

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Журнал обчислювальної та прикладної
2015 МАТЕМАТИКИ 3(120)
Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський,
В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар),
Д. Я. Хусаїнов, А. О. Чикрій

Серія “Прикладна математика”

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарєв, Д. А. Ключин,
О. М. Новіков, Т. Є. Романова, А. Г. Руткас, В. М. Терещенко

Серія “Оптимізація”

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада),
Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія),
Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США),
Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

І. П. Сіренко, Л. І. Потапенко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjjournal@gmail.com [html://www.opmj.univ.kiev.ua](http://www.opmj.univ.kiev.ua)

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики
14 грудня 2015 року, протокол №6

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015
©“ТВіМС”, 2015

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Підписано до друку 14.12.2015

ОЛЕКСАНДРУ ГРИГОРОВИЧУ НАКОНЕЧНОМУ ВИПОВНЮЄТЬСЯ 70 РОКІВ



9 січня 2016 року виповниться 70 років з дня народження відомого вченого, заслуженого діяча освіти, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, заслуженого професора Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктора фізико-математичних наук, професора Олександра Григоровича Наконечного.

Усе свідоме життя Олександра Григоровича пов'язане з Київським національним університетом імені Тараса Шевченка. Вступивши в 1964 році до механіко-математичного факультету, він став одним з найкращих студентів курсу.

Після закінчення навчання у 1969 році Олександра Григоровича було запрошено на роботу до щойно створеного факультету кібернетики. Поєднуючи викладацьку роботу з науковою, він у 1973 році захистив кандидатську дисертацію за темою „Моментні функції старших порядків випадкових процесів“ під керівництвом академіка АН України А. В. Скорохода. В одновимірному випадку такою проблемою займалися такі всесвітньо відомі вчені як А. А. Марков, П. Л. Чебишев, М. Г. Крейн, Н. І. Ахієзер та інші. В нескінченно вимірному випадку виникали принципові труднощі для узагальнення подібних результатів, які давали можливість побудови теорії негаусових випадкових процесів, що визначалися б моментами старших порядків. У серії робіт О. Г. Наконечним було розроблено нові методи і одержано ґрунтовні результати в цій області.

У подальшому наукова діяльність О. Г. Наконечного пов'язана з моделюванням і оптимізацією складних систем. Добре відомі спеціалістам його праці з моделювання та оптимізації звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Ці дослідження були розпочаті в 1974 р.

і суттєво розвинули теорію оцінювання та керування в умовах невизначеності. Узагальнивши принцип дуальності Р. Калмана, він розробив методи одержання рекурентних оцінок станів та параметрів стохастичних рівнянь в умовах невизначеності.

Фундаментальні результати О. Г. Наконечним було одержано в області оцінювання розв'язків і параметрів рівнянь з частинними похідними із детермінованими та стохастичними збуреннями. Для побудови конструктивної теорії оцінювання О. Г. Наконечний застосував мінімаксий підхід. Виходячи із варіаційної теорії рівнянь еліптичного, параболічного та гіперболічного типів у гільбертових просторах, ним були розроблені оригінальні методи оптимізації в умовах невизначеності, що суттєво узагальнювали результати Калмана-Б'юсі, Н. Н. Красовського, А. Б. Куржанського, Ж.-Л. Ліонса. Створення такої теорії відкрило можливість її застосування при розробці обчислювальних систем автоматизованої обробки результатів експериментів із визначення параметрів середовищ, інтенсивності джерел, тощо. Подібні задачі виникають в акустиці, гідродинаміці, оптиці, радіолокації, астрономії, метеорології, сейсмології, теплофізиці.

У 1981 році О. Г. Наконечний захистив докторську дисертацію „Мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків рівнянь з частинними похідними“. Він фактично створив наукову школу, предметом досліджень якої є:

- стохастичні рівняння зі стрибками;
- стохастичні рівняння зі змінною структурою;
- стохастичні рівняння з інформаційними критеріями оцінювання;
- диференціальні рівняння з запізненням;
- планування оптимальних стратегій спостереження для рівнянь з частинними похідними;
- задачі оцінювання та керування в гідроакустиці;
- задачі прогнозування розв'язків рівнянь переносу та дифузії.

Під науковим керівництвом О. Г. Наконечного захищено 6 докторських та 19 кандидатських дисертацій.

Ефективність діяльності наукових підрозділів, керованих О. Г. Наконечним, підтверджується численними науковими публікаціями. З них понад 280 належать Олександрю Григоровичу, поміж яких 7 монографій та 6 навчальних посібників.

З 1997 по 1999 р. під керівництвом О. Г. Наконечного велися роботи разом із вченими Йельського університету (США) зі створення системи моделювання та обробки даних ультразвукових експериментів з метою дистанційного керування інтелектуальними роботами нового покоління типу „Кажан“ та „Дельфін“. Вперше в світі для такого керування було застосовано нові інформаційні технології.

З 2011 по 2012 р. під керівництвом О. Г. Наконечного виконувався українсько-французький проект „Апостеріорне мінімаксне оцінювання руху рідин“ разом з науковцями з Національного Дослідницького Інституту з Комп'ютерних Наук та Керування (INRIA, Париж, Франція) у рамках Програми

спільних дій між Україною і Францією в галузі науково-технологічного співробітництва „Дніпро“.

Багато сил і енергії професор О. Г. Наконечний віддає педагогічній та науково-методичній діяльності. З 1978 по 1995 р. був заступником завідувача кафедри моделювання складних систем. З 1996 року завідує кафедрою системного аналізу та теорії прийняття рішень, що є базовою з напрямку „системний аналіз“.

Нормативний курс „Моделі та методи підтримки прийняття рішень“ та спецкурси „Сучасні проблеми оптимізації та ідентифікації“, „Методи оцінювання і оптимізації в динамічних системах“, „Статистична теорія прийняття рішень“ містять найновіші досягнення світової наукової думки у відповідних ділянках системного аналізу.

З 1978 року сумісно з чл.-кор. НАН України Б. М. Бубликом О. Г. Наконечний керував республіканським науковим семінаром „Моделювання та оптимізація складних систем“. З 1995 по 1997 був головою, а з 2004 — заступник голови спеціалізованої ради із захисту докторських дисертацій, був членом двох експертних рад ВАК України, з 1997 по 1999 р. був заступником голови експертної ради ВАК України з інформатики.

Професор О. Г. Наконечний є Президентом Академії Наук Вищої Школи України, головою програмного комітету щорічних міжнародних конференцій „Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності“ (PDMU).

Олександр Григорович Наконечний перебуває у розквіті творчих сил. Його наукова і педагогічна діяльність викликає глибоку повагу у вітчизняних і закордонних науковців, колег по роботі, студентів. Редакційна колегія „Журналу обчислювальної та прикладної математики“, членом якої є Олександр Григорович, щиро вітає Ювіляра і зичить йому міцного здоров'я і нових наукових здобутків на благо України.

УДК 517.9

MSC 35K35, 49J20

**THE SOLVABILITY OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM
WITH MINIMAL ENERGY FOR ONE PARABOLIC
BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL
BOUNDARY CONDITIONS**

OLENA KAPUSTIAN¹, OLEH MAZUR²

¹Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: olena.kap@gmail.com.

²National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine, E-mail: okmazur@ukr.net.

**РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З
МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ
КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ
УМОВАМИ**

О. А. КАПУСТЯН¹, О. К. МАЗУР²

¹Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: olena.kap@gmail.com.

²Національний університет харчових технологій, Київ, Україна, E-mail: okmazur@ukr.net.

ABSTRACT. We consider the optimal control problem with minimal energy for parabolic equation with distributed control and nonlocal boundary conditions. Using Fourier method and properties of Fourier-Bessel series, we prove the solvability of this problem.

KEYWORDS: the optimal control problem, minimal energy, parabolic equation, nonlocal boundary conditions.

РЕЗЮМЕ. В роботі розглядається задача оптимального керування з мінімальною енергією на розв'язках параболічного рівняння з розподіленим керуванням та нелокальними крайовими умовами. Використовуючи біортонормовані базисні системи функцій і ряди Фур'є-Бесселя та їх властивості, доводиться класична розв'язність вказаної задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: задача оптимального керування, мінімальна енергія, параболічне рівняння, нелокальні крайові умови.

Вступ

Теорія лінійно-квадратичних задач оптимального керування як для еліптичних, так і для параболічних рівнянь є добре розвиненою [1–3], зокрема, у роботі О. Г. Наконечного „Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними“ [4] запропоновані умови існування та єдиності узагальнених розв'язків крайових задач, наведено необхідні умови

екстремуму функціоналів у банахових просторах, розглянуто задачі оптимального керування для лінійних рівнянь еліптичного та параболічного типів.

Для самоспряжених задач у багатьох випадках використовується метод Фур'є для точного знаходження або якісного аналізу оптимальних керувань. Розглянена в даній роботі задача не є самоспряженою. В одновимірній області з нелокальними крайовими умовами ряд задач оптимального керування було досліджено в [5]. Класичний розв'язок розгляненої в роботі крайової задачі для рівняння Лапласа було отримано в [6], а відповідну задачу оптимального керування розв'язано в [7]. У [8] встановлена класична розв'язність задачі оптимального керування параболічним рівнянням з квадратичним критерієм якості за допомогою біортонормованих систем базисних функцій. В даній роботі техніка робіт [7, 8], а також ряди Бесселя-Фур'є та їх властивості [9, 10] застосовані для знаходження оптимального керування для задачі з мінімальною енергією та розподіленим керуванням у правій частині рівняння параболічного типу.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $Q = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$.

Розглянемо таку задачу оптимального керування: потрібно знайти таку функцію стану $y = y(t, r, \theta)$ та керування $u = u(r, \theta)$, що

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + q(t)u(r, \theta), & (t, r, \theta) \in Q, \\ y(t, 1, \theta) = 0, & t \in (0, T), \theta \in (0, \pi), \\ y(t, r, 0) = 0, & t \in (0, T), r \in (0, 1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(t, r, 0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(t, r, \pi), & t \in (0, T), r \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

$$y(0, r, \theta) = h(r, \theta), \quad (2)$$

$$y(T, r, \theta) = z(r, \theta), \quad (3)$$

$$J(u) = \int_0^1 r \|u^2(r)\|^2 dr \rightarrow \inf, \quad (4)$$

де $\Delta y := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ є оператором Лапласа у полярних координатах, $q \in C([0, T])$, $h, z \in C(\bar{\Omega})$ - задані функції, $\|\cdot\|$ - норма у просторі $L^2(0, \pi)$.

Для розв'язання задачі (1)–(4), аналогічно [6], розглянемо дві біортонормовані й повні у просторі $L^2(0, \pi)$ системи функцій Самарського-Іонкіна

$$\Psi = \{\psi_0 = \frac{2}{\pi^2}, \psi_{2n} = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta) \sin 2n\theta, \psi_{2n-1} = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta\},$$

$$\Phi = \{\varphi_0 = \theta, \varphi_{2n} = \sin 2n\theta, \varphi_{2n-1} = \theta \cos 2n\theta\}.$$

Норма у просторі $L^2(0, \pi)$ задається рівністю [6]

$$\forall v \in L^2(0, \pi) \quad \|v\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} v(\theta) \psi_n(\theta) d\theta \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Найбільшою складністю при розв'язанні задачі оптимального керування (1)–(4) є наявність нелокальності крайових умов. Саме це не дозволяє отримати послідовність незалежних одновимірних задач при застосуванні методу Фур'є до вихідної задачі. У даній статті для досить широкого класу вихідних даних буде отримано розв'язок згаданої вище нескінченновимірної проблеми моментів і, отже, буде обґрунтовано класичну розв'язність задачі (1)–(4).

Зафіксуємо керування

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \varphi_n(\theta) \quad (5)$$

і для нього шукатимемо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$y(t, r, \theta) = y_0(t, r) \varphi_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{2n-1}(t, r) \varphi_{2n-1}(\theta) + y_{2n}(t, r) \varphi_{2n}(\theta)), \quad (6)$$

де функції $\{y_n(t, r)\}_{n=0}^{\infty}$ визначаються з таких початково-крайових задач у області $\Pi = (0, T) \times (0, 1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y_0}{\partial r}) + q(t) u_0(r), & (t, r) \in \Pi, \\ y_0(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ y_0(0, r) = h_0(r), & r \in (0, 1), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 y_{2n-1} + q(t) u_{2n-1}(r), & (t, r) \in \Pi, \\ y_{2n-1}(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ y_{2n-1}(0, r) = h_{2n-1}(r), & r \in (0, 1), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y_{2n}}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 y_{2n} - \frac{4n}{r^2} y_{2n-1} + q(t) u_{2n}(r), & (t, r) \in \Pi, \\ y_{2n}(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ y_{2n}(0, r) = h_{2n}(r), & r \in (0, 1), \end{cases} \quad (9)$$

де $\forall n \geq 0 \quad h_n = \int_0^\pi h(r, \theta) \cdot \psi_n(\theta) d\theta$.

Отже, вихідна задача оптимального керування (1)–(4) з мінімальною енергією зводиться до такої: серед допустимих пар $\{u_n(r), y_n(t, r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (7)–(9) потрібно знайти такі пари, на яких досягає мінімуму функціонал якості

$$J = \int_0^1 r u_0^2(r) dr + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 r (u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r)) dr \quad (10)$$

і виконуються умови

$$y_0(T, r) = z_0(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi z(r, \theta) d\theta, \quad (11)$$

$$\forall n \geq 1 \quad y_{2n-1}(T, r) = z_{2n-1}(r) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi z(r, \theta) \cos 2n\theta d\theta, \quad (12)$$

$$\forall n \geq 1 \quad y_{2n}(T, r) = z_{2n}(r) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi z(r, \theta)(\pi - \theta) \sin 2n\theta d\theta. \quad (13)$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n, \tilde{y}_n\}_{n=0}^\infty$ повинен бути таким, що формула (5) визначає функцію $\tilde{u} \in C(\bar{\Omega})$ і формула (6) визначає функцію $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$, для яких

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \theta} \in C(\bar{Q}), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \theta^2} \in C(Q). \quad (14)$$

Для розв'язання цієї задачі зробити додаткові припущення на початкові дані: нехай для деякого $N \geq 0$

$$\forall r \in [0, 1] \quad h(r, \cdot), z(r, \cdot) \in L_N := \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2N}\}, \quad (15)$$

тобто

$$h(r, \theta) = \sum_{n=0}^{2N} h_n(r) \varphi_n(\theta), \quad z(r, \theta) = \sum_{n=0}^{2N} z_n(r) \varphi_n(\theta).$$

З умови (15) випливає, що $n > N \quad h_{2n-1} = h_{2n} = 0, \quad z_{2n-1} = z_{2n} = 0$. Отже, мінімум функціоналу якості

$$J_n := \int_0^1 r(u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r)) dr$$

дорівнює нулю і досягається на допустимих у задачах (8), (9) з умовами (12) і (13) парах $\{u_{2n-1} = 0, y_{2n-1} = 0\}, \{u_{2n} = 0, y_{2n} = 0\}$.

Таким чином, за умови (15), на оптимальному процесі ряди (5), (6) містять лише скінченну кількість ненульових членів. Це забезпечує виконання умови (14) як тільки буде знайдено розв'язок задачі (7)–(13) для $n = \overline{1, N}$.

2. ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(4) виконуються умови (15), а також*

$$q \in C([0, 1]), \quad \exists q_0 > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad q(t) \geq q_0, \quad (16)$$

$$h_0 \in C^2([0, 1]), \quad h_0(0) = h_0(1) = 0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad (17)$$

$$z_0 \in C^4([0, 1]), \quad z_0^{(k)}(0) = z_0^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad (18)$$

$$\forall n = \overline{1, N} \quad h_{2n} \in C^2([0, 1]), \quad h_{2n}(0) = h_{2n}(1) = 0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad (19)$$

$$\forall n = \overline{1, N} \quad z_{2n} \in C^4([0, 1]), \quad z_{2n}^{(k)}(0) = z_{2n}^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad (20)$$

$$h_{2n-1} \in C^6([0, 1]), \quad h_{2n-1}^{(k)}(0) = h_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0, 4}, \quad (21)$$

$$z_{2n-1} \in C^6([0, 1]), \quad z_{2n-1}^{(k)}(0) = z_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0, 4}. \quad (22)$$

Тоді задача оптимального керування (1)–(4) має єдиний розв’язок

$$\bar{u}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{2N} \bar{u}_n(r) \varphi_n(\theta), \quad \bar{y}(t, r, \theta) = \sum_{n=0}^{2N} \bar{y}_n(t, r) \varphi_n(\theta),$$

де $\{\bar{u}_n, \bar{y}_n\}_{n=0}^{2N}$ є розв’язком задач (7)–(9), (11)–(13).

Висновки

Нами була розглянена задача оптимального керування з мінімальною енергією для параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами. При використанні біортонормованих базисних систем функцій та рядів Фур’є-Бесселя сформульована теорема про існування та єдиність розв’язку вказаної задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением — М.: Наука, 1968. — 476 с.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами — М.: Наука, 1978. — 463 с.
3. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами — К.: Наукова Думка, 1988. — 288 с.
4. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними — К.: Видавництво Київського університету, 2004. — 103 с.
5. Капустян В. О., Пишнограєв І. О. Наближене оптимальне керування для параболіко-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами і напіввизначеним критерієм якості // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №4. — С. 24–36.
6. Моисеев Е. И., Амбарцумян В. Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, №5. — С. 718–725.
7. Kapustyan V. O., Kapustyan O. A., Mazur O. K. Problem of optimal control for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 201, №3. — P. 325–334.
8. Kapustyan V. O., Kapustyan O. V., Kapustyan O. A., Mazur O. K. The Optimal Control Problem for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in Circular Sector // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications. — Vol. 30. — 2015. — P. 297–314.
9. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций — М.: ИИЛ, 1949. — 798 с.
10. Scherberg M. G. The degree of convergence of a series of Bessel functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1933. — Vol. 35. — P. 172–183.

Надійшла 01.11.2015

УДК 517.977

MSC 49J20

**JUSTIFICATION OF MINMAX ESTIMATES FOR LINEAR
FUNCTIONALS ON SOLUTIONS OF
PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLOCAL
BOUNDARY CONDITIONS AND DISTRIBUTED
OBSERVATIONS**

VOLODYMYR KAPUSTYAN, IVAN PYSHNOGRAIEV

Department of of Mathematical Modeling for Economic Systems, NTUU „KPI“, Kyiv,
Ukraine. E-mail: v.kapustyan@mses.kpi.ua, pyshnograiev@gmail.com.

**ОБОСНОВАНИЕ МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С
НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И
РАСПРЕДЕЛЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ**

В. Е. КАПУСТЯН, И. А. ПЫШНОГРАЕВ

Кафедра математического моделирования экономических систем, НТУУ „КПИ“, Киев,
Украина. E-mail: v.kapustyan@mses.kpi.ua, pyshnograiev@gmail.com.

ABSTRACT. For distributed observation the problem of minmax estimation of linear functionals, vague on solutions of parabolic-hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions, reduced to an optimal control problem, which is divided into a sequence of finite-dimensional problems. We derive conditions for the existence of these problems and the solutions of the original problem minmax estimation. The validity of some representations of linear functionals is shown. Minimax apriori estimates provided by the special solutions of boundary value problems are given.

KEYWORDS: minmax estimation, linear functional, optimal control, parabolic-hyperbolic equations, nonlocal boundary conditions.

РЕЗЮМЕ. Для распределенного наблюдения задача минимаксного оценивания линейных функционалов, определенных на решениях параболо-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями, сведена к задаче оптимального управления, которая в свою очередь разбита на последовательность конечномерных задач. Выведены условия существования решений данных задач и исходной задачи минимаксного оценивания. Показана справедливость некоторых представлений линейных функционалов. Приведены минимаксные априорные оценки, представленные через решения специальных краевых задач.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: минимаксное оценивание, линейный функционал, оптимальное управление, парабола-гиперболические уравнения, нелокальные краевые условия.

ВСТУПЛЕНИЕ

В статье приведены результаты по минимаксному оцениванию для линейных функционалов от решений одного класса гибридных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Особенность таких краевых задач состоит в том, что, во-первых, их решения локально зависят от правых частей в некоторой точке по времени, а, во-вторых, при построении классического решения используются биортогональные базисы, учитывающие специфику краевых условий. Это приводит как к новым постановкам задач минимаксного оценивания, так и к новым алгоритмам минимаксного оценивания.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть состояние некоторой системы описывается функцией $y(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$, которая удовлетворяет в области D уравнению

$$Ly(x, t) = \hat{f}(x, t) \quad (1)$$

начальным

$$y(x, -\alpha) = \varphi(x) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$y(0, t) = 0, y'(0, t) = y'(1, t), \quad -\alpha \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \leq T, \alpha > 0, T > 0\}$, $D_- = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \leq 0\}$, $D_+ = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, функции $\hat{f}, \varphi$ считаем неизвестными, а их свойства будут уточнены ниже,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t > 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

В краевой задаче (1)–(3) положим

$$\hat{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, 0) + \int_0^t \xi(x, \tau) d\tau, & t \geq 0, \\ f_-(x, t), & t < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Известно [1, 2], что для задачи (1)–(3) система собственных и присоединенных функций имеет вид $W_0 = \{X_j(x), j = 0, 1, \dots\}$, где

$$X_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx), X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \\ k = 1, 2, \dots, X_0(x) = x. \quad (5)$$

Для системы функций W_0 существует биортогональная к ней система функций $R_0 = \{Y_i(x), i = 0, 1, \dots\}$, элементы которой имеют вид

$$Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), Y_{2k}(x) = 4(1-x) \times \\ \times \sin(2\pi kx), k = 1, 2, \dots, Y_0(x) = 2. \quad (6)$$

Системы W_0, R_0 образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$ и для любой функции $\phi(x) \in L_2(0, 1)$ справедлива оценка

$$r \|\phi\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 \leq R \|\phi\|_{L_2}^2, \quad (7)$$

где $r = 3/4, R = 16, \phi_k = (\phi, Y_k)_{L_2}$.

Более того, в пространстве $L_2(0, 1)$ можно ввести эквивалентную норму по правилу

$$\|\phi\|_D^2 = (D\phi, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2, \quad (8)$$

где $D : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ - некоторый положительно определенный оператор.

Тогда при фиксированных возмущениях $\hat{f}, \varphi$ решение задачи (1)–(3) можем представить в виде

$$y(x, t) = X_0(x)y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (X_{2k-1}(x)y_{2k-1}(t) + X_{2k}(x)y_{2k}(t)), \quad (9)$$

где функции $y_i(t)$ определяются как решения краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{dy_0(t)}{dt} &= f_0(0) + \int_0^t \xi_0(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} &= f_{0,-}(t), t < 0, \\ y_0(-\alpha) &= \varphi_0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) &= f_{2k-1}(0) + \int_0^t \xi_{2k-1}(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) &= f_{2k-1,-}(t), t < 0, \\ y_{2k-1}(-\alpha) &= \varphi_{2k-1}, \lambda_k = 2k\pi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) &= -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + f_{2k}(0) + \int_0^t \xi_{2k}(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) &= -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + f_{2k,-}(t), t < 0, \\ f_i(t) &= f_i(0) + \int_0^t \xi_i(\tau) d\tau, i \geq 0, \end{aligned}$$

$$y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k}, k = 1, 2, \dots, y_i(t) \in C^1(-\alpha, T), i \geq 0, \quad (12)$$

причем,

$$y_i(t) = (y(\cdot, t), Y_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, \varphi_i = (\varphi(\cdot), Y_i(\cdot))_{L_2(0,1)},$$

$$f_{i,-}(t) = (f_-(\cdot, t), Y_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, f_i(t) = (f(\cdot, t), Y_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, i \geq 0.$$

Наблюдения имеют вид

$$\theta_i(t) = y_i(t) + F_i(t), t \in [-\alpha, T], i \geq 0, \quad (13)$$

где $F_i(t) = (F(\cdot, t), Y_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, F \in L_2(D)$.

Помехи, действующие на систему (1)–(3), (13) стеснены ограничениями

$$\sum_{i=0}^{\infty} [\hat{\alpha} \varphi_i^2 + \hat{\beta} f_i^2(0) + \hat{\gamma} \int_{-\alpha}^0 f_{i,-}^2(t) dt + \hat{\mu} \int_0^T \xi_i^2(t) dt + \hat{\nu} \int_{-\alpha}^T F_i^2(t) dt] \leq 1, \quad (14)$$

где $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\nu} > 0$.

На решениях задачи (1)–(3) определим линейный функционал

$$l(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\alpha}^T q_i(t) y_i(t) dt, \quad (15)$$

где $q_i(t) = (q(\cdot, t), X_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, q \in L_2(D)$.

Оценку функционала (15) будем искать в классе линейных оценок вида

$$\hat{l}(y) = - \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\alpha}^T \hat{u}_i(t) \theta_i(t) dt, \quad (16)$$

где

$$\hat{u}_i(t) = (\hat{u}(\cdot, t), X_i(\cdot))_{L_2(0,1)}, \hat{u}_i \in L_2(D);$$

$$\hat{u}_i(t) = u_i(t), t \geq 0; \hat{u}_i(t) = v_i(t), t < 0.$$

Оценку $\hat{l}(y)$ из класса (16) будем называть априорной минимаксной оценкой [3], если для нее выполняется равенство

$$\sigma^2 = |l(y) - \hat{l}(y)|^2 = \inf_{\hat{u}} \sup_{\varphi, f, F} |l(y) - \hat{l}(y)|^2. \quad (17)$$

2. Минимаксные оценки

Задачу минимаксного оценивания (1)–(17) стандартно [3] сводим к задаче оптимального управления, которая имеет вид: найти минимум функционала

$$\begin{aligned} J(u) = \sum_{i=0}^{\infty} [\hat{\nu}^{-1} \int_{-\alpha}^T \hat{u}_i^2(t) dt + \hat{\gamma}^{-1} \int_{-\alpha}^0 \psi_i^2(t) dt + \hat{\beta}^{-1} (\psi_i(0-) - \int_0^T \psi_i(t) dt)^2 + \\ + \hat{\mu}^{-1} \int_0^T (\int_t^T \psi_i(\tau) d\tau)^2 dt + \hat{\alpha}^{-1} (\frac{d\psi_i(-\alpha)}{dt})^2], \end{aligned} \quad (18)$$

который определен на решениях краевой задачи

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_0(t)}{dt} &= q_0(t) + u_0(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_0(t)}{dt^2} &= -q_0(t) - v_0(t), t < 0, \\ \psi_0(-\alpha) &= 0, \frac{d\psi_0(0-)}{dt} + \psi_0(0+) = 0, \psi_0(T) = 0;\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{2i-1}(t)}{dt} - \lambda_i^2 \psi_{2i-1}(t) - 2\lambda_i \psi_{2i}(t) &= q_{2i-1}(t) + u_{2i-1}(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_{2i-1}(t)}{dt^2} + \lambda_i^2 \psi_{2i-1}(t) + 2\lambda_i \psi_{2i}(t) &= -q_{2i-1}(t) - v_{2i-1}(t), t < 0, \\ \psi_{2i-1}(-\alpha) &= 0, \psi_{2i-1}(T) = 0, \\ \frac{d\psi_{2i-1}(0-)}{dt} + \psi_{2i-1}(0+) + \lambda_i^2 \psi_{2i-1}(0-) + 2\lambda_i \psi_{2i}(0-) &= 0;\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{2i}(t)}{dt} - \lambda_i^2 \psi_{2i}(t) &= q_{2i}(t) + u_{2i}(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_{2i}(t)}{dt^2} + \lambda_i^2 \psi_{2i}(t) &= -q_{2i}(t) - v_{2i}(t), t < 0, \\ \psi_{2i}(-\alpha) &= 0, \psi_{2i}(T) = 0, \\ \frac{d\psi_{2i}(0-)}{dt} + \psi_{2i}(0+) + \lambda_i^2 \psi_{2i}(0-) &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Сформулированная выше бесконечномерная задача оптимального управления эквивалентна последовательности таких конечномерных задач:

1) найти минимум функционала

$$\begin{aligned}J_0(\hat{u}_0) &= \hat{\nu}^{-1} \int_{-\alpha}^T \hat{u}_0^2(t) dt + \hat{\gamma}^{-1} \int_{-\alpha}^0 \psi_0^2(t) dt + \hat{\beta}^{-1} (\psi_0(0-) - \int_0^T \psi_0(t) dt)^2 + \\ &+ \hat{\mu}^{-1} \int_0^T \int_0^T K(t, \tau) \psi_0(\tau) \psi_0(t) d\tau dt + \hat{\alpha}^{-1} \left(\frac{d\psi_0(-\alpha)}{dt} \right)^2,\end{aligned}\quad (22)$$

на решениях задачи (19);

2) найти минимум функционала

$$\begin{aligned}J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) &= \sum_{i=2k-1}^{2k} \left[\hat{\nu}^{-1} \int_{-\alpha}^T \hat{u}_i^2(t) dt + \hat{\gamma}^{-1} \int_{-\alpha}^0 \psi_i^2(t) dt + \hat{\beta}^{-1} (\psi_i(0-) - \right. \\ &\left. - \int_0^T \psi_i(t) dt)^2 + \hat{\mu}^{-1} \int_0^T \int_0^T K(t, \tau) \psi_i(\tau) \psi_i(t) d\tau dt + \hat{\alpha}^{-1} \left(\frac{d\psi_i(-\alpha)}{dt} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (23)$$

на решениях задачи (20)–(21), где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tau, & t \geq \tau, \\ t, & t < \tau. \end{cases}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (22), (19) находим

$$\begin{aligned} v_0(t) &= -\hat{\nu} p_0(t), t < 0, \\ u_0(t) &= -\hat{\nu} p_0(t), t > 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где функция $p_0(t), t \in [-\alpha, T]$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0(t)}{dt} &= q_0(t) - \hat{\nu} p_0(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_0(t)}{dt^2} &= -q_0(t) + \hat{\nu} p_0(t), t < 0, \\ \psi_0(-\alpha) &= 0, \frac{d\psi_0(0-)}{dt} + \psi_0(0+) = 0, \psi_0(T) = 0; \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= \hat{\beta}^{-1}(\psi_0(0-) - \int_0^T \psi_0(t) dt) - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau) \psi_0(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2p_0(t)}{dt^2} &= -\hat{\gamma}^{-1} \psi_0(t), t < 0, \\ p_0(0+) &= p_0(0-), \frac{dp_0(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\psi_0(0-) - \int_0^T \psi_0(t) dt) = \frac{dp_0(0+)}{dt}, \\ p_0(-\alpha) &= \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\psi_0(-\alpha)}{dt}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (23), (20)–(21) находим

$$\begin{aligned} v_i(t) &= -\hat{\nu} p_i(t), t < 0, \\ u_i(t) &= -\hat{\nu} p_i(t), t > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где функции $p_i(t), t \in [-\alpha, T], i = \overline{2k-1, 2k}$ являются решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{2k-1}(t)}{dt} - \lambda_k^2 \psi_{2k-1}(t) - 2\lambda_k \psi_{2k}(t) &= q_{2k-1}(t) - \hat{\nu} p_{2k-1}(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \psi_{2k-1}(t) + 2\lambda_k \psi_{2k}(t) &= -q_{2k-1}(t) + \hat{\nu} p_{2k-1}(t), t < 0, \\ \psi_{2k-1}(-\alpha) &= 0, \psi_{2k-1}(T) = 0, \\ \frac{d\psi_{2k-1}(0-)}{dt} + \psi_{2k-1}(0+) + \lambda_k^2 \psi_{2k-1}(0-) + 2\lambda_k \psi_{2k}(0-) &= 0; \\ \frac{d\psi_{2k}(t)}{dt} - \lambda_k^2 \psi_{2k}(t) &= q_{2k}(t) - \hat{\nu} p_{2k}(t), t > 0, \\ \frac{d^2\psi_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \psi_{2k}(t) &= -q_{2k}(t) + \hat{\nu} p_{2k}(t), t < 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2k}(-\alpha) = 0, \psi_{2k}(T) = 0, \\ \frac{d\psi_{2k}(0-)}{dt} + \psi_{2k}(0+) + \lambda_k^2 \psi_{2k}(0-) = 0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 p_{2k-1}(t) = \hat{\beta}^{-1}(\psi_{2k-1}(0-) - \int_0^T \psi_{2k-1}(t) dt) - \\ - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau) \psi_{2k-1}(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2 p_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 p_{2k-1}(t) = -\hat{\gamma}^{-1} \psi_{2k-1}(t), t < 0, \\ p_{2k-1}(0+) = p_{2k-1}(0-), \frac{dp_{2k-1}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\psi_{2k-1}(0-) - \\ - \int_0^T \psi_{2k-1}(t) dt) - \lambda_k^2 p_{2k-1}(0-) = \frac{dp_{2k-1}(0+)}{dt}, \\ p_{2k-1}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\psi_{2k-1}(-\alpha)}{dt}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 p_{2k}(t) + 2\lambda_k p_{2k-1}(t) = \hat{\beta}^{-1}(\psi_{2k}(0-) - \int_0^T \psi_{2k}(t) dt) - \\ - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau) \psi_{2k}(\tau) d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2 p_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 p_{2k}(t) + 2\lambda_k p_{2k-1}(t) = -\hat{\gamma}^{-1} \psi_{2k}(t), t < 0, \\ p_{2k}(0+) = p_{2k}(0-), \frac{dp_{2k}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\psi_{2k}(0-) - \\ - \int_0^T \psi_{2k}(t) dt) - \lambda_k^2 p_{2k}(0-) - 2\lambda_k p_{2k-1}(0-) = \frac{dp_{2k}(0+)}{dt}, \\ p_{2k}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\psi_{2k}(-\alpha)}{dt}. \end{aligned} \quad (31)$$

Функционалы (15)–(17) формально можно представить в виде

$$\begin{aligned} l(y) &= l_0(y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} l_k(y_{2k-1}, y_{2k}), \\ \hat{l}(y) &= \hat{l}_0(y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{l}_k(y_{2k-1}, y_{2k}), \\ \sigma^2 &= J_0(\hat{u}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} l_0(y_0) &= \int_{-\alpha}^T q_0(t)y_0(t)dt, \hat{l}_0(y_0) = - \int_{-\alpha}^T \hat{u}_0(t)\theta_0(t)dt, \\ l_k(y_{2k-1}, y_{2k}) &= \int_{-\alpha}^T (q_{2k-1}(t)y_{2k-1}(t) + q_{2k}(t)y_{2k}(t))dt, \\ \hat{l}_k(y_{2k-1}, y_{2k}) &= - \int_{-\alpha}^T (\hat{u}_{2k-1}(t)\theta_{2k-1}(t) + \hat{u}_{2k}(t)\theta_{2k}(t))dt. \end{aligned}$$

Имеют место представления

$$J_0(\hat{u}_0) = l_0(p_0), \quad J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) = l_k(y_{2k-1}, y_{2k}), k > 0, \quad (33)$$

$$\hat{l}_0(y_0) = l_0(\hat{v}_0), \quad (34)$$

если функция $\hat{v}_0(t), t \in [-\alpha, T]$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_0(t)}{dt} &= \hat{v}(\theta_0(t) - \hat{v}_0(t)), t > 0, \\ \frac{d^2\hat{p}_0(t)}{dt^2} &= -\hat{v}(\theta_0(t) - \hat{v}_0(t)), t < 0, \\ \hat{p}_0(-\alpha) &= 0, \frac{d\hat{p}_0(0-)}{dt} + \hat{p}_0(0+) = 0, \quad \hat{p}_0(T) = 0; \\ \frac{d\hat{v}_0(t)}{dt} &= \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_0(0-) - \int_0^T \hat{p}_0(t)dt) - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau)\hat{p}_0(\tau)d\tau, t > 0, \\ \frac{d^2\hat{v}_0(t)}{dt^2} &= -\hat{\gamma}^{-1}\hat{p}_0(t), t < 0, \\ \hat{v}_0(0+) &= \hat{v}_0(0-), \frac{d\hat{v}_0(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_0(0-) - \int_0^T \hat{p}_0(t)dt), \\ \hat{v}_0(-\alpha) &= \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\hat{p}_0(-\alpha)}{dt}. \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме того, справедливы представления

$$J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) = l_k(p_{2k-1}, p_{2k}), \hat{l}_k(y_{2k-1}, y_{2k}) = l_k(\hat{v}_{2k-1}, \hat{v}_{2k}), k > 0, \quad (37)$$

где функции $\hat{v}_{2k-1}(t), \hat{v}_{2k}(t), t \in [-\alpha, T]$ являются решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_{2k-1}(t)}{dt} - \lambda_k^2 \hat{p}_{2k-1}(t) - 2\lambda_k \hat{p}_{2k}(t) &= \hat{v}(\theta_{2k-1}(t) - \hat{v}_{2k-1}(t)), t > 0, \\ \frac{d^2\hat{p}_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \hat{p}_{2k-1}(t) + 2\lambda_k \hat{p}_{2k}(t) &= -\hat{v}(\theta_{2k-1}(t) - \hat{v}_{2k-1}(t)), t < 0, \\ \hat{p}_{2k-1}(-\alpha) &= 0, \\ \frac{d\hat{p}_{2k-1}(0-)}{dt} + (1 + \lambda_k^2)\hat{p}_{2k-1}(0+) + 2\lambda_k \hat{p}_{2k}(0+) &= 0, \hat{p}_{2k-1}(T) = 0; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{p}_{2k}(t)}{dt} - \lambda_k^2 \hat{p}_{2k}(t) &= \hat{\nu}(\theta_{2k}(t) - \hat{\vartheta}_{2k}(t)), t > 0, \\
 \frac{d^2\hat{p}_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \hat{p}_{2k}(t) &= -\hat{\nu}(\theta_{2k}(t) - \hat{\vartheta}_{2k}(t)), t < 0, \\
 \hat{p}_{2k}(-\alpha) &= 0, \\
 \frac{d\hat{p}_{2k}(0-)}{dt} + (1 + \lambda_k^2)\hat{p}_{2k}(0+) &= 0, \hat{p}_{2k}(T) = 0;
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\vartheta}_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 \hat{\vartheta}_{2k-1}(t) &= \hat{\beta}^{-1} (\hat{p}_{2k-1}(0-) - \int_0^T \hat{p}_{2k-1}(t) dt) - \\
 &\quad - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau) \hat{p}_{2k-1}(\tau) d\tau, t > 0, \\
 \frac{d^2\hat{\vartheta}_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \hat{\vartheta}_{2k-1}(t) &= -\hat{\gamma}^{-1} \hat{p}_{2k-1}(t), t < 0, \\
 \hat{\vartheta}_{2k-1}(0+) &= (1 + \lambda_k^2) \hat{\vartheta}_{2k-1}(0-), \frac{d\hat{\vartheta}_{2k-1}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_{2k-1}(0-) - \\
 &\quad - \int_0^T \hat{p}_{2k-1}(t) dt), \hat{\vartheta}_{2k-1}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\hat{p}_{2k-1}(-\alpha)}{dt};
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\vartheta}_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 \hat{\vartheta}_{2k}(t) + 2\lambda_k \hat{p}_{2k-1}(t) &= \hat{\beta}^{-1} (\hat{p}_{2k}(0-) - \int_0^T \hat{p}_{2k}(t) dt) - \\
 &\quad - \hat{\mu}^{-1} \int_0^T K(t, \tau) \hat{p}_{2k}(\tau) d\tau, t > 0, \\
 \frac{d^2\hat{\vartheta}_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 \hat{\vartheta}_{2k}(t) + 2\lambda_k \hat{\vartheta}_{2k-1}(t) &= -\hat{\gamma}^{-1} \hat{p}_{2k}(t), t < 0, \\
 \hat{\vartheta}_{2k}(0+) &= (1 + \lambda_k^2) \hat{\vartheta}_{2k}(0-) + 2\lambda_k \hat{\vartheta}_{2k-1}(0-), \frac{d\hat{\vartheta}_{2k}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_{2k}(0-) - \\
 &\quad - \int_0^T \hat{p}_{2k}(t) dt), \hat{\vartheta}_{2k}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1} \frac{d\hat{p}_{2k}(-\alpha)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Результаты этого пункта частично получены в работе [4].

3. ОБОСНОВАНИЕ МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНОК

Для обоснования полученных результатов необходимо указать условия на исходные данные задачи минимаксного оценивания с распределенным наблюдением, при которых будут справедливыми приведенные выше построения.

Из работы [2] следует, что начальное условие $\varphi(x)$ и внешнее возмущение $\hat{f}(x, t)$ для задачи (1) – (3) должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k (\|f_{2k-1}\|_{C(-\alpha, 0)} + \|f_{2k}\|_{C(-\alpha, 0)}) + \\ & + \lambda_k (\|f_{2k-1}\|_{C(0, T)} + \|f_{2k}\|_{C(0, T)}). \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда функция $y(x, t)$, представленная рядом (9), будет принадлежать классу $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$ и удовлетворять условиям задачи (1)–(3). Поэтому функционалы (14)–(16) будут ограниченными.

Основным моментом в обосновании минимаксных оценок является разрешимость задачи оптимального управления (18)–(21). С этой целью воспользуемся альтернативными условиями оптимальности (метод прямого варьирования) для задач (22), (19) и (23), (20)–(21) в форме систем интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} & \hat{v}^{-1}v_0(t) + \int_{-\alpha}^0 K_{0,1}^{(0,1)}(t, \tau)v_0(\tau)d\tau + \int_0^T K_{0,2}^{(0,1)}(t, \tau)u_0(\tau)d\tau = \\ & = M_0^{(0,1)}(t)q_0(t), t \in [-\alpha, 0), \\ & \hat{v}^{-1}u_0(t) + \int_{-\alpha}^0 K_{0,1}^{(0,2)}(t, \tau)v_0(\tau)d\tau + \int_0^T K_{0,2}^{(0,2)}(t, \tau)u_0(\tau)d\tau = \\ & = \hat{M}_0^{(0,2)}(t)q_0(t), t \in (0, T]; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \hat{v}^{-1}v_i(t) + \sum_{j=2k-1}^{2k} \left(\int_{-\alpha}^0 K_{j,1}^{(1,i)}(t, \tau)v_j(\tau)d\tau + \int_0^T K_{j,2}^{(1,i)}(t, \tau)u_j(\tau)d\tau \right) = \\ & = \sum_{j=2k-1}^{2k} M_j^{(1,i)}(t)q_j(t), t \in [-\alpha, 0), \\ & \hat{v}^{-1}u_i(t) + \sum_{j=2k-1}^{2k} \left(\int_{-\alpha}^0 K_{j,1}^{(2,i)}(\tau)v_j(\tau)d\tau + \int_0^T K_{j,2}^{(2,i)}(\tau)\xi_j(\tau)d\tau \right) = \\ & = \sum_{j=2k-1}^{2k} M_j^{(2,i)}(t)q_j(t), t \in [0, T], i = \overline{2k-1, 2k}, \end{aligned} \quad (45)$$

где функции $K_{j,k}^{(l,i)}(t, \tau)$, $M_j^{(l,i)}(t)$ определяются из интегральных представлений решений краевых задач (19)–(21).

Однозначная разрешимость систем (44)–(45) в гильбертовых пространствах $L_2(-\alpha, 0) \times L_2(0, T)$ и $(L_2(-\alpha, 0))^2 \times (L_2(0, T))^2$ соответственно устанавливается с учетом положительной определенности операторов, составляющих левые части этих систем, аналогично тому как это сделано в работе [5]. Дифференцируя системы (44)–(45) по времени как тождества и используя априорные оценки, устанавливаем их однозначную разрешимость в пространствах $C(-\alpha, 0) \times C(0, T)$ и $(C(-\alpha, 0))^2 \times (C(0, T))^2$ соответственно.

Функция $\psi(x, t)$, заданная рядом

$$\psi(x, t) = Y_0(x)\psi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (Y_{2k-1}(x)\psi_{2k-1}(t) + Y_{2k}(x)\psi_{2k}(t)), \quad (46)$$

коэффициенты которого определяются как решения краевых задач (19)–(21), формально является решением такой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} &= -q(x, t) - v(x, t), \\ t &\in (-\alpha, 0), x \in (0, 1); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} &= q(x, t) + u(x, t), \\ t &\in (0, T), x \in (0, 1); \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = \psi(1, t), \frac{\partial \psi(1, t)}{\partial x} &= 0, t \in [-\alpha, T]; \\ \psi(x, -\alpha) = \psi(x, T) &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\psi(x, 0+) + \frac{\partial \psi(x, 0-)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, 0-)}{\partial x^2}, x \in (0, 1). \quad (50)$$

Под решением выписанной выше задачи будем понимать функцию $\psi(x, t) \in C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$, которая поточечно удовлетворяет соотношениям (47)–(50) при условии, что функции $q(x, t)$, $\hat{u}(x, t)$ заданы и имеют такие свойства:

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C^{1,0}(\bar{D}), q(0, t) = q(1, t), \frac{\partial q(1, t)}{\partial x} = 0; \\ v(x, t) &\in C^{1,0}(D_-), v(0, t) = v(1, t), \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0; \\ u(x, t) &\in C^{1,0}(D_+), u(0, t) = u(1, t), \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^3 (\|q_{2k}\|_{C(-\alpha, 0)} + \|v_{2k}\|_{C(-\alpha, 0)}) + \lambda_k^2 (\|q_{2k-1}\|_{C(-\alpha, T)} + \\ + \|v_{2k-1}\|_{C(-\alpha, T)} + \|u_{2k-1}\|_{C(0, T)} + \|q_{2k}\|_{C(0, T)} + \|u_{2k}\|_{C(0, T)})] < \infty. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, мы обозначили условия на исходные функции, которые гарантируют существование решения задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено обоснование минимаксных оценок линейных функционалов от решений парабола-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями и распределенным наблюдением. Найдены условия на исходные функции задачи, которые гарантируют существование решения задачи минимаксного оценивания. В дальнейшем исследовании будет рассмотрена задача с разделенным наблюдением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений парабола-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, №10. — С. 1468–1478.
2. Капустян В. О., Пышнограев И. О. Умови існування і єдиності розв'язку парабола-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУУ „КПІ“. Теоретичні та прикладні проблеми математики. — 2012. — №4. — С. 72–76.
3. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. — К.: КНУ, 2004. — 102 с.
4. Kapustyan V. O., Pyshnograiev I. O. Minimax Estimates for Solutions of Parabolic-Hyperbolic equations with Nonlocal Boundary Conditions // Continuous and Distributed Systems II / A. Sadovnichiy, M. Zgurovsky. — Springer International Publishing, 2015. — P. 277–296.
5. Kapustyan V. O., Pyshnograiev I. O. Distributed Control With The General Quadratic Criterion In A Special Norm For Systems Described By Parabolic-Hyperbolic Equations With Nonlocal Boundary Conditions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51, №3 — P. 438–447.

Надійшла 15.11.2015

УДК 517.9

MSC 93A30, 90C29, 93C99, 90C99

BASIC MODEL OF CHANGE MANAGEMENT PROBLEM

DARIIA MANOVYTSKA¹, GALYNA DOLENKO²

¹Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine,
E-mail: Manovytska_dariia@ukr.net.

²Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: galinadolenko2006@yandex.ru.

ЗАГАЛЬНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗМІНАМИ

Д. О. МАНОВИЦЬКА¹, Г. О. ДОЛЕНКО²

¹Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ, Київ, Україна,
E-mail: Manovytska_dariia@ukr.net.

²Факультет кібернетики, Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: galinadolenko2006@yandex.ru.

RESUME. The contemporary problems of decision making on change management in organizational systems are characterized by: multi-criteria usage; the necessity for a targeted change of the range of permissible alternatives and criteria parameters; multilevelness of the research object and, accordingly, distribution of the process to subsystems and cooperation necessity between, agreement and coordination on solutions for the models of all levels. The classic formulation of optimization tasks for the most of the modern practical problems of decision making on change management is not exhaustive because the permissible area and criteria cannot change during optimization process. But the basic essence of the change management process lays exactly in purposeful change of acceptable area parameters and change of criteria according to defined target setting. The paper proposes for usage the system optimization methodology on change management problems and presents its general model built.

KEYWORDS: multicriteria decision making, development management, change management, system optimization.

РЕЗЮМЕ. Для сучасних задач прийняття рішень з управління змінами в організаційних системах характерно: використання багатьох критеріїв; необхідність цілеспрямованої зміни області допустимих альтернатив та параметрів критеріїв; багаторівневність об'єкта дослідження та, відповідно, розподіленість процесу по підсистемах і необхідність взаємодії, узгодження, координації рішень для моделей всіх рівнів. Класична постановка оптимізаційних задач для більшості сучасних практичних проблем прийняття рішень при управлінні змінами не є вичерпною через те, що допустима область і критерії не можуть змінюватись в процесі оптимізації. А в цілеспрямованій зміні параметрів допустимої

області та критеріїв у відповідності з визначеною цільовою установкою саме й полягає основна змістовна суть процесу управління змінами. В роботі запропоновано використовувати методологію системної оптимізації для постановки та розв'язання задач управління змінами. Побудована загальна модель задачі управління змінами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатокритеріальне прийняття рішень, управління розвитком, управління змінами, системна оптимізація.

ВСТУП

Неперервні та суттєві зміни в технологіях, політиці, ринках збуту, потребах клієнтів стали звичайним явищем. Організаційній системі, яка бажає вижити та зберегти конкурентоздатність, необхідно безперервно модернізувати управління діяльністю, перебудовувати свою стратегію та структуру, узгоджувати несумісності різного роду в зовнішньому та внутрішньому середовищі.

Відповідно, особі, що приймає рішення, (ОПР) на підприємстві, в регіоні, галузі, на державному рівні та розробникам корпоративних систем управління, які підтримують функціонування і розвиток системи, необхідний математичний апарат, що адекватно описує відповідні зміни та цілеспрямовано здійснює їх. Оскільки, управління системою, проектування приладу, планування діяльності та взагалі процес прийняття рішень обумовлює, як правило, досягнення деякої цільової установки або, по крайній мірі, послідовне наближення до деякого бажаного стану чи поведінки, то терміни „управління“, „планування“, „проектування“, „рішення“, як правило, зустрічаються з характеристикою „цілеспрямоване“.

Традиційно в автоматизованих системах управління використовувався апарат дослідження операцій. Але класична постановка оптимізаційних задач для більшості сучасних практичних задач прийняття рішень при управлінні змінами не є вичерпною через те, що допустима область і критерії можуть змінюватись в процесі оптимізації. Більше того, в їх цілеспрямованій зміні у відповідності з визначеною цільовою установкою (ЦУ) саме й полягає основна змістовна суть процесу оптимізації для класу задач, що пов'язані з розвитком великих організаційних систем.

В практичних задачах управління змінами можуть виникати неузгодженості різного роду.

В них з одної сторони — організаційна система, що досліджується, з другої — як правило, несумісні з нею цільові установки. В залежності від ситуації та постановки задачі управління цільові установки визначають кількісно задані цілі розвитку або бажаний для ОПР стан розглядуваної системи, або вимоги зовнішнього середовища, або інтереси інших систем.

Отже, для сучасних задач прийняття рішень при управлінні змінами характерно:

1. використання багатьох критеріїв (багатокритеріальність),

2. можливість та необхідність цілеспрямованої зміни допустимої області та параметрів критеріїв в процесі оптимізації,
3. багаторівневість організаційних систем, як об'єкта дослідження та управління, розподіленість прийняття рішень по підсистемах і необхідність взаємодії, узгодження, координації рішень для моделей окремих рівнів.

Підхід до управління розвитком на основі цілеспрямованої зміни системи у відповідності з визначеною ЦУ був запропонований в роботі Глушкова В. М. „О системній оптимізації“ та названий системною оптимізацією [1]. Методи системної оптимізації надають математичну основу для підтримки прийняття рішень при управлінні розвитком розподілених багатокритеріальних багаторівневих систем. Ефективність даного підходу підтверджується практикою їх застосування в різних предметних областях.

Відмітимо деякі застосування технології системної оптимізації [1–13] реалізовані при рішенні багатьох практичних задач:

- при комплексному аналізі та цілеспрямованому формуванні умов розвитку організаційної системи [2, 12], створенні комп'ютерної багаторівневої розподіленої системи підтримки прийняття рішень для розробки енергетичної програми країни з узагальненням на всі галузі [2, 6] ;
- при створенні систем підтримки прийняття узгоджених рішень [5–13];
- при стратегічному плануванні [3] та антикризовому управлінні підприємствами [4] ;
- при розподіленому управлінні розвитком вищого навчального закладу і системи вищої освіти України [10] та Німеччини [11].

В даній роботі пропонується використати ідеї та методи системної оптимізації при управлінні змінами та розглядається загальна постановка задачі управління змінами.

Розглянемо модель організаційної системи (МО) та модель цільових установок (МЦУ).

1. МОДЕЛЬ ОРГАНІЗАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

Нехай модель досліджуваної системи задана у вигляді області допустимих розв'язків

$$D_0 = \{x : g_l(x) \leq 0, l \in Q = \{1, \dots, m\}, \\ x = \{x_j, j \in J = \{1, \dots, n\}\} \} \quad (1)$$

та множини критеріїв

$$f = \{f_i(x) \rightarrow \max, i \in I_1, f_i(x) \rightarrow \min, \\ x = i \in I_2, I_1 \cup I_2 = I = \{1, \dots, M\}\} \quad (2)$$

де x — вектор розв'язків розмірності n , m — кількість обмежень, M — кількість критеріїв, I_1 — множина індексів критеріїв, що максимізуються, I_2 — множина індексів критеріїв, що мінімізуються.

Зауваження 1. Модель організаційної системи може бути визначена $\{D_0, f\}$ або тільки множиною допустимих розв'язків $\{D_0\}$ без урахування критеріїв f . Це характерно для ситуацій управління, в яких не приймаються до уваги інтереси розглядуваної системи в досягненні найкращих значень власних критеріїв.

2. МОДЕЛЬ ЦІЛЬОВИХ УСТАНОВОК

Позначимо через G — модель цільових установок. Існують різні способи її формування. Вона може бути задана безпосередньо через фіксовані бажані значення критеріїв $f^* = \{f_i(x), i \in I_1\}$:

$$G = \{x : f_i^* \leq f_i(x), i \in I_1, f_i^* \geq f_i(x), i \in I_2, x_j \geq 0, j \in J\};$$

через інтервали значень критеріїв $[f_{i(=)}, f_{i(2)}], i \in I$:

$$G = \{x : f_{i(=)} \leq f_i(x) \leq f_{i(2)}, i \in I, x_j \geq 0, j \in J\}; \quad (3)$$

через бажаний розв'язок $x^* = \{x_j^*, j \in J\}$;

$$G = \{x : x_j = x_j^*, j \in J\};$$

через інтервали розв'язків $[x_{j(=)}, x_{j(??)}], j \in J$:

$$G = \{x : x_{j(=)} \leq x_j \leq x_{j(2)}, j \in J\};$$

через деяку дискретну або неперервну множину розв'язків $\bar{X}$:

$$G = \bar{X};$$

через розв'язки інших оптимізаційних задач $\text{opt}_{x \in \bar{X}} L(x)$:

$$G = \arg \text{opt}_{x \in \bar{X}} L(x).$$

3. УМОВИ ВИНИКНЕННЯ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗМІНАМИ

Задача управління змінами виникає тільки, якщо, по-перше, модель цільових установок несумісна з моделлю системи $\{D_0, f\}$:

$$G \cap D_0 = \emptyset \quad (4)$$

або для заданих цільовими установками значень критеріїв не існує розв'язку в просторі розв'язків, тобто $G = \emptyset$.

По-друге, параметри, які характеризують допустиму область D_0 і множину критеріїв f , можуть змінюватися. Але їх варіації відіграють роль змінних тільки для „досягнення“ недопустимих в D_0 бажаних для ОПР розв'язків із G .

Позначимо

$$Q_0 = \{1 : 1 \in Q, G \cap D_0 = \emptyset\}, Q_0 \subset Q \quad (5)$$

- множину індексів обмежень в D_0 , через які $G \cap D_0 = \emptyset$,

$$I_0 = \{i : i \in I, G = \emptyset\}, I_0 \subset I \quad (6)$$

- множину індексів критеріїв f , через які $G = \emptyset$, Δp_l , $l \in Q_0$ — вектори варіації параметрів обмежень з індексами з множини Q_0 , Δp_i , $i \in I_0$ — вектори варіації параметрів критеріїв з індексами з множини I_0 , D_1 — нова область допустимих розв'язків, f_1 — нова множина критеріїв,

$P_0 = \{\Delta p_l, l \in Q_0, \Delta p_i, i \in I_0\}$ — обмежена область обмежень на варіації параметрів D_0 та f з індексами з множин Q_0 та I_0 , що задає ОПР на основі реальних можливостей досліджуваної системи в процесі рішення задачі.

P — область обмежень на варіації параметрів D_0 та f з індексами з множин Q_0 та I_0 , яка математично забезпечує побудову D_1 , таким чином, що $D_1 \cap G \neq \emptyset$, або при $G = \emptyset$ дозволяє переформування множини критеріїв f на f_1 так, що $G \neq \emptyset$, без врахування реальних можливостей 0 по зміні параметрів системи.

4. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗМІНАМИ

Задача управління змінами полягає в побудові нової моделі організаційної системи, позначимо її $\{D_1, f_1\}$ шляхом зміни параметрів $\{D_0, f\}$ згідно G в межах $P \cap P_0$, таким чином, щоб $D_1 \cap G \neq \emptyset$ (при $D_0 \cap G = \emptyset$ або при $G = \emptyset$) з урахуванням специфіки задачі.

Після побудови нової моделі організаційної системи $\{D_1, f_1\}$, в якій $D_1 \cap G \neq \emptyset$, необхідно знайти її розв'язок на $\{D_1, f_1\}$ відповідний перевагам критеріїв f_1 , що визначаються завданням G .

5. СПЕЦИФІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ ЗМІНАМИ

Специфічні особливості практичних задач управління розвитком визначають різноманітні постановки задач управління змінами.

1. Модель організаційної системи може бути представлена $\{D_0, f\}$ з заданим ступенем узгодженості f та G , або тільки $\{D_0\}$ у випадку, коли її власні інтереси f не беруться до уваги.
2. Задається необхідний ступінь узгодженості D_1 та G : або повинна бути повна узгодженість $G \subset D_1$, або часткова узгодженість $D_1 \cap G \neq \emptyset$.
3. В практичних задачах ОПР мають різні можливості з формулювання області P_0 та оптимізаційних задач на $P \cap P_0$ для однозначного вибору варіацій параметрів системи.

ВИСНОВКИ

Методологія системної оптимізації дозволить суттєво розширити практичне застосування при управлінні змінами методів математичного програмування, в тому числі багатокритеріальної оптимізації, перш за все для економічних задач. Це забезпечує:

по-перше, можливість не тільки розв'язати поставлену задачу, а й формувати управлінські дії на базі глибокого неформального аналізу середовища функціонування розглядуваного об'єкта;

по-друге, цілеспрямоване узгодження множини допустимих рішень з цільовими установками ОПР і реальними можливостями розв'язуваної задачі;

по-третє, узгодження розв'язку з багаторівневим середовищем його реалізації. Ефективність даного підходу підтверджується практикою розробки процедур прийняття рішень в людино-машинних системах різноманітного призначення, які застосовуються, зокрема, для формування і вдосконалення виробничих програм різних структурних підрозділів соціально-економічних систем, в задачах стратегічного планування, узгодження виробництва із сферою маркетингу, управління розвитком великих систем і т. д.

НАПРЯМКИ МАЙБУТНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Актуальні наступні напрямки майбутніх досліджень:

- розробка методів системної оптимізації для управління змінами динамічних систем,
- розробка нечітких моделей системної оптимізації для розподіленого управління змінами ієрархічних систем,
- інтеграція алгоритмів системної оптимізації з техніками візуалізації інформаційних просторів в різних предметних областях з ціллю підвищення зручності, якості, оперативності процесу прийняття рішень при управлінні змінами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики — М.: 1982. — 552 с.
2. Ириков В. А., Тренёв В. Н. Распределённые системы принятия решений. Теория и приложения — М.: Физматлит, 1999. — 288 с.
3. Доленко Г. О. Приклади застосування процедур стратегічного планування: Методична розробка — К.: ВПЦ „Київський університет“, 2001. — 51 с.
4. Доленко Г. О. Інформаційні технології антикризового управління: Навчальний посібник — К.: ВПЦ „Київський університет“, 2002. — 76 с.
5. Чаплінський Ю., Шмідт Р., Бакун Ю. та ін. Основи сільськогосподарського дорадництва в Україні — К.: Видавництво НВФ „Українські технології“, 2003. — 680 с.
6. Доленко Г. О. Системна оптимізація. Прикладні задачі: Навч.-метод. посіб. — К.: ВПЦ „Київський університет“, 2012. — 67 с.
7. Глушков В. М., Михалевич В. С., Волкович В. Л., Доленко Г. О. К вопросу системной оптимизации в многокритериальных задачах линейного программирования // Кибернетика. — 1982. — №3. — С. 4–8.
8. Глушков В. М., Михалевич В. С., Волкович В. Л., Доленко Г. О. Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования при интервальном задании предпочтений // Кибернетика. — 1983. — №3. — С. 1–5.

9. Доленко Г. О., Хусаинов Д. Я. Частичная обратная задача линейного квадратичного программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — №3. — V. 41. — С. 473–478.
10. Годлевский М. Д., Бронин С. В., Чередниченко О. Ю. Распределённые модели управления развитием ВУЗа // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — Харьков, — 2007. — №1/2(25). — С. 86–91.
11. Mansmann S., Scholl M. H. Decision Support System for Managing Educational Capacity Utilization // IEEE Transactions on Education. — May 2007. — Vol. 50. — №2. — P. 143–150.
12. Dolenko G., Konareva E., Manovytska D. Fuzzy sets and statistics: application to evaluation of economic development efficiency // Model Assisted Statistics and Applications. IOS Press. — 2012. — №6. — P. 1–11.
13. Dolenko G., Lobach S. Lobach S. System and statistical approach of analysis and forecasting terrorist activity // Model Assisted Statistics and Applications. IOS Press. — 2014. — №9. — P. 267–275.

Надійшла 10.11.2015

УДК 519.8

MSC 2010 MSC: 91A12, 90C70

NASH EQUILIBRIA IN GAMES WITH A FUZZY SET OF PLAYERS

SERHII MASHCHENKO, VOLODYMYR MORENETS

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d.
E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com.

РІВНОВАГА ЗА НЕШЕМ В ІГРАХ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ГРАВЦІВ

С. О. МАЩЕНКО, В. І. МОРЕНЕЦЬ

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com.

ABSTRACT. The concept of Nash's equilibrium is generalized for non-cooperative games with fuzzy set of players. The basis of the developed approach is the notion of a fuzzy set intersection of fuzzy sets. It is shown that this set is a fuzzy set of type 2. Built its membership function, considered the properties of this set. The results are used to construct a fuzzy set of type 2 Nash's equilibrium noncooperative games with fuzzy set of players. Considered three-criteria problem of choosing a single equilibrium. Proposed a simpler way of solving the problem of choice with reliability equilibriums feasibility, equal one, and reliability of their abstention of not less than a given number.

РЕЗЮМЕ. Для некооперативних ігор з нечіткою множиною гравців узагальнюється поняття рівноваги за Нешем. Показано, що множина рівноваг за Нешем цієї гри буде нечіткою множиною типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення), побудована її функція належності. Запропонована двох-критеріальна задача пошуку рівноваги. Розглянутий підхід до отримання раціонального розв'язку цієї задачі.

ВСТУП

Найбільш привабливою концепцією оптимальності в умовах повної інформованості гравців є оптимальність за Нешем. Концепція рівноважності за Нешем базується на ідеї некооперативної поведінки, коли гравці незалежно вибирають свої стратегії та кожен враховує лише свою функцію виграшу. Розглянемо гру G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множина з n гравців; X_i — множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ — функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, приймає дійсні значення і максимізується.

Ситуація x^* гри називається рівновагою Неша [1], якщо від неї не вигідно відхилятися будь-якому одному гравцю (усі інші свої стратегії не змінюють), оскільки значення його функції виграшу не покращиться, тобто

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*), \forall x_i \in X_i, i \in N.$$

Це означення іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації

$$u_i(x_i, x_{N \setminus i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{N \setminus i}), i \in N.$$

Цілком зрозуміло, що множину рівноваг за Нешем, яку ми позначимо через $NE(G)$, можна представити у вигляді

$$NE(G) = \bigcap_{i \in N} BR_i, \quad (1)$$

де $BR_i = \{(\hat{x}_i, \hat{x}_{N \setminus i}) | u_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{N \setminus i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \hat{x}_{N \setminus i}), \forall \hat{x}_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}\}$ — множина найкращих відповідей i — го гравця на задані стратегії всіх інших гравців, $i \in N$.

Практичне застосування рівноваг Неша для розв'язання та дослідження конфліктів в економічних, соціальних, політичних, екологічних та багатьох інших системах з одного боку показало їх високу адекватність реальним умовам багатьох конфліктів, з іншого боку дозволило виділити ряд таких класів систем, для яких концепцію рівноваги за Нешем можна успішно узагальнити (розширити).

Різноманітні форми опису нечітких початкових даних можуть приводити до різних постановок [2] ігрових задач: з нечітко поставленими цілями гравців; з нечіткими множинами стратегій гравців; з цілями гравців, що задані нечіткими відображеннями; нечітких антагоністичних; узагальнених нечітких, що задані відношеннями переваги гравців [3] та ін.

У вказаних вище відомих ігрових постановках нечіткість проявляється як в описі цілей гравців, так і в описі множин їхніх стратегій, але не торкається множин самих гравців. В цій роботі досліджуватимуться рівноваги за Нешем в іграх з нечіткою множиною гравців.

1. РІВНОВАГА ЗА НЕШЕМ У ГРІ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ГРАВЦІВ

Припустимо, що важко чітко сказати, які гравці з універсальної множини N , насправді повинні взяти участь в грі, а можна лише задати функцію належності $\eta(i)$, $i \in N$, деякої нечіткої підмножини „активних гравців“ $\tilde{N} \subseteq N$. В цьому випадку будемо говорити, що гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ породжує гру FG з нечіткою підмножиною гравців $\tilde{N} \subseteq N$ в нормальній формі $(X_i, u_i; (i, \eta) \in \tilde{N})$. Тоді, якщо (1) природно узагальнити на випадок нечіткої множини гравців, то множина „нечітких“ рівноваг за Нешем повинна задаватися як

$$NE(FG) = \bigcap_{(i, \eta) \in \tilde{N}} BR_i. \quad (2)$$

де згідно до [4–6] $\bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} BR_i$ — перетин нечіткої множини $\tilde{N} \subseteq N$ чітких множин BR_i , $i \in N$, яке є нечіткою множиною типу 2.

2. ПЕРЕТИН НЕЧІТКОЇ МНОЖИНИ ЧІТКИХ МНОЖИН

Нехай на множині ситуацій X гри задані деякі чіткі множини F_i , $i \in N$. Для $\forall i \in N$ визначимо функцію належності (характеристичну функцію) чіткої множини F_i , яку позначимо

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_i, \\ 0, & x \notin F_i. \end{cases}$$

Спочатку розглянемо множину $F = \bigcap_{i \in N} F_i$, яка є перетином чіткої множини N чітких множин F_i , $i \in N$. Відповідно до класичної теорії воно є чіткою множиною, яка на X задається функцією належності $\varphi(x) = \min_{i \in N} \varphi_i(x)$, $x \in X$. Незавжди помітити, що значення функції належності $\varphi(x)$ при кожному фіксованому значенні $x \in X$ фактично визначається як значення цільової функції тривіальної задачі „чіткого математичного програмування“ $\varphi = \min_{i \in N} \varphi_i$ (в цьому записі для наочності не вказано фіксоване значення $x \in X$).

Розглянемо тепер перетин $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} F_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$. Природне узагальнення класичної операції перетину чіткої множини N чітких множин призводить до того, що множина $\tilde{F}$ задаватиметься функцією приналежності

$$y(x) = \min_{(i,\eta) \in \tilde{N}} \varphi_i(x), x \in X. \quad (3)$$

Цілком зрозуміло, що значення функції приналежності $y(x)$ для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ визначатиметься як значення цільової функції задачі нечіткого математичного програмування:

$$y = \min_{(i,\eta) \in \tilde{N}} \varphi_i \quad (4)$$

(в цьому записі, як і у попередньому випадку, також не вказано фіксоване значення $x \in X$).

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо добре вивчені. Згідно [2], розв'язком задачі (4) називається нечітка множина $\tilde{N}^*$, носієм якої буде множина оптимальних за Парето альтернатив (позначимо її N^{PO}) двох-критеріальної задачі дискретної оптимізації:

$$\varphi_i \rightarrow \min, \mu(i) \rightarrow \max, i \in N. \quad (5)$$

Функцією належності $\tilde{\eta}$ нечіткої множини $\tilde{N}^*$ буде звуження функції належності $\eta(i)$, $i \in N$, з універсальної множини N на множину $N^{PO} \subseteq N$. Іншими словами, ця функція належності матиме вигляд:

$$\tilde{\eta}(i) = \begin{cases} \eta(i), & V \in N^{PO}, \\ 0, & V \notin N^{PO}. \end{cases}$$

Множині рішень задачі (4), якою є нечітка множина $\tilde{N}^*$ з функцією належності, згідно [2] відповідає нечітка множина $\Phi \subseteq \{0, 1\}$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі з функцією належності $\tilde{\varphi} : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$, $\tilde{\varphi}(y) = \max_{\varphi_i=y} \tilde{\eta}(i)$, $y \in \{0, 1\}$. Слід зазначити, що універсальною множиною нечіткої множини Φ оптимальних значень цільової функції задачі (4) буде множина $\{0, 1\}$, що складається з двох елементів $y = 0$ і $y = 1$. Це пояснюється тим, що змінна y може приймати значення, рівні тільки $\varphi_i(x)$, $i \in N$, які, у свою чергу, при будь-якій фіксованій альтернативі $x \in X$ можуть бути рівні 0, або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої ситуації $x \in X$ значення $y(x)$ функції приналежності (3) нечіткої множини $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} F_i$ утворюють також нечітку підмножину Φ універсальної множини $Y = \{0, 1\}$. Звідси витікає, що нечітка множина $\tilde{F}$ є, так званою [2], нечіткою множиною типу 2.

Тепер можна формалізувати поняття перетину $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} F_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$.

Для довільної ситуації $x \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими функціями задачі (5) на множині N .

Говоритимемо, що $i \in N$ домінує $j \in N$ для ситуації $x \in X$ і позначати це $i \succ^x j$, якщо справедливі такі нерівності: $\varphi_i(x) \leq \varphi_j(x)$, $\mu(i) \geq \mu(j)$, і хоча б одна з них є строгою.

Це поняття дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двох-критеріальної задачі (5), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі (4). Для $x \in X$ позначимо носій

$$N^{PO}(x) = \{i \in N \mid j \not\succ^x i, \forall j \in N\}. \quad (6)$$

Для довільних $x \in X$, $i \in N$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (5):

$$\tilde{\eta}(x, i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{PO}(x), \\ 0, & i \notin N^{PO}(x). \end{cases} \quad (7)$$

Перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$, називатимемо $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} F_i$ — нечітку множину типу 2, яке задається трійками $(x, \tilde{\varphi}(x, y))$, де $\tilde{\varphi} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ — нечітке відображення, що виконує роль нечіткої функції належності і визначене таким чином:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \max_{i \in N} \{\tilde{\eta}(x, i) \mid \varphi_i(x) = y\}, & \exists i \in N : \varphi_i(x) = y; \\ 0, & \varphi_i(x) \neq y, \forall i \in N; \end{cases} \quad (8)$$

x — елемент множини ситуацій X ;

y — елемент універсальної множини $Y = \{0, 1\}$ значень відображення належності $\tilde{\varphi}(x, y)$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2.

Оскільки функція приналежності $\tilde{\varphi}(x, y)$ однозначно визначає нечітке відображення Φ , яке, у свою чергу, однозначно визначає нечітку множину

$\tilde{F}$ типу 2, то надалі називатимемо $\tilde{\varphi}(x, y)$ функцією приналежності нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2, а її значення — достовірністю ступеня приналежності $y \in Y = \{0, 1\}$ елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{F}$ типу 2.

Значення функції належності $\tilde{\varphi}(x, y)$ для фіксованої ситуації $x^0 \in X$ утворюють нечітку підмножину $\Phi_Y(x^0)$ множини $Y = \{0, 1\}$ з функцією належності $\tilde{\varphi}(x^0, y)$, $y \in \{0, 1\}$. Значення $\tilde{\varphi}(x^0, 1)$ можна розуміти як ступінь належності ситуації $x^0 \in X$ множині $\tilde{F}$. Відповідно значення $\tilde{\varphi}(x^0, 0)$ має сенс ступеню відсутності належності $x^0 \in X$ множині $\tilde{F}$. З іншого боку, якщо у відображенні $\tilde{\varphi}(x, y)$ зафіксувати $y = 1$, то ми отримаємо нечітку множину ситуацій $x \in X$, що належать множині $\tilde{F}$, з функцією належності $\tilde{\varphi}(x, 1)$. Позначимо цю множину $\Phi_X(1)$. Аналогічно для фіксованого значення $y = 0$ отримаємо нечітку множину ситуацій $x \in X$, що не належать множині $\tilde{F}$, з функцією приналежності $\tilde{\varphi}(x, 0)$. Позначимо його $\Phi_X(0)$. Цікаво, що в загальному випадку $\Phi_X(0) \neq \Phi_X(1)$, і, відповідно $\tilde{\varphi}(x, 0) \neq 1 - \tilde{\varphi}(x, 1)$. Тому, як нечітка множина $\Phi_X(0)$, так і $\Phi_X(1)$, є нечіткими множинами перерізів відповідно при $y = 0$ і $y = 1$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2 і є його складовими.

Спростити побудову функції належності $\tilde{\varphi}(x, y)$ дозволяє наступна теорема [6].

Теорема. Нехай F_i , $i \in N$, — чіткі множини, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $\varphi_i(x)$, $x \in X$, $i \in N$; $\mu(i)$ — функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$.

Для того, щоб нечітка множина $\tilde{F}$ типу 2, яка задана функцією належності $\tilde{\varphi}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, була перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$, тобто $\tilde{F} = \bigcap_{(i, \eta) \in \tilde{N}} F_i$ необхідно і достатньо, що б для

$x \in X$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, 0) &= \begin{cases} \max_{\varphi_i(x)=0} \eta(i), & \exists i \in N : \varphi_i(x) = 0, \\ 0, & \varphi_i(x) = 1, \quad \forall i \in N, \end{cases} \\ \tilde{\varphi}(x, 1) &= \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i), & \varphi_i(x) = 1, \quad \forall i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j), \\ 0, & \exists i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j) : \varphi_i(x) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3. НЕЧІТКА РІВНОВАГА ЗА НЕШЕМ

З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина „нечітких“ рівноваг за Нешем $NE(FG) = \bigcap_{(i, \eta) \in \tilde{N}} BR_i$ є нечіткою множиною типу 2,

яка задається функцією належності $\tilde{\varphi}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, де

$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \begin{cases} \max\{\eta(i) \mid i \in N, x \notin BR_i\}; & \exists i \in N \ x \notin BR_i; \\ 0; & \forall i \in N \ x \in BR_i; \end{cases} \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}(x, 1) = \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i); & \forall i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j) \ x \in BR_i; \\ 0; & \exists i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j) \ x \notin BR_i. \end{cases} \quad (10)$$

Слід зазначити, що величину $\tilde{\varphi}(x, 0)$ можна інтерпретувати як достовірність неналежності ситуації $x \in X$ множині $NE(FG)$ нечітких рівноваг за Нешем, а $\tilde{\varphi}(x, 1)$ можна розуміти як достовірність її належності.

В реальній ігровій ситуації гравці прагнуть шукати таку ситуацію гри, яка має мінімальну достовірність неналежності множині $NE(FG)$ нечітких рівноваг за Нешем, а також максимальну достовірність $\psi(x, 1)$ її допустимості. Таким чином, перед гравцями постає наступна двохкритеріальна задача:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, 0) &\rightarrow \min, \\ \tilde{\varphi}(x, 1) &\rightarrow \max, \\ x &\in X. \end{aligned} \quad (11)$$

Позначимо $SO(FG)$ — множину оптимальних за Слейтером (слабо ефективних) розв'язків цієї задачі. Нагадаємо, що ситуація x^* називається оптимальною за Слейтером для задачі вигляду (11) якщо $\nexists x \in X$, для якої мають місце нерівності: $\tilde{\varphi}(x^*, 1) < \tilde{\varphi}(x, 1)$, $\tilde{\varphi}(x^*, 0) > \tilde{\varphi}(x, 0)$.

Множиною нечітких рівноваг за Нешем в некооперативній грі з нечіткою множиною гравців будемо називати нечітку множина $NE(FG)$ типу 2 з функцією належності

$$\tilde{\psi}(x, y) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x, y), & x \in SO(FG), \\ 0, & x \notin SO(FG), \end{cases}$$

де $y \in Y = \{0, 1\}$.

У разі, коли гравців цікавить конкретна рівновага, то її можна вибрати з множини SO за допомогою того або іншого методу багатокритеріальної оптимізації, розв'язавши задачу (11).

Легко перевірити, що рівновага за Нешем x^* «чіткої» гри G належатиме множині SO із значеннями достовірностей її неналежності $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = 0$ та належності $\tilde{\varphi}(x^*, 1) = \max_{i \in N} \eta(i)$ і є абсолютно-оптимальним розв'язком задачі (11). Тому далі нас буде цікавити лише випадок, коли множина рівноваг за Нешем «чіткої» гри G є порожньою.

Оптимальний за Слейтером розв'язок x^* задачі (11) будемо називати рівновагою за Нешем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірностями $\psi(x^*, 1)$ і $\psi(x^*, 0)$ відповідно її належності і неналежності.

Позначимо $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$ множину гравців, які мають ступені належності нечіткій множині гравців $\tilde{N}$ не більше за $\xi \in (0, 1)$. Спробуємо спростити задачу (7).

Твердження 1. Нехай $\xi \in (0, 1)$ — задане значення параметра, тоді якщо система:

$$\tilde{\varphi}(x, 0) \leq \xi; \quad (12)$$

$$x \in BR_i, \quad i \in N \setminus N^\xi; \quad (13)$$

$$x \in X; \quad (14)$$

має розв'язок x^* , то він буде рівновагою за Нешем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірністю належності $\eta^{\max} = \max_{i \in N} \eta(i)$ і з достовірністю неналежності не більше за ξ .

Доведення. Позначимо x^* — розв’язок системи (12)–(14) (за умовою твердження він існує). Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO$. Тоді $\exists \hat{x} \in X$, для якого мають місце нерівності: $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 1) > \tilde{\varphi}(x^*, 1)$, $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 0) < \tilde{\varphi}(x^*, 0)$. Оскільки x^* — допустимий розв’язок системи (12)–(14), то з (10) випливає, що $\tilde{\varphi}(x^*, 1) = \max_{i \in N} \eta(i) = \eta^{\max}$. Тоді з записаних вище нерівностей виходить, що $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 0) < \tilde{\varphi}(x^*, 0) \leq \xi$ і $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 1) > \tilde{\varphi}(x^*, 1) \geq \eta^{\max}$. Оскільки, згідно (10) $\tilde{\varphi}(x, 1) \leq \mu^{\max}$ для $\forall x \in X$ зокрема і для $\hat{x}$, то отримали суперечність.

Твердження доведене.

Спробуємо далі спростити задачу (11).

Твердження 2. Нехай $\xi \in (0, 1)$ — задане значення параметра, тоді якщо хоча б одного значення $j \in N^\xi$ система:

$$x \notin BR_j; \quad (15)$$

$$x \in BR_i, \quad i \in N \setminus N^\xi; \quad (16)$$

$$x \in X; \quad (17)$$

має розв’язок, то він буде рівновагою за Нешем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірністю належності $\eta^{\max} = \max_{i \in N} \eta(i)$ і з достовірністю неналежності не більше за ξ .

Доведення. Нехай $\xi \in (0, 1)$. Позначимо Q — множину допустимих розв’язків задачі (12)–(14), а P^j — множину допустимих розв’язків — (15)–(17). Спочатку покажемо, що

$$\bigcup_{j \in N^\xi} P^j = Q. \quad (18)$$

Покажемо включення $\bigcup_{j \in N^\xi} P^j \subseteq Q$. Якщо $\bigcup_{j \in N^\xi} P^j = \emptyset$, то воно є очевидним. Нехай $x^* \in \bigcup_{j \in N^\xi} P^j \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin Q$. Тоді можливі два випадки. В першому випадку не виконується умова (12), тобто $\tilde{\varphi}(x^*, 0) > \xi$. Звідси з формули (9) отримаємо $\psi(x^*, 0) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid x^* \notin BR_i\} > \xi$. Тоді $\exists j \in N \setminus N^\xi$, для якого $x^* \notin BR_j$, що суперечить умові (16). В другому випадку не виконується умова (13), тобто $\exists j \in N \setminus N^\xi$, для якого $x^* \notin BR_j$. Тоді не виконується відповідна умова (16) і тому $x^* \notin P^i \forall i \in N^\xi$ і як наслідок $x^* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Отримали суперечність. Таким чином, $x^* \in Q$ і тому $\bigcup_{i \in N^\xi} P^i \subseteq Q$.

Покажемо включення $Q \subseteq \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Якщо $Q = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in Q \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Тоді $x^* \notin P^i \forall i \in N^\xi$. Оскільки умови (13) і (16) співпадають, то $x^* \in BR_i$ для $\forall i \in N^\xi$. Оскільки $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$, то з формул (9) випливає або $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid x^* \notin BR_i\} > \xi$, або $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = 0$. В обох випадках

одержуємо суперечність з умовою (12). Таким чином, $x* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$, звідси випливає $Q \subseteq \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$ і справедлива рівність (18).

Завершимо доведення твердження. З рівності (18) очевидно випливає еквівалентність задач (12)–(14) і (15)–(17), чого достатньо на підставі твердження 1 для доведення.

Твердження доведене.

Таким чином, згідно до запропонованого підходу для знаходження рівноваги за Нешем гри FG з нечіткою підмножиною гравців достатньо зробити наступне:

- вибрати число $\xi \in (0, 1)$, яке згідно твердженню 2 характеризує максимальну для гравців достовірність неналежності рівноваги;
- побудувати множину гравців $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$, які мають ступінь належності до нечіткої множини гравців $\tilde{N}$ не більше заданого числа $\xi \in (0, 1)$;
- для кожного гравця $j \in N^\xi$ розв'язати систему:

$$x \notin BR_j; \quad (19)$$

$$x \in BR_i, i \in N \setminus N^\xi; \quad (20)$$

$$x \in X; \quad (21)$$

якщо вона має розв'язок хоча б для одного гравця $k \in N^\xi$, то він і буде шуканою нами рівновагою за Нешем гри FG з нечіткою підмножиною гравців.

Особливий інтерес може представляти рівновага за Нешем гри FG , яка має найменше значення достовірності неналежності. Її можна одержати якщо методом дихотомії вибирати найменше значення $\xi \in (0, 1)$, при якому $\exists j \in N^\xi$, що сумісна система (19)–(21).

ВИСНОВКИ

На закінчення слід зазначити, що запропонований підхід розширює область застосування теорії нечітких множин на випадок некооперативних ігор з нечіткою множиною гравців і може дати новий підхід до розв'язання інших постановок ігрових задач з нечіткою структурою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики — М. : Мир, 1985. — 200 с.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации — М. :Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 208 с.
3. Мащенко С. О. Нечіткі ігри з відношеннями переваги гравців // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів : ІППММ НАНУ, 2010. — Вип. 11. — С. 105–112.

4. Мащенко С. О. Індивідуально-оптимальні рівноваги в умовах нечіткої взаємодії гравців // Журнал обчисл. та прикладн. матем. — 2010. — №3. — С. 89–98.
5. Мащенко С. О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010, Вып. 159. — С. 19–29.
6. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №1. — С. 62–68.

Надійшла 25.10.2015

УДК 519.233.2

MSC 62C20, 93E10

TO GUARANTEED ESTIMATIONS OF SOLUTIONS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS UNDER UNCERTAINTY

OLEKSANDR NAKONECHNYI, SERGIJ DEMYDENKO, MARIIA LOSIEVA

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, s.demidenko@gmail.com, mv.loseva@gmail.com

ДО ГАРАНТОВАНИХ ОЦІНОК РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

О. Г. НАКОНЕЧНИЙ, С. В. ДЕМИДЕНКО, М. В. ЛОСЕВА

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна,
E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, s.demidenko@gmail.com, mv.loseva@gmail.com

ABSTRACT. In the paper estimation problem for solution of linear algebraic equations with unknown right-sides part represented by determined or stochastic vector is considered. The realization of random vector linearly connected to these solutions is observed. The definitions of linear mean-square guaranteed estimate and linear guaranteed mean-square error for solutions of linear equations are proposed. In case of restrictions on unknown parameters and correlation matrixes the representation of these estimates via solutions of some nonlinear equations are obtained. The guaranteed estimation problem of linear function on solutions of linear algebraic equations is also studied. This paper shows, that guaranteed estimates of functions and guaranteed errors are linearly depended on solutions of systems of linear equations. In case of growing number of observations the convergence problem of guaranteed estimates is also considered. Obtained results are applied for estimation problem of periodic solutions of 2-order discrete time linear equation with unknown parameters.
KEYWORDS: linear algebraic equation, guaranteed estimation, observation.

РЕЗЮМЕ. Досліджуються питання пов'язані з лінійними середньоквадратичними оцінками розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано, що гарантовані оцінки при спеціальних обмеженнях на розв'язки таких рівнянь та похибки спостережень виражаються через розв'язки матричних та лінійних алгебраїчних рівнянь.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінійне алгебраїчне рівняння, гарантована оцінка, спостереження.

ВСТУП

Оцінки розв'язків лінійних рівнянь в умовах невизначеності розглядалися в роботах [1], [2], [3]. В роботі досліджуються гарантовані оцінки розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь при спеціальних обмеженнях на невизначеності, що входять в праву частину та спостереження.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай спостерігається реалізація вектора y із простору $\mathbb{R}^N$, причому вектор y має вигляд

$$y = H_1 x + H_2 \varphi + \eta, \quad (1)$$

де x — вектор із простору $\mathbb{R}^{n_1}$, який при деякому векторі f є розв'язком рівняння

$$Ax = f, \quad (2)$$

φ та η — випадкові вектори із просторів $\mathbb{R}^{n_1}$ та $\mathbb{R}^N$ відповідно, причому φ є розв'язком рівняння $B\varphi = \xi$ з деяким випадковим вектором ξ . Нехай матриця A — додатньо означена, а B — невироджена, розмірності $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, відповідно, H_1, H_2 — відомі матриці.

Припустимо, що вектор f — невідомий та належить множині

$$G_1 = \{f : (A^{-1}f, f) \leq \gamma_1^2\}, \quad (3)$$

ξ — випадковий вектор, $E\xi = 0$, R_ξ — кореляційна матриця, яка також невідома і належить множині

$$G_2 = \{R_\xi : sp QR_\xi \leq \gamma_2^2\}, \quad (4)$$

де Q — додатньо означена матриця, вектор η — некорельован із ξ , кореляційна матриця якого R_η , причому $\det R_\eta \neq 0$, γ_1, γ_2 — додатні числа.

Нехай V_1 та V_2 — матриці розмірності $m \times n_1$ та $m \times n_2$, відповідно.

Введемо вектор ψ із простору $\mathbb{R}^m$, причому

$$\psi = V_1 x + V_2 \varphi. \quad (5)$$

Будемо шукати оцінку вектора ψ за спостереженням (1) у вигляді

$$\hat{\psi} = Uy + c, \quad (6)$$

де U — матриця розмірності $m \times N$, c — вектор із простору $\mathbb{R}^m$. Гарантована оцінка визначається із умови

$$\inf_{U, c} \sigma(U, c) = \sigma(\hat{U}, \hat{c}), \quad (7)$$

де

$$\sigma(U, c) = \left\{ \sup_{G_1, G_2} E|\psi - Uy - c|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

а величину $\sigma(\hat{U}, \hat{c})$ називають гарантованою похибкою оцінки.

Твердження 1. Функція $\sigma^2(U, c)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma^2(U, c) = & \gamma_1^2 \lambda_{\max}((V_1 - UH_1)A^{-1}(V_1 - UH)^T) + \\ & + \gamma_2^2 \lambda_{\max}(ZQ^{-1}Z^T) + spUR_\eta U^T + |c|^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де Z — розв'язок рівняння

$$ZB = V_2 - UH_2, \quad (9)$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальне власне число відповідної матриці.

Доведення. Зауважимо, що оскільки

$$\psi - \hat{\psi} = V_1x + V_2\varphi - UH_1x - UH_2\varphi - U\eta - c,$$

то

$$E|\psi - \hat{\psi}|^2 = |(V_1 - UH_1)x|^2 + E|(V_2 - UH_2)\varphi|^2 + E|U\eta|^2.$$

Далі будемо мати

$$\begin{aligned} E|(V_2 - UH_2)\varphi|^2 &= E|Z\xi|^2, \\ \max_{(A^{-1}f, f) \leq \gamma_1^2} |(V_1 - UH_1)x|^2 &= \gamma_1^2 \lambda_{\max}((V_1 - UH_1)A(V_1 - UH_1)^T), \\ \max_{spQR_\xi \leq \gamma_2^2} E|Z\xi|^2 &= \gamma_2^2 \lambda_{\max}(ZQ^{-1}Z^T). \end{aligned}$$

Звідки одержимо потрібну рівність. $\square$

Твердження 2. Існує єдина гарантована оцінка, причому $\hat{c} = 0$, а $\hat{U}$ знаходиться з умови $0 \in \partial\sigma^2(\hat{U}, 0)$, де $\partial\sigma^2(U, 0)$ — субдиференціал.

Доведення. Очевидно, що $\min_{U, c} \sigma^2(U, c) = \min_U \sigma^2(U, 0)$. Функція $\sigma^2(U, 0)$ сильно опукла, а значить існує єдина матриця, на якій досягається мінімум, причому, оскільки функція може бути недиференційовною, то ця матриця знаходиться з умови $0 \in \partial\sigma^2(\hat{U}, 0)$. $\square$

Припустимо далі, що відповідні власні числа матриць λ_1 та λ_2 є однаковими. В цьому випадку має місце

Твердження 3. Матриця $\hat{U}$ має вигляд

$$\hat{U} = (\gamma_1^2 l_1 l_1^T Z_1 H_1^T + \gamma_2^2 l_2 l_2^T P H_2^T) R_\eta^{-1}, \quad (10)$$

де Z_1, Z_2 знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} Z_1 A = (V_1 - \hat{U} H_1), \\ P B^T = Z Q^{-1}, \\ Z B = V_2 - \hat{U} H_2, \\ Z_2 Z_2^T l_1 = \lambda_1 l_1, \\ Z Q^{-1} Z^T = \lambda_2 l_2, \end{cases} \quad (11)$$

Z_2 — розв'язок рівняння $Z_2 A^{\frac{1}{2}} = V_1 - \hat{U} H_1$, l_1, l_2 — власні вектори, що відповідають максимальним власним значенням відповідних матриць.

Доведення. Оскільки власні числа однократні, то функція $\sigma(U, 0)$ диференційовна. Значить

$$\left. \frac{d}{d\tau} \sigma(\hat{u} + \tau v) \right|_{\tau=0} = 0,$$

де $\hat{u} \in \text{Argmin } \sigma(U, 0)$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sigma(\hat{U} + \tau V) &= -spVH_1A^{-1}(V_1 - \hat{U}H_1)^T l_1 l_1^T \gamma_1^2 - \\ &\quad - \gamma_2^2 sp \tilde{Z} Q^{-1} Z^T l_2 l_2^T + spV R_\eta \hat{U}^T, \end{aligned}$$

де $\tilde{Z}$ — розв'язок рівняння $\tilde{Z}B = VH_2$, або

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sigma(\hat{U} + \tau V) = -spVZ_1^T l_1 l_1^T \gamma_1^2 - \gamma_2^2 sp \gamma_2^2 H_2 P^T l_2 l_2^T + spV R_\eta U^T \equiv 0.$$

Оскільки V — довільна матриця, то звідси одержимо вираз для матриці $\hat{U}$. $\square$

Наслідок 1. Нехай $H_2 = 0$. Тоді одержимо, що

$$\hat{U} = \gamma_1^2 l_1 l_1^T Z_1 H_1^T R_\eta^{-1}, \quad (12)$$

де

$$Z_1 A = V_1 - \hat{U} H_1 = V_1 - \gamma_1^2 l_1 l_1^T Z_1 H_1^T R_\eta^{-1} H_1, \quad (13)$$

$$Z_2 Z_2^T l_1 = \lambda_1 l_1.$$

Зауваження 1. У випадку кратних значень максимальних власних чисел відповідних матриць має місце нерівність $\min_U \sigma(U, 0) \leq \sigma(\hat{U}, 0)$.

Нехай $H_2 = 0$, а $m = 2$. В цьому випадку $V_1 x = \begin{pmatrix} (l_1, x) \\ (l_2, x) \end{pmatrix}$, а значить $\hat{V}_1 x = \begin{pmatrix} (u_1, y) + c_1 \\ (u_2, y) + c_2 \end{pmatrix}$. Знайдемо гарантовану похибку при умові, що $(A^{-1}f, f) \leq \gamma^2$, та виясимо, коли відповідне максимальне власне число буде кратним.

$$\begin{aligned} \sigma^2(U, 0) &= \max_{G_1} E|V_1 x - \hat{V}_1 x|^2 = \max_{G_1} [(l_1 - H_1^T u_1, x)^2 + (l_2 - H_1^T u_2, x)^2] + \\ &\quad + E(u_1, \eta)^2 + E(u_2, \eta)^2 = \\ &= \max_{G_1} \max_{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1} (\alpha_1(l_1 - H_1^T u_1) + \alpha_2(l_2 - H_1^T u_2), x)^2 + \\ &\quad + (R_\eta u_1, u_1) + (R_\eta u_2, u_2) = \\ &= \max_{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1} (\alpha_1 A^{-1}(l_1 - H_1^T u_1) + A^{-1}(l_2 - H_1^T u_2) \alpha_2, \alpha_1(l_1 - H_1^T u_1) + \\ &\quad + \alpha_2(l_2 - H_1^T u_2)) \gamma^2 + (R_\eta u_1, u_1) + (R_\eta u_2, u_2). \end{aligned}$$

Позначимо через z_1 та z_2 розв'язки рівнянь $A^{\frac{1}{2}} z_1 = l_1 - H_1^T u_1$ та $A^{\frac{1}{2}} z_2 = l_2 - H_1^T u_2$. Введемо матрицю $Z = \begin{pmatrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) \\ (z_1, z_2) & (z_2, z_2) \end{pmatrix}$.

Власні числа матриці знаходяться з умови $\det(Z - \lambda E) = 0$. Оскільки $\det(Z - \lambda E) = (|z_1|^2 - \lambda)(|z_2|^2 - \lambda) - (z_1, z_2)^2 = \lambda^2 - \lambda(|z_1|^2 + |z_2|^2) - (z_1, z_2)^2$,

то власні числа будуть кратними тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 - 4(z_1, z_2)^2 = 0$, тобто тоді, коли $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2|(z_1, z_2)|$

Нехай $m = 1$. В цьому випадку справедливе

Твердження 4. *Гарантована оцінка виразу $\psi = V_1x + V_2\varphi = (v_1, x) + (v_2, \varphi)$ має вигляд $\hat{\psi} = (\hat{u}, y)$, де*

$$\hat{u} = R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_1 + \gamma_2^2 H_2 p), \quad (14)$$

а вектори z_1 та p знаходяться з рівнянь

$$\begin{cases} Az_1 = v_1 - H_1^T \hat{u}, \\ Bp = Q^{-1} z, \\ A^T z = v_2 - H_2^T \hat{u}. \end{cases} \quad (15)$$

При цьому

$$\sigma^2(\hat{u}, 0) = \gamma_1^2(z_2, z_2) + \gamma_2^2(Q^{-1} z, z) + (R_\eta \hat{u}, \hat{u}). \quad (16)$$

Твердження 4 є наслідком твердження 1.

Наслідок 2. *Нехай B — додатньо означена матриця та $Q = B^{-1}$. Тоді гарантована оцінка буде мати вигляд*

$$\hat{u} = R_\eta^{-1}(H_1 z \gamma_1^2 + H_2 \psi \gamma_2^2), \quad (17)$$

де z та ψ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} Az + H_1^T \hat{u} = v_1, \\ B\psi + H_2^T \hat{u} = v_2. \end{cases} \quad (18)$$

Твердження 5. *Нехай $\hat{u}$ має вигляд (14). Тоді має місце рівність*

$$(\hat{u}, y) = (v_1, \hat{x}) + (v_2, \hat{\varphi}), \quad (19)$$

де $\hat{x}$ та $\hat{\varphi}$ знаходяться із розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} A\hat{x} = H_1^T R_\eta^{-1}(y - \gamma_1^2 H_1 \hat{x} - \gamma_2^2 H_2 \hat{\varphi}), \\ B\hat{\varphi} = H_2^T R_\eta^{-1}(y - \gamma_1^2 H_1 \hat{x} - \gamma_2^2 H_2 \hat{\varphi}). \end{cases} \quad (20)$$

Доведення. Нехай $\hat{u}$ визначається формулою (14). Тоді

$$(\hat{u}, y) = (z, H_1^T R_\eta^{-1} y) + (\psi, H_2^T R_\eta^{-1} y).$$

Із систем рівнянь (20) будемо мати, що

$$H_1^T R_\eta^{-1} y = A\hat{x} + H_1^T R_\eta^{-1} H_1 \gamma_1^2 \hat{x} + H_1^T R_\eta^{-1} H_2 \gamma_2^2 \hat{\varphi},$$

а значить

$$(\hat{u}, y) = (z, A\hat{x}) + J_1 = (Az, \hat{x}) + J_1 = (v_1, \hat{x}) - (\hat{u}, H_1 \hat{x}) + J_1.$$

де $J_1 = (z, H_1^T R_\eta^{-1} H_1 \gamma_1^2 \hat{x} + H_1^T R_\eta^{-1} H_2 \gamma_2^2 \hat{\varphi})$. Аналогічно

$$(\psi, H_2^T R_\eta^{-1} y) = (v_2, \hat{\varphi}) - (\hat{u}, H_2 \hat{\varphi}) + J_2,$$

де $J_2 = (\psi, H_2^T R_\eta^{-1} (\gamma_1^2 H_1 \hat{x} + \gamma_2^2 H_2 \hat{\varphi}))$. Враховуючи, що $J_1 + J_2 = -(\hat{u}, H_1 \hat{x} + H_2 \hat{\varphi})$ одержимо рівність (19). $\square$

Твердження 6. *Нехай матриці A та B однієї розмірності та мають спільні власні вектори. Тоді мають місце рівності*

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \quad \hat{\varphi} = \sum_{k=1}^n \varphi_k e_k,$$

де e_k — власні вектори, а величини x_k та φ_k визначають із систем рівнянь

$$\begin{aligned} \lambda_k x_k + \sum_{j=1}^n h_{kj}^{(1)} x_j + \sum_{j=1}^n h_{kj}^{(2)} \varphi_j &= (H_1^T R_\eta^{-1} y, e_k), \\ \mu_k \varphi_k + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{kj}^{(1)} \varphi_j + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{kj}^{(2)} x_j &= (H_2^T R_\eta^{-1} y, e_k), \end{aligned} \quad (21)$$

де λ_k, μ_k — власні числа матриць A та B відповідно, а $h_{kj}^{(1)}, h_{kj}^{(2)}, \bar{h}_{kj}^{(1)}, \bar{h}_{kj}^{(2)}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned} h_{kj}^{(1)} &= \gamma_1^2 (H_1^T R_\eta^{-1} H_1 e_k, e_j), & h_{kj}^{(2)} &= \gamma_2^2 (H_2^T R_\eta^{-1} H_1 e_k, e_j), \\ \bar{h}_{kj}^{(1)} &= \gamma_2^2 (H_2^T R_\eta^{-1} H_2 e_k, e_j), & \bar{h}_{kj}^{(2)} &= \gamma_1^2 (H_1^T R_\eta^{-1} H_2 e_k, e_j). \end{aligned}$$

Доведення. Домножимо перше та друге рівняння системи (21) на вектори $e_k, k = \overline{1, n}$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} \lambda_k x_k + \gamma_1^2 (H_1^T R_\eta^{-1} H_1 \hat{x}, e_k) + \gamma_2^2 (H_1^T R_\eta^{-1} H_2 \hat{\varphi}, e_k) &= (H_1^T R_\eta^{-1} y, e_k), \\ \mu_k \varphi_k + \gamma_1^2 (H_2^T R_\eta^{-1} H_1 \hat{x}, e_k) + \gamma_2^2 (H_2^T R_\eta^{-1} H_2 \hat{\varphi}, e_k) &= (H_2^T R_\eta^{-1} y, e_k). \end{aligned}$$

Розкладемо вектори $H_1^T R_\eta^{-1} H_1 e_k, H_2^T R_\eta^{-1} H_1 e_k, H_1^T R_\eta^{-1} H_2 e_k, H_2^T R_\eta^{-1} H_2 e_k$, по базису $e_1, \dots, e_n$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} H_1^T R_\eta^{-1} H_1 e_k &= \sum_{j=1}^n h_{kj}^{(1)} e_j, & H_1^T R_\eta^{-1} H_2 e_k &= \sum_{j=1}^n h_{kj}^{(2)} e_j, \\ H_2^T R_\eta^{-1} H_2 e_k &= \sum_{j=1}^n \bar{h}_{kj}^{(1)} e_j, & H_2^T R_\eta^{-1} H_1 e_k &= \sum_{j=1}^n \bar{h}_{kj}^{(2)} e_j. \end{aligned}$$

Звідки одержимо систему рівнянь (21), що і потрібно було показати. $\square$

Наслідок 3. *Нехай в системі рівнянь $H_1 = H_2 = E, R_\eta = \sigma^2 E$. Тоді система рівнянь (21) запишеться у вигляді*

$$\begin{aligned} (\lambda_k + \sigma^{-2} \gamma_1^2) x_k + \sigma^{-2} \gamma_2^2 \varphi_k &= \sigma^{-2} (y, e_k), \\ (\mu_k + \sigma^{-2} \gamma_2^2) \varphi_k + \sigma^{-2} \gamma_1^2 x_k &= \sigma^{-2} (y, e_k), k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Нехай $e_1, \dots, e_{n_1}$ та $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n_2}$ ортонормовані базисні вектори в просторах R^{n_1} та R^{n_2} .

Введемо вектори z_{1k}, p_{1k}, z_k та $\bar{z}_{1k}, \bar{p}_{1k}, \bar{z}_k$ як розв'язки систем рівнянь

$$\begin{cases} A z_{1k} = e_k - H_1^T R_\eta^{-1} (\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k), \\ B p_k = Q^{-1} z_k, \\ B^T z_k = -H_2^T R_\eta^{-1} (\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k), \end{cases} \quad k = \overline{1, n_1}, \quad (22)$$

та

$$\begin{cases} A\bar{z}_{1k} = -H_1^T R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k), \\ B\bar{p}_k = Q^{-1}\bar{z}_k, \\ B^T z_k = \bar{e}_k - H_2^T R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k), \end{cases} \quad k = \overline{1, n_2}, \quad (23)$$

Твердження 7. *Мають місце рівності*

$$(\widehat{V_1}, x) = (\hat{u}, y) = (v_1, \hat{U}_1 y), \quad (24)$$

$$(\widehat{V_2}, \varphi) = (\hat{u}_2, y) = (v_2, \hat{U}_2 y), \quad (25)$$

де $\hat{u}_j = R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_1^{(j)} + \gamma_2^2 H_2 p^{(j)})$, а $z_1^{(1)}, p^{(1)}$ та $z_1^{(2)}, p^{(2)}$ визначаються із систем рівнянь (15), відповідно, при $v_1 = 0$ та $v_2 = 0$.

Доведення. Розкладемо вектор v_1 по базису $v_1 = \sum_{k=1}^{n_1} (V_1, e_k) e_k$. Оскільки $v_2 = 0$, то справедливі рівності

$$z_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{n_1} (v_1, e_k) z_{1k}, p^{(1)} = \sum_{k=1}^{n_1} (v_1, e_k) p_k,$$

де z_{1k} та p_k визначаються з рівняння (15) при $v_1 = e_k, v_2 = 0$. Тоді

$$\hat{u}_1 = \sum_{k=1}^{n_1} R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k)(v_1, e_k).$$

Отже,

$$(\hat{u}_1, y) = \sum_{k=1}^{n_1} R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 (H_1 z_{1k}, y) + \gamma_2^2 (H_2 p_k, y))(v_1, e_k) = (v_1, \hat{U}_1 y),$$

де $\hat{U}_1 y = \sum_{k=1}^{n_1} (R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 z_{1k} + \gamma_2^2 H_2 p_k), y) e_k$. Подібним чином доводиться, що $(\hat{u}_2, y) = (\hat{U}_2 y, v_2)$, де $\hat{U}_2 y = \sum_{k=1}^{n_2} (R_\eta^{-1}(\gamma_1^2 H_1 \bar{z}_{1k} + \gamma_2^2 H_2 \bar{p}_k), y) \bar{e}_k$. $\square$

Нехай $H_2 = 0$ і $\psi = (v_1, x)$. Тоді має місце

Твердження 8. *Гарантована оцінка виразу (v_1, x) має вигляд $(\widehat{v_1}, x) = (\hat{u}, y) = (v_1, \hat{x})$. При цьому*

$$\sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) = \min_{u, c} \max_{G_1} E((v_1, x) - (u, \psi - c))^2 = (v_1, z) \gamma_1^2,$$

де $\hat{u} = R_\eta^{-1} \gamma_1^2 H_1 z$, а z — розв'язок рівняння

$$Az + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1 z = v_1, \quad (26)$$

а вектор $\hat{x}$ є розв'язком рівняння

$$A\hat{x} = \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} (y - H_1 \hat{x}). \quad (27)$$

Доведення. Із твердження 4 випливає, що

$$\begin{aligned}\sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) &= \gamma_1^2(z, v_1 - H_1^T \hat{u}) + (R_\eta \hat{u}, \hat{u}) = \\ &= \gamma_1^2(v_1, z) - \gamma_1^2(H_1 z, \hat{u}) + (H_1 z, \hat{u}) \gamma_1^2 = \gamma_1^2(z, v_1 - H_1^T \hat{u}).\end{aligned}$$

Зауважимо далі, що оскільки матриця $A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1$ є додатньо означеною, то існує єдиний розв'язок рівняння (27). Далі маємо

$$\begin{aligned}(\hat{u}, y) &= (\gamma_1^2 R_\eta^{-1} H_1 z, y) = \gamma_1^2(z, H_1^T R_\eta^{-1} y) = \\ &= (z, (A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \hat{x}) = ((A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1) z, \hat{x}) = (v_1, \hat{x}),\end{aligned}$$

що й потрібно було показати. $\square$

Твердження 9. *Нехай для матриці A існує $\alpha > 0$ таке, що $(Ax, x) \geq \alpha |x|^2$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді має місце нерівність*

$$\sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) \leq \frac{\gamma_1^2 |v_1|^2}{\alpha + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \gamma_1^2}. \quad (28)$$

Доведення. Оскільки $\sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) = \gamma_1^2(v_1, z)$, а

$$\begin{aligned}(v_1, z) &= (Az, z) + \gamma_1^2(H_1^T R_\eta^{-1} H_1 z, z) \geq \alpha(z, z) + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1)(z, z) \gamma_1^2 = \\ &= (\alpha + \gamma_1^2 \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1)) |z|^2.\end{aligned}$$

З іншого боку $(v, z) \leq |v| |z|$. Тоді одержимо $|z| \leq \frac{|v|}{\alpha + \gamma_1^2 \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1)}$, звідки

$$\sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) \leq \frac{\gamma_1^2 |v_1|^2}{\alpha + \gamma_1^2 \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1)},$$

що і потрібно було показати. $\square$

Наслідок 4. *Нехай $H_1 x = ((h_1, x), \dots, (h_N, x))^T$, а $R_\eta = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)$, тоді $H_1^2 R_\eta^{-1} H_1 = \sum_{k=1}^N h_k h_k^T \sigma_k^{-2}$ і якщо $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \left(\sum_{k=1}^N h_k h_k^T \sigma_k^{-2} \right) = \infty$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^2(\hat{u}, \hat{c}) = 0$.*

Нехай $\hat{x}$ — розв'язок рівняння (27), такий що $\hat{x} = \hat{U} y$, де $\hat{U} = (A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1)^{-1} H_1^T R_\eta^{-1} \gamma_1^2$. Знайдемо верхню та нижню оцінку для квадрата похибки $\sigma^2(\hat{u})$, де $\sigma^2(\hat{u}) = \max_{G_1} E |x - \hat{x}|^2$. Позначимо через $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1)$, відповідно, мінімальні та максимальні власні числа матриць A та $H_1^T R_\eta^{-1} H_1$, та μ_k — власні числа матриці $H_1^T R_\eta^{-1} H_1$.

Твердження 10. *Мають місце оцінки*

$$\sigma_1^2 \leq \sigma^2(\hat{u}) \leq \sigma_2^2, \quad (29)$$

де

$$\sigma_1^2 = \lambda_{\min}(A) (\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \gamma_1^2)^{-2} + \sum_{k=1}^n \mu_k \gamma_1^2 (\lambda_{\max}(A) + \gamma_1^2 \mu_k)^{-2},$$

$$\sigma_2^2 = \lambda_{\max}(A)(\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \gamma_1^2)^{-2} + \sum_{k=1}^n \mu_k \gamma_1^2 (\lambda_{\min}(A) + \gamma_1^2 \mu_k)^{-2}.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\sigma^2(\hat{u}) = \lambda_{\max}((E - \hat{U}H)A^{-1}(E - \hat{U}H)^T) + sp \hat{U} R_\eta^{-1} \hat{U}^T = \lambda_{\max}(P) + sp \hat{U} R_\eta^{-1} \hat{U}^T.$$

Оскільки $E - \hat{U}H = (A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1)^{-1} A$ і $(A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1)^{-1} A \leq (\lambda_{\min}(A)E + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1)^{-1} \lambda_{\max}(A)$, то

$$\lambda_{\max} \leq \lambda_{\max}(A)(\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \gamma_1^2)^{-2},$$

$$\lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(H_1^T R_\eta^{-1} H_1) \gamma_1^2)^{-1}.$$

Зауважимо також, що

$$sp \hat{U} R_\eta \hat{U}^T = sp(A + \gamma_1^2 H_1^T R_\eta^{-1} H_1)^{-2} H_1^T R_\eta^{-1} H_1 \gamma_1^2 \leq \sum_{k=1}^n (\lambda_{\min}(A) + \gamma_1^2 \mu_k)^{-2} \mu_k \gamma_1^2,$$

$$sp \hat{U} R_\eta \hat{U}^T \geq \sum_{k=1}^n (\lambda_{\max}(A) + \gamma_1^2 \mu_k)^{-2} \mu_k \gamma_1^2.$$

Враховуючи ці нерівності, одержимо (29). $\square$

Припустимо далі, що матриці H_1 та R_η мають вигляд $H_1 = E$, $R_\eta = \sigma^2 E$, а $e_1, \dots, e_N$ — власні вектори матриці A , $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — відповідні власні числа.

Твердження 11. *Гарантована оцінка $\hat{x}$ має вигляд $\hat{x} = \sum_{k=1}^N c_k y_k e_k$, де*

$$c_k = (\lambda_k + \sigma^{-2} \gamma_1^2)^{-1} \sigma^{-2} \gamma_1^2, \quad y_k = (y, e_k), \quad \text{при цьому}$$

$$\max_{G_1} E((v, x) - (v, \hat{x}))^2 = \sum_{k=1}^N \frac{v_k^2}{(\lambda_k + \gamma_1^2 \sigma^{-2})} \sigma^{-2} \gamma_1^2,$$

$$\text{де } v_k = (v, e_k).$$

Доведення. Оскільки $y = \sum_{k=1}^N (y, e_k) e_k$, то розв'язок рівняння (27) має вигляд $\hat{x} = \sum_{k=1}^N (y_k, e_k) x_k$, де $x_k = c_k e_k$ і задовольняє рівнянню (27) при $y = e_k$.

Нехай далі спостерігаються величини

$$y_k = h_k x_k + \eta_k, \quad (30)$$

де h_k — задана послідовність, x_k — періодична послідовність така, що $x_{k+sT} = x_k$, $s = 1, 2, \dots, T$ — ціле число. Припустимо, що x_k спостерігається на m періодах, так що $k = 0, 1, 2, \dots, mT$, тобто

$$y_0 = h_0 x_0 + \eta_0, \dots, y_T = h_T x_T + \eta_T,$$

$$y_{T+1} = h_{T+1} x_0 + \eta_T, \dots, y_{2T} = h_{2T} x_{2T} + \eta_{2T}, \dots$$

$$y_{m(T_1)+1} = h_{mT-1} x_0 + \eta_{mm-1}, \dots, y_{mT} = h_{mT} x_T + \eta_{mT}. \quad \square$$

Введемо вектори $\vec{y}_0 = (y_0, y_{T+1}, \dots, y_{m(T-1)+1})$, $\vec{y}_1 = (y_1, y_{T+2}, \dots, y_{m(T-1)+2})$, $\dots$, $\vec{y}_m = (y_T, y_{T+1}, \dots, y_{mT})$, $\vec{\eta}_0 = (\eta_0, \dots, \eta_{m(T_1)+1})$, $\dots$, $\vec{\eta}_m = (\eta_T, \dots, \eta_{mT})$. Тоді спостереження (30) на m періодах можемо записати у вигляді

$$\vec{y}_k = \vec{h}_k x_k + \vec{\eta}_k, \quad k = \overline{0, N}, \quad (31)$$

де $\vec{h}_0 = (h_0, \dots, h_{m(T_1)+1})$, $\dots$, $\vec{h}_m = (h_T, \dots, h_{mT})$, і припустимо що вектори $\vec{\eta}_k, k = 0, 1, \dots, m$ не корельовані, а послідовність $x_k, k = 0, \dots, N$ задовольняє рівнянню

$$(\Delta_- a \Delta_+ x)(k) + q_k x_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (32)$$

$$x_0 = x_N, \quad \Delta_+ x(0) = (\Delta_+ x)(N) \quad (33)$$

де $(\Delta_- x)(k) = x_k - x_{k-1}$, $(\Delta_+ x)(k) = x_{k+1} - x_k$, $(\Delta_- a \Delta_+ x)(k) + g_k x_k = a_{k-1} x_{k-1} + a_k x_{k+1} + b_k x_k$, $b_k = q_k - a_{k-1} - a_k$. Позначимо через A матрицю, що відповідає лівій частині рівняння (32) та періодичним умовам (33).

Твердження 12. Нехай $a_k \leq 0, q_k > 0$. Тоді матриця A додатньо означена.

Доведення. Нехай x_k задовольняють періодичним умовам (33). Тоді

$$\sum_{k=1}^{N-1} ((\Delta_- a \Delta_+ x)(k), x(k)) = - \sum_{k=1}^{N-1} a_k (\Delta_+ x)^2(k) \geq 0,$$

значить

$$\sum_{k=1}^{N-1} (\Delta_- a \Delta_+ x)(k) x(k) + \sum_{k=1}^{N-1} x^2(k) q_k \geq \sum_{k=1}^N q_k x_k^2(k) > 0.$$

□

Твердження 13. Нехай спостерігаються величини $y_k, k = 0, \dots, mT$, тоді гарантована оцінка величини $(v, x) = \sum_{k=0}^N v_k x_k$ буде мати вигляд

$$(\widehat{v, x}) = (v, \hat{x}) = \sum_{k=0}^N v_k \hat{x}_k, \text{ де } \hat{x}_k \text{ є розв'язком рівнянь}$$

$$L\hat{x}(k) = (\Delta_- a \Delta_+ \hat{x})(k) + q_k \hat{x}_k = \sum_{j=0}^N R_j^{-1} \vec{h}_j (\vec{y}_j - \vec{h}_j \hat{x}_j), \quad (34)$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_N, (\Delta_+ \hat{x})(0) = (\Delta_+ \hat{x})(N).$$

При цьому гарантована похибка оцінки $(\widehat{v, x})$ має вигляд $\sigma_m^2 = (v, z)$, де z — розв'язок рівняння

$$(Lz)(k) = v_k, z_0 = z_N, (\Delta_+ z)(0) = (\Delta_+ z)(N).$$

Доведення цього твердження впливає із додатньої визначеності матриці A та результатів твердження 5.

Наслідок 5. Нехай $\lambda_{\min}(H)$ — мінімальне власне значення матриці $H_m = (h_{kj}^{(2)})$, $k, j = \overline{1, N}$, де $h_{kj}^{(2)} = (R_k \vec{h}_k, \vec{h}_j)$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = 0$ тоді, коли $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_m) = \infty$.

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}(v, z) &= \sum_k (Lz)(k) z_k = \sum_k a_k (\Delta_+ z)^2(k) + \sum_k q_k z_k^2 + \sum_{k,j} (R_{kj} h_i, h_j) z_j z_k = \\ &= \sum_k a_k (\Delta_+ z)^2(k) + \sum_k q_k z_k^2 + (H_m z, z).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\sum_k a_k (\Delta_+ z)^2(k) > 0, \quad (H_m z, z) \geq \lambda_{\min}(H_m)(z, z), \quad \sum_k q_k z_k^2 \geq \min_k q_k(z, z),$$

то

$$(v, z) \geq (\min_k q_k + \lambda_{\min}(H_m))(z, z),$$

звідки $|z| \leq |v|(\min_k q_k + \lambda_{\min}(H_m))$, а значить виконується нерівність

$$(v, z) \leq |v||z| \leq |v|^2 (\min_k q_k + \lambda_{\min}(H_m))^{-1},$$

звідки

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} (v, z) = |v|^2 (\min_k q_k + \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_m))^{-1} = 0$$

при $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_m) = \infty$, що і потрібно було показати. $\square$

ВИСНОВКИ

В статті одержані конструктивні формули для обчислення гарантованих оцінок розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь при спеціальних обмеженнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Наконечный А. Г. Минимаксное оценивание функционалов от решения вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. — Київ, КДУ, 1985. — 82 с.
2. Наконечный А. Г., Демиденко С. В. Гарантированные оценки параметров линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях // Проблемы управления и информатики. — 2014. — №1. — С. 23–31.
3. Наконечный О. Г., Лосева М. В. Про наближені оцінки лінійних функціоналів від розв'язків варіаційних рівнянь у гільбертових просторах // Вісник. Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 64–66.

Надійшла 10.10.2015

УДК 517.977: 519.8

MSC 49Jxx, 49Nxx

CONFRONTATION PROBLEMS WITH THE DYNAMICS GOMPERTZIAN SYSTEMS

OLEKSANDR NAKONECHNIY, PETRO ZINKO

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, petro.zinko@gmail.com.

ЗАДАЧІ ПРОТИБОРСТВА В СИСТЕМАХ З ДИНАМІКОЮ ГОМПЕРЦА

О. Г. НАКОНЕЧНИЙ, П. М. ЗІНЬКО

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, petro.zinko@gmail.com.

ABSTRACT. The article investigates the problem of guaranteed control dynamics in conflict systems described by differential equations Gompertzian. For special criteria as proven allegations of view of optimal control in class software and positional strategies.

KEYWORDS: differential equations, optimal strategies, Pareto set, dynamics Gompertzian.

РЕЗЮМЕ. В статті досліджуються задачі гарантованого керування динамікою систем в умовах конфлікту, що описуються диференціальними рівняннями Гомперца. Для спеціальних критеріїв якості доведені твердження про вигляд оптимальних керувань в класі програмних та позиційних стратегій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: диференціальні рівняння, оптимальні стратегії, множина Паретто, динаміка Гомперца.

ВСТУП

Задачі інформаційного протидіювання при повільному розвитку процесів розглядалися в багатьох роботах (напр. [1]–[4]). Проте відомо [5]–[7], що для моделювання процесів, які швидко зростають за часом може бути застосована динаміка Гомперца. В ситуації швидкого росту процесів доцільно вводити керуючі впливи, що уповільнюють такий ріст. В той же час на динаміку росту можуть впливати особи, що зацікавлені в протилежному результаті. В такому випадку виникають задачі протидіювання (зокрема інформаційного протидіювання). Нами будуть розглядатися дві коаліції гравців, динаміка процесів яких описується диференціальними рівняннями Гомперца. Коаліції вибирають як програмні так і позиційні стратегії. Для знаходження оптимальних стратегій використовується принцип гарантованого результату. Для знаходження лінійних позиційних стратегій коаліції

використовується матричний принцип максимуму Гамільтона-Понтрягіна. Розглядається також регуляризоване керування з певним функціоналом регуляризації.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай є дві коаліції гравців K_1 та K_2 із стратегіями

$$U = \{u(t) = (u_1(t), \dots, u_{m_1}(t)), t \in [0, t_1]\},$$

$$V = \{v(t) = (v_1(t), \dots, v_{m_2}(t)), t \in [0, t_1]\}, \text{ відповідно.}$$

При вибраних стратегіях $u(t)$, $v(t)$ динаміка процесу описується системою диференціальних рівнянь Гомперца вигляду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \ln x_j(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t) u_j(t) + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t) v_j(t) \right) x_i(t), \quad (1)$$

$$i = \overline{1, n}$$

з початковою умовою

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

відповідно, для коаліції K_1 при $i = \overline{1, s}$ та для коаліції K_2 при $i = \overline{s+1, n}$, де $s < n$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ — неперервні на $[0, t_1]$ функції; $u_j(t)$, $v_j(t)$ — кусково-неперервні на $[0, t_1]$ функції. Під розв'язком системи рівнянь (1), (2) будемо розуміти функції $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, що задовольняють рівнянню (1) майже всюди. Якщо стратегії $u(t)$, $v(t)$ належать деяким множинам певних функціональних просторів, то будемо досліджувати такі задачі:

$$I_k(u, v) \rightarrow \max_{u \in U}, \quad k = \overline{1, s},$$

$$I_k(u, v) \rightarrow \min_{v \in V}, \quad k = \overline{s+1, r}, \quad r \leq n,$$

де $I_k(u, v) = g_k(x_k(t_1))$, $k = \overline{1, r}$ — функції цілі для гравців коаліцій K_1, K_2 . Зауважимо спочатку, що має місце

Твердження 1. Нехай вектор-функція $\phi(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = A(t)\phi(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad \phi(0) = \phi^0, \quad (3)$$

де $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матриці з елементами $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$, відповідно, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{m_1}(t))$, $v(t) = (v_1(t), \dots, v_{m_2}(t))$. Тоді, якщо $x_i^0 > 0$, то мають місце такі рівності $x_i(t) = e^{(\phi(t), e^i)}$, $i = \overline{1, n}$, де e^i — i -й орт.

Доведення. Оскільки $\frac{d \ln x_i(t)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} x_i^{-1}(t)$, то поклавши $\ln x_i(t) = \phi_i(t)$, одержимо рівняння (3). $\square$

2. ПРИНЦИП ГАРАНТОВАНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

Кожен гравець із коаліцій K_1, K_2 знає множини стратегій U, V а також свої функції цілі. Потрібно знайти «оптимальні стратегії» для кожної коаліції. Для знаходження «оптимальних стратегій» використаємо принцип гарантованого результату. Надалі будемо виходити із інтересів коаліції K_1 (аналогічні результати можна отримати для коаліції K_2). Нехай стратегії коаліції K_2 відомі. Тоді ми будемо мати s критеріїв для коаліції K_1 . За оптимальне значення $u(t)$ візьмемо векторний максимум за Парето.

Твердження 2. Нехай $g_k(x)$, $k = \overline{1, s}$ — додатні та монотонно зростаючі функції на $[0, \infty)$. Тоді має місце співвідношення $\vec{\max}_{u \in U}(g_1(x_1(t_1)), \dots, g_s(x_s(t_1))) = \vec{\max}_{u \in U}(\phi_1(t_1), \dots, \phi_s(t_1))$, де $x_i(t)$ та $\phi_i(t) = (\phi(t), e^i)$ знаходяться як розв'язки рівнянь (1)–(3), відповідно, а через $\vec{\max}(\cdot)$ позначено векторний максимум за Парето.

Доведення. Позначимо через P бінарне відношення Парето в просторі R^s та нехай $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s)$ та $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s)$ два вектори із R^s . Тоді $\vec{x} P \vec{y}$ тоді і тільки тоді, коли $x_i \geq y_i$, $i = \overline{1, s}$, причому принаймні одна нерівність строга. Нехай далі u_1 та u_2 дві стратегії гравців із коаліції K_1 . Тоді $u_1 P u_2$ тоді і тільки тоді, коли $g_i(x_i^{(1)}(t_1)) \geq g_i(x_i^{(2)}(t_1))$, $i = \overline{1, s}$, де $x_i^{(q)}(t_1) = x_i(t_1)|_{u=u_q}$, $q = \overline{1, 2}$. Враховуючи монотонність g_i ці нерівності виконуються тоді і тільки тоді, коли $x_i^{(1)}(t_1) \geq x_i^{(2)}(t_1)$, а оскільки $x_i(t_1) = e^{(\phi(t_1), e^i)}$, то $(\phi^{(1)}(t_1), e^i) \geq (\phi^{(2)}(t_1), e^i)$, що і потрібно було показати. $\square$

Далі розглядаються два випадки:

- коли коаліція K_1 вибирає програмні стратегії;
- коли коаліція K_1 вибирає позиційні стратегії.

3. МНОЖИНА ПАРЕТО

Твердження 3. Нехай U — опукла замкнена обмежена множина в просторі $L_2(0, t_1)$. Тоді множина Парето має вигляд

$$\Pi = \left\{ u^0(\lambda) \mid \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\},$$

де $u^0(\lambda) \in \text{Arg max}_{u \in U} \int_0^{t_1} (z(t), B(t)u(t)) dt$, а функція $z(t)$ є розв'язком рівняння

$$-\frac{dz(t)}{dt} = A^T(t)z(t), \quad z(t_1) = \sum_{i=1}^s \lambda_i e^i.$$

Доведення. Оскільки множина U опукла, то множина точок $(\phi_1(t_1), \dots, \phi_s(t_1))$ також опукла в просторі R^s . Тому множина Парето співпадає з множиною $\text{Arg max}_{u \in U} \sum_{i=1}^s \lambda_i \phi_i(t_1)$. Зауважимо, що справедливі рівності

$\sum_{i=1}^s \lambda_i \phi_i(t_1) = (\phi(t_1), \sum_{i=1}^s \lambda_i e^i) = (z(0), \phi^0) + \int_0^{t_1} (z(t), B(t)u(t)) dt + \int_0^{t_1} (z(t), C(t)v(t)) dt$, а тому виконується рівність

$$\operatorname{Arg} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^s \lambda_i \phi_i(t_1) = \operatorname{Arg} \max_{u \in U} \int_0^{t_1} (z(t), B(t)u(t)) dt,$$

що і потрібно було показати. $\square$

Наслідок. Стратегії гравців із коаліції K_1 , що належать множині Парето Π , не залежать від стратегій гравців із коаліції K_2 .

Твердження 4. Нехай $u^0(\lambda) \in \Pi$ а множина V стратегій гравців коаліції K_2 — обмежена та слабо замкнена. Тоді має місце співвідношення

$$g_i(x_i(t_1, \lambda)) \in [g_i^{(1)}(\lambda), g_i^{(2)}(\lambda)],$$

де $x_i(t_1, \lambda) = x_i(t_1) |_{u=u^0(\lambda)}$, а $g_i^{(q)}(\lambda) = g_i(x_i^{(q)}(t_1))$, $q = \overline{1, 2}$, та $x_i^{(q)}(t_1)$ визначаються із рівнянь

$$\frac{dx_i^{(q)}(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \ln x_j^{(q)}(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t) u_j^0(\lambda) + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t) \bar{v}_{ij}^{(q)}(t) \right) x_i^{(q)}(t),$$

$$x_i^{(q)}(0) = x_i^0,$$

$$\bar{v}_i^{(1)}(t) \in \operatorname{Arg} \min_{v \in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)v(t)) dt,$$

$$\bar{v}_i^{(2)}(t) \in \operatorname{Arg} \max_{v \in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)v(t)) dt,$$

$$-\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} = A^T(t) \bar{z}_i(t), \quad \bar{z}_i(t_1) = e^i.$$

Доведення. Оскільки для $i = \overline{1, s}$ виконується:

$$\min_{v \in V} g_i(x_i(t, \lambda)) = g_i \left(\exp \left(\min_{v \in V} (\phi(t), e^i) \right) \right), \quad \text{то враховуючи, що}$$

$$(\phi(t_1), e^i) = (\bar{z}_i(t_1), \phi_0) + \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), B(t)u^0(\lambda)) dt + \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)v(t)) dt,$$

одержимо такі співвідношення

$$\min_{v \in V} (\phi(t_1), e^i) = (\bar{z}_i(t), \phi_0) + \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), B(t)u^0(\lambda)) dt +$$

$$+ \min_{v \in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)v(t)) dt = (\phi^{(1)}(t_1), e^i),$$

де $\phi^{(1)}(t)$ знаходиться із рівняння

$$\frac{d\phi^{(1)}(t)}{dt} = A(t) \phi^{(1)}(t) + B(t)u^0(\lambda) + C(t)\bar{v}_i^{(1)}(t), \quad \phi^{(1)}(0) = x^0.$$

$$\text{Аналогічно отримаємо } \max_{v \in V} (\phi(t_1), e^i) = (\phi^{(2)}(t_1), e^i).$$

На основі отриманих співвідношень можемо записати послідовно такі нерівності $(\phi^{(1)}(t_1), e^i) \leq (\phi(t_1), e^i) \leq (\phi^{(2)}(t_1), e^i)$,

$$x_i^{(1)}(t_1, \lambda) \leq x_i(t_1, \lambda) \leq x_i^{(2)}(t_1, \lambda),$$

$$g_i\left(x_i^{(1)}(t_1, \lambda)\right) \leq g_i(x_i(t_1, \lambda)) \leq g_i\left(x_i^{(2)}(t_1, \lambda)\right).$$

Таким чином твердження 4 доведено. $\square$

4. ПОЗИЦІЙНІ СТРАТЕГІЇ

Тепер припустимо, що в коаліції K_1 використовуються позиційні стратегії у вигляді $u(t) = L(t)\phi(t)$, тобто

$$u_i(t) = (L(t)\phi(t), e^i) = (\phi(t), L^T(t)e^i) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \phi_k(t) l_{ki}(t) = \sum_{k=1}^n l_{ki}(t) \ln x_k(t),$$

де $l_{ki}(t) = (L^T(t)e^i, e^k)$.

Введемо зважений критерій

$$J(u, v) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \left(\phi(t_1), e^k \right),$$

де $\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^s \lambda_k = 1$.

Твердження 5. Нехай $u^0(t)$ — деяка стратегія коаліції K_1 , а невідомі значення ϕ^0 та $v(t)$ належать обмеженій множині G в просторі $R^n \times L_2(0, t_1)$. Тоді мають місце такі нерівності

$$J_1(u^0) \leq J(u, v) \leq J_2(u^0),$$

де $J_1(u^0) = -\left((Q_0^{(1)}z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)) + \int_0^{t_1} (Q_1^{(1)}z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)) dt\right)^{1/2}$,

$$J_2(u^0) = \left((Q_0^{(2)}z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)) + \int_0^{t_1} (Q_1^{(2)}z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)) dt\right)^{1/2},$$

$Q_0^{(q)}, Q_1^{(q)}$ — деякі невід'ємно визначені матриці, $z^{(1)}(t)$ — розв'язок рівняння

$$-\frac{dz^{(1)}(t)}{dt} = (A(t) + B(t)L(t))^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t_1) = \sum_{k=1}^s \lambda_k e^k.$$

Доведення. Зауважимо, що справедливі рівності

$$\left(\sum_{k=1}^s \lambda_k e^k, \phi(t_1)\right) = (z^{(1)}(t_1), \phi(t_1)) = (z^{(1)}(0), \phi^0) +$$

$$+ \int_0^{t_1} (z^{(1)}(t), C(t)v(t)) dt. \text{ Оскільки множини } G, \text{ яким належать } (\phi^0, f) \text{ обмежені, то знайдуться додатно визначені матриці } \bar{Q}_0^{(q)}, \bar{Q}_1^{(q)}, q = \overline{1, 2}, \text{ такі, що } G_1 \subseteq G \subseteq G_2, \text{ де}$$

$$G_q = \left\{ (\phi^0, f) \mid \left(\bar{Q}_0^{(q)}\phi^0, \phi^0\right) + \int_0^{t_1} \left(\bar{Q}_1^{(q)}f(t), f(t)\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Отже, можемо записати такі співвідношення

$$\begin{aligned} \sup_G \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) &\leq \sup_{G_2} \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) = \\ &= \left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(2)} \right)^{-1} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0) \right) + \int_0^{t_1} \left(C \left(\bar{Q}_1^{(2)} \right)^{-1} C^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t) \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \inf_G \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) &\geq \inf_{G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) = \\ &= \left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(1)} \right)^{-1} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0) \right) + \int_0^{t_1} \left(C \left(\bar{Q}_1^{(1)} \right)^{-1} C^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t) \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Твердження 5 доведено. $\square$

Твердження 6. Нехай $L(t)$ при кожному t належить множині D простору матриць та існує матриця $\hat{L} \in D$ така, що виконується рівність

$$\max_L \min_{v \in G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) = \min_{v \in G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \hat{\phi}(t_1) \right),$$

де $\hat{\phi}(t_1)$ знаходиться із розв'язку рівняння (3) при $u(t) = \hat{u}(t) = \hat{L}(t) \phi(t)$. Тоді матриця $\hat{L}(t)$ може бути знайдена із умови

$$\hat{L}(t) \in \text{Arg max}_L f(L), \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} f(L) &= - \left(\psi(t), (B(t) L(t))^T z^{(1)}(t) \right) = - \left(B(t) L(t) \psi(t), z^{(1)}(t) \right) = \\ &= -SpL(t) \psi(t) \left(B^T(t) z^{(1)}(t) \right)^T = - \left(L(t), B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) \right), \end{aligned}$$

а функція $\psi(t)$ із рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= (A(t) + B(t) L(t)) \psi(t) + C(t) \left(\bar{Q}_1^{(1)} \right)^{-1} C^T(t), \\ \psi(0) &= \left(\bar{Q}_0^{(1)} \right)^{-1} z^{(1)}(0). \end{aligned}$$

Доведення. Із співвідношень

$$\begin{aligned} \min_{v \in G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) &= \\ &= - \left(\left(Q_0^{(1)} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0) \right) + \int_0^{t_1} \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t) \right) dt \right)^{1/2} = -\Phi(L), \end{aligned}$$

отримуємо

$$\max_{L \in D} \min_{v \in G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1) \right) = - \min_{L \in D} \Phi(L) = - \left(\min_{L \in D} \Phi_1(L) \right)^{1/2},$$

де $\Phi_1(L) = \Phi^2(L)$.

Для знаходження матриці $L(t)$ застосуємо принцип максимуму. Введемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$\begin{aligned} H(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)) = & -(\psi(t), (A(t) + B(t)L(t))^T z^{(1)}(t)) + \\ & + (Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)) = -((A(t) + B(t)L(t))\psi(t), z^{(1)}(t)) + \\ & + (Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)), \end{aligned}$$

де функція $\psi(t)$ є розв'язком спряженого рівняння

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = (A(t) + B(t)L(t))\psi(t) + (Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)), \quad \psi(0) = Q_0^{(1)} z^{(1)}(0).$$

Тоді, якщо $\min_{L \in D} \Phi_1(L) = \Phi_1(\hat{L})$, то

$$\hat{L} \in \text{Arg max}_{L \in D} f(L(t)), \quad f(L(t)) = - (B(t)L(t)\psi(t), z^{(1)}(t)),$$

що й потрібно було довести. $\square$

Наслідок. Нехай

$$D = \{L(t) \mid SpL(t)L^T(t) \leq \gamma_1^2(t), \quad \gamma_1(t) > 0\}.$$

$$\text{Тоді } \hat{L} = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t))^{1/2}}.$$

Доведення. Оскільки $f_1(L(t)) = -\langle L(t), B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t) \rangle$, то враховуючи нерівність Коші-Буняковського будемо мати співвідношення

$$\max_{L \in D} f_1(L(t)) = \|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi(t)\| \gamma_1,$$

де $\|L(t)\| = (SpL(t)L^T(t))^{1/2}$, при цьому

$$\begin{aligned} \hat{L}(t) &= -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\|} = \\ &= -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t))^{1/2}}. \end{aligned}$$

$\square$

Твердження 7. Нехай матриця L не залежить від t . Тоді якщо D — компактна в просторі матриць, то існує $\hat{L}$ таке, що $\min_{L \in D} \Phi_1(L) = \Phi_1(\hat{L})$, при цьому

$$\begin{aligned} \hat{L} &= -\gamma_1 \int_0^{t_1} B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t) dt \times \\ &\times \left(\int_0^{t_1} SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t) dt \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки функція $\Phi_1(L)$ неперервно залежить від матриці L , а D — компакт, то існує матриця $\hat{L} \in D$ така, що

$$\Phi_1(\hat{L}) = \min_{L \in D} \Phi_1(L).$$

Зауважимо, що у випадку незалежності L від t функція Гамільтона-Понтрягіна буде мати вигляд

$$H(\psi(t), z^{(1)}(t), L) = - \left(\int_0^{t_1} B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) dt, L \right) + \beta(\psi(t), z^{(1)}(t)),$$

де $\beta(\psi(t), z^{(1)}(t))$ не залежить від L . Отже справджується рівність

$$\begin{aligned} \max_{L \in D} H(\psi(t), z^{(1)}(t), L) &= \\ &= \left| \int_0^{t_1} B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) dt \right| \gamma_1(t) + \beta(\psi(t), z^{(1)}(t)) \end{aligned}$$

і максимум досягається при $L = \hat{L}$, що й потрібно було довести. $\square$

5. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ КРИТЕРІЮ

Нижче розглядається регуляризація критерію $\Phi(L(t))$. Назвемо функцію $\hat{u}_\alpha(t) = \hat{L}_\alpha(t) \phi(t)$, де матриця $\hat{L}_\alpha(t)$ знаходиться із умови

$$\hat{L}_\alpha(t) \in \text{Arg} \min_{L \in D} \Phi_\alpha(L(t)),$$

а функціонал $\Phi_\alpha(L(t))$ визначається за формулою $\Phi_\alpha(L(t)) = \Phi_1(L(t)) + \alpha F(L(t))$, $\alpha > 0$, $F(L(t)) > 0$, регуляризованим керуванням із функціоналом регуляризації $F(L(t))$.

Твердження 8. Нехай $F(L(t)) = \int_0^{t_1} \text{Sp} L(t) L^T(t) dt$. Тоді регуляризоване керування має вигляд

$$\hat{L}(t) = -B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) / \alpha. \quad (5)$$

Доведення. Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$\begin{aligned} H(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)) &= - \left\langle B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t), L(t) \right\rangle + \\ &+ (L(t), L(t)) (\alpha/2) + \beta_1(\psi(t), z^{(1)}(t)). \end{aligned}$$

Отримуємо

$$H(\psi(t), z^{(1)}(t), \hat{L}(t)) = \max_{L \in D} H(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)),$$

де $\hat{L}(t) = -B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) / \alpha$, що й потрібно було показати. $\square$

Зауваження. Із загальної теорії регуляризації [9] випливає, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi_\alpha(\hat{L}_\alpha(t)) = \inf_{L \in D} \Phi_1(L(t)).$$

Зрозуміло, що в загальному випадку для знаходження $\hat{L}_\alpha(t)$ потрібно розв'язувати крайову задачу для знаходження $z^{(1)}(t)$ та $\psi(t)$ із відповідних систем нелінійних диференціальних рівнянь при $L(t) = \hat{L}(t)$. Наведемо нижче функціонал регуляризації $F(L(t))$ спеціального типу, для якого задача знаходження $\hat{L}_\alpha(t)$ значно спрощується. Покладемо

$$F(L(t)) = \int_0^{t_1} SpL(t)P(t)L^T(t)dt,$$

де симетрична матриця $P(t)$ є розв'язком лінійного рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= (A(t) + B(t)L(t))P(t) + P(t)(A(t) + B(t)L(t))^T + Q_1^{(1)}, \\ P(0) &= Q_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Твердження 9. Має місце рівність

$$\min_{L \in D} \Phi_\alpha(L(t)) = \Phi_\alpha(\hat{L}_\alpha(t)),$$

де $\hat{L}_\alpha(t) = -B^T(t)S_\alpha(t)$, а функція $S_\alpha(t)$ є розв'язком рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} -\frac{dS_\alpha(t)}{dt} &= A^T(t)S_\alpha(t) + S_\alpha(t)A(t) - S_\alpha(t)B(t)B^T(t)S_\alpha(t), \\ S_\alpha(t_1) &= R_0, \quad R_0 = \sum_{k,j=1}^s \lambda_k \lambda_j e^k e^{jT}. \end{aligned} \quad (7)$$

При цьому

$$\Phi_1(\hat{L}_\alpha(t)) = Sp\hat{P}(t_1)R_0 \leq SpS_\alpha(0)Q_0^{(1)} + \int_0^{t_1} SpS_\alpha(t)Q_1^{(1)}dt,$$

де $\hat{P}(t)$ — розв'язок рівняння (6) при $L(t) = \hat{L}_\alpha(t)$.

Доведення. Доведення цього твердження проводиться аналогічно тому, як це зроблено в [8]. $\square$

Наслідок. Нехай $\Phi(t, \tau)$ матриця, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = E.$$

Тоді має місце рівність

$$S_1(\beta, t) = \Phi(t, t_1)\tilde{R}_0\Phi^T(t, t_1) + \int_t^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau,$$

де $S_1(\beta, t) = S^{-1}(\beta, t)$ і $S(\beta, t)$ є розв'язком рівняння (7) при $R_0 = \tilde{R}_0$, $\tilde{R}_0 = R_0 + \beta E$, $\beta > 0$.

Доведення. Оскільки $R_0 + \beta E$ — додатно визначена матриця, то матриця $S(\beta, t)$ також буде додатно визначена. Покладемо $S_1(\beta, t) = S^{-1}(\beta, t)$. Оскільки

$$\frac{dS_1(\beta, t)}{dt} = -S_1(\beta, t) \frac{dS(\beta, t)}{dt} S_1(\beta, t),$$

то рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = A(t) S_1(t) + S_1(t) A^T(t) - B(t) B^T(t) / \alpha, S_1(t_1) = (R_0 + \beta E)^{-1}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$S_1(\beta, t) = \Phi(t, t_1) (R_0 + \beta E)^{-1} \Phi^T(t, t_1) + \frac{1}{\alpha} \int_t^{t_1} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau,$$

що й потрібно було показати. $\square$

Наслідок. Має місце рівність

$$S(\beta, t) = (\Phi(t, t_1) (R_0 + \beta E)^{-1} \Phi^T(t, t_1) + (1/\alpha) \int_t^{t_1} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau)^{-1}$$

при $\beta > 0$, причому

$$S(\beta, t) \leq \Phi_1^T(t, t_1) (R_0 + \beta E)^{-1} \Phi_1(t, t_1),$$

де $\Phi_1(t, t_1) = \Phi^{-1}(t, t_1) = \Phi(t_1, t)$.

Доведення. Оскільки $\alpha > 0$, а матриця

$$\int_t^{t_1} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) dt \geq 0,$$

то виконуються нерівності

$$S_1(\beta, t) \geq \Phi(t, t_1) (R_0 + \beta E)^{-1} \Phi^T(t, t_1) > 0.$$

Наслідок доведено. $\square$

Твердження 10. Нехай $\beta \in [0, \beta_1]$. Тоді має місце співвідношення

$$S(\beta, t) = S(0, t) + \beta S_2(\beta_0, t),$$

де $0 < \beta_0 \leq \beta_1$, а функція $S_2(\beta_0, t)$ має вигляд

$$S_2(\beta_0, t) = \left. \frac{dS(\beta, t)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} = S_2(t)$$

та є розв'язком лінійного рівняння

$$-\frac{dS_2(t)}{dt} = A_1^T(t) S_2(t) + S_2(t) A_1(t) \quad (8)$$

при $S_2(t_1) = R_0 + \beta_0 E$, $A_1(t) = A(t) - (1/\alpha) B(t) B^T(t) S(\beta_0, t)$.

Доведення. Доведення цього твердження впливає із існування похідної $S_2(\beta_0, t)$, яка задовольняє рівняння (8) та розкладу функції $S(\beta, t)$ в ряд Тейлора в околі нуля. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайлов А. П., Маревцева Н. А. Модели информационной борьбы // Математическое моделирование. 2011. — Т. 23, №10. — С. 19–32.
2. Наконечний О. Г., Зінко П. М. Оптимальне керування в динамічних задачах інформаційного протиборства із невизначеностями // Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності: 25 міжн. конф., 11–15 травня 2015: тези доп. — Східниця. — С. 112–114.
3. Nakonechniy O., Zinko P. Best-mean estimates in models of information confrontation // Problems of decision making under uncertainties: 24 Intern. Conf., 1–5 sept. 2014. — Cesky Rudolec. — P. 114–115.
4. Губанов Д. А., Калашников А. О., Новиков Д. А. Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. — 2010. — №31. — С. 192–204.
5. Наконечный А. Г., Марценюк В. П. Задачи управления для дифференциальных уравнений динамики Гомперца // Кибернетика и системный анализ. 2004. — №2. — С. 123–133.
6. Marzeniuk V. P., Nakonechniy A. G. System analysis methods of medical and biological processes — Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. — 241 p.
7. Марценюк В. П., Наконечний О. Г. Моделі та методи популяційної динаміки в програмному середовищі підтримки системних медичних досліджень — Тернопіль: Укрмедкнига, 2009. — 407 с.
8. Бублик Б. Н., Данилов В. Я., Наконечный А. Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах — К.: УМК ВО, 1988. — 191 с.
9. Васильев Ф. П., Осипов Ю. С., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации — М.: МГУ, 1998. — 236 с.

Надійшла 01.10.2015

УДК 517.9
MSC 91B06

ON THE PROBLEM OF PAIRWISE COMPARISONS MATRICES UNDER THE CONDITIONS OF UNCERTAINTCES ASSESSMENT

VALENTYNA SAVKOVA, OLEXANDR NAKONECHNIY

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: valentina.savkova@gmail.com, a.nakonechniy@gmail.com.

ДО ПРОБЛЕМИ ОЦІНКИ МАТРИЦЬ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В. П. САВКОВА, О. Г. НАКОНЕЧНИЙ

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: valentina.savkova@gmail.com, a.nakonechniy@gmail.com.

RESUME. If on a set of objects are given certain binary relations, that determine the advantages of one object over the other object, then their ordering is possible with a help of paired comparisons. The method of paired comparisons allows an estimation of such characteristics of objects, which are not measurable in the usual sense, that is with technical devices and tools. Practical applications of the method in ranking, prioritization and decision-making are unique in the sense that it allows utilization of subjective preferences of judges. Since the objects are compared in pairs, judges can concentrate their attention on only two objects at time. It is believed that such an approach avoids the effect of so-called sensory fatigue, when evaluating more than two objects at a time leads to confusion and lack of concentration. Moreover, observing just two objects permits better discrimination between very fine differences in the objects. This method represents a simpler but strong alternative to other ranking techniques, which may require complex experiment planning procedures. Another distinctive advantage of our approach is that the method does not deny the existence of circular triads, and in some cases allows identification of such triads. We see the method of paired comparisons as by far more superior than other ranking techniques. In this paper it is considering the case when the elements of comparisons are random with partly unknown probabilities. To determine them, it is using the method of maximum authenticity and the method of minimizing the aggregate quadratic error. It is shown that the estimates of the maximum authenticity of the probabilities are determined by some equation, has a unique solution. For optimal averaged estimates are received an explicit formulas. KEYWORDS: decision making theory, operands ranking, pair-wise

comparison method, maximal probability method, average mean-square error minimization method, maximum probability estimator.

РЕЗЮМЕ. Якщо на множині об'єктів задаються певні бінарні відношення, що визначають переваги одного об'єкта над іншим, то їх впорядкування можливе за допомогою попарних порівнянь. В роботі розглядається випадок, коли елементи матриці порівнянь випадкові з частково невідомими ймовірностями. Для їх визначення застосовується метод максимальної вірогідності та метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки. Показано, що оцінки максимальної вірогідності ймовірностей визначаються із деякого рівняння, що має єдиний розв'язок. Для оптимальних усереднених оцінок ймовірностей одержані явні формули.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія прийняття рішень, ранжування об'єктів, метод попарних порівнянь, метод максимальної вірогідності, метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки, оцінка максимальної вірогідності.

Однією з важливих проблем в теорії прийняття рішень є задача ранжування об'єктів. Якщо на множині таких об'єктів задаються певні бінарні відношення, що визначають переваги одного об'єкта над іншим, то їх впорядкування можливе за допомогою попарних порівнянь. В роботі розглядається випадок, коли елементи матриці порівнянь випадкові з частково невідомими ймовірностями. Для їх визначення застосовується метод максимальної вірогідності та метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки. Показано, що оцінки максимальної вірогідності ймовірностей визначаються із деякого рівняння, що має єдиний розв'язок. Для оптимальних усереднених оцінок ймовірностей одержані явні формули.

Нехай на множині альтернатив $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ – задача N бінарних відношень B_k , $k = \overline{1, N}$.

Поставимо у відповідність кожному бінарному відношенню B_k матрицю попарних порівнянь [4] $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i,j=\overline{1,m}}$, при цьому $a_{ij}^{(k)} = 1$, якщо $x_i R_k x_j$ і $a_{ij}^{(k)} = -1$, якщо $x_i \overline{R_k} x_j$.

Будемо вважати, що $a_{ij}^{(k)}$ при фіксованих i, j є реалізаціями (послідовністю) випадкових незалежних величин, причому

$P \{a_{ij}^{(k)} = 1\} = \gamma_{ij}^k p_{ij} = 1 - P \{a_{ij}^{(k)} = -1\}$, де $k = \overline{1, N}$, $\gamma_{ik}^{(k)}$ – відомі додатні величини $\gamma_{ij}^k \leq 1$, p_{ij} – невідомі параметри $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Позначимо через $y_{ij}^{(k)}$ – реалізації випадкових величин $a_{ij}^{(k)}$. Тоді якщо $k_1, \dots, k_r$ такі, що $y_{ij}^{(ks)} = 1$, $s = \overline{1, r}$, а $y_{ij}^{(ks)} = -1$, $s = \overline{r+1, N}$, то має місце наступне твердження.

Твердження 1. Нехай λ_{ij} – корінь рівняння на множині $[1, \infty)$

$$r = \sum_{s=r+1}^N (\lambda_{ij} - \gamma_{ij}^{(Ks)})^{-1}, \quad (1)$$

тоді єдина оцінка максимальної вірогідності має вигляд $p_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}}$, де $r = \frac{1}{2}(N + \sum_{k=1}^N y_{ij}^{(k)})$.

Доведення. Через те що, величини $a_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$ незалежні,

$$\begin{aligned} W_{ij}(P) &= P \left\{ a_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(1)}, \dots, a_{ij}^{(N)} = y_{ij}^{(N)} \right\} = \\ &= \prod_{s=1}^N P \left\{ a_{ij}^{(s)} = y_{ij}^{(s)} \right\} = \gamma_{ij}^{(k_1)*} \gamma_{ij}^{(k_r)} p_{ij}^{(r)} (1 - \gamma_{ij}^{(k_{r+1})} p_{ij}) \dots (1 - \gamma_{ij}^{(k_N)} p_{ij}), \end{aligned} \quad (2)$$

звідки

$$\ln W_{ij}(P) = \sum \ln \gamma_{ij}^{(k_s)} + r \ln \sum_{s=1}^r \ln \gamma_{ij}^{(k_s)} + r \ln p_{ij} + \sum_{s=r+1}^N \ln (1 - \gamma_{ij}^{(k_s)} p_{ij})$$

Через те що, $\frac{d}{dp} \ln W_{ij}(P) = \frac{r}{p_{ij}} - \sum_{s=r+1}^N (1 - \gamma_{ij}^{(Ks)} p_{ij})^{-1}$, то із умови $\frac{d}{dp} \ln W_{ij}(P) = 0$ одержимо рівняння (1) відносно $\lambda_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}$.

Далі позначимо через $f(\lambda)$ функцію $f(\lambda) = \sum_{s=r+1}^N (\lambda - \gamma_{ij}^{(Ks)})^{-1}$, яка є монотонно спадною і $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$. Значить рівняння $f(\lambda) = r$ має єдиний корінь, а значить оцінка $\hat{p}_{ij} = \frac{1}{\hat{\lambda}_{ij}}$ – єдина. $\square$

Наслідок. Нехай $\gamma_{ij} = 1$, тоді

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_{ij}^{(k)} \right). \quad (3)$$

Наслідок 2. Нехай в рівняння (1), $r = N - 2$. Позначимо $\gamma_{ij}^{(K_{N-1})} = \gamma_1$, $\gamma_{ij}^{(K_N)} = \gamma_2$. Тоді рівняння $f(\lambda) - r = 0$. Запишемо у вигляді $r(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2) - 2 > +\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, або $r\lambda^2 - 2(2 + r(\gamma_1 + \gamma_2)) + \gamma_1 + \gamma_2 + r\gamma_1\gamma_2 = 0$. Звідки одержимо оцінку $\hat{p}_{ij} = \frac{1}{\hat{\lambda}_{ij}}$, де $\hat{\lambda}_{ij} = \frac{2}{r} + \gamma_1 + \gamma_2 + \sqrt{\frac{4}{r^2} + (\gamma_1 - \gamma_2)^2} = \frac{2}{r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)^2} \right) + \gamma_1 + \gamma_2$. Знайдемо далі лінійну оцінку параметра p_{ij} . Нехай $u_1, \dots, u_N$ – довільні

числа. Будемо шукати оцінку p_{ij} у вигляді

$$\hat{p}_{ij} = \sum_{k=1}^N u_k y_{ij}^{(k)} + c_{ij} \quad (4)$$

Твердження 2. Якщо $c_{ij} = \sum_{k=1}^N u_k$, а u_k задовольняє умові $\sum_{k=1}^N u_k \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$, то оцінка (4) є незміщеною.

Доведення. Через те що, $E y_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1$, то $E p_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1$, то $E p_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^N u_k E y_{ij}^{(k)} + \sum_{k=1}^N u_k = \sum_{k=1}^N u_k (2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1) + \sum_{k=1}^N u_k = p$, що й потрібно було показати. $\square$

Твердження 3. Середньоквадратична похибка $\sigma(p, u_1, \dots, u_N)$ незміщеної оцінки параметри p_{ij} має вигляд

$$\sigma(p, u_1, \dots, u_N) = \left\{ 4p_{ij} \sum_{k=1}^N r_{ij}^k u_k^2 - 4p_{ij}^2 \sum_{k=1}^N u_k^2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Доведення.

$$E(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2 = p_{ij}^2 - 2p_{ij} E \hat{p}_{ij} + E \hat{p}_{ij}^2 = -p_{ij}^2 + E \hat{p}_{ij}^2,$$

$$E \hat{p}_{ij}^2 = E \left(\sum_{k=1}^N u_k (y_{ij}^{(k)} + 1) \right)^2 = \sum_{k=1}^N u_k^2 E (y_{ij}^{(k)} + 1)^2 + \sum_{k \neq s} u_k u_s E (y_{ij}^{(k)} + 1)(y_{ij}^{(s)} + 1).$$

Через те що, $E(y_{ij}^{(k)} + 1)^2 = 4\gamma_{ij}^{(k)} p_{ij}$, а

$$E(y_{ij}^{(k)} + 1)(y_{ij}^{(s)} + 1) = E(y_{ij}^{(k)} + 1)E(y_{ij}^{(s)} + 1) = 4p_{ij}^2 \gamma_{ij}^{(k)} \gamma_{ij}^{(s)},$$

звідки $E \hat{p}_{ij}^2 = p_{ij}^2 - 4p_{ij}^2 \sum_{k=1}^N u_k^2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2$, а значить

$$E(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2 = 4p_{ij} \sum_{k=1}^N (\gamma_{ij}^{(k)}) u_k^2 - 4p_{ij}^2 \sum_{k=1}^N u_k^2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2,$$

що і потрібно було показати. $\square$

Зауважимо далі, що середньоквадратична похибка залежить від невідомого параметра p_{ij} . Для того щоб зняти невизначеність, припустимо, що нам відомі нижня та верхня оцінки p_{ij} , тобто $p_{ij}^- \leq p \leq p_{ij}^+$. Введемо функцію

$$\sigma_1^2(u_1, \dots, u_N) = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} \sigma^2(p, u_1, \dots, u_N) \mu(dp),$$

де $\mu(\cdot)$ – відомий розподіл ймовірностей [4].

Означення 1. Незміщену оцінку $\hat{p}_{ij} = \sum \hat{u}_k(y_{ij}^k + 1)$ для якої $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N) \in \text{Argmin} \tau_1^2(u_1..u_N)$, будемо називати усередненою лінійною оцінкою.

Твердження 4. Усереднена лінійна оцінка має вигляд:

$$\hat{p}_{ij} = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k(y_{ij}^{(k)} + 1), \quad (6)$$

де $\hat{u}_k = \frac{1}{2} \delta_{ij}^{(k)} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^k \delta_{ij}^{(k)} \right)^{-1}$, $\delta_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}}$, $\beta_{ij}^{(k)} = \mu_1 \gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2$. При цьому:

$$\min \sigma_1^2(u_1..u_N) = \sum_{k=1}^N (\mu_1 \gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2)^{-1}, \quad (7)$$

$$\mu_1 = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p \mu(dp), \mu_2 = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p^2 \mu(dp).$$

Доведення. Зведемо функцію Лагранжа $F_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{4} \sigma_1^2 + 2 > > \sum_{k=1}^N u_k \gamma_{ij}^{(k)}$ із умови $\frac{\partial F_\lambda}{\partial u_\lambda} = 0$ одержимо, що $\hat{u}_k = -\frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}} \lambda$. Множник λ знаходимо із умови $\sum_{k=1}^N \hat{u}_k \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$. Тобто $\lambda = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1}$. Звідки одержимо вираз для $\hat{u}_k$. Знайдемо далі $\sigma_1^2(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N)$.

Маємо, що $\sigma_1^2(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N) = \sum \hat{u}_k (y_{ij}^k + 1) = x \sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}$, $\left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}} \right)^{-2} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\mu_1 \gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \mu_1 (\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_2 \right)^{-1}$, що й потрібно було показати. $\square$

Наслідок. Якщо $\gamma_{ij}^{(k)} = 1$, то усереднена лінійна оцінка має вигляд

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_{ij}^{(k)} \right) \quad (8)$$

при цьому

$$\sigma_1^2(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N) = \frac{1}{N} (\mu_1 - \mu_2). \quad (9)$$

Твердження 5. Нехай існують константи $c_1(N), c_2(N)$ такі, що $c_1(N) \leq \gamma_{ij}^{(k)} \leq c_2(N)$.

Тоді має місце нерівність

$$\frac{1}{N} (\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2) \leq \sigma_1^2(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N) \leq \frac{1}{N} (\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2).$$

Доведення. Через те що, $\frac{1}{c_2(N)} \leq (\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} \leq \frac{1}{c_1(N)}$, то $(\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2)^{-1} \leq (\mu_1 (\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_2)^{-1} \leq (\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2)^{-1}$. Звідки одержимо необхідну нерівність. $\square$

Означення 2. Матрицю $\hat{P}(Y) = (\hat{P}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ — назовемо лінійною оцінкою матриці $P = (p_{ij})$.

Означення 3. Матрицю $\hat{P}(Y) = (\hat{p}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ назовемо лінійною усередненою оцінкою матриці $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$.

Твердження 6. Мають місце рівності

$$E\hat{P}(Y) = P, \quad (10)$$

та

$$\int_{R^m} Esp \left(\hat{P}(Y) - P \right)^2 dp = \sum_j^N \left(\sum (\mu_{ij}^{(1)} \gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_{ij}^{(??)} \right)^{-1}, \quad (11)$$

де

$$\mu_{ij}^{(1)} = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p \mu(dp), \mu_{ij}^{(2)} = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p^2 \mu(dp).$$

Доведення. Рівність (10) випливає із незміщеної оцінки $\widehat{p}_{ij}$, а також із того, що $E\hat{P}(Y) = (E\hat{p}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$. Далі зауважимо, що

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Esp^2 \left(\hat{P}(Y) - P \right) = \sum_{i,j} E(\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 = \\ &= 4 \left(\sum_{i,j} p_{ij} \sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^{(k)} \hat{u}_k^2 - \sum_{c,j} p_{ij}^2 \sum_{k=1}^N \hat{u}_k^2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2 \right). \end{aligned}$$

Так як, $\hat{u}_k = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}} \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1}$, то

$$\sigma^2(P) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i,j=1}^m \left(p_{ij}(\gamma_{ij}^{(k)}) - p_{ij}^2 \gamma_{ij}^2 \right) \left(\frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^2} \right)^2 \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}} \right)^{-2}.$$

Враховуючи, що $\beta_{ij}^{(k)} = \mu_1 \gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2$ одержимо, що

$$\int \sigma^2(P) \mu(dp) = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{k=1}^N (\mu_{ij}^{(1)} (\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_{ij}^{(2)})^{-1} \right).$$

$\square$

Наслідок. Якщо $\gamma_{ij}^{(k)} = 1$, то

$$\int_{R^{m^2}} Esp^2(\hat{P}(Y) - P)\mu(dp) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j=1}^m (\mu_{ij}^{(1)} - \mu_{ij}^2) \right).$$

Нехай $P\{y_{ij}^{(k)} = 1\} = \gamma_{ij}^{(k)} p$. Нехай при $i < j$, $P\{\eta_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)}\} = \gamma_{ij}^{(k)} p$ при $y_{ij}^{(k)} = 1$ і $1 - \gamma_{ij}^{(k)}$ при $y_{ij}^{(k)} = -1$, $i, j = \overline{1, m}$. Знайдемо лінійну усереднену оцінку P по спостереженням $y_{ij}^{(k)}$, $i < j$. Покладемо

$$\hat{p} = \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} i u_{ij}^{(k)} \bar{y}_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^N (u_k, y_k), \quad (12)$$

де $\bar{y}_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)} + 1$.

Твердження 7. Нехай випадкові величини $\eta_{ij}^{(k)}$, $i < j$, $k = \overline{1, N}$ некорельовані, причому виконуються умови

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i < j} i u_{ij}^{(k)} \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Тоді оцінка (12) є незміщеною, причому

$$E(p - \hat{p})^2 = 4 \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} (u_{ij}^{(k)})^2 (\gamma_{ij}^{(k)} p - (\gamma_{ij}^{(k)})^2 p^2).$$

Доведення. Через те що $EY_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)} p$, то із врахуванням (13) одержимо незміщені оцінки. Далі маємо, що

$$\begin{aligned} E(p - \hat{p})^2 &= E\left(\sum_{k=1}^N \sum_{i < j} (u_{ij}^{(k)})^2 (\bar{y}_{ij}^{(k)} - E\bar{y}_{ij}^{(k)}) - Ey_{ij}^{(k)}\right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} (u_{ij}^{(k)})^2 E(\bar{y}_{ij}^{(k)} - E\bar{y}_{ij}^{(k)})^2, \quad E(\bar{y}_{ij}^{(k)} - E\bar{y}_{ij}^{(k)})^2 = \\ &= E(y_{ij}^{(k)} - Ey_{ij}^{(k)}) = 1 - (Ey_{ij}^{(k)})^2 = 1 - (2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1)^2 = -4(\gamma_{ij}^{(k)})^2 p^2 + 4\gamma_{ij}^{(k)} p. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$E(p - \hat{p})^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} (u_{ij}^{(k)})^2 (4\gamma_{ij}^{(k)} p - 4(\gamma_{ij}^{(k)})^2 p^2),$$

що і потрібно було показати. $\square$

Припустимо далі, що відомі числа p^- і p^+ такі, що $p^- \leq p \leq p^+$.

Позначимо через $\sigma_1^2(u)$ усереднений критерій по розподілу $\mu(\cdot)$ для якого існують перші чи другі моменти $\sigma_1^2(u) = \int_{p^-}^{p^+} E(p - \hat{p})^2 \mu(dp)$.

Твердження 8. Оптимальна усереднена оцінка [2], для якої $\hat{u} \in \text{Argmin} \sigma_1^2(u)$ та виконується умова $\sum_k \sum_{i < j} \hat{u}_{ij}^{(k)} \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$ є не-зміщеною. При цьому мають місце рівності

$$\begin{aligned} \hat{u}_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\beta_{ij}^{(k)}}{\sum_k \sum_{i < j} (\beta_{ij}^{(k)})^2}, \quad \beta_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\delta_{ij}^{(k)}}, \\ \sigma_1^2(\hat{u})^k &= \left(\sum_{k=1}^N \sum_{i < j} \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\delta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доведення. Через те що, $\sigma_1^2(u) = 4 \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} (u_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, де $\delta_{ij} = \gamma_{ij}^{(k)} \mu_1 - (\gamma_{ij}^{(k)})^2 \mu_2$, $\mu_1 = \int_{p^-}^{p^+} p \mu(dp)$, $\mu_2 = \int_{p^-}^{p^+} p^2 \mu(dp)$, то знайдемо мінімум функції $\sigma_1^2(u)$ при умові (13). Введемо функцію Лагранжа [3] $\sigma_\lambda^2(u) = \sigma_1^2(u) + 2\lambda \sum_u \sum_{i < j} u_{ij}^{(u)} \gamma_{ij}^{(k)}$. Тоді із умови $\frac{\partial}{\partial u_{ij}} \sigma_\lambda(u) = 0$, одержимо, що $\hat{u}_{ij}^{(k)} = -\lambda \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\delta_{ij}^{(k)}}$. Множник λ знаходимо із умови (13), тобто

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\sum_k \sum_{i < j} \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\delta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1}. \text{ Таким чином, } \hat{u}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{\beta_{ij}^{(k)}}{\sum_k \sum_{i < j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}}.$$

Таким чином, $\sigma_1^2(\hat{u}) = (\sum_k \sum_{i < j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)})^{-2} \cdot \sum_k \sum_{i < j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, $(\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)} = \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{(\delta_{ij}^{(k)})} \delta_{ij}^{(k)} = (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, звідки одержимо (14). $\square$

Наслідок. Нехай існують числа $c_1(N)$ та $c_2(N)$ такі, що $c_1(N) \leq \gamma_{ij}^{(k)} \leq c_2(N)$. Тоді мають місце нерівності

$$2 \frac{(\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2)}{N C^{m(m-1)}} \leq \sigma_1^2(\hat{u}) \leq \frac{2(\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2)}{N m(m-1)}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 1973. – 368 с.
2. Davidson R. R., Farquhar P. H. A bibliography on the method of paired comparisons – P. 241-252.
3. El-Helbawy A. T. Optimal paired comparison designs. Order statistics and non-parametrics: Theory and applications - Elsevier Science Publishers B. V., 1992. – P. 349-361.
4. Litvine I. N. Models and Methods of paired comparisons – L: Publishing House „Nautilus“, 2004. – 156 p.

Надійшла 10.11.2015

УДК 519.8

MSC 90C06, 90C11

SOLVING MIXED INTEGER BILINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS USING DECOMPOSITION METHOD

N. V. SEMENOVA¹, S. V. OLIINYK²

¹Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: nvsemenova@meta.ua.

²Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: oliinyk.svitlana@gmail.com.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗМІШАНО ЦІЛОЧИСЛОВОГО БІЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

Н. В. СЕМЕНОВА¹, С. В. ОЛІЙНИК²

¹Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
E-mail: nvsemenova@meta.ua.

²Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна, E-mail: oliinyk.svitlana@gmail.com.

ABSTRACT. Investigated mixed integer bilinear programming problems with related variables. Researched the properties and structure of the problems. Constructed and justified decomposition method for finding exact and approximate solutions. Resulting method based on a combination of Benders' method and ideas of relaxation. This method uses the properties of feasible set of problem' structure. It allows to replace the solving original problem to the solving sequence of simpler associate subproblems. Promising direction develops on the basis of the offered method of decomposition. These are new and original algorithms for the decision of bilinear problems, using parallel computing.

KEYWORDS: discrete optimization, mixed integer problems, linear programming, decomposition, relaxation.

РЕЗЮМЕ. Досліджено змішано цілочислові задачі білінійного програмування зі зв'язаними змінними. На основі вивчення структури задачі побудовано та обґрунтовано декомпозиційний метод знаходження точних і наближених розв'язків, що заснований на поєднанні ідей методів Бендерса і релаксації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дискретна оптимізація, змішано цілочислові задачі, білінійне програмування, методи декомпозиції, релаксація.

1. ВСТУП

Ряд задач економіки, теорії керування, дослідження операцій можуть бути представлені у вигляді задач білінійного програмування [1]. Зокрема до них зводяться: задача пошуку ситуації рівноваги за Нешем у біматричній грі, лінійна задача доповнюваності спеціального вигляду, задача білінійної відділимості двох множин у просторі R^n , задача виробничого календарного планування, задача про багатопродуктовий потік в мережах, тривимірна задача про призначення та інші. Зазвичай у білінійних змішано цілочислових задачах виділяють вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервних і $y = (y_1, y_2, \dots, y_q)$ цілочислових змінних. Цільова функція лінійна по кожній з цих змінних при фіксованій іншій, але при цьому в ній обов'язково присутні члени, що містять добутки $x_i y_j$, $i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in N_q$, невід'ємних неперервної і цілочислової змінних, можливо, з деяким коефіцієнтом. Ці задачі мають два джерела неопуклості: перше — цілочислові змінні, а друге — білінійність функцій, які й породжують неопуклість цих задач. Як відомо, неопуклі задачі мають велику кількість локальних розв'язків і стаціонарних точок, далеких від глобального оптимуму за значенням цільової функції, а класичні методи опуклої оптимізації в подібних задачах безпосередньо незастосовні або неефективні. Тому розробка нових методів пошуку точних та наближених розв'язків в неопуклих і дискретних задачах математичного програмування є однією з актуальних задач сучасної оптимізації [1–7]. При цьому поряд з популярними універсальними підходами до розв'язання подібних задач такими методами, як гілок та меж, відсікань, апроксимацій та ін. [2–5], досить ефективними є методи дослідження та розв'язання спеціальних класів неопуклих задач з урахуванням їх особливостей і властивостей [1–7].

Неперервні та змішано цілочислові задачі білінійного програмування мають багато застосувань, що розглядалися, зокрема, в роботах [1, 6–9]. Задачі такого типу виникають у виробництві, в ситуаціях розподілу продукції та ресурсів. Загальна методологія розв'язання — побудова многогранної релаксації, використовуючи перетворення кожного білінійного елемента в межах простору гілок та меж. Складна релаксація може бути побудована з використанням опуклих оболонок всієї білінійної функції. Також існують спеціалізовані алгоритми гілок та меж, які звужують область допустимих значень в кожному вузлі дерева пошуку. Переформулювання за допомогою техніки лінеаризації може бути застосовано до неперервних білінійних задач та поширене на змішані неперервно булеві задачі з білінійною цільовою функцією.

Одним із перспективних підходів до розв'язання складних задач дискретної оптимізації є декомпозиційний підхід, який здійснює пошук розв'язків вхідної задачі шляхом розв'язання ряду незалежних підзадач меншої розмірності [2, 4, 5, 10, 11]. Загальна ідея методів декомпозиції, заснованої на розділенні змінних, полягає у проведенні обчислень при фіксованих значеннях вектора y , потім використовуючи оптимальний розв'язок x , коректуванні значення вектора y . Указана процедура породжує клас методів декомпозиції, заснованих на розділенні змінних.

2. ЧАСТКОВО ЦІЛОЧИСЛОВА ЗАДАЧА БІЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Розглянемо частково цілочислову задачу білінійної оптимізації зі зв'язаними змінними вигляду $P1$:

$$\begin{aligned} \min \{f(x, y) | Ax + F(y) \geq b, x \geq 0, y \in S\}, \\ f(x, y) = \langle c, x \rangle + \langle x, Qy \rangle + \langle d, y \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут f — скалярна функція від змінних x і y , x та c — n -вимірні вектори, y — q -вимірний вектор, матриці Q і A мають розмірності $n \times q$ та $m \times n$, відповідно, F — m -вектор, компонентами якого є функції від змінної y , b — m -вимірний вектор, а S — множина цілочислових векторів з R^n .

Задача $P1$ є частково цілочисловою, де деякі змінні є неперервними, а деякі цілочисловими. Оскільки $P1$ лінійна по x при фіксованих значеннях y , логічно розв'язувати її шляхом фіксації y , розв'язання задачі лінійного програмування (ЛП) відносно x , отримання кращого значення y тощо.

Щоб мати можливість застосовувати техніку розділення змінних не можна вибирати будь-які вектори змінних $y \in S$. Можуть розглядатися тільки такі значення y , для яких існує $x \in R^n$, що задовольняє обмеження задачі, тобто вектор $y \in R^q$ повинен належати множині

$$R = \{y \in R^q | \exists x \geq 0 : Ax \geq b - F(y), y \in S\}.$$

Для того, щоб у явній формі отримати обмеження, що визначають множину R , скористаємось лемою Фаркаша [10, 11].

Лема 1. Існує вектор $x \geq 0$, що задовольняє умови $Bx = a$ тоді і тільки тоді, коли $a^T u \geq 0$ для всіх u , що задовольняють $B^T u \geq 0$.

Зафіксувавши $y \in S$ і застосувавши лему до системи лінійних рівностей і нерівностей

$$Ax - s = b - F(y), \quad x \geq 0, \quad s \geq 0,$$

приходимо до висновку, що y допустимий тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\langle b - F(y), u \rangle \leq 0 \quad (2)$$

для всіх u , що задовольняють $A^T u \leq 0, u \geq 0$.

Позначимо $C = \{u | A^T u \leq 0, u \geq 0\}$. Цей многогранний конус визначається скінченною кількістю твірних, тобто $\exists u_i^T, i = 1, \dots, n_r$, такі, що будь-який $u \in C$ може бути представленим у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i u_i^T, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Підставляючи останній вираз в (2), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i (b - F(y))^T u_i^T \leq 0,$$

що справедливо для всіх $\lambda_i \geq 0$, тоді і тільки тоді, коли

$$\langle b - F(y), u_i^T \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_r. \quad (3)$$

Таким чином, вектор $y \in S$ допустимий, тоді і тільки тоді, коли він задовольняє скінченній системі обмежень (3). Множина R тепер може бути представлена у вигляді

$$R = \{y | \langle (b - F(y)), u_i^r \rangle \leq 0, i = 1, \dots, n_r, y \in S\}. \quad (4)$$

Якщо R порожня, тоді вхідна задача $P1$ не має допустимого розв'язку. Припускаючи, що R не порожня, перепишемо $P1$ у вигляді

$$\min_{y \in R} \{f(y) + \min\{\langle c, x \rangle + \langle x, Qy \rangle | Ax \geq b - F(y), x \geq 0\}\}.$$

Цільова функція цієї задачі задається алгоритмічно. Для знаходження її значення при фіксованому y необхідно розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\min\{\langle c, x \rangle + \langle x, Qy \rangle | Ax \geq b - F(y), x \geq 0\}. \quad (5)$$

Розглянемо двоїсту задачу до (5):

$$\max\{(b - F(y))^T u | A^T u \leq c + Qy, u \geq 0\}. \quad (6)$$

Якщо $y \in R$, то пряма задача (5) допустима і в силу теореми двоїстості маємо рівність оптимальних значень цільових функцій задач (5) і (6)

$$\begin{aligned} \min\{\langle c, x \rangle + \langle x, Qy \rangle | Ax \geq b - F(y), x \geq 0\} = \\ \max\{\langle b - F(y), u \rangle | A^T u \leq c + Qy, u \geq 0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

де значення максимуму береться рівним $-\infty$ якщо двоїста задача недопустима.

Отже, співвідношення (7) підсумовують твердження, що, якщо пряма задача має необмежену цільову функцію на допустимій множині, то двоїста задача недопустима, в той час, коли обидві задачі допустимі, то вони мають скінченний оптимальний розв'язок з рівними значеннями цільових функцій. Враховуючи вищезазначене задача $P1$ приймає новий вигляд:

$$\min_{y \in R} \{f(y) + \max\{(b - F(y))^T u | A^T u \leq c + Qy, u \geq 0\}\}.$$

Розглянемо допустиму множину

$$P(y) = \{u | A^T u \leq c + Qy, u \geq 0\}$$

двоїстої задачі (6). Обмеження множини $P(y)$ залежать від y . Якщо многогранник $P(y) = \emptyset$, то пряма задача (5) має необмежений розв'язок як і вхідна задача $P1$. Якщо $P(y) \neq \emptyset$, то внутрішній максимум задачі $P1$ досягається в одній з вершин $u_i^p(y) \in P(y)$, $i = 1, \dots, n_p(y)$ або прямує до ∞ вздовж крайнього променя u_i^r , $i = 1, \dots, n_r$, множини $P(y)$. В цьому випадку задача (5) недопустима, що суперечить вхідним припущенням, що $y \in R$, отже можна обмежитись розглядом тільки крайніх точок $P(y)$. Задача $P1$ враховуючи означення R , еквівалентна наступній задачі $P2$:

$$\begin{aligned} \min\{z | z \geq f(y) + \langle b - F(y), u_i^p(y) \rangle, i = 1, \dots, n_p(y), \\ \langle b - F(y), u_i^r \rangle \leq 0, i = 1, \dots, n_r, y \in S\}. \end{aligned}$$

Позначивши G множину, що описується обмеженнями задачі $P2$, переходимо до нового запису цієї задачі:

$$\min\{z | (z, y) \in G\}.$$

Справедлива теорема, що встановлює еквівалентність задач $P1$ і $P2$.

Теорема 1. *Задача $P1$ не має допустимих розв'язків тоді і тільки тоді, коли множина G порожня.*

Якщо $(\bar{z}, \bar{y})$ — розв'язок задачі $P2$ та $\bar{x}$ є розв'язком задачі ЛП

$$\min\{\langle c, x \rangle + \langle x, Q\bar{y} \rangle | Ax \geq b - F(\bar{y}), x \geq 0\}, \quad (8)$$

то $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком задачі $P1$ і $\bar{z} = \langle c, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, Q\bar{y} \rangle + f(\bar{y})$.

Якщо $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком задачі $P1$ та $\bar{z} = \langle c, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, Q\bar{y} \rangle + f(\bar{y})$, то $(\bar{z}, \bar{y})$ є розв'язком задачі $P2$.

Таким чином, розв'язання вхідної задачі $P1$ зводиться до послідовного розв'язання задачі цілочислової оптимізації з однією неперервною змінною вигляду $P2$ і задачі ЛП вигляду (8). Якщо задача $P2$ не має допустимих розв'язків, то не має допустимих розв'язків і задача $P1$. Якщо $P2$ має оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$, то для побудови оптимального розв'язку $(\bar{x}, \bar{y})$ задачі $P1$ потрібно розв'язання задачі (8).

Однак процес розв'язання задачі $P2$ ускладнений внаслідок дуже великої кількості її обмежень, адже для знаходження розв'язків задачі $P2$ треба знати всі обмеження, що визначають область G . Слід зазначити, що знаходження оптимального розв'язку задачі $P2$ більш важливе, ніж побудова всієї множини G , тому достатньо знайти тільки ті обмеження G , що визначають оптимальний розв'язок цієї задачі. Застосуємо підхід релаксації Джеффра [10]. Почнемо з урахування тільки невеликої кількості обмежень та будемо розв'язувати модифіковані таким чином задачі $P2$, які позначатимемо $MP2$.

$$\min\{z | z \geq f(y) + \langle b - F(y), u_i^p(y) \rangle, i = 1, \dots, n_p(y), i \in I_1,$$

$$\langle b - F(y), u_i^r \rangle \leq 0, i \in I_2\},$$

де $I_1 \subset \{1, \dots, n_p(y), y \in R\}$, $I_2 \subset \{1, \dots, n_r\}$. Нехай G' — множина всіх (z, y) , що задовольняють обмеження $MP2$. $G' \supseteq G$.

Таким чином, розв'язок задачі $MP2$ оптимальний для $P2$, тоді і тільки тоді, коли він належить G , тобто задовольняє всі обмеження $P2$. Звичайно, ці обмеження в явній формі недоступні, оскільки заздалегідь не обчислені всі крайні точки та промені множини $P(y)$. Згідно загальної процедури релаксації Джеффра, отриманий розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$ задачі $MP2$ потрібно дослідити на допустимість щодо відкинутих обмежень множини G , яких може бути дуже велика кількість. Щоб позбавитися від великого перебору для перевірки належності до множини G або генерації нових обмежень можна використати задачі ЛП вигляду (5) або (6).

Сформулюємо критерій оптимальності.

Теорема 2. *Оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$ задачі $MP2$ є оптимальним розв'язком $P2$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$\max\{\langle b - F(\bar{y}), u \rangle | A^T u \leq c + Q\bar{y}, u \geq 0\} = \bar{z} - f(\bar{y}).$$

3. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

1. Розв'язуємо задачу $MP2$, в якій немає жодного або є декілька обмежень задачі $P2$.
2. Якщо задача $MP2$ недопустима, тоді недопустимі $P2$ та $P1$. У протилежному випадку отримуємо оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$ або інформацію про те, що цільова функція задачі необмежена. Якщо $\bar{z} = -\infty$, то виберемо за $\bar{y}$ довільний елемент S та переходимо до пункту 3.
3. Розв'язуємо двоїсту задачу ЛП (6) або пряму (5), якщо вона допустима. Якщо задача (6) недопустима, то вхідна задача $P1$ має необмежену цільову функцію на допустимій множині. Якщо задача (6) має необмежену цільову функцію, тоді переходимо до пункту 6.
4. Якщо оптимальне значення цільової функції двоїстої задачі (6), отриманої у пункті 3, дорівнює $\bar{z} - f(\bar{y})$, то $(\bar{z}, \bar{y})$ є розв'язком $P2$. Якщо $\bar{x}$ — розв'язок задачі (8), то $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком $P1$.
5. Якщо у пункті 4 не виконується критерій оптимальності та двоїста задача ЛП (6) при $y = \bar{y}$ має скінченний оптимальний розв'язок $\bar{u}$, то додамо до задачі $MP2$ обмеження

$$z \geq \langle b - F(y), \bar{u} \rangle + f(y) \quad (9)$$

та повернемося до пункту 2.

6. Якщо двоїста задача (6) при $y = \bar{y}$ має необмежений розв'язок, то симплекс-метод дозволяє знайти промінь $\bar{v}$ і точку $\bar{u}$ такі, що цільова функція цієї задачі прямує до ∞ вздовж променя $u = \bar{u} + \lambda \bar{v}$, $\lambda \geq 0$. Додамо до обмежень задачі $MP2$ обмеження

$$\langle b - F(y), \bar{v} \rangle \leq 0.$$

Якщо при цьому має місце нерівність

$$\bar{z} < f(\bar{y}) + \langle b - F(\bar{y}), \bar{u} \rangle$$

для крайньої точки $\bar{u}$, то додаємо обмеження вигляду (9) до $MP2$. Повертаємося до пункту 2.

Теорема 3. *Якщо множина S скінченна, то описаний алгоритм закінчується за скінченну кількість кроків із знаходженням оптимального розв'язку задачі $P1$ або з отриманням інформації про те, що задача $P1$ недопустима або має необмежену цільову функцію на допустимій множині.*

Скінченна збіжність описаного алгоритму впливає з того факту, що задача $P1$ має скінченне число обмежень і всі послідовно породжувані обмеження необхідно відрізняються між собою.

4. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ ОЦІНКИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕННЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Привабливою рисою цього алгоритму є можливість обчислення верхньої та нижньої меж оптимального значення цільової функції, причому таких, що збігаються до оптимального значення тоді, коли в процесі розв'язання підзадач досягається оптимальність.

Для будь-якого i -го кроку справедлива оцінка

$$z^i \leq \min\{z | (z, y) \in G\} \leq f(x^r, y^r), \quad (10)$$

$$f(x^r, y^r) = \min_{1 \leq j \leq i} (\langle c, x^j \rangle + \langle x^j, Qy^j \rangle + f(y^j)), \quad (11)$$

тут $r \in N_i$ — індекс, при якому досягається мінімум в (11).

Критерій оптимальності є умовою того, що верхня та нижня межі рівні. Верхня оцінка генерується послідовністю допустимих розв'язків задачі $P1$, отже, найкраща з цих оцінок може бути взята за розв'язок, якщо алгоритм закінчується раніше досягнення оптимуму.

Для задач, що мають велику розмірність, збіжність може виявитися відносно повільною. З іншого боку, похибки обчислень приводять до того, що перевірка умови завершення алгоритму за допомогою критерію оптимальності може виявитися не досягнутою. Отже, можливо використовувати інший, не такий вимогливий тест на завершення алгоритму. Маючи на кожному i -му кроці верхню і нижню оцінки оптимального значення цільової функції вхідної задачі $P1$, виконання алгоритму можна закінчити, як тільки величина різниці між верхньою і нижньою оцінками стане менше деякої заздалегідь заданого значення точності ϵ .

Слід зазначити, що знаходження точного розв'язку задачі $P1$ може бути пов'язано зі значними обчислювальними витратами. У разі необхідності задачу вигляду (6) або обидві задачі $MP2$ та (6) можна розв'язувати наближено. При цьому після кожного i -го кроку можна визначати границі наближеного значення z цільової функції задачі $P2$ за формулою (10). Обчислення за алгоритмом в цьому випадку завершуються, якщо виконується умова $f(x^r, y^r) - z^i \leq \epsilon$, де ϵ — задана точність.

5. ВИСНОВКИ

Досліджено змішано цілочислові задачі білінійного програмування зі зв'язаними змінними. На основі вивчення властивостей структури задачі побудовано та обґрунтовано декомпозиційний метод знаходження точних і наближених розв'язків, що заснований на поєднанні ідей методів Бендерса і релаксації. Цей метод, використовує властивості структури допустимої області задачі і дозволяє замінити розв'язання вхідної задачі розв'язанням послідовності підзадач, хоча і взаємопов'язаних, але більш простих. Перспективним напрямом є побудова на основі розробленого методу нових оригінальних алгоритмів з організацією паралельних обчислень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А. С., Орлов А. В. Биматричные игры и билинейное программирование. — М: Физматлит, 2007. — 224 с.
2. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К: Наукова думка, 1988. — 472 с.
3. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К: Наукова думка, 2003. — 264 с.
4. Семенова Н. В., Колечкина Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. — К: Наукова думка, 2009. — 266 с.
5. Семенова Н. В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных // Кибернетика и систем. анализ. — 2007. — №1. — С. 103–114.
6. Мухамедиев Б. М. О решении задачи билинейного программирования и отыскании всех ситуаций равновесия в биматричных играх // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1978. — Т. 18, ч. 3. — С. 351–359.
7. Орлов А. В. Численное решение задач билинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — 48, №2. — С. 237–254.
8. Sherali H. D., Alameddine A. A newreformulation-linearization technique for bilinear programming problems // Journal of Global Optimization. — 1992. — №2 — P. 379–410.
9. Adams W. P., Sherali H. D. Mixed integer bilinear programming problems // Mathematical Programming. — 1993. — 59 — P. 279–305.
10. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем. — М: Наука, 1975. — 432 с.
11. Benders J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. // Numerische Mathematik. — 1962. — №4 — P. 238–252.

Надійшла 19.10.2015

УДК 517.9

MSC 47J20, 49J40, 65K15

OUTER APPROXIMATIONS METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

L. M. ЧАБАК¹, V. V. DUDAR², V. V. SEMENOV², YA. I. VEDEL²

¹Faculty of Transport Economics, Kiev State Maritime Academy named after hetman Petro Konashevich-Sahaydachniy, Kiev, Ukraine, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.

²Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kiev, Kiev, Ukraine, E-mail: slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com, yandx@ukr.net.

МЕТОД ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Л. М. ЧАБАК¹, В. В. ДУДАРЬ², В. В. СЕМЕНОВ², Я. И. ВЕДЕЛЬ²

¹Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев, Украина, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.

²Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com, yandx@ukr.net.

ABSTRACT. The article deals with variational inequalities over the set of fixed points of a countable family of Fejer operators, which act in infinite-dimensional Hilbert space. An outer approximations scheme for solving of variational inequalities with strongly monotone and Lipschitz-continuous operator is proposed based on well known Takahashi–Takeuchi–Kubota hybrid method of approximation the fixed point of nonexpansive operator. Strong convergence theorems are proved. In the analysis were not used concepts related with the weak topology (demiclosedness, Kadets–Klee property).

KEYWORDS: variational inequality, monotone operator, Fejer operator, outer approximations method, strong convergence.

РЕЗЮМЕ. В статье рассматривается вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного гибридного метода поиска неподвижных точек нерастягивающего оператора, предлагается схема внешних аппроксимаций для решения вариационного неравенства с сильно монотонным и липшицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вариационное неравенство, монотонный оператор, фейеровский оператор, метод внешних аппроксимаций, сильная сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вариационные неравенства с монотонными операторами — один из центральных объектов изучения в прикладном нелинейном анализе [1]. Многие задачи исследования операций, математической экономики и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено и исследовано большое количество алгоритмов [2]–[15]. Среди последних большое значение имеют итерационные процессы, порожденные фейеровскими (квазинерастягивающими) и нерастягивающими операторами [16]–[25]. Эти операторы обладают очень важным свойством замкнутости относительно композиций определенного типа, что открывает возможность естественной декомпозиции задач и сборки алгоритмов из некоторого семейства более простых процедур [16].

В статье рассматривается вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного «гибридного метода» Takahashi–Takeuchi–Kubota [26]–[29] поиска неподвижных точек, мы предлагаем, так называемую, схему внешних аппроксимаций для решения рассматриваемой задачи с сильно монотонным и лишицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций. Предварительное сообщение было опубликовано в [30]. Заметим, что наш анализ совсем не использует понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца-Кли) (см. также [27]–[29]). Все необходимые сведения по нелинейному анализу изложены в книгах [16, 17].

2. ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО НА МНОЖЕСТВЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Оператор $T : H \rightarrow H$ называют фейеровским (квазинерастягивающим), если

- (1) $F(T) = \{x \in H : x = Tx\} \neq \emptyset$;
- (2) $\|Tx - y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x \in H \quad \forall y \in F(T)$.

Замечание 1. Для фейеровского оператора T множество неподвижных точек $F(T)$ замкнутое и выпуклое [16].

Замечание 2. Пусть $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая по Гато функция. Если множество $D = \{x \in H : g(x) \leq 0\}$ не пусто, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Tx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x), & \text{если } x \notin D, \\ x, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где $\nabla g(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$ [16].

Для операторов $A : H \rightarrow H$ и множеств $M \subseteq H$ обозначим

$$VI(A, M) = \{x \in M : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Рассмотрим абстрактную задачу:

$$\text{найти } x \in VI \left(A, \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \right). \quad (1)$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — счетное множество фейеровских операторов, действующих в H ;
- $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$;
- $A : H \rightarrow H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно.

Замечание 3. При $\lambda \in (0, 2l/L^2)$ оператор $I - \lambda A$ является сжимающим. Действительно,

$$\begin{aligned} \|(x - \lambda Ax) - (y - \lambda Ay)\|^2 &= \|x - y\|^2 + \lambda^2 \|Ax - Ay\|^2 - \\ &\quad - 2\lambda(Ax - Ay, x - y) \leq (1 + \lambda^2 L^2 - 2l\lambda) \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H, \end{aligned}$$

и если $0 < \lambda < 2l/L^2$, то $0 < 1 + \lambda^2 L^2 - 2l\lambda < 1$.

Замечание 4. Решение вариационного неравенства (1) существует и единственно.

3. МЕТОД ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ

Для произвольной пары элементов $x, y \in H$ определим множество

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \{z \in H : \|z - y\| \leq \|z - x\|\} = \\ &= \{z \in H : 2(x - y, z) \leq \|x\|^2 - \|y\|^2\}. \end{aligned}$$

Множество $H(x, y)$ является замкнутым полупространством (совпадающим с H в случае $x = y$).

Для аппроксимации решения вариационного неравенства (1) предлагаем

Алгоритм 1. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \quad C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$.

Замечание 5. Алгоритм 1 — обобщение «гибридного метода» аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов [26]. В работах [27, 31, 32] подобные схемы были использованы для поиска неподвижных точек многозначных фейеровских операторов, нулей максимальных монотонных операторов и решения задач равновесного программирования.

4. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ

Предположим, что $C_n \neq \emptyset$ и $F \subseteq C_n$. Имеем

$$\|T_n x_n - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall z \in F \subseteq F(T_n).$$

Следовательно, $F \subseteq H(x_n, T_n x_n)$. Таким образом, $F \subseteq C_{n+1}$. Получили цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots \supseteq F \neq \emptyset$$

и корректность определения последовательности (x_n) .

Для доказательства основных результатов нам необходимы

Утверждение 1 ([17]). Если C_n — замкнутые выпуклые подмножества гильбертова пространства H , $C_n \supseteq C_{n+1}$ и $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, то

$$P_{C_n} x \rightarrow P_C x \text{ для всех } x \in H.$$

Определение 2. Семейство операторов $\{T_n : H \rightarrow H\}$ назовем *предельно замкнутым*, если

- (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$;
- (2) для любой последовательности (x_n) имеем

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x, \\ x_n - T_n x_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Замечание 6. Если $T_n \equiv T$ и оператор T замкнут, то семейство $\{T_n\}$ предельно замкнуто.

Имеет место

Теорема 1. Пусть $A : H \rightarrow H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно; $\{T_n : H \rightarrow H\}$ — счетное предельно замкнутое семейство фейеровских операторов. Предположим, что $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0, 2l/L^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства (1).

Доказательство. Существует единственный элемент $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, такой, что

$$y = P_{\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n} (I - \lambda A) y.$$

Покажем, что $x_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим вспомогательную последовательность элементов $y_n = P_{C_n} (I - \lambda A) y$. Известно, что $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \|(I - \lambda_n A) x_n - (I - \lambda A) y\| \leq \\ &\leq q \|x_n - y_n\| + q \|y_n - y\| + |\lambda_n - \lambda| \|Ax_n\|, \end{aligned}$$

где $q \in (0, 1)$. Предположим, что (x_n) не сходится к y . Тогда,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \\ &\leq q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\|, \end{aligned}$$

что абсурдно. Таким образом, $\|x_n - y\| \rightarrow 0$.

Покажем, что y — решение вариационного неравенства (1). Поскольку $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)x_n$, то

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_{n+1}.$$

Принимая во внимание вложение $F \subseteq C_{n+1}$, получим,

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \geq 0 \quad \forall z \in F \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Совершив предельный переход, имеем

$$(Ay, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Осталось доказать включение $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. Поскольку $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|T_n x_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Откуда,

$$\|T_n x_n - x_n\| \leq \|T_n x_n - x_{n+1}\| + \|x_n - x_{n+1}\| \leq 2\|x_n - x_{n+1}\|.$$

Следовательно, $x_n - T_n x_n \rightarrow 0$. Учтя предельную замкнутость семейства операторов $\{T_n\}$, получим $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. $\square$

5. ВАРИАНТ МЕТОДА ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ

Рассмотрим еще один вариант метода внешних аппроксимаций для вариационного неравенства с не более чем счетным семейством операторов $\{T_n\}_{n \in \mathcal{I}}$:

$$\text{найти } x \in VI \left(A, \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(T_i) \right), \quad (2)$$

где $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$.

Алгоритм 2. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \quad C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_{p(n)} x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)x_n, \end{cases}$$

где $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$, $\lambda_n > 0$.

Будем предполагать, что отображение $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$ сюръективно и в случае счетного $\mathcal{I}$ «достаточно часто» принимает каждое свое значение. А именно, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N} : p(k) = i\}$ бесконечно.

Замечание 7. Если $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$, то можно положить $p(n) = (n - 1) \bmod N + 1$ (циклическая стратегия).

Теорема 2. Пусть $A : H \rightarrow H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно; $\{T_n : H \rightarrow H\}_{n \in \mathcal{I}}$ — не более чем счетное семейство замкнутых фейеровских операторов и $\bigcap_{n \in \mathcal{I}} F(T_n) \neq \emptyset$. Предположим, что $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, 2l/L^2) \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda$, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N} : p(k) = i\}$ бесконечно. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства (2).

Доказательство. Необходимо лишь доказать утверждение:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x, \\ x_n - T_{p(n)}x_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(T_i).$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \mathcal{I}$. Существует возрастающая последовательность (n_k) , такая, что $p(n_k) = i$. Имеем,

$$x_{n_k} \rightarrow x, \quad x_{n_k} - T_{p(n_k)}x_{n_k} = x_{n_k} - T_i x_{n_k} \rightarrow 0.$$

Замкнутость оператора T_i влечет $x \in F(T_i)$. В силу произвольности $i \in \mathcal{I}$, получаем, что $x \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(T_i)$. $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривалось вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских (квазинерастягивающих) операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного гибридного метода поиска неподвижных точек нерастягивающего оператора, была предложена схема внешних аппроксимаций для решения вариационного неравенства с сильно монотонным и липшицевым оператором. Основным результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций. Заметим, что наш анализ совсем не использовал понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца-Кли).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киндерлерер Д., Стампакия Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
2. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12, №4. — С. 747–756.
3. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 38. — P. 431–446.
4. Komov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.

5. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V.2. — New York: Springer, 2003. — xxxiii + 666 p.
6. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2011. — 148. — P. 318–335.
7. Censor Y., Gibali A., Reich S. Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space // *Optimization Methods and Software*. — 2011. — Vol. 26. — P. 827–845.
8. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // *Journal of Automation and Information Sciences*. — 2010. — Vol. 42, №4. — P. 13–18.
9. Малицький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2010. — №3(102). — С. 79–88.
10. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
11. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
12. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
13. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // *Доповіді НАН України*. — 2012. — №2. — С. 56–62.
14. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
15. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Zgurovsky M. Z., Sadovnichiy V. A. (eds.) *Continuous and Distributed Systems*. — Heidelberg: Springer, 2014. — P. 131–146.
16. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
17. Bauschke H. H., Combettes P. L. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
18. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // *SIAM J. Optim.* — 2006. — Vol. 16. — P. 1230–1241.
19. Нурминский Е. А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2008. — Т. 48, №12. — С. 2121–2128.
20. Апостол Р.Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.

21. Семенов В. В. Два метода аппроксимации неподвижной точки фейеревского оператора // Журнал вычислительной та прикладной математики. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
22. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, №5. — P. 45–56.
23. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, №7. — P. 31–46.
24. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51. — P. 757–765.
25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015, Vol. 61, Iss. 1. — P. 193–202.
26. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276–286.
27. Семенов В. В. Сильно сходящийся алгоритм поиска неподвижной точки многозначного фейеревского оператора // Журнал вычислительной та прикладной математики. — 2010. — №4(103). — С. 89–93.
28. Bauschke H. H., Chen J., Wang X. A projection method for approximating fixed points of quasi nonexpansive mappings without the usual demiclosedness condition, <http://arxiv.org/abs/1211.1639>.
29. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доповіді НАН України. — 2013. — №6. — С. 41–46.
30. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеревских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
31. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно сходящийся модифицированный вариант метода Корпелевич для задач равноважного программирования // Журнал вычислительной та прикладной математики. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
32. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 741–749.

Поступила 09.10.2015

УДК 519.233.2
MSC 93BXX

THE MINIMAX APPROACH TO THE ESTIMATION OF SOLUTIONS TO SPECIAL SYSTEMS OF VARIATIONAL EQUATIONS IN HILBERT SPACES AND ITS APPLICATIONS

OLEKSANDR NAKONECHNYI, YURIY PODLIPENKO

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, yourip@mail.ru.

МІНІМАКСНИЙ ПІДХІД ДО ОЦІНЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СПЕЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ВАРІАЦІЙНИХ РІВНЯНЬ В ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

О. Г. НАКОНЕЧНИЙ, Ю. К. ПОДЛИПЕНКО

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, yourip@mail.ru

ABSTRACT. We investigate the estimation problems of linear functionals from solutions to systems of variational equations in Hilbert spaces with unknown right-hand sides. The unknown right-hand sides and the unknown correlation operator of estimation error are supposed to belong to the certain sets. It is shown that the linear mean square estimates of the above-mentioned functionals and estimation errors are expressed via solutions to the systems of variational equations of the special type. We elaborate the numerical algorithms for finding such estimates. The obtained results are applied to the case when the system of variational equations is a stationary heat equation with right-hand side satisfying to the linearized Navier-Stokes equation.

KEYWORDS: linear functional, variational equation, observation, mean square estimate.

РЕЗЮМЕ. В статті досліджуються задачі оцінювання розв'язків варіаційних рівнянь в спеціальних гільбертових просторах з невідомими правими частинами та похибками спостережень. Припускається, що в праві частини таких рівнянь входять вектори, які в свою чергу, є розв'язками варіаційних рівнянь також із невідомими правими частинами. При умові, що невідомі вектори належать правим частинам вивчаються спочатку питання про оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків та правих частин таких рівнянь. Вводяться гарантовані середньоквадратичні лінійні оцінки та гарантовані середньоквадратичні похибки таких оцінок. Показано, що такі оцінки та похибки оцінювання виражаються через розв'язки систем варіаційних рівнянь. Показано також, що гарантовані оцінки лінійних функціоналів дають змогу знайти гарантовані оцінки розв'язків варіаційних рівнянь при

спостереженнях з похибками. Для наближеного знаходження гарантованих оцінок приводиться система лінійних алгебраїчних рівнянь, через яку виражають такі оцінки. Доводиться, що наближені оцінки збігаються до гарантованих. Одержані результати застосовуються у випадку, коли варіаційне рівняння породжене крайовою задачею для стаціонарного рівняння переносу з дифузії з правою частиною, що є розв'язком лінеаризованого стаціонарного рівняння Нав'є-Стокса в умовах невизначеності. КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінійний функціонал, варіаційне рівняння, спостереження, середньоквадратична оцінка.

INTRODUCTION

The problems of optimal estimation of solutions to BVPs for partial differential equations with unknown parameters arise in geophysics, optics, acoustics, etc.

In order to reduce the estimation errors, the observation of their solutions in certain points or domains are needed.

Depending on assumptions regarding unknown parameters and observation errors, there is variety of approaches of solving such problems. In many cases these approaches are reduced to the estimation of solutions of variational equations in certain Hilbert spaces.

In the present paper we apply the guaranteed approach for finding linear mean square estimates of a solution to a system of variational equations in Hilbert spaces.

1. NOTATIONS

If X is a separable Hilbert space over $\mathbb{R}$ with inner product $(\cdot, \cdot)_X$ and norm $\|\cdot\|_X$, then by $J_X \in \mathcal{L}(X, X')$ we will denote an operator, called a canonical isomorphism from X onto dual space X' , and defined by the equality $(v, u)_X = \langle v, J_X u \rangle_{X \times X'} \quad \forall u, v \in X$, where $\langle x, f \rangle_{X \times X'} := f(x)$ for $x \in X$, $f \in X'$, and $\mathcal{L}(X, Y)$ is the set of bounded linear operators mapping X into a Hilbert space Y .

Let D be an open bounded set in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitzian boundary Γ . Let $\mathcal{D}(D)$ (or $\mathcal{D}(\bar{D})$) be the space of infinitely differential functions with compact support contained in D (or $\bar{D}$). A continuous linear form on $\mathcal{D}(D)$ is called a distribution on D . We denote by $\mathcal{D}'(D)$ the set of distributions on D . If $T \in \mathcal{D}'(D)$ we denote by $\langle T, \phi \rangle$ its value on the function $\phi \in \mathcal{D}(D)$.

If $T \in \mathcal{D}'(D)$ the derivative $D_i T = \frac{\partial T}{\partial x_i}$ which coincides with the usual differentiation of continuously differentiable functions, is defined by $\langle D_i T, \phi \rangle = - \langle T, D_i \phi \rangle$.

We denote by $L^2(D)$ the space of the real functions defined on D with the second power absolutely integrable for the Lebesgue measure

$dx_1 \dots dx_n$. This is a Hilbert space with the norm

$$\|u\|_{L^2(D)} = \left(\int_D |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

and inner product

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int_D u(x)v(x) dx.$$

The Sobolev space $H^1(D)$ is the space of functions in $L^2(D)$ with derivatives of order 1 also belonging to $L^2(D)$. This is a Hilbert space with the norm

$$\|u\|_{H^1(D)} = \left(\|u\|_{L^2(D)}^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}$$

and inner product

$$(u, v)_{H^1(D)} = (u, v)_{L^2(D)} + \sum_{j=1}^n (D_j u, D_j v)_{L^2(D)}.$$

The closure of $\mathcal{D}(D)$ in $H^1(D)$ is denoted by $H_0^1(D)$.

Denote by γ_0 a bounded linear operator, called the trace operator, which maps the space $H^1(D)$ into the space $L^2(\Gamma)$ such that $\gamma_0 u(x) = u(x)$ for $u \in \mathcal{D}(\bar{D})$. It is known that $H_0^1(D)$ is equal to the kernel of γ_0 , i. e. $H_0^1(D) = \{u \in H^1(D) : \gamma_0 u = 0\}$.

We will also use the notation $L^2(D)^n$, $H^1(D)^n$, $H_0^1(D)^n$, $\mathcal{D}(D)^n$ for the spaces consisting of vector functions $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ whose components belong to one of the spaces $L^2(D)$, $H^1(D)$, $H_0^1(D)$, $\mathcal{D}(D)$, respectively, with usual product norms and inner products (except $\mathcal{D}(D)^n$ or $\mathcal{D}(\bar{D})^n$ which are not normed spaces).

For every $v \in \mathcal{D}'(D)$ we put

$$\mathbf{grad} v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right),$$

which defines the linear differential operator denoted by $\mathbf{grad}$ from $\mathcal{D}'(D)$ to $\mathcal{D}'(D)^n$.

We define the linear differential operator denoted by $\mathbf{div}$ from $\mathcal{D}'(D)^n$ to $\mathcal{D}'(D)$ by

$$\mathbf{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{D}'(D)^n$$

and the Laplace operator Δ from $\mathcal{D}'(D)^n \rightarrow \mathcal{D}'(D)^n$ by

$$\Delta \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_i^2}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2} \right).$$

Set $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(D)^n, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$, $V = \text{closure of } \mathcal{V} \text{ in } H_0^1(D)^n$.

The space V is a Hilbert space with inner product

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^n (D_i \mathbf{u}, D_i \mathbf{v})_{L^2(D)^n}.$$

In [1] it is shown that $V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(D)^n, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$.

By $L^2(\Omega, X)$ we denote the Bochner space composed of random¹ variables $\xi = \xi(\omega)$ defined on a certain probability space $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ with values in X such that $\|\xi\|_{L^2(\Omega, X)}^2 = \int_{\Omega} \|\xi(\omega)\|_X^2 dP(\omega) < \infty$. In this case there exists the Bochner integral

$$\mathbb{E}\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega) \in X \quad (1)$$

which is called the mathematical expectation or the mean value of random element $\xi(\omega)$ and satisfies the condition

$$(h, \mathbb{E}\xi)_X = \int_{\Omega} (h, \xi(\omega))_X dP(\omega) \quad \forall h \in X. \quad (2)$$

Being applied to random variable ξ with values in $\mathbb{R}$ this expression leads to a usual definition of its mathematical expectation because the Bochner integral (1) reduces to a Lebesgue integral with probability measure $dP(\omega)$.

In $L^2(\Omega, X)$ one can introduce the inner product

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega, X)} := \int_{\Omega} (\xi(\omega), \eta(\omega))_X dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, X). \quad (3)$$

Applying the sign of the mathematical expectation, one can write relationships (1)–(3) as

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, X)}^2 = \mathbb{E}\|\xi(\omega)\|_X^2, \quad (4)$$

$$(h, \mathbb{E}\xi)_X = \mathbb{E}(h, \xi(\omega))_X \quad \forall h \in X, \quad (5)$$

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega, X)} := \mathbb{E}(\xi(\omega), \eta(\omega))_X \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, X). \quad (6)$$

$L^2(\Omega, X)$ equipped with norm (4) and inner product (6) is a Hilbert space.

2. STATEMENT OF ESTIMATION PROBLEM

Let V_1, V_2, H_1 , and H_2 be Hilbert spaces such that the following inclusions hold $V_1 \subset H_1$ and $V_2 \subset H_2$ with

$$\|\cdot\|_{H_1} \leq c_1 \|\cdot\|_{V_1} \quad \text{and} \quad \|\cdot\|_{H_2} \leq c_2 \|\cdot\|_{V_2}, \quad (7)$$

where c_1 and c_2 are positive constants.

¹Random variable ξ with values in Hilbert space X is considered as a function $\xi : \Omega \rightarrow X$ imaging random events $E \in \mathcal{B}$ to Borel sets in X (Borel σ -algebra in X is generated by open sets in X).

Consider the problem: given $f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2$, find $\varphi_1 \in V_1$, $\varphi_2 \in V_2$, such that

$$a_1(\varphi_1, \psi_1) = (B\varphi_2 + f_1, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (8)$$

$$a_2(\varphi_2, \psi_2) = (f_2, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2, \quad (9)$$

where $B \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. We make the following assumptions on the involved bilinear forms $a_1 : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ and $a_2 : V_2 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$a_1(\cdot, \cdot)$ and $a_2(\cdot, \cdot)$ are continuous, that is

$$\exists M_1 > 0 : \forall \sigma_1, \tau_1 \in V_1 \quad a_1(\sigma_1, \tau_1) \leq M_1 \|\sigma_1\|_{V_1} \|\tau_1\|_{V_1},$$

$$\exists M_2 > 0 : \forall \sigma_2, \tau_2 \in V_2 \quad a_2(\sigma_2, \tau_2) \leq M_2 \|\sigma_2\|_{V_2} \|\tau_2\|_{V_2}.$$

We also suppose that the following problems: given $g_i \in H_i$, find $\varphi_i \in V_i$ such that

$$a_i(\varphi_i, \psi_i) = (g_i, \psi_i)_{H_i} \quad \forall \psi_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

are well-posed. It follows from this assumptions that problem (8)–(9) is also well-posed.

We suppose that functions f_1 and f_2 in the right hand sides of equations (8) and (9) are not known exactly. The estimation problem consists in the following: from the observations

$$y = C\varphi_1 + \eta, \quad (11)$$

find optimal in a certain sense estimate of the functional

$$l(\varphi_1) = (l_0, \varphi_1)_{H_1} \quad (12)$$

in the class of estimates linear w.r.t. observations (11),

$$\widehat{l(\varphi_1)} = (y, u)_{H_0} + c \quad (13)$$

under the assumption that errors $\eta = \eta(\omega)$ in observations (11) are realizations of random variables defined on a certain probability space $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ with values in a Hilbert space H_0 over $\mathbb{R}$ belonging to the set G_0 , and $(f_1, f_2) \in G_1$. Here $C \in \mathcal{L}(H_1, H_0)$ is a linear continuous operator, $u \in H_0$, $c \in \mathbb{R}$,

$$G_1 := \{(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \in H_1 \times H_2 : (Q_1(\tilde{f}_1 - f_1^0), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (Q_2(\tilde{f}_2 - f_2^0), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} \leq 1\}, \quad (14)$$

$$G_0 := \{\tilde{\eta} \in L^2(\Omega, H_0) : \mathbb{E}\tilde{\eta} = 0, \mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \leq 1\}, \quad (15)$$

$l_0, f_1^0 \in H_1$, and $f_2^0 \in H_2$ are given elements, Q_1, Q_2 , and Q_0 are bounded selfadjoint positive definite operators in H_1, H_2 , and H_0 , respectively, for which there exist bounded inverse operators Q_1^{-1}, Q_2^{-1} , and Q_0^{-1} .

Definition 1. An estimate

$$\widehat{\widehat{l(\varphi_1)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c} \quad (16)$$

is called a minimax estimate of the $l(\varphi_1)$, if elements $\hat{u} \in H_0$ and a number $\hat{c}$ are determined from the condition

$$\inf_{u \in H_0, c \in \mathbb{R}} \sigma(u, c), \quad (17)$$

where $\sigma(u, c) := \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1, \tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E}[l(\tilde{\varphi}_1) - \widehat{l(\varphi_1)}]^2$, $\tilde{\varphi}_1$ is a solution to problem (8),(9) when $f_1(x) = \tilde{f}_1(x)$, $f_2(x) = \tilde{f}_2(x)$,

$$\widehat{l(\tilde{\varphi}_1)} = (\tilde{y}, u)_{H_0} + c, \quad (18)$$

and $\tilde{y} = C\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\eta}$. The quantity

$$\sigma = [\sigma(\hat{u}, \hat{c})]^{1/2} \quad (19)$$

is called the error of the minimax estimation of $l(\varphi_1)$.

Thus, the minimax estimate is an estimate minimizing the maximal mean-square estimation error calculated for the “worst” implementation of perturbations.

3. REPRESENTATION OF MINIMAX ESTIMATES AND ESTIMATION ERRORS

Introduce bilinear forms $a_i^*(\varphi_i, \psi_i)$ in $V_i \times V_i$, adjoint of $a_i(\varphi_i, \psi_i)$, by

$$a_i^*(\varphi_i, \psi_i) = a_i(\psi_i, \varphi_i) \quad \forall \varphi_i, \psi_i \in V_i \times V_i, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Let $z_1(u) \in V_1$ and $z_2(u) \in V_2$ be a unique solution of the problem

$$a_1^*(z_1(u), \psi_1) = (l_0 - C^* J_{H_0} u, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (21)$$

$$a_2^*(z_2(u), \psi_2) = (B^* z_1(u), \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2 \quad (22)$$

where $C^* : H'_0 \rightarrow H_1$ is an operator adjoint of C defined by

$$(p, C^* g)_{H_1} = (Cp, g)_{H_0 \times H'_0} \quad \forall p \in H_1, g \in H'_0$$

and $B^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ is a linear operator adjoint of B .²

Then the following result holds.

Lemma 1. *The problem of minimax estimation of the functional $l(\varphi_1)$ (i.e. the determination of $\hat{u}$ and $\hat{c}$) is equivalent to the problem of optimal control of the system described by equations (21) – (22) with a cost*

²It is easy to see that, owing to our restrictions on the bilinear forms $a_1(\cdot, \cdot)$ and $a_2(\cdot, \cdot)$, and on the operator B , problem (21)–(22) is well-posed and, in particular, the following inequality holds

$$\|\tilde{z}_1(u)\|_{V_1} + \|\tilde{z}_2(u)\|_{V_2} \leq c_3 \|u\|_{H_0}, \quad (23)$$

where $(\tilde{z}_1(u), \tilde{z}_2(u))$ is a solution of problem (21)–(22) at $l_0 = 0$, $c_3 = \text{const} > 0$.

function

$$I(u) = (Q_1^{-1}z_1(u), z_1(u))_{H_1} + (Q_2^{-1}z_2(u), z_2(u))_{H_2} + (Q_0^{-1}u, u)_{H_0} \rightarrow \inf_{u \in H_0}. \quad (24)$$

Proof. From (71), we have

$$\begin{aligned} l(\tilde{\varphi}_1) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_1)} &= (l_0, \tilde{\varphi}_1)_{H_1} - (C\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \\ &= (l_0, \tilde{\varphi}_1)_{H_1} - \langle C\tilde{\varphi}_1, J_{H_0}u \rangle_{H_0 \times H'_0} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \\ &= (l_0 - C^*J_{H_0}u, \tilde{\varphi}_1)_{H_1} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c. \end{aligned} \quad (25)$$

Transform the first term in the r.h.s. Make use of equalities (21)–(22) and (8)–(9) at $f_1 = \tilde{f}_1$ and $f_2 = \tilde{f}_2$ to obtain

$$\begin{aligned} (l_0 - C^*J_{H_0}u, \tilde{\varphi}_1)_{H_1} &= a_1^*(z_1(u), \tilde{\varphi}_1) = a_1(\tilde{\varphi}_1, z_1(u)) = (B\tilde{\varphi}_2 + f_1, z_1(u))_{H_1} \\ &= (f_1, z_1(u))_{H_1} + (B\tilde{\varphi}_2, z_1(u))_{H_1} = (\tilde{f}_1, z_1(u))_{H_1} + (\tilde{f}_2, z_2(u))_{H_2}. \\ &= (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

From (25)–(26) it follows that

$$\begin{aligned} l(\tilde{\varphi}_1) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_1)} &= (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} \\ &+ (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c. \end{aligned} \quad (27)$$

Taking into consideration the relationship $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ that couples dispersion $\mathbb{D}\xi$ of the random variable ξ and its expectation $\mathbb{E}\xi$ and equality (5), we obtain from the last formulas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| l(\tilde{\varphi}_1) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_1)} \right|^2 &= \left| (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} \right. \\ &\left. + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \right|^2 + \mathbb{E} |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} &\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1, \tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E} |l(\tilde{\varphi}_1) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_1)}|^2 \\ &= \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1} \left| (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} \right. \\ &\quad \left. + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \right|^2 \\ &\quad + \sup_{\tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E} |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

In order to calculate the first term on the right-hand side of (29) make use of the generalized Cauchy–Bunyakovsky inequality and (14). We have

$$\begin{aligned}
 & \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1} \left| (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} \right. \\
 & \quad \left. + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \right|^2 \\
 & \leq \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1} \left[(Q_1^{-1} z_1(u), z_1(u))_{H_1} + (Q_2^{-1} z_2(u), z_2(u))_{H_2} \right] \\
 & \quad \times [(Q_1(\tilde{f}_1 - f_1^0), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (Q_2(\tilde{f}_2 - f_2^0), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2}] \\
 & \leq (Q_1^{-1} z_1(u), z_1(u))_{H_1} + (Q_2^{-1} z_2(u), z_2(u))_{H_2}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

The direct substitution shows that that inequality (30) is transformed to an equality on the element $\tilde{f}^{(0)} = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)})$, where

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_1^{(0)} &:= \frac{1}{d} Q_1^{-1} z_1(x; u) + f_1^0, \\
 \tilde{f}_2^{(0)} &:= \frac{1}{d} Q_2^{-1} z_2(x; u) + f_2^0, \\
 d &= [(Q_1^{-1} z_1(u), z_1(u))_{H_1} + (Q_2^{-1} z_2(u), z_2(u))_{H_2}]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 & \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}=(f_1, f_2) \in G_1} \left| (z_1(u), \tilde{f}_1 - f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), \tilde{f}_2 - f_2^0)_{H_2} \right. \\
 & \quad \left. + (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2} - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c \right|^2 \\
 & = (Q_1^{-1} z_1(u), z_1(u))_{H_1} + (Q_2^{-1} z_2(u), z_2(u))_{H_2} \tag{31}
 \end{aligned}$$

with

$$c = (z_1(u), f_1^0)_{H_1} + (z_2(u), f_2^0)_{H_2}.$$

In order to calculate the second term on the right-hand side of (29), note that the Cauchy–Bunyakovsky inequality and (15) yield

$$\sup_{\tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E} |(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_0}|^2 \leq (Q_0^{-1} u, u)_{H_0}. \tag{32}$$

It is easy to see that (32) becomes an equality at

$$\tilde{\eta}^{(0)} = \frac{\nu Q^{-1} u}{\{(Q_0^{-1} u, u)_{H_0}\}^{1/2}}$$

and ν is random variable with $\mathbb{E}\nu = 0$ and $\mathbb{E}|\nu|^2 = 1$. Therefore

$$\sup_{\tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E} |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2 = (Q_0^{-1} u, u)_{H_0}, \tag{33}$$

which proves the required assertion. The validity of Lemma 2.2 follows now from relationships (29), (31), and (33). $\square$

Theorem 1. *The minimax estimate of the functional $l(\varphi_1)$ has the form*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi_1)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c}, \quad (34)$$

where

$$\hat{c} = (\hat{z}_1, f_1^0)_{H_1} + (\hat{z}_2, f_2^0)_{H_2}, \quad \hat{u} = Q_0 C p_1, \quad (35)$$

and the elements $\hat{z}_1, p_1 \in V_1$ and $\hat{z}_2 \in V_2$ are determined from solution of the following uniquely solvable problem:

$$a_1^*(\hat{z}_1, \psi_1) = (l_0 - C^* J_{H_0} Q_0 C p_1, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (36)$$

$$a_2^*(\hat{z}_2, \psi_2) = (B^* \hat{z}_1, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2 \quad (37)$$

$$a_1(p_1, \psi_1) = (Q_1^{-1} \hat{z}_1 + B p_2, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (38)$$

$$a_2(p_2, \psi_2) = (Q_2^{-1} \hat{z}_2, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2. \quad (39)$$

Here $p_2 \in V_2$.

The error of estimation σ is given by an expression

$$\sigma = (l(p_1))^{1/2}. \quad (40)$$

Proof. Taking into account the inequalities (7) and (23), one can easily verify that $I(u)$ is a strictly convex lower semicontinuous functional on H_0 . Also

$$I(u) \geq (Q_0^{-1} u, u)_{H_0} \geq c \|u\|_{H_0}^2 \quad \forall u \in H_0, \quad c = \text{const}. \quad (41)$$

Then, by Theorem 1.1 (see [2]), there exists one and only one element $\hat{u} \in H_0$ such that $I(\hat{u}) = \inf_{u \in H_0} I(u)$.

Therefore, for any $\tau \in \mathbb{R}$ and $v \in H_0$, the following relation is valid

$$\left. \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau v) \right|_{\tau=0} = 0, \quad (42)$$

Since $z_1(\hat{u} + \tau v) = z_1(\hat{u}) + \tau \tilde{z}_1(v)$, $z_2(\hat{u} + \tau v) = z_2(\hat{u}) + \tau \tilde{z}_2(v)$, where $(\tilde{z}_1(v), \tilde{z}_2(v))$ is the unique solution to (21)–(22) at $u = v$ and $l = 0$, the relation (42) yields

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau v) \Big|_{\tau=0} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \left\{ \left[(Q_1^{-1} z_1(\hat{u} + \tau v), z_1(\hat{u} + \tau v))_{H_1} - (Q_1^{-1} z_1(\hat{u}), z_1(\hat{u}))_{H_1} \right] \right. \\ &\quad \left[(Q_2^{-1} z_2(\hat{u} + \tau v), z_2(\hat{u} + \tau v))_{H_2} - (Q_2^{-1} z_2(\hat{u}), z_2(\hat{u}))_{H_2} \right] + \\ &\quad \left. + \left[(Q_0^{-1}(\hat{u} + \tau v), \hat{u} + \tau v)_{H_0} - (Q_0^{-1} \hat{u}, \hat{u})_{H_0} \right] \right\} \\ &= (Q_1^{-1} z_1(\hat{u}), \tilde{z}_1(v))_{H_1} + (Q_2^{-1} z_2(\hat{u}), \tilde{z}_2(v))_{H_2} + (Q_0^{-1} \hat{u}, v)_{H_0}. \end{aligned} \quad (43)$$

Introduce functions $p_1 \in V_1$ and $p_2 \in V_2$ as the unique solution of the problem

$$a_1(p_1, \psi_1) = (Q_1^{-1} z_1(\hat{u}) + B p_2, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (44)$$

$$a_2(p_2, \psi_2) = (Q_2^{-1}z_2(\hat{u}), \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2. \quad (45)$$

Then from (43) we obtain

$$\begin{aligned} & (Q_1^{-1}z_1(\hat{u}), \tilde{z}_1(v))_{H_1} + (Q_2^{-1}z_2(\hat{u}), \tilde{z}_2(v))_{H_2} + (Q_0^{-1}\hat{u}, v)_{H_0} \\ &= a_1(p_1, \tilde{z}_1(v)) - (Bp_2, \tilde{z}_1(v)) + a_2(p_2, \tilde{z}_2(v)) + (Q_0^{-1}\hat{u}, v)_{H_0} \\ &= a_1^*(\tilde{z}_1(v), p_1) - (Bp_2, \tilde{z}_1(v))_{H_1} + a_2^*(\tilde{z}_2(v), p_2) + (Q_0^{-1}\hat{u}, v)_{H_0} \\ &= -(p_1, C^*J_H v)_{H_1} - (Bp_2, \tilde{z}_1(v))_{H_1} + (p_2, B^*\tilde{z}_1(v))_{H_2} + (Q_0^{-1}\hat{u}, v)_{H_0} \\ &= -(Cp_1, v)_{H_1} + (Q_0^{-1}\hat{u}, v)_{H_0} = 0. \end{aligned}$$

Hence $\hat{u} = Q_0 Cp_1$.

Now let us establish the validity of formula (40). From (24) at $u = \hat{u}$ and (35), it follows

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= I(\hat{u}) = (Q_1^{-1}\hat{z}_1, \hat{z}_1)_{H_1} + (Q_2^{-1}\hat{z}_2, \hat{z}_2)_{H_2} + (Q_0^{-1}\hat{u}, \hat{u})_{H_0} \\ &= (Q_1^{-1}\hat{z}_1, \hat{z}_1)_{H_1} + (Q_2^{-1}\hat{z}_2, \hat{z}_2)_{H_2} + (Cp_1, Q_0 Cp_1)_{H_0}. \end{aligned}$$

Transform the sum of the first and the second terms in the r.h.s. of the last relation. Make use of equality (38) to obtain

$$\begin{aligned} & (Q_1^{-1}\hat{z}_1, \hat{z}_1)_{H_1} + (Q_2^{-1}\hat{z}_2, \hat{z}_2)_{H_2} = (A_1 p_1 - Bp_2, \hat{z}_1)_{H_1} + (A_2 p_2, \hat{z}_2)_{H_2} \\ &= a_1(p_1, \hat{z}_1) - (p_2, B^*\hat{z}_1)_{H_2} + a_2(p_2, \hat{z}_2) \\ &= (p_1, l_0 - C^*J_{H_0}Q_0 Cp_1)_{H_1} = (l_0, p_1)_{H_1} - (Cp_1, Q_0 Cp_1)_{H_0}. \end{aligned}$$

From the latter relations it follows that $\sigma^2 = l(p_1)$. $\square$

Obtain now another representation for the minimax mean square estimate of quantity $l(\varphi_1)$ which is independent of l . To this end, introduce vector-functions $\hat{p}_1, \hat{\varphi}_1 \in V_1, \hat{p}_2, \hat{\varphi}_2 \in V_2$ as a solution to the problem

$$a_1^*(\hat{p}_1, \psi_1) = (C^*J_{H_0}Q_0(y - C\hat{\varphi}_1), \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (46)$$

$$a_2^*(\hat{p}_2, \psi_2) = (B^*\hat{p}_1, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2, \quad (47)$$

$$a_1(\hat{\varphi}_1, \psi_1) = (Q_1^{-1}\hat{p}_1 + B\hat{\varphi}_2 + f_1^0, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1, \quad (48)$$

$$a_2(\hat{\varphi}_2, \psi_2) = (Q_2^{-1}\hat{p}_2 + f_2^0, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2. \quad (49)$$

at realizations y that belong with probability 1 to space H .

Note that unique solvability of problem (46)–(49) at every realization can be proved similarly to the case of (36)–(39). Namely, setting $d = C^*J_{H_0}Q_0 y$, one can show that solutions to the problem of optimal control of the system

$$a_1^*(\hat{p}_1(v), \psi_1) = (d - C^*J_{H_0}v, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1$$

$$a_2^*(\hat{p}_2(v), \psi_2) = (B^*\hat{p}_1(v), \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2$$

with the cost function

$$\begin{aligned} \tilde{I}(v) &= (Q_1^{-1}(\hat{p}_1(v) - Q_1 f_1^0), \hat{p}_1(v) - Q_1 f_1^0)_{H_1} \\ &+ (Q_2^{-1}(\hat{p}_2(v) - Q_2 f_2^0), \hat{p}_2(v) - Q_2 f_2^0)_{H_2} + (Q_0^{-1}v, v)_{H_0} \rightarrow \inf_{v \in H_0} \end{aligned}$$

can be reduced to the solution of problem (46)–(49), where the optimal control $\hat{v}$ is expressed via solution to this problem as $v = Q_0 C \hat{\varphi}_1$; the unique solvability of the problem follows from the existence of the unique minimum point $\hat{v}$ of functional $\hat{I}(v)$.

Theorem 2. *The minimax estimate $\widehat{l(\varphi_1)}$ of the functional $l(\varphi_1)$ has the form*

$$\widehat{l(\varphi_1)} = l(\hat{\varphi}_1), \quad (50)$$

where element $\hat{\varphi}_1 \in V_1$ is determined from the solution to the problem (46)–(49). The random fields $\hat{p}_1$, $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{p}_2$, $\hat{\varphi}_2$, whose realizations satisfy problem (46)–(49), belong to the space $L^2(\Omega, V_1)$ and $L^2(\Omega, V_2)$, respectively.

Proof. By virtue of (35), (46)–(49), and (36)–(39),

$$\begin{aligned} \widehat{l(\varphi_1)} &= (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c} = (y, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} = \\ &= (C^* J_{H_0} Q_0 y, p_1)_{H_1} + \hat{c} = a_1^*(\hat{p}_1, p_1) + C^* J_{H_0} Q_0 C \hat{\varphi}_1, p_1)_{H_1} + \hat{c} \\ &= a_1(p_1, \hat{p}_1) + (C^* J_{H_0} Q_0 C \hat{\varphi}_1, p_1)_{H_1} + \hat{c} \\ &= (Q_1^{-1} \hat{z}_1 + B p_2, \hat{p}_1)_{H_1} + (C \hat{\varphi}_1, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} \\ &= (Q_1^{-1} \hat{p}_1, \hat{z}_1)_{H_1} + (B^* \hat{p}_1, p_2)_{H_2} + (C \hat{\varphi}_1, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} \\ &= a_1(\hat{\varphi}_1, \hat{z}_1) - (B \hat{\varphi}_2, \hat{z}_1)_{H_1} - (f_1^0, \hat{z}_1)_{H_1} + a_2^*(\hat{p}_2, p_2) + (C \hat{\varphi}_1, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} \\ &= a_1^*(\hat{z}_1, \hat{\varphi}_1) - (\hat{\varphi}_2, B^* \hat{z}_1)_{H_2} - (f_1^0, \hat{z}_1)_{H_1} + a_2(p_2, \hat{p}_2) + (C \hat{\varphi}_1, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} \\ &= (l_0 - C^* J_{H_0} Q_0 C p_1, \hat{\varphi}_1)_{H_1} - a_2^*(\hat{z}_2, \hat{\varphi}_2) \\ &\quad - (f_1^0, \hat{z}_1)_{H_1} + a_2(p_2, \hat{p}_2) + (C \hat{\varphi}_1, Q_0 C p_1)_{H_0} + \hat{c} \\ &= (l_0, \hat{\varphi}_1)_{H_1} - a_2(\hat{\varphi}_2, \hat{z}_2) - (f_1^0, \hat{z}_1)_{H_1} + (Q_2^{-1} \hat{z}_2, \hat{p}_2)_{H_2} + \hat{c} \\ &= (l_0, \hat{\varphi}_1)_{H_1} - (Q_2^{-1} \hat{p}_2, \hat{z}_2)_{H_2} - (f_2^0, \hat{z}_2)_{H_2} - (f_1^0, \hat{z}_1)_{H_1} + (Q_2^{-1} \hat{z}_2, \hat{p}_2)_{H_2} + \hat{c} \\ &= (l_0, \hat{\varphi}_1)_{H_1} = l(\hat{\varphi}_1). \quad \square \end{aligned}$$

4. NUMERICAL ASPECTS

Using the Galerkin method for solving the aforementioned equations, we obtain approximate estimates via solutions of linear algebraic equations and show their convergence to the optimal estimates.

Introduce a sequence of finite-dimensional subspaces V^h in V , defined by an infinite set of parameters $h_1, h_2, \dots$ with $\lim_{k \rightarrow 0} h_k = 0$.

We say that sequence $\{V^h\}$ is complete in V , if for any $\varphi \in V$ and $\epsilon > 0$ there exists an $\hat{h} = \hat{h}(\varphi, \epsilon) > 0$ such that $\inf_{\psi \in V^h} \|\varphi - \psi\|_V < \epsilon$ for any $h < \hat{h}$. In other words, the completeness of sequence $\{V^h\}$ means that any element $\varphi \in V$ may be approximated with any degree of accuracy by elements of $\{V^h\}$.

Take an approximate minimax estimate of $l(\varphi_1)$ as

$$\widehat{l^h(\varphi_1)} = (y, \hat{u}^h)_{H_0} + \hat{c}^h,$$

where

$$\hat{c} = (\hat{z}_1^h, f_1^0)_{H_1} + (\hat{z}_2^h, f_2^0)_{H_2}, \quad \hat{u}^h = Q_0 C p_1^h,$$

and elements $\hat{z}_1^h, p_1^h \in V_1^h$, $\hat{z}_2^h \in V_2^h$ are determined from the following uniquely solvable system of variational equalities

$$a_1^*(\hat{z}_1^h, \psi_1) = (l_0 - C^* J_{H_0} Q_0 C p_1^h, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1^h, \quad (51)$$

$$a_2^*(\hat{z}_2^h, \psi_2) = (B^* \hat{z}_1^h, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2^h \quad (52)$$

$$a_1(p_1^h, \psi_1) = (Q_1^{-1} \hat{z}_1^h + B p_2^h, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1^h, \quad (53)$$

$$a_2(p_2^h, \psi_2) = (Q_2^{-1} \hat{z}_2^h, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2^h, \quad (54)$$

where $p_2^h \in V_2^h$. Then the following results hold.

Theorem 3. *Approximate minimax estimate of $\widehat{l^h(\varphi_1)}$ of $l(\varphi_1)$ tends to a minimax estimate $\widehat{l(\varphi_1)}$ of this expression as $h \rightarrow 0$ in the sense that*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} |\widehat{l^h(\varphi_1)} - \widehat{l(\varphi_1)}|^2 = 0, \quad (55)$$

and

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} |\widehat{l^h(\varphi_1)} - l(\varphi_1)|^2 = \mathbb{E} |\widehat{l(\varphi_1)} - l(\varphi_1)|^2. \quad (56)$$

Let us formulate a similar result in the case when an estimate of the state φ_1 is directly determined from the solution to problem (46)–(49).

Theorem 4. *Let $\hat{\varphi}_1^h \in V_1^h$ and $\hat{\varphi}_2^h \in V_2^h$ be an approximate estimates of the functions $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\varphi}_2$, respectively, which are determined from the solution to the variational problem*

$$a_1^*(\hat{p}_1^h, \psi_1) = (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C \hat{\varphi}_1^h), \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1^h, \quad (57)$$

$$a_2^*(\hat{p}_2^h, \psi_2) = (B^* \hat{p}_1^h, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2^h, \quad (58)$$

$$a_1(\hat{\varphi}_1^h, \psi_1) = (Q_1^{-1} \hat{p}_1^h + B \hat{\varphi}_2^h + f_1^0, \psi_1)_{H_1} \quad \forall \psi_1 \in V_1^h, \quad (59)$$

$$a_2(\hat{\varphi}_2^h, \psi_2) = (Q_2^{-1} \hat{p}_2^h + f_2^0, \psi_2)_{H_2} \quad \forall \psi_2 \in V_2^h, \quad (60)$$

where $\hat{p}_1^h \in V_1^h$ and $\hat{p}_2^h \in V_2^h$.

Then

$$\|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_1^h\|_{V_1} + \|\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_2^h\|_{V_2} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

The proofs of Theorem 3 and Theorem 4 are similary to the proof of Theorem 1.3 from [4].

The problem of finding $\hat{z}_1^h, p_1^h \in V_1^h$ and $\hat{z}_2^h, p_2^h \in V_2^h$ from (51)–(54) is equivalent to determination of coefficients in their expansions by basis elements of the spaces V_1^h and V_2^h from the corresponding system of linear algebraic equations.

Introducing the bases in the spaces V_1^h and V_2^h , problem (51)–(54) can be rewritten as a system of liner algebraic equations. To do this, let us denote the elements of the basis in V_1^h by ξ_i^1 ($i_1 = 1, \dots, N_1$) and in V_2^h by ξ_i^2 ($i_2 = 1, \dots, N_2$), where $N_1 = \dim V_1^h$, $N_2 = \dim V_2^h$. The fact that $\hat{z}_1^h, p_1^h$, and $\hat{z}_2^h, p_2^h$, belong to the spaces V_1^h and V_2^h , respectively, means the existence of constants $\hat{z}_{i_1}^1, p_{i_1}^1$ and $\hat{z}_{i_2}^2, p_{i_2}^2$ such that

$$\hat{z}_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{z}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad p_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} p_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{z}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{z}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad p_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} p_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2. \quad (61)$$

Setting in (51)–(54) $\psi_1 = \xi_{j_1}^1$ ($j_1 = 1, \dots, N_1$) and $\psi_2 = \xi_{j_2}^1$ ($j_2 = 1, \dots, N_2$), we obtain that finding $\hat{z}_1^h, p_1^h, \hat{z}_2^h, p_2^h$ is equivalent to solving the following system of linear algebraic equations with respect to coefficients $\hat{z}_{i_1}^1, p_{i_1}^1, \hat{z}_{i_2}^2, p_{i_2}^2$ ($i_1 = 1, \dots, N_1, i_2 = 1, \dots, N_2$) of expansions (61):

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{j_1 i_1}^1 \hat{z}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} b_{i_1 j_1} p_{i_1}^1 &= g_{j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{j_2 i_2}^2 \hat{z}_{i_2}^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1} c_{i_1 j_1} \hat{z}_{i_1}^1 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1 j_1}^1 p_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} d_{i_1 j_1} \hat{z}_{i_1}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} e_{i_2 j_1} p_{i_2}^2 &= 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2 j_2}^2 p_{i_2}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} h_{i_2 j_1} \hat{z}_{i_2}^2 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} a_{i_1 j_1}^1 &= a_1(\xi_{i_1}^1, \xi_{j_1}^1), \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \\ a_{i_2 j_2}^2 &= a_2(\xi_{i_2}^2, \xi_{j_2}^2), \quad i_2, j_2 = 1, \dots, N_2, \\ b_{i_1 j_1} &= (C^* J_{H_0} Q_0 C \xi_{i_1}^1, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \\ c_{i_1 j_2} &= -(B^* \xi_{i_1}^1, \xi_{j_2}^2)_{H_2}, \quad i_1 = 1, \dots, N_1, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ d_{i_1 j_1} &= -(Q_1^{-1} \xi_{i_1}^1, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \\ e_{i_2 j_1} &= -(B \xi_{i_2}^2, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad i_2 = 1, \dots, N_2, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ h_{i_2 j_2} &= -(Q_2^{-1} \xi_{i_2}^2, \xi_{j_2}^2)_{H_2}, \quad i_2, j_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

and

$$g_{j_1} = (l_0, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1.$$

Analogously, representing the elements $\hat{p}_1^h, \hat{\varphi}_1^h, \hat{p}_2^h, \hat{\varphi}_2^h$ as

$$\hat{p}_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{p}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{\varphi}_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{\varphi}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{p}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{p}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad \hat{\varphi}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{\varphi}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad (62)$$

we rewrite problem (57)–(60) as the following system of linear algebraic equations with respect to the coefficients $\hat{p}_{i_1}^1, \hat{\varphi}_{i_1}^1, \hat{p}_{i_2}^2, \hat{\varphi}_{i_2}^2$ of the expansions (62):

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{j_1 i_1}^1 \hat{p}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} b_{i_1 j_1} \hat{\varphi}_{i_1}^1 &= \tilde{g}_{j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{j_2 i_2}^2 \hat{p}_{i_2}^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1} c_{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1}^1 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1 j_1}^1 \hat{\varphi}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} d_{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} e_{i_2 j_1} \hat{\varphi}_{i_2}^2 &= q_{j_1}^1, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2 j_2}^2 \hat{\varphi}_{i_2}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} h_{i_2 j_1} \hat{p}_{i_2}^2 &= q_{j_2}^2, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

where

$$q_{j_1}^1 = (f_1^0, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \quad q_{j_2}^1 = (f_2^0, \xi_{j_2}^2)_{H_2}, \quad j_2 = 1, \dots, N_2,$$

$$\tilde{g}_{j_1} = (C^* J_{H_0} Q_0 y, \xi_{j_1}^1)_{H_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1.$$

5. COROLLARY FROM THE OBTAINED RESULTS

Setting in (8)–(9) $H_1 = L^2(D)$, $V_1 = H_0^1(D)$, $H_2 = L^2(D)^n$, $V_2 = V$, $\varphi_1 = T$, $\psi_1 = \psi \in H_0^1(D)$, $\varphi_2 = \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\psi_2 = \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in V$, $f_1 = f \in L^2(D)$, $f_2 = \mathbf{f} \in L^2(D)^n$,

$$\begin{aligned} a_1(\varphi_1, \psi_1) &= a_1(T, \psi) \\ &= \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} \psi + \rho(x) T \psi \right) dx \quad \forall \psi \in H_0^1(D), \end{aligned}$$

$$a_2(\varphi_2, \psi_2) = a_2(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \nu((\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

$$B : L^2(D)^n \rightarrow L^2(D), \quad B\varphi_2 = B\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i(x) g_i(x),$$

where $\rho(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$, and $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1(x), \dots, \bar{v}_n(x))$ are given bounded measurable functions in D , $\nu = \text{const} > 0$,³ we arrive at the estimation problem of the form: given

$$(f, \mathbf{f}) \in G_1, \quad y = CT + \eta, \quad (64)$$

where observation error η in (64) is a realization of stochastic process belonging to G_0 , find the minimax estimate of the quantity

$$l(T) = \int_D l_0(x) T(x) dx, \quad (65)$$

where function $T \in H_0^1(D)$ satisfies to the following uniquely solvable variational problem:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} \psi + \rho(x) T \psi \right) dx \\ = \int_D \left(f(x) + \sum_{i=1}^n v_i(x) g_i(x) \right) \psi(x) dx \quad \forall \psi \in H_0^1(D), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\nu((\mathbf{v}, \mathbf{u})) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_{L^2(D)^n} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (67)$$

Here $l_0 \in L^2(D)$ is a prescribed function, $\mathbf{v} \in V$,

$$\begin{aligned} G_1 := \{(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{f}}) : \tilde{f} \in L^2(D), \tilde{\mathbf{f}} \in L^2(D)^n, \\ (Q_1(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0)_{L^2(D)} + (Q_2(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_0), \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_0)_{L^2(D)^n} \leq 1\} \end{aligned} \quad (68)$$

$f_0 \in L^2(D)$ and $\mathbf{f}_0 = (f_{01}, \dots, f_{0n}) \in L^2(D)^n$ are given functions, Q_1 and Q_2 are bounded selfadjoint positive definite operators in $L^2(D)^n$ and $L^2(D)$, respectively, for which there exist bounded inverse operators Q_1^{-1} and Q_2^{-1} .

Definition 1 of the the minimax estimate transforms in the considered case as follows:

³the bilinear form $a_1(T, \psi)$ is supposed to be such that homogeneous variational problem

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} \psi + \rho(x) T \psi \right) dx = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(D)$$

has only the trivial solution $T = 0$. From this suggestion it follows (see [1]) that nonhomogeneous variational problem

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} \psi + \rho(x) T \psi \right) dx = \int_D g \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(D) \quad (63)$$

has a unique solution $T \in H_0^1(D)$ for any function $g \in L^2(D)$. Sufficient conditions for uniqueness, and hence solvability, of the problem (63) are given by Theorem 2.1 in [3].

An estimate

$$\widehat{\widehat{l(T)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c} \quad (69)$$

is called a minimax estimate of the $l(T)$, if elements $\hat{u} \in H_0$ and a number $\hat{c}$ are determined from the condition

$$\inf_{u \in H_0, c \in \mathbb{R}} \sigma(u, c), \quad (70)$$

where

$$\sigma(u, c) := \sup_{\tilde{f}=(f, \mathbf{f}) \in G_1, \tilde{\eta} \in G_0} \mathbb{E}[l(\tilde{T}) - \widehat{l(\tilde{T})}]^2,$$

$\tilde{T}$ is a solution to problem (3)–(67) when $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\mathbf{f}(x) = \tilde{\mathbf{f}}(x)$,

$$\widehat{l(\tilde{T})} = (\tilde{y}, u)_{H_0} + c, \quad (71)$$

and

$$\tilde{y} = C\tilde{T} + \tilde{\eta}.$$

The quantity

$$\sigma = [\sigma(\hat{u}, \hat{c})]^{1/2} \quad (72)$$

is called the error of the minimax estimation of $l(T)$.

Reasoning as in the proof of Lemma 2.1 from [1], we can prove that problem (66)–(67) is equivalent to the following system of heat and Stokes equations:⁴

$$-\Delta T + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho(x)T = (\mathbf{v}(x), \mathbf{g}(x))_{\mathbb{R}^n} + f(x) \quad \text{in } D, \quad (73)$$

$$T = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (74)$$

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} \quad \text{in } D, \quad (75)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } D, \quad (76)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (77)$$

in the sense that if T and $\mathbf{v}$ satisfy (3)–(67) then they satisfy (73)–(77) and vice versa. Here by a solution of the system of equations (73)–(77) we mean a pair of functions $(T, \mathbf{v}) \in H_0^1(D) \times H_0^1(D)^n$ satisfying these equations in the following weak sense: there exists a unique (up to a constant) function $p \in L^2(D)$ such that $-\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f}$ in the distributive sense in D ; functions T and $\mathbf{v}$ satisfy (73) and (76) in the distributive sense in D ; boundary conditions (74) and (77) are understood as $\gamma_0 T = 0$ and $\gamma_0 \mathbf{v} = 0$.

⁴From physical point of view scalar functions T, p and vector-function $\mathbf{v}$ represent the temperature, the pressure, and the velocity of fluid, respectively, which are defined in the domain D and the positive constant ν is the coefficient of kinematic viscosity.

Taking into account the notations mentioned above, one can easily verify that the following assertions are direct consequences of the previous theorems.

Theorem 5. *The minimax estimate of the functional $l(T)$ has the form*

$$\widehat{\widehat{l(T)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c}, \quad (78)$$

where

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_1(x) f_0(x) dx + \int_D (\hat{\mathbf{z}}_2(x), \mathbf{f}_0(x))_{\mathbb{R}^n} dx, \quad \hat{u} = Q_0 C p_1, \quad (79)$$

and the functions $\hat{z}_1, p_1 \in H_0^1(D)$, and $\hat{\mathbf{z}}_2 = (\hat{z}_1^{(2)}, \dots, \hat{z}_n^{(2)}) \in V$ are determined from solution of the following uniquely solvable variational problem:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \hat{z}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \rho \hat{z}_1 \psi_1 \right) dx \\ = \int_D (l_0 - C^* J_{H_0} Q_0 C p_1) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in H_0^1(D), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{z}_1^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{z}_2^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{z}_n^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D \hat{z}_1 g_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V, \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \psi_1 + \rho p_1 \psi_1 \right) dx \\ = \int_D \left(Q_1^{-1} \hat{z}_1 + \sum_{i=1}^n p_i^{(2)} g_i \right) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in H_0^1(D), \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial p_n^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D (Q_2^{-1} \hat{\mathbf{z}}_2)_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V. \end{aligned} \quad (83)$$

Here $\mathbf{p}_2 = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}) \in V$.

Theorem 6. *The minimax estimate $\widehat{\widehat{l(T)}}$ of $l(T)$ has the form*

$$\widehat{\widehat{l(T)}} = l(\hat{T}), \quad (84)$$

where function $\hat{T} \in H_0^1(D)$ is determined from the solution to the problem

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \hat{p}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \rho \hat{p}_1 \psi_1 \right) dx \\ = \int_D C^* J_H Q(y - C\hat{T}) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in H_0^1(D), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{p}_1^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{p}_2^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{p}_n^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D \hat{p}_1 g_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V, \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \psi_1 + \rho \hat{T} \psi_1 \right) dx \\ = \int_D \left(Q_1^{-1} \hat{p}_1 + \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^{(2)} g_i + f_0 \right) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in H_0^1(D), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D ((Q_2^{-1} \hat{\mathbf{p}}_2)_i + f_{0i}) \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V. \end{aligned} \quad (88)$$

Here $\hat{p}_1 \in H_0^1(D)$ $\hat{\mathbf{p}}_2 = (\hat{p}_1^{(2)}, \dots, \hat{p}_n^{(2)}) \in V$, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) \in V$.

If we put approximate minimax estimate of $l(T)$ as

$$\widehat{l^h(T)} = (y, \hat{u}^h)_{H_0} + \hat{c}^h,$$

where

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_1^h f_0 dx + \sum_{i=1}^n \int_D \hat{z}_{2,i}^h f_{0i} dx, \quad \hat{u}^h = Q C p_1^h,$$

and elements $\hat{z}_1^h, p_1^h \in \{H_0^1(D)\}^h$, $\hat{\mathbf{z}}_2^h = (\hat{z}_{2,1}^h, \dots, \hat{z}_{2,n}^h) \in V^h$ are determined from the following uniquely solvable system of variational equalities:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{z}_1^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \hat{z}_1^h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \rho \hat{z}_1^h \psi_1 \right) dx \\ = \int_D (l_0 - C^* J_H Q C p_1^h) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in \{H_0^1(D)\}^h, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{z}_{2,1}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{z}_{2,2}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{z}_{2,n}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D \hat{z}_1^h g_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V^h, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_1^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial p_1^h}{\partial x_i} \psi_1 + \rho p_1^h \psi_1 \right) dx \\ = \int_D \left(Q_1^{-1} \hat{z}_1^h + \sum_{i=1}^n p_i^{(2)h} g_i \right) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in \{H_0^1(D)\}^h, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial p_{2,1}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{2,2}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial p_{2,n}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D (Q_2^{-1} \hat{z}_2^h)_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V^h. \end{aligned} \quad (92)$$

where $\mathbf{p}_2^h = (p_{2,1}^h, \dots, p_{2,n}^h) \in V^h$ then the following result is valid.

Theorem 7. *Approximate minimax estimate of $\widehat{l^h(T)}$ of $l(T)$ tends to a minimax estimate $\widehat{\widehat{l(T)}}$ of this expression as $h \rightarrow 0$ in the sense that*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} |\widehat{l^h(T)} - \widehat{\widehat{l(T)}}|^2 = 0, \quad (93)$$

and

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} |\widehat{l^h(T)} - l(T)|^2 = \mathbb{E} |\widehat{\widehat{l(T)}} - l(T)|^2. \quad (94)$$

Let us formulate a similar result in the case when an estimate of the state $(T, \mathbf{v})$ is directly determined from the solution to problem (85)–(88).

Theorem 8. Let $\hat{T}^h \in \{H_0^1(D)\}^h$ and $\hat{\mathbf{v}}^h = (\hat{v}_1^h, \dots, \hat{v}_n^h) \in V^h$ be an approximate estimates of the functions $\hat{T} \in H_0^1(D)$ and $\hat{\mathbf{v}} \in V$ determined from the solution to the variational problem

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{p}_1^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \hat{p}_1^h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \rho \hat{p}_1^h \psi_1 \right) dx \\ = \int_D C^* J_H Q(y - C\hat{T}^h) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in \{H_0^1(D)\}^h, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{p}_{2,1}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{p}_{2,2}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{p}_{2,n}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D \hat{p}_1^h g_i \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V^h, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{T}^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial \hat{T}^h}{\partial x_i} \psi_1 + \rho \hat{T}^h \psi_1 \right) dx \\ = \int_D \left(Q_1^{-1} \hat{p}_1^h + \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^h g_i + f_0 \right) \psi_1 dx \quad \forall \psi_1 \in \{H_0^1(D)\}^h, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \hat{v}_1^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{v}_2^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \hat{v}_n^h}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n^{(2)}}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^n \int_D ((Q_2^{-1} \hat{\mathbf{p}}_2^h)_i + f_{0,i}) \psi_i^{(2)} dx \quad \forall \psi_2 = (\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}) \in V^h. \end{aligned} \quad (98)$$

where $\hat{p}_1^h \in \{H_0^1(D)\}^h$ and $\hat{\mathbf{p}}_2^h = (\hat{p}_{2,1}^h, \dots, \hat{p}_{2,n}^h)$. Then

$$\|\hat{T} - \hat{T}^h\|_{H_0^1(D)} + \|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}^h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

Denoting the elements of the basis in $\{H_0^1(D)\}^h$ by $\xi_{i_1}^1$ ($i_1 = 1, \dots, N_1$) and in V^h by $\xi_{i_2}^2 = (\xi_{i_2,1}^2, \dots, \xi_{i_2,n}^2)$ ($i_2 = 1, \dots, N_2$), $N_1 = \dim \{H_0^1(D)\}^h$, $N_2 = \dim V^h$, respectively, we obtain the following expansions

$$\hat{z}_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{z}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad p_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} p_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{\mathbf{z}}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{z}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad \mathbf{p}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} p_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2.$$

and

$$\hat{p}_1^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{p}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{T}^h = \sum_{i_1=1}^{N_1} \hat{T}_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1, \quad \hat{\mathbf{p}}_2^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{p}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad \hat{\mathbf{v}}^h = \sum_{i_2=1}^{N_2} \hat{v}_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2.$$

for solutions of problems (89)–(92) and (95)–(98) in which constants $\hat{z}_{i_1}^1$, $p_{i_1}^1$, $\hat{z}_{i_2}^2$, $p_{i_2}^2$ and $\hat{p}_{i_1}^1$, $\hat{T}_{i_1}^1$, $\hat{p}_{i_2}^2$, $\hat{v}_{i_2}$ are found from systems of linear algebraic equations

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{j_1 i_1}^1 \hat{z}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} b_{i_1 j_1} p_{i_1}^1 &= g_{j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{j_2 i_2}^2 \hat{z}_{i_2}^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1} c_{i_1 j_1} \hat{z}_{i_1}^1 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1 j_1}^1 p_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} d_{i_1 j_1} \hat{z}_{i_1}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} e_{i_2 j_1} p_{i_2}^2 &= 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2 j_2}^2 p_{i_2}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} h_{i_2 j_1} \hat{z}_{i_2}^2 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{j_1 i_1}^1 \hat{p}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} b_{i_1 j_1} \hat{T}_{i_1}^1 &= \tilde{g}_{j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{j_2 i_2}^2 \hat{p}_{i_2}^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1} c_{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1}^1 &= 0, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1 j_1}^1 \hat{T}_{i_1}^1 + \sum_{i_1=1}^{N_1} d_{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} e_{i_2 j_1} \hat{v}_{i_2}^2 &= q_{j_1}^1, \quad j_1 = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2 j_2}^2 \hat{v}_{i_2}^2 + \sum_{i_2=1}^{N_2} h_{i_2 j_1} \hat{p}_{i_2}^2 &= q_{j_2}^2, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

respectively, where

$$\begin{aligned} a_{i_1 j_1}^1 &= \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_{i_1}^1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{j_1}^1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial \xi_{i_1}^1}{\partial x_i} \xi_{j_1}^1 + \rho \xi_{i_1}^1 \xi_{j_1}^1 \right) dx, \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \\ a_{i_2 j_2}^2 &= \nu \sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial \xi_{i_2,1}^2}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{j_2,1}^2}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_{i_2,2}^2}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{j_2,2}^2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \xi_{i_2,n}^2}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{j_2,n}^2}{\partial x_i} \right) dx, \quad i_2, j_2 = 1, \dots, N_2, \\ b_{i_1 j_1} &= \int_D C^* J_H Q C \xi_{i_1}^1(x) \xi_{j_1}^1(x) dx, \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \\ c_{i_1 j_2} &= - \sum_{i=1}^n \int_D g_i \xi_{i_1}^1 \xi_{j_2,i}^2 dx, \quad i_1 = 1, \dots, N_1, \quad j_2 = 1, \dots, N_2, \\ d_{i_1 j_1} &= - \int_D Q_1^{-1} \xi_{i_1}^1(x) \xi_{j_1}^1(x) dx, \quad i_1, j_1 = 1, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$e_{i_2 j_1} = - \sum_{i=1}^n \int_D \xi_{j_2, i}^2 g_i \xi_{j_1}^1 dx, \quad i_2 = 1, \dots, N_2, \quad j_1 = 1, \dots, N_1,$$

$$h_{i_2 j_2} = - \sum_{i=1}^n \int_D (Q_2^{-1} \xi_{i_2}^2)_i \xi_{j_2, i}^2 dx, \quad i_2, j_2 = 1, \dots, N_2,$$

and

$$g_{j_1} = \int_D l_0 \xi_{j_1}^1 dx, \quad j_1 = 1, \dots, N_1,$$

$$q_{j_1}^1 = \int_D f_0 \xi_{j_1}^1 dx, \quad j_1 = 1, \dots, N_1,$$

$$q_{j_2}^1 = \sum_{i=1}^n \int_D f_{0, i} \xi_{j_2, i}^2 dx, \quad j_2 = 1, \dots, N_2,$$

$$\tilde{g}_{j_1} = \int_D C^* J_H Q y(x) \xi_{j_1}^1(x) dx, \quad j_1 = 1, \dots, N_1.$$

REFERENCE

1. Temam R. Navier-Stokes equations (revised edition). — North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979. — 519 p.
2. Lions J.-L. Controle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. — Dunod, Paris, 1968. — 400 p.
3. Ladyzhenskaya O. A. The boundary value problems of mathematical physics. — Springer, 1985. — 322 p.
4. Nakonechnyi O. G. Minimax Estimates in Systems with Distributed Parameters. — Preprint 79 Acad. Sci. USSR, Inst. Cybernetics, Kyiv, 1979. — 55 p. (in Russian)

Received 10.11.2015

УДК 517.9

MSC 517.9

**MODELING OF NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED
THREE-COMPONENT PROCESSES SUCH AS
„DIFFUSION-CONVECTION MASS TRANSFER“ IN
NANOPOROUS MEDIA**

ANDRIY BOMBA¹, MYKHAYLO PETRYK², SEBASTIEN LECLERC³, OLENA
PRYSIAZHNIUK¹, JACQUES FRAISSARD⁴

¹Rivne State University of Humanities, Kyiv, Ukraine, E-mail: abomba@ukr.net.

²Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, Ternopil',
Ukraine, E-mail: mykhaylo_petryk@tu.edu.te.ua.

³Laboratory of Energetics, Theoretical and Applied Mechanics, University of Lorraine, Nancy,
Lorraine, France.

⁴Pierre and Marie Curie University, Paris, France, E-mail: jfr@ccr.jusieu.fr.

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ
ТРИКОМПОНЕНТНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ „ДИФУЗІЯ-
КОНВЕКЦІЯ-МАСООБМІН“ В НАНОСЕРЕДОВИЩІ**

А. Я. БОМБА¹, М. Р. ПЕТРИК², Д. ЛЕКЛЕРК³, О. В. ПРИСЯЖНЮК¹,
Ж. ФРЕСАР⁴

¹Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна,
E-mail: abomba@ukr.net.

²Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль,
Україна, E-mail: mykhaylo_petryk@tu.edu.te.ua.

³Лабораторія енергетики, теоретичної і прикладної механіки Університету Лотарінгії,
Франція.

⁴Університет П'єра і Марії Кюрі, Париж, Франція, E-mail: jfr@ccr.jusieu.fr.

ABSTRACT. Nonlinear singularly perturbed convection-diffusion-ad-sorption process of mass transfer of two kinds soluble substances in the environment, consisting of particles of microporous structure in conditions of chemical reactions to form the third grade material is modeled. We construct the asymptotic expansion of solving of relevant model boundary problem and on this basis conducted a numerical experiment which allows to assess the impact of various components of the process of the distribution of contaminants in the area.

KEYWORDS: convection, diffusion, mass transfer, the nanoporous media, singular perturbation, asymptotic methods.

РЕЗЮМЕ. Змодельовано нелінійний сингулярно збурений процес конвективно-дифузійно-адсорбційного масопереносу двох сортів розчинних речовин в середовищі, що складається з частинок мікропористої структури за умови протікання хімічної реакції з утворенням третього сорту речовини. Побудовано асимптотичне

розвинення розв'язку відповідної модельної крайової задачі та на цій основі проведено числовий експеримент, що дає змогу оцінити вплив різних складових процесу на розподіл забруднень в області.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: конвекція, дифузія, масообмін, нанопористе середовище, сингулярні збурення, асимптотичні методи.

ВСТУП

Моделювання процесів масоперенесення в нанопористих середовищах є перспективним напрямком досліджень стосовно використання фільтрів з нанопористим завантаженням для очищення забруднених технологічних потоків. Нанопористі матеріали забезпечують адсорбцію та молекулярний транспорт різних компонентів адсорбтиву через розвинуту мережу макро-, мікро- і мезопорожнин, забезпечуючи ефективне очищення технологічних потоків. Поєднання масообмінних, хімічних і теплових процесів в одному апараті дозволяє підвищити ефективність очищення, знизити кількість відходів, що потрапляють навколишнє середовище. Проведений в роботах [1–20] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси одно- і багатоконпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в пористих і нанопористих середовищах. У роботах [1–2, 5–10] розглянуто проблеми математичного моделювання масоперенесення різної природи в пористих середовищах без урахування внутрішньої структури пористого середовища, зокрема в [5, 8–10] запропоновано підхід до асимптотичного розвинення розв'язків відповідних модельних сингулярно збурених задач. Моделюванню дифузії і адсорбції в нанопористих середовищах та питанню ідентифікації кінетичних параметрів цих процесів присвячено значну кількість публікацій [3–4, 11–20]. Компететивна дифузія речовини в кристалічних середовищах частинок мікропористої структури досліджена в роботах [15–17, 19]. Актуальним залишається питання математичного моделювання процесів багатоконпонентного масоперенесення, ускладненого протіканням хімічної реакції між забруднюючими речовинами в нанопористих середовищах у випадку превалювання одних складових процесу над іншими, опираючись на базу даних новітніх фізичних експериментів для цих середовищ, що приводить до появи малого параметра при відповідних членах рівнянь.

У даній роботі при моделюванні сингулярно збурених процесів типу „конвекція-дифузія-адсорбція-реакція“ очищення рідини від багатоконпонентних домішок в середовищі нанопористої структури у випадку превалювання конвективних складових над дифузійними і масообмінними запропоновано підходи стосовно врахування спеціальних видів взаємовпливу його складових.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається процес трикомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення забруднюючої речовини в наносередовищі за умови домінування конвективної його складової над іншими, що описується наступною модельною сингулярно збуреною задачею:

$$\sigma \frac{\partial c_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^3 \tilde{D}_{js} \frac{\partial^2 c_s}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial c_j}{\partial x} - \alpha_j \tilde{K}_j c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} - \sum_{s=1}^3 \tilde{S}_{js} \left(\frac{\partial q_s}{\partial \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=R}, \quad (1)$$

$$\sigma^* \frac{\partial q_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^3 \tilde{D}_{js}^* \left(\frac{\partial^2 q_s}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial q_s}{\partial \tilde{r}} \right) - \alpha_j \tilde{K}_j q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}, j = \overline{1,3}, \quad (2)$$

$$c_j(x, t)|_{t=0} = c_j^0(x), q_j(x, \tilde{r}, t)|_{t=0} = q_j^0(x, \tilde{r}), \quad (3)$$

$$c_j(0, t) = c_{j*}(t), \left. \frac{\partial c_j(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$q_j(x, \tilde{r}, t)|_{\tilde{r}=R} = k_j c_j(x, t), \left. \frac{\partial q_j(x, \tilde{r}, t)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq x \leq L = 1, 0 \leq \tilde{r} \leq R, 0 \leq t < \infty.$$

Тут $c_j(x, t)$ — концентрація j -того сорту розчинної речовини у міжчастинковому просторі, $q(x, r, t)$ — концентрація j -того сорту розчинної речовини в мікрочастинці, $\tilde{D}_{js} = \varepsilon D_{js}$ і $\tilde{D}_{js}^* = \varepsilon^3 D_{js}^*$ — коефіцієнти дифузії в міжчастинковому просторі та в мікрочастинках відповідно, $\tilde{S}_{js} = \varepsilon^2 S_{js}$ — коефіцієнти впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, k_j — коефіцієнти адсорбційної рівноваги, α_j — кількість моль речовини j -го сорту, що візьме участь в реакції, $\tilde{K}_j = \varepsilon I_j K_j$ — швидкість протікання хімічної реакції, $I_1 = I_2 = 1, I_3 = -1, R = \varepsilon$ — радіус мікрочастинок, σ і σ^* — коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища, $j = \overline{1,3}, s = \overline{1,3}$. Всі функції, які фігурують в умовах (3–4) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач дифузії в нанопористому середовищі досліджено зокрема в [18–20].

Дана модель описує процес руху частинок трьох сортів розчинних речовин у адсорбційному середовищі, що складається з нанопористих мікрочастинок. Дві речовини вступають в хімічну реакцію типу $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = \alpha_3 c_3$ (для спрощення викладу розглядається випадок $\alpha_j = 1, j = \overline{1,3}$). Відмітимо, що в залежності від конкретного виду речовин, можливі різні випадки протікання процесу, наприклад дві речовини-забруднювачі адсорбуються мікрочастинками, а утворена третя речовина — ні, чи навпаки.

Роль малого параметра в даному випадку грає радіус мікрочастинок, а коефіцієнти дифузії на мікро- та макрорівнях і коефіцієнти масообміну виражаються через цей параметр. Після заміни змінної $\tilde{r} = \varepsilon r$ [5], рівняння (1)–(2) зведемо до вигляду:

$$\sigma \frac{\partial c_j}{\partial t} = \varepsilon \sum_{s=1}^3 D_{js} \frac{\partial^2 c_s}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial c_j}{\partial x} - \varepsilon I_j K_j c_1 c_2 - \varepsilon \sum_{s=1}^3 S_{js} \left(\frac{\partial q_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}, \quad (5)$$

$$\sigma^* \frac{\partial q_j}{\partial t} = \varepsilon \sum_{s=1}^3 D_{js}^* \left(\frac{\partial^2 q_s}{\partial r^2} + \frac{2\varepsilon}{r} \frac{\partial q_s}{\partial r} \right) - \varepsilon I_j K_j q_1 q_2, \quad (6)$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t < \infty.$$

2. АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ

Асимптотичне наближення розв'язку системи (5)-(6) за умов (3)-(4) матиме вигляд [10]:

$$c_j(x, t) = c_{j,0}(x, t) + \varepsilon c_{j,1}(x, t) + \dots + \varepsilon^n c_{j,n}(x, t) + P_{j,0}(\xi, t) + \varepsilon P_{j,1}(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} P_{j,n+1}(\xi, t) + R_{j,n}^1(x, t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$q_j(x, r, t) = q_{j,0}(x, r, t) + \varepsilon q_{j,1}(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n q_{j,n}(x, r, t) + F_{j,0}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} F_{j,i/2}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_{j,n+1}(x, \rho, t) + R_{j,n}^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (8)$$

де $c_{j,i}(x, t)$, $q_{j,i}(x, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, 3}$) — члени відповідних регулярних частин асимптотики, $P_{j,i}(\xi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) — функції типу примежового шару в околі $x = 1$, $F_{j,i/2}(x, \rho, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) — функції типу примежового шару в околі $r = 1$, $\xi = (1-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\rho = (1-r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ — відповідні регуляризуючі перетворення, $R_{j,n}^1$, $R_{j,n}^2$ — залишкові члени.

Після застосування процедури підстановки рядів (7)–(8) в рівняння (5)–(6) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε [5, 8–10], отримано такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial c_{j,i}(x, t)}{\partial x} + \sigma_1 \frac{\partial c_{j,i}(x, t)}{\partial t} = g_{j,i}^1(x, t), \\ c_{j,i}(x, 0) = w_{j,i}^1(x), \quad c_{j,i}(0, t) = w_{j,i}^2(t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial q_{j,i}(x, r, t)}{\partial t} = g_{j,i}^2(x, r, t), \\ q_{j,i}(x, r, 0) = w_{j,i}^3(x, r), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \text{де } g_{j,0}^1(x, t) = 0, \quad w_{j,0}^1(x) = c_j^0(x), \quad w_{j,0}^2(t) = c_{j*}(t), \quad g_{j,0}^2(x, r, t) = 0, \quad w_{j,0}^3(x, r) = \\ & = q_j^0(x, r), \quad g_{j,i}^1(x, t) = \sum_{s=1}^3 D_{js} \frac{\partial^2 c_{s,i-1}(x, t)}{\partial x^2} - I_j K_j \sum_{s=0}^{i-1} c_{1,s}(x, t) c_{2,i-1-s}(x, t) - \\ & - \sum_{s=1}^3 S_{js} \left(\frac{\partial q_{s,i-1}(x, r, t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{s,i-1}(x, r, t)}{\partial r} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F_{s,i-1/2}(x, r, t)}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & w_{j,i}^1(x) = 0, \quad w_{j,i}^2(t) = 0, \quad g_{j,1}^2(x, r, t) = \sum_{s=1}^3 D_{js}^* \frac{\partial^2 q_{s,0}(x, r, t)}{\partial r^2} - I_j K_j q_{1,0}(x, r, t) \times \\ & \times q_{2,0}(x, r, t), \quad g_{j,i}^2(x, r, t) = \sum_{s=1}^3 D_{js}^* \left(\frac{\partial^2 q_{s,i-1}(x, r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q_{s,i-2}(x, r, t)}{\partial r} \right) - I_j K_j \times \\ & \times q_{1,i-1}(x, r, t) q_{2,i-1}(x, r, t), \quad w_{j,i}^3(x, r) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Розв'язки наведених задач знайдено методом характеристик:

$$c_{j,0}(x, t) = \begin{cases} c_j^0(f^{-1}(\sigma f(x) - t)), & t < \sigma f(x), \\ c_{j*}(t - \sigma f(x)), & t \geq \sigma f(x), \end{cases}$$

$$q_{j,0}(x, r, t) = q_j^0(x, r), q_{j,i}(x, r, t) = \frac{1}{\sigma^*} \int_0^t g_{j,i}^2(x, r, \tilde{t}) d\tilde{t}, i = \overline{1, n},$$

$$c_{j,i}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_{j,i}^1(f^{-1}(\sigma f(x) - t + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \sigma f(x), \\ \int_0^x \frac{g_{j,i}^1(\tilde{x}, \sigma f(\tilde{x}) + t - \sigma f(x))}{v^2(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq \sigma f(x), \end{cases}$$

де $f(x) = \sigma \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v^2(\tilde{x})}$ — час проходження відповідними частотками розчинної речовини від початку фільтру до точки з координатою x , $f^{-1}(x)$ — функція, обернена до функції $f(x)$ (така функція існує, оскільки $v(x)$ — неперервно диференційована, обмежена, додатньо-визначена функція, $\sigma > 0$ — стала).

Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}(-\frac{1}{\varepsilon})$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ та розклавши функцію $v(L - \xi\varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі $x = L = 1$, одержано систему рівнянь із відповідними умовами для визначення прилежових функцій $P_{j,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$, $j = \overline{1, 3}$):

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^3 D_{js} \frac{\partial^2 P_{s,i}(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v(L) \frac{\partial P_{j,i}(\xi, t)}{\partial \xi} = g_{j,i}^3(\xi, t), \\ \left. \frac{\partial P_{j,i}(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} = v_{j,i}(t), \quad P_{j,i}(\xi, t)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } g_0^3(\xi, t) &= 0, g_{j,1}^3(\xi, t) = \sigma \frac{\partial P_{j,0}(\xi, t)}{\partial t} - \sum_{s=1}^3 D_{js} \frac{\partial^2 P_{j,0}(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v'(L) \xi \frac{\partial P_{j,0}(\xi, t)}{\partial \xi}, \\ g_{j,i}^5(\xi, t) &= \sigma \frac{\partial P_{j,i-1}(\xi, t)}{\partial t} - \sum_{s=1}^3 D_{js} \frac{\partial^2 P_{j,i-1}(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^{(s)}(L) \xi^s \times \\ &\times \frac{\partial P_{j,i-1-s}(\xi, t)}{\partial \xi} - I_j K_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} P_{1,i-1-s-l}(\xi, t) P_{2,l}(\xi, t) \quad (i = \overline{2, n+1}), \\ v_{j,i}(t) &= -\frac{\partial c_{j,i-1}(L, t)}{\partial \xi} \quad (i = \overline{0, n}), \quad v_{j,n}(t) = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно [10] отримуємо задачі для поправок $F_{j,i/2}(x, \rho, t)$:

$$\begin{cases} \sigma^* \frac{\partial F_{j,i/2}(x, \rho, t)}{\partial t} = \sum_{s=1}^3 D_{js}^* \frac{\partial^2 F_{s,i/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho^2} + \gamma_{j,i/2}(x, \rho, t), \\ F_{j,i/2}(x, \rho, 0) = 0, F_{j,i/2}(x, 0, t) = \vartheta_{j,i/2}(x, t), \quad \left. \frac{\partial F_{j,i/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho} \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{j,0}(x, \rho, t) &= \gamma_{j,1/2}(x, \rho, t) = 0, \quad \gamma_{j,1}(x, \rho, t) = -I_j K_j F_{1,0}(x, \rho, t) F_{2,0}(x, \rho, t), \\ \gamma_{j,i/2}(x, \rho, t) &= 2 \sum_{s=1}^3 \sum_{l=0}^{i-3} D_{js}^* \rho^l \frac{\partial F_{s,(l-i+3)/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho} - I_j K_j \sum_{s=0}^{i-3} F_{1,s}(x, \rho, t) \times \\ &\times F_{2,i-3-s}(x, \rho, t) \quad (i = \overline{3, n}), \quad \vartheta_{j,i/2}(x, t) = k(c_{j,\frac{i}{2}}(x, t) + P_{j,\frac{i}{2}}(x, t)), \quad \text{для парних } i, \\ &\text{для непарних дана умова рівна } 0. \end{aligned}$$

Розв'язання останньої задачі вимагає застосування чисельних методів (наприклад, методу сіток, методу кінцевих елементів).

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [5, 8] на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Наведемо деякі модельні результати розрахунку описаних вище сингулярно збурених процесів типу „конвекція-дифузія-масообмін“ нанопористому однорідному середовищі. Обчислення проводились для адсорбційного середовища довжиною $L = 1$ м, що складається з нанопористих мікрочастинок радіусом $R = 10^{-5}$ м, при швидкості конвективного перенесення 5 м/добу . Для числового експерименту використовувались імовірні дані, прогнозовані на основі аналізу [3, 4]: $D_{11} = 1.8 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{12} = 0.1 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{21} = 0.65 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{22} = 1.03 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{31} = 0.7 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{32} = 0.9 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{33} = 2.45 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{11}^* = 1.5 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{12}^* = 0.001 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{21}^* = 0.006 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{22}^* = 1.98 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{31}^* = 0.006 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{32}^* = 0.008 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{33}^* = 1.58 \text{ м}^2/\text{добу}$, $K_1 = 5 \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{добу}$, $K_2 = 7.5 \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{добу}$, $K_3 = 4 \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{добу}$, $\sigma = 0.7$, $\sigma^* = 0.8$, $k_1 = 0.87$, $k_2 = 0.94$, $k_3 = 0.87$.

В початковий момент часу концентрації усіх трох речовин рівні 0, а на виході задано розподіли:

$$\begin{aligned} c_{1*}(t) &= \begin{cases} 0.02(1 + \cos(5t + \pi)), & t \leq \frac{\pi}{5}, \\ 0.04, & t > \frac{\pi}{5}, \end{cases} \\ c_{2*}(t) &= \begin{cases} 0.017(1 + \cos(10t + \pi)), & t \leq \frac{\pi}{10}, \\ 0.034, & t > \frac{\pi}{10}, \end{cases} \\ c_{3*}(t) &= 0. \end{aligned}$$

На рис. 1 показано ефект від хімічної реакції та адсорбції мікрочастинок, а саме наведені графіки розподілу концентрацій трьох сортів розчинних речовин за умови відсутності масообміну (крива 1) (розв'язок відповідної незбуреної задачі), за умови лише адсорбції забруднень мікрочастинок (крива 2), за умови лише протікання хімічної реакції, тобто у випадку аналогічного процесу у пористому середовищі (мікрочастинок не є нанопористими [9]) (крива 3) та за умови і протікання реакції і адсорбції мікрочастинок (крива 4).

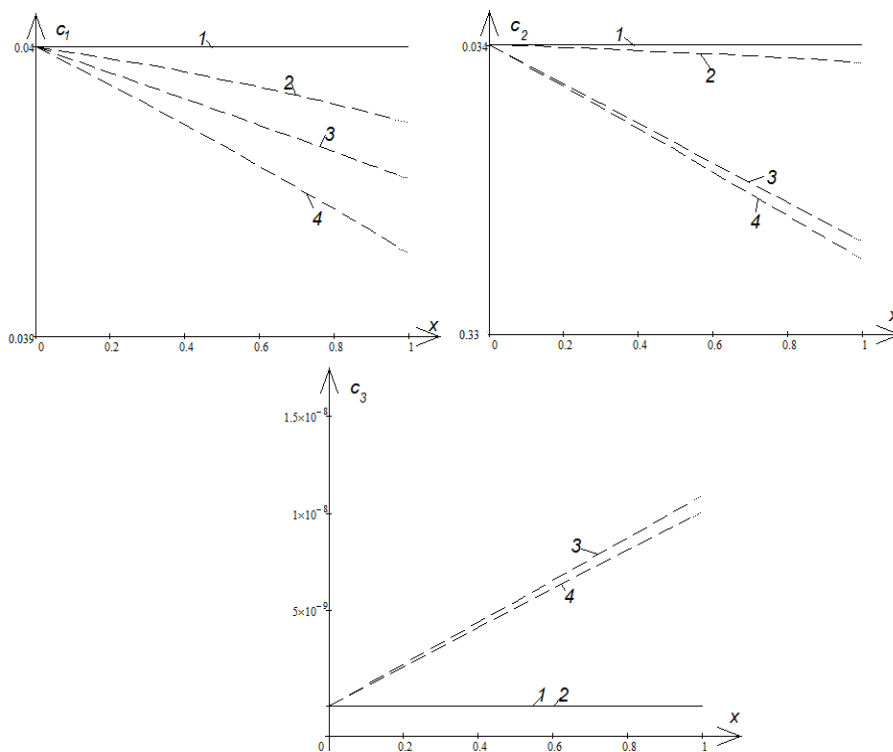


Рис 1. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі

Висновки

Сформована математична модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузионно-адсорбційного масопереносу трьох сортів забруднюючої речовини, дві з яких вступають в хімічну реакцію в нанопористому середовищі. Побудовано асимптотичне розв'язку відповідної одновимірної нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі, на основі чого проведено комп'ютерний експеримент та графічно зображено просторово-часовий розподіл концентрацій трьох сортів забруднюючих речовин при різних значеннях параметрів процесу. На основі аналізу отриманих результатів можна говорити про значний вплив адсорбції та реакції, не зважаючи на те, що вони є малими в порівнянні з конвекцією. У перспективі — ідентифікація параметрів такого роду процесів та дослідження масопереносу багатопонентного забруднення в багатошарових нанопористих середовищах також дослідження дифузійного потоку в околі частинок, що омиваються потоком [6].

ЛІТЕРАТУРА

1. Ruthven D. M. Principles of adsorption and adsorption processes — New York: Wiley-Interscience, 1984. — 464 p.

2. Karger J., Grinberg F., Heitjans P. Diffusion fundamentals — Leipziger Univiersite, Leipzig, 2005. — 615 p.
3. Quirke N. Adsorption and Transport at the Nanoscale —Taylor and Francis, 2006. — 186 p.
4. Rolando M. A. Roque-Malherbe. Adsorption and Diffusion in Nanoporous Materials — CRC Press, 2012. — 288 p.
5. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., Kalachev L. V. Boundary Function Method for Singular Perturbed Problems — SIAM, 1995. — 221 p.
6. Ахметов Р. Г. Асимптотика решения задачи конвективной диффузии с объемной химической реакцией в следе за частицей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46, № 5. — С. 834–847.
7. Стеля О. Б. Сплайнова схема розв'язання нестационарного рівняння конвекції-дифузії // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 1(104). — С. 136–142.
8. Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. Нелінійні сингулярно збуджені задачі типу „конвекція-дифузія“— Рівне: НУВГП, 2008. — 254 с.
9. Бомба А. Я., Климяк Ю. Є. Математичне моделювання просторових сингулярно-збуджених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія — Рівне: „Асоль“, 2014. — 273 с.
10. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збуджених задач процесу масоперенесення в різнопористих середовищах // Доповіді НАН України. — 2013. — № 3. — С. 28–34.
11. Петрик М.Р. Математическое моделирование масопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой n-интерфейсных взаимодействий // Кибернетика и систем. анализ. — 2007.— № 1. — С. 114–134.
12. І. В. Сергиенко, М. Р. Петрик, О. М. Хіміч та ін. Математичне моделювання масоперенесення в середовищах частинок нанопористої структури — К.: Національна академія наук України. Інститут кібернетики імені В.М. Гlushкова, 2014.— 210 с.
13. Petryk M., Fraissard J., Leclerc S., Canet D. Modeling of gas transport in a microporous solid using a slice selection procedure: Application to the diffusion of benzene in ZSM5 // Catalysis Today, Elsevier. — 2008.— 139(3). — P. 234–240. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cattod.2008.05.034>.
14. Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. Mathematical modeling and visualization of gas transport in a zeolite bed using a slice selection procedure // Diffusion Fundamentals. — 2007.— № 4. — P. 11.1–11.23.
15. Leclerc S., Petryk M., Canet D., Fraissard J. Competitive Diffusion of Gases in a Zeolite Using Proton NMR and Slice Selection Procedure // Catalysis Today, Elsevier. — 2012.— 187(1). — P. 104–107. <http://dx.doi.org/10.1021/acs.jpcc.5b07974>.
16. Петрик М. Р., Фресард Ж., Михалик Д. М. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной конкуритивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. — 20079.— № 8. — С. 73–83.
17. Петрик М. Р., Фресард Ж. Математическое моделирование нелинейной конкуритивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. — 2009.— № 2. — С. 48–65.

18. Deineka V. S., Petryk M. R., Fraissard J. Identifying kinetic parameters of mass transfer in components of multicomponent heterogeneous nanoporous media of a competitive diffusion system // *Cybernetics and System Analysis*. — 2011.— Vol. 47, № 5. — P. 705–723. [http://dx.doi.org/ 10.1007/s10559-011-9350-2](http://dx.doi.org/10.1007/s10559-011-9350-2).
19. Дейнека В.С., Петрик М.Р., Фрессард Ж. Идентификация кинетических параметров массопереноса в многокомпонентных системах конкурентивной диффузии в неоднородных нанопористых средах // *Кибернетика и систем. анализ*. — 2011.— № 5. — С. 46–64.
20. Дейнека В. С., Петрик М. Р., Михалик Д. М. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах // *Пробл. управления и информатики*. — 2011.— № 2. — С. 12–25.

Надійшла 16.11.2015

УДК 517.9

MSC 35D30, 35R11, 65M60

WEAK SOLVABILITY AND SPACE-TIME DISCRETIZATION FOR A VARIABLE-ORDER DIFFUSION EQUATION

A. L. HULIANYTSKYI

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: andriyhul@gmail.com.

СЛАБКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ДЛЯ ЗМІННОПОРЯДКОВОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

А. Л. Гуляницький

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна, E-mail: andriyhul@gmail.com.

ABSTRACT. We study the solvability of a subdiffusion equation with a position-dependent time derivative in a bounded domain. The problem is reformulated in a such way that allows to investigate it employing the methods developed for constant-order fractional differential equations. A weak solvability theorem in a variable-order Sobolev space is proven. In order to solve the problem numerically, we suggest a space-time Galerkin method which combines finite-element space discretization with a polynomial approximation with respect to the time variable. The numerical results for the case of 1-dimensional space variable are presented.

KEYWORDS: fractional differential equation, diffusion, weak solution, Galerkin method.

РЕЗЮМЕ. Досліджено розв'язність рівняння субдифузії (повільної дифузії) в обмеженій області, яке містить дробову похідну за часом, порядок якої залежить від просторової змінної. Задачу зведено до вигляду, який дає змогу аналізувати її методами, розробленими для рівнянь сталого дробового порядку. Одержано теорему існування та єдиності слабкого розв'язку у соболевському просторі змінного порядку. Для чисельного розв'язання запропоновано метод Гальоркіна з одночасною дискретизацією за усіма змінними: за допомогою поліноміальних функцій за часом і скінченноелементних — за просторовими змінними. Наведено результати обчислювального експерименту для випадку однієї просторової змінної.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння дробових порядків, дифузія, слабкий розв'язок, метод Гальоркіна.

1. ВСТУП

Дробові рівняння у частинних похідних (надалі — ДРЧП) виникають при моделюванні ряду фізичних і біологічних систем [1]–[3]). Одним з процесів, що описуються такими рівняннями, є субдифузія (повільна дифузія), для якої середньоквадратичне зміщення частинки, що дифундує, зростає з часом повільніше, ніж лінійна функція; класичний закон Фіка при цьому не виконується. Зокрема, поширеним є випадок, коли середньоквадратичне зміщення зростає за степеневим законом з показником $\alpha \in (0, 1)$. Таку закономірність відзначено для середовищ з пастками, які затримують частинки речовини, що дифундує. Важливою особливістю субдифузійних процесів є їхня нелокальність у часі: стан системи залежить від усієї передісторії процесу [1]. Відповідне одновимірне рівняння для щільності ймовірності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0^{1-\alpha} K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де $K > 0$ — коефіцієнт дифузії, $D_0^{1-\alpha}$ — дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $1 - \alpha$ за часовою змінною t з нижньою межею 0; цей оператор визначається виразом

$$(D_0^\beta u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, s)}{(t - s)^\beta} ds.$$

Рівняння (1) можна переписати у вигляді

$${}^*D_0^\alpha u = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

де $({}^*D_0^\alpha u)(x, t) = D_t^\alpha (u - u_0)$ — дробова похідна Капуто; $u_0(x) = u(x, 0)$. Зауважимо, що для абсолютно неперервних за змінною t функцій, справедливе подання ([4], теорема 2.1):

$$({}^*D_0^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)}{(t - s)^\alpha} ds.$$

Рівняння такого типу інтенсивно досліджувались впродовж останніх десятиліть. Ейдельман і Кочубей [5] одержали фундаментальний розв’язок для оператора з похідною Капуто за часом і рівномірно еліптичним оператором, що діє за просторовими змінними, зі змінними коефіцієнтами, які задовольняють умову Гольдера.

Vazhlekova [6] довела строго L_p -розв’язність для неоднорідного ДРЧП з похідною Рімана-Ліувілля за часом. Нещодавно Лі й Ху [7, 8] встановили, що дробові рівняння порядку $\alpha \in (0, 1)$ за своїм властивостями подібні до еліптичних рівнянь у тому розумінні, що їх можна переформулювати у термінах симетричних білінійних форм. Завдяки цьому, їхня розв’язність у відповідних просторах впливає з леми Лакса-Мільграма. У цих самих статтях, Лі й Ху запропонували метод Гальоркіна з поліноміальними базисними функціями. Ford, Xiao і Yan [9] розглянули дискретизацію за часом

для багатовимірного рівняння субдифузії, а також його скінченноелементну дискретизацію за просторовими змінними.

Втім, усі ці дослідження стосуються ДРЧП сталого порядку. З іншого боку, Chechkin, Gorenflo і Sokolov [10] розглянули випадок, коли показник дифузії змінюється у просторі. Використовуючи апарат випадкових блукань з неперервним часом, вони вивели таке рівняння для щільності ймовірності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u \right), \quad (3)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha(x) < 1$, $K(x) > 0$ (насправді $K(x)$ залежить від $\alpha(x)$). Тут слід наголосити, що друга похідна за просторовою змінною діє на похідну Рімана-Ліувілля, порядок якої також залежить від просторової змінної. У зв'язку з цим, безпосередньо звести рівняння (3) до вигляду (2) чи хоча б (1) з $\alpha = \alpha(x)$ не є можливим.

Мета роботи полягає у тому, щоб дослідити неоднорідний багатовимірний аналог рівняння (3). Розділ 2 містить основні позначення, постановку задачі і її перетворення на еквівалентну, більш зручну для подальших міркувань. У розділі 3 представлено теорему слабкої розв'язності змінно-порядкової задачі з однорідними крайовими й неоднорідними початковими умовами. Для її доведення застосовано підхід, запропонований у [7, 8], і узагальнено його на випадок рівняння змінного порядку. У розділі 4 розглядається метод чисельного розв'язання цієї задачі.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ Й ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0, T]$. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u) = f \quad (4)$$

з початковою й крайовою умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (5)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6)$$

де $u = u(x, t)$, $f = f(x, t)$, Δ — оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

а $D_0^{1-\alpha(x)}$ — похідна Рімана-Ліувілля порядку $1 - \alpha(x)$ за часом. Припустимо також, що $\alpha, K \in C^2(\bar{\Omega})$, $\min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x) > \frac{1}{2}$ і $\max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x) < 1$.

Перш за все, переформулюємо (4)–(6) як задачу з нульовою початковою умовою. Для цього зробимо заміну $\tilde{u} = u - u_0$. Маємо задачу

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \left(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} \tilde{u} \right) = F, \quad (7)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

де $F = f + \Delta \left(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right)$.

Проте у задачі (7)–(9) залишається дробова похідна за часом, на яку діє оператор Лапласа, що робить рівняння незручним для дослідження. У зв'язку з цим, введемо іншу функцію $\tilde{v} = D_0^{1-\alpha(x)} \tilde{u}$. Оскільки $\tilde{u}|_{t=0} = 0$, маємо ([4], лема 2.5) $\tilde{u} = I_0^{1-\alpha(x)} \tilde{v}$, де $I_0^{1-\alpha(x)}$ позначає інтеграл Рімана-Ліувілья за t з нижньою межею 0.

Підставивши v у (7)–(9), одержуємо задачу

$$D_0^{\alpha(x)} \tilde{v} - \Delta(K(x) \tilde{v}) = F, \quad (10)$$

$$I_0^{1-\alpha(x)} \tilde{v}|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

Щоб спростити її, виконаємо заміну $v = K(x) \tilde{v}$. Оскільки

$$D_0^{\alpha(x)} \tilde{v}(x, t) = D_0^{\alpha(x)} \left(\frac{v(x, t)}{K(x)} \right) = \frac{1}{K(x)} D_0^{\alpha(x)} v(x, t),$$

$$(I_0^{1-\alpha(x)} \tilde{v}(x, t))|_{t=0} = \frac{1}{K(x)} (I_0^{1-\alpha(x)} v(x, t))|_{t=0},$$

одержимо задачу

$$\frac{1}{K(x)} D_0^{\alpha(x)} v - \Delta v = F, \quad (13)$$

$$I_0^{1-\alpha(x)} v|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (15)$$

Зазначимо, що початкові умови, які включають інтеграли дробових порядків, є цілком стандартними для рівнянь з похідними Рімана-Ліувілья [11]. Розв'язок початкової задачі (4)–(6) при цьому можна подати у вигляді $u = u_0 + \frac{1}{K(x)} I_0^{1-\alpha(x)} v$. У наступному розділі досліджується розв'язність задачі (13)–(15).

Позначимо через $H_0^1(\Omega)$ класичний соболевський простір першого порядку функцій з нульовим слідом, в якому задано норму $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}$, а через $H_0^{-1}(\Omega)$ спряжений до нього. Нехай також C_Ω — оптимальна стала у нерівності Пуанкаре $\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Надалі позначатимемо, наприклад, через $\underline{g}$ й $\bar{g}$ мінімум і максимум функції g , а через C — додатну сталу, яка може бути різною в різних нерівностях. Через, наприклад, g_{x_i} позначатимемо частинну похідну функції g за змінною x_i .

3. СЛАБКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Нагадаємо деякі властивості соболевських просторів. Нехай $\mathcal{F}$ позначає перетворення Фур'є. Визначимо простір

$$H^\beta(\mathbb{R}) = \{g \in L_2(\mathbb{R}) | (1 + \omega^2)^{\frac{\beta}{2}} (\mathcal{F}g)(\omega) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

з нормою

$$\|g\|_{\beta, \mathbb{R}} = \|(1 + \omega^2)^{\frac{\beta}{2}} (\mathcal{F}g)(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тепер введемо простір

$$H^\beta([0, T]) = \{g \in L_2([0, T]) \mid \exists \tilde{g} \in H^\beta(\mathbb{R}) : \tilde{g}|_{[0, T]} = g\}$$

з нормою

$$\|g\|_\beta = \inf_{\tilde{g} \in H^\beta(\mathbb{R}), \tilde{g}|_{[0, T]} = g} \|\tilde{g}\|_{\beta, \mathbb{R}}.$$

Позначимо через $C_0^\infty([0, T])$ множину нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм у $(0, T)$. Нехай H_0^β — поповнення $C_0^\infty([0, T])$ за $\|g\|_\beta$. Через $H_l^\beta([0, T])$, $H_r^\beta([0, T])$ і $H_s^\beta([0, T])$ позначимо поповнення $C_0^\infty([0, T])$ за нормами

$$\|g\|_{\beta, l}^2 = \|g\|_{L_2([0, T])}^2 + \|D_0^\beta g\|_{L_2([0, T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta, r}^2 = \|g\|_{L_2([0, T])}^2 + \|D_T^\beta g\|_{L_2([0, T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta, c}^2 = (D_0^\beta g, D_T^\beta g)_{L_2([0, T])},$$

де D_T^β — похідна Рімана-Ліувілля з верхньою межею T .

У [7] доведено таке твердження:

Лема 1. *Нехай $\beta > 0$, $\beta \neq m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді простори $H_l^\beta([0, T])$, $H_r^\beta([0, T])$, $H_s^\beta([0, T])$ і $H_0^\beta([0, T])$ рівні у тому розумінні, що їхні норми еквівалентні.*

Крім того, справедливе таке твердження [12]:

Лема 2. *Якщо $0 < \beta < \frac{1}{2}$, то $H^\beta([0, T]) = H_0^\beta([0, T])$.*

Для дослідження задачі змінного порядку нам знадобляться соболевські простори змінного порядку. Нехай $C_0^\infty(Q)$ — множина нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм у Q , а $W^{\beta(\cdot), 1}$ — поповнення $C_0^\infty(Q)$ за нормою

$$\|u\|_{\beta(\cdot), 1}^2 = \int_Q (D_0^{\beta(x)} u(x, t))^2 + \sum_{i=1}^N u_{x_i}^2(x, t) \, dQ,$$

де $D_0^{\beta(x)}$ — правобічна похідна Рімана-Ліувілля за змінною t з нижньою межею 0, а β є функцією просторових змінних. Через $W^{-\beta(\cdot), -1}$ позначатимемо простір, спряжений до $W^{\beta(\cdot), 1}$.

Лема 3. *Якщо $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, то $\Delta \left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right) \in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2}, -1}(Q)$.*

Доведення. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\begin{aligned} \Delta \left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right) &= \Delta \left(\frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)) t^{1-\alpha(x)}} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(A_{i,1}(x) t^{\alpha(x)-1} + A_{i,2}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln t + A_{i,3}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln^2 t \right), \end{aligned}$$

де

$$A_{i,1}(x) = \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i^2} \Gamma(\alpha(x)) + 2 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i},$$

$$A_{i,2}(x) = 2 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \Gamma(\alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} + u_0(x) \frac{\partial(\Gamma(\alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i})}{\partial x_i} + u_0(x) \frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i},$$

$$A_{i,3}(x) = u_0(x) \Gamma(\alpha(x)) \left(\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} \right)^2,$$

причому $A_{i,j} \in H_0^{-1}(\Omega)$ завдяки припущенням щодо u_0 й α . Щоб довести лему, достатньо показати, що $\Delta \left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right) \in L_2([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$. Спочатку розглянемо доданки $A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}$. Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_0^T \|A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2 dt &= \int_0^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\langle A_{i,1} \cdot t^{\alpha(x)-1}, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt = \\ &= \int_0^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\langle A_{i,1}, t^{\alpha(x)-1} \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt = \\ &= \|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2 \int_0^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} (t^{\alpha(x)-1} \varphi_{x_i} + t^{\alpha(x)-1} \ln t \cdot \alpha_{x_i} \varphi)^2 dx \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} 2t^{2\alpha(x)-2} \varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx \right). \quad (16) \end{aligned}$$

З іншого боку, можна вибрати таке δ , що $2\alpha(x) - \delta > 1 \ \forall x \in \Omega$, а також таке $\mu = \mu(\delta) < 1$, що $\ln^2 t \leq t^{-\delta}$ for $t < \mu$. Для таких δ й μ має місце

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt &= \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt + \\ &\int_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|t^{\alpha(x)-1} \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Тепер оцінимо ці два інтеграли окремо, використовуючи (16) і нерівність $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2} \varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{t^{2\alpha-2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 dx} + \sqrt{t^{2\alpha-2-\delta} \cdot \sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &2 \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{t^{\alpha-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 dx} + t^{\alpha-1-\frac{\delta}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &2 \int_0^\mu \left(t^{\alpha-1} + M_1 t^{\alpha-1-\frac{\delta}{2}} \right)^2 dt, \end{aligned}$$

де $M_1 = C_\Omega \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_{x_i}^2}$. Отже,

$$I_1 \leq 2 \int_0^\mu t^{2\alpha-2} + 2M t^{2\alpha-2-\frac{\delta}{2}} + M^2 t^{2\alpha-2-\delta} dt < \infty.$$

Більше того,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2} \varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \mu^{2\alpha(x)-2} \varphi_{x_i}^2 + \mu^{2\alpha(x)-2} \ln^2 \mu \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 dt \leq \\ &2(T-\mu)M_2^2, \end{aligned}$$

де $M_2 = \mu^{\alpha-1} \sqrt{1 + C_\Omega^2 \ln^2 \mu \cdot \sum_{i=1}^N \overline{\alpha_{x_i}^2}}$. З цих оцінок випливає, що $\|A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}\|_{L_2([0,T],H_0^1(\Omega))}^2 = \|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2 (I_1 + I_2) < \infty$.

Аналогічними міркуваннями можна переконатись, що $A_{i,2}(x)t^{\alpha(x)-1} \ln t$ і $A_{i,3}(x)t^{\alpha(x)-1} \ln^2 t$ також належать простору $L_2([0,T],H_0^{-1}(\Omega))$. $\square$

Лема 4. Якщо $v \in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, то $(I_0^{1-\alpha(x)}v)|_{t=0} = 0$ у $L_2(\Omega)$.

Доведення. Достатньо показати, що $\|I_0^{1-\alpha(\cdot)}v(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.
Маємо

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t) \right)^2 dx &= \int_\Omega \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}} ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq C \int_\Omega \left(\int_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}} ds \right)^2 dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \int_{\Omega} \left(\|v(x, \cdot)\|_{H^{\alpha(x)}([0,t])} \left\| \frac{1}{(t - \cdot)^{\alpha(x)}} \right\|_{L_{r(x)}([0,t])} \right)^2 dx,$$

де $r(x) = 2/(1 + \alpha(x))$, і використано вкладення $H^{\frac{\alpha}{2}}([0, t])$ у $L_{r'}([0, t])$ з $r' = 2/(1 - \alpha(x))$ [8]. Звідси

$$\int_{\Omega} \left(I_0^{1-\alpha(x)} v(x, t) \right)^2 dx \leq C \max_{x \in \Omega} \left\| \frac{1}{(t - \cdot)^{\alpha(x)}} \right\|_{L_{r(x)}([0,t])}^2 \|v(x, \cdot)\|_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)}^2 \rightarrow 0,$$

а отже

$$\left\| \frac{1}{(t - \cdot)^{\alpha(x)}} \right\|_{L_{r(x)}([0,t])} \rightarrow 0$$

рівномірно на Ω при $t \rightarrow 0$. $\square$

Зауваження 1. Доведення леми 4 повторює міркування доведення леми 2.2, [8].

Лема 5. [8] Нехай $0 < \beta < 2$, $\beta \neq 1$, $a, g, h \in H_0^{\frac{\beta}{2}}([0, T])$. Тоді

$$\left\langle D_0^{\beta} g, h \right\rangle_{H_0^{-\frac{\beta}{2}} \times H_0^{\frac{\beta}{2}}} = (D_0^{\frac{\beta}{2}} g, D_T^{\frac{\beta}{2}} h)_{L_2},$$

де простори й відповідні білінійні форми визначені на $[0, T]$.

Зауваження 2. Відповідно до леми 1, твердження леми 5 справедливе також для $g, h \in H^{\frac{\beta}{2}}([0, T])$, якщо при цьому $\beta < \frac{1}{2}$.

Тепер розглянемо слабку постановку (13)–(15). Позначимо

$$b(v, w) = \int_Q \frac{1}{K(x)} D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}} v \cdot D_T^{\frac{\alpha(x)}{2}} w + \nabla v \cdot \nabla w \, dQ,$$

де ∇ — градієнт за просторовими змінними.

З леми 5 випливає, що для гладких v і w тотожність

$$b(v, w) = (D_0^{\alpha(\cdot)} v + \Delta v, w)_{L_2(Q)}$$

виконується для довільного $w \in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)$.

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}$ двоїстість між $W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2}, -1}(Q)$ і $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)$.

Означення 1. Під слабким розв'язком задачі (13)–(15) розумітимемо v , для якого

$$b(v, w) = \langle F, w \rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}.$$

Теорема 1. Нехай $F \in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2}, -1}(Q)$. Тоді задача (13)–(15) має єдиний розв'язок $v \in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)$, причому

$$\|v\|_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)} \leq C \|F\|_{W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2}, -1}(Q)}.$$

Доведення. Відомо [8], що для $g \in H^\beta([0, T])$, $\beta < \frac{1}{2}$

$$(D_0^\beta g, D_T^\beta g)_{L_2([0, T])} \geq C_1 \cos(\pi\beta) \|g\|_{H^\beta([0, T])}^2$$

для деякого $C_1 > 0$. Отже, використовуючи цю оцінку з $\beta = \frac{\alpha(x)}{2}$ і додатність оператора Δ , одержуємо

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq C \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} \cos\left(\frac{\pi\alpha(x)}{2}\right) \int_0^T (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}} v(x, t))^2 dt dx + \int_Q \nabla v \cdot \nabla v dQ \geq \\ &\geq C \cos\left(\frac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right) \int_Q (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}} v(x, t))^2 dQ + \int_0^T \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \geq C \|v\|_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)}^2. \end{aligned}$$

Неперервність білінійної форми $b(\cdot, \cdot)$ перевіряється безпосередньо; отже, існування і єдиність розв'язку задачі випливає з леми Лакса-Мільграма. $\square$

Зауваження 3. Виконання початкової умови (14) забезпечується лемою 4.

Зауваження 4. Відповідно до леми 3, теорема 1 дає змогу розглядати неоднорідні початкові умови (5) з $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

4. МЕТОД ГАЛЬОРКІНА

Побудуємо схему просторово-часової дискретизації системи (13)–(15). Виберемо базис $\{\vartheta_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}(Q)$, позначимо через $W^{m,n}$ лінійну оболонку $\{\vartheta_{1,1}, \dots, \vartheta_{m,n}\}$ й розглянемо наближення

$$v^{m,n}(x, t) = \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} \vartheta_{i,j}(x, t),$$

де $c_{i,j}$ — невідомі коефіцієнти, які визначаються з системи

$$b(\vartheta^{i,j}, w^{k,l}) = \left\langle F, w^{k,l} \right\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1} \quad \forall w^{k,l} \in W^{m,n},$$

яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} b(\vartheta_{i,j}, \vartheta_{k,l}) = \left\langle F, \vartheta_{k,l} \right\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2}, 1}, \quad i, k = \overline{1, m}, j, l = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Тоді наближений розв'язок задачі (4)–(6) виражається за формулою

$$u^{m,n}(x, t) = u_0(x) + \frac{1}{K(x)} \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} (I_0^{1-\alpha(x)} \vartheta_{i,j})(x, t) \quad (18)$$

Оскільки $b(\cdot, \cdot)$ коерцитивна, система (17) має єдиний розв'язок.

Окремими проблемами є вибір конкретного базису $\{\vartheta_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ й аналіз похибки апроксимації. Покладемо $\vartheta_{i,j}(x, t) = \psi_i(t) \cdot \omega_j(x)$, де $\{\psi_i\}$ й $\{\omega_j\}$ — лінійно незалежні системи функцій у $H^{\bar{\alpha}/2}([0, T])$ й $H_0^1(\Omega)$ відповідно. А саме, виберемо $\psi_i(t) = \tilde{P}_{i-1}(t)$ — зміщені многочлени Лежандра на $[0, 1]$ (без обмеження загальності можна вважати, що $T = 1$). Цей вибір зумовлено тим, що для степеневих функцій відомі аналітичні формули дробового

диференціювання й інтегрування, що дає змогу легко застосувати формулу (18). Крім того, многочлени Лежандра ортогональні у просторі L_2 , що спрощує обчислення білінійної форми $b(\tilde{P}_i(t) \cdot \omega_j(x), \tilde{P}_k(t) \cdot \omega_l(x))$.

Якість запропонованого методу при моделюванні реальних процесів аномальної дифузії має стати предметом подальших досліджень. Нижче подано результати його тестування на кількох наборах вхідних даних.

Покладемо $\Omega = (0, 1)$, $\alpha(x) = 0.6 + 0.3 \exp(-8(x - 0.5)^2)$, $u_0(x) = 0$, $K(x) = 1$. Розглянемо такі праві частини:

1. $F_1(x, t) = \left(\frac{2}{K(x)\Gamma(3-\alpha(x))} t^{2-\alpha(x)} + 4\pi^2 t^2 \right) \sin(2\pi x)$. У цьому випадку $u(x, t) = t^2 \sin(2\pi x)$.

2. $F_2(x, t) = \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha(x)} t^{\frac{1-2\alpha}{4}} J_{\frac{1}{2}-\alpha(x)}(\pi\sqrt{t}) - 2 \sin(2\pi\sqrt{t})$, де J_ν — функція Бесселя першого роду порядку ν . У цьому випадку $u(x, t) = \sin(\pi\sqrt{t}) \cdot x(x - 1)$.

2. $F_3(x, t) = \frac{\pi t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} ({}_1F_1(1; 2 - \alpha(x); i\pi x) + {}_1F_1(1; 2 - \alpha(x); -i\pi x)) x(x - 1) - 2 \sin(\pi t)$, де ${}_1F_1$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера. У цьому випадку $u(x, t) = \sin(\pi t) \cdot x(x - 1)$.

Ці формули можна перевірити, скориставшись таблицями дробових похідних ([13], с.140; [14], с.193). У таблиці наведено результати чисельного розв'язування задачі (13)–(15): відносні похибки у дискретизованій нормі просторів $L_2([0, T]; L_2(\Omega))$ (похибка 1) і $L_2([0, T]; H^1(\Omega))$ (похибка 2) для $m = 11$ (многочлени Лежандра до 10 степеню), $n = 50$.

права частина	похибка 1	похибка 2
F_1	$1.186 * 10^{-3}$	$2.503 * 10^{-3}$
F_2	$2.525 * 10^{-2}$	$8.859 * 10^{-3}$
F_3	$1.377 * 10^{-3}$	$4.551 * 10^{-3}$

Зауваження 5. Оскільки функція F_2 має особливість при $t = 0$, похибка методу чутлива до точності інтегрування при обчисленні правої частини СЛАР (17).

Зауваження 6. Може здатись природною ідея дискретизації за часом

$$v^m(x, t) = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \omega_i(x), \quad (19)$$

де ψ_i — невідомі коефіцієнти, залежні від часу. Проте насправді така дискретизація неможлива: підставивши (19) у (13), одержимо сім'ю систем звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку

$$\mathbf{B} D_0^{\alpha(x)} \Psi_m + \mathbf{A} \Psi_m = \mathbf{F},$$

де $\Psi_m = (\psi_1, \dots, \psi_m)^T$, $\mathbf{F}(t) = (F(t), \omega_j)^T$, $\mathbf{B} = \{(\omega_i, \omega_j)_{L_2(\Omega)}\}_{i,j=1}^m$ і $\mathbf{A} = \{a(\omega_i, \omega_j)\}_{i,j=1}^m$.

Отже, замість однієї такої системи сталого порядку відносно функцій ψ_i , одержано сім'ю систем, параметризовану змінною $x \in \Omega$. Це означає, що ψ_i має залежати від x , що суперечить поданню (19).

ЛІТЕРАТУРА

1. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37. — P. R161–R208.
2. Учайкин В. В. Метод дробных производных — Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. — 512 с.
3. Sokolov I. M. Models of anomalous diffusion in crowded environments // Soft Matter — 2012. — №8. — P. 9043–9052.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations — Amsterdam: Elsevier, 2006. — xv + 523 p.
5. Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations // Differential Equations — 2004. — Vol. 199, №2. — P. 211–255.
6. Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, PhD Thesis. — Eindhoven: Press Facilities of Eindhoven University of Technology, 2001. — iv + 107 p.
7. Xianjuan Li, Chuanju Xu A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, №3. — P. 2108–2131.
8. Xianjuan Li, Chuanju Xu, Existence and Uniqueness of the Weak Solution of the Space-Time Fractional Diffusion Equation and a Spectral Method Approximation // Commun. Comput. Phys. — 2010. — Vol. 8, №5. — P. 1016–1051.
9. Ford N. J., Jingyu Xiao, Yubin Yan A finite element method for time fractional partial differential equations // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2011. — Vol. 14, №3. — P. 454–474.
10. Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M. Fractional diffusion in inhomogeneous media // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38. — P. L679–L684.
11. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — xxiv + 340 p.
12. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — Москва: Мир, 1971. — 372 с.
13. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. Diethelm K.: The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — viii + 244 p.

Надійшла 20.11.2015

УДК 512.64:004.93

MSC 15Bxx, 68T10

CORTEGE CONCEPTION FOR LINEAR OPERATORS AND ITS IMPLEMENTATION FOR MATRIX CORTEGES

VOLODYMYR DONCHENKO, TARAS ZINKO, FEDIR SKOTARENKO

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: voldon@unicyb.kiev.ua.

КОНЦЕПЦІЯ КОРТЕЖНОСТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЯ ДЛЯ МАТРИЧНИХ КОРТЕЖІВ

В. С. ДОНЧЕНКО, Т. П. ЗІНЬКО, Ф. О. СКОТАРЕНКО

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: voldon@unicyb.kiev.ua.

ABSTRACT. Concept of cortege linear operators is proposed and implemented for the variant when a cortege is a sequence of matrices with fixed dimensions. The proposed concept lets you transfer means of description the basic linear and nonlinear structures of Euclidean vectors space in matrix Euclidean space preserving the basic content and interpretations. It is principal that the complexity of the problems in matrices spaces is no more complex, than in vector spaces. In both cases the base is conventional eigenvalue problem for matrices.

KEYWORDS: linear operators, matrices, the pseudoinverse, Singular Value Decomposition, cortege.

РЕЗЮМЕ. В роботі висунута концепція кортежних операторів, яка реалізована для варіанту, коли кортежем є набір матриць фіксованої розмірності. Запропонована концепція дозволяє перенести конструктивні засоби опису основних лінійних та нелінійних структур евклідового простору числових векторів на матричні евклідові простори із збереженням основних змістів та інтерпретацій у запропонованій на основі „кортежної концепції“ формалізму. Принциповим є те, що складність опису згаданих структур в матричних евклідових просторах не перевищує складності опису відповідників для евклідових просторів числових векторів і зводиться до задачі на власні значення для матриць.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінійні оператори, матриці, псевдообернення, сингулярне подання, кортежі.

Вступ

Евклідові простори числових векторів R^n та їхнє використання в прикладних дослідженнях визначається з одного боку — багатством структур в рамках цих просторів, породжених операціями та скалярним добутком, з іншого — багатством конструктивних можливостей в оперуванні таким структурами. До перших: структур в евклідових просторах, які можна називати базовими, — можна, наприклад, віднести лінійні підпростори та гіперплощини (зсунені підпростори). Це ті структури, які можна позначити як множинні, як і еліпсоїди чи еліпсоїдальні циліндри. З іншого боку до базових структур можні віднести матриці лінійних операторів та невід'ємно визначених квадратичних форм. Ці базові утворення в евклідових просторах можна позначити як синглові структури. В евклідових просторах R^n множинні та синглові структури пов'язані між собою. Так з матрицею лінійного оператора природнім чином пов'язуються два підпростори: множина можливих значень та ядро оператора, а множина можливих розв'язків чи псевдорозв'язків СЛАР (системи лінійних алгебраїчних рівнянь) є гіперплощиною. Так само пов'язані між собою еліпсоїдальні циліндри та матриці невід'ємно визначених квадратичних форм, що їх задають. Ефективність та конструктивного використання базових структур значною мірою визначається засобами оперування з ними, зокрема, можливістю переходу від синглових до множинних і навпаки. Так, наприклад множина розв'язків СЛАР: точних чи псевдо — це гіперплощина (зсунутий підпростір). Це множинна структура, її конструктивний опис визначається можливістю її визначення за сингловою структурою — матрицею СЛАР. Такі можливості реалізуються через SVD (сингулярний розклад) та ПдО (псевдообернення) матриці СЛАР. Так само SVD та ПдО дозволяють побудувати ортогональні проектори на підпростори та гіперплощини, породжені наборами векторів: побудувати синглові структури за множинними. Такий перехід реалізує можливість ефективного обчислення відстаней від досліджуваних множинних утворень. Так само, SVD та ПдО, а також оператори на їх основі реалізує можливості ефективного опису матриці квадратичної форми, що задають еліпсоїди, які оптимальним, в певному сенсі, чином „накривають“ заданий набір векторів. Згаданий зв'язок між множинними та сингловими структурами, можливості його конструктивного опису є дуже важливими у прикладних задачах, які можна визначити терміном „задачі групування інформації“ (*GIP*): задач класифікації-кластеризації чи відновлення функції, представленою своїми спостереженнями.

Однак *GIP*-задачі є важливими не тільки в ситуаціях, коли об'єктами групування є числові вектори. Типовим прикладом згаданої ситуації є задачі розпізнавання аудіо сигналів, які природнім чином представлені матрицею спектрограми та матриці, якими представляються зображення в задачах обробки зображень. Отже, розвиток засобів розв'язання *GIP*-задач для матричних об'єктів, аналогічних тим, що існують для евклідових просторів числових векторів, є нагальною та важливою задачею для прикладних досліджень. В математичному плані, це означає розвиток методів, які б забезпечували ті ж можливості у використанні базових матричних структур,

що й в R^n . Як зазначалося вище, такі можливості для R^n визначаються технікою SVD та ПдО для матриць. Звісно, перенесення згаданої фундаментальної техніки на евклідові простори, відмінні від R^n , зокрема — на матричні евклідові простори, — вимагає зміни погляду на самі ці об'єкти. Це означає, перехід від погляду на SVD та ПдО як на матричні властивості, до формулювання погляду на них як на операторні властивості. Останнє означає, що SVD та ПдО стають способом подання лінійних операторів між слухними евклідовими просторами. Саме це складає основу концепції кортежних операторів для розв'язання задачі розвинення техніки оперування з базовими структурами в матричних евклідових просторах.

Стаття присвячена розгляду адекватних класів операторів між слухними евклідовими просторами, які би уможливили побудову засобів оперування з базовими алгебраїчними структурами в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності, аналогічними тим, що використовуються в R^n із тим самим рівнем конструктивності такого використання.

Згаданим слухним класом лінійних операторів, що дозволяє реалізувати програму створення засобів конструктивного оперування з базовими структурами матричних евклідових просторів є так звані „кортежні“ оператори за рядковими кортежами матриць між евклідовими просторами R^n та $R^{m \times n}$. Рівень конструктивності для таких операторів в побудові SVD та ПдО відповідає рівню конструктивності для R^n , оскільки сингулярний розклад таких операторів та відповідно, — ПдО — зводяться до сингулярного подання звичайних матриць. Отже, пропонується техніка реалізується тими ж технічними засобами розв'язання задач на власні значення, що і в класичному випадку.

1. АБСТРАКТНИЙ ВАРІАНТ СИНГУЛЯРНОГО ПОДАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ МІЖ ЕВКЛІДОВИМИ ПРОСТОРАМИ

SVD-подання матриці, яке полягає в тому чи іншому варіанті її факторизації, є важливим засобом конструктивного опису та оперування із базовими структурами R^n . Побудова апарату конструктивного оперування для інших типів евклідових просторів потребує надання SVD-подання матриці ширшого „операторного“ значення, що є предметом теореми 1.

Нижче під сингулярністю оператора розумітиметься пара власне число — власний вектор, через A^* — позначатиметься спряжений до A оператор.

Теорема 1. *(про SVD-подання лінійного оператора над довільними евклідовими просторами). Для довільної лінійного оператора A між евклідовими просторами E_1, E_2 : $A : E_1 \rightarrow E_2$ — справедливе наступне його подання у вигляді суми за елементами ненульових сингулярностей операторів AA^* , A^*A*

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \ell_{v_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i(v_i, \cdot), \quad (1)$$

де

- $r = \dim R(A) = \dim L_A$ розмірність підпростору можливих значень;
- $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$ — спільний набір ненульових власних чисел операторів AA^* , A^*A ;
- $u_i \in E_2$, $i = \overline{1, r}$ — ортонормований набір власних векторів оператора AA^* , що відповідають ненульовим власним числам $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$: $AA^*u_i = \lambda_i^2 u_i$, $\lambda_i^2 > 0$, $i = \overline{1, r}$, $u_i^T u_j = \delta_{ij}$, $i \neq j$;
- $v_i \in E_1$, $i = \overline{1, r}$ — ортонормований набір власних векторів оператора A^*A , що відповідають ненульовим власним числам $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$: $A^*Av_i = \lambda_i^2 v_i$, $\lambda_i^2 > 0$, $i = \overline{1, r}$, $v_i^T v_j = \delta_{ij}$, $i \neq j$, крім того,

$$u_i = \frac{Av_i}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1, r}, \quad v_i = \frac{A^*u_i}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1, r}. \quad (2)$$

Доведення. Доведення здійснюється так само, як для матриць: простори можливих значень оператора та спряженого співпадають із лінійними оболонками відповідних наборів: $v_i \in E_1$, $i = \overline{1, r}$ та $u_i \in E_2$, $i = \overline{1, r}$. Включення в один бік є очевидними, а співпадіння визначається однаковими розмірностями відповідних просторів. Далі перевіряється співпадіння вихідного оператора на $v_i \in E_1$, $i = \overline{1, r}$, а, отже і на $L(v_1, \dots, v_r)$. Останній підпростір є рейнджем — $\Re(A^*)$ (множина можливих значень) для спряженого оператора, а його ортогональне доповнення $L^\perp(v_1, \dots, v_r)$ — ядром оператора A . Отже, на векторах цього підпростору оператор A приймає нульові значення, а оператор, що визначається сумою — теж, оскільки всі вектори ортонормованого набору $v_i \in E_1$, $i = \overline{1, r}$ є ортогональними до векторів $L^\perp(v_1, \dots, v_r)$. Оскільки, $E_1 = L(v_1, \dots, v_r) + L^\perp(v_1, \dots, v_r)$, то за лінійністю операторів в лівій та правій частині, отримуємо співпадіння їхніх значень на будь яких векторах — елементах області можливих значень. $\square$

Для матриць заміна спряженості на транспонування, а ℓ_{v_i} , $i = \overline{1, r}$ на v_i^T , $i = \overline{1, r}$ дає „операторний“ варіант теореми про SVD-подання матриці.

Наслідок 1. Теорема про (SVD подання матриці лінійного оператора ([1], див. також [2])). Довільна матриця $A \in R^{m \times n}$ рангу $r \leq \min(m, n)$, може бути подана у вигляді

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i v_i^T, \quad (3)$$

за ненульовими наборами сингулярностей (u_i, λ_i^2) , (v_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$ матриць AA^T , $A^T A$.

Важливою є наступна теорема 2, яка має „обернений“ до теореми 1 характер.

Теорема 2. Нехай в абстрактних евклідових просторах E_1, E_2 задані:

- 1) набір додатних чисел λ_i^2 : $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$, $i = \overline{1, r}$, $r \leq \min(\dim E_1, \dim E_2)$;
- 2) ортонормований набір векторів $v_i \in E_1$, $i = \overline{1, r}$;

3) ортонормований набір векторів $u_i \in E_2, i = \overline{1, r}$.

Тоді для оператора $A_{\lambda, u, v}$, визначеного за згаданими вище елементами співвідношенням

$$A_{\lambda, u, v} \equiv \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \ell_{v_i} \quad (4)$$

його сингулярне подання співпадає із співвідношенням (4), що його задає.

Доведення. Доведення випливає з того, що, як свідчить безпосередня перевірка, $(v_i, \lambda_i^2), (u_i, \lambda_i^2), i = \overline{1, r}$ є повними ортонормованими наборами сингулярностей для операторів $A_{\lambda, u, v}^* A_{\lambda, u, v}, A_{\lambda, u, v} A_{\lambda, u, v}^*$, відповідно. Що й доводить теорему. $\square$

2. „АБСТРАКТНИЙ“ ВАРІАНТ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ

В „абстрактному“ варіанті визначення псевдообернення (ПдО): ПдО для лінійних операторів між абстрактними евклідовими просторами, — слушним інструментом є визначення ПдО за SVD-поданням оператора.

Означення 1. ПдО для лінійного оператора A між евклідовими просторами E_1, E_2 називатимемо оператор $A^+ : E_2 \rightarrow E_1$, що визначається співвідношенням:

$$A^+ = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i \ell_{u_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i (u_i, \cdot). \quad (5)$$

Зауваження. За оберненою теоремою про SVD-подання співвідношення (5) визначає сингулярне подання оператора A^+ .

Всі властивості матричного ПдО залишаються справедливими для загального варіанту визначення з точністю до заміни транспонування на спряженість, а реалізації скалярного добутку засобами матричної алгебри — самим скалярним добутком.

Основні властивості „абстрактного“ ПдО

1. $(A^+)^+ = (A^+)^*$.
2. $P_{L_{A^*}} = A^+ A, Z(A) = I_{E_1} - A^+ A = P_{Ker A}$ — оператори ортогонального проектування на підпростір можливих значень оператора A^* та ядро оператора A , відповідно.
3. $P_{L_A} \equiv A^{++} A^* = A A^+, Z(A^*) = I_{E_2} - A A^+ = P_{Ker A^*}$ оператори ортогонального проектування на підпростір можливих значень оператора та ядро оператора A^* , відповідно.
4. $A^* (A A^+)^+ = (A^* A)^+ A^*$.
5. Множина розв'язків чи псевдорозв'язків Ω_y СЛАР $Ax = y$ задається співвідношенням

$$\Omega_y = A^+ y + Z(A) E_1. \quad (6)$$

Якщо $(y, Z(A^*)y) = 0$, множина (6) задає множину розв'язків, якщо $(y, Z(A^*)y) > 0$ — псевдорозв'язків. Умова $(y, Z(A^*)y) = 0$ є необхідною та достатньою для розв'язності СЛАР.

Під псевдорозв'язками мається на увазі розв'язки оптимізаційної задачі пошуку $\text{Arg} \min_{x \in R^n} \|Ax - y\|^2$ — найкращого квадратичного наближення правої частини СЛАР значеннями лівої частини.

1. Групувальні оператори $R(A)$, $R(A^*)$ визначаються співвідношеннями: $R(A) = A^+ A^{*+}$, $R(A^*) \equiv A^{*+} A^+$.
2. $\underbrace{A^* R(A^*) A}_{A^+ A} = A^+ A = P_{L_{A^*}}.$

3. „КОРТЕЖНІ ОПЕРАТОРИ“

В роботі [2] висунута концепція кортежних операторів, реалізована в згаданій роботі для варіанту матричних рядкових кортежів за матрицями фіксованої розмірності. Ця концепція передбачає, що реалізація програми перенесення техніки оперування з основними базовими структурами в евклідових просторах числових векторів на матричні евклідові простори розв'язується через введення та дослідження слухних лінійних операторів над слухними евклідовими просторами. Такими лінійними операторами є ті, що нижче позначаються терміном „кортежні“.

В подальшому використовуватиметься матричний евклідів простір $R^{m \times n}$ — матриць фіксованої розмірності $m \times n$ з покоординатними операціями додавання, а також множення на скаляр, та з „покоординатним“ визначенням скалярного добутку:

$$(A, B) = \sum_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} a_{ij} b_{ij} : \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}.$$

Цей скалярний добуток називають також „слідовим“, оскільки $(A, B) = \text{tr} A^T B$.

Називатимемо впорядкований набір $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$ матриць фіксованої розмірності: $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ — рядковим матричним кортежем (довжини K).

Означення 2. Кортежним оператором $\wp_\alpha$, що задається рядковим матричним кортежем $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$, називатимемо лінійний оператор $\wp_\alpha : R^K \rightarrow R^{m \times n}$, що задається співвідношенням:

$$\wp_\alpha x = \sum_{k=1}^K x_k A_k, \quad \alpha = (A_1, \dots, A_K), \quad x^T = (x_1, \dots, x_K) : x \in R^K.$$

Очевидним чином має місце наступна теорема, що є відповідником теореми для R^n , за якою лінійний підпростір значень лінійного оператора є лінійною оболонкою стовпчиків матриці, якою цей оператор задається.

Лема 1. Лінійний підпростір $L(A_k, k = \overline{1, K})$, породжений набором матриць $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ співпадає із лінійним підпростором $L_{\wp_\alpha}$ можливих значень „кортежного оператора“ $\wp_\alpha$ за кортежем $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$.

Лема 2. Спряженим $\wp_\alpha^*$ до кортежного оператора $\wp_\alpha$ є лінійний оператор $\wp_\alpha^* : R^{m \times n} \rightarrow R^K$ [6],

$$\wp_\alpha^* Y = \begin{pmatrix} (A_1, Y) \\ \dots \\ (A_K, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{tr} Y^T A_1 \\ \dots \\ \text{tr} Y^T A_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{A_1} Y \\ \dots \\ \ell_{A_K} Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{A_1} \\ \dots \\ \ell_{A_K} \end{pmatrix} Y, \quad (7)$$

де $Y \in R^{m \times n}$, ℓ_A — це лінійний функціонал на $R^{m \times n}$, породжений $A \in R^{m \times n}$ у відповідності до співвідношення

$$\ell_A Y = (A, Y), \quad Y \in R^{m \times n}.$$

Зауваження. Зазначимо, що співвідношення (7), визначає „стовпчиковий кортежний оператор“ $\wp_\chi : R^{m \times n} \rightarrow R^K$, що задається стовпчиковим кортежем χ , ($Y \in R^{m \times n}$):

$$\chi = \begin{pmatrix} \ell_{A_1} \\ \dots \\ \ell_{A_K} \end{pmatrix} : \wp_\chi Y = \begin{pmatrix} (A_1, Y) \\ \dots \\ (A_K, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{A_1} Y \\ \dots \\ \ell_{A_K} Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{A_1} \\ \dots \\ \ell_{A_K} \end{pmatrix} Y.$$

Лема 3. Добуток двох операторів $\wp_\alpha^* \wp_\alpha : R^K \rightarrow R^K$ є лінійним оператором що визначається стандартним чином $K \times K$ матрицею F , яка визначається співвідношенням [6]

$$F \equiv \wp_\alpha^* \wp_\alpha = ((A_i, A_j))_{i,j=\overline{1,K}}. \quad (8)$$

Зауважимо, що матриця F , визначена співвідношенням (8), є матрицею Грама набору елементів (матриць) $A_1, \dots, A_K$ з евклідового простору $R^{m \times n}$.

Сингулярний розклад оператора $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$ є сингулярним розкладом матриці F , що визначається співвідношенням (8).

Матриця F очевидним чином є симетричною та невід’ємно визначеною. Вона однозначно визначає ортонормований набір ненульових сингулярностей (v_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$:

$$\begin{aligned} \|v_i\| &= 1, \quad v_i \perp v_j, \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, r}; \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \\ \wp_\alpha^* \wp_\alpha v_i &= F v_i = \lambda_i^2 v_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad r = \text{rank} F, \\ v_i^T &= (v_{1i}, \dots, v_{Ki}), \quad i = \overline{1, r} \end{aligned}$$

і має SVD-подання

$$\wp_\alpha^* \wp_\alpha = F = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 v_i v_i^T = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 v_i (v_i, \cdot) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 v_i \ell_{v_i}. \quad (9)$$

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 3. SVD-подання лінійного оператора $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$ задається співвідношенням (9).

Наступне твердження є очевидним наслідком теореми 3 та загальної теореми про SVD-подання лінійного оператора над абстрактними евклідовими просторами.

Наслідок 2. Матриці $U_i \in R^{m \times n} : U_i = \frac{1}{\lambda_i} \wp_\alpha v_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^K A_k v_{ki}$, $i = \overline{1, r}$, які визначені сингулярностями (v_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$ оператора $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$

є елементами повного набору ненульових сингулярностей (U_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$ оператора $\wp_\alpha \wp_\alpha^* : R^{m \times n} \rightarrow R^{m \times n}$ [6].

Теорема 4. (Сингулярний розклад кортежного оператора) [6]. Набори сингулярностей двох операторів: $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$, $\wp_\alpha \wp_\alpha^*$ однозначно визначають сингулярне (SVD-) подання операторів $\wp_\alpha$, $\wp_\alpha^*$:

$$\wp_\alpha x = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i v_i^T x = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i (v_i, x) = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i \ell_{v_i} \right) x, \quad x \in R^K, \quad (10)$$

$$\wp_\alpha^* Y = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i (U_i, Y) = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \ell_{U_i} \right) Y, \quad Y \in R^{m \times n}, \quad r = \text{rank} F.$$

Наслідок 3. Варіантом сингулярного подання $\wp_\alpha$ є його запис у вигляді:

$$\wp_\alpha = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k v_k^T = \sum_{k=1}^r (\wp_\alpha v_k) \ell_{v_k}, \quad r = \text{rank} F. \quad (11)$$

Наслідок 4. Набори ненульових сингулярностей (v_i, λ_i^2) , (U_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$, операторів $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$, $\wp_\alpha \wp_\alpha^*$ відповідно пов'язані між собою «симетричними» співвідношеннями:

$$v_i = \frac{\wp_\alpha^* U_i}{\lambda_i}, \quad U_i = \frac{\wp_\alpha v_i}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Зауваження. Звернемо увагу, що сингулярне подання кортежного оператора: співвідношення (10) чи (11), — будується на основі розв'язання матричної задачі на власні значення. Отже, таке подання має конструктивність того самого порядку, що й у випадку SVD-подання матриць.

3.1. ПСЕВДООБЕРНЕННЯ ДЛЯ „КОРТЕЖНИХ ОПЕРАТОРІВ“

ПдО кортежного оператора визначається у відповідності до „абстрактного“ визначення ПдО: визначення за співвідношенням (3) для лінійних операторів між абстрактними евклідовими просторами.

Означення 3. (ПдО кортежного оператора через його SVD) [6]. ПдО: $\wp_\alpha^+$, $\wp_\alpha^{*+}$ відповідно — визначатиметься співвідношеннями:

$$\wp_\alpha^+ Y = \sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} v_k (U_k, Y) \equiv \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} v_k \ell_{U_k} \right) Y, \quad Y \in R^{m \times n},$$

$$(\wp_\alpha^*)^+ x = \sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} U_k v_k^T x = \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} U_k \ell_{v_k} \right) x, \quad x \in R^K.$$

3.2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКТОРИ ОСНОВНИХ ПІДПРОСТОРІВ ДЛЯ „КОРТЕЖНИХ ОПЕРАТОРІВ“

Фундаментальними підпросторами лінійних операторів є: множина можливих значень (рейндж) для самого оператора та спряженого до нього; їхні ортогональні доповнення, які є ядрами суміжних операторів. ПдО теорія за Муром-Пенроузом для матриць надає можливості конструктивного опису ортогональних проекторів згаданих підпросторів в евклідових просторах числових векторів. Ці результати повністю переносяться на кортежні оператори.

Фундаментальні підпростори кортежного оператора та спряженого до нього: відповідні пари множина можливих значень $\mathfrak{R}$ (рейндж) — ядро — позначатимуться відповідно: $\mathfrak{R}(\wp_\alpha) \equiv L_{\wp_\alpha} \subseteq R^{m \times n}$, $Ker \wp_\alpha \subseteq R^K$ та $\mathfrak{R}(\wp_\alpha^*) \equiv L_{\wp_\alpha^*} \subseteq R^K$, $Ker \wp_\alpha^* \subseteq R^{m \times n}$. Ортогональні проектори пари оператор - спряжений позначатимуться відповідно $P_{L_{\wp_\alpha}}, P_{L_{\wp_\alpha^*}}$. Оскільки ядро оператора є ортогональним доповненням до рейнджу спряженого, то ортогональні проектори $Z(\wp_\alpha) \equiv P_{Ker(\wp_\alpha)}$, $Z(\wp_\alpha^*) \equiv P_{Ker \wp_\alpha^*}$ ядер операторів $\wp_\alpha, \wp_\alpha^*$, відповідно є доповненнями до тотожних $E_K, E_{m \times n}$ операторів у відповідних евклідових просторах.

Лема 4. Ортогональні проектори фундаментальних підпросторів операторів $\wp_\alpha, \wp_\alpha^*$ визначаються співвідношеннями $P_{L_{\wp_\alpha^*}}, P_{L_{\wp_\alpha}}$

$$P_{L_{\wp_\alpha^*}} = \wp_\alpha^{*+} \wp_\alpha, \quad P_{L_{\wp_\alpha}} = \wp_\alpha^+ \wp_\alpha^*, \quad (12)$$

$$Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - \wp_\alpha^{*+} \wp_\alpha, \quad Z(\wp_\alpha^*) \equiv E_{m \times n} - \wp_\alpha^+ \wp_\alpha^*. \quad (13)$$

Доведення. Справедливість (12) випливає з того, що

$$\wp_\alpha^{*+} \wp_\alpha = \sum_{k=1}^r v_k \ell_{v_k}, \quad \wp_\alpha^+ \wp_\alpha^* = \sum_{k=1}^r U_k \ell_{U_k}. \quad (14)$$

Як нескладно переконатися, співвідношення (14) визначають симетричні та ідемпотентні оператори, тобто ці оператори є ортогональними проекторами. Очевидним чином їхні рейнджі співпадають відповідно із $L(v_1, \dots, v_r)$ та $L(U_1, \dots, U_r)$, які у свою чергу співпадають з $\mathfrak{R}(\wp_\alpha^*) = L_{\wp_\alpha^*}$, $\mathfrak{R}(\wp_\alpha) = P_{L_{\wp_\alpha}}$, відповідно. $\square$

3.3. ВЛАСТИВОСТІ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ ДЛЯ „КОРТЕЖНИХ ОПЕРАТОРІВ“

Як зазначалося вище, ПдО кортежного оператора має властивості, що фігурують у визначенні ПдО за Муром чи за Пенроузом для матриць.

Зокрема, виконуються такі співвідношення:

1. Аксиоми переваги та ортогональних проекторів за Муром:

$$\begin{cases} \wp_\alpha^+ \wp_\alpha \wp_\alpha^+ = \wp_\alpha^+, & \wp_\alpha \wp_\alpha^+ \wp_\alpha = \wp_\alpha - \text{”аксіома” переваги,} \\ P_{L_{\wp_\alpha}} = \wp_\alpha^+ \wp_\alpha, & P_{L_{\wp_\alpha^*}} = \wp_\alpha \wp_\alpha^+ - \text{”аксіома” ортогональних проекторів.} \end{cases}$$

2. „Аксиома оптимальності“: визначення псевдооберненої матриці за Пенроузом: $\wp_\alpha^+ Y = \arg \min_{x \in Arg \min \|\wp_\alpha x - Y\|^2} \|x\|^2, Y \in R^{m \times n}, Y \neq 0$.

В роботі [7] наведено який вигляд згаданих операторів ортогонального проектування та їхнє використання у „відстанях відповідності“ для розв’язання задач розпізнавання жестів дактильної мови.

3. Квадрат відстані від підпростору $L(A_1, \dots, A_K)$, $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$: $\rho^2(Y, L(A_1, \dots, A_K)) = (Y, \wp_\alpha \wp_\alpha^+ Y) = \sum_{k=\overline{1, K}} (Y, U_k)^2$, $Y \in R^{m \times n}$, $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$.

4. Квадрат відстані від гіперплощини $\Gamma(M, L(A_1, \dots, A_K)) \equiv M + L(A_1, \dots, A_K) : M, A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$: $\rho^2(Y, \Gamma(M, L(A_1, \dots, A_K))) = (Y - M, \wp_\alpha \wp_\alpha^+ Y - M) = \sum_{k=\overline{1, K}} (Y - M, U_k)^2$.

$$Y \in R^{m \times n}, \alpha = (A_1, \dots, A_K).$$

5. Множина розв’язків чи псевдорозв’язків Ω_Y СЛАР $\wp_\alpha x = Y$ задається співвідношенням

$$\Omega_Y = \wp_\alpha^+ Y + Z(\wp_\alpha) R^K. \quad (15)$$

Якщо $(Y, Z(\wp_\alpha^*)Y) = 0$, множина (6) задає множину розв’язків, якщо $(Y, Z(\wp_\alpha^*)Y) > 0$ — псевдорозв’язків. Умова $(Y, Z(\wp_\alpha^*)Y) = 0$ є необхідною та достатньою для розв’язності СЛАР.

3.4. Групувальні оператори та еліпсоїди групування

Нагадаймо, що у випадку евклідового простору числових векторів, групувальні оператори задають структури другого порядку: еліпсоїди чи мінімальні еліпсоїди групування, — та матриці квадратичних форм, що згадані еліпсоїди визначають. Під еліпсоїдами групування: простими чи мінімальними, центральними чи нецентральними, — розуміють еліпсоїди, що оптимально «накривають» вектори із заданої послідовності, зокрема — векторів навчальної вибірки. Еліпсоїди можуть мати центром початок координат: центральні, чи інший центр — нецентральні. Оптимальність еліпсоїдів полягає у тому, що їхні осі максимізують суму квадратів проекцій елементів групування на відповідні осі за послідовної їх побудови за згаданим принципом та виключення із області визначення задачі оптимізації.

Концепція кортежних операторів дозволяє повністю перенести всі твердження про групування для векторів на набори матриць. Для матричних наборів виявляються вірними всі твердження про еліпси групування в евклідових просторах R^n . Ці твердження про групування є предметом теорем, наведених нижче.

Так само, як і твердженнях про групування для евклідових просторів числових векторів основними засобами групування, оператори, які зважаючи на їх властивості, природно називати групувальними. Їх також називають зваженими проекційними.

Означення 4. Групувальними для кортежного оператора називатимемо оператори $R(\wp_\alpha)$, $R(\wp_\alpha^*)$, що визначатимуться співвідношеннями:

$$R(\wp_\alpha) = \wp_\alpha^+ \wp^{+*}, \quad R(\wp_\alpha^*) = \wp^{+*} \wp_\alpha^+.$$

Лема 5. Кожен з двох групувальних операторів може бути поданий за елементами SVD-подання кортежного оператора $\wp_\alpha$ у вигляді

$$R(\wp_\alpha^*) = \wp^{+*} \wp_\alpha^+ = \sum_{i=\overline{1,r}} \frac{U_i \ell_{U_i}}{\lambda_i^2} = \sum_{i=\overline{1,r}} \frac{U_i(U_i, \cdot)}{\lambda_i^2},$$

$$R(\wp_\alpha) = \sum_{i=\overline{1,r}} \frac{v_i \ell_{v_i}}{\lambda_i^2} = \sum_{i=\overline{1,r}} \frac{v_i v_i^T}{\lambda_i^2}.$$

Лема 6. Сума квадратів довжин проєкцій елементів кортежу $\alpha = (A_1 : \dots : A_K)$, $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ на одновимірний підпростір, що задається нормованою матрицею $U : U \in R^{m \times n} : \|U\| = 1$ — визначається співвідношенням:

$$\sum_{k=1}^r \|P_{L(U)} A_k\|^2 = (U, \wp_\alpha \wp_\alpha^* U). \quad (16)$$

Доведення. Дійсно,

$$P_{L(U)} A_k = (U, A_k) U \Rightarrow \|P_{L(U)} A_k\|^2 = |(U, A_k)|^2,$$

$$\begin{aligned} \text{а, отже, } \sum_{k=1}^K \|P_{L(U)} A_k\|^2 &= \sum_{k=1}^K |(U, A_k)|^2 = \left\| \begin{pmatrix} (U, A_1) \\ \vdots \\ (U, A_K) \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\wp_\alpha^* U\|^2 = \\ &= (\wp_\alpha^* U, \wp_\alpha^* U) = (U, \wp_\alpha \wp_\alpha^* U). \quad \square \end{aligned}$$

Лема 7. Одновимірні підпростори, породжені векторами ненульового набору сингулярностей оператора $\wp_\alpha \wp_\alpha^*$ є розв'язками оптимізаційних задач про максимізацію суми квадратів проєкцій на одновимірні підпростори, породжені нормованими матрицями:

$$U_1 = \arg \max_{U \in R^{m \times n} : \|U\|=1} \sum_{k=1}^K \|P_{L(U)} A_k\|^2, \quad (17)$$

$$\max_{U \in R^{m \times n} : \|U\|=1} \sum_{k=1}^K \|P_{L(U)} A_k\|^2 = \lambda_1^2,$$

$$U_i = \arg \max_{U \in R^{m \times n} : \|U\|=1, U \perp U_1, U \perp U_{i-1}} \sum_{k=1}^K \|P_{L(U)} A_k\|^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad r = \text{rank} F, \quad (18)$$

$$\max_{U \in R^{m \times n} : \|U\|=1, U \perp U_1, U \perp U_{i-1}} \sum_{k=1}^K \|P_{L(U)} A_k\|^2 = \lambda_i^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad r = \text{rank} F.$$

Доведення. Те, що на $U = U_i$, $i = \overline{1, r}$ значення суми квадратів проєкцій визначається відповідно значеннями λ_i^2 , $i = \overline{1, r}$ перевіряється безпосередньою підстановкою. Оптимальність впливає із розгляду розкладу будь якого $U : U \in R^{m \times n} : \|U\| = 1$ за базисом в $R^{m \times n}$, побудованим розширенням U_i , $i = \overline{1, r}$. $\square$

Теорема 5. Нехай $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ довільний набір матриць із $R^{m \times n}$, $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$ – матричний кортеж, а $\wp_\alpha$ – кортежний оператор, який йому відповідає [2]. Тоді всі матриці набору $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ належать внутрішності еліпса, точніше: еліпсоїдального циліндра, який визначається рівнянням

$$\sum_{i=1}^r \frac{(U_i, X)^2}{(\lambda_i \sqrt{r})^2} \leq 1, \quad (19)$$

чи, що еквівалентно

$$(X, r^{-1} R(\wp_\alpha^*) X) = 1, \quad r = \text{rank} F, \quad X \in R^{m \times n}, \quad (20)$$

де $R(\wp_\alpha^*)$ – групувальний оператор $R(\wp_\alpha^*) = \wp^{+*} \wp_\alpha^+$.

Доведення. З (16)–(18) випливає, що

$$\|P_{L(U_i)} A_k\|^2 \leq \lambda_i^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad r = \text{rank} F, \quad k = \overline{1, K},$$

тобто

$$\|P_{L(U_i)} A_k\|^2 = (U_i A_k)^2 \leq \lambda_i^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, K},$$

що еквівалентно

$$\frac{(U_i A_k)^2}{\lambda_i^2} \leq 1, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Сумуючи в останньому співвідношенні по i для кожного із фіксованих значень $k = \overline{1, K}$, маємо

$$\sum_{i=1}^r \frac{(U_i A_k)^2}{\lambda_i^2} \leq r.$$

чи

$$\sum_{i=1}^r \frac{(U_i A_k)^2}{(\lambda_i \sqrt{r})^2} \leq 1, \quad k = \overline{1, K}. \quad (21)$$

Зазначимо, що

$$\text{sum}_{i=1}^r \frac{(U_i X)^2}{r \lambda_i^2} = (X, r^{-1} R(\wp_\alpha^*) X),$$

а, отже

$$\sum_{i=1}^r \frac{(U_i X)^2}{r \lambda_i^2} \leq 1 \Leftrightarrow (X, r^{-1} R(\wp_\alpha^*) X) \leq 1. \quad (22)$$

Оскільки нерівності в (22) визначають еліпсоїдальний циліндр з осями $U_i \in R^{m \times n}$, $i = \overline{1, r}$ та довжинами напівосей, відповідно, $\sqrt{r} \lambda_i$, $i = \overline{1, r}$, то виконання A_k , $k = \overline{1, K}$ співвідношень (22) означає, що всі вони належать внутрішності згаданих еліпсоїдальних циліндрів, і доведення теореми завершено. $\square$

Будемо називати еліпсоїд, що визначається нерівністю (19) чи (20) центральним еліпсоїдом групування.

Важливими у задачах групування матриць є також еліпсоїди, які позначаються терміном „нецентральні еліпсоїди групування“: ті що мають центром середнє $\bar{A}$ елементів набору A_k , $k = \overline{1, K}$, а кортежний оператор визначається за кортежем $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_K)$, $\tilde{A}_k = A_k - \bar{A}$, $k = \overline{1, K}$.

Означення 5. Нецентральними еліпсоїдом групування для кортежного оператора $\wp_\alpha$: $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$ — називатимемо еліпсоїд, що визначається співвідношенням

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\tilde{U}_i, X - \bar{A})^2}{(\tilde{\lambda}_i \sqrt{r})^2} \leq 1 \Leftrightarrow (X - \bar{A}, r^{-1} R(\wp_\alpha^*)(X - \bar{A})) \leq 1, \quad X \in R^{m \times n}. \quad (23)$$

Теорема 6. *Всі матриці-елементи матричного кортежу $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$ належать нецентральному еліпсоїду групування (23) з $(\tilde{U}_i, \tilde{\lambda}_i^2)$, $i = \overline{1, r}$, що є ненульовими сингулярностями кортежного оператора $\wp_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_K)$.*

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з теореми 5, оскільки для елементів кортежу $\tilde{\alpha}$ та кортежного оператора $\wp_{\tilde{\alpha}}$ виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\tilde{U}_i, \tilde{A}_k)^2}{(\tilde{\lambda}_i \sqrt{r})^2} \leq 1, \quad k = \overline{1, r},$$

чи

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\tilde{U}_i, A_k - \bar{A})^2}{(\tilde{\lambda}_i \sqrt{r})^2} \leq 1, \quad k = \overline{1, r},$$

що й доводить теорему. $\square$

Зауваження. Наведені вище «групувальні теореми» можна підсилити, підставивши замість r число: $r_{\min} \leq r$.

3.5. МІНІМАЛЬНІ ЕЛІПСОЇДИ ГРУПУВАННЯ ДЛЯ „КОРТЕЖНИХ ОПЕРАТОРІВ“

Визначимо $r_{\min} \leq r$, $\tilde{r}_{\min} \leq r$ відповідно співвідношеннями

$$r_{\min} = \max_{k=\overline{1, K}} (A_k, R(\wp_\alpha^*) A_k), \quad \tilde{r}_{\min} = \max_{k=\overline{1, K}} (\tilde{A}_k, R(\wp_{\tilde{\alpha}}^*) \tilde{A}_k). \quad (24)$$

Теорема 7. *Всі матриці набору $A_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ належать внутрішності еліпсів, точніше еліпсоїдальних циліндрів — центральних чи нецентральных, — що задаються співвідношеннями, відповідно [2]:*

$$\begin{aligned} (X, r_{\min}^{-1} R(\wp_\alpha^*) X) &\leq 1, \\ (X - \bar{A}, \tilde{r}_{\min}^{-1} R(\wp_{\tilde{\alpha}}^*) (X - \bar{A})) &\leq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Означення 6. Еліпсоїди групування, що визначаються співвідношеннями (23) називатимемо мінімальними еліпсами групування.

ВИСНОВОК

Оперування із базовими лінійними та нелінійними структурами в матричних евклідових просторах $R^{m \times n}$ потребує розвинення адекватних конструктивних засобів такого оперування. Практика використання згаданих

структур в R^n значною мірою базується на SVD-поданні матриць та псевдо-оберненні (ПдО) матриць за Муром-Пенроузом, тому побудова засобів оперування в $R^{m \times n}$ потребує слушних відповідників SVD та ПдО. Таким відповідниками є SVD та ПдО твердження для слушних лінійних операторів, якими, як продемонстровано вище, є „кортежні оператори“ за рядковими кортежами матриць. Концепція розвитку засобів оперування із базовими структурами для матричних евклідових просторах може бути позначена терміном „концепція кортежності“. Для описаного в роботі класу кортежних операторів побудоване SVD-подання, що дозволило побудувати на основі такого подання теорію псевдообернення з конструктивними можливостями отримання формульних виразів як для ортогональних проекторів базових підпросторів оператора, так і для групувальних операторів. Згадана вище конструктивність означає, що побудова згаданих об'єктів зводиться до розв'язання задачі на власні значення для матриць операторів в R^n . Наявність засобів оперування з базовими структурами в матричних просторах суттєво розширює можливості використання таких просторів в математичному моделюванні, оскільки в багатьох важливих в прикладному відношенні задачах математичного моделювання саме матриці з'являються як представники аналізованих об'єктів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kirichenko N. F. Analytical representation of perturbation of pseudoinverse matrices // Cybernetics and system analysis. — Vol. 33, № 2. — March-April, 1997. — P. 230–239.
2. Donchenko V., Zinko T., Skotarenko F. „Feature vectors“ in grouping information problem in applied mathematics: vectors and matrixes // Problems of computer Intellectualization. ITHEA, Kyiv, Ukraine-Sofia, Bulgaria, 2012. — P. 111–124.
3. Донченко В., Кривонос Ю., Омардибиров В. Базовые структуры евклидовых пространств: конструктивные методы описания и использования // New Trends in Classification and Data Mining. — ITHEA, Sofia, Bulgaria, 2010. — P. 155–170.
4. Кириченко Н. Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. — К., 1997. № 2. — С. 98–107.
5. Donchenko V., Nazaraga I., Tarasova O. Matrixes least squares method and examples of its application // International Journal Information Technologies & Knowledge, 2013. — Vol. 7, № 4. — P. 325–336.
6. Донченко В. С. Евклидовы пространства: конструктивные методы описания базовых структур и их использование // Information Models of Knowledge. — Editors: Krassimir Markov, Vitalii Velichko, Oleksy Voloshin — ITHEA. — Kiev, Ukraine — Sofia, Bulgaria. Number 19, 2010. — P. 362–376.
7. Голік А. О., Донченко В. С. Застосування еліпсоїдальної та ортогональної відстаней відповідності у задачах розпізнавання мови та жестів. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, — 2013, Вип. 1. — С. 146–155.
8. Kirichenko N. F., Donchenko V. S., Serbaev D. P. Nonlinear recursive nonlinear transformation: dynamic systems and optimization // Cybernetics and system analysis. — Vol. 41, № 3. May 2005. — P. 364–373.

УДК 519.83

MSC 01A70, 91A06, 91A10, 91A46

IN MEMORY OF JOHN NASH

S. I. DOTSENKO, V. V. SEMENOV

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kiev, Kiev, Ukraine,
E-mail: sergei204@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com.

ПАМ'ЯТИ ДЖОНА НЭША

С. И. ДОЦЕНКО, В. В. СЕМЕНОВ

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
Киев, Украина, E-mail: sergei204@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com.

ABSTRACT. The article presents a brief overview of mathematical results by John Forbes Nash (1928–2015) related to the theory of noncooperative games. The focus is on the concept of Nash equilibrium. A simple examples of games in which the concept of Nash equilibrium is paradoxical are given. At the same time, the Nash equilibrium is a natural concept in many situations. Also considered the contribution of John Nash in the development of the theory of combinatorial games. The article is based on Lecture given by the first author June 3, 2015 at a scientific seminar of Professor Alexander Nakonechny (Department of System Analysis, Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kiev).

KEYWORDS: noncooperative games, Nash equilibrium, bimatrix games, combinatorial games, Hex.

РЕЗЮМЕ. В статье дан краткий обзор математических результатов Джона Форбса Нэша (1928–2015), связанных с теорией некооперативных игр. Основное внимание уделено понятию равновесия по Нэшу. На простых примерах показаны парадоксальность этого понятия и в то же время его естественность. Также рассмотрен вклад Нэша в теорию комбинаторных игр. В основе статьи лежит лекция, прочитанная первым автором 3 июня 2015 года на научном семинаре профессора А. Г. Наконечного (кафедра системного анализа, факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: некооперативные игры, равновесие Нэша, биматричные игры, комбинаторные игры, Гекс.

1. ВВЕДЕНИЕ

23 мая 2015 года в возрасте 86 лет из жизни ушел Джон Форбс Нэш, выдающийся математик и экономист. Он погиб в автокатастрофе на территории штата Нью-Джерси вместе со своей женой Алисией Нэш (Алисией Лард).

Всего за несколько дней до гибели Джон Нэш получил из рук короля Норвегии Харальда V премию Абеля за открытия, ставшие „важным инструментом исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных“.

В последние годы жизни Джон Нэш выступал на различных экономических форумах и конференциях с лекцией „идеальные деньги“ [1].

По мнению Нэша, идеальные деньги будут привязаны к глобальным показателям мировой экономики и не будут подвержены инфляции. В основе концепции идеальных денег положен тот же теоретический фундамент, что и в основу теории некооперативных игр, а именно теория полезности фон Неймана–Моргенштерна. Согласно теории полезности денег, идеальные деньги являются ценностью не сами по себе, но проявляют свою ценность как носители полезности, будучи примененными в определенных сферах экономической деятельности, подобно воде или электроэнергии. Но эти идеи не могут быть приняты всерьез многими, поэтому Нэш предлагает альтернативные „асимптотически идеальные деньги“, как более реалистичный вариант рациональной мировой валюты [2].

Но все же Джон Нэш навсегда останется в истории прежде всего как автор концепции „равновесие по Нэшу“ (Nash equilibrium), являющейся ключевым понятием в современной теории игр и экономике.

Выдающиеся математики современности так высказывались о концепции равновесия по Нэшу.

Гарольд Кун, один из основоположников современной теории оптимизации, многолетний друг Джона Нэша: *„в экономической теории 20-го века было не так много великих идей, но идея равновесия по Нэшу несомненно является одной из них“*.

Роджер Майерсон, лауреат Нобелевской премии по экономике 2007 года: *„идея равновесия по Нэшу дала толчок развитию экономической теории в такой же степени, как открытие двойной спирали ДНК дало толчок развитию биологии“*.

Концепция равновесия была впервые сформулирована Нэшем в диссертационной работе „Некооперативные игры“ объемом 27 страниц. Работа написана им в 1949 году в возрасте 21 год. Впоследствии по материалам диссертации в 1994 году Джону Нэшу (совместно с Джоном Харшаньи и Рейхардом Зельтоном) была присуждена Нобелевская премия по экономике „за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр“.

2. РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ

Формально понятие равновесия по Нэшу определяется таким образом.

Задается игра в нормальной форме, которая включает в себя множество игроков, множество стратегий игроков и функцию выигрыша.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, $n \in \mathbb{N}$ — их количество, причем количество игроков должно быть не менее двух. Для каждого из игроков задается множество X_i , описывающее набор его стратегий, причем каждый из игроков должен иметь не менее двух стратегий. Каждый из допустимых наборов стратегий $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ образует игровую ситуацию на множестве $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Функция выигрыша — это отображение из множества игровых ситуаций в множество платежей $F : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое каждой игровой ситуации $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставит в соответствие вектор выигрышей игроков $(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Определение 1. Ситуация $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ называется равновесием по Нэшу (Nash equilibrium), если

$$\forall i \in N \forall x_i \in X_i \quad F_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n) \geq F_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n),$$

т. е. любому из игроков невыгодно отклоняться от своей стратегии при условии, что все остальные игроки придерживаются своих стратегий.

Основным результатом, полученным Джоном Нэшем, является

Теорема 1 (John Forbes Nash, 1951, [3]). *Любая игра конечного числа игроков с конечным множеством стратегий имеет точку равновесия по Нэшу, по крайней мере в смешанных стратегиях.*

К сожалению, данная теорема не конструктивна, она утверждает только о наличии существования точки равновесия но не говорит, как ее искать.

Описанная концепция равновесия Нэша впервые использована вовсе не Нэшем. Ограничимся общеизвестным фактом. Еще в 1838 году А. О. Курно показал, как найти то, что в последствии назвали равновесием Нэша, в игре Курно, описывающей взаимодействие фирм, конкурирующих объемами выпуска на рынке однородной продукции [4]. Соответственно, некоторые исследователи называют его равновесием Нэша–Курно.

Однако Нэш первым показал в своей диссертации по некооперативным играм в 1949 году, что подобные равновесия должны существовать для всех конечных игр с любым числом игроков. До Нэша это было доказано только для игр с 2 участниками с нулевой суммой Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном (1944). Причем в своей знаковой работе [3] Нэш использовал теорему Какутани (1941) о неподвижной точке, так сказать, последнее слово аналитической техники 40-х годов 20 века.

3. ПАРАДОКСАЛЬНОСТЬ КОНЦЕПЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

В различных задачах точки равновесия имеют различный (порой причудливый) смысл.

Причудливость и парадоксальность концепции равновесия по Нэшу хорошо иллюстрирует такой пример.

Игра „Чудо-банк“. Пусть некий „Чудо-банк“ предлагает начисление 60 процентов за хранение вклада одни сутки, при этом фиксирована максимальная сумма вклада. В игре принимает участие два игрока-вкладчика. Пусть каждому из незнакомых друг с другом вкладчиков предлагают сделать вклады. Сделанные вклады суммируются, на полученную сумму начисляется 60 процентов, и на следующий день сумма с процентами делится пополам и раздается вкладчикам.

Первый игрок рассуждает таким образом. Пусть я вложил сумму $x \geq 0$, а второй — сумму $y \geq 0$. Тогда моя прибыль составит

$$\frac{1,6}{2}(x + y) - x = 0,8y - 0,2x.$$

Данная величина при любом y достигает максимума при $x = 0$, т. е. для первого игрока „не вкладывать ничего“ является доминирующей стратегией. Аналогичным образом рассуждает и второй вкладчик, „не вкладывать ничего“ — это тоже его доминирующая стратегия. Единственное равновесие достигается в точке $(0, 0)$, при этом выплаты составляют $(0, 0)$. В результате игроки не воспользовались „чудо-акцией“ и ничего не заработали.

Данный парадокс объясняется тем, что точка равновесия по Нэшу не обязательно является оптимальной по Парето, поскольку каждый из игроков, максимизируя собственную выгоду, готов наносить другим игрокам ущерб, превышающий величину этой выгоды.

Этот тезис лежит в основе критики Джоном Нэшем теории экономического развития Адама Смита.

Адам Смит считал, что эгоизм и стремление к богатству не являются негативными чертами человека. Государство должно минимально вмешиваться в экономические процессы, оно должно создать условия свободного рынка. Свободный рынок в условиях конкуренции (невидимая рука) приводит к равновесной ситуации, обеспечивающей богатство, благополучие и развитие как отдельного человека, так и общества в целом.

Однако, данные рассуждения Адама Смита не принимают во внимание, что предприниматель в погоне за прибылью может осуществлять не только общественно полезные шаги, но и вредить обществу в целом. К таким шагам следует отнести хищническое использование природных ресурсов, выпуск и агрессивная реклама продукции, заведомо вредной для здоровья (алкоголь, табак), „индустрия гламура“, организация азартных игр и ряд других.

4. РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Если игроков всего два, а множество стратегий каждого из них конечно, то такие игры называются биматричными [5]. Чтобы задать такую игру, достаточно задать две матрицы A и B одинаковой размерности с количеством строк, равным количеству стратегий первого игрока и количеством столбцов, равным количеству стратегий второго игрока.

Пусть первый игрок выбирает номер строки i , а второй — номер столбца j . При этом первый игрок получает в качестве выигрыша элемент $a_{i,j}$ а второй игрок — элемент $b_{i,j}$.

Ситуация (i, j) является равновесием по Нэшу, если элемент $a_{i,j}$ является максимальным элементом своего столбца, а $b_{i,j}$ — максимальным элементом своей строки. Если $B = -A$, то такая игра называется антагонистической или матричной. Биматричные игры можно также задавать таблицей, каждая ячейка которой содержит два числа, первое из которых соответствует выигрышу первого, а второе — второго игрока.

Оказывается, даже в случае, когда оба игрока имеют лишь по две стратегии, равновесие по Нэшу может иметь пять качественно разных разновидностей.

1) Существует единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, например в классической задаче „дилемма заключенного“ (в данном случае, согласно фабуле, величиной выигрыша является продолжительность тюремного срока, поэтому все значения записываются со знаком минус).

	сознаться	не сознаться
сознаться	(-5, -5)	(0, -10)
не сознаться	(-10, 0)	(-1, -1)

Единственной точкой равновесия в данной игре является (сознаться, сознаться).

2) Существует единственное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях, например в игре „орел–решка“.

Пусть второй игрок выкладывает монету орлом или решкой кверху, а первый игрок угадывает, какой стороной выложена монета. Если первый игрок угадал, то второй платит ему единицу, в противном случае первый игрок платит второму единицу.

Данная игра является антагонистической и для ее описания достаточно задания матрицы одного из игроков. Например, матрица выигрышей первого игрока, в которой первый игрок выбирает строки, а второй — столбцы, имеет вид:

	орел	решка
орел	1	-1
решка	-1	1

Здесь единственное равновесие по Нэшу достигается в случае, когда каждый из игроков играет смешанную стратегию $(1/2, 1/2)$.

3) Существует три равновесия по Нэшу, два в чистых и одно в смешанных стратегиях, например в игре „семейный спор“.

Пусть муж и жена хотят пойти на футбол или балет, но при этом муж больше хочет пойти на футбол, а жена — на балет. Пусть удовольствие от более желанного зрелища оценивается в 2, а менее желанного — в 1. Если

они не пришли к соглашению, куда пойти вместе, то выигрыш каждого из игроков составляет 0. Тогда платежная матрица при условии, что первым игроком является муж, а вторым — жена, имеет вид:

	футбол	балет
футбол	(2, 1)	(0, 0)
балет	(0, 0)	(1, 2)

Данная игра, очевидно, имеет два равновесия в чистых стратегиях, а именно (футбол–футбол) и балет–балет). Кроме того, существует еще и равновесие в смешанных стратегиях, в котором мужчина и женщина смешивают свои чистые стратегии с вероятностями $(2/3, 1/3)$ и $(1/3, 2/3)$, соответственно. При этом средние выигрыши и мужчины и женщины составляют $2/3$. Данное равновесие трудно интерпретировать с точки зрения здравого смысла, однако оно существует.

4) Существует только два равновесия в чистых стратегиях. Такая ситуация, в частности, может возникать в случае, когда в платежной матрице первого игрока один из столбцов, а в платежной матрице второго игрока одна из строк содержит одинаковые элементы. Например, биматричная игра, заданная матрицей

$$\begin{pmatrix} (2, 3) & (1, 1) \\ (2, 2) & (3, 2) \end{pmatrix}$$

есть только два равновесия в чистых стратегиях — $(1, 1)$ и $(2, 2)$.

5) Существует континуум равновесий в смешанных стратегиях. Например тогда, когда все элементы платежных матриц игроков одинаковые, тогда все смешанные стратегии будут давать один и тот же выигрыш, и следовательно, согласно определения, будут оптимальными.

Рассмотрим различные примеры применения биматричных игр.

В [6] было проанализировано 1400 пенальти в матчах FIFA. В ходе пенальти бьющий выбирает, в какой угол ворот бить, а вратарь в момент удара угадывает, какой угол ворот защищать. Эти решения принимаются одновременно, как в матричной игре, поскольку если вратарь будет ждать до момента, когда он увидит, в какой именно угол ворот летит мяч, то он не сможет защитить ни один из углов.

Таблица частот забитых голов имеет вид:

бьющий \ вратарь	влево	вправо
влево	0,58	0,95
вправо	0,93	0,70

Для данной матричной игры было найдено равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях, которое оказалось очень близким к реальному поведению бьющего пенальти и вратаря.

ПАМЯТИ ДЖОНА НЭША

	бьющий влево	бьющий вправо
равновесие Нэша	0,38	0,62
статистика	0,40	0,60

	вратарь влево	вратарь вправо
равновесие Нэша	0,42	0,58
статистика	0,42	0,58

В работе [7] был поставлен и рассмотрен очень странный на первый взгляд вопрос — „умеют ли свиньи играть в биматричные игры и находить равновесие по Нэшу?“ За этим вопросом стоит забавный поведенческий эксперимент. Две свиньи (слабая и сильная), находясь в отдельных вольерах, научились нажимать рычаг в одном конце и получать еду в другом конце вольера. Удовольствие от еды оценивается в 10 единиц, а усилия, необходимые для ее получения — в 2 единицы. Эти свиньи были помещены в один вольер. Если к рычагу шли обе свиньи, то еда распределялась как (3, 7), Если к рычагу шла слабая свинья, то (1, 9), если сильная — то (6, 4) (поскольку тот, кто не идет к рычагу, получает на некоторое время монопольный доступ к еде). Тогда каждая из свиней имеет две стратегии — „идти к рычагу“ либо „не идти“. Тогда получается, сто свиньи играют в такую биматричную игру (где слабая свинья выбирает строки, а сильная — столбцы):

	идти	не идти
идти	(1, 5)	(-1, 9)
не идти	(6, 2)	(0, 0)

Данная игра имеет единственное равновесие по Нэшу (не идти, идти), и свиньи в ходе эксперимента пришли именно к этому исходу. Вначале к рычагу по очереди ходили и сильная, и слабая свинья. После пятого раза слабая свинья поняла, что если она идет к рычагу, то получаемые ею в результате 10 процентов от общей массы еды не стоят ее усилий и прекратила хождения. Сильная свинья по прежнему ходила к рычагу, в результате чего слабая свинья оставалась в выигрыше.

Следует заметить, что сама концепция равновесия по Нэшу как объективное явление существовала задолго до того, как была открыта и строго описана, подобно тому как явление тяготения существовало до открытия Ньютоном закона всемирного тяготения. Это показывает следующий пример.

Согласно библейской легенде о царе Соломоне, однажды две женщины спорили о том, кому принадлежит ребенок и попросили Соломона рассудить их. Соломон приказал разрубить ребенка пополам и разделить между несогласными. Обманщица легко согласилась, а мать, заплакав, сказала „Лучше отдайте ей ребенка живым“. Правда открылась немедленно.

Данный спор двух женщин по сути представляет собой биматричную игру. В игре принимают участие две женщины — мать и обманщица. Каждая из женщин имеет по две стратегии — претендовать на ребенка, либо не претендовать. Пусть страдания матери от того, что ребенок будет убит, составляют -100 единиц. Выигрыш матери от того, что она вернет ребенка оценим в 1 , а выигрыш от того, что ребенок останется жив, но достанется чужой женщине в 0 . Пусть выигрыш обманщицы от того, что ей достанется ребенок, равен 1 , в противном случае он равен 0 , независимо от того, достанется ли ребенок матери или будет убит. Пусть в случае, если обе женщины откажутся от претензий на ребенка, то ребенок будет отдан одной из них случайным образом и выигрыш каждой из женщин составит $1/2$.

Пусть мать выбирает строки, а обманщица — столбцы матрицы. Пусть первая строка/столбец отвечают решению „претендовать“, а вторая строка/столбец — решению „не претендовать“. Тогда платежные матрицы данной игры имеют вид:

	мать	обманщица
$A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$		$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Данная игра имеет точку равновесия по Нэшу (не претендовать, претендовать), а соответствующая функция выигрыша равна $(0, 1)$, что означает, что ребенок достался обманщице, и что соответствует фабуле притчи.

Данная точка равновесия позволила выяснить, кто есть кто и отдать ребенка матери. Таким образом, Соломон самовольно поменял функцию выигрыша, поступив правильно с точки зрения морали но абсолютно некорректно с точки зрения теории игр.

5. КОМБИНАТОРНЫЕ ИГРЫ

Среди заслуг Джона Нэша следует также упомянуть его вклад в теорию комбинаторных игр. Комбинаторными принято называть многоходовые игры двух игроков с полной информацией без вмешательства случая. К таким играм относятся крестики–нолики, шахматы, шашки.

В 1912 году Эрнест Цермело доказал теорему о существовании гарантированных стратегий в комбинаторных играх.

Теорема 2 (Цермело). *В игре в шахматы одно из трех утверждений истинно:*

- 1) *белые имеют гарантированную стратегию выигрыша;*
- 2) *черные имеют гарантированную стратегию выигрыша;*
- 3) *существует пара стратегий, гарантирующий каждой из сторон сведение партии по крайней мере вничью.*

Данная теорема фактически утверждает наличие равновесия Нэша в комбинаторных играх. Теорема не конструктивна, и для большинства комбинаторных игр не представляется возможным выяснить, какое из трех утверждений является истинным. Среди исключений из этого правила —

игра в крестики–нолики на поле размером 3 на 3. Известно, что для этой игры справедлив пункт 3 теоремы Цермело.

Джон Нэш придумал еще одну комбинаторную игру — Нех (Гекс) или шестиугольники [8]. Игра ведется на поле, заполненном шестиугольниками (см. рис. 1).

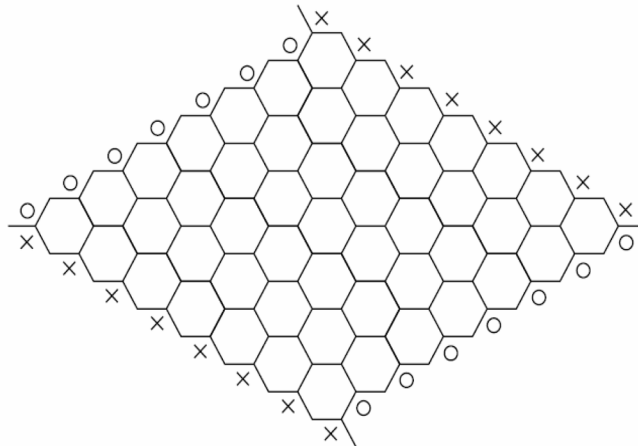


Рис. 1. Поле для игры в Нех.

Игроки по очереди ставят крестики и нолики. И „крестик“ и „нолик“ имеют по два своих „берега“, как показано на рисунке. Задача каждого из игроков — построить „мост“ с одного своего берега на другой до того, как это успеет сделать противник.

Оказывается, что при любом заполнении игрового поля крестиками и ноликами либо для крестика, либо для нолика будет построен мост между его берегами. Из этого следует, что данная комбинаторная игра не может закончиться вничью, следовательно, согласно теореме Цермело, либо крестик, либо нолик имеют выигрышную стратегию.

Джон Нэш доказал, что если размеры полей игроков совпадают, то выигрышную стратегию имеет первый игрок (т. е. крестик). При доказательстве этого утверждения он использовал оригинальную концепцию „украденной стратегии“.

Предположим, что нолик имеет выигрышную стратегию. Тогда крестик также может построить выигрышную стратегию, подражая выигрышной стратегии нолика и поступая следующим образом:

- 1) поставить первый крестик в любое поле;
- 2) на втором и всех последующих ходах „забыть“ о первом поставленном крестике и подражать выигрышной стратегии нолика, мысленно транспонируя игровое поле и меняя крестики на нолики, и нолики на крестики (это и называется „украсть выигрышную стратегию»);

- 3) если вдруг окажется, что поле, в которое нужно поставить крестик на очередном ходу (согласно украденной стратегии) уже занято (другим крестиком), то поставить крестик в любое свободное поле.

Таким образом, выходит, что крестик тоже имеет выигрышную стратегию. Поскольку крестик и нолик одновременно не могут иметь выигрышную стратегию, то предположение о существовании выигрышной стратегии у нолика является ложным. Значит, выигрышную стратегию имеет крестик.

Данное доказательство не является конструктивным, поскольку утверждает лишь наличие выигрышной стратегии у крестика и ничего не говорит о том, как эту стратегию найти.

Рассмотрим еще одну игру, называемую „обмен“, которая является игрой в развернутой форме и показывает, что иногда стремление игроков к „почти оптимальному“ решению приводит к лучшему исходу для обоих игроков по сравнению со случаем, когда игроки действуют абсолютно рационально и каждый из них стремится достичь абсолютной выгоды для себя.

Пусть у одного из соседей-дачников избыток яблок, а у другого — избыток груш (назовем их 1-й и 2-й игрок, соответственно). Пусть они договариваются о взаимном обмене 100 яблок на 100 груш. При этом они не вполне доверяют друг другу и договариваются о такой процедуре обмена. Пусть 1-й игрок передает 2-му через забор одно яблоко. Получив его, 2-й игрок передает 1-му одну грушу, и т. д. до тех пор, пока все фрукты не будут обменены. Пусть для 1-го игрока ценность каждого яблока равна 1, а ценность груши — 2, а для второго — наоборот, т. е. ценность яблока равна 2, а ценность груши — 1 (что и является для них стимулом к обмену). Тогда дерево игры будет иметь вид, изображенный на рис. 2.

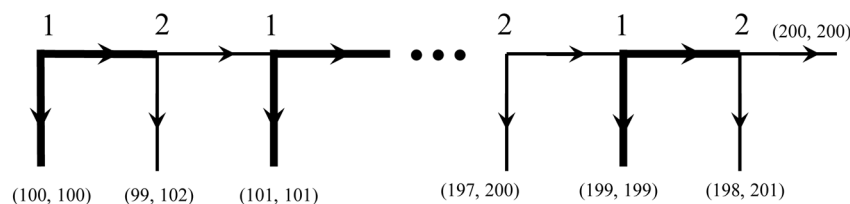


Рис. 2. Дерево игры „обмен“.

На каждом шаге, кроме последнего игрок, чья очередь делать ход, может принять одно из двух решений — отдать свой фрукт (шаг вправо) либо прекратить обмен (шаг вниз).

Проанализируем дерево игры методом обратной индукции. На самом последнем шаге 2-й игрок уже получил все яблоки и ему не выгодно отдавать последнюю грушу, что приведет к исходу (198, 201). Это понимает 1-й игрок, поэтому он понимает, что ему не выгодно отдавать свое последнее

яблоко и т. д. Двигаясь по дереву игры справа налево, приходим к выводу, что единственное равновесие по Нэшу достигается в случае, когда первый игрок не начинает обмен, что приводит к исходу (100, 100).

Но если же на целевую функцию игроков сделать послабление, такое, что потеря одного балла для каждого из них не имеет значения, то процедура обмена успешно стартует и дойдет до конца.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье был дан краткий обзор математических результатов Джона Нэша (1928–2015), связанных с теорией некооперативных игр. Основное внимание было уделено понятию равновесия по Нэшу. На простых примерах были показаны парадоксальность этого понятия и в то же время его естественность. Также был рассмотрен вклад Джона Нэша в теорию комбинаторных игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nash J. F. Ideal Money // Southern Economic Journal. — 2002. — Vol. 69, №1. — P. 4–11.
2. Нэш Дж. Ф. Идеальные и асимптотически идеальные деньги // Российский журнал менеджмента. — 2008. — Т. 6, №4. — С. 3–16
3. Nash J. F. Non-Cooperative Games // The Annals of Mathematics. — 1951. — Vol. 54, №2. — P. 286–295.
4. Cournot A. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. — Paris: Hachette, 1838.
5. Стрекаловский А. А., Орлов А. В. Биматричные игры и билинейное программирование. — Москва: ФИЗМАТЛИТ. — 2007. — 224 с.
6. Hentia I. P. Professional play minimax // Review of economic studies. — 2003. — Vol. 70. — P. 395–415.
7. Baldwin B., Meese G. Social behavior in pigs by means of operant conditioning // Animal behavior. — 1979. — V.27. — P. 947–957.
8. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — Москва: Мир. — 1999. — 447 с.

Поступила 22.10.2015

УДК 681.3
MSC 68T50

DEVELOPMENT OF NAMED ENTITY RECOGNITION SYSTEM

OLEKSANDR MARCHENKO

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: omarchenko@univ.kiev.ua.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ РОЗПІЗНАВАННЯ ІМЕНОВАНИХ СУТНОСТЕЙ ТЕКСТУ

О. О. МАРЧЕНКО

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: omarchenko@univ.kiev.ua

ABSTRACT. The article describes the developed named entity recognition system. To build a named entity classifier the two basic models of machine learning, The Naïve Bayes and Conditional Random Fields, were used. The paper describes a method for classifiers' training and the results of test experiments. Conditional Random Fields have proved most suitable for the description and effective solution to this problem.

KEYWORDS: Named Entity Recognition, Natural Language Processing, Machine Learning, The Naive Bayes Model, Conditional Random Fields.

РЕЗЮМЕ. У статті розглянуто розроблену систему розпізнавання іменованих сутностей тексту. Для створення блоків класифікації іменованих сутностей було застосовано дві базові моделі машинного навчання — наївна модель Баєса та модель умовних випадкових полів. В роботі описано метод навчання та результати експериментів з тестування побудованих класифікаторів. Модель умовних випадкових полів показала себе з найкращої сторони для опису та ефективного розв'язання поставленої задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Розпізнавання іменованих сутностей тексту, обробка текстів природною мовою, машинне навчання, наївна модель Баєса, умовні випадкові поля.

ВСТУП

Проблема визначення іменованих сутностей тексту не є новою, дослідження активно ведуться вже понад 20 років, і досягнуто високі результати роботи прикладних систем (до 93% точності у розпізнаванні іменованих сутностей машиною проти 96% точності у розпізнаванні іменованих сутностей людиною). Незважаючи на заявлений високий відсоток правильності

розпізнавання, проблема досі вважається відкритою і за даною проблематикою активно ведуться дослідження.

Актуальність проблеми пояснюється специфічністю середовища, в якому отримані надвисокі результати: як правило таке середовище створюється штучно для тестування системи і не може бути відтворено в реальному світі. До штучного середовища можна віднести додаткові 100% коректні дані про текст (наприклад, завжди гарантовано правильні синтаксичні дерева речень, морфологічна, семантична і т. д. інформація), які є недоступними в реальних умовах. Також до таких умов можна віднести надвисокі потужності задіяного обладнання, коли задача вирішується в лабораторних умовах на суперкомп'ютерах, та специфіку корпусів тестування. Наприклад, на тестові корпуси часто накладається умова обмеження словника іменованих сутностей до розміру словника навчальної вибірки, в таких умовах задача NER (named entity recognition — розпізнавання іменованих сутностей) зводиться до задачі розпізнавання сутностей за словником.

Через це різниця між заявленими в теорії та отриманими на практиці результатами є досить значною. Проведена оцінка найбільш популярних систем на ринку показала їх низьку ефективність. Більшість типів іменованих сутностей розпізнаються з точністю близько 60%–65%, що є недостатнім для ефективного використання в задачах аналізу текстів. Лише в деяких випадках реальна точність розпізнавання певних типів сутностей сягає 70%.

Дане дослідження було проведено з метою розробки придатного для промислового використання класифікатора, здатного розрізняти основні базові типи іменованих сутностей та ефективно працювати з реальними текстами поза межами лабораторного середовища, і видавати результати на рівні найкращих існуючих аналогів — state-of-the-art систем.

1. СИСТЕМА РОЗПІЗНАВАННЯ ІМЕНОВАНИХ СУТНОСТЕЙ ТЕКСТУ

Основною задачею системи є розпізнавання у тексті іменованих сутностей та визначення типу цих сутностей. Вхідними даними системи є текст, написаний правильною англійською мовою з мінімальним вживанням сленгу та відсутністю орфографічних і граматичних помилок.

Архітектурно система складається з кількох ключових блоків, кожен блок виконує функції певного етапу побудови розв'язку задачі. Усі модулі попередньої обробки тексту для перетворення його у необхідний системі вигляд винесено за межі системи.

Система включає в себе:

- Блок ідентифікації та аналізу іменованих сутностей на основі Баєсівської моделі;
- Блок ідентифікації та аналізу іменованих сутностей на основі моделі умовних випадкових полів — Conditional random fields (CRF).

Ці блоки є підсистемами, які паралельно і незалежно одна від одної виконують обробку вхідного тексту:

1. ідентифікація синтаксичних груп, які містять іменовані сутності;

2. визначення меж знайдених іменованих сутностей (перше слово сутності–останнє слово сутності);

3. визначення типів знайдених іменованих сутностей.

Результатом роботи системи є текст з відповідною розміткою іменованих сутностей (id сутності, границі сутності, тип сутності).

Система налаштована для розпізнання типів іменованих сутностей (Type in system), кожен тип інтерпретується у відповідності до його трактування у корпусі Ontonotes:

Ontonotes Type	Description	Type in system
PERSON	People, including fictional	PER
ORGANIZATION	Companies, agencies, institutions	ORG
LOCATION	Locations, mountains, water bodies	LOC

Вхідними даними для розроблених класифікаторів є текст англійською мовою, дерева виведення та залежностей речень вхідного тексту, а також всі дані стосовно лексичних значень слів речень тексту згідно розмітки GOLD у корпусі Ontonotes.

Навчання класифікаторів на основі моделі Баєса та на основі моделі умовних випадкових полів — Conditional random field (CRF) проводилося на базі розміченого текстового корпусу Ontonotes. Так як Баєсівські класифікатори є відомим, розповсюдженим та досить простим методом, автор утримується від безпосереднього опису самої моделі Баєса та переходить до методу класифікації на основі умовних випадкових полів — Conditional random fields (CRF) [1].

2. КЛАСИФІКАТОР НА ОСНОВІ МОДЕЛІ УМОВНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ — CONDITIONAL RANDOM FIELD (CRF)

Метод умовних випадкових полів — Conditional random fields (CRF), є аналогом методу Марківських випадкових полів (Markov random fields). Даний метод користується широкою популярністю у різних областях штучного інтелекту. Зокрема його успішно використовують в задачах розпізнавання мовлення та образів, в обробці текстової інформації, в комп'ютерній графіці та в інших задачах.

Марковським випадковим полем називають графову модель, яка використовується для представлення сумісних розподілів набору декількох випадкових змінних. Формально Марківське випадкове поле складається з:

- неорієнтованого графу або фактор-графу $G = (V, E)$, де кожна вершина $v \in V$ є випадковою змінною і кожне ребро $(u, v) \in E$ є залежністю між випадковими величинами u і v .
- набору потенціальних функцій (potential function) або факторів $\{\varphi_k\}$, одна для кожної кліки у графі (кліка — повний підграф неорієнтованого графу G). Функція φ_k ставить кожному можливому стану елементів кліки у відповідність деяке невід'ємне дійсне число.

Вершини, що не є суміжними, мають відповідати умовно незалежним випадковим величинам. Група суміжних вершин формує кліку, набір станів вершин є аргументом відповідної потенціальної функції.

Сумісний розподіл набору випадкових величин $X = \{x_k\}$ у Марківському випадковому полі обчислюється за формулою:

$$P(x) = \frac{1}{Z} \prod_k \varphi_k(x_{(k)}),$$

де $\varphi_k(x_{(k)})$ — потенціальна функція, що описує стан випадкових величин у k -ій кліці; Z — коефіцієнт нормалізації, що обчислюється за формулою:

$$Z = \sum_{x \in X} \prod_k \varphi_k(x_{(k)}).$$

Множина вхідних слів-лексем $X = \{x_t\}$ та множина відповідних їм типів $Y = \{y_t\}$ у сукупності формують множину випадкових змінних $V = X \cup Y$. Для розв'язання задачі виділення інформації з тексту достатньо визначити умовну ймовірність $P(Y|X)$. Потенціальна функція має вигляд:

$$\varphi_k(x_{(k)}) = \exp\left(\sum_k \lambda_k f_k(y_t, y_{t-1}, x_t)\right),$$

де $\sum \{\lambda_k\}$ — дійснозначний параметричний вектор (множники Лагранжа), $\sum \{f_k(y_t, y_{t-1}, x_t)\}$ — набір ознакових функцій. Тоді лінійним умовним випадковим полем називається розподіл виду:

$$p(y|x) = \frac{1}{Z(x)} \prod_k \exp\left(\sum_k \lambda_k f_k(y_t, y_{t-1}, x_t)\right).$$

Коефіцієнт нормалізації $Z(x)$ обчислюється за формулою:

$$Z(x) = \sum_{y \in Y} \prod_k \exp\left(\sum_k \lambda_k f_k(y_t, y_{t-1}, x_t)\right).$$

Обчислення моделі $p(y|x)$ відбувається як розв'язання оптимізаційної задачі з заданими обмеженнями [2] (різниця між спостереженням та його оцінкою має бути нульовою, і має виконуватися умова $\sum_{y \in Y} p(y|x) = 1$ по всім $x \in X$). На кожній ітерації заново обчислюються множники Лагранжа, обчислення проводиться з використанням алгоритмів „forward-backward“ та Вітербі.

Метод CRF, як і метод MEMM (Марківські Моделі Максимальної Ентропії), є дискримінативним імовірнісним методом, на відміну від генеративних методів, таких як приховані марківські моделі НММ та модель Баєса (Naïve Bayes).

По аналогії з марківськими моделями максимальної ентропії, вибір факторів-ознак для завдання імовірності переходу між станами при наявності спостереження значення залежить від специфіки конкретних даних, але, на відміну від того ж MEMM, CRF може враховувати будь-які особливості

та взаємозв'язки у вхідних даних. Вектор ознак $\Lambda = \{\lambda_k\}$ обчислюється на основі навчальної вибірки та визначає вагу кожної потенціальної функції.

В умовних випадкових полях відсутня так звана label bias problem — ситуація, коли перевагу мають стани з меншою кількістю переходів, так як будується один єдиний розподіл ймовірностей та нормалізація (коефіцієнт $Z(x)$) виконується загалом, а не у рамках окремого стану. Це, безумовно, є перевагою методу: алгоритм не потребує припущення незалежності спостережних змінних. Крім того, використання довільних факторів дозволяє описати різноманітні ознаки об'єктів, що відчутно понижує вимоги до повноти та об'єму навчальної вибірки. При цьому точність буде визначатися не лише об'ємом вибірки, але й обраними факторами. Недоліком підходу CRF є обчислювальна складність аналізу навчальної вибірки, що ускладнює постійне оновлення моделі при отриманні нових навчальних даних. Слід відзначити високу швидкість роботи алгоритму CRF, що є дуже важливою перевагою при обробці великих об'ємів інформації.

3. НАВЧАННЯ МОДЕЛІ

Для навчання моделі був обраний корпус текстів Ontonotes [3], який містить достатній об'єм текстів, розмічених вручну. Розмітка текстів повністю відповідає задачі ідентифікації та аналізу іменованих сутностей, та обраним моделям машинного навчання. В рамках задачі аналізу іменованих сутностей тексти корпусу містять:

1. розмітку меж іменованих сутностей (перше слово сутності—останнє слово сутності);
2. розмітку типів знайдених іменованих сутностей (Людина, Організація, Локація).

Розмічені тексти містять синтаксичні структури речень — дерева виведення та дерева залежностей. Тобто доступними є межі синтаксичних груп речення та відношення залежностей між словами. Доступними є також повні лексичні значення слів речень (частина мови, рід, число, час для дієслів і т.д.). Алгоритми використовують також спеціальні словники імен, географічних назв та типових назв організацій для залучення додаткових знань у систему. Для формування базової множини ознакових функцій було проведено дослідження та аналіз кращих робіт по даній тематиці [4]–[6]. Було побудовано набір базових ознакових функцій, наприклад:

$$f_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } y = \langle LOC \rangle, y \text{ з великої літери та } x = „City“; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Далі в процесі дослідження були проведені чисельні експерименти по навчанню моделей на розмічених текстах корпусу Ontonotes, після чого виконувалося тестування навченого алгоритму на точність ідентифікації та визначення типу іменованих сутностей на текстах з інших частин корпусу. Потім, згідно процедури кросвалідації, навчальна та тестова частини

корпусу мінялися місцями та процес навчання та тестування моделей повторювався з початку. Із всіх отриманих оцінок точності обиралися мінімальні, як найбільш об'єктивні та гарантовано досяжні.

Навчання та тестування моделей проводилось багато разів з різними наборами ознакових функцій. В результаті проведення багатьох ітерацій етапів навчання–тестування з перебором множини ознакових функцій були визначені оптимальні набори ознакових функцій $\{f'_i\}$ та $\{f''_i\}$, на яких було досягнуто максимальні оцінки точності ідентифікації та визначення типів іменованих сутностей тексту класифікатором Баєса та класифікатором на базі моделі умовних випадкових полів (CRF), відповідно.

4. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У таблицях нижче продемонстровано фінальні оцінки роботи класифікатору Баєса та класифікатору на основі моделі умовних випадкових полів (CRF), навчених на оптимальних наборах ознакових функцій $\{f'_i\}$ та $\{f''_i\}$, відповідно. Надано оцінки точності (Precision, P), повноти (Recall, R) та комбінована міра F1:

$$F_1 = \frac{2 * Precision * Recall}{Precision + Recall}.$$

Проведене дослідження показало, що в розв'язанні даної задачі очевидно є значна перевага моделі умовних випадкових полів (CRF) над Баєсівською моделлю. Припущення незалежності ознак, що є визначальною властивістю у наївній Баєсівській моделі, не задовільняє природі задачі класифікації іменованих сутностей тексту.

В комп'ютерній лінгвістиці є ряд задач, в яких метод Баєса демонструє високі оцінки точності та достатню ефективність. Часто в них використовується найпростіша модель представлення тексту „торба слів“ („bag of words“). Для задач, де достатньо найпростіших моделей представлення текстових документів, і за умови, що у вхідних текстах розподіл імовірностей дійсно наближений до рівномірного, метод Баєса підходить набагато краще, ніж для класифікації іменованих сутностей тексту. Це пов'язано із тим, що при аналізі іменованих сутностей потрібно враховувати складний контекст слів, який часто виражається одразу декількома складними взаємозалежними функціями ознак. Тому умовні випадкові поля (CRF), які є набагато більш складною та гнучкою моделлю, більш точно описують та ефективно розв'язують дану задачу.

Отримані результати дослідження, а також детальний аналіз задачі та існуючих програмних реалізацій для її розв'язання підводять до висновку про найкращу придатність саме моделі умовних випадкових полів (CRF) для розробки систем класифікації іменованих сутностей тексту. Наприклад, іноді ця модель навіть дещо поступається за точністю Марківським моделям максимальної ентропії MEMM [7], але при цьому значно переважає у повноті і, як результат, переважає за комбінованою мірою F1.

ТАБЛ. 1. Оцінки класифікатора Баєса на підкорпусі Web text (230 файлів)

	Precision	Recall	F1
LOCATION	0,5423	0,6527	0,5924
ORGANIZATION	0,0412	0,0350	0,0379
PERSON	0,3311	0,6127	0,4299
Total	0,3450	0,4954	0,4067

ТАБЛ. 2. Оцінки класифікатора Баєса на підкорпусі Newswire (1665 файлів)

	Precision	Recall	F1
LOCATION	0,6498	0,8501	0,7365
ORGANIZATION	0,5022	0,7482	0,6010
PERSON	0,6673	0,8388	0,7433
Total	0,5813	0,8003	0,6734

ТАБЛ. 3. Оцінки класифікатора на основі умовних випадкових полів(CRF)

Підкорпуси			
Web text	Broadcast News	Newswire	Total
LOC			
Precision: 0,8679	Precision: 0,9283	Precision: 0,9198	Precision: 0,9395
Recall: 0,9323	Recall: 0,9530	Recall: 0,9190	Recall: 0,9369
F1: 0,8989	F1: 0,9405	F1: 0,9194	F1: 0,9382
ORG			
Precision: 0,7939	Precision: 0,8118	Precision: 0,8810	Precision: 0,8858
Recall: 0,7324	Recall: 0,7768	Recall: 0,8863	Recall: 0,8830
F1: 0,7619	F1: 0,7939	F1: 0,8836	F1: 0,8844
PER			
Precision: 0,9157	Precision: 0,8910	Precision: 0,9104	Precision: 0,9207
Recall: 0,9104	Recall: 0,9185	Recall: 0,8895	Recall: 0,9104
F1: 0,9130	F1: 0,9045	F1: 0,8998	F1: 0,9155
TOTAL			
Precision: 0,8647	Precision: 0,8909	Precision: 0,9008	Precision: 0,9140
Recall: 0,8638	Recall: 0,9029	Recall: 0,8974	Recall: 0,9092
F1: 0,8643	F1: 0,8968	F1: 0,8991	F1: 0,9116

Саме модель умовних випадкових полів була реалізована в проекті Стендфордського університету Stanford Named Entity Recognizer [8].

Отримані в результаті тестування розробленої системи оцінки точності та повноти (таблиця 3) демонструють найвищі значення на рівні найкращих існуючих світових аналогів. На тестових текстах корпусу Ontonotes розроблена система змогла перевершити показники Stanford Named Entity Recognizer. Це було досягнуто завдяки успішно проведеній оптимізації набору ознакових функцій, що дало змогу отримати максимально високі оцінки точності.

Висновки

На основі двох базових моделей машинного навчання — наївної моделі Баєса та умовних випадкових полів, — було розроблено систему ідентифікації та аналізу іменованих сутностей тексту. Результати дослідження показали високу якість роботи класифікатора, реалізованого на основі умовних випадкових полів. Досвід найкращих існуючих програмних реалізацій систем аналізу іменованих сутностей тексту приводить до висновку, що саме модель умовних випадкових полів (CRF) оптимально підходить для розробки класифікаторів іменованих сутностей.

В процесі тестування розроблена система продемонструвала високу точність визначення типів іменованих сутностей тексту на рівні найкращих існуючих світових аналогів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lafferty J., McCallum A., Pereira F. Conditional Random Fields: Probabilistic Models for Segmenting and Labeling Sequence Data // The 18th International Conference on Machine Learning, June 28–July 1, 2001. Proceedings — Williamstown, MA, USA, 2001. — P. 282–289.
2. Klinger R., Tomanek K. Classical Probabilistic Models and Conditional Random Fields // Algorithm Engineering Report TR07-2-013, Department of Computer Science, Dortmund University of Technology, December 2007. ISSN 1864-4503.
3. Text Corpus Ontonotes. — <https://catalog.ldc.upenn.edu/LDC2011T03>
4. Turian J., Ratnoff, L., Bengio, Y. Word representations: a simple and general method for semi-supervised learning // The 48th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, July 11–16, 2010. Proceedings — Uppsala, Sweden, 2010. — P. 384–394.
5. Nadeau D., Sekine S. A survey of named entity recognition and classification // *Linguisticae Investigationes*. — 2007. — 30 (1). — P. 3–26.
6. Nadeau D., Turney P., Matwin S. Unsupervised Named Entity Recognition: Generating Gazetteers and Resolving Ambiguity // Canadian Conference on Artificial Intelligence — 2006, June 7–9, 2006. Proceedings — Quebec, Canada, 2006. — P. 266–277.
7. Антонова А. Ю., Соловьев А. Н. Метод условных случайных полей в задачах обработки русскоязычных текстов // Информационные технологии и системы — 2013. Труды международной научной конференции. Калининград. Россия. — 2013. — С. 321–325.
8. Stanford Named Entity Recognizer. — <http://www-nlp.stanford.edu/software/>

Надійшла 02.10.2015

УДК 519.21: 519.6

MSC 60G17, 60G07, 68U20

ACCURACY OF SIMULATION SUB-GAUSSIAN WIENER PROCESSES IN THE UNIFORM METRIC

ANATOLII PASHKO

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: aapashko@gmail.com.

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ СУБГАУССОВИХ ВІНЕРІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ В РІВНОМІРНИЙ МЕТРИЦІ

А. О. ПАШКО

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Київ, Україна, E-mail: aapashko@gmail.com.

ABSTRACT. Studied sub-Gaussian Wiener and generalized Wiener random processes that represented as a random series. Constructed models of such processes. It analyzes estimation of accuracy and reliability of models Wiener random processes in uniform metric.
KEYWORDS: Wiener process, simulation, accuracy, reliability.

РЕЗЮМЕ. Вивчаються субгауссові вінерівський та узагальнений вінерівський випадкові процеси, що допускають зображення у вигляді рядів. Будуються моделі таких процесів. В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделей вінерівських випадкових процесів в нормі простору неперервних функцій. **КЛЮЧОВІ СЛОВА:** Вінерівський процес, статистичне моделювання, точність моделювання, надійність моделювання.

ВСТУП

В роботі продовжуються дослідження методів статистичного моделювання субгауссових випадкових процесів, а саме, отримано оцінки точності і надійності моделювання субгауссових вінерівського та узагальненого вінерівського процесів в рівномірній метриці [1]. Моделі випадкових процесів будуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. Ці моделі наближають випадкові процеси з заданими точністю і надійністю в просторі неперервних функцій. При отриманні результатів істотно використовувались роботи [2]–[3]. В роботах [4]–[6] досліджувались оцінки точності і надійності моделювання вінерівського та узагальненого вінерівського випадкових процесів в деяких просторах Орліча. Відомості з теорії субгауссових випадкових величин та процесів містяться в [7]. Аналогічні результати для Sub_{φ} — узагальненого вінерівського процесу отримані в роботі

[10]. Методи статистичного моделювання вінерівських випадкових процесів використовуються при розв'язуванні задач атмосферної турбулентності, неоднорідностях земної поверхні, метеорології, обчисленні інтегралів.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ.

Нехай (Ω, Σ, P) — стандартний ймовірносний простір, T ($T = [0, T]$ або $T = [0, \infty]$) — деяка параметрична множина.

Для моделювання випадкових процесів використовуються представлення процесів у вигляді стохастичних рядів $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\xi_k$, де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних суюгауссових випадкових величин з нульовим середнім та $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$. Модель будується у вигляді $S(t, M) = \sum_{k=1}^M f_k(t)\xi_k$. При реальному моделюванні послідовності $\{\xi_k\}$ отримуються, як правило, строго субгауссові випадкові величини.

Нехай (T, Θ, μ) — деякий вимірний простір. Нехай всі $S(t, M)$ та $X(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 1. Модель $S(t, M)$ наближає процес $X(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю ε , $0 < \varepsilon < 1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо має місце нерівність $P\{\|X(t) - S(t, M)\|_A \geq \delta\} \leq 1 - \varepsilon$.

Модель $S(t, M)$, що наближає процес $X(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю ε , називається апроксимаційною моделлю (А-модель).

Означення 2. Випадкова величина ξ називається субгауссовою, якщо існує таке $a > 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\}$.

Клас субгауссових випадкових величин є банаховим простором. Властивості субгауссових випадкових величин і процесів досліджувались в роботі [7]. При $E\xi^2 = a^2$ маємо клас строго субгауссових випадкових величин.

Означення 3. Вінерівським процесом або процесом дробового броунівського руху називається гауссівський процес $\{W(t), t \in T\}$ з нульовим середнім $EW(t) = 0$ та кореляційною функцією

$$R(t, s) = \frac{1}{2}(t + s - |t - s|), \quad (1)$$

такий, що $W(0) = 0$.

Вінерівський процес можна представити у вигляді ряду. Розклад за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту має вигляд [8]

$$W_1(t) = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nt)}{\pi n} \xi_n, \quad (2)$$

де $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Відповідна модель має вигляд

$$S_1(t, N) = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi nt)}{\pi n} \xi_n,$$

а похибка моделювання обчислюється за формулою

$$S_1(t) = W_1(t) - S_1(t, N) = \sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \xi_n.$$

Розклад у вигляді ряду Фур'є має вигляд [8]

$$W_2(t) = t\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2, \quad (3)$$

де $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1, \dots\}$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Відповідна модель має вигляд

$$S_2(t, N) = t\xi_0 + \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=1}^N \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2,$$

а похибка моделювання обчислюється за формулою

$$S_2(t) = W_2(t) - S_2(t, N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2.$$

Вінерівський процес є неперервним з ймовірністю одиниця, а отже, і сепарабельним. Для оцінки точності і надійності моделювання будемо використовувати результати роботи [1].

2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ СТРОГО СУБГАУССОВОГО ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ.

Нехай у представленнях (2) та (3) послідовність $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1, \dots\}$ — це незалежні строго субгауссові випадкові величини з $E\xi_n^1 = E\xi_n^2 = 0$ та $E(\xi_n^1)^2 = E(\xi_n^2)^2 = 1$. В цьому випадку має місце твердження.

Теорема 1. *Ряди в представленнях (2) та (3), де $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1, \dots\}$ — незалежні центровані строго субгауссові випадкові величини з $E(\xi_n^1)^2 = E(\xi_n^2)^2 = 1$, рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця і граничний процес є рівномірно неперервним з ймовірністю одиниця на $T = [0, 1]$.*

Твердження теореми впливає з відомої теореми Ханта [7]. Оскільки ряди збігаються, то граничний процес буде строго субгауссовим випадковим процесом, а кореляційна функція матиме вигляд (1)[9].

Будемо називати такий процес строго субгауссовим вінерівським процесом.

Для строго субгауссового вінерівського процесу має місце оцінка

$$\begin{aligned} \sup_{|t-s| \leq h} (E(W(t) - W(s))^2)^{\frac{1}{2}} &= \\ \sup_{|t-s| \leq h} (E(W(t))^2 + E(W(s))^2 - 2EW(t)W(s))^{\frac{1}{2}} &= \\ = \sup_{|t-s| \leq h} (t + s - 2\frac{1}{2}(t + s - |t - s|))^{\frac{1}{2}} &= \end{aligned}$$

$$= \sup_{|t-s| \leq h} (|t-s|)^{\frac{1}{2}} \leq h^{\frac{1}{2}} = \sigma(h).$$

І в цьому випадку $\sigma^{(-1)}(h) = h^2$.

Нехай ω — довільна точка з T , позначимо $\gamma_\omega = (E(W(\omega))^2)^{\frac{1}{2}}$ та $\nu = \sigma(\sup_{t \in T} |t - \omega|) \leq \sigma(T)$. Нехай $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\nu p^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ та $0 < p < 1$, V_{ε_k} — множина центрів мінімального покриття T замкненими кулями радіуса ε_k , $N(\varepsilon_k)$ — число точок в множині V_{ε_k} . Тоді має місце оцінка $N(\varepsilon) \leq \frac{T}{2\varepsilon} + 1$.

Оскільки $\int_0^1 (\ln(\frac{1}{2u} + 1))^{\frac{1}{2}} du < \infty$, то виконуються умови теореми 1 із [1]. І для строго субгауссового вінерівського процесу мають місце твердження.

Теорема 2. *Нехай $W(t)$ — строго субгауссовий вінерівський випадковий процес. Для будь-якого $0 < p < 1$ при $x > D_1$ має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t \in T} |W(t)| > x\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(x - D_1)^2}{2A_1}\right\}, \quad (4)$$

де

$$A_1 = \frac{\gamma_\omega^2}{1-p} + \frac{\nu^2}{p(1-p)^2},$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{p(1-p)} \int_0^{\nu p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du.$$

Позначимо $\gamma_0 = \sup_{t \in T} (E(W(t))^2)^{\frac{1}{2}}$ і виберемо $\beta > 0$ — довільне число таке, що $\beta \leq \sigma(\inf_{s \in T} \sup_{t \in T} |t - s|) \leq \sigma(T) = T^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 3. *Нехай $W(t)$ — строго субгауссовий вінерівський випадковий процес. Для будь-якого $0 < p < 1$ при $x > D_1$ має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t \in T} |W(t)| > x\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(x - D_2)^2}{2A_2}\right\}, \quad (5)$$

де

$$A_2 = \frac{\gamma_0^2}{1-p} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$

$$D_2 = \sqrt{2} \left(\gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(p\beta))) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right).$$

Доведення. Доведення вказаних результатів слідує безпосередньо з наслідку теореми 1 та теореми 2 із [1]. $\square$

Для отримання оцінок точності і надійності моделювання строго субгауссового вінерівського процесу в рівномірній метриці необхідно оцінити для представлення $W_1(t)$ величини

$$E(S_1(t))^2 = E(W_1(t) - S_1(t, N))^2 = E\left(\sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \xi_n\right)^2$$

та

$$E(S_1(t) - S_1(s))^2 = E\left(\sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nt) - \sin(\pi ns)}{\pi n} \xi_n\right)^2,$$

а для представлення $W_2(t)$ величини

$$E(W_2(t) - S_2(t, N))^2 = E\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi nt)}{2\pi n} \xi_n^2\right)^2$$

та

$$\begin{aligned} E(S_2(t) - S_2(s))^2 &= E\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt) - \sin(2\pi ns)}{2\pi n} \xi_n^1 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(2\pi nt)) - (1 - \cos(2\pi ns))}{2\pi n} \xi_n^2\right)^2. \end{aligned}$$

Для першої моделі, при $0 \leq \kappa \leq 1$, маємо

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= \sup_{t \in T} \left(2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi nt)}{\pi^2 n^2}\right) \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \leq \frac{2}{\pi^2 N}. \\ E(S_1(t) - S_1(s))^2 &= E\left(\sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi nt)}{\pi n} - \frac{\sin(\pi ns)}{\pi n}\right) \xi_n\right)^2 = \\ &= E\left(\sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2 \left(\cos\left(\frac{\pi nt + \pi ns}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi nt - \pi ns}{2}\right)\right) \frac{\xi_n}{\pi n}\right)^2 \leq \\ &\leq 8 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi nt - \pi ns}{2}\right)}{\pi^2 n^2} \leq \frac{2^{3-2\kappa}}{\pi^{2-2\kappa}} |t - s|^{2\kappa} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\kappa}}. \end{aligned}$$

В якості $\sigma(u)$ розглянемо $\sigma(u) = Ch^\kappa$, де

$$C = \left(\frac{2^{3-2\kappa}}{\pi^{2-2\kappa}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

при $0 < \kappa < \frac{1}{2}$. Отже, має місце твердження.

Теорема 4. Модель $S_1(t, N)$ наближає процес $W_1(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю $0 < \varepsilon < 1$ в рівномірній метриці, якщо мають місце нерівності $\delta > D_1(N)$ та

$$1 - \varepsilon \geq 2 \exp\left\{-\frac{(\delta - D_1(N))^2}{2A_1(N)}\right\},$$

де

$$\begin{aligned} A_1(N) &= \frac{2}{\pi^2 N(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2}, \\ D_1(N) &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N}} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right). \end{aligned}$$

Для другої моделі, при $0 \leq \kappa \leq 1$, маємо

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= \sup_{t \in T} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin^2(2\pi nt)}{4\pi^2 n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(2\pi nt))^2}{4\pi^2 n^2} \right) \leq \frac{5}{4\pi^2 N}. \\ E(S_2(t) - S_2(s))^2 &= \\ &= E \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin(2\pi nt) - \sin(2\pi ns)}{2\pi n} \right) \xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2\pi ns) - \cos(2\pi nt)}{2\pi n} \right) \xi_n^2 \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{2-2\kappa}} |t - s|^{2\kappa} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\kappa}}. \end{aligned}$$

В якості $\sigma(u)$ розглянемо $\sigma(u) = Ch^\kappa$, де

$$C = \left(\frac{1}{\pi^{2-2\kappa}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\kappa}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

при $0 < \kappa < \frac{1}{2}$.

Отже, має місце твердження.

Теорема 5. *Модель $S_2(t, N)$ наближає процес $W_2(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю ε в рівномірній метриці, якщо мають місце нерівності $\delta > D_2(N)$ та*

$$1 - \varepsilon \geq 2 \exp \left\{ -\frac{(\delta - D_2(N))^2}{2A_2(N)} \right\}$$

де

$$\begin{aligned} A_2(N) &= \frac{5}{4\pi^2 N(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2}, \\ D_2(N) &= \sqrt{2} \left(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{N}} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right). \end{aligned}$$

3. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ СТРОГО СУБГАУССОВОГО

УЗАГАЛЬНЕНОГО ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ.

Нехай $W_\alpha(t)$ — строго субгауссовий узагальнений вінерівський процес. Процес $W_\alpha(t)$ можна представити у вигляді [11]

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\sqrt{2c}}{x_n^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_n)}, \\ d_n &= \frac{\sqrt{2c}}{y_n^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_n)}, \end{aligned}$$

$\{x_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,

$\{y_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$\{X_n, Y_n\}$ — незалежні гауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$.

Модель узагальненого вінерівського процесу будуємо у вигляді

$$S_\alpha(t, N) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^N d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n,$$

де $\{X_n, Y_n\}$ — послідовність незалежних строго субгауссових випадкових величин. Розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\sin(x_n t))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 (1 - \cos(y_n t))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + 4d_n^2).$$

На основі роботи [12] маємо

$$x_n = \left(n + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4\alpha^2 - 1}{2\pi(4n + 3 - 2\alpha)} + \dots$$

$$y_n = \left(n + \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4(1 - \alpha)^2 - 1}{2\pi(4n + 1 + 2\alpha)} + \dots$$

тобто, $x_n \approx y_n \approx n\pi$ при $n \rightarrow \infty$. Для функцій Бесселя $J_\alpha(x)$, $\alpha > -1$ має місце асимптотичне співвідношення $J_{-\alpha}^2(x) + J_{1-\alpha}^2(x) \approx \frac{2}{x\pi}$ для великих x . Тоді для x_n та y_n справедливо $J_{1-\alpha}^2(x_n) \approx \frac{2}{x_n\pi}$ та $J_{-\alpha}^2(y_n) \approx \frac{2}{y_n\pi}$ при $n \rightarrow \infty$. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + 4d_n^2) \approx \Gamma(2\alpha + 1) \sin(\pi\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n^{2\alpha+1}} + \frac{4}{y_n^{2\alpha+1}} \right) < \infty.$$

А, отже, випадковий процес $W_\alpha(t)$ в представленні (6), коли $\{X_n, Y_n\}$ незалежні центровані строго субгауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$, буде строго субгауссівським випадковим процесом.

Означення 4. Строго субгауссовим узагальненим вінерівським випадковим процесом з індексом Хюрста $\alpha \in (0, 1)$ називається строго субгауссівський випадковий процес $\{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ з нульовим середнім $EW_\alpha(t) = 0$ та кореляційною функцією

$$R(t, s) = \frac{1}{2} (|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t - s|^{2\alpha}),$$

такий, що $W_\alpha(0) = 0$.

Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то будемо знаходити їх з деякою точністю. Позначимо наближені значення c_n, d_n, x_n, y_n відповідно $\tilde{c}_n, \tilde{d}_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n$. Нехай

$$|c_n - \tilde{c}_n| \leq h_n^c,$$

$$|d_n - \tilde{d}_n| \leq h_n^d,$$

$$|x_n - \tilde{x}_n| \leq h_n^x,$$

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq h_n^y,$$

де $h_n^c, h_n^d, h_n^x, h_n^y$ - задана точність. Тоді модель процесу $W_\alpha(t)$ має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t, N) = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) X_n + \sum_{n=1}^N \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n,$$

Похибка моделювання $\Delta(t)$ рівна $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$. Має місце оцінка

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-s| \leq h} \left(E(W_\alpha(t) - W_\alpha(s))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \sup_{|t-s| \leq h} \left(E(W_\alpha(t))^2 + E(W_\alpha(s))^2 - 2EW_\alpha(t)W_\alpha(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sup_{|t-s| \leq h} \left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - 2\frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha}) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sup_{|t-s| \leq h} \left(|t-s|^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^\alpha = \sigma(h). \end{aligned}$$

При $x > 0$ виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{t \in T} |W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, N)| > \delta\right\} \leq \inf_{0 \leq x \leq 1} (G_1(x\delta) + G_2((1-x)\delta)),$$

де

$$\begin{aligned} G_1(x) &= P\left\{\sup_{t \in T} |S_\alpha(t, N) - \tilde{S}_\alpha(t, N)| > x\right\}, \\ G_2(x) &= P\left\{\sup_{t \in T} |W_\alpha(t) - S_\alpha(t, N)| > x\right\}. \end{aligned}$$

Лема 1. Модель $\tilde{S}_\alpha(t, N)$ є A -моделлю, що наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю ε в рівномірній метриці, якщо виконується нерівність

$$\inf_{0 \leq x \leq 1} (G_1(x\delta) + G_2((1-x)\delta)) \leq 1 - \varepsilon.$$

Для оцінювання ймовірності $G_1(x)$ доцільно використовувати теорему 2, а для оцінювання ймовірності $G_2(x)$ доцільно використовувати теорему 3.

Позначимо

$$Z_1(t) = \tilde{S}_\alpha(t, N) - S_\alpha(t, N)$$

та

$$Z_2(t) = W_\alpha(t) - S_\alpha(t, N).$$

Для отримання оцінок точності і надійності моделювання субгауссового узагальненого вінерівського процесу в рівномірній метриці необхідно оцінити для ймовірності $G_1(x)$ величини $E(Z_1(t))^2$ та $E(Z_1(t) - Z_1(s))^2$, а для ймовірності $G_2(x)$ необхідно оцінити величини $E(Z_2(t))^2$ та $E(Z_2(t) - Z_2(s))^2$. Оцінювати вказані величини будемо аналогічно, як і в роботі [10].

Для першої ймовірності маємо

$$\begin{aligned} \gamma_\omega^2 &= E(Z_1(\omega))^2 = \\ &= E\left(\sum_{n=1}^N c_n \sin(x_n \omega) X_n + \sum_{n=1}^M d_n (1 - \cos(y_n \omega)) Y_n - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n \omega) X_n - \sum_{n=1}^N \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n \omega)) Y_n\right)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^N (c_n h_n^x \omega + h_n^c)^2 + \sum_{n=1}^N (d_n h_n^y \omega + 2h_n^d)^2 \right).$$

При $0 < \kappa \leq 1$ має місце оцінка

$$\begin{aligned} E(Z_1(t) - Z_1(s))^2 &= \\ &= E \left(\sum_{n=1}^N (c_n (\sin(x_n t) - \sin(x_n s)) - \tilde{c}_n (\sin(\tilde{x}_n t) - \sin(\tilde{x}_n s))) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N (d_n (\cos(y_n s) - \cos(y_n t)) - \tilde{d}_n (\cos(\tilde{y}_n s) - \cos(\tilde{y}_n t))) \right)^2 \leq \\ &\leq |t-s|^{2\kappa} 2^{3-2\kappa} \sum_{n=1}^N \left(x_n^{2\kappa} (h_n^c)^2 + y_n^{2\kappa} (h_n^d)^2 + 2^{3-2\kappa} \left(\tilde{c}_n^2 (h_n^x)^{2\kappa} \left(\left(\frac{x_n + \tilde{x}_n}{2} \right)^{2\kappa} + 1 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\tilde{d}_n)^2 (h_n^y)^{2\kappa} \left(\left(\frac{y_n + \tilde{y}_n}{2} \right)^{2\kappa} + 1 \right) \right) \right) = B 1_\kappa^2 |t-s|^{2\kappa}. \end{aligned}$$

Для другої ймовірності маємо

$$\gamma_0^2 = \sup_{t \in [0,1]} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n \right)^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n^2 + 4d_n^2).$$

При $0 < \kappa \leq 1$ має місце оцінка

$$\begin{aligned} E(Z_2(t) - Z_2(s))^2 &= \\ &= E \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (\sin(x_n t) - \sin(x_n s)) X_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n (\cos(y_n s) - \cos(y_n t)) Y_n \right)^2 \leq \\ &\leq \left(2^{2-2\kappa} \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n^2 (x_n)^{2\kappa} + d_n^2 (y_n)^{2\kappa}) \right) |t-s|^{2\kappa} \leq \\ &\leq B 2_\kappa^2 |t-s|^{2\kappa}. \end{aligned}$$

З асимптотичної поведінки c_n і d_n та того, що $x_n \sim y_n \sim \pi n$, слідує, що останній ряд збігається при $\kappa < \alpha$.

Виберемо $x = \frac{1}{2}$ та покладемо $\omega = 0$. Тоді

$$\gamma_\omega^2(0) = E(Z_1(0))^2 \leq \sum_{n=1}^N \left((h_n^c)^2 + 4(h_n^d)^2 \right).$$

Має місце твердження.

Теорема 6. Модель $\tilde{S}_\alpha(t, N)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю ε в рівномірній метриці, якщо для $0 < p < 1$ та $\beta < \sigma(1)$ мають місце нерівності $\delta > \max(\tilde{D}_1(N), \tilde{D}_2(N))$ та

$$1 - \varepsilon \geq 2 \left(\exp \left\{ -\frac{(\frac{\delta}{2} - \tilde{D}_1(N))^2}{2\tilde{A}_1(N)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\frac{\delta}{2} - \tilde{D}_2(N))^2}{2\tilde{A}_2(N)} \right\} \right),$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1(N) &= \frac{\gamma_\omega^2(0)}{(1-p)} + \frac{\nu^2}{p(1-p)^2}, \\ \tilde{A}_2(N) &= \frac{\gamma_0^2}{(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2}, \\ \tilde{D}_1(N) &= \frac{\sqrt{2}}{p(1-p)} \int_0^{\nu p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du, \\ \tilde{D}_2(N) &= \sqrt{2} \left(\gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right).\end{aligned}$$

Представляє інтерес використання методів статистичного моделювання вінерівського і узагальненого вінерівського процесів при розв'язуванні задач фінансової та актуарної математики, математичної статистики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пашко А. О. Оцінка точності моделювання гауссових випадкових процесів в рівномірній метриці // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — №1(115). — С. 119–131.
2. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields. I // Theor. Probability and Math. Statist. — 2000. — №. 61. — P. 61–74.
3. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields. II // Theor. Probability and Math. Statist. — 2001. — №62. — P.51–63.
4. Pashko A. A. Simulations of standart Brownian motion // Computer modelling and new Technologies. — 2014. — Vol. 18, №10. — P. 516–521.
5. Пашко А. О. Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу // Науковий вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2014. — Вип. 2. — С. 180–183.
6. Пашко А. О. Оцінка точності моделювання узагальненого вінерівського процесу // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія:математика і інформатика. — 2014. — Вип. 25, №1. — С. 106–113.
7. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К.: ТВИМС, 1998. — 289 с.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 720 с.
9. Булдыгин В. В. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. — К.: Наукова думка, 1980. — 240 с.
10. Kozachenko Yu. V., Sottien T., Vasylyk O. I. Simulation of weakly self-similar stationary increment $Sub_\varphi(\Omega)$ -processes: a series expansion approach // Methodology and computing in applied probability. — 2005. — 7. — P. 379–400.
11. Dzharidze K. O., Zanten J. H. A series expansion of fractional Brownian motion // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.
12. Вигдорович И. И., Алексин В. А. Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений. — М.: МГИУ, 2007. — 38 с.

Надійшла 07.11.2015

УДК 517.9

COMBINED NEWTON-POTRA METHOD FOR SOLVING NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS

STEPAN SHAKHNO, ANDRIJ-VASYL BABJAK, HALYNA YARMOLA

Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Ivan Franko National
University of Lviv, Ukraine.

E-mail: shakhno@lnu.edu.ua, andrij@myscience.org.ua, yarmola@lnu.edu.ua.

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА-ПОТРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

С. М. ШАХНО, А.-В. І. БАБ'ЯК, Г. П. ЯРМОЛА

Факультет прикладної математики та інформатики, Львівський національний
університет імені Івана Франка, Львів, Україна.

E-mail: shakhno@lnu.edu.ua, andrij@myscience.org.ua, yarmola@lnu.edu.ua.

RESUME. In the paper a local and a semi-local convergence of combined iterative process for solving nonlinear operator equations is investigated. This method is built on top of Newton method and method with convergence order 1,839 The radius of the convergence ball and convergence order of the proposed method are determined. Numerical experiments are carried out on the test examples with nondifferentiable operator.

KEYWORDS: nonlinear equation, nondifferentiable operator, local and semi-local convergence, convergence order, divided difference.

РЕЗЮМЕ. В роботі досліджено локальну та напівлокальну збіжність комбінованого ітераційного процесу для розв'язування нелінійних операторних рівнянь, побудованого на основі методу Ньютона та методу з порядком збіжності 1.839 ... Встановлено радіус області збіжності та порядок збіжності запропонованого методу. На тестових прикладах з недиференційовним оператором проведено чисельні експерименти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійне рівняння, недиференційовний оператор, локальна та напівлокальна збіжність, порядок збіжності, поділена різниця.

ВСТУП

Розглянемо операторне рівняння

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \quad (1)$$

де F і G — нелінійні оператори, визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y . Відомо, що F —

диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого, взагалі кажучи, не вимагається.

Оскільки G є недиференційовним оператором, то скористатися класичним методом Ньютона для знаходження розв'язку рівняння (1) не можна. В такому випадку застосовують метод типу Ньютона, різницеві або комбіновані (диференціально-різницеві) ітераційні процеси [1, 2, 4, 5, 7, 9].

Частковим випадком (1) є рівняння $F(x) = 0$. Для його розв'язування найчастіше застосовують метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0,$$

який має квадратичний порядок збіжності [6, 8]. Також розроблено різницеві методи, які використовують у своїх ітераційних формулах тільки значення нелінійного оператора і не вимагають аналітично заданих похідних. Одним із них є метод з порядком збіжності 1.839...

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n; x_{n-1}) + F(x_{n-2}; x_n) - F(x_{n-2}; x_{n-1})]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0.$$

Цей ітераційний процес запропонував Дж.Ф. Трауб для розв'язування одного нелінійного рівняння, а Ф.А. Потра узагальнив його на випадок банахових просторів [3, 10, 11].

На базі методів Ньютона та Потра нами побудовано комбінований ітераційний процес

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_n^{-1}H(x_n), \quad n \geq 0, \\ A_n &= F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

У цій праці вивчено локальну та напівлокальну збіжність методу (2). Встановлено, що порядок збіжності комбінованого ітераційного процесу збігається з порядком збіжності базового методу Потра.

1. ЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ (2)

Збіжність методу проведена за класичних умов Ліпшиця для перших похідних оператора F та поділених різниць першого та другого порядку оператора G . Наступна теорема встановлює радіус області збіжності та оцінку швидкості збіжності ітераційного процесу (2). Доведення проведено за методикою з [3, 11]. Також зроблено припущення, що G — диференційовний за Фреше оператор.

Теорема 1. *Нехай F і G — нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y . Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$ та існує оборотна похідна Фреше $H'(x^*)$. Нехай $G(\cdot; \cdot)$ і $G(\cdot; \cdot; \cdot)$ — поділені різниці першого та другого порядку оператора G , визначені на множині $U = \{x : \|x - x^*\| < r_*\} \subseteq D$ і в U виконуються умови Ліпшиця*

$$\|H'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq 2l_*\|x - y\|, \quad (3)$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x; y) - G(u; v))\| \leq p_*(\|x - u\| + \|y - v\|), \quad (4)$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(u; x; y) - G(v; x; y))\| \leq q_*\|u - v\|, \quad (5)$$

$$r_* = \frac{2}{3(l_* + p_*) + \sqrt{9(l_* + p_*)^2 + 16q_*}}.$$

Тоді для всіх $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in U$ ітераційний процес (2) коректно визначений, генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ належить до U , збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq \frac{l_* + p_*}{C_n} \|x_n - x^*\|^2 + \\ &+ \frac{q_*}{C_n} (\|x_n - x^*\| + \|x_{n-2} - x^*\|) \|x_{n-1} - x^*\| \|x_n - x^*\|, \end{aligned} \quad (6)$$

де $C_n = 1 - 2(l_* + p_*)\|x_n - x^*\| - q_*(\|x_n - x^*\| + \|x_{n-2} - x^*\|)\|x_{n-1} - x^*\|$.

Доведення. Нехай $x, y, z \in U$. Позначимо $A = F'(x) + G(x; y) + G(z; x) - G(z; y)$. Тоді, врахувавши умови (3)–(5), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|I - H'(x^*)^{-1}A\| = \\ &= \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; y) - G(z; x) + G(z; y)]\| \leq \\ &\leq \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; x^*) + \\ &+ G(z; x^*) - G(z; x) + G(x; x^*) - G(x; y) + G(z; y) - G(z; x^*)]\| = \\ &= \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; x^*) + \\ &+ G(z; x^*) - G(z; x) + [G(x; x^*; y) - G(z; x^*; y)](x^* - y)]\| = \\ &\leq 2l_*\|x - x^*\| + 2p_*\|x - x^*\| + q_*\|x - z\|\|y - x^*\| \leq \\ &\leq 2(l_* + p_*)\|x - x^*\| + q_*(\|x - x^*\| + \|z - x^*\|)\|y - x^*\|. \end{aligned}$$

З означення r_* маємо, що

$$(l_* + p_*)r_* + 2q_*r_*^2 = 1 - 2(l_* + p_*)r_* - 2q_*r_*^2 < 1. \quad (7)$$

Тоді, за теоремою Банаха про обернений оператор, $H'(x^*)^{-1}A$ є оборотний і

$$\begin{aligned} &\|(I - (I - H'(x^*)^{-1}A))^{-1}\| = \|A^{-1}H'(x^*)\| \leq \\ &\leq [1 - 2(l_* + p_*)\|x - x^*\| - q_*(\|x - x^*\| + \|z - x^*\|)\|y - x^*\|]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Припустимо, що $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \in U$. Тоді оператор

$$A_n = F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1})$$

є оборотний.

Далі можна записати

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|x_n - x^* - A_n^{-1}(H(x_n) - H(x^*))\| \leq \\ &\leq \|A_n^{-1}H'(x^*)\| \|H'(x^*)^{-1}[H(x_n) - H(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Врахувавши умови (3)–(5), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|H'(x^*)^{-1}[H(x_n) - H(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\| = \\ &= \|H'(x^*)^{-1}[F(x_n) - F(x^*) + G(x_n) - G(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\| \leq \\ &\leq \left\| H'(x^*)^{-1} \int_0^1 (F'(x^* + t(x_n - x^*)) - F'(x_n)) dt \right\| \|x_n - x^*\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|H'(x^*)^{-1}[G(x_n; x^*) - G(x_n; x_n) + G(x_n; x_n) - G(x_n; x_{n-1}) - G(x_{n-2}; x_n) + \\
 & \quad + G(x_{n-2}; x_{n-1})]\| \|x_n - x^*\| \leq (l_* + p_*) \|x_n - x^*\|^2 + \\
 & + \|H'(x^*)^{-1}[G(x_n; x_n; x_{n-1}) - G(x_{n-2}; x_n; x_{n-1})]\| \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x^*\| \leq \\
 & \leq (l_* + p_*) \|x_n - x^*\|^2 + q_* \|x_n - x_{n-2}\| \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x^*\|.
 \end{aligned}$$

З (8) і (9) отримаємо оцінку (6). Далі, з нерівностей (6) і (7) випливає, що

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r_*, \quad n \geq 0$$

Отже, ітераційний процес (2) є коректно визначений, генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ належать U і збігається до x^* . З останньої нерівності та оцінки (6) отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$. $\square$

Наслідок 1. *Порядок збіжності комбінованого ітераційного методу (2) дорівнює 1.839...*

Доведення. З оцінки (6) випливає, що існує константа C і натуральне число N , таке що

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C \|x_n - x^*\| \|x_{n-1} - x^*\| \|x_{n-2} - x^*\|, \quad n \geq N.$$

Звідси отримуємо, що порядок збіжності методу (2) є єдиним додатним коренем нелінійного рівняння $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$ [3]. $\square$

2. НАПІВЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ (2)

Обґрунтування напівлокальної збіжності комбінованого методу Ньютона-Потра (2) проведено з використанням принципу мажорант Л.В. Канторовича.

Теорема 2. *Нехай F і G — нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y . Нехай $G(\cdot; \cdot)$ і $G(\cdot; \cdot; \cdot)$ — поділені різниці першого та другого порядку оператора G , визначені на множині $U_0 = \{x : \|x - x_0\| \leq r_0\}$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(x_0; x_{-1}) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1})$, де $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in U_0$, є оборотний і для всіх $x, y, u, v \in U_0$ виконуються умови Ліпшиця*

$$\|A_0^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq 2l_0 \|x - y\|, \quad (10)$$

$$\|A_0^{-1}(G(x; y) - G(u; v))\| \leq p_0 (\|x - u\| + \|y - v\|), \quad (11)$$

$$\|A_0^{-1}(G(u; x; y) - G(v; x; y))\| \leq q_0 \|u - v\|. \quad (12)$$

Нехай a, b і c — невід'ємні числа, такі що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \leq a, \quad \|x_{-1} - x_{-2}\| \leq b, \quad \|A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0))\| \leq c. \quad (13)$$

Якщо $q_0 a(a + b) \leq 1$, для дійсного полінома

$$h(t) = -q_0 t^3 - (l_0 + p_0 + q_0 a) t^2 + [1 - q_0 a(a + b)] t$$

виконується нерівність

$$c \leq h(r) = \frac{1}{3} \frac{l_0 + p_0 + q_0 a + 2s}{(l_0 + p_0 + q_0 a + s)^2} (1 - q_0 a(a + b))^2, \quad (14)$$

де $s = \{(l_0 + p_0 + q_0 a)^2 + 3q_0(1 - q_0 a(a + b))\}^{1/2}$, $r = \frac{1 - q_0 a(a + b)}{l_0 + p_0 + q_0 a + s}$ і замкнена куля $U_0 \subset D$, де $r_0 \in (0, r]$ є коренем рівняння $h(t) = c$, то ітераційний процес (2) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ збігається до єдиного розв'язку $x^* \in U_0$ рівняння (1).

Крім цього, для всіх $n \geq -2$ виконується нерівність

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} t_{-2} &= r_0 + a + b, \quad t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \\ a_0 &= l_0 + p_0 + 3q_0 r_0 + q_0 a, \quad b_0 = 3q_0 r_0^2 - 2a_0 r_0 - q_0 a(a + b) + 1, \\ t_{n+1} &= t_n \cdot \frac{a_0 t_n + q_0(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2}) - 2q_0 t_n^2}{b_0 + 2a_0 t_n + q_0(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2}) - 3q_0 t_n^2}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Доведення. Зазначимо, що послідовність $\{t_n\}_{n \geq 0}$ можна одержати, застосовуючи ітераційний алгоритм Ньютона-Потра (2) до дійсного полінома $f(t) = -q_0 t^3 + a_0 t^2 + b_0 t$. Легко довести, що ця послідовність монотонно збігається до нуля. Також маємо, що

$$t_{k+1} - t_{k+2} \geq \frac{(l_0 + p_0)(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-1} - t_k)(t_{k-2} - t_k)}{1 - 2(l_0 + p_0)(t_0 - t_{k+1}) - q_0 a(a + b)}(t_k - t_{k+1}).$$

Методом математичної індукції покажемо, що ітераційний процес є добре визначений і

$$\|x_k - x_{k+1}\| \leq t_k - t_{k+1}, \quad k \geq -2. \quad (17)$$

Використовуючи (13), (14), (16) і те, що

$$t_0 - t_1 = t_0 \cdot \left(1 - \frac{a_0 t_0 + q_0(t_0 - t_{-1})(t_0 - t_{-2}) - 2q_0 t_0^2}{b_0 + 2a_0 t_0 + q_0(t_0 - t_{-1})(t_0 - t_{-2}) - 3q_0 t_0^2}\right) = h(r_0) = c,$$

ми доводимо, що (17) виконується для $k = -2, -1, 0$.

Припустимо, що для всіх $k \leq n$ виконується оцінка (17). Тоді, врахувавши умови Ліпшиця (10)–(12), для $k = n + 1$ матимемо

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1} A_{n+1}\| &= \|A_0^{-1} (A_0 - A_{n+1})\| \leq \|A_0^{-1} [F'(x_0) - F'(x_{n+1})]\| + \\ &+ \|A_0^{-1} [G(x_0; x_{-1}) - G(x_0; x_0) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) + G(x_0; x_0) - \\ &- G(x_{n+1}; x_0) + G(x_{n+1}; x_0) - G(x_{n+1}; x_n) + G(x_{n-1}; x_n) - G(x_{n-1}; x_{n+1})]\| = \\ &= \|A_0^{-1} [F'(x_0) - F'(x_{n+1})]\| + \|A_0^{-1} [(G(x_0; x_{-1}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}; x_0))(x_{-1} - x_0) + \\ &+ G(x_0; x_0) - G(x_{n+1}; x_0) + G(x_{n+1}; x_0) - G(x_{n+1}; x_n) + G(x_{n-1}; x_n) - \\ &- G(x_{n-1}; x_{n+1})]\| \leq 2l_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + q_0 a(a + b) + p_0 (\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\| + \\ &+ \|x_n - x_{n+1}\|) \leq 2(l_0 + p_0)(t_0 - t_{n+1}) + q_0 a(a + b) \leq 2(l_0 + p_0)t_0 + q_0 a(a + b) \leq \\ &\leq 2(l_0 + p_0)r_0 + q_0 a(a + b) \leq 2(l_0 + p_0) \frac{1 - q_0 a(a + b)}{2(l_0 + p_0)} + q_0 a(a + b) = 1. \end{aligned}$$

За теоремою Банаха маємо, що A_{n+1} є оборотний і

$$\begin{aligned} \|A_{n+1}^{-1} A_0\| &\leq \\ &\leq [1 - q_0 a(a + b) - 2l_0 \|x_0 - x_{n+1}\| - p_0 (\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|)]^{-1}. \end{aligned}$$

Врахувавши означення поділеної різниці та умови (10)–(12) отримаємо

$$\begin{aligned} & \|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})]\| = \\ & = \|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}) - F(x_n) - G(x_n) - A_n(x_{n+1} - x_n)]\| \leq \\ & \leq \left\| A_0^{-1} \int_0^1 \left(F'(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - F'(x_n) \right) dt \right\| \|x_n - x_{n+1}\| + \\ & + \|A_0^{-1}[G(x_n; x_{n+1}) - G(x_n; x_n) + (G(x_n; x_n; x_{n-1}) - G(x_{n-2}; x_n; x_{n-1})) \times \\ & \times (x_n - x_{n-1})]\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq (l_0 + p_0) \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \\ & + q_0 \|x_{n-2} - x_n\| \|x_{n-1} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\|. \end{aligned}$$

Звідси і з попередніх міркувань маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{n+2}\| & = \|A_{n+1}^{-1}H(x_{n+1})\| \leq \|A_{n+1}^{-1}A_0\| \|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})]\| \leq \\ & \leq \frac{(l_0 + p_0) \|x_n - x_{n+1}\|^2 + q_0 \|x_{n-1} - x_n\| \|x_{n-2} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\|}{1 - (2l_0 + p_0) \|x_0 - x_{n+1}\| - p_0 (\|x_0 - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|) - q_0 a(a + b)} \leq \\ & \leq \frac{(l_0 + p_0)(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_n)(t_{n-2} - t_n)}{1 - 2(l_0 + p_0)(t_0 - t_{n+1}) - q_0 a(a + b)} (t_n - t_{n+1}) \leq t_{n+1} - t_{n+2}. \end{aligned}$$

Отже, ітераційний процес (2) є добре визначений для всіх n . Звідси випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \leq t_n - t_k, \quad -2 \leq n \leq k, \quad (18)$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ є фундаментальною і збіжною в просторі X . З (18) при $k \rightarrow \infty$ випливає нерівність (15).

Покажемо, що x^* є коренем рівняння $F(x) + G(x) = 0$. Справді,

$$\begin{aligned} & \|A_0^{-1}H(x_{n+1})\| \leq (l_0 + p_0) \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \\ & + q_0 \|x_n - x_{n-2}\| \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отже, $F(x^*) + G(x^*) = 0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x^{**} \in U_0$, $x^{**} \neq x^*$ і $H(x^{**}) = 0$. Позначимо $P \equiv \int_0^1 F'(x^* + t(x^{**} - x^*)) dt + G(x^{**}; x^*)$. Тоді справедлива рівність $P(x^{**} - x^*) = H(x^{**}) - H(x^*)$. Якщо оператор P^{-1} оборотний, то $x^{**} = x^*$. Справді,

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1}P\| & = \|A_0^{-1}(A_0 - P)\| \leq \left\| A_0^{-1} \int_0^1 \left(F'(x_0) - F'(x^* + t(x^{**} - x^*)) \right) dt \right\| + \\ & + \|A_0^{-1}[G(x_0; x_{-1}) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) - G(x^{**}; x^*)]\| \leq \\ & \leq (l_0 + p_0)(\|x_0 - x^*\| + \|x_0 - x^{**}\|) + q_0 a(a + b) \leq 2(l_0 + p_0)r_0 + q_0 a(a + b) \leq \\ & \leq 2(l_0 + p_0) \frac{1 - q_0 a(a + b)}{2(l_0 + p_0)} + q_0 a(a + b) = 1. \end{aligned}$$

Отже, P^{-1} існує.

□

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді для всіх $n \geq 1$ справедлива оцінка*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{(l_0 + p_0)(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-3} - t_{n-1})(t_{n-2} - t_{n-1})}{1 - q_0a(a + b) - (l_0 + p_0)(2t_0 - t_n)}(t_{n-1} - t_n). \quad (19)$$

Доведення. Врахувавши умови (10)–(12), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left\| I - A_0^{-1} \left(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*)) dt + G(x_n; x^*) \right) \right\| \leq \\ & \leq \left\| A_0^{-1} \int_0^1 \left(F'(x_0) - F'(x^* + t(x_n - x^*)) \right) dt \right\| + \|A_0^{-1}[G(x_0; x_{-1}) - \\ & - G(x_0; x_0) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) + G(x_0; x_0) - G(x_n; x^*)]\| \leq \\ & \leq (l_0 + p_0)(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x^*\|) + q_0a(a + b) \leq \\ & \leq (l_0 + p_0)(2t_0 - t_n) + q_0a(a + b) < 1. \end{aligned}$$

За теоремою Банаха $\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*)) dt + G(x_n; x^*)$ є оборотний і

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*)) dt + G(x_n; x^*) \right)^{-1} A_0 \right\| \leq \\ & \leq (1 - q_0a(a + b) - (l_0 + p_0)(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x^*\|))^{-1}. \end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} \|x_n - x^*\| &= \left\| \left(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*)) dt + G(x_n; x^*) \right)^{-1} (H(x_n) - H(x^*)) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*)) dt + G(x_n; x^*) \right)^{-1} A_0 \right\| \|A_0^{-1} H(x_n)\|, \end{aligned}$$

отримаємо оцінку (19). $\square$

3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для демонстрації роботи запропонованого ітераційного процесу (2) проведено чисельні експерименти на тестових задачах з недиференційовним оператором. Розрахунки проводилися для різних початкових наближень та точності $\varepsilon = 10^{-10}$. Зупинка обчислювального процесу відбувалася при виконанні умов:

$$\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \varepsilon \text{ і } \|H(x_{n+1})\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Додаткові початкові наближення обчислювалися за формулою:

$$x_{-1} = x_0 - 10^{-4}, \quad x_{-2} = x_0 - 2 \cdot 10^{-4}.$$

Для порівняння швидкості збіжності комбінованого методу Ньютона-Потра з базовими методами у таблицях наведено кількість ітерацій, за які отримано розв'язок розглянутих систем нелінійних рівнянь. Метод типу Ньютона для розв'язування рівняння (1) має вигляд [7]:

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}H(x_n), n \geq 0, \quad (20)$$

а метод Потра:

$$x_{n+1} = x_n - [H(x_n; x_{n-1}) + H(x_{n-2}; x_n) - H(x_{n-2}; x_{n-1})]^{-1}H(x_n), n \geq 0. \quad (21)$$

Розглянемо систему з двома рівняннями.

$$\begin{cases} 3x^2y + y^2 - 1 + |x - 1| = 0, \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0, \end{cases}$$

Наближений розв'язок цієї системи:

$$(x^*, y^*)^T \approx (0.8946553733346867, 0.3278265217462975)^T.$$

Результати розрахунків наведено у таблиці 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок системи, для початкового наближення $x_0 = p \cdot (1, 0)^T$

p	метод типу Ньютона (20)	метод Потра (21)	метод Ньютона-Потра (2)
1	22	9	8
10	30	18	14
15	31	34	15

Розглянемо систему з трьома рівняннями.

$$\begin{cases} z^2(1 - y) - xy + |y - z^2| = 0 \\ z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| = 0 \\ 6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| = 0 \end{cases}$$

Відомо, що один із розв'язків системи є $(x^*, y^*, z^*)^T = (-1, 2, 3)^T$. Візьмемо за початкове наближення вектор $x_0 = p \cdot (-1.5, 2.5, 3.5)^T$. Результати для методів (2), (20) і (21) наведено в таблиці 2.

ТАБЛИЦЯ 2. Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок системи

p	метод типу Ньютона (20)	метод Потра (21)	метод Ньютона-Потра (2)
1	196	8	7
10	198	19	18
25	202	27	21

З отриманих результатів бачимо перевагу комбінованого методу (2) перед базовими методами, зокрема, перед методом Потра (21), хоча теоретичний порядок збіжності обох методів однаковий.

ЛІТЕРАТУРА

1. Argyros I. K. A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 298. — P. 374–397.
2. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15. — P. 395–399.
3. Potra F. A. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1984–1985. — Vol. 7, Number 1. — P. 75–106.
4. Ren H., Argyros I. K. A new semilocal convergence theorem for a fast iterative method with nondifferentiable operators // J. Appl. Math. Comp. — 2010. — Vol. 34, Number 1-2. — P. 39–46.
5. Shakhno S. M., Melnyk I. V., Yarmola H. P. Analysis of convergence of a combined method for the solution of nonlinear equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 201, Number 1. — P. 32–43.
6. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 20. — P. 123–134.
7. Zabrejko P. P., Nguen D. F. The majorant method in the theory of Newton-Kantorovich approximations and the Pta'k error estimates // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1987. — Vol. 9, Number 5-6. — P. 671–684.
8. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
9. Шахно С. М., Ярмола Г. П. Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Математичні студії. — 2011. — Т. 36, № 2. — С. 213–220.
10. Шахно С. М. Ітераційний алгоритм з порядком збіжності 1,839... за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць // Вісник Львівської політехніки. Фізико-математичні науки. — 2012. — Вип. 740. — С. 62–65.
11. Шахно С. М., Макух О. М. Про ітераційні методи в умовах неперервності за Гельдером поділених різниць другого порядку // Математ. методи і фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 2. — С. 90–98.

Надійшла 02.11.2015

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Журнал обчислювальної та прикладної
2015 МАТЕМАТИКИ 3(120)
Заснований в 1965 році

З М І С Т

С е р і я "О п т и м і з а ц і я"

Олександр Григоровичу Наконечному виповнюється 70 років	3
О. А. Капустян, О. К. Мазур Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами	6
В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев Обоснование минимаксных оценок линейных функционалов от решений параболо-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями и распределенным наблюдением	11
Д. О. Мановицька, Г. О. Доленко Загальна модель задачі управління змінами	23
С. О. Мащенко, В. І. Моренець Рівновага за Нешем в іграх з нечіткою множиною гравців	30
О. Г. Наконечний, С. В. Демиденко, М. В. Лосева До гарантованих оцінок розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь в умовах невизначеності	39
О. Г. Наконечний, П. М. Зінько Задачі протидії в системах з динамікою Гомперца	50
В. П. Савкова, О. Г. Наконечний До проблеми оцінки матриць попарних порівнянь в умовах невизначеності	61
Н. В. Семенова, С. В. Олійник Розв'язання задач змішано цілочислового білінійного програмування методом декомпозиції	69
Л. М. Чабак, В. В. Дударь, В. В. Семенов, Я. И. Ведель Метод внешних аппроксимаций для вариационных неравенств	77
О. Nakonechnyi, Yu. Podlipenko The minimax approach to the estimation of solutions to special systems of variational equations in hilbert spaces and its applications	85

С е р і я "П р и к л а д н а м а т е м а т и к а"

А. Я. Бомба, М. Р. Петрик, Д. Леклерк, О. В. Присяжнюк, Ж. Фресар Моделювання нелінійних сингулярно збурених трикомпонентних процесів типу „дифузія-конвекція-масообмін“ в наносередовищі ...	107
А. Л. Гуляницький Слабка розв'язність і просторово-часова дискретизація для зміннопорядкового рівняння дифузії	116

<i>В. С. Донченко, Т. П. Зінько, Ф. О. Скотаренко</i>	
Концепція кортежності для лінійних операторів та її реалізація для матричних кортежів	127
<i>С. И. Доценко, В. В. Семенов</i>	
Памяти Джона Нэша	141
<i>О. О. Марченко</i>	
Розробка системи розпізнавання іменованих сутностей тексту	152
<i>А. О. Пашко</i>	
Точність моделювання субгауссових вінерівських процесів в рівномірній метриці	160
<i>С. М. Шахно, А.-В. І. Баб'як, Г. П. Ярмола</i>	
Комбінований метод Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних операторних рівнянь	170