівнянь (2) допускає стаціонарні розв'язки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$, що задовольняють умови

$$\begin{cases} L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N a_{ki} \tilde{x}_i + c_k \equiv 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3)$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3) можна представити у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ -c_1 \\ \vdots \\ -c_N \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Нас цікавлять невід'ємні розв'язки СЛАР. Для того, щоб всі елементи вектора $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ були невід'ємні, достатньо, щоб існувала невироджена матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5)$$

За теоремою Кронекера-Капеллі, СЛАР (4) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\begin{aligned} \text{rang} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{array} \right) = \\ = \text{rang} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & L \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & -c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & -c_N \end{array} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

причому розв'язок єдиний, якщо ранг дорівнюватиме N .

Далі нас цікавитиме та частина площини фазового простору, яка знаходиться в околі точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$. Для опису траєкторій у цьому околі достатньо використовувати лінійне наближення

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N (a_{ki} - b_k \tilde{x}_k) (x_i(t) - \tilde{x}_i) + b_k \left(L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \right) \times \\ \times (x_k(t) - \tilde{x}_k), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Покладемо $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1, N}$, тоді отримуємо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N (a_{ki} - b_k \tilde{x}_k) \bar{x}_i(t) + b_k \left(L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \right) \bar{x}_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Систему (7) можна представити у матричному вигляді

$$\bar{X}'(t) = A \bar{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 (\tilde{x}_1 - L + \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i) & \dots & a_{1N} - b_1 \tilde{x}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} - b_N \tilde{x}_N & \dots & a_{NN} - b_N (\tilde{x}_N - L + \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Якщо для системи (2) існує невироджена матриця (5) та виконуються умови (6), то для того, щоб розв'язки даної системи були

стійкими в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ за першим наближенням, необхідно, а у випадку при $N = 4$ і достатньо, щоб виконувались умови

$$\left\{ \begin{array}{l} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+) (Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0, \end{array} \right.$$

де A^+ — союзна до матриці A ,

$$a_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 \left(a_{ii} - b_i \left(\tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^N \tilde{x}_l \right) \right) \left(a_{jj} - b_j \left(\tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^N \tilde{x}_l \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (a_{ij} - b_i \tilde{x}_i) (a_{ji} - b_j \tilde{x}_j).$$

Доведення. У загальному випадку для системи з 4 диференціальних лінійних рівнянь характеристичне рівняння набуває вигляду

$$F(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^4 - a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda + a_4 = 0.$$

Тоді $a_1 = Sp(A)$, $a_4 = detA$ ([6], с.100) та

$$a_3 = F'(\lambda)|_{\lambda=0} = (\det(\lambda E - A))'|_{\lambda=0}.$$

Позначимо $B(\lambda) = \lambda E - A$, тоді цю матрицю можна представити у вигляді $\det(B(\lambda)) = b_{11}B_{11} + \dots + b_{NN}B_{NN}$, тут b_{ij} — елемент матриці B , i — номер рядка, j — номер стовпця, B_{ij} — алгебраїчне доповнення до b_{ij} .

Оскільки частинна похідна матиме вигляд

$$\frac{\partial \det(B)}{\partial b_{ij}} = B_{ij},$$

тоді повну похідну можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} (\det(B(\lambda)))' &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \det(B)}{\partial b_{ij}} \frac{db_{ij}}{d\lambda} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 B_{ij} \frac{db_{ij}}{d\lambda} = Sp\left(B^+ \frac{dB}{d\lambda}\right) = \\ &= Sp\left((\lambda E - A)^+ \frac{d(\lambda E - A)}{d\lambda}\right) = Sp((\lambda E - A)^+ E), \end{aligned}$$

де B^+ — союзна матриця до матриці B , тобто, матриця, створена з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів матриці B і транспонована по тому.

Звідси отримаємо

$$a_3 = (\det(\lambda E - A))'|_{\lambda=0} = Sp((\lambda E - A)^+)|_{\lambda=0} = Sp(A^+).$$

Тоді

$$a_2 = \frac{1}{2} F''(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} (Sp(B^+))'|_{\lambda=0}.$$

У силу того, що $Sp(B^+)$ є функцією від λ , то похідну від суми алгебраїчних доповнень, що стоять на діагоналі матриці, можна представити у вигляді суми похідних алгебраїчних доповнень

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 B_{ii} \right)' \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 \left(a_{ii} - b_i \left(\tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^N \tilde{x}_l \right) \right) \left(a_{jj} - b_j \left(\tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^N \tilde{x}_l \right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (a_{ij} - b_i \tilde{x}_i) (a_{ji} - b_j \tilde{x}_j). \end{aligned}$$

За критерієм Рауса-Гурвіца, щоб особлива точка була стійкою за першим наближенням, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатними. Тоді для випадку при $N = 4$ матриця Гурвіца набуде вигляду

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Отже необхідно і достатньо для стійкості розв'язків системи, щоб виконувались умови

$$\left\{ \begin{array}{l} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+) (Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0. \end{array} \right.$$

Ці нерівності гарантують додатність головних мінорів 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків, тобто, виконання цих умов є необхідним для стійкості розв'язків системи (2) при $N > 4$. \square

Наслідок 1. Якщо для системи (2) при $N = 3$ існує невироджена матриця (5), виконуються умови (6) та

$$\left\{ \begin{array}{l} Sp(A) < 0, \\ detA < 0, \\ detA - Sp(A^+) Sp(A) > 0, \end{array} \right.$$

де A^+ — сополюзни до матриці A , то розв'язки даної системи будуть стійкими в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_3)$ за першим наближенням.

Теорема 2. Якщо для системи (2) при $N = 2$ будуть виконуватися умови

$$\begin{cases} b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} + b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22} < 0, \\ (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - \\ -(a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2) > 0, \end{cases}$$

то

- a) $c_1 = c_2 = 0$, тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_1 \equiv \tilde{x}_2 \equiv 0$;
- b) $a_{11} = a_{12} = k$, $c_1 = -L * k$, тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_1 = \frac{a_{22}L + c_2}{a_{22} - a_{21}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{21}L + c_2}{a_{21} - a_{22}} \geq 0$;
- c) $a_{21} = a_{22} = k$, $c_2 = -L * k$, тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L + c_1}{a_{12} - a_{11}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L + c_1}{a_{11} - a_{12}} \geq 0$;
- d) $(a_{12} - a_{11})(a_{22}L + c_2) = (a_{22} - a_{21})(a_{12}L + c_1)$, $(a_{11} - a_{12}) \times$
 $\times (a_{21}L + c_2) = (a_{21} - a_{22})(a_{11}L + c_1)$, тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L + c_1}{a_{12} - a_{11}} = \frac{a_{22}L + c_2}{a_{22} - a_{21}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L + c_1}{a_{11} - a_{12}} = \frac{a_{21}L + c_2}{a_{21} - a_{22}} \geq 0$.

Доведення. Розглядається система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = b_1x_1(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + c_1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = b_2x_2(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + c_2. \end{cases} \quad (8)$$

У випадку, коли $c_1 = c_2 = 0$, отримуємо стаціонарний розв'язок $\tilde{x}_1 \equiv \tilde{x}_2 \equiv 0$. Для пошуку нетривіальних розв'язків розглядається система

$$\begin{cases} L - \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t) = 0, \\ a_{11}\tilde{x}_1(t) + a_{12}\tilde{x}_2(t) + c_1 = 0, \\ a_{21}\tilde{x}_1(t) + a_{22}\tilde{x}_2(t) + c_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб система мала один розв'язок, за теоремою Кронекера-Капеллі у неї має бути два лінійно незалежних рядки. Розглянемо детальніше можливі варіанти:

1. Лінійно залежні перший і другий рядки. Це можливо, якщо $a_{11} = a_{12} = k$, $c_1 = -L * k$, де k — константа. Тоді отримуємо систему

$$\begin{cases} L - \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t) = 0, \\ a_{21}\tilde{x}_1(t) + a_{22}\tilde{x}_2(t) + c_2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком буде

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_{22}L + c_2}{a_{22} - a_{21}} \geq 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{a_{21}L + c_2}{a_{21} - a_{22}} \geq 0.$$

2. Лінійно залежні перший і третій рядок, тобто, $a_{21}=a_{22}=k$, $c_2=-L*k$, де k — константа. Тоді отримуємо систему

$$\begin{cases} L - \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t) = 0, \\ a_{11}\tilde{x}_1(t) + a_{12}\tilde{x}_2(t) + c_1 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком буде

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L + c_1}{a_{12} - a_{11}} \geq 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L + c_1}{a_{11} - a_{12}} \geq 0.$$

3. Лінійно залежні другий та третій рядок, тобто, параметри задовільняють рівняння

$$\begin{cases} (a_{12} - a_{11})(a_{22}L + c_2) = (a_{22} - a_{21})(a_{12}L + c_1), \\ (a_{11} - a_{12})(a_{21}L + c_2) = (a_{21} - a_{22})(a_{11}L + c_1). \end{cases}$$

Тоді розв'язком буде

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L + c_1}{a_{12} - a_{11}} = \frac{a_{22}L + c_2}{a_{22} - a_{21}} \geq 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L + c_1}{a_{11} - a_{12}} = \frac{a_{21}L + c_2}{a_{21} - a_{22}} \geq 0.$$

Лінеаризована система (8) в околі точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(x_1(t) - \tilde{x}_1) + (a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(x_2(t) - \tilde{x}_2), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (a_{21} - b_2\tilde{x}_2)(x_1(t) - \tilde{x}_1) + (b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22})(x_2(t) - \tilde{x}_2). \end{cases}$$

Позначимо $\bar{x}_1(t) = x_1(t) - \tilde{x}_1$, $\bar{x}_2(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2$. Отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\bar{X}'(t) = A\bar{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} & a_{12} - b_1\tilde{x}_1 \\ a_{21} - b_2\tilde{x}_2 & b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 - \lambda(b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} + b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) + (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - (a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2).$$

Користуючись критерієм Рауса-Гурвіца, отримаємо, що точка $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватись нерівності

$$\begin{cases} b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} + b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22} < 0, \\ (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - (a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2) > 0. \end{cases}$$

□

2. Аналіз моделей з веруванням спеціального вигляду

Розглянемо частковий випадок (2), коли зовнішні впливи моделюються як $\gamma_k x_k(t)$, $k = \overline{1, N}$. Тоді розглядається система

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b_k x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right) + \gamma_k x_k(t), \quad k = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Стаціонарні точки будуть шукатися з рівнянь

$$\tilde{x}_k \left(b_k \left(L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \right) + \gamma_k \right) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Очевидно, що тривіальний розв'язок $(0, \dots, 0)$ буде стаціонарним. Також систему рівнянь (10) будуть задовольняти точки $\left(0, \dots, \frac{\gamma_k}{b_k} + L, \dots, 0 \right)$, $\frac{\gamma_k}{b_k} \leq 0$, $k = \overline{1, N}$.

Теорема 3. Система (9) буде стійкою в околі стаціонарної точки за першим наближенням тоді і тільки тоді, коли будуть виконуватися умови

a) для стаціонарної точки $(0, \dots, 0)$

$$b_k L + \gamma_k < 0, \quad k = \overline{1, N};$$

b) для стаціонарної точки $\left(0, \dots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \dots, 0 \right)$, $i \in \overline{1, N}$

$$\begin{cases} \gamma_i + L b_i > 0, & i \in \overline{1, N}, \\ -L \leq \frac{\gamma_i}{b_i} \geq 0, & k = \overline{1, N}, k \neq i, \\ \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} < 0, & \end{cases}$$

Доведення. Ліанеризуємо систему (9) в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ й зробимо заміну $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1, N}$. Тоді отримаємо систему

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = \left(b_k \left(L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \right) + \gamma_k \right) \bar{x}_k(t) - b_k \tilde{x}_k \sum_{i=1}^N \bar{x}_i(t), \quad k = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Розглянемо більш детально (11) для кожної стаціонарної точки.

1. $\tilde{x}_1 \equiv \dots \equiv \tilde{x}_N \equiv 0$, тоді розглядатися буде система

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = (b_k L + \gamma_k) \bar{x}_k(t), \quad k = \overline{1, N}.$$

Точка $(0, \dots, 0)$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватися нерівності $b_k L + \gamma_k < 0$, $k = \overline{1, N}$.

2. Розглянемо загальний випадок $\left(0, \dots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \dots, 0 \right)$, $i \in \overline{1, N}$. Тоді система (11) прийматиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_i(t)}{dt} = -(\gamma_i + L b_i) \sum_{i=1}^N \bar{x}_i(t), & i \in \overline{1, N}, \\ \frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = \left(\gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} \right) \bar{x}_k(t), & k = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Тобто, можна перепозначити

$$\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 - b_1 \frac{\gamma_i}{b_i} & & & 0 \\ & \ddots & & \cdots \\ -\gamma_i - Lb_i & -\gamma_i - Lb_i & -\gamma_i - Lb_i & \\ 0 & \cdots & & \gamma_N - b_N \frac{\gamma_i}{b_i} \end{pmatrix}, i \in \overline{1, N}.$$

Характеристичне рівняння для такої системи диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$(-\gamma_i - Lb_i - \lambda) \prod_{k=1, k \neq i}^N \left(\gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} - \lambda \right) = 0, i \in \overline{1, N}.$$

Стаціонарна точка $\left(0, \dots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \dots, 0\right)$, $i \in \overline{1, N}$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватися умови

$$\begin{cases} \gamma_i + Lb_i > 0, i \in \overline{1, N}, \\ -L \leq \frac{\gamma_i}{b_i} \leq 0, & k = \overline{1, N}, k \neq i. \\ \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} < 0, \end{cases}$$

□

Розглянемо частковий випадок (2), коли зовнішні впливи моделюються як $\gamma_k(x_k(t) - m_k L)$, $k = \overline{1, N}$, а m_k задовольняє умови $m_k > 0, k = \overline{1, N}$ та $\sum_{k=1}^N m_k = 1$. Тоді

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b_k x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right) + \gamma_k (x_k(t) - m_k L), k = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Стаціонарна точка має задоволення систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = L, \\ \tilde{x}_k - m_k L = 0, k = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Розв'язком системи буде $\tilde{x}_k = m_k L$, $k = \overline{1, N}$.

Після заміни $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1, N}$ лінеаризована система матиме вигляд

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = b_k \left(L - L \sum_{i=1}^N m_i \right) \bar{x}_k - b_k m_k L \sum_{i=1}^N \bar{x}_i(t) + \gamma_k \bar{x}_k, k = \overline{1, N}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^N m_k = 1$, то

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = \gamma_k \bar{x}_k - b_k m_k L \sum_{i=1}^N \bar{x}_i(t), k = \overline{1, N}.$$

Цю систему диференціальних рівнянь можна представити в матричному вигляді як

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 - b_1 m_1 L & & & -b_1 m_1 L \\ & \ddots & \cdots & \cdots \\ -b_i m_i L & & \gamma_i - b_i m_i L & -b_i m_i L \\ & & & \ddots \\ -b_N m_N L & & \cdots & \gamma_N - b_N m_N L \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= \lambda^N - \lambda^{N-1} \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i - L \sum_{i=1}^N b_i m_i \right) + \\ &+ \lambda^{N-2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i \sum_{j=i+1}^N \gamma_j - L \sum_{i=1}^N b_i m_i \sum_{j=1, N, j \neq i}^N \gamma_j \right) + \dots - \\ &- (-1)^N \left(\prod_{i=1}^N \gamma_i + L \sum_{i=1}^N b_i m_i \prod_{j=1, N, j \neq i}^N \gamma_j \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 4. Для того, щоб система (12) була стійкою в околі стационарної точки $\tilde{x}_k = m_k L, m_k > 0, k = \overline{1, N}$ та $\sum_{k=1}^N m_k = 1$, за першим наближенням необхідно, а у випадку при $N = 4$ і достатньо, щоб виконувалися умови

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4) &< 0, \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 - L(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 b_1 m_1 + \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 b_2 m_2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 b_3 m_3 + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 b_4 m_4) &> 0, \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 - Lb_1 m_1 (\gamma_2 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_3 \gamma_4) + \\ + Lb_2 m_2 (\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_4 + \gamma_3 \gamma_4) + Lb_3 m_3 (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_4) + \\ + Lb_4 m_4 (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3) - \\ - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times \\ \times (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_3 \gamma_4) + \\ + L(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times \\ \times (b_1 m_1 (\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + b_2 m_2 (\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4)) + \\ + L(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times \\ \times (b_3 m_3 (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) + b_4 m_4 (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) &> 0 \\ (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4))^2 \times \\ \times (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 - L(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 b_1 m_1 + \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 b_2 m_2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 b_3 m_3 + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 b_4 m_4)) - \\ - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times \\ \times (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) + \\ + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (Lb_1m_1(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + Lb_2m_2(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4)) + \\
 & + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4)) \times \\
 & \times (Lb_3m_3(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4) + Lb_4m_4(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)) + \\
 & + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4)) \times \\
 & \times (-\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + \\
 & + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4)) \times \\
 & \times (Lb_1m_1(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + Lb_2m_2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4)) + \\
 & + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4)) \times \\
 & \times (Lb_3m_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) + Lb_4m_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) < 0.
 \end{aligned}$$

Доведення. В силу Теореми 1, щоб система (12) була стійкою в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_k = m_k L$, $m_k > 0$, $k = \overline{1, N}$ та $\sum_{k=1}^N m_k = 1$, за першим наближенням необхідно, а у випадку при $N = 4$ і достатньо, щоб виконувалися умови

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 Sp(A) < 0, \\
 detA > 0, \\
 Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\
 (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+) (Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0.
 \end{array}
 \right.$$

Підставивши конкретні значення для системи (12) при $N = 4$

$$\begin{aligned}
 Sp(A) &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4), \\
 a_2 &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4 - Lb_1m_1(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) - \\
 &- Lb_2m_2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4) - Lb_3m_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) - Lb_4m_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \\
 Sp(A^+) &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 - Lb_1m_1(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) - \\
 &- Lb_2m_2(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) - Lb_3m_3(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4) - \\
 &- Lb_4m_4(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3),
 \end{aligned}$$

$detA = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - L(\gamma_1\gamma_2\gamma_4 b_1m_1 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 b_2m_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 b_3m_3 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 b_4m_4)$, отримаємо сформульовані в Теоремі 4 умови стійкості розв'язків системи.

□

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Нехай є певна спільнота чисельністю $L = 1000$ осіб, що піддається впливу певного інформаційного потоку. Тоді в момент часу $t \in [0, T]$ спільноту можна поділити умовно на три частини: тих, що піддалися впливу, засвоїли трансльовану інформацію ($x_1(t)$); тих, що протидіють (контрдіють) даній інформації ($x_2(t)$); та тих, які ще не визначилися зі своїм ставленням до інформації, що транслюється ($L - x_1(t) - x_2(t)$). Вважатимемо, що жоден із членів спільноти не залишається апріорі байдужим до трансльованої інформації.

Інформація розповсюджується двома інформаційними каналами:

1. Міжособове спілкування членів спільноти. Кожен, хто засвоїв чи контролює інформаційному потоку, починає впливати на неохоплених членів. Представимо цей вплив через параметри b_1 та b_2 .
2. Зовнішній за відношенням до спільноти інформаційний вплив (ЗМІ), характеристиками якого є наскільки часто транслюється повідомлення, наскільки воно правдоподібне та резонансне. Представимо цей вплив через параметри γ_1 та γ_2 .

Впливати безпосередньо на параметри b_1 та b_2 не можна, оскільки вони є характеристикою спільноти, але, знаючи їх значення, можна підібрати такі параметри γ_1 та γ_2 , щоб система була стійкою за першим наближенням у околі точок стійкості.

Нехай $b_1 = 0,15$ та $b_2 = 0,088$. Процес розповсюдження інформації при такій постановці задачі можна змоделювати за допомогою системи

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= 0.15x_1(t)(1000 - x_1(t) - x_2(t)) + \gamma_1x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= 0.088x_2(t)(1000 - x_1(t) - x_2(t)) + \gamma_2x_2(t).\end{aligned}$$

Поставимо за ціль максимально збільшити кількість прихильників контролю. Для цього нам підходить стаціонарна точка $(0, \frac{\gamma_2}{0,088} + 1000)$. Тоді, щоб вищепередана система була стійкою за першим наближенням у цій точці, мають виконуватися умови

$$\begin{cases} -88 \leq \gamma_2 \leq 0, \\ \gamma_1 - 1.7\gamma_2 < 0. \end{cases}$$

Візьмемо пару $\gamma_1 = -0,19$ та $\gamma_2 = -0,07$ й подивимось на поведінку системи при таких параметрах ($x_1(0) = 0,5$, $x_2(0) = 0,4$) (див. Рис.1).

Як видно, прихильники і противники інформаційного повідомлення активно спілкуються у спільноті, причому прихильники навіть інтенсивніше, але за рахунок параметрів зовнішнього впливу, які характеризують дії ЗМІ, направлені на зменшення ажіотажу навколо інформаційного повідомлення, отримуємо ситуацію, коли переважаюча частина суспільства контролює повідомленню.

Висновки

Сформульовано необхідні та достатні умови стійкості за першим наближенням у околі точок стійкості при спеціальному виборі параметрів зовнішнього впливу, причому дані результати наводяться для моделей з довільною кількістю типів інформації, а також для випадків, коли поширюється два або чотири типи інформації. Отримані результати дозволяють моделювати динаміку популяції в околі точок рівноваги.

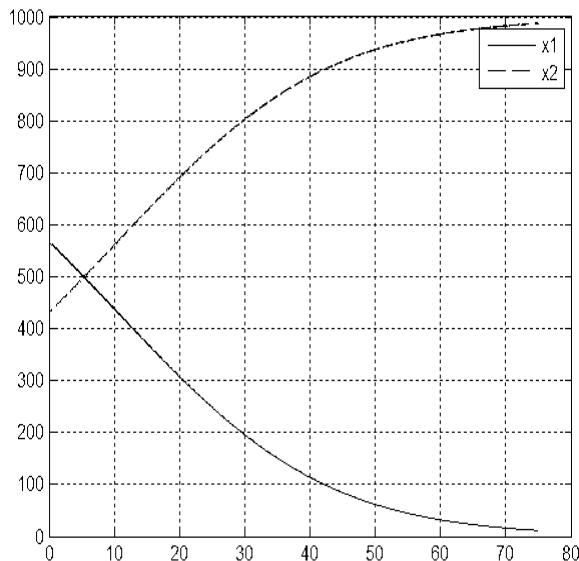


Рис 1. Результати розрахунків

ЛІТЕРАТУРА

1. Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of Information Warfare // Mathematical Models and Computer Simulations. — Vol. 4, № 3. — 2012. — P. 251–259. doi:10.1134/S2070048212030076.
2. Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society // Mediterranean Journal of Social Sciences. — Vol. 6, № 5. — 2015. — P. 27–35. doi:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
3. Михайлов А. П., Петров А. П., Маревцева Н. А., Третьякова И. В. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. — 2014. — №3 (26). — С. 65–74.
4. Наконечний О. Г., Зінько П. М. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2015. — №3(120). — С.50–60.
5. Наконечний О. Г., Шевчук Ю. М. Математична модель розповсюдження інформації з нестационарними параметрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2016. — №3. — С.98–105.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Надійшла 20.04.2017

УДК 517.9
MSC 65Mxx

**SOLVING THIRD-ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS
WITH QUARTIC NON POLYNOMIAL SPLINES**

P. K. PANDEY

Department of Mathematics , Dyal Singh College (Univ. of Delhi), Lodhi Road , New Delhi-110003, India, E-mail: pramod_10p@hotmail.com

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТРЕТЬОГО
ПОРЯДКУ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАРТИЧНИХ
НЕПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ**

П. К. ПАНДЕЙ

Факультет математики, Дял Сінгх Коледж (Університет Делі), Нью-Делі, Індія, Е-mail: pramod_10p@hotmail.com

ABSTRACT. In this article, we present a novel second order numerical method for solving third order boundary value problems using the quartic non polynomial splines. We establish the convergence of the method. We present numerical experiments to demonstrate the efficiency of the method and validity of our second order method, which shows that present method gives better results.

KEYWORDS: Boundary-value problems, Finite-difference methods, Obstacle problems, Quartic non polynomial splines.

РЕЗЮМЕ. У статті представлено новий чисельний метод другого порядку для розв'язування краївих задач третього порядку з використанням квартичних неполіноміальних сплайнів. Встановлено збіжність методу й описано обчислювальні експерименти, що демонструють ефективність та обґрунтованість методу.

KEYWORDS: країові задачі, кінечно-різницеві методи, задача з перешкодою, квартичні не поліноміальні сплайні.

1. INTRODUCTION

In this article we consider a quartic non polynomial splines method for the numerical solution of the third order boundary value problems given as

$$u'''(x) = f(x, u), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta \quad \text{and} \quad u'(b) = \gamma$$

where α , β and γ are real constant.

In environments and in most other areas of natural and applied sciences, the differential equations that govern the behavior of model systems are well-known.

For instance, to describe the evolution of physical phenomena in fluctuating environments governed by third order differential equation [1]. The study of aero elasticity, sandwich beam analysis and beam deflection theory, electromagnetic waves, theory of thin film flow and incompressible flows and regularization of the Cauchy problem for one-dimensional hyperbolic conservation laws [2] are some other model systems in natural and applied sciences where the third order boundary value problems arise.

The theoretical concepts of existence, uniqueness and convergence of the solution and some specific solution of problem (1) can be found in the literature [3–7]. The specific assumption to further ensure existence and uniqueness of the solution to problem (1) will not be considered. Thus the existence and uniqueness of the solution to problem (1) is assumed. Further we assume that problem (1) is well pose. The emphasis in this article will be on the development of an efficient numerical method to deal with approximate numerical solution of the third order boundary value problem.

The quality of a numerical method depends on the accuracy of the method to a great extent. Some efficient and accurate numerical methods for solving higher order boundary value problems are available in literature. Some researchers have studied and solved in particular third order boundary value problems with different boundary conditions using different methods for instance some literary work in Finite Difference Method [8], Non polynomial spline method [9–11], Quartic B-splines [12], Collocation quantic spline [13], Reproducing Kernel Method [14] and references therein can be found. With advent of computers it gained important to develop more accurate numerical methods to solve higher order boundary value problems. Hence, the purpose of this article is to develop an efficient numerical method for solution of third order boundary value problems (1).

We present our work in this article as follows. In the next section we derive a finite difference method. In Section 3, we discuss convergence of the proposed method under appropriate condition. The application of the proposed method on the test problems and illustrative numerical results so produced to show the efficiency in Section 4. Discussion and conclusion on the performance of the proposed method present in Section 5.

2. THE QUARTIC NON-POLYNOMIAL SPLINES METHOD

We define N finite numbers of nodal points of the domain $[a, b]$, in which the solution of the problem (1) is desired, as $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ using uniform step length h such that $x_i = a + i.h$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Also, we let $u(x)$ be the exact solution of (1) and we denote the numerical approximation of $u(x)$ at node $x = x_i$ as u_i . Let us denote f_i as the approximation of the theoretical value of the source function $f(x, u(x))$ at node $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Thus the boundary value problem (1) at node $x = x_i$ may be written as

$$u_i''' = f_i, \quad a < x_i < b, \quad (2)$$

subject to the boundary conditions

$$u_0 = \alpha, \quad u'_0 = \beta \quad \text{and} \quad u'_N = \gamma$$

We wish to determine the numerical approximation of the theoretical solution $u(x)$ of the problem (1) at the nodal point x_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Let define $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{1}{2}h$, $i = 1, 2, \dots, N$ nodes in $[a, b]$. For each i^{th} segment, following the ideas in [11], we shall write quartic non polynomial spline $S_i(x)$ passing through the points $(x_{i-\frac{1}{2}}, s_{i-\frac{1}{2}})$ and $(x_{i+\frac{1}{2}}, s_{i+\frac{1}{2}})$ in the following form,

$$\begin{aligned} S_i(x) = & c_{i0} \sin(k(x - x_{i-\frac{1}{2}})) + c_{i1} \cos(k(x - x_{i-\frac{1}{2}})) + \\ & + c_{i2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 + c_{i3}(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + c_{i4} \end{aligned} \quad (3)$$

where $c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$ are real finite constants and k is the frequency of the trigonometric functions. Then the quartic non polynomial spline defined by

$$s(x) = S_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad \text{and} \quad s(x) \in C^3[a, b]. \quad (4)$$

To determine constants $c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$ we assume that $S_i(x)$ satisfies problem (1) with boundary conditions at $x_{i-\frac{1}{2}}$ and $x_{i+\frac{1}{2}}$. We assume s_i be an approximation of u_i numerical approximation of $u(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, the solution of the problem (1) obtained by the quartic non polynomial spline $s(x) = S_i(x)$. Following the idea in [10] we let

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-\frac{1}{2}}) = & s_{i-\frac{1}{2}}, \quad S_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = s_{i+\frac{1}{2}}, \quad S'_i(x_{i-\frac{1}{2}}) = s'_{i-\frac{1}{2}}, \quad S'_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = s'_{i+\frac{1}{2}}, \\ S'''_i(x_{i-\frac{1}{2}}) = & f_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad S'''_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = f_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Using these assumptions, we will compute the values of $c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$, the constants. Thus we have

$$\begin{aligned} c_{i0} = & -\frac{1}{k^3} f_{i-\frac{1}{2}}, \quad c_{i1} = \frac{1}{k^3 \sin(kh)} (f_{i+\frac{1}{2}} - \cos(kh) f_{i-\frac{1}{2}}), \\ c_{i2} = & \frac{1}{h^2} (s_{i+\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{h} s'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1 - \cos(kh)}{k^3 h^2 \sin(kh)} (f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{k^2 h} f_{i-\frac{1}{2}}, \\ c_{i3} = & s'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{k^2} f_{i-\frac{1}{2}}, \quad c_{i4} = s_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k^3 \sin(kh)} (f_{i+\frac{1}{2}} - \cos(kh) f_{i-\frac{1}{2}}), \\ & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Using the continuity conditions (4) of the first and second derivatives at the point $(x_{i-\frac{1}{2}}, s_{i-\frac{1}{2}})$ i.e. $S_{i-1}^{(m)}(x_{i-\frac{1}{2}}) = S_i^{(m)}(x_{i-\frac{1}{2}})$, $m = 1, 2$, we will obtain,

$$s_{i-\frac{5}{2}} - 3s_{i-\frac{3}{2}} + 3s_{i-\frac{1}{2}} - s_{i+\frac{1}{2}} = -h^3 (a_0(f_{i-\frac{5}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}) + b_0(f_{i-\frac{3}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}})), \quad (7)$$

$$3 \leq i \leq N-1.$$

where $a_0 = \frac{1}{kh \sin(kh)} (\frac{1}{2} - \frac{1-\cos(kh)}{k^2 h^2})$ and $b_0 = \frac{1}{kh \sin(kh)} (\frac{1-2\cos(kh)}{2} + \frac{1-\cos(kh)}{k^2 h^2})$. If $a_0 + b_0 = \frac{1}{2}$ then problem (1) is replaced by (7) a system of equations for nodal values $s_{i-\frac{1}{2}}$. We have $N-3$ equations in N no. of variables $s_{i-\frac{1}{2}}$. If we derive three more equations, we have $N \times N$ equations in variables $s_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, 2, \dots, N$.

For our problem (1) we will derive these three equations i.e. two on first two nodes and one on the last node in the domain of the integration $[a, b]$ by Taylor series and the method of undetermined coefficients. These equations are,

$$\begin{aligned} 9s_{i-\frac{1}{2}} - s_{i+\frac{1}{2}} &= 8s_{i-1} + 3hs'_{i-1} - \frac{3h^3}{8}f_{i-\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}}, & i = 1 \quad (8) \\ -15s_{i-\frac{3}{2}} + 10s_{i-\frac{1}{2}} - 3s_{i+\frac{1}{2}} &= -8s_{i-2} - \frac{5h^3}{16}(11f_{i-\frac{1}{2}} - 3f_{i+\frac{1}{2}}) + T_{i-\frac{1}{2}}, & i = 2 \\ s_{i-\frac{5}{2}} - 3s_{i-\frac{3}{2}} + 2s_{i-\frac{1}{2}} &= hs'_i + \frac{h^3}{48}(-25f_{i-\frac{3}{2}} + 21f_{i-\frac{1}{2}}) + T_{i-\frac{1}{2}}, & i = N \end{aligned}$$

where $T_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, 2, N$ is truncation error.

Together with (7)–(8), we will obtain the $N \times N$ linear or nonlinear system of equations after neglecting the truncation errors in (7) and (8) in unknown $s_{i-\frac{1}{2}}$, depends on the source function $f(x, u)$. We have to solve this system of equations by an appropriate method. We have applied either Gauss Seidel or Newton-Raphson method to solve respectively for linear and nonlinear system of equations (7)–(8). In computation, we have substituted for $s'_{i-\frac{1}{2}}$ in c_{i2}, c_{i3} ,

$$s'_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{2h}(s_{i+\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}u'_{i-1}, & i = 1 \\ \frac{1}{2h}(s_{i+\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{3}{2}}), & i = 2, 3, \dots, N-1 \end{cases}$$

and computed numerical value of $u_i, i = N$ by using following second order approximation,

$$u_i = s_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}hu'_i. \quad (9)$$

3. CONVERGENCE OF QUARTIC NON-POLYNOMIAL SPLINES METHOD

We will consider following linear test equation for convergence analysis of the proposed method (7)–(8).

$$u'''(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (10)$$

subject to the boundary conditions $u_0 = \alpha, u'_0 = \beta$ and $u'_N = \gamma$. We can write the proposed method (7)–(8) in the matrix form as

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{t} \quad (11)$$

where

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 9 & -1 & & & & & 0 & \\ -15 & 10 & -3 & & & & & \\ 1 & -3 & 3 & -1 & & & & \\ & 1 & -3 & 3 & -1 & & & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ & & & 1 & -3 & 3 & -1 & \\ 0 & & & & 1 & -3 & 2 & \end{array} \right)_{N \times N}$$

and $\mathbf{s} = (s_{i-\frac{1}{2}})$, $\mathbf{a} = (a_i)$, and $\mathbf{T} = (T_i)$ are N -dimensional column vectors defined as,

$$a_i = \begin{cases} 8\alpha + 3h\beta - \frac{3h^3}{8}f_{i-\frac{1}{2}}, & i = 1 \\ -8\alpha - \frac{5h^3}{16}(11f_{i-\frac{1}{2}} - 3f_{i+\frac{1}{2}}), & i = 2 \\ -h^3(a_0(f_{i-\frac{5}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}) + b_0(f_{i-\frac{3}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}})), & 3 \leq i \leq N-1 \\ h\gamma + \frac{h^3}{48}(-25f_{i-\frac{3}{2}} + 21f_{i-\frac{1}{2}}), & i = N \end{cases}$$

If we choose arbitrary $a_0 = 0$ and $b_0 = \frac{1}{2}$ then we will obtain following

$$T_i = \begin{cases} -\frac{27h^5}{1920}u_{i-\frac{1}{2}}^{(5)}, & i = 1 \\ -\frac{7h^5}{8}u_{i-\frac{1}{2}}^{(5)}, & i = 2 \\ o(h^6), & 3 \leq i \leq N-1 \\ \frac{31h^5}{1920}u_{i-\frac{1}{2}}^{(5)}, & i = N \end{cases}$$

Let us solve test problem (10) by proposed method (7)–(8) after truncating/neglecting the terms T_i . We will obtain a system of linear equations in $s_{i-\frac{1}{2}}$. Solving the system of equations so obtained by an iterative method, we get an approximate solution. Let us write system of equation in matrix form,

$$\mathbf{Ds} = \mathbf{a} \quad (12)$$

where $\mathbf{s} = (s_{i-\frac{1}{2}})$ is N -dimensional column vector of approximate solution of system of equations obtained from (7)–(8). Let us define

$$e_{i-\frac{1}{2}} = u_{i-\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

where $s_{i-\frac{1}{2}}$ is an approximate value of $u_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Thus from (11) and (12) we can write an error equation

$$\mathbf{De} = \mathbf{T} \quad (14)$$

where $\mathbf{e} = (e_{i-\frac{1}{2}})$, $i = 1, 2, \dots, N$ is N -dimensional column vector. Let $\mathbf{K} = (k_{ij})$ be the explicit inverse of nonsymmetric Toeplitz matrix \mathbf{D} and defined as [15–18],

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{(2i-1)(4N-2i+1)}{24N}, & 1 \leq i \leq N, j = 1 \\ (2i-1)^2c_1, & i \leq j \leq N, 2 \leq j \\ \frac{(N-i)(N-i+1)}{2}c_2 - \frac{(N-i+2)(N-i-1)}{2}c_3, & j+1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (15)$$

where

$$c_1 = \begin{cases} \frac{(N+1-j)(2j+1)^2}{40N(8j-(2j-5)^2)}, & j = 2 \\ \frac{N+1-j}{8N}, & 2 < j \leq N \end{cases} \quad (16)$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{(N+1-j)(4N(j-1)+1)-8(j-1)}{24N}, & j = 2 \\ \frac{(N+1-j)(4N(j-1)+1)-8(j-1)}{8N}, & j+1 \leq i < N \end{cases} \quad (17)$$

$$c_3 = \begin{cases} \frac{(N+1-j)(4N(j-1)+1)}{24N}, & j = 2 \\ \frac{(N+1-j)(4N(j-1)+1)}{8N}, & j + 1 \leq i < N \end{cases} \quad (18)$$

From (15), (16) and (17), we can prove that \mathbf{K} is nonsymmetric and positive matrix. Let matrix $\mathbf{R} = (R_{i1})_{N \times 1}$, denotes the matrix of the row sum of the matrix $\mathbf{K} = (k_{ij})_{N \times N}$ where,

$$R_{i1} = \sum_{j=1}^N k_{ij} \quad (19)$$

Hence we have obtained

$$\|\mathbf{K}\| = \max_{1 \leq i \leq N} |R_{i1}| = \frac{4N^4 - (9N^2 - 9N - 2)}{48N} \quad (20)$$

Thus for large N , from (19) we conclude that

$$\|\mathbf{K}\| \leq \frac{(b-a)^3}{12h^3} \quad (21)$$

Let

$$M = \max_{x \in [a,b]} |u^{(5)}(x)|, \quad (22)$$

Then from (13), (20) and (21) we have

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{7h^2(b-a)^3}{96} M \quad (23)$$

Thus from equation (22) it follows that $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. This establishes the convergence of the method (7) and the order of convergence of method (7) is at least $O(h^2)$.

4. NUMERICAL RESULTS

To illustrate our method and demonstrate its computational efficiency, we have considered three model problems. In each model problem, we took uniform step size h . In Table 1–4, we have shown MAE the maximum absolute error in the solution u of the problems (1) for different values of N . We have used the following formula in computation of MAE ,

$$MAE = \max \begin{cases} |u(x_i) - s(x_i)| & 1 \leq i \leq N-1 \\ |u(x_i) - u_i| & i = N \end{cases}$$

We have used Gauss Seidel and Newton-Raphson iteration method to solve respectively for linear and nonlinear system of equations arised from equation (7)–(8). All computations were performed on a Windows 2007 Ultimate operating system in the GNU FORTRAN environment version 99 compiler (2.95 of gcc) on Intel Core i3-2330M, 2.20 Ghz PC. The solutions are computed on N nodes and iteration is continued until either the maximum difference between two successive iterates is less than 10^{-10} or the number of iteration reached 10^3 .

Problem 1. Consider the following third-order obstacle problems [13],

$$u'''(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ u(x) - 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 0, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

subject to boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad \text{and} \quad u'(1) = 0$$

The analytical solution of the problem is

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_1x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 + a_2 \exp(x) + \exp\left(-\frac{x}{2}\right)(a_3 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + a_4 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}a_5x(x-2) + a_6, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

where the constants $a_i, i = 1, 2, \dots, 6$ can be determined by solving a system of linear equations which can be obtained by applying the continuity conditions of $u(x)$, $u'(x)$ and $u''(x)$ at $x = \frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$. The $MAEI$, $MAEM$ and $MAEE$ respectively in interval $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ and $[\frac{3}{4}, 1]$ and $MAE = \max\{MAEI, MAEM, MAEE\}$ computed by method (7)–(8) for different values of N are presented in Table 1 and the results obtained in the numerical experiment is compared with some higher order method reported in literature presented in Table 2.

Problem 2. The model linear problem given by

$$u'''(x) = u(x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

subject to boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad \text{and} \quad u'(1) = 0$$

where $f(x)$ is calculated so that the analytical solution of the problem is $u(x) = x \exp(-x)$. The MAE computed by method (7)–(8) for different values of N are presented in Table 3 and the results obtained in the numerical experiment is compared with high order finite difference method reported in [8, 20].

Problem 3. The nonlinear model problem given by

$$u'''(x) = x^4u(x) - u^2(x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

subject to boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = -1 \quad \text{and} \quad u'(1) = \sin(1)$$

where $f(x)$ is calculated so that the analytical solution of the problem is $u(x) = (x-1) \sin(x)$. The MAE computed by method (7)–(8) for different values of N are presented in Table 4 and the results obtained in the numerical experiment is compared with high order finite difference method reported in [8].

We have described a numerical method for numerical solution of third order boundary value problem and considered three model problems including an obstacle problem to test the performance of the proposed method. Numerical result for considered problem for different values of N which is presented in

ТАБЛ. 1. Maximum absolute error (Problem 1).

N	Maximum absolute error			
	MAEI	MAEM	MAEE	MAE
8	.16733299(-2)	.24319269(-1)	.55693217(-1)	.55693217(-1)
16	.35730263(-3)	.56837383(-4)	.75999240(-4)	.35730263(-3)
32	.89327565(-4)	.98532091(-5)	.19483268(-4)	.89327565(-4)
64	.22338678(-4)	.51516825(-4)	.74401498(-4)	.74401498(-4)

ТАБЛ. 2. Maximum absolute error (Problem 1).

Method	Maximum absolute error		
	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$
(7)–(8)	.357(-3)	.893(-4)	.744(-4)
[9]	.712(-3)	.405(-3)	.222(-3)
[12]	.113(-2)	.530(-3)	.252(-3)
[22]	.115(-2)	.532(-3)	.256(-3)
[14]	.118(-2)	.547(-3)	.262(-3)
[21]	.123(-2)	.553(-3)	.261(-3)
[13]	.126(-2)	.560(-3)	.310(-3)
[19]	.689(-2)	.711(-2)	.727(-3)

ТАБЛ. 3. Maximum absolute error (Problem 2).

Method	Maximum absolute error			
	$N = 4$	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
(7)–(8)	.16645713(-1)	.41207969(-2)	.10233842(-2)	.15626669(-3)
[20]	.16645713(-1)	.41207962(-2)	.10233842(-2)	.23465362(-3)
[8]	.10738984(-1)	.32454655(-2)	.88991225(-3)	.23343042(-3)

ТАБЛ. 4. Maximum absolute error (Problem 3).

Method	Maximum absolute error			
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$
(7)–(8)	.12459494(-1)	.36536278(-2)	.98157581(-3)	.26675439(-3)
[8]	.16499877(-1)	.41241050(-2)	.10325760(-2)	.27042627(-3)

tables, the maximum absolute errors in solution decreases with decrease in step size h . Also from the numerical results in Table 2, it is clear that the new method (7)–(8) outperforms the existing methods. On the other hand, it is evident that method (7)–(8) is convergent and the rate of convergence is at least quadratic.

5. CONCLUSION

A finite difference method to find the numerical solution of third order boundary value problems has been developed. At nodal point $x = x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2 \dots N$ we have obtained a system of algebraic equations given by (7)–(8). Thus we have a system of linear equations if source function $f(x, u)$ is linear otherwise system of nonlinear equations. The proposed method produces good approximate numerical value of the solution for model problems and moreover it is computationally efficient and accurate method. The idea presented in this article leads to the possibility to develop finite difference methods for the numerical solution of higher odd order boundary value problems. Works in these directions are in progress.

6. COMPETING INTERESTS

There is no competing interest exist for us either financial or non-financial.

REFERENCES

1. Ahmad B., Nieto J. J., Al Saedi A., El-Shahed M. A study of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders in different intervals. // Nonlinear Anal.: Real World Appl. — 2012. — 13. — P. 599–606.
2. Bressan A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem. — Oxford University Press: London, 2000 — 262 p.
3. Howes F. A., Differential inequalities of higher order and the asymptotic solution of the nonlinear boundary value problems. // SIAM J. Math. Anal. — 1982. — 13 (1). — P. 61-80.
4. Gupta C. P. and Lakshmikantham V. Existence and uniqueness theorems for a third-order three point boundary value problem. // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1991. — Vol. 16, №11. — P. 949-957.
5. Gregus M. Third Order Linear Differential Equations. Series: Mathematics and its Applications, Vol. 22. — Springer Netherlands, 1987.
6. Murty K. N. and Rao Y. S. A theory for existence and uniqueness of solutions to three-point boundary value problems. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1992. — Vol. 167, №1. — P. 43-48.
7. Henderson J. and Prasad K. R. Existence and uniqueness of solutions of three-point boundary value problems on time scales. // Nonlin. Studies 8. — 2001. — P. 1-12.
8. Al-Said E. A. Numerical solutions for system of third-order boundary value problems. // International Journal of Computer Mathematics. — 2001. — Vol. 78, №1. — P. 111-121.
9. Islam S., Khan M. A., Tirmizi I. A. and Twizell, E.H. Non-polynomial splines approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems. // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — Vol. 168, №1. — P. 152-163.

10. El-Danaf T. S. Quartic Nonpolynomial Spline Solutions for Third Order Two-Point Boundary Value Problem. // International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. — 2008. — Vol. 2, №9. — P. 37-40.
11. Srivastava P. K. and Kumar M. Numerical Algorithm Based on Quintic Nonpolynomial Spline for Solving Third-Order Boundary value Problems Associated with Draining and Coating Flow. // Chinese Annals of Mathematics. Series B. — 2012. — 33(6). — P. 831-840.
12. Gao F. and Chi C. M. Solving third-order obstacle problems with quartic B-splines. // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 180, №1. — P. 270-274.
13. Noor M. A. and Khalifa A. K. A numerical approach for odd-order obstacle problems. // International Journal of Computer Mathematics. 1994. — Vol. 54, №1. — P. 109-116.
14. Li X. and Wu B. Reproducing kernel method for singular multi-point boundary value problems. // Mathematical Sciences. — 2012. — 6:16. DOI:10.1186/2251-7456-6-16
15. Jain M.K. Iyenger S. R. K. and Jain R. K. Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation (2/e). — Willey Eastern Limited: New Delhi, 1987.
16. Varga R. S. Matrix Iterative Analysis. Second Revised and Expanded Edition. — Springer-Verlag: Heidelberg, 2000.
17. Horn R. A. and Johnson C. R. Matrix Analysis. — Cambridge University Press: New York, 1990.
18. Pandey P. K. An efficient numerical method for the solution of third order boundary value problem in ordinary differential equations (To appear).
19. Al-Said E. A., Noor, M. A. and Khalifa A. K. Finite difference scheme for variational inequalities. // Journal of Optimization Theory and Applications. 1996. — Vol. 89, №2. — P. 453–459.
20. Pandey P. K. Solving third-order boundary value problems with quartic splines. (To be appear).
21. Al-Said E. A. and Noor M.A. Cubic splines method for a system of third-order boundary value problems. // Applied Mathematics and Computation. — 2003. — Vol. 142, №2–3. — P. 195–204.
22. Noor M. A. and Al-Said E. A. Quartic splines solutions of third-order obstacle problems. // Applied Mathematics and Computation. — 2004. — Vol. 153, №2. — P. 307–316.

Received 23.10.2016

NOVEL FREQUENTIST DEFINITION OF RANDOMNESS

DMITRY KLYUSHIN

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: klyushin@unicyb.kiev.ua

НОВЕ ЧАСТОТНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ВИПАДКОВОСТИ

Д. А. Клюшин

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, Е-mail: klyushin@unicyb.kiev.ua

ABSTRACT. The paper deals with a novel definition of random events that generalizes the well-known definition by von Mises and eliminates its deficiencies. It is shown that the admissible place selection rule introduced by von Mises may be eliminated from consideration using characteristic matrix of a random experiment. In the new model of random events, the field of events forms an atomic generated, complete, and completely distributive Boolean algebra. The probability distribution generated by random variables in this model is not a measure but only a finitely additive function of events in the case of continuous rational or real random variables. The results of computational experiments with quantum random numbers generators are given.

KEYWORDS: Randomness, Frequency, von Mises Model, Lattice, Boolean Algebra.

РЕЗЮМЕ. У статті розглядається нове визначення випадкових подій, яке узагальнює відоме визначення фон Мізеса і усуває його недоліки. Показано, що правило вибору, запропоноване фон Мізесом, може бути виключено з розгляду за допомогою характеристичної матриці випадкового експерименту. У новій моделі випадкових подій поле подій являє собою атомно породжену повну цілком аддитивну булеву алгебру, а розподіл ймовірностей, породжуваний неперервними раціональними або дійсними випадковими величинами, не є мірою, а лише є скінченно-аддитивною функцією подій. Наводяться результати обчислювальних експериментів з квантовими генераторами випадкових чисел.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: випадковість, частота, модель фон Мізеса, гратка, булева алгебра.

ВСТУП

Поняття випадковості і ймовірності випадкових подій протягом всього життя належали до одних з основних об'єктів дослідження Ю. І. Петуніна. Великий досвід роботи з реальними випадковими даними та вивчення великої кількості теоретичних робіт, присвячених цій темі (див. наприклад [1]), переконали його, що ця тема вимагає нового, нетрадиційного підходу.

Історично першою спробою розв'язати цю проблему слід вважати роботу фон Мізеса [2], в якій було розроблено формальну теорію ймовірностей із урахуванням фізичної реальності. В основу своєї моделі фон Мізес по-клав концепцію колективу — випадкової бінарної послідовності, яка має дві властивості:

- 1) існує границя послідовності її відносних частот;
- 2) відносні частоти є інваріантними щодо процедури так званого приступного вибору, тобто вибору підпослідовності, в якій вибір n -го елемента не залежить від його значення.

Означення 1. (R. фон Мізес). Нескінчена бінарна послідовність x_1, x_2, \dots є колективом, якщо виконуються дві умови.

1. *Глобальна регулярність.* Нехай h_n — відносна частота одиниць серед перших n членів послідовності. Тоді існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = p$, $0 < p < 1$.

2. *Локальна регулярність.* Кожна нескінчена підпослідовність x_{i_1}, x_{i_2}, \dots , отримана із послідовності x_1, x_2, \dots за допомогою приступного вибору, має ту же саму границю p .

У статті [3] А. М. Колмогоров сформулював два основні недоліки теорії фон Мізеса:

1. Частотний підхід, який апелює до поняття граничної частоти, не може мати практичного застосування, оскільки в реальних застосуваннях дослідники мають справу із скінченими послідовностями.
2. Частотний підхід при великій кількості випробувань не можна розвити суто математично.

Як альтернативу частотній моделі фон Мізеса А. М. Колмогоров запропонував теорію складності. Ця теорія набула широкої популярності і де facto стала домінуючим підходом до визначення випадковості. Втім, частотний підхід ще не вичерпав усіх можливостей. Зокрема, у роботі [4] Ю. І. Петуніним та автором було розвинено альтернативну частотну модель, яка знімає проблему формалізації правила приступного вибору як таку.

Розглянемо випробування T , який має два наслідки: A та \bar{A} . Введемо індикатор події A у k -му випробуванні

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A; \\ 0, & \text{якщо } \bar{A}. \end{cases}$$

Числову послідовність x_1, x_2, \dots , яка складається з нулів і одиниць, будемо називати бернулієвською послідовністю порядку p , $0 \leq p \leq 1$, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(T, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = p,$$

де $h_n(T, A)$ — частота події A при n повтореннях випробування T . Основною особливістю запропонованої теорії є той факт, що для математичного визначення випадкового випробування недостатньо знати результати лише однієї серії випробувань $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Для цього необхідно знати послідовність результатів серій випробування X_1, X_2, \dots , які зручно розташувати у вигляді нескінченної матриці

$$\Theta(T) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{21} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

яку ми називатимемо характеристичною матрицею випробування T .

Нехай $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, \dots)$ — це рядки, а $X_j^* = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}, \dots)$ — стовпчики характеристичної матриці $\Theta(T)$. Легко бачити, що кожний рядок X_n і кожний стовпчик X_n^* матриці $\Theta(T)$ породжують деякі дійсні числа α_n і α_n^* з відрізка $[0, 1]$. Покладемо $\alpha_n = 0, x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn}\dots$ і $\alpha_n^* = 0, x_{1n}x_{2n}\dots x_{nn}\dots$ і будемо розглядати ці вирази як бінарні дроби. Позначимо через M та M^* множини чисел α_n і α_n^* , відповідно.

Означення 2. Випробування T називається випадковим, якщо виконуються такі умови:

- 1) всі рядки X_n і стовпці X_n^* ($n = 1, 2, \dots$) характеристичної матриці $\Theta(T)$ є бернулієвськими послідовностями одного і того ж порядку $p \in [0, 1]$;
- 2) множини чисел M та M^* , породжені рядками та стовпцями характеристизаційної матриці $\Theta(T)$, відповідно, є щільними на відрізку $[0, 1]$.

Означення 3. Випадковим експериментом E будемо називати нескінченну серію повторень випадкового випробування T .

Означення 4. Випадковою подією (E, R) будемо називати результат R випадкового випробування T , яке породжує випадковий експеримент E .

Означення 5. Ймовірністю $p(E, A)$ випадкової події (E, A) будемо називати порядок $p \in [0, 1]$ бернулієвської послідовності, яка складається із результатів випадкового випробування T , яке породжує випадковий експеримент E .

Оскільки практичний аналіз випадковості здійснюється на скінченних матрицях, необхідно запропонувати означення випадковості для скінченного випадку.

Означення 6. Випробування T вважається випадковим, якщо всі рядки X_i і стовпці X_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) усіченої характеристичної матриці $\Theta_n(T)$ є відрізками бернулієвських послідовностей одного і того ж порядку $p \in [0, 1]$ і якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число n , що множини чисел M_n і M_n^* , породжені рядками і стовпцями усіченої характеристичної матриці

$$\Theta_n(T) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

утворюють ε -сітку на відрізку $[0, 1]$.

Означення 7. Будемо називати експеримент псевдовипадковим, якщо при найменні одна з множин M та M^* , породжених рядками і стовпчиками відповідної характеристизаційної матриці, містить лише скінченну кількість різних елементів.

Зокрема, у роботі [4] доведено, що ймовірність того, що в схемі Бернуллі множини M і M^* , утворені рядками і стовпцями характеристизаційної матриці $\Theta(T)$, є щільними у відрізку $[0, 1]$, дорівнює одиниці, отже, класична схема Бернуллі є випадковим експериментом у розумінні запропонованої теорії випадкових експериментів.

Нагадаємо основні положення запропонованої моделі [4]. Нехай T — випадкове випробування, а $S(T)$ — множина усіх випадкових подій, що можуть відбуватися внаслідок реалізації випробування T . Спираючись на традиційні означення класичної теорії ймовірностей, у множині $S(T)$ можна визначити операції складання та множення подій, а також операцію заперечення подій, причому перші операції можна виконувати для довільної множини подій. Крім того, у множині $S(T)$ для кожної події A визначено її ймовірність $p(A)$, так що $S(T)$ перетворюється на поле, яке ми називатимемо полем подій $S(E)$. У полі подій $S(E)$, яке породжується випадковим експериментом E , можна ввести відношення напівпорядкованості: будемо говорити, що подія A тягне за собою подію B і позначати це символом $A \leq B$, якщо поява події A у результаті випадкового експерименту E неодмінно тягне за собою появити події B . Це відношення перетворює поле подій $S(E)$ у напівпорядковану множину [6]. Легко бачити, що для будь-яких двох подій $A, B \in S(E)$ мають місце співвідношення: $A + B = \sup(A, B) = A \vee B$ і $AB = \inf(A, B) = A \wedge B$, так що операції складання і множення можна здійснити на підставі відношення напівпорядкованості. Ці формули можна узагальнити для довільної множини подій

$$\sum_{i \in J} A_i = \sup_{i \in J} \{A_i\}$$

i

$$\prod_{i \in J} A_i = \inf_{i \in J} \{A_i\}.$$

Оскільки суми і добутки подій завжди існують і належать $S(E)$, то поле подій $S(E)$ є повною дистрибутивною граткою [5]. Згідно з означенням

під доповненням елемента A в гратці з нулем розуміють такий елемент $A' \in S$, що $A \wedge A' = 0$ і $A \vee A' = I$, а гратка $S(E)$ називається граткою з доповненням, якщо всі її елементи мають доповнення. Всі ці властивості виконуються для поля подій, де у ролі елемента O виступає неможлива подія, у ролі I — вірогідна, а доповнення — це заперечення події \bar{A} . Отже, поле подій $S(E)$ — булева алгебра з доповненням.

Теорема 1. [4] Для довільного випадкового експерименту E поле подій $S(E)$ є цілком дистрибутивною повною булевою алгеброю.

Теорема 2. [5] (Тарський). Якщо повна булева алгебра S цілком дистрибутивна, то вона є ізоморфною алгебрі 2^{\aleph} всіх підмноожин деякої множини M за структурами напівпорядкованих просторів (або булевих алгебр).

За множину M можна взяти набір усіх атомів напівпорядкованого простору $S(E)$.

Означення 8. Називатимемо множину подій $B = \{B_i\}_{i \in J}$ із поля подій $S(E)$ базовою, якщо виконуються такі умови:

- 1) всі події B_i із B попарно несумісні, тобто $B_i B_j = 0$, якщо $i \neq j$;
- 2) довільну подію A із $S(E)$ можна подати у вигляді суми подій B_i із B : $A = \sum_{k \in K} B_{i_k}$.

Множина P усіх атомів із $S(E)$ є базовою множиною в $S(E)$. У зв'язку з цим алгебра подій $S(E)$ є атомарно породженою булевою алгеброю. У класичній теорії ймовірностей елементи базової множини в $S(E)$ називаються елементарними подіями. Розподіл ймовірностей $P(E, A)$ у полі подій $S(E)$ є функцією двох аргументів: випадкового експерименту E та випадкової події A .

У застосуваннях теорії ймовірностей зручно інтерпретувати випадкову величину x як деяку функцію, визначену на базовій множині поля подій $S(E)$, оскільки при цьому у деяких випадках кожній елементарній події $B_i \in B(E)$ ставиться у відповідність її числовий показник $x = x(B_i)$. Неважко помітити, що ці два означення є еквівалентними.

Перейдемо тепер до вивчення розподілу ймовірностей на полі подій, породжених значеннями випадкової величини. Розглянемо спочатку випадкові величини, що набувають значень із множини раціональних чисел Q , які, власне, і є результатами вимірювань в реальних застосуваннях.

Означення 9. Будемо називати випадкову величину x раціональною, якщо її можливі значення є раціональними числами. Позначимо через $B_E(x)$ множину всіх можливих значень раціональної випадкової величини x , значення якої спостерігаються при здійсненні випадкового експерименту E . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $B_E(x) = Q$. Тоді $S(E)$ складається з усіх можливих підмножин множини Q .

Означення 10. Раціональна випадкова величина x називається неперервною, якщо її функція розподілу $F_x(u)$ є неперервною на R^1 . Відповідний розподіл ймовірностей називається неперервним.

Означення 11. Раціональна випадкова величина x називається сингулярною, якщо існує така підмножина $\Psi = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset Q$, що $p(E, \{a_n\}) = p_n > 0 \forall n \in N$ і $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Відповідний розподіл ймовірностей називається сингулярним.

Теорема 3. [4] Нехай $F(u)$ — довільна неперервна функція розподілу на прямій R^1 , тоді існує випадковий експеримент E з базовою множиною (множиною елементарних наслідків) $B_E = Q$ і розподілом ймовірностей $p(E, A)$, $A \subset Q$, для якого при будь-яких $u \in R^1$ $p(E, Q_{(-\infty, u]}) = F(u)$, де $Q_{(-\infty, u]} = Q \cap (-\infty, u]$.

Теорема 4. [4] Нехай $F(u)$ — довільна функція розподілу, зосереджена на відрізку $[a, b]$:

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u \geq a, \\ 1, & u \leq b. \end{cases}$$

Тоді існує випадковий експеримент E з числовою базовою множиною $B_E = [a, b]$, що породжує розподіл ймовірностей $p(E, A)$ на всіх підмножинах $A \subset [a, b]$, для якого за умови, що $u \in (a, b)$, має місце співвідношення $p(E, (a, u]) = F(u)$.

Обчислювальні експерименти

Для перевірки практичної придатності запропонованого означення випадкової події було проведено ряд обчислювальних експериментів. Критерієм успіху цих експериментів вважалися стабілізація відносної частоти та виникнення ϵ -сітки у бінарних послідовностях, які утворюють характеристичну матрицю. Очевидно, що для стандартних генераторів псевдовипадкових чисел умови випадковості можуть спостерігатися лише до кінця періоду, після якого внаслідок повторів починають утворюватися атоми. Природно очікувати, що при використанні квантового генератора це явище спостерігатися не буде. Для експериментів використовувався квантові генератори Австралійського національного університету [6] та Гумбольдтського університету Берліна [7].

Алгоритм

- 1) Згенерувати випадкове натуральне число.
- 2) Якщо число є парним, присвоїти індикатору події 1, інакше 0.
- 3) Повторити кроки 1–2 N разів.
- 4) Повторити кроки 1–3 N разів.
- 5) Обчислити відносну частоту одиниць у кожному рядку і стовпці.
- 6) Обчислити десяткові числа, що утворюють множини M і M^* .
- 7) Упорядкувати за зростанням множини M і M^* .
- 8) Знайти максимальне відхилення між сусідніми числами у множинах M і M^* .
- 9) Знайти середні відстані між відносними частотами у суміжних рядках і стовпцях.

Результати

У табл. 1 і 2 використано наступні позначення: Δ_R — максимальна різниця між упорядкованими десятковими числами, що утворені рядками характеристичної матриці, Δ_C — максимальна різниця між упорядкованими десятковими числами, що утворені стовпцями характеристичної матриці, ΔF_R — максимальна різниця між відносними частотами в рядках, ΔF_C — максимальна різниця між відносними частотами у стовпцях, F_R — відносна частота одиниць у рядках, F_C — відносна частота одиниць у стовпцях.

ТАБЛИЦЯ 1. Результати обчислювальних експериментів з квантовим генератором ANU [6]

N	Δ_R	Δ_C	ΔF_R	ΔF_C	F_R	F_C
1024	0.00714	0.00871	0.00488	0.00781	0.49843	0.49843
2048	0.00482	0.00401	0.00244	0.00293	0.49983	0.49983
3072	0.00241	0.00290	0.00423	0.00228	0.49992	0.49992
4096	0.00245	0.00185	0.00195	0.00537	0.49977	0.49977
5120	0.00198	0.00170	0.00137	0.00137	0.49994	0.49994
6144	0.00145	0.00137	0.00309	0.00244	0.49989	0.49989
7168	0.00129	0.00133	0.00614	0.00293	0.49985	0.49985
8192	0.00125	0.00106	0.00317	0.00439	0.49992	0.49992
9216	0.00103	0.00133	0.00119	0.00342	0.49992	0.49992
10240	0.00110	0.00087	0.00566	0.00293	0.49985	0.49990

ТАБЛИЦЯ 2. Результати обчислювальних експериментів з квантовим генератором QRNG [7]

N	Δ_R	Δ_C	ΔF_R	ΔF_C	F_R	F_C
323	0.02347	0.02081	0.00929	0.00929	0.49682	0.49682
647	0.01056	0.01060	0.00927	0.01236	0.49934	0.49934
971	0.00890	0.00809	0.00412	0.00927	0.49970	0.49970
1295	0.00591	0.00908	0.00232	0.00541	0.49983	0.49983
1619	0.00745	0.00469	0.00432	0.00371	0.49986	0.49986
1942	0.00417	0.00350	0.00309	0.00515	0.49968	0.49968
2266	0.00590	0.00415	0.00309	0.00265	0.49970	0.49970
2590	0.00413	0.00365	0.00541	0.01004	0.49972	0.49972
2914	0.00282	0.00276	0.00240	0.00377	0.49974	0.49974
3238	0.00238	0.00244	0.00401	0.00185	0.49985	0.49985

Як показують результати обчислень, ϵ -сітка одиничного відрізку для $\epsilon = 0.001$ виникає досить швидко. Для цього у першому експерименті достатньо було трохи більше 10 тисяч випробувань, а в другому — 4000. До того ж спадання максимальної відстані між сусідніми числами у множинах M і M^* має практично монотонний характер. Крім того, в обох експериментах спостерігалося досить швидке спадання коливань відносної частоти, хоча воно мало немонотонний характер. Обидва ці фактори свідчать про випадковість чисел, згенерованих за допомогою квантових генераторів, відповідно до запропонованого у роботі означення.

Автор висловлює подяку бакалавру факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Олексію Морозову за допомогу в проведенні обчислень.

Висновки

Запропонований у роботі [4] частотний підхід, який базується на понятті характеристичної матриці випадкового експерименту, дозволив зняти проблему формалізації правила припустимого вибору колективу за фон Мізесом. У новій моделі колективи породжуються рядками і стовпцями характеристичної матриці. Застосування топологічних властивостей множин чисел, породжених рядками і стовпцями характеристичної матриці, робить запропонований критерій випадковості легко реалізованим у практичних застосуваннях. Показано, що частотний підхід при великій кількості випробувань можна розвити математично за допомогою математичного апарату теорії граток. Обчислювальні експерименти підтверджують практичність частотного підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Vitanyi P. M. B. Randomness // In A. Schrijver, N. Temme, and K. R. Apt, Eds., From Universal morphisms to megabytes: a Baayen space Odyssey, CWI, Amsterdam, 1994. — p. 627–642.
2. von Mises R. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Zeitschrift. — 5. — 1919. — P. 52–99.
3. Колмогоров А. Н. О таблицах случайных чисел // Семиотика и информатика. — М.: ВИНИТИ, 1981. — Вып. 18. — С. 3–13.
4. Петунін Ю. І., Клюшин Д. А. Структурний підхід до розв'язання шостої проблеми Гільберта // Теор. ймовір. і матем. статист. — 2004. — № 71. — С. 145–159.
5. Бирхгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984. — 568 с.
6. ANU (2016). ANU Quantum Random Numbers Server, Australian National University. Available at: <https://qrng.anu.edu.au>
7. QRNG Service (2016). Nano-Optics groups at the Department of Physics of Humboldt University. Available at: <https://qrng.physik.hu-berlin.de>

Надійшла 07.04.2017

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Журнал обчислювальної та прикладної
2017 М А Т Е М А Т И К И 1(124)
Заснований в 1965 році

З М И С Т

A. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк	
Прогнозування оптимального використання фільтруючих матеріалів у швидких багатошарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями	3
S. V. Denisov, V. V. Dudar, V. V. Semenov, Ya. I. Vedel	
A new mirror-prox algorithm for variational inequalities	15
C. И. Доценко	
Кооперативные игры в задачах о назначении	30
C. С. Зуб, Н. И. Ляшко, В. В. Семенов	
Динамічні системи для пошуку найближчих пар на двох гладких кривих в евклідовому просторі	43
C. О. Мащенко, В. І. Моренець	
Рівновага за Бержем в іграх з нечіткою коаліційною структурою	52
G. В. Сандраков, М. И. Базилева	
Осреднение уравнения Маттье с быстро осциллирующим потенциалом	64
П. І. Стецюк, Т. О. Баргадим, В. І. Ляшко	
Квадратична задача для максимального k -плекса в неорієнтованому графі	80
C. М. Шахно, Ю. В. Шунькін	
Двокроковий метод типу хорд для розв'язування нелінійних рівнянь	88
Ю. М. Шевчук	
Стійкість розв'язків у математичних моделях розповсюдження інформації з зовнішніми впливами	99
P. K. Pandey	
Solving third-order boundary value problems with quartic non polynomial splines	112
Д. А. Клюшин	
Нове частотне визначення випадковості	122