Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2014 **МАТЕМАТИКИ** 3(117)

Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський, І. М. Ляшенко, В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. М. Парасюк, І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар), Д. Я. Хусаінов, А. О. Чикрій

Серія "Прикладна математика"

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарєв, Д. А. Клюшин, О. М. Новіков, Т. Є. Романова, А. Г. Руткас, В. М. Терещенко

Серія "Оптимізація"

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада), Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія), Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США), Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

К. О. Пришляк, І. П. Сіренко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjournal@gmail.com html://www.opmj.univ.kiev.ua

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики
9 грудня 2014 року, протокол №4

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014
©"ТВіМС", 2014

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Підписано до друку 9.12.2014

Для публікації в журналі приймаються не опубліковані раніше наукові праці з провідних методів дослідження та розв'язування задач оптимізації, обчислювальної математики, математичної фізики, теорії фільтрації, теорії пружності, математичної кібернетики, теорії управління та інших напрямків.

У журналі публікуються статті українською, російською й англійською мовами.

Стаття у друкованому вигляді з підписами авторів подається особисто або електронною поштою з подальшим дублюванням на папері в одному примірнику.

До статті додається анкета автора (-ів): ПІБ автора(-ів) українською, російською й англійською мовами, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреса проживання й організації, телефон, факс, електронна пошта тощо та додаткова інформація: назва статті, резюме та ключові слова українською, російською й англійською мовами на електронному носії особисто або електронною поштою (див."Анкета автора" на сайті журналу www.opmj.univ.kiev.ua).

Обсяг статті не має перевищувати 12 сторінок, включаючи резюме (обсягом до 500 друкованих знаків, яке містить коротку характеристику досліджуваної проблеми, мету роботи й конкретну інформацію про отримані результати), рисунки, таблиці, графіки, список літератури та індекс УДК. Текст статті повинен відповідати структурній схемі: короткий літературний огляд проблеми, що розглядається; мета дослідження; постановка задачі та її актуальність; методи її вирішення й отримані результати; висновки про наукову новизну та практичне значення результатів. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком її згадування в тексті (посилання у тексті — арабськими цифрами у квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до ГОСТу 7.1:2006 (ознайомитися можна на сайті). Стаття має бути підготовлена за допомогою редактора LaTeX.

Редактор LaTeX може бути наданий або надісланий на електронному носії поштою на прохання автора. Додаткову інформацію, шаблони статті та анкету автора можна знайти на сайті журналу.

Місцезнаходження редакції: Україна, 01601, м. Київ, просп. Глушкова 4д, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, к. 218, редакція журналу "Журнал обчислювальної та прикладної математики", e-mail: opmjournal@gmail.com.

100 РОКІВ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ГЕОРГІЯ МИКОЛАЙОВИЧА ПОЛОЖІЯ

23.04.1914 — 26.09.1968

Видатний учений в галузі теорії функцій комплексної змінної, математичної фізики і обчислювальної математики, член-кореспондент АН УРСР Георгій Миколайович Положій народився 23 квітня 1914 р. у с. Новопавлівка Читинської губернії Росії. Після закінчення фізико-математичного факультету Саратовського державного університету з 1938 по 1940 рр. працював асистентом на кафедрі математичного аналізу.

У 1940 р. Г. М. Положій брав участь у радянсько-фінській, а з 1941 по 1942 рр. воював на фронтах Великої Вітчизняної Війни. Після тяжкого поранення і тривалого лікування в 1944 р. Г. М. Положій повернувся у 1942 р. на посаду асистента, а згодом став старшим викладачем кафедри математичного аналізу Саратовського державного університету.

У 1946 р. Георгій Миколайович захистив кандидатську дисертацію "Интегральные представления непрерывно дифференцируемых функций комплексного переменного" і з 1949 р. працював у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на посаді доцента кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету, завідувача цієї кафедри (з 1951 р.), декана механіко-математичного факультету (1952–1953). У 1958 році Георгій Миколайович став завідувачем кафедри обчислювальної математики, якою керував до самої смерті в 1968 році.

До основних наукових результатів, отриманих Г. М. Положієм, належать теорія p- і (p-q)-аналітичних функцій, метод Р-трансформацій для чисельного розв'язання диференційних рівнянь в частинних похідних і метод мажорантних областей для розв'язання задач математичної фізики. Найважливішими роботами Г. М. Положія є "Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента"(1962), "Теория обобщенных аналитических функций комплексной переменной"(1965), "Метод суммарных представлений численных решений задач математической физики и функции дискретного аргумента"(1966), а також унікальні підручники "Рівняння математичної фізики"(1959) і "Математический практикум"(1960). Георгій Миколайович заснував велику наукову школу.

Г. М. Положій значну увагу у своїй діяльності приділяв пропаганді наукових результатів. Він став одним із ініціаторів і засновником, а також і першим редактором республіканського міжвідомчого наукового збірника "Вычислительная математика", який згодом став нашим "Журналом обчислювальної та прикладної математики".

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №1(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.929

100 річчю від дня народження Положія Г. М. присвячено

ПРО ОДИН НАПРЯМОК ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ СПАДЩИНИ Г.М. ПОЛОЖІЯ

О.Ю. Грищенко

Резюме. У статті розглянуто два напрямки наукових досліджень член-кореспондента Г. М. Положія: метод сумарних зображень для чисельного розв'язування крайових задач математичної фізики та метод (p, q)-аналітичних функцій. Відзначено характерні якості цих методів і вказано на можливості ефективного комплексного застосування цих методів у нових прикладних проблемних областях, зокрема, у оптимізаційних задачах математичної теорії фільтрації при проектуванні гідротехнічних споруд.

Вступ

Видатний математик і педагог, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент АН України Георгій Миколайович Положій народився 23 квітня 1914 року. Пройшовши роки навчання і буремні воєнні роки, він з 1949 року пройшов за конкурсом на посаду доцента кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського державного університету. З 1951 року Г. М. Положій працював завідувачем цієї ж кафедри, а з 1958 р. і до останнього дня — завідувачем кафедри обчислювальної математики. Г. М. Положій автор багатьох наукових праць, монографій і всесвітньо відомих підручників. Під його керівництвом одержала шлях у науку велика плеяда учнів, серед яких академіки та членкори. (І. І. Ляшко, Б. М. Бублик та інші), доктори та кандидати наук. Він створив наукову школу, розвинув два наукові напрямки і фактично створив нову кафедру. Наукова і педагогічна праця Г. М. Положія відзначена державними і відомчими нагородами. Г. М. Положій значну увагу у своїй діяльності приділяв пропаганді наукових результатів. Він став одним із ініціаторів і засновником, а також і першим редактором республіканського міжвідомчого наукового збірника "Вычислительная математика", який згодом став нашим "Журналом обчислювальної та прикладної математики".

Більш детально про життєвий шлях Г. М. Положія сказано у багатьох публікаціях, зокрема в [1].

Наукові досягнення Г. М. Положія знайшли і далі знаходить все нові і нові широкі галузі практичного застосування у багатьох прикладних аспектах математичного моделювання реальних процесів. Уже після його смерті виявилося, що однією з таких галузей є оптимізаційні задачі математичної теорії фільтрації ґрунтових вод. Зупинимося коротко на цій проблемі.

Якість гідротехнічної споруди визначається низкою вимог до параметрів протікання процесу, які є характеристиками як гідротехнічних споруд: витрата рідини Q, швидкість $\vec{V}$ рідини під спорудою, умови стійкості споруди, так і вимогами до експлуатаційних властивостей, вартості споруди, терміну її зведення тощо. Ці вимоги записуються у вигляді системи обмежень

$$Q_i\left(a_1, a_2, ..., a_l, h\right) \geq q_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad \psi_j\left(b_1, b_2, ..., b_k, h\right) \geq \phi_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Тут a_i та b_j — геометричні та технологічні параметри.

У залежності від поточних обставин визначається відповідний функціонал якості

$$J\left(a_1, a_2, ..., a_l, b_1, b_2, ..., b_k, h\right),$$

в якому h — розв'язок відповідної крайової задачі фільтрації.

Побудова математичних моделей такого типу пов'язана з серйозними математичними проблемами. Навіть у простішому випадку, коли за обмеження вибрано тільки гідродинамічні характеристики $Q_i\left(a_1, a_2, ..., a_l, \phi\right) \geq q_i$, а цільову функцію вважаємо функцією тільки вартості споруди $J\left(a_1, a_2, ..., a_l, h\right)$, процес пошуку мінімуму цільової функції достатньо складний.

Виявилося, що у такій, новій на той час, постановці задачі ефективними є методи теорії (p, q)-аналітичних функцій [2] та сумарних зображень [3], запропоновані Г. М. Положієм.

1. Загальна постановка задачі напірної фільтрації

Рівняння математичної теорії фільтрації було отримано на основі рівнянь динаміки ідеальної рідини. Зокрема, у випадку плоско-паралельної фільтрації маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\theta\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0, \;\; \vec{V} = -\theta \mathrm{grad} h, \tag{1}$$

або для всталеного руху ґрунтових вод в однорідному середовищі

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \;\; \vec{V} = -\theta \mathrm{grad} h. \tag{2}$$

Оскільки швидкість фільтрації має потенціал

$$\phi = -\theta\left(\frac{P}{\rho g} + y\right) + c = -\theta h + c, \tag{3}$$

де c — дійсна стала (яку для зручності можемо вважати такою, що дорівнює нулю), то

$$\vec{V} = \mathrm{grad}\phi, \tag{4}$$

а

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Отже, існує функція току $\psi\left(x, y\right)$ така, що

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6}$$

а кожному плоско-паралельному фільтраційному потоку в однорідному середовищі можна поставити у відповідність аналітичну функцію

$$\omega = \varphi + i\psi, \tag{7}$$

яка називається комплексним потенціалом. Через вказані аналітичні функції вектор швидкості фільтрації визначається так:

$$\vec{V} = \overline{\frac{d\omega}{dz}}, \tag{8}$$

а кількість рідини, що пройшла через деякий контур L в бік його правої нормалі, можна визначити рівністю

$$Q = \int_L v_n ds = \int_L \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = [\psi]_L . \tag{9}$$

Отже, задачі фільтрації зводяться до пошуку дійсної чи уявної частини функції (7) за крайовим умовам, які задано на границі області фільтрації.

На практиці найчастіше зустрічаються чотири види ділянок областей фільтрації, на яких задаємо відповідні граничні умови:

а) непроникні границі, які є лініями току, де функція току приймає постійне значення $\psi = A = const$;

б) границі водойм та дренажів, які є лініями рівного потенціалу

$$\psi = B = const;$$

в) проміжки витікання, або ділянки, де вода з тіла греблі витікає не у водний басейн, а прямо в атмосферу

$$\phi = c - \theta y;$$

г) лінії вільних поверхонь, або криві депресії, які є лініями розділу між сухим та мокрим ґрунтом, тобто одночасно виконуються умови в) та умови

$$\psi = D + \varepsilon x,$$

де D та ε – сталі.

2. Постановка задача оптимізації вартості підземної частини гідроспоруди

Для ілюстрації запропонованого методу розглянемо простішу задачу мінімізації вартості підземної частини гідротехнічної споруди при виконанні однієї з гідротехнічних умов.

В області G (рис.1), обмеженій двома непроникними границями $BCDC_1E$ і $A'F'$ та двома границями водоймі AB і EF, під впливом різниці напорів H у верхньому та нижньому б'єфах проходить фільтраційний потік. Цьому потоку у відповідність можна поставити комплексний потенціал $\omega = \phi + i\psi$, де ϕ і ψ, як гармонічні функції у смузі G з розрізом вздовж відрізка CDC_1, задовольняють граничні умови:

$$\phi|_{AB} = -\theta H, \;\; \psi|_{BCDC_1E} = Q, \;\; \phi|_{EF} = 0, \;\; \psi|_{A'F'} = 0.$$

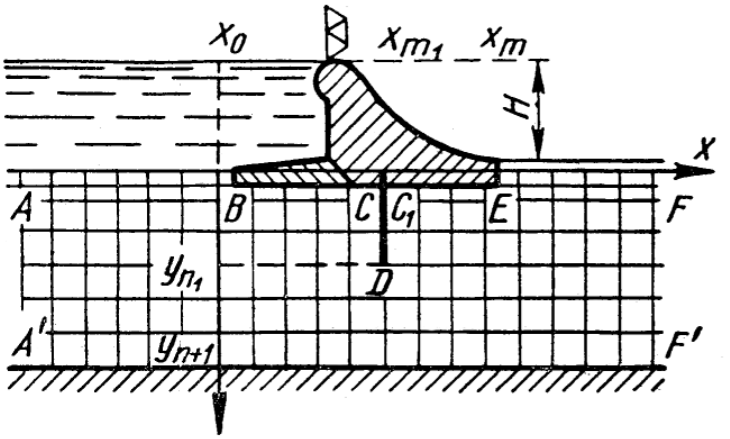


Рис. 1

Потрібно мінімізувати здавалося б достатньо простий функціонал

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} a(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} b(y, x_{m_1})dy, \tag{10}$$

який визначає вартість гідротехнічної споруди. Але задача ускладнюється тим, що точки (розміри споруди) α, β, γ, δ повинні бути визначені в процесі моделювання так, щоб виконувалися задані технологічні обмеження $x_{\underline{m}} \le \beta - \alpha \le x_{\bar{m}}$, $y_{\underline{n}} \le \delta - \gamma \le y_{\bar{n}}$, де $x_{\underline{m}}, x_{\bar{m}}$ — мінімальна і максимальна ширина флютбету ($x_m - x_0 = \beta - \alpha$), визначена як різниця відповідних координат B та E, $y_{\underline{n}}, y_{\bar{n}}$ — мінімальна і максимальна довжина шпунта ($y_{n_1} - y_0 = \gamma - \delta$), а (x_{m_1}, y_0) — точка прикріплення шпунта до флютбета. При цьому потрібно враховувати, що максимально допустима витрата води Q під гідротехнічною спорудою при фільтрації повинна не перевищувати деякого певного заданого значення, тобто $Q = Q\left(x_{\underline{m}}, x_{\bar{m}}, x_{m_1}, y_{\underline{n}}, y_{\bar{n}}\right) \le Q_0$, а тиск під флютбетом повинен обмежуватися певним максимумом P_0.

3. Методи розв'язування фільтраційниих задач

Побудова ефективних методів розв'язання фільтраційних задач є складною проблемою. Існують точні аналітичні методи, серед яких найбільш відомими є метод конформних відображень, метод аналітичної теорії диференціальних рівнянь, метод інтегральних рівнянь та метод крайових задач теорії функцій комплексної змінної. Але складність їх використання для встановлення основних характеристик при проведенні практичних розрахунків робить їх не завжди ефективними.

З наближених методів найбільш відомими стали метод фрагментів, метод послідовного розвертання шпунтів та варіаційні методи. Вони спрощують побудову розв'язку, але мають значну похибку, оцінити яку вдається не завжди.

Г. М. Положій на основі доведеної ним теореми про рух граничних точок відображених областей отримав загальні варіаційні теореми фільтрації в однорідному середовищі. Виходячи з цих теорем, він запропонував для розв'язку фільтраційних задач метод мажорантних областей. Основна ідея полягає в заміні розв'язку даної крайової задачі розв'язками допоміжних крайових задач для більш простих областей, для яких ці розв'язки відомі або знаходяться порівняно легко. Метод було розвинено на інші класи задач.

Основним із наближених методів розв'язання задач математичної фізики є метод скінченних різниць. Багато дослідників робили спроби використати цей метод для розв'язання задач фільтрації. Але навіть поява швидкодіючих електронних обчислювальних машин не зробила метод скінченних різниць провідним у математичній теорії фільтрації. Це пов'язано з тим, що характерною особливістю фільтраційних задач є необхідність використання сітки з великою кількістю вузлів і при розв'язуванні відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь це призводить не тільки до великого об'єму обчислювальних робіт, але й до значних похибок.

Вказані труднощі значною мірою було усунено з появою нового підходу до розв'язування різницевих рівнянь – методу сумарних зображень.

4. Метод сумарних зображень

При розробці нового чисельного методу розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних Г. М. Положій поставив за мету розробити чисельний метод з найменшою кількістю необхідних обчислювальних операцій, для якого відповідні процеси не приводили б до накопичення великих похибок. Цей метод систематично викладено в монографії [3]. Метод сумарних зображень можна розглядати як дискретний аналог метода інтегральних зображень у застосуванні до крайових задач математичної фізики у їх дискретній постановці. Розв'язки отримуються в замкненому вигляді і записуються алгебраїчними формулами. У залежності від крайових умов вони або явні, або містять невелику кількість невідомих параметрів, що визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це метод вибіркового розрахунку. Остання обставина дуже важлива, оскільки для більшості практичних задач, зокрема, для задач фільтрації, достатньо знати розв'язок лише в тих вузлах області, в яких визначаються основні характеристики. Ця обставина надає змогу уникнути надмірно великої обчислювальної похибки. Методом сумарних зображень можна розв'язувати задачі теорії фільтрації, теорії пружності, теорії пластин та оболонок тощо при дуже великій і навіть необмеженій кількості вузлів сітки для однозв'язних та багатозв'язних плоских і просторових областей. Аналітична форма розв'язку дозволяє не тільки знаходити чисельне значення розв'язку у будь-якій точці, але й проводити певні якісні дослідження.

До задач моделювання гідротехнічних споруд в рамках лінійної стаціонарної теорії фільтрації метод сумарних зображень було розвинено і застосовано І. І. Ляшком [4, 5, 6] та його учнями. Метод полягає у наступному. У площині (x, y) будуємо рівномірну ортогональну сітку з вузлами

(x_i, y_k), $x_i = x_0 + ih$, $y_k = y_0 + kh_1$, $(i = 1, 2, \dots M,\ k = 1, 2, \dots N)$, h та h_1 – додатні сталі – кроки сітки відповідно по x та y. Сукупність точок-вузлів (x_i, y_k) будемо називати сітковим прямокутником D. Під скінченно-різницевим оператором Лапласа $\Delta_h u$ розуміємо п'ятиточковий оператор [3].

Введемо n-вимірні вектори $\vec{u}(x_i) = \{u_k(x_i)\}_{k=1}^n$, $u_k(x_i) = u(x_i, y_k)$, $\vec{f}(x_i) = \{f_k(x_i)\}_{k=1}^n$, $\vec{\omega}(x_i) = \{u_0(x_i), 0, ..., 0, u_{n+1}(x_i)\}$ та квадратну матрицю порядку n $P_1 = [a_{ik}]_1^n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin i\frac{k\pi}{n+1}\right]_{i,k=1}^n$.

Теорема 1. *Теорема (Г. М. Положія)[3]. Для загального розв'язку скінченно-різницевого рівняння*

$$\Delta_h u = f(x, y)$$

з умовами першого роду на горизонтальних границях в сітковому прямокутнику D справедлива рівність

$$\vec{u}(x_i) = P_1 \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\mu^{i-p} - \nu^{i-p}}{\mu - \nu} P_1 \vec{H}_1 \right\}, \tag{11}$$

де остання сума дорівнює нулю при $i = 0,\ 1$; $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$ та $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$ — n-вимірні вектори довільних постійних; $\vec{H}_1 = h^2 \vec{f}(x_p) - \gamma^2 \vec{\omega}_1(x_p)$ є n-вимірним вектором; $\mu^i = \left[\mu_k^i\right]_{k=1}^n$, $v^i = \left[v_k^i\right]_{k=1}^n$, $\frac{\mu^i - v^i}{\mu - v} = \left[\frac{\mu_k^i - v_k^i}{\mu_k - v_k}\right]_{k=1}^n$ — діагональні матриці порядку n; $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos\frac{k\pi}{n+1}$, а $\gamma = h/h_1$.

Формули аналогічні (11) було одержано і для інших типів граничних умов на горизонтальних сторонах прямокутника. Значення векторів $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$ та $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$ знаходяться з умов на вертикальних сторонах.

В роботах І. І. Ляшка ці формули було поширено на необмежені області. У загальному вигляді формули сумарних зображень для сіткової смуги (x_i, y_k) $(i = 0, \pm1, \pm2, ...; k = 1, 2, ..., n+1)$ можна записати так:

$$\vec{u}(x_i) = P \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} \underset{4}{\vec{\hat{H}}}(x_p) \right\}, \quad (i = 0, \pm1, \pm2, ...), \tag{12}$$

де $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$ та $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$ — n-вимірні вектори довільних сталих, причому для розв'язку, обмеженого при $i \to \infty$, слід покласти $\vec{A} = 0$, а для розв'язку, обмеженого при $i \to -\infty$, відповідно $\vec{B} = 0$. Матриця n-го порядку P, діагональні матриці μ^i, ν^i, $\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu}$ та n-вимірний вектор $\vec{H}(x_p)$, як і раніше, визначаються в залежності від типу крайових умов на горизонтальних ділянках границь областей.

5. Застосування методу сумарних зображень до розв'язання задачі напірної фільтрації

Знаходження розв'язку поставленої задачі пов'язано зі складністю побудови конформного відображення багатокутника на півплощину і може бути виконано тільки у достатньо простих випадках. Крім того, його практичне використання ускладнено внаслідок громіздких обчислень. Розв'язок задачі методом сумарних зображень отримується у вигляді простої формули, що містить невелику кількість невідомих параметрів, які знаходяться з допоміжної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Достатня для практики точність при визначенні фільтраційних характеристик досягається навіть при великій кількості параметрів.

Розглянемо задачу про фільтрацію під одношпунтовим флютбетом (рис. 1). Диференціальну задачу сформулюємо так. Знайти уявну частину $\psi(x,y)$ комплексного потенціалу $\omega = \varphi + i\psi$, як гармонічну функцію у смузі G з розрізом вздовж відрізка CDC_1, що задовольняє граничні умови:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{AB} = 0,\ \psi|_{BCDC_1E} = Q,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{EF} = 0,\ \psi|_{A'F'} = 0. \tag{13}$$

Поставимо відповідну скінченно-різницеву задачу. Сітку розташуємо так, щоб пряма AF була посередині між лініями сітки $y = y_0$ та $y = y_1$, а лінія $A'F'$ співпала з лінією сітки $y = y_{n+1}$; передбачаємо, що точки B і E знаходяться посередині відрізків $[x_0, x_1]$ і відповідно $[x_m, x_{m+1}]$ (рис. 1). Будемо вважати, що відрізок CD розташовано вздовж лінії сітки $x{=}x_{m_1}$, а точці D відповідає вузлова точка (x_{m_1}, y_{n_1}). Для спрощення запису, покладемо, що сітка квадратна, тобто $\gamma = \frac{h}{h_1} = 1$. У сітковій смузі (x_i, y_k) $(i = 0, \pm1, \pm2, ...; k = 1, 2, ..., n)$ шукаємо розв'язок $\psi(x_i, y_k) = \psi_k(x_i)$ скінченно-різницевого рівняння Пуассона

$$\Delta_h\psi = f, \tag{14}$$

у якому права частина f відмінна від нуля лише у вузлах сітки (x_{m_1}, y_k) $(k = 1, 2, ..., n_1)$, що відповідають положенню шпунта, оскільки в точках шпунта функція $\psi(x,y)$ не є гармонічною. Значення $f(x_{m_1}, y_k) = f_k$ будемо вважати невідомими параметрами. Граничні умови, що відповідають умовам (13), запишемо у вигляді

$$\psi_0(x_i) - \psi_1(x_i) = \begin{cases} 0, & i \le 0,\ i = m_1,\ i > m, \\ \alpha_i, & i = 1, 2, ..., m_1 - 1, m_1 + 1, ..., m, \end{cases} \tag{15}$$

$$\psi_{n+1}(x_i) = 0 \quad (i = 0, \pm1, \pm2, ...). \tag{16}$$

Тут α_i також є ще невідомими параметрами. Отже, розв'язок скінченно-різницевої задачі буде виражено через параметри f_k $(k = 1, 2, 3, ..., n_1)$ і α_i $(i = 1, 2, ..., m_1 - 1, m_1 + 1, ..., m)$. Зупинимося на питанні знаходження цих параметрів.

Посилаючись на міркування, зроблені в [5], і увівши позначення $\alpha_i' = \frac{\alpha_i}{Q}$, $f_k' = -\frac{h^2 f_k}{Q}$, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно α_i', f_k'

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m_1}}^{m} A_{ip}'(1)\,\alpha_p' + \sum_{l=1}^{n_1} B_{1l}(i)\,f_l' = 1 \quad (i = 1, 2, ..., m_1 - 1, m_1 + 1, ..., m),$$

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m_1}}^{m} A_{m_1 p}(k)\,\alpha_p' + \sum_{l=1}^{n_1} B_{kl}(m_1)\,f_l' = 1 \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{17}$$

Матриця цієї системи симетрична, а вздовж діагоналі знаходяться максимальні елементи. До розв'язку такої системи можна застосувати найбільш ефективні та економічні методи, наприклад, метод квадратного кореня.

Визначивши α_i', f_k', легко обчислити також Q, а отже, і параметри α_i, f_k, розв'язок системи ψ та основні гідротехнічні параметри

$$Q = \theta H \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m_1}}^{m} \alpha' + \sum_{k=1}^{n_1} f_k' \right]^{-1} \tag{18}$$

,

$$P = -\rho g \left(\frac{\varphi}{\theta} - y \right) \tag{19}$$

.

Отже, можна знайти розв'язок фільтраційної задачі в цілому.

6. Варіаційні теореми Г. М. Положія та метод мажорантних областей

Варіаційно-топологічні теореми було отримано для однорідного середовища на основі теореми про рух граничних точок відображених областей. Пізніше Г. М. Положій встановив теорему про збереження області для еліптичних систем диференціальних рівнянь, що дозволило розповсюдити метод мажорантних областей на задачі фільтрації в неоднорідному середовищі та просторові задачі з осьовою симетрією [2].

Математичною передумовою методу є теореми Г. М. Положія [2].

Теорема 2. *(про збереження області для еліптичних систем диференціальних рівнянь). Нехай в деякій області G площини $z = x + iy$ функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $u, v \neq const$, є неперервно-диференційовними розв'язками еліптичної системи рівнянь*

$$au_x + bu_y - v_y = 0,$$
$$du_x + cu_y - v_x = 0. \tag{20}$$

Коефіцієнти цієї системи a, b, c, d є функціями x, y, що мають похідні, які задовольняють умову Гельдера. Тоді функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *перетворює область* G *в деяку іншу область в площині* $\omega = u + iv$.

Вивчаючи локальні зміни фільтраційних характеристик потоку в залежності від руху вздовж границі області фільтрації точки, яка розділяє лінії току і потенціальні лінії, було встановлено важливі залежності. Для ілюстрації розглянемо в площині $z = x+iy$ область G, обмежену двома потенціальними лініями AB і DC та двома лініями току AD і BC (рис. 2). Крайові умови для визначення аналітичної в області G функції $\omega = f(z) = u + iv$ можна записати у вигляді

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{DC} = H = const > 0, \tag{21}$$

$$v|_{AD} = C = const, \quad v|_{BC} = C + Q = const > C. \tag{22}$$

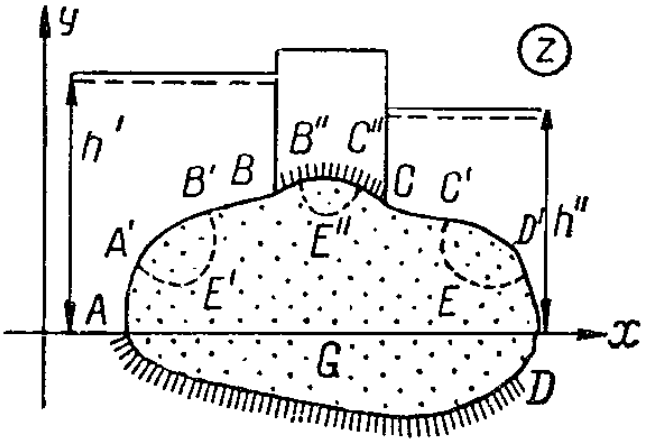


Рис. 2

Тоді при заміні області G областю G_1, отриманою з G за рахунок зміщення однієї з точок A, B, C, D вздовж границі G або втискання всередину області однієї з граничних потенціальних ліній чи ліній току, але при незмінних точках їх розділу та незмінному значенні H, відбуваються зміни характеристик потоку, для яких вірні наступні теореми (позначення у теоремах 1–3 відповідають позначенням [2]).

Теорема 3. *При зменшенні потенціальної лінії:*

а) $Q_1 < Q$;

б) в $G_1 + L_1L_1'$ *буде* $u_1 > u$, *якщо зменшується лінія найменшого потенціалу, і* $u_1 < u$, *якщо зменшується лінія найбільшого потенціалу;*

в) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ *на незмінній частині зменшуваної потенціальної лінії та близько до її кінця на незмінній лінії току і* $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ *на незмінній частині збільшуваної лінії току, на незмінній лінії току.*

Теорема 4. *При втисканні потенціальної лінії:*

а) $Q_1 > Q$;

б) в $G_1 + L_1 - L_1L'$ буде $u_1 < u$, якщо втискається лінія найбільшого потенціалу, і $u_1 > u$, якщо втискається лінія найменшого потенціалу;

в) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на незмінній потенціальній лінії і близько до її кінців на лініях току і $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на незмінній частині втиснутої потенціальної лінії і близько до її кінців на лініях току.

Теорема 5. *При втисканні лінії току:*

а) $Q_1 < Q$;

б) на незмінній частині втиснутої лінії току $u_1 > u$ зі сторони лінії найбільшого потенціалу і $u_1 < u$ на незмінній частині її зі сторони лінії найменшого напору;

в) $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на незмінній частині лінії току, яка стискається і на одній з потенціальних ліній, а на другій потенціальній лінії, або $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ поблизу її кінця, причому на незмінній лінії току в першому випадку буде $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ поблизу кінців та $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ поза кінцями, а в іншому випадку $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ поблизу її кінця, що прилягає до потенціальної лінії, на якій $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ і $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ близько до її іншого кінця.

Аналогічні теореми доведено і для інших випадків напірної та безнапірної фільтрації.

Спираючись на ці твердження, було розроблено метод мажорантних областей. Суть методу полягає в тому, що для знаходження тієї чи іншої інтегральної характеристики, яка відповідає заданій області фільтрації G, будуються два фільтраційних потоки в таких допоміжних областях $\bar{G}$ і $\underline{G}$, в яких відповідна інтегральна характеристика відома або знаходиться просто, та чисельне значення цієї характеристики внаслідок відповідних варіаційних теорем для області $\bar{G}$ більше, а для області $\underline{G}$ менше шуканої величини. Тобто, допоміжні крайові задачі вибирають так, щоб знайдені розв'язки цих задач обмежували шукані інтегральні характеристики зверху та знизу.

Пізніше ці теореми знайшли своє застосування при побудові розв'язків оптимізаційних задач математичної фільтрації.

7. Використання теорем Положія при побудові алгоритму розв'язування оптимізаційної задачі

Повернемося до задачі мінімізації функціоналу (10) при вказаних у пункті 2 умовах. Зупинимося тепер на одному з алгоритмів розв'язання [7].

Перехід до різницевої постановки задачі приводить до розв'язування задачі цілочисельного математичного програмування. Для цього побудуємо область допустимих значень

$$x \in D = \{ X = (x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) |\, Q\,(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) \le Q_0,$$

$$P\,(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) \le P_0 \},$$

$$x_{\underline{m}} \le x_i \le x_{\bar{m}},\ \ y_{\underline{n}} \le y_j \le y_{\bar{n}}$$

і сітковий функціонал

$$J = \sum_{i=0}^{m} a_i h_i + \sum_{j=0}^{n} b_j h_j \to \min .$$

Тут x_{m_1} — місце положення основи шпунта, $x_{\underline{m}}, x_{\bar{m}} \geq 0$, $y_{\underline{n}}, y_{\bar{n}} \geq 0$, a_i, b_j, Q_0 — задані; a_i, b_j— вартість забудови одиниці ширини флютбету та довжини шпунта відповідно.

Задамо початкові координати — (x_m, x_{n_1}, x_{m_1}), де $x_{m_1} = \left[\frac{x_m + x_{\underline{m}}}{2}\right]$.

1. Нехай на s-му кроці ми отримали координати (x_m, x_{n_1}), точка $x_{m_1} = \left[\frac{x_m + x_{\underline{m}}}{2}\right]$. За допомогою методу сумарних зображень знаходимо $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$. Порівнюємо $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$ та Q_0:

1.1) якщо $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}) < Q_0$, то переходимо до пункту 3.1);

1.2) якщо ж $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}) \geq Q_0$, то збільшуємо m_1 на 1:

а) при $m_1 + 1 \leq m$ порівнюємо $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1})$ та $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$:

якщо $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1}) < Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$, то покладаємо $s = s + 1$, $m_1 = m_1 + 1$ і повертаємося на початок алгоритму;

якщо ж $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1}) \geq Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$, то переходимо на 1.2).б);

б) при $m_1 + 1 > \underline{m}$ зменшуємо m_1 на 1:

якщо $m_1 - 1 \geq 0$, покладаємо $s = s + 1$, $m_1 = m_1 - 1$ і повертаємося на початок алгоритму;

якщо ж $m_1 - 1 < 0$, то переходимо до пункту 2.1).

2. При зміні ширини флютбету m змінюється довжина потенціальної лінії EF (рис. 2), згідно твердження теореми 1 Г. М. Положія при цьому змінюється величина Q.

2.1) Збільшуємо m на 1:

а) якщо $m+1 \leq \bar{m}$, тоді згідно тієї ж теореми Q зменшиться. Покладаємо $s = s + 1$, $m = m + 1$, переходимо до першого пункту алгоритму;

б) якщо ж $m + 1 > \bar{m}$, то переходимо до пункту 3.2).

2.2) Зменшуємо m на 1:

а) якщо $m - 1 \geq \underline{m}$, тоді Q збільшиться. Покладемо $s = s+1$, $m = m-1$, переходимо до першого пункту алгоритму;

б) при $m - 1 < \underline{m}$ точка (x_{m_1}, x_m, y_{n_1}) — оптимальна. Підраховуємо вартість споруди при x_{m_1}, x_m, y_{n_1} та x_m, y_{n_1}.

3. При зміні довжини шпунта n_1 змінюється довжина лінії току BC, згідно твердження теореми 3 Г. М. Положія при цьому зменшується чи збільшується величина Q.

3.1) Зменшуємо n_1 на 1:

а) якщо $n_1 - 1 \geq \underline{n}$, то згідно теореми 3 Q збільшиться. Покладаємо $s = s + 1$, $n_1 = n_1 - 1$, переходимо до першого пункту алгоритму;

б) при $n_1 - 1 < \underline{n}$ переходимо до пункту 2.2).

3.2) Збільшуємо n_1 на 1:

а) якщо $n_1 + 1 \leq \bar{n}$, то у відповідності до теореми 3 Q зменшиться, отже, покладемо $s = s+1$, $n_1 = n_1 + 1$, переходимо до першого пункту алгоритму;

б) якщо $n_1 + 1 > \bar{n}$, то за таких умов оптимального розв'язку не існує.

Висновок

Наведений приклад носить тільки ілюстративний характер. Підводячи підсумок, підкреслимо, що метод сумарних зображень дозволив обчислювати необхідні фільтраційні характеристики потоку, використовуючи мінімальну інформацію про розв'язок крайової задачі у незначній кількості вузлових точок, а варіаційні теореми вказали шлях пошуку мінімуму функціоналу. Ці теоретичні дослідження, теореми і розроблені нами чисельні алгоритми з успіхом було використано при розрахунку одного з фрагментів підземного контуру насосної станції Дніпро—Донбас [8].

Варіаційні теореми Г. М. Положія можна також використати у інших прикладних галузях, зокрема, у теорії пружності тощо. Грунтовне дослідження наукової спадщини видатного вченого математика Г. М. Положія може виявити ще багато нерозкритих можливостей її використання для знаходження розв'язків нових важливих задач.

Література

1. Георгий Николаевич Положий. Библиография. / Составители А. А. Глущенко, Е. А. Карагодова и др. Отв. ред. В. Г. Самойленко, И. И. Ляшко, Т. Г. Положий // Ин-т математики НАН Украины, Киевский национальний университет имени Тараса Шевченко, 2004. — 84 с.
2. Положий Г. Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. — К.: Наукова думка, 1973. — 424 с.
3. Положий Г. Н. Численное решение двухмерных и трёхмерных краевых задач математической физики и функций дискретного аргумента. — Изд-во Киевского ун-та, 1962. — 162 с.
4. Ляшко І. І. Про розвиток та застосування методу сумарних зображень в теорії фільтрації. // ДАН УРСР. — 1962. — Т.9.
5. Ляшко И. И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. — Изд-во Киевского ун-та, — К., 1963. — 174 с.
6. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. — К.: "Наукова думка", 1973. — 264 с.
7. Грищенко А. Е., Грищенко Г. И., Третяк В. П. Об одной задаче минимизации стоимости подземной части сооружения. — Весник КГУ, Сер. модел. сложных систем. — 1984. — №3. — С. 98–103.
8. Грищенко А. Е., Ляшко И. И., Канарский В. Ф., Дорошенко Н. И. О численно-аналитическом исследовании фильтрационного потока под насосными станциями канала Днепр—Донбасс. // Сб. Вычислительная и прикладная математика. — К., 1977. — Вып. 31. — С. 32–40.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 06.09.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Резюме. В работе для модельного вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

В данной работе для модельного вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Для общих эллиптико-параболическкких уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающееся смешанно эллиптико-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t,\ t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt},\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p, q = const$, $p > 0$, $q \geq 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r{\geq}0$, $0{\leq}\theta_1{<}2\pi$, $0{\leq}\theta_i \leq \pi$, $i{=}2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Определение 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,\ldots$ — пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \le c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Через $\bar\varphi^k_{1n}(r)$, $\bar\varphi^k_{2n}(r)$, $\psi^k_{1n}(t)$, $\psi^k_{2n}(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4) по функцям $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(r,\theta)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима.*

Доведення. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$t^q\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1{=}1,\ g_j{=}(sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\ j{>}1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m- -2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar u_n^k(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar u_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$t^q\left(\bar u^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar u^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar u^k_n\right) - \bar u^k_{nt} = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{8}$$

В (7), (8), произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$, получим

$$t^q\left(\bar{v}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k\right)-\bar{v}_{nt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{v}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar{v}_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots, \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k(t),\ \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv t^q\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),\ \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k r,t+\upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{16}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu_{s,n}R_s=0,\ 0<r<1, \tag{19}$$

$$R_s(1)=0,\ \left|R_s(0)\right|<\infty, \tag{20}$$

$$T_{st}+\mu_{s,n}t^qT_s(t)=-a_{s,n}(t),\ 0<t<\alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является ([4])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ – нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}t^{q+1})) \int\limits_t^\alpha a_{s,n}^k(\xi)(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1})d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (18), получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0 < r < 1. \tag{25}$$

Выражение (25) — разложения в ряды Фурье-Бесселя [5], если

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{26}$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{27}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17), (23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{28}$$

где $a_{s,n}^k(t)$, определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0,\ 0 < t < \alpha,\ T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

решением которой является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right). \tag{29}$$

Из (23), (29) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}(\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right) J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{30}$$

где $b_{s,n}$ находится из (27).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \left\{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{31}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28), (30).

Учитывая формулу [5] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [6,3]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}\right) + 0\left(\tfrac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu \geq 0,$$
$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2},\ \left|\tfrac{\partial^l}{\partial\theta_j^l} Y^k_{n,m}(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l},\ j = \overline{1, m-1},\ l = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta),\ \varphi_1(r,\theta)$, как в [7, 8], можно показать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (28), (30), (31) при $t \to +0$ имеем

$$u(r,\theta,t) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y^k_{n,m}(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi + \right.$$
$$\left. + b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \quad (32)$$

Из (26)–(28), (30), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S),\ l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (32), приходим к задаче Дирихле в области Ω_β для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения

$$|t|^p \Delta_x u + u_{tt} = 0 \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta), \quad (34)$$

которое имеет единственное решение [8].

В [8] приводится явный вид решения задачи (33), (34), поэтому можно записать представление решения и для задачи 1. Теорема доказана. □

Литература

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: Сб. переводов. Математика. — 1963. — Т. 7, №6. — С. 99–121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 2010. — 360 с.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 — М.: Наука, 1974. — 297 с.

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М: Наука, 1977. — 659 с.
7. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
8. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 6. — С. 936–939.
9. Иванов П. Н. Управление нелинейными системами. — К: Науковий світ, 2008. — 249 с.
10. Петренко С. А. Комп'ютерна модель відстіників промислових відходів. // Міжнародна наукова конференція "Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального експерименту (ISDMCI'2001)", 19–23 травня 2001: матеріали / Євпаторія, Україна. — 2001. — Т. 1, ч. 3. — С. 78–81.

Казахский Национальный Педагогический Университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Поступила 01.07.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.925.7+532.536

О ТРАНСФОРМАЦИЯХ РАЗРЕЗОВ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Э. Н. Береславский

Резюме. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с шестью регулярными особыми точками, которое соответствует задаче о конформном отображении круговых шестиугольников в полярных сетках с двумя разрезами, характерных для теории струй и кавитации, теории глиссирования в газовой динамике, в теории движения грунтовых вод и теории фильтрации. С помощью численного моделирования показано, что при фиксировании параметра, характеризующего отношение радиусов окружностей, составляющих противоположные стороны многоугольника, на которых присутствуют разрезы, конфигурация и взаимное расположение последних существенно зависит не столько от известных свойств тета-функций, на основе которых конструируются частные решения рассматриваемого уравнения, сколько от диапазонов изменения постоянных конформного отображения, входящих в выражения для отображающих функций, а также модуля эллиптических функций.

1. Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с двоякопериодическими коэффициентами

$$v'' + 2(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta f(\tau)v' + \Delta g(\tau)v = 0, \tag{1}$$

$$f(\tau) = sn(2K\tau, k)cn(2K\tau, k)dn(2K\tau, k),$$
$$g(\tau) = 2k^2 sn^6(2K\tau, k) + \lambda_2 sn^4(2K\tau, k) + \lambda_1 sn^2(2K\tau, k) + \lambda_0,$$
$$\Delta_j = sn^2(2K\tau_j, k) - sn^2(2K\tau, k), \quad j = 1, 2, \quad \Delta = (\Delta_1\Delta_2)^{-1},$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k [1], $\mathrm{sn}(2K\tau,\, k)$, $\mathrm{cn}(2K\tau,\, k), \mathrm{dn}(2K\tau,\, k)$ — эллиптические функции Якоби [1], $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — дополнительные (акцессорные) параметры [2].

Уравнение (1) тесно связано с задачей о конформном отображении круговых шестиугольников в полярных сетках [3] с двумя разрезами. Области подобного вида весьма часто возникают в теории струй и кавитации [4–8], теории глиссирования [4, 7–9], в газовой динамике [10], в теории движения грунтовых вод и теории фильтрации [11, 12]. Особенно характерны

круговые шестиугольники с разрезами при решении задач со свободными поверхностями в подземной гидромеханике (см., например, [13–15]).

Следует отметить, что многие из областей комплексной скорости потоков механики жидкости и газа с помощью цепочки дробно-линейных преобразований сводятся к круговым шестиугольникам, которые исследуются ниже.

Хорошо известно [2, 3], что при интегрировании уравнений фуксового типа (1) возникают трудности принципиального характера. Дело в том, что помимо неопределенных аффиксов вершин многоугольников коэффициенты этих уравнений содержат еще и акцессорные параметры, также неизвестные заранее. Эти параметры не определяются полностью положением особых точек уравнения и характеристическими показателями в них. Известно лишь [2, 3], что эти постоянные должны однозначно определяться геометрией многоугольника, однако связь указанных параметров с характеристиками заданного многоугольника также заранее неизвестна и до настоящего времени не существует общего и удобного метода решения этой проблемы.

В работах автора [16, 17] установлено, что при определенных соотношениях между акцессорными параметрами и неизвестными постоянными конформного отображения уравнение (1) имеет два линейно независимых частных решения вид

$$v_{1,2}(\tau) = \exp(\pm\pi\tau i)\vartheta_n(\tau \pm \alpha i)\vartheta_n(\tau \pm \beta i)/\vartheta_4^2(\tau). \qquad (2)$$

В (2) для тета–функций $\vartheta_n(\tau)$ с индексом $n(n = 1, 2, 3, 4)$ придерживаемся записи, принятой в [18], α и β — некоторые подходящие вещественные постоянные конформного отображения. Заметим [19, 20], что по сравнению со всеми эллиптическими функциями тета–функции более стандартизированы: сигма–функции Вейерштрасса, все эллиптические функции Якоби и, наконец, все полные и неполные эллиптические интегралы 1–3 родов можно выразить через тета–функции. Они, как известно, периодичны, представлены чрезвычайно быстро сходящимися рядами и являются наилучшим средством для вычисления значений всех указанных эллиптических функций.

Дальнейшие исследования, проведенные с помощью численного моделирования и представленные ниже, показывают, что при конформном отображении рассматриваемого кругового многоугольника конфигурация разрезов (прямолинейных или круговых) и их взаимное расположение зависят не только и даже не столько от индекса n, характеризующего, по сути дела, свойства тета–функций, исходя из которых конструируется комбинация вида (2), сколько от диапазонов изменения как постоянных конформного отображения α и β, так и модуля k (что, по-видимому, до сих пор не рассматривалось в литературе по конформным отображениям и специальным функциям). Иными словами, при одном и том же значении индекса n разным диапазонам изменения постоянных α и β и модуля k могут соответствовать различные по своей конфигурации и взаимному расположению разрезы: в одних случаях отображающая функция дает прямолинейные

разрезы, в других – круговые. Это, в свою очередь, существенно расширяет сферу применения комбинаций типа (2) в практике конформных отображений, поскольку позволяет привлекать для решений задач более общую, чем (2) конструкцию из частных решений уравнения (1) вида

$$v_{1,2}(\tau) = \exp(\pm\pi\tau i)\vartheta_n(\tau \pm \alpha i)\vartheta_m(\tau \pm \beta i)/\vartheta_4^2(\tau), \qquad (3)$$

где теперь наряду с n вводится другой индекс $m, m \neq n(m = 1, 2, 3, 4)$. Приводятся и анализируются результаты численных расчетов. Основные моменты работы анонсированы ранее [21].

2. Конформное отображение кругового шестиугольника в полярных сетках с двумя разрезами

Пусть в плоскости w задан круговой шестиугольник $ABCDEF$ с прямыми углами при вершинах A, C, D и F и двумя углами, равными 2π, которые имеют вершины в точках B и E, т.е. с двумя разрезами.

Как это принято [3], такой многоугольник будем обозначать $\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2$. Учитывая специфику подобных многоугольников, связанную с обилием прямых углов и наличием разрезов [22], удобно при конформном отображении в качестве канонической области взять прямоугольник $ABCD$ плоскости τ (рис. 1):

$$0 < Re\tau < 1/2,\ 0 < Im\tau < \rho/2,\ \rho(k) = K'/K,\ K' = K(k'),\ k' = \sqrt{1-k^2}.$$

В дальнейшем, следуя [3], круговой шестиугольник будем характеризовать взаимным расположением противоположных сторон AC и DF многоугольника, на которых могут встречаться разрезы. При этом рассмотрим случаи, которые характерны в аэро- и гидромеханике.

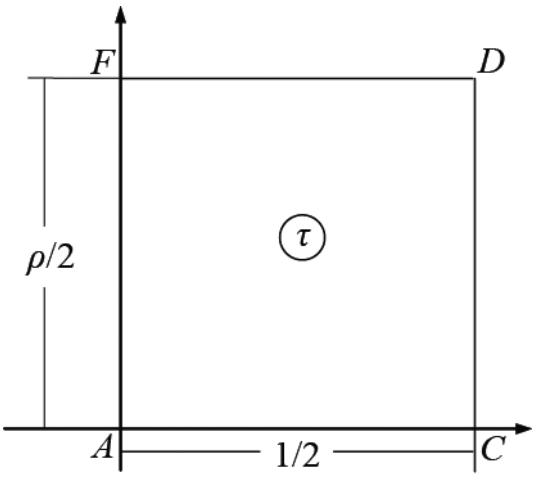


Рис. 1. Вспомогательная каноническая область параметрической переменной τ.

2.1. Случай, когда противоположные стороны при продолжении пересекаются (сливаются)

Противоположные прямолинейные разрезы ABC и DEF с вершинами B и E при продолжении пересекаются или сливаются с соответствующими противоположными круговыми разрезами CDE и BCD с вершинами D и C (штриховые линии на рис. 2 и 3). В результате имеем дело с круговыми шестиугольниками $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$, $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$ и $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$. В этом случае, согласно [3], угловой мерой пересечения (слияния) противоположных сторон является величина $\pi/2(\pi)$.

Функция, совершающая конформное отображение прямоугольника плоскости τ на рассматриваемые круговые многоугольники, должна выражаться через отношение линейных комбинаций частных интегралов $\vartheta_1, 2(\tau)$ (2). Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием вершин A, C, D и E на плоскостях τ и ω, то для значений индекса $n = 4$ и $n = 1$ получим следующие представления:

$$w(\tau) = \begin{cases} -R^{1-2\tau}\vartheta_4(\tau-\alpha)\vartheta_4(\tau-\beta)/\vartheta_4(\tau+\alpha)\vartheta_4(\tau+\beta), w_E < 0, \\ -R^{1-2\tau}\vartheta_1(\tau-\alpha)\vartheta_1(\tau-\beta)/\vartheta_1(\tau+\alpha)\vartheta_1(\tau+\beta), w_B \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь радиус большей окружности $R = (1+\varepsilon^{1/2})/(1-\varepsilon^{1/2})$ зависит от параметра ε, $0 < \varepsilon < 1$, α и β — некоторые подходящие вещественные постоянные, связанные соотношениями

$$0 < \alpha < \beta < 1/2, \quad \alpha + \beta = 1/2 + \rho \ln R/2\pi. \quad (5)$$

Условия (5) регламентируют взаимное расположение и конфигурацию разрезов ABC и DEF, а также BCD и DEF при применении первого выражения (4) и разрезов ABC и CDE, а также ABC и DEF при использовании второго представления (4) в зависимости как от величины параметра ε, а, следовательно, радиуса окружности R, так и диапазона изменения постоянной α (при этом диапазон изменения другой постоянной β определяется из второго соотношения (5)) и модуля k.

Анализ результатов вычислений показывает, что конформное отображение, осуществляемое функцией $w(\tau)$ (4), реализует наличие двух прямолинейных или прямолинейного с круговым разрезов (рис. 2 и 3) соответственно в следующих диапазонах изменения параметров: $\varepsilon \in (0, 0.3)$, $\alpha \in (0, 0.4)$, $k \in (0.7, 1)$ и $\varepsilon \in (0.3, 1)$, $\alpha \in (0.3, 0.5)$, $k \in (0, 0.7)$. При этом при малых значениях величин ε и α в первой формуле (4) большим значениям модуля k в большей степени соответствует присутствие двух прямолинейных разрезов, а меньшим k — прямолинейного с круговым. При больших значениях ε и α во второй формуле (4), наоборот, большим значениям модуля k отвечает в большей степени наличие прямолинейного разреза с круговым, а меньшим k — два прямолинейных разреза.

Расчеты по первой формуле (4) при значениях параметров ε=0.2, $\alpha = 0.3$, $k = 0.9$ дают значения вершин $x_B = -0.685$, $x_E = -0.0005$ прямолинейных разрезов, а при значениях параметров $\varepsilon = 0.3$,

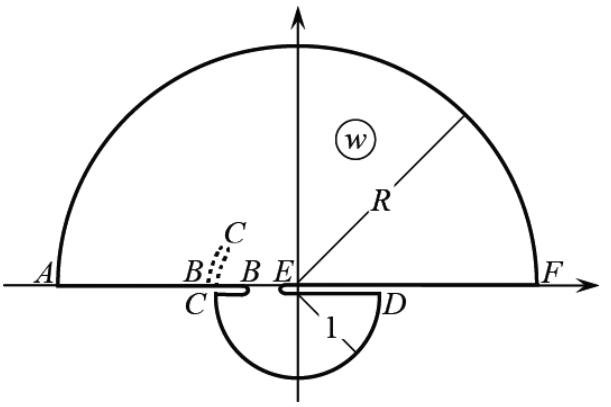


Рис. 2. Прямолинейный разрез DEF с вершиной E пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом ABC с вершиной B или с круговым разрезом BCD с вершиной C (штриховая линия).

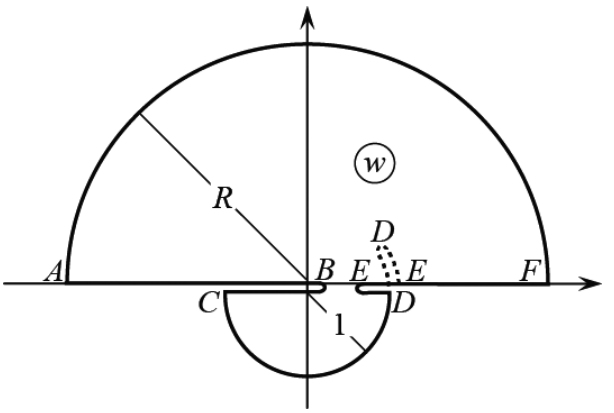


Рис. 3. Прямолинейный разрез ABC с вершиной B пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом DEF с вершиной E или с круговым разрезом CDE с вершиной D (штриховая линия)..

$\alpha = 0.3$, $k = 0.6$ — вершин $x_E = -0.096$ прямолинейного и $x_C{=}-0.974$, $y_C = 0.227$ кругового разрезов.

Расчеты по второй формуле (4) при значениях параметров $\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.6$ приводят к вершинам $x_B = 0.0096$ прямолинейного и $x_D = 0.974$, $y_D = 0.227$ кругового разрезов, а при $\varepsilon = 0.2$, $\alpha{=}0.3$, $k{=}0.9$ — к вершинам $x_B = 0.0005$, $x_E = 0.685$ прямолинейных разрезов.

Можно заметить, что представления (4) соответствуют многоугольникам с симметричным относительно мнимой оси расположением прямолинейных и круговых разрезов. В этом, на наш взгляд, и проявляется отмеченная выше периодичность функций $\vartheta_4(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$.

2.2. Случай, когда противоположные стороны лежат на концентрических окружностях

Круговой разрез ABC или сторона AB при продолжении не пересекаются с противоположными сторонами соответственно EF и DF и лежат на концентрических окружностях (рис. 4 и 5). В результате имеем дело с круговым шестиугольником $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$, $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \}$ и $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, 2\pi\}$. В этом случае, согласно [3], под угловой мерой пересечения противоположных сторон следует понимать величину, равную $i \ln R$. Отметим, что круговой шестиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$, с прямолинейным FEA и круговым ABC (штриховая линия на рис. 5) разрезами посредством другого соответствия вершин (при котором точка F переходит в начало координат на плоскости τ) сводится к рассмотрению кругового шестиугольника $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$ с прямолинейным ABC и круговым CDE (штриховая линия на рис. 3) разрезами.

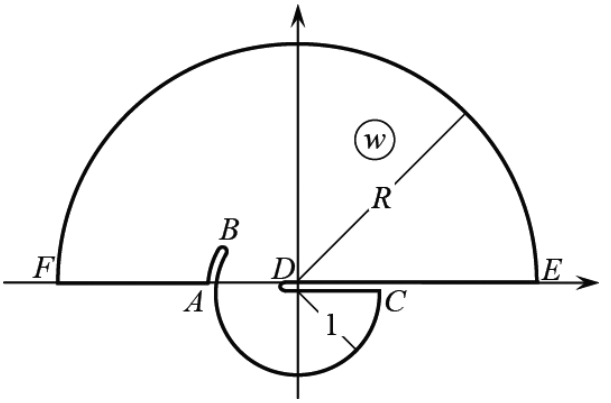


Рис. 4. Прямолинейный разрез CDE с вершиной D пересекается при продолжении с круговым разрезом ABC с вершиной B

Функция, дающая конформное отображение прямоугольника плоскости τ на рассматриваемые круговые многоугольники, может быть представлена в виде отношения двух линейно независимых частных интегралов $\vartheta_{1,2}(\tau)$ (2) и (3), которые соответствуют значениям индексов $n = 3$ и $n = 2$, $m = 3$, следующим образом:

$$w(\tau) = \begin{cases} -\exp(2\pi\tau i)\vartheta_3(\tau + \alpha i)\vartheta_3(\tau + \beta i)/\vartheta_3(\tau - \alpha i)\vartheta_3 \times \\ \times(\tau - \beta i),\ w_C, w_D \le 0, \\ -\vartheta_2(\tau - \beta i)\vartheta_3(\tau + \alpha i)/\vartheta_2(\tau + \beta i)\vartheta_3(\tau - \alpha i),\ w_D > 0. \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае подходящие вещественные постоянные α и β связаны такими соотношениями:

$$0 < \alpha,\ \beta < 1/2,\ \ \alpha + \beta = \rho/2 + arth\sqrt{\varepsilon}/\pi \tag{7}$$

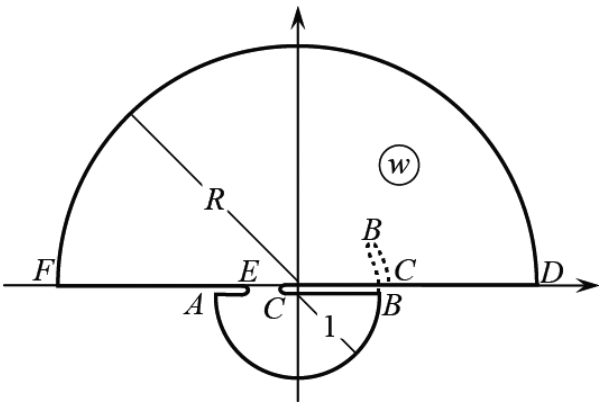


Рис. 5. Прямолинейный разрез FEA с вершиной E пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом BCD с вершиной C или с круговым разрезом ABC с вершиной B (штриховая линия).

для первого представления (6) и

$$0 < \beta < \alpha < \rho/2, \;\; \alpha - \beta = arth\sqrt{\varepsilon}/\pi \tag{8}$$

для второго выражения (6).

Анализ результатов вычислений показывает, что конформное отображение, осуществляемое функцией $w(\tau)$ (6), реализует наличие кругового с прямолинейным и двух прямолинейных разрезов (рис. 4, 5) соответственно в следующих диапазонах изменения параметров: $\varepsilon \in (0, 0.2)$, $\alpha \approx \varepsilon$, $k \in (0.7, 1) \cup \varepsilon \in (0.2, 1)$, $\alpha \leq \varepsilon$, $k \in (0.2, 0.9)$ и $\varepsilon \in (0, 0.2)$, $\alpha \in (0.2, 0.6)$, $k \in (0, 0.7) \cup \varepsilon \in (0.2, 1)$, $\alpha \in (0.3, 0.8)$, $k \in (0, 0.7)$.

При этом в отличие от предыдущего случая здесь при малых значениях величин ε и α в первой формуле (6) большим значениям модуля k в большей степени соответствует наличие кругового с прямолинейным разрезом и, наоборот, большим значениям ε и α и меньшим k — два прямолинейных разреза. При малых величинах ε уже начиная со значений $\alpha = 0.2$ в диапазонах $\varepsilon \in (0, 0.5)$, $\alpha \geq \varepsilon \cup \varepsilon \in (0.5, 1)$, $\alpha < \varepsilon$ независимо от модуля k круговой разрез с прямолинейным отсутствует. Что касается второй формулы (6), то, наоборот, при малых значениях параметра ε, постоянной α и модуля k преобладают оба прямолинейных разреза. При этом подобные разрезы присутствуют при любых допустимых значениях ε, α и k, в то время, как в диапазонах $\varepsilon \in (0, 0.5)$, $\alpha \in (0.6, \rho/2) \cup \varepsilon \in (0.5, 1)$, $\alpha \in (0.1, 0.6)$ независимо от модуля k круговой разрез исчезает вовсе.

Расчеты по первой формуле (6) при значениях параметров $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.2$, $k = 0.8$ дают значения вершин $x_B = -0.989$, $y_B = 0.144$,

$x_D = -0.258$ кругового и прямолинейного разрезов, а при значениях $\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.3$ — вершин $x_C = -0.301$, $x_E = -0.768$ прямолинейных разрезов.

Расчеты по второй формуле (6) при значениях параметров $\varepsilon = 0.4$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.7$ приводят к вершинам $x_B = -0.144$, $y_B = 0.983$, $x_D = -0.144$ кругового и прямолинейного разрезов, а при $\varepsilon = 0.4$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.3$ — к вершинам $x_C = -0.447$, $x_E = -0.907$ обоих прямолинейных разрезов.

Справедливость представлений (4) и (6) при выполнении соотношений (5) и (7), (8) соответственно устанавливается непосредственной проверкой с учетом свойств тета-функций.

3. Применение полученных результатов к решению задач о течениях со свободной поверхностью

Отметим, что параметр ε, который характеризует величину отношения R радиусов окружностей, в гидромеханике представляет собой интенсивность инфильтрации или испарения со свободной поверхности, а вершина круговых разрезов многоугольников соответствуют при этом в области годографа скорости точке перегиба на кривой депрессии. Так что различная конфигурация разрезов кругового многоугольника есть не что иное, как проявление трансформации фильтрационных потоков жидкости в зависимости от влияния различных физических факторов, характеризующих изучаемую модель течения, и, в первую очередь, от интенсивности инфильтрации или испарения на свободной поверхности. Некоторые практические результаты, полученные на основе изложенной выше методики, приведены в [23].

Література

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
3. Коппенфельс В.,Штальман Ф. Практика конформных отображений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1980.
5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
7. Седов Л. И. Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам гидродинамики // Успехи мат. наук. — 1939. — Вып. 6. — С. 120–182.
8. Келдыш М. В., Седов Л. И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. — М.: Наука, 1935.

9. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. — М.: Мишгиз, 1963.
10. Фалькович С. В. К теории газовых струй. — // ПММ. — 1957. — Т. 21.— Вып. 4. — С. 458–464.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.:Гостехиздат, 1952. — 2-е изд. М.: Наука, 1977.
12. Кочина П. Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избр. тр. — М.: Наука, 1991.
13. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике. // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — №5.— С. 3–7.
14. Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1. Препринт. №567. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996.
15. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов. // Изв. РАН. МЖГ.— 1997. — №5.— С. 9–17.
16. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках. // Дифференц. уравнения.— 1997. — Т. 33.— №3.— С. 296–301.
17. Береславский Э. Н. Об интегралах некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов // Дифференц. уравнения.— 2012.— Т.48.— №4.— С. 590–594.
18. Уиттекер Э. Д., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1963.
19. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. Т. 3. — М.: Наука, 1967.
20. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
21. Береславский Э. Н. О трансформациях разрезов при конформном отображении некоторых круговых многоугольников, возникающих в задачах течения со свободными границами. // ДАН. — 2013. — Т. 451. — №2. — С. 160–163.
22. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник. // Изв. вузов. Математика.— 1980. — №5. — С. 3–7.
23. Береславский Э. Н. О некоторых гидродинамических моделях, связанных с задачей Жуковского об обтекании шпунта. // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448. — №5. — С. 529–533.

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, г. Санкт-Петербург, пр. Литейный, д. 48/50, Российская Федерация.

Поступила 01.11.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.63:532.5

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРУВАННЯ РІДИН ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ЗАБРУДНЕННЯ В N-ШАРОВИХ МАГНІТНИХ ФІЛЬТРАХ ЗА УМОВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАСООБМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

Резюме. Побудовано математичну модель процесу очистки рідин від багатокомпонентного забруднення n-шаровим магнітним фільтром, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості) і надає можливість визначення масообмінного коефіцієнта. Запропоновано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-масообмін».

Вступ

Процес очищення рідин від феромагнітних домішок найбільш ефективно відбувається в намагнічених пористих засипках. Домішкові частинки під дією силового магнітного фактора (величина якого може досягати значення порядку $2 \cdot 10^{15}\ A^2/m^3$) осаджуються в точках контакту гранул насадки. При цьому, із практичних міркувань, на сьогоднішній день більш ефективними є багатошарові фільтри (у порівнянні з одношаровими). Аналіз результатів досліджень [1, 13] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, які визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Фільтрування в напрямку зменшення еквівалентного діаметра гранул завантаження — один із загальновизнаних методів підвищення ефективності роботи фільтрів [9]. У складних змінних технологічних умовах, оптимальний гранулометричний склад засипки повинен був би залежати від часу. Проте через складність реалізації й експлуатації на практиці фільтрування не одержали широкого поширення навіть фільтри з однорідною засипкою.

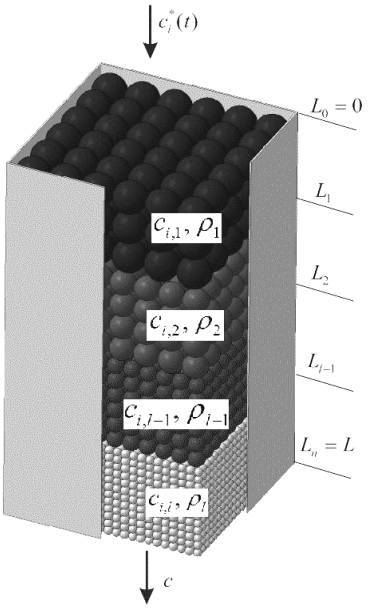


Рис 1. Схематичне представлення n-шарового фільтра

У роботах [9–12] запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок у пористому фільтруючому завантаженні, яке враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [9], з урахуванням зворотного впливу захоплених частинок на пористість σ і коефіцієнт α, а також на коефіцієнт фільтрації:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta c\,(x,t) - \varepsilon\alpha\,(\rho)\,\rho\,(x,t)\,, \end{cases} \tag{1}$$

$$c|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

де $c(x,t)$ — концентрація домішок у рідкому середовищі, що фільтрується; $\rho(x,t)$ — концентрація домішок, осаджених у фільтруючій засипці; β — коефіцієнт, який характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу, $\alpha\,(\rho)$ — коефіцієнт, який характеризує масові обсяги відірваних від гранул насадки домішкових частинок, $\alpha\,(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho\,(x,t)$, v — швидкість фільтрування, $c_*^*\,(t)$ — концентрація домішкових частинок на вході фільтра, σ — пористість фільтруючого завантаження (σ_0 — вихідна пористість завантаження), $\sigma\,(x,t) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho\,(x,t)$, α_0, α_*, σ_*, ε — тверді параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\alpha\,(\rho)\,$, $\sigma\,(\rho)$ — м'які параметри, які знаходяться дослідним способом), ε — малий параметр. Розв'язок задачі (1)—(2) було знайдено у вигляді асимптотичних

рядів [9]:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= c_0(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i c_i(x,t) + R_c(x,t,\varepsilon), \\ \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \rho_i(x,t) + R_\rho(x,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

де $R_c, R_\rho,\ R_v$ — залишкові члени, $c_i(x,t),\ \rho_i(x,t),\ (i = \overline{0,\ n}\ )$ — шукані члени асимптотики.

При цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом.

Дана робота присвячена побудові математичної моделі процесу фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення в n-шаровому магнітному фільтрі за умов ідентифікації масообмінного коефіцієнта (див. напр. [11]). Розв'язок відповідної зворотної задачі дає можливість суттєво наблизити результати числових розрахунків до реальних експериментальних даних, більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу магнітного осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем.

Постановка задачі. Розглянемо просторово одновимірний процес очищення рідини фільтруванням в n-шаровому фільтрі товщиною L (рис. 1), що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі $0x$. Важаємо [9], що частинки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву, сорбції, десорбції) і, при цьому, має місце зворотний вплив концентрації забруднення на характеристики відповідних шарів. Концентрація забруднення — багатокомпонентна, $c = c(x,t) = (c_1, ..., c_m) = (c_1(x,t), ..., c_m(x,t))$, де $c_i(x,t)$ — концентрація i-ої компоненти домішки $(i = \overline{1,m}\ )$ у рідкому середовищі. Відповідну математичну модель процесу фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, масообмінну тощо [9—12]) представимо у вигляді такої задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho_i)c_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} - \beta_i\left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p c_p\right) - \\ -\varepsilon f_{m-1}\left(\sum\limits_{p_1,\ldots,p_u=1}^{m} h_{i,p_1,\ldots,p_u} c_i^{\gamma_i} c_{p_1}^{\gamma_{p_1}} \ldots c_{p_u}^{\gamma_{p_u}}\right), \\ \frac{\partial\rho_i}{\partial t} = \beta_i\left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p c_p\right) - \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i, \\ i = \overline{1,m},\ \ (x,t) \in G_l = \{x : L_{l-1} < x < L_l,\ 0 < t < \infty\}, \\ l = \overline{1,n-1}, \end{cases} \tag{4}$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0,\ [c_i]_{x=L_l} = 0,\ [\rho_i]_{x=L_l} = 0, \tag{5}$$

$$\alpha_i(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t)\, d\tilde{x} = \mu_i(t), \tag{6}$$

де $\rho = \rho(x,t) = (\rho_1, ..., \rho_m) = (\rho_1(x,t), ..., \rho_m(x,t))$, $\rho_i(x,t)$ — концентрація i-ої компоненти домішок, захоплених фільтруючою засипкою, $\alpha_i(t)$ — шуканий коефіцієнт, який характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки частинок, $\mu_i(t)$ — масовий розподіл осаду з часом (знаходиться дослідним способом [13]), умова перевизначення (6) — призначена для знаходження $\alpha_i(t)$ ([9, 10]), v — швидкість фільтрування (з метою спрощення числових розрахунків, розглянемо окремий випадок, коли $v = const$), $c_i^*(t)$ — концентрації домішок на вході фільтра, $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x,t)$ (σ_0 — вихідна пористість засипки); $h_{i,p_1,...,p_u}$ — коефіцієнт, що характеризує взаємодію між концентраціями компонентів домішків ($h_{i,p_1,...,p_u}$=0 при співпадінні індексів), σ_*, q_p, ε — тверді параметри, які характеризують відповідні коефіцієнти; ε — малий параметр; $[L_{l-1}, L_l]$ — 1-й шар фільтра ($l = \overline{1,n}$); в (5) [ ] — збільшення відповідної функції в даній точці $x = L_l$. Тут $f_{m-1}(W_u) = \sum\limits_{u=1}^{m-1} W_u$, причому, з метою спрощення розрахунків, у роботі розглядається випадок коли $f_{m-1}(W_u) = \sum\limits_{p=1,\ i\neq p}^{m} h_{i,p}c_ic_p$.

Асимптотика розв'язку. Складові $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$, $\alpha_{i,l,j}(t)$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{0,\ k}$; $l = \overline{1,\ n}$) асимптотичного наближення розв'язку вихідної модельної задачі $c_i(x,t) = \begin{cases} c_{i,1}(x,t), & L_0 = 0 \le x < L_1, \\ c_{i,2}(x,t), & L_1 \le x < L_2, \\ ... \\ c_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \le x < L_n = L, \end{cases}$, $\rho_i(x,t) =$

$= \begin{cases} \rho_{i,1}(x,t), & L_0 = L \le x < L_1, \\ \rho_{i,2}(x,t), & L_1 \le x < L_2, \\ ... \\ \rho_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \le x < L_n = L, \end{cases}$, $\alpha_i(t) = \begin{cases} \alpha_{i,1}(t), & L_0 = L \le x < L_1, \\ \alpha_{i,2}(t), & L_1 \le x < L_2, \\ ... \\ \alpha_{i,l}(t), & L_{l-1} \le x < L_n = L \end{cases}$

знаходимо у вигляді асимптотичних рядів [6—12]:

$$c_{i,l}(x,t) = c_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j c_{i,l,j}(x,t) + R_{c,i,l}(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho_{i,l}(x,t) = \rho_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \rho_{i,l,j}(x,t) + R_{\rho,i,l}(x,t,\varepsilon), \qquad (7)$$

$$\alpha_{i,l}(t) = \alpha_{i,l,0}(t) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \alpha_{i,l,j}(t) + R_{\alpha,i,l}(t,\varepsilon),$$

де $R_{c,i,l}, R_{\rho,i,l}, R_{\alpha,i,l}$ — залишкові члени, $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$, $\alpha_{i,l,j}(t)$ — члени регулярних частин асимптотики. Аналогічно [9], у результаті підстановки (7) в (4)—(6) і здійснення стандартної «процедури прирівнювання», для визначення функцій $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$, $\alpha_{i,l,j}(t)$ приходимо до таких

задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial t} = -v \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial x} - \beta_i \left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p c_p \right), \ \frac{\partial \rho_{i,l,0}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p c_{i,l,0} \right), \\ c_{i,l,0}|_{x=L_{l-1}} = \bar{c}_{i,l}(t), \ c_{i,l,0}\Big|_{t=0} = 0, \ \rho_{i,l,0}|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{i,l,0}(t) \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x},t) d\tilde{x} = \mu_{i,l}(t),$$

де $\bar{c}_{i,0}(t) = c_i^*(t)$, $\bar{c}_{i,l}(t) = c_{i,l-1,0}(L_{l-1},t)$, $l = \overline{1,n}$;

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial t} = g_{i,l,j}(x,t) - v \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial x} - \\ -\beta_i \left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p c_{l,p,j} \right) - \sum\limits_{p=1,\, i \neq p}^{m} h_{i,p} c_{i,l,j-1} c_{p,l,j-1}, \\ \frac{\partial \rho_{i,l,j}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum\limits_{i=1}^{m} q_i c_{i,l,j} \right) - g_{i,l,j}(x,t), \\ c_{i,l,j}|_{x=0} = 0, \ c_{i,l,j}|_{t=0} = 0, \\ \rho_{i,l,j}|_{t=0} = 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,k}, \ l = \overline{1,n-1}; \end{cases}$$

$$\alpha_{i,l,0}(t) \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j}(\tilde{x},t) d\tilde{x} + \alpha_{i,l,1}(t) \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j-1}(\tilde{x},t) d\tilde{x} + ... + \alpha_{i,l,j}(t) \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x},t) d\tilde{x} = 0.$$

У результаті їх послідовного розв'язку маємо:

$$c_{i,l,0}(x,t) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{i,l}^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{q_i x}{v}}, \ t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, \ t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{bmatrix}$$

$$\rho_{i,l,0}(x,t) = \beta_i \int\limits_0^t \left(\sum_{p=1}^{m} q_p c_{i,l,0}\left(x,\tilde{t}\right) \right) d\tilde{t}, \ \alpha_{i,l,0}(t) = \frac{\mu_{i,l}(t)}{\int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x},t) d\tilde{x}},$$

$$c_{i,l,j}(x,t) = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_* e^{-\int\limits_0^x \lambda_{i,l,j}\left(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)\right) d\tilde{x}}}{v} \times \\ \times \int\limits_0^x \frac{g_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int\limits_0^{\tilde{x}} \lambda_{i,l,j}\left(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)\right) d\tilde{x}}}{\rho_{i,l,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, \ t \geq f(x), \\ 0, \ t < f(x), \end{bmatrix}$$

$$\rho_{i,l,j}(x,t) = \beta_i e^{-\int\limits_0^t g_{i,l,j-1}\left(x,\tilde{t}\right) d\tilde{t}} \int\limits_0^t \left(\sum_{p=1}^{m} q_p c_{p,l,j}\left(x,\tilde{\tilde{t}}\right) \right) e^{\int\limits_0^{\tilde{\tilde{t}}} g_{i,l,j-1}\left(x,\tilde{t}\right) d\tilde{t}} d\tilde{\tilde{t}},$$

$$\alpha_{i,l,j}(t) = -\frac{\sum\limits_{w=1}^{j} \alpha_{i,l,j-w}(t) \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j}(\tilde{x},t) d\tilde{x}}{\int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x},t) d\tilde{x}},$$

де $g_{i,l,j}(x,t) = \sum\limits_{w=1}^{j} \alpha_{i,l,j-w}(t)\rho_{i,l,j-1}(x,t)$, $\lambda_{i,l,j}(x,t) = -\sigma_* \frac{\partial \rho_{i,l,j-1}(x,t)}{\partial t}$. Наближені значення функцій $f_j(x)$ знаходимо шляхом [9—12] інтерполяції масиву (x_i, t_i), $i = \overline{1,k}$, де $x_i = \Delta x \cdot i, t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v}\sigma_* \rho_{l,j-1}(x_i, t_i)$, $l = \overline{1,n}$.

Числові розрахунки. Приведемо результати розрахунків за формулами (7) при n=2 $c_1^*(t) = 2$ мг/л, $c_2^*(t) = 1$ мг/л, $\beta = 60\ c^{-1}$, $v = 250$ м/с, $L = 1$ м, $q_1 = q_2 = 1$; $\sigma_0 = 0.5$; $\sigma_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

У результаті інтерполяції експериментальних даних [13] нами отриманий масовий розподіл $\mu(t)$ і тимчасову залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ (для різних кількостей шарів n) осаду з часом (див. рис. 2). Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження частинок гранули пористого завантаження максимально насичуються домішковими частинками і під дією гідравлічного напору ступінь відриву частинок від гранул зростає протягом усього часу τ ефективної роботи фільтра.

На рисунку 3 зображений розподіл концентрації забруднення на виході фільтра у момент часу t за формулами (7) при $n = 1$ — (a) і $n = 3$ — (b) відповідно (припустиме значення концентрації $c_1 = c_1 = 0.5$ мг/л, $c_2 = c_2 = 0.15$ мг/л [13].). Як видно з рисунку час захисної дії n-шарового фільтра (для $n = 3$ — $t_p = 78$ год і $t_p = 82$ год) суттєво більший часу захисної дії для одношарового фільтра (для $n = 1$ — $t_p = 68$ год і $t_p = 78$ год).

Обґрунтування. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [9]. Як і слід було чекати [8, 9], для розрахунків досить брати по 2 члена з кожного асимптотичного ряду (7) щоб одержати наближення з точністю до 6 значущих цифр у проміжку розрахункового часу фільтроциклу. Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial t} = v \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial x} + \beta_i \left(\sum\limits_{p=1}^{m} q_p R_{c,p,j} \right) - \varepsilon^{m+1} S(c, \rho, \varepsilon), \\ \frac{\partial R_{\rho,i,l}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum\limits_{i=1}^{m} q_i R_{c,i,l} \right) - \varepsilon^{m+1} U(c, \rho, \varepsilon), \end{cases}$$

$$R_{\alpha,i,l} \int\limits_{L_{l-1}}^{L_l} R_{\rho,i,l}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0,$$

$$R_{c,i,l}(0,t,\varepsilon) = R_{c,i,l}(L_i,t,\varepsilon) = R_{c,i,l}(x,0,\varepsilon) = R_{c,i,l}(0,t,\varepsilon) = R_{\rho,i,l}(0,t,\varepsilon) = \\ = R_{\rho,i,l}(L_i,t,\varepsilon) = R_{\rho,i,l}(x,0,\varepsilon) = R_{\rho,i,l}(0,t,\varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(0,t,\varepsilon) = \\ = R_{\alpha,i,l}(L_i,t,\varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(x,0,\varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(0,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{m+1}\right),\ l = \overline{1,\ n},$$

з яких приходимо до висновку про малість $R_{c,i,l} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $R_{\rho,i,l} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $R_{\alpha,i,l} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$ при обмеженому часі (часі фільтроциклу), $S(c,\rho,\varepsilon)$, $U(c,\rho,\varepsilon)$ — відомі функції.

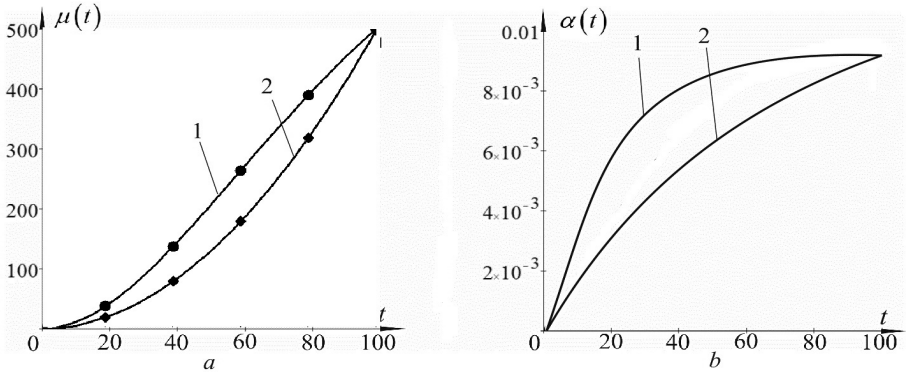


Рис 2. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ — (a) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ — (b) з часом (1 — для $n = 3$, 2 — для $n = 1$)

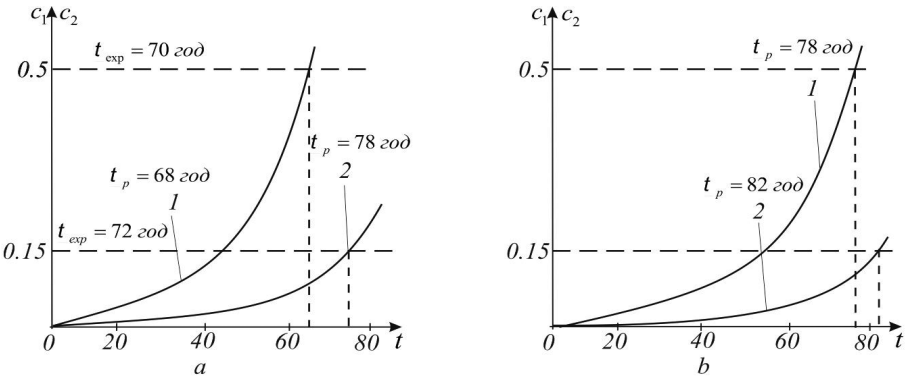


Рис 3. Графіки розподілу концентрації забруднення на виході фільтра у момент часу t за формулами (7) при $n = 1$ — (a) і $n = 3$ — (b)

Висновки. Побудована математична модель процесу очищення рідин від багатокомпонентних забруднень n-шаровим магнітним фільтром, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості) і включає можливість визначення невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Запропонований алгоритм розв'язку відповідної збуреної задачі, який, зокрема, припускає можливість визначення часу τ_3 захисної дії фільтра (за заданими значеннями припустимих концентрацій на виході фільтра). Наведені результати числових розрахунків. У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій насадці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища. У **перспективі** — моделювання процесів фільтрування за умов неповних даних з врахуванням дифузії (див., напр., [9, 14, 15]).

Література

1. Elimelech M. Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media. Water Research. — 1992. — №26(1). — P. 1–8.
2. Elimelech M. Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations. Separations Technology. — 1994. — №4. — P. 186–212.
3. Jegatheesan V. Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration. Ph Dissertation. University of Technology Sydney. — 1999. — P. 300.
4. Johnson P. and Elimelech M. Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption. Langmuir. — 1995. — 11(3). — P. 801–812.
5. Petosa A. R., Jaisi D. P., Quevedo I. R., Elimelech M. and Tufenkji N. "Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions". Environmental Science Technology. — 2010.— №44. — P. 6532—6549.
6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир. — 1972. — 274 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир. — 1984. — 535 с.
8. Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. Нелінійні сингулярнозбурені задачі типу "конвекція-дифузія" — Рівне: НУВГП. — 2008. — 252 с.
9. Бомба А. Я., Гаврилюк В. І., Сафоник А. П., Фурсачик О. А. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних // Монографія. — Рівне : НУВГП. — 2011. — 276 с.
10. Бомба А. Я., А. П. Сафоник Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін // Серія: фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець–Подільський національний університет. — 2012. — Вип. 7. — С. 37–44.
11. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды // Электронное моделирование: междунар. науч.-теор. журн. — 2012. — Т. 34, №3. — С. 47–58.
12. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды // Проблемы управления и информатики. — 2013. — №2. — С. 49–54.
13. Сандуляк А. В. Очистка жидкостей в магнитном поле — Львов : Высшая школа, изд-во при Львов. ун-та. — 1984. — 166 с.
14. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Решения комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — №5. — С. 48–71.
15. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде // Проблемы управления и информатики. — 2010. — №6. С. 5–18.

Інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна.

Надійшла 01.11.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕТИКИ АДСОРБЦІЇ

О. Ю. Грищенко, В. С. Федорова

Резюме. Для розв'язання системи диференційних рівнянь, яка описує кінетику адсорбції використовується скінченно-різницевий метод. В загальному випадку система різницевих рівнянь є нелінійною системою. Окремим самостійним цікавим випадком може бути процес, в якому кінетична активність розчинених речовин суттєво відрізняється, тобто фактично в часі спочатку переважають кінетичні процеси першої речовини, потім другої і нарешті малоактивні. В такому разі загальну систему можна розкласти на послідовність окремих підсистем, в яких розв'язки попередніх входять як параметри в наступні. Для таких різницевих задач важливе місце має коефіцієнтна стійкість системи. В роботі розглядається випадок адсорбції 3-х активних речовин з послідовною кінетикою. Доведено теорему, що за певних умов (лінійність) побудована різницева схема —- коефіцієнтно стійка. Доведена також і стійкість системи. В роботі наводяться розрахунки для даної системи.

Вступ

Вимоги щодо раціонального використання біологічних та водних ресурсів, запобігання їх виснаженню та забрудненню належать до найважливіших екологічних умов сучасного життя. Це обумовлює введення в комплексну технологічну схему водопідготовки стадії адсорбційної доочистки. Як правило, ця стадія є заключним етапом в технологічному процесі очищення води. Адсорбційний метод дозволяє видаляти забруднення різного характеру практично до будь-якого рівня залишкової концентрації незалежно від їх хімічної стійкості. При цьому відсутні вторинні забруднення. Цей метод є добре керованим процесом і може бути циклічним. Одним із напрямів побудови математичних моделей цих процесів є використання теорії кінетики адсорбції речовин із розчинів.

1. Постановка задачі

Розглянемо таку модель. Маємо куб з деяким розчином, всередині якого міститься гранула (зерно) адсорбенту (будемо вважати, що це куля радіусом R), яка вбирає в себе частину розчину. Розглядаються два поля концентрації: $c(x, y, z, t)$ у рідкій фазі та $a(x, y, z, t)$ в адсорбаційній фазі відповідно. Ці дві характеристики тісно пов'язані між собою. Їх зв'язок

виражається рівнянням ізотерми адсорбції [1]:

$$a = f(c). \tag{1}$$

Якщо в розчині присутня деяка кількість речовин n, тоді система диференційних рівнянь, яка описує кінетику адсорбції, записується у вигляді [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_j}{\partial t} + \dfrac{\partial c_j}{\partial t} = D_j \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 \dfrac{\partial c_j}{\partial r}), \\ a_j = f_j(c_1, ..., c_j), \\ c_j(r,0) = a_j(r,0) = 0, \\ \dfrac{\partial c_j}{\partial r} \mid_{r=0} = 0, \\ c_j(R,t) = A - B \displaystyle\int_0^R r^2 (a_j + c_j) dr, \end{cases} \qquad j = \overline{1,n} \tag{2}$$

де D_j — ефективний коефіцієнт внутрішньої дифузії, який відображає перенос речовини як у рідинній, так і в адсорбційній фазі.

Це система нелінійних диференціальних рівнянь з 2-ма характерними особливостями:

1. Диференціальний оператор є сингулярним в точці $r = 0$ з інтегровною особливістю.
2. Граничні умови на зовнішній границі кулі R є інтегральними умовами, які включають в себе значення невідомих a і c в усіх точках всередині кулі.

Окремим математично цікавим і таким, що часто практично реалізується є випадок, коли швидкість протікання реакцій адсорбції у компонентах розчину суттєво відрізняється [1]. Тобто спочатку відбуваються реакції більш активних речовин, потім менш активних. В цьому разі процес можна розглядати як послідовний і загальну систему можна розкластися на декілька систем, таких, що коефіцієнти наступних будуть залежати від розв'язків попередніх. Це призводить до дослідження коефіцієнтної стійкості нашої задачі.

Для подолання вказаних особливостей виникає потреба в розробці нових ефективних або модифікації існуючих скінченно-різницевих методів.

2. Скінченно-різницева схема

Уведемо позначення [2, 3, 4] : $\varpi_h = \{x_i = ih, h > 0, i = \overline{0,N}, hN = R\}$, $\varpi_t = \{t_i = i\tau,\ \tau > 0,\ i = \overline{0,M}\}$ — рівномірні сітки на відрізку $[0,l]$ та за часом t, $\varpi_{h,t} = \varpi_h \times \varpi_t$. Сіткову функцію, яка відповідає концентрації $c_j(x)$ на $\varpi_{i,j}$ позначимо через $y\,(x_i)$, а

$$y_x = y_{x,i} = y^n_{x,i} = \frac{y^n_{i+1} - y^n_i}{h} = \frac{\partial c}{\partial x} + O(h);$$

$$y_{\overline{x}} = y_{\overline{x},i} = y^n_{\overline{x},i} = \frac{y^n_i - y^n_{i-1}}{h} = \frac{\partial c}{\partial x} + O(h);$$

$$y_{\overline{x},x} = y_{\overline{x},x,i} = y^n_{\overline{x},x,i} = \frac{y^n_{i+1} - 2y^n_i + y^n_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(h^2);$$

$$y^t = y^{t,n+1} = \frac{y^{n+1}_i - y^n_i}{\tau} = \frac{\partial c}{\partial t} + O(\tau).$$

Для розв'язання задачі скінченно-різницевим методом диференціальні оператори замінимо на скінченно-різницеві, а розв'язок шукатимемо у вигляді лінійної комбінації скінченного набору значень сіткової функції на шаблоні різницевого оператора. Для побудови скінченно-різницевої схеми використаємо інтегро-інтерполяційний метод.

Врахуємо, що

$$x_i x_{i+1} = \left(x_{i+1/2}\right)^2 + O\left(h^2\right),\ x_i x_{i-1} = \left(x_{i-1/2}\right)^2 + O\left(h^2\right).$$

Це означає, що рівності $x_{i+1}x_i = \left(x_{i+1/2}\right)^2$ $x_{i-1}x_i = \left(x_{i-1/2}\right)^2$ виконуються з точністю порядку апроксимації рівняння $O\left(h^2\right)$.

Далі будемо розглядати розчин, що складається з трьох речовин, які будуть адсорбуватися. Тоді відповідно будемо мати три системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_j}{\partial t} + \dfrac{\partial c_j}{\partial t} = D_j \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 \dfrac{\partial c_j}{\partial r}); \\ a_j = f_j(c_1, ..., c_j); \\ c_j(r,0) = a_j(r,0) = 0; \\ \dfrac{\partial c_j}{\partial r}\,|_{r=0} = 0; \\ c_j(R,t) = A - B\displaystyle\int_0^R r^2(a_j + c_j)dr; \end{cases} \qquad j = \overline{1,3},$$

де a_j, $j = 1, 2, 3$ — ізотерми.

Не обмежуючи загальності експериментальних даних, ізотерми мають лінійний вигляд:

$$a_1 = h_1 c_1 + b_1;$$
$$a_2 = h_2 c_2 + \tilde{h}_1 c_1 + b_2;$$
$$a_3 = h_3 c_3 + \tilde{h}_2 c_2 + \tilde{h}_1 c_1 + b_3.$$

Надалі в різницевій задачі будемо вважати $y = c_1$, $z = c_2$, $g = c_3$

Різницеве рівняння, яке апроксимує перше рівняння системи (2), запишемо у вигляді:

$$\frac{(h_1+1)}{D_j} \cdot x_i^2 \cdot y_i^{t,n+1} = \frac{1}{h}\left[x_{i+1}x_i \frac{(c_j)_{i+1} - (c_j)_i}{h} - x_i x_{i-1}\frac{(c_j)_i - (c_j)_{i-1}}{h}\right] =$$
$$= \frac{1}{h}(x_i x_{i-1} y^{n+1}_{\overline{x}})_{x,i} \qquad (3)$$

або

$$(h_1+1)y_i^{t,n+1} = D_j \frac{1}{x_i^2}(x_i x_{i-1} y_{\overline{x}}^{n+1})_{x,i}.$$

Для апроксимації крайової задачі в точці $r=0$ скористаємося умовою

$$\frac{\partial c_i}{\partial r}\,|_{r=0} = 0 \tag{4}$$

та зробимо такі перетворення:

1. Запишемо перше рівняння системи (2) у вигляді

$$\frac{\partial^2 c_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c_j}{\partial r} = \frac{(h_1+1)\partial c_j}{\partial t}.$$

2. Спрямовуючи $r \to 0$ в лівій і правій частинах, матимемо:

$$\frac{\partial^2 c_j}{\partial r^2}\,|_{r=0} + 2\frac{\partial^2 c_j}{\partial r^2}\,|_{r=0} = \frac{(h_1+1)\partial c_1}{\partial t}\,|_{r=0}\,.$$

Звідки

$$\frac{\partial^2 c_j}{\partial r^2}\,|_{r=0} = \frac{(h_1+1)}{3}\frac{\partial c_j}{\partial t}\,|_{r=0}.$$

Враховуючи рівність

$$y_{x,0} = \frac{\partial c_j}{\partial r}\,|_{r=0} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 c_j}{\partial r^2}\,|_{r=0} + O(h^2) = \frac{h(h_1+1)}{6}\frac{\partial c_j}{\partial t}\,|_{r=0} + O(h^2),$$

умову (4) з першим порядком точності по t та другим по h апроксимуємо умовою

$$-\frac{6}{h}y_{x,0}^{n+1} = (h_1+1)y_0^{t,n+1}.$$

Отже, задачу (2) при $j=1$ апроксимуємо такою різницевою задачею:

$$\begin{cases} (h_1+1)y_i^{t,n+1} = D_1 \dfrac{1}{x_i^2}(x_i x_{i-1} y_{\overline{x}}^{n+1})_{x,i}; \\ -\dfrac{6}{h}y_{x,0}^{n+1} = (h_1+1)y_0^{t,n+1}; \\ y_i^0 = 0; \\ y_N^{n+1} = A - \dfrac{Bh(h_1+1)}{2}\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}(x_i^2 y_i^{n+1} + x_{i+1}^2 y_{i+1}^{n+1}); \end{cases} \tag{5}$$

з похибкою $O(\tau + h^2)$.

Оскільки система (5) незбурена і для її розв'язання ми використовуємо неявну різницеву схему, яка є безумовно стійкою, а дана різницева задача апроксимує диференціальну з порядком $O(\tau + h^2)$, то системи, які апроксимують другий та третій етапи ($j = 2, 3$), матимуть вигляд:

$$\begin{cases} (h_2+1)z_i^{t,n+1}+\tilde{h}_1 y_i^{t,n+1}=D_2\dfrac{1}{x_i^2}(x_i x_{i-1} z_{\overline{x}}^{n+1})_{x,i};\\ -\dfrac{6}{h}z_{x,0}^{n+1}=(h_2+1)y_0^{t,n+1}+\tilde{h}_1 y_0^{t,n+1};\\ z_i^0=0;\\ z_N^{n+1}=A-\dfrac{Bh(h_2+1)}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2 z_i^{n+1}+x_{i+1}^2 z_{i+1}^{n+1})-\\ -\dfrac{Bh\tilde{h}_1}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2 y_i^{n+1}+x_{i+1}^2 y_{i+1}^{n+1})-\dfrac{Bhb_2}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2+x_{i+1}^2); \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} (h_3+1)g_i^{t,n}+\tilde{h}_2 z_i^{t,n}+\tilde{h}_1 y_i^{t,n}=D_3\dfrac{1}{x_i^2}(x_i x_{i-1} g_{\overline{x}}^{n+1})_{x,i};\\ -\dfrac{6}{h}g_{x,0}^{n+1}=(h_3+1)g_0^{t,n+1}+\tilde{h}_2 z_0^{t,n+1}+\tilde{h}_1 y_0^{t,n+1};\\ g_i^0=0;\\ g_N^{n+1}=A-\dfrac{Bh(h_3+1)}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2 g_i^{n+1}+x_{i+1}^2 g_{i+1}^{n+1})-\\ -\dfrac{Bh\tilde{h}_2}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2 z_i^{n+1}+x_{i+1}^2 z_{i+1}^{n+1})-\\ -\dfrac{Bh\tilde{h}_1}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2 y_i^{n+1}+x_{i+1}^2 y_{i+1}^{n+1})-\dfrac{Bhb_3}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(x_i^2+x_{i+1}^2). \end{cases} \tag{7}$$

Бачимо, що коефіцієнти цих систем залежать від розв'язку системи (5). Це означає, що для встановлення збіжності розв'язків (6) і (7) до розв'язків диференціальної задачі доцільно дослідити їх коефіцієнтну стійкість [2].

3. Коефіцієнтна стійкість різницевої схеми

Дослідимо коефіцієнтну стійкість схеми для задачі (2) у випадку $j=2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_2}{\partial t}+\dfrac{\partial c_2}{\partial t}=D_2\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial c_2}{\partial r});\\ a_2=h_2 c_2+\tilde{h}_1 c_1+b_2;\\ c_2(r,0)=a_2(r,0)=0;\\ \dfrac{\partial c_2}{\partial r}\,|_{r=0}=0;\\ c_2(R,t)=A-B\displaystyle\int_0^R r^2(a_2+c_2)dr. \end{cases}$$

Як бачимо, коефіцієнти даної системи виражаються через відповідний розвязок при $j=1$, які знайдено наближено, отже, фактично ця система є

системою зі збуреними коефіцієнтами. В загальному вигляді нашу задачу можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \\ u'(0,t) = 0; u(R,t) = U, (t > 0) \\ u(x,0) = v(x)(0 < x < R). \end{cases} \tag{8}$$

Дійсно, якщо ввести заміни:

$$r \to x; c_1(r,t) \to u(x,t);\ \rho(x,t) = h_2(x,t) + 1; K(x,t) = D_2 x^2;$$

$$q(x,t) = 0;\ f(x,t) = 0; v(x) = 0;$$

$$U = A - B\int_0^R r^2(a_2 + c_2)dr,$$

то різницева задача для (8) матиме вигляд

$$\begin{cases} (ly)_{\bar{t}} = (ay_{\bar{x}})_x - py + \phi; \\ y_o^{(j)} = 0; y_N^{(j)} = U; (j = 1,2,...);\ . \\ y_i^{(0)} = v(ih); (i = 1,2,...,N-1) \end{cases} \tag{9}$$

Нехай u — розв'язок задачі (8), а $\tilde{u}$ — розв'язок збуреної задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}\tilde{u}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{K}(x,t)\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) - \tilde{q}(x,t)\tilde{u} + \tilde{f}(x,t); \\ \tilde{u'}(0,t) = 0; \tilde{u}(R,t) = \tilde{U}; (t > 0); \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{v}(x); (0 < x < R). \end{cases}$$

Різницевий аналог збуреної задачі буде таким:

$$\begin{cases} \left(\tilde{l}\tilde{y}\right)_{\bar{t}} = (\tilde{a}\tilde{y}_{\bar{x}})_x - \tilde{p}\tilde{y} + \tilde{\phi}; \\ \tilde{y}_o^{(j)} = 0; \tilde{y}_N^{(j)} = U; (j = 1,2,...); \\ \tilde{y}_i^{(0)} = \tilde{v}(ih); (i = 1,2,...,N-1). \end{cases} \tag{10}$$

Означення 1. Будемо говорити, що схема (9) *коефіцієнтно-стійка*, якщо [5]:

1. При $h \to 0$ і $\tau \to 0$ для будь-яким чином збуреної схеми (10) її коефіцієнти збігаються до коефіцієнтів схеми (9).
2. Розв'язок задачі (10) рівномірно збігається до розв'язку задачі (9).
3. Коефіцієнти ρ, K, q, f диференціальної задачі (8) належать до деякого функціонального класу.

Отже, за означенням схема (9) *ко-стійка*, якщо з умов:

$$\|\tilde{v}-v\|_C=\gamma_1(h+\tau);\ \max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{l}_{\bar{t}}-l_{\bar{t}}\right\|_C=\gamma_2(h+\tau);$$
$$\max_{1\le k\le j}\|\tilde{p}-p\|_C=\gamma_3(h+\tau);\ \max_{1\le k\le j}\|\tilde{a}-a\|_C=\gamma_4(h+\tau);$$
$$\max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{\phi}-\phi\right\|_C=\gamma_5(h+\tau)$$

випливає нерівність:

$$\|s\|_2=\|\tilde{y}-u\|_2\le\gamma(h+\tau),$$

де $\gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma\}$, $\gamma(h+\tau)$ — величина, що прямує до нуля при $\tau,h\to 0$.

Сформулюємо леми, необхідні для доведення теореми про ко-стійкість [5].

Лема 1. *Якщо задовольняється умова*

$$\max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{l}_{\bar{t}}-l_{\bar{t}}\right\|_C=\gamma(h+\tau),$$

то

$$\max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{l}-l\right\|_C=M\gamma(h+\tau),$$

де $M>0$ — константа.

Лема 2. *Якщо коефіцієнти (9) задовольняють умови*

$$a\ge c_1>0, 0<c_2\le l\le c_3, p\ge 0,$$

а різницева похідна $l_{\bar{t}}$ — умові $c_4\le l_{\bar{t}}$, то виконується нерівність

$$\|\tilde{y}-y\|_2\le M_1'\|\tilde{v}-v\|_C+M_2'\max_{1\le k\le j}\|\tilde{a}-a\|_C+M_3'\max_{1\le k\le j}\|\tilde{p}-p\|_C+$$

$$+\max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{\phi}-\phi\right\|_C+M_4'\max_{1\le k\le j}\left\|\left(\tilde{l}-l\right)_{\bar{t}}\right\|_C+M_5'\max_{1\le k\le j}\left\|\tilde{l}-l\right\|_C,\qquad(11)$$

де $M_i'>0$ — константи, y та $\tilde{y}$ — розв'язки задач (9) і (10) відповідно.

Простою перевіркою можна переконатися у справедливості виконання лем для нашої задачі.

Теорема 1. *Різницева схема (9) ко-стійка.*

Доведення. З очевидної нерівності

$$\|\tilde{y}-u\|_2\le\|\tilde{y}-y\|_2+\|y-u\|_2,$$

де u розглядається як значення в точках сітки, отримаємо

$$\|\tilde{y}-u\|_2\le M\left(h^2+\tau\right)+\gamma(h+\tau),$$

де M — константа, що не залежить від h і τ.

Дійсно, якщо u — розв'язок задачі (8), а y — розв'язок відповідної різницевої задачі (9), то виконується $\|y-u\|_2\le M\left(h^2+\tau\right)$.

При цьому $\|\tilde{y} - y\|_2 \leq \gamma\,(h + \tau)$ за лемою 2 (а права частина (11) в лемі 2 не перевищує $\gamma\,(h + \tau)$, за умовами означення ко-стійкості та лемою 1). $\square$

4. Алгоритм розв'язку системи різницевих рівнянь

Скориставшись позначеннями, введеними в розділі (2), систему різницевих рівнянь (5) запишемо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{D_1}{(h_1+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \frac{(i+1)}{i} y_{i+1}^{n+1} - \\ - \frac{D_1}{(h_1+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{(h_1+1)}{D_1} \cdot \frac{h^2}{\tau}\right) y_i^{n+1} + \\ + \frac{D_1}{(h_1+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \frac{(i-1)}{i} y_{i-1}^{n+1} = -y_i^n; i = \overline{1, N-1}; \\ -\frac{6}{h^2} y_1^{n+1} + \left(\frac{6}{h^2} - \frac{(h_1+1)}{\tau}\right) y_0^{n+1} = -y_0^n \frac{(h_1+1)}{\tau}; \\ y_N^{n+1} \left(1 + N^2 \frac{Bh^3(h_1+1)}{2}\right) = A - \\ - \frac{Bh^3(h_1+1)}{2} \sum_{i=0}^{N-2} (i^2 y_i^{n+1} + (i+1)^2 y_{i+1}^{n+1}) - \\ - \frac{Bh^3(h_1+1)}{2} y_{N-1}^{n+1} (N-1)^2; \\ y_i^0 = 0, i = \overline{0, N-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогічним чином можна розписати систему (6) у вигляді :

$$\begin{cases} \frac{D_2}{(h_2+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \frac{(i+1)}{i} z_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{2D_2}{(h_2+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} + 1\right) z_i^{n+1} + \\ + \frac{D_2}{(h_2+1)} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \frac{(i-1)}{i} z_{i-1}^{n+1} = -z_i^n + \frac{\tilde{h}_1 (y_i^{n+1} - y_i^n)}{(h_2+1)}; i = \overline{1, N-1}; \\ -\frac{6}{h^2} z_1^{n+1} + \left(\frac{6}{h^2} - \frac{(h_2+1)}{\tau}\right) z_0^{n+1} = -z_0^n \frac{(h_2+1)}{\tau} + \frac{\tilde{h}_1 (y_0^{n+1} - y_0^n)}{\tau}; \\ z_N^{n+1} \left(1 + N^2 \frac{Bh^3(h_2+1)}{2}\right) = A - \frac{Bh^3(h_2+1)}{2} z_{N-1}^{n+1} (N-1)^2 - \\ - \frac{Bh^3(h_2+1)}{2} \sum_{i=0}^{N-2} (i^2 z_i^{n+1} + (i+1)^2 z_{i+1}^{n+1}) - \\ - \frac{Bh^3 \tilde{h}_1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (i^2 y_i^{n+1} + (i+1)^2 y_{i+1}^{n+1}) - \frac{Bh^3 b_2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (i^2 + (i+1)^2); \\ z_i^0 = 0, i = \overline{0, N-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Система (7) розпишеться як

$$\begin{cases} \frac{D_3}{(h_3+1)}\cdot\frac{\tau}{h^2}\cdot\frac{(i+1)}{i}g_{i+1}^{n+1}-\left(\frac{2D_3}{(h_3+1)}\cdot\frac{\tau}{h^2}+1\right)g_i^{n+1}+ \\ +\frac{D_3}{(h_3+1)}\cdot\frac{\tau}{h^2}\cdot\frac{(i-1)}{i}g_{i-1}^{n+1}=-g_i^n+\frac{\tilde{h}_2(z_i^{n+1}-z_i^n)}{(h_3+1)}+ \\ +\frac{\tilde{h}_1(y_i^{n+1}-y_i^n)}{(h_3+1)}; i=\overline{1,N-1}; \\ -\frac{6}{h^2}g_1^{n+1}+\left(\frac{6}{h^2}-\frac{(h_3+1)}{\tau}\right)g_0^{n+1}=-g_0^n\frac{(h_3+1)}{\tau}+ \\ +\frac{\tilde{h}_2(z_0^{n+1}-z_0^n)}{\tau}+\frac{\tilde{h}_1(y_0^{n+1}-y_0^n)}{\tau}; \\ g_N^{n+1}\left(1+N^2\frac{Bh^3(h_3+1)}{2}\right)=A- \\ -\frac{Bh^3(h_3+1)}{2}\sum_{i=0}^{N-2}(i^2g_i^{n+1}+(i+1)^2g_{i+1}^{n+1})- \\ -\frac{Bh^3(h_3+1)}{2}g_{N-1}^{n+1}(N-1)^2-\frac{Bh^3\tilde{h}_2}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(i^2z_i^{n+1}+(i+1)^2z_{i+1}^{n+1})- \\ -\frac{Bh^3\tilde{h}_1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(i^2y_i^{n+1}+(i+1)^2y_{i+1}^{n+1})-\frac{Bh^3b_3}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(i^2+(i+1)^2); \\ g_i^0=0, i=\overline{0,N-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Легко бачити, що поставлена задача утворює систему різницевих алгебраїчних рівнянь, яка складається з трьох діагональних блоків:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

кожен з яких має таку структуру

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-13} & ... & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будемо розв'язувати систему (12) методом Гауса. Розташуємо рядки матриці так, щоб елементи на діагоналі були ненульові. Матимемо тридіагональну (крім першого і останнього рядка, що виражають додаткові умови) матрицю розмірності $(N+1)\times(N+1)$.

Програма працює в циклі, знаходячи спочатку розв'язок різницевої системи $\left(y_0^1, y_1^1, ..., y_N^1\right)$ для наступного моменту часу, використовуючи у векторі правих частин початкові умови $y_i^0 = 0, i = \overline{0, N-1}$, а в подальшій

ітерації вже застосовуються ці знайдені розв'язки, і так далі до n-ої ітерації включно (використаємо для обчислень $n = 9$).

Знайдемо розв'язок системи (12) для заданого часового кроку $(y_0^n, ..., y_N^n)$, використаємо його і розв'яжемо систему (13) для знаходження розвязків $(z_0^n, z_1^n, ..., z_N^n)$. Всі значення $(g_0^n, g_1^n, ..., g_N^n)$ знаходимо аналогічним чином — використовуємо 2 попередні розв'язки і розв'язуємо систему (14).

5. Отримані результати

При розрахунках використаємо такі дані: $A = 1; B = \frac{4\pi}{255}; h = 0.001;$ $\tau = 0.01; N = 10;$ (для всіх трьох випадків), $h_1 = 2000;$ $b_1 = 0; C^*_{H_1} = 1;$ $D_1 = 255; h_1 = 5000; b_2 = 0; C^*_{H_2} = 1; D_2 = 255; \tilde{h}_1 = 2000; h_3 = 8000; b_3 = 0;$ $C^*_{H_3} = 1;$ $D_3 = 255;$ $\tilde{h}_1 = 2000;$ $\tilde{h}_2 = 5000;$ $(h, \tau, N$ — параметри різницевої задачі).

Представимо результати у вигляді таблиці значеннь, де кожен i-й стовпчик відображає значення $\left(y_0^i, y_1^i, ..., y_N^i\right)$ на i-ому часовому відрізку (пам'ятаємо, що $y_i^0 = 0, i = \overline{0, N-1}$). Розглянемо випадок $N = 10$ та $n = 9$.

Таблиця результатів для першого блоку з $Y = \left[y_i^j\right], i = \overline{0, N}; j = \overline{1, n}$:

nN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,112245	0,294642	0,479113	0,631595	0,74566	0,826693	0,882725	0,920926	0,946781
1	0,108502	0,288559	0,472961	0,62651	0,741856	0,82399	0,880856	0,919652	0,945919
2	0,119357	0,306573	0,491411	0,641872	0,753396	0,832208	0,886546	0,923534	0,948547
3	0,138898	0,337553	0,522218	0,667064	0,77212	0,845461	0,895691	0,929762	0,952759
4	0,169514	0,382856	0,565335	0,701398	0,797249	0,863093	0,907802	0,937989	0,958317
5	0,215019	0,444189	0,620417	0,74378	0,827669	0,884214	0,922225	0,947758	0,964905
6	0,28121	0,523292	0,686524	0,792605	0,861938	0,907722	0,938179	0,958528	0,972157
7	0,376721	0,621315	0,76174	0,845674	0,898308	0,932367	0,954799	0,969712	0,979674
8	0,514313	0,737657	0,842738	0,900172	0,934801	0,956814	0,971191	0,98071	0,987057
9	0,712809	0,867872	0,924428	0,952775	0,969343	0,979743	0,986498	0,990958	0,993927
10	0,999975	0,999968	0,999965	0,999962	0,999961	0,99996	0,999959	0,999959	0,999959

Так само можна розв'язати різницеву задачу (13), тобто знайти z_i^j через попередні значення y_i^j. Розглянемо таблицю значень для $N = 10$ та $n = 7$.

Таблиця результатів для другого блоку з $Z = \left[z_i^j\right], i = \overline{0, N},\ j = \overline{1, n}$:

nN	1	2	3	4	5	6	7
0	0,99629841	0,99963952	0,99973936	0,9998156	0,99987272	0,99991325	0,99994128
1	0,99626333	0,99963637	0,99973628	0,99981311	0,99987081	0,99991190	0,99994035
2	0,99636838	0,9996457	0,99974551	0,99982080	0,99987659	0,99991601	0,99994319
3	0,99654420	0,99966174	0,99976093	0,99983340	0,99988595	0,99992264	0,99994777
4	0,99679202	0,99968512	0,99978250	0,99985057	0,99989852	0,99993146	0,99995383
5	0,99711375	0,99971668	0,99981005	0,99987178	0,99991374	0,99994203	0,99996104
6	0,99751234	0,99975725	0,99984313	0,99989620	0,99993088	0,99995379	0,99996902
7	0,99799216	0,99980736	0,99988075	0,99992275	0,99994908	0,99996612	0,99997734
8	0,99855963	0,99986667	0,99992128	0,99995001	0,99996733	0,99997835	0,99998554
9	0,99922424	0,99993288	0,99996214	0,99997633	0,99998461	0,99998982	0,9999932
10	0,99999994	0,99999993	0,99999993	0,99999993	0,99999993	0,99999993	0,99999993

Також розв'яжемо задачу (14), знайдемо g_i^j через попередні значення y_i^j та z_i^j. Розглянемо таблицю значень для $N = 10$ та $n = 7$.

Таблиця результатів для третього блоку з $G = \left[g_i^j\right], i = \overline{0, N}; \; j = \overline{1, n}$:

nN	1	2	3	4	5	6	7
0	0,99467138	0,99905712	0,999155099	0,999338481	0,99952409	0,999675192	0,999786925
1	0,994621619	0,999628511	0,999736119	0,99981301	0,99987074	0,99991185	0,999940311
2	0,99477632	0,999638183	0,999745355	0,999820699	0,99987652	0,999915963	0,999943159
3	0,995034905	0,999654755	0,999760777	0,999833308	0,99988589	0,999922596	0,999947736
4	0,995398611	0,999678867	0,999782361	0,999850492	0,99989847	0,999931421	0,999953797
5	0,995869403	0,999711317	0,999809935	0,999871704	0,99991369	0,999941992	0,999961016
6	0,996450254	0,999752906	0,999843027	0,999896141	0,99993084	0,999953758	0,999969001
7	0,997145572	0,99980412	0,999880678	0,999922703	0,99994905	0,999966093	0,999977319
8	0,997961848	0,999864557	0,999921223	0,999949979	0,99996731	0,999978328	0,999985524
9	0,998908623	0,999931871	0,999962114	0,999976307	0,9999846	0,999989804	0,999993185
10	0,999999929	0,999999926	0,999999925	0,999999924	0,99999992	0,999999923	0,999999922

Таким чином, ми наблизили розв'язок вихідної диференціальної задачі розв'язками різницевої задачі у вузлах сітки по часовій та по просторовій змінній.

Література

1. Тимофеев Д. П. Кинетика адсорбции — М.: Наука, 1962. — 252 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем — М.: Наука, 1973. — 416 с.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем — М.: Наука, 1971. — 553 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем — М.: Наука, 1977. — 656 с.
5. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Ле Чонг Винь. Ко-устойчивость схемы сквозного счета для уравнения диффузии в многомерном пространстве // Вычислительная и прикладная математика. — 1975. — Вип. 27. — С. 88–97.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 20.07.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, № 3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.71

КВАДРАТИЧНЫЙ РЕЛЯЦИОННЫЙ ДИСКРИМИНАНТНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЧНЫХ ДАННЫХ И УСТРАНЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Д. А. Клюшин, М. В. Присяжная, Е. С. Бондарь

Резюме. Предложен новый метод однозначного квадратичного реляционного дискриминантного анализа матричных данных с помощью эллипсов Петунина. Для перехода из пространства признаков в пространство близости используется p-статистика. Устранение неопределенности осуществляется на основе ранжирования многомерных выборок с помощью статистической глубины. Продемонстрирована практическая ценность предложенного подхода.

1. Введение

В статье предлагается новый метод однозначной классификации многомерных выборок, представляющий собой результат синтеза идей, лежащих в основе двух направлений современной теории дискриминантного анализа — квадратичного и реляционного, или беспризнакового. Предметом исследования являются данные, образующие не вектор, как в классической схеме, а матрицу. Такие ситуации часто встречаются в цитометрических исследованиях, когда у пациентов измеряется ряд показателей множества клеток. В этом случае строки матрицы соответствуют отдельным клеткам, а столбцы — отдельным показателям.

Наиболее распространенными инструментами квадратичного дискриминантного анализа являются эллипсоиды минимального объема, содержащие заданное множество точек (minimal volume ellipsoid — MVE). Разнообразные алгоритмы построения эллипсоидов MVE изложены в работах [1–5]. Реляционный дискриминантный анализ основан на идее перехода из пространства признаков в пространство близости и гипотезе компактности, утверждающей, что объекты одного и того класса больше похожи друг на друга, чем на объекты альтернативного класса. Гипотеза компактности в пространстве близости означает, что сходные объекты находятся на примерно одинаковом расстоянии от альтернативного класса. Впервые эти идеи были развиты (независимо) в работах Ю. Петунина и Д. Клюшина [6], а также R. Duin [7]. В дальнейшем они нашли развитие в работах E. Pekalska, О. Середина, В. Моттля и др. [8–13].

Применение эллипсоидов при классификации многомерных данных часто приводит к неопределенности, вызванной пересечением доверительных

областей. Естественным способом устранения неопределенности такого рода является многомерное ранжирование [14]. По классификации, предложенной V.Barnett методы многомерного ранжирования подразделяются на маргинальные, редуцированные, частичные и условные. Среди этих методов следует выделить методы, основанные на оценке статистической глубины выборок относительно центра распределения и соответствующих методах пилинга (см. [15–20] и др.) В этой статье мы предлагаем новый метод устранения неопределенности, возникающей в квадратичном реляционном дискриминантном анализе, основанный на эллипсах Петунина [3, 5] и методе, предложенном авторами в работе [21].

2. Пространство близости и понижение размерности

Опишем общую многоэтапную схему перехода из многомерного пространства признаков в двумерное пространство близости. Пусть G_1 и G_2 — две генеральные совокупности (классы), из которых извлечено по N обучающих выборок $u_k = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1, ..., N$ и $v_l = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $l = 1, ..., N$, где n — количество признаков, а x_i и y_j — векторы размерности m. Следовательно, n — количество столбцов, а m — количество строк исходной матрицы.

Процедура перехода состоит из следующих этапов.

1. Перекрестное вычисление меры близости между выборками из генеральных совокупностей G_1 и G_2 (внутри классов и между классами).
2. Построение плоскостей близости и вычисление эллипсов Петунина, содержащих заданное множество точек в пространстве близости. При этом оси координат соответствуют средним значениям меры близости между выборками по разным показателям.
3. Многомерное ранжирование, позволяющее устранить неопределенность, возникающую из-за точек, попадающих в пересечение эллипсов.

В результате этой процедуры возникают $n\,(n-1)\,/2$ пар доверительных эллипсов. Рассмотрим каждый из перечисленных этапов.

3. Перекрестное вычисление меры близости

Для перехода из пространства признаков в пространство близости применим p-статистику Петунина [22].

3.1. **Мера близости между выборками.** Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in G_1$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in G_2$ — выборки, полученные путем простого случайного выбора из генеральных совокупностей G_1 и G_2, имеющих функции распределения F_1 и F_2 соответственно. Предположим, что $F_1\,(x) \equiv F_2\,(x)$ и построим вариационный ряд $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(m)}$. Обозначим через A_{ij} событие, которое состоит в том, что выборочное значение y_k попадает между

порядковыми статистиками $x_{(i)}$ и $x_{(j)}$: $A_{ij} = \left\{ y_k \in \left(x_{(i)}, x_{(j)} \right) \right\}$. По гипотезе Хилла (см. [20, 22]),

$$P(A_{ij}) = P\left(x_k \in (x_{(i)}, x_{(j)}) \right) = p_{ij} = \frac{j-i}{m+1}.$$

Построив доверительный интервал для неизвестной вероятности события A_{ij} по формулам Вильсона

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{h_{ij}m + g^2/2 - g\sqrt{h_{ij}(1-h_{ij})m + g^2/4}}{m+g^2},$$

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{h_{ij}m + g^2/2 + g\sqrt{h_{ij}(1-h_{ij})m + g^2/4}}{m+g^2},$$

где h_{ij} – частота события A_{ij} в m испытаниях, получим доверительный интервал $I_{ij} = \left(p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)} \right)$ с уровнем значимости, который определяется параметром g. В частности, при $g = 3$ уровень значимости этого интервала не превышает 0,05.

Обозначим через B событие, которое состоит в том, что вероятность p_{ij} попадает в интервал I_{ij}, а через L – количество интервалов I_{ij}, содержащих вероятности p_{ij}. Тогда $h = \rho(x, y) = \frac{L}{N}$ — мера близости между выборками x и y, или р-статистика. Полагая в формулах Вильсона, приведенных выше, $h_{ij} = h, m = N$ и $g = 3$, получим доверительный интервал $I = \left(p^{(1)}, p^{(2)} \right)$ для вероятности $p(B)$.

3.2. **Плоскость близости.** Вычислим меру близости между выборками объектов из классов G_1 и G_2 по двумпоказателям. Рассмотрим матрицы показателей k-го объекта из группы G_1 и l-го объекта из группы G_2:

$$u_k = \begin{pmatrix} x_{11}^{(k)} & x_{12}^{(k)} & \cdots & x_{1n}^{(k)} \\ x_{21}^{(k)} & x_{22}^{(k)} & \cdots & x_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^{(k)} & x_{m2}^{(k)} & \cdots & x_{mn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$v_l = \begin{pmatrix} y_{11}^{(l)} & y_{12}^{(l)} & \cdots & y_{1n}^{(l)} \\ y_{21}^{(l)} & y_{22}^{(l)} & \cdots & y_{2n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(l)} & y_{m2}^{(l)} & \cdots & y_{mn}^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Выделим из матриц u_k и v_l столбцы, соответствующие i-му показателю: $X_i^{(k)} = \left(x_{1i}^{(k)}, x_{2i}^{(k)}, ..., x_{mi}^{(k)} \right)$ і $Y_i^{(l)} = \left(y_{1i}^{(l)}, y_{2i}^{(l)}, ..., y_{mi}^{(l)} \right)$. Теперь мы можем вычислить значения меры близости между выборками $X_i^{(k)}$ и $Y_i^{(l)}$ и сформировать вектор значений меры близости между объектами u_k и v_l по

каждому показателю:

$$\mu_{kl}^{(1)} = \rho\left(X_1^{(k)}, Y_1^{(l)}\right),$$
$$\mu_{kl}^{(2)} = \rho\left(X_2^{(k)}, Y_2^{(l)}\right),$$
$$\ldots$$
$$\mu_{kl}^{(n)} = \rho\left(X_N^{(k)}, Y_N^{(l)}\right),$$

а затем найти значения усредненных p-статистик

$$\nu_k^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\mu_{kt}^{(1)},$$
$$\nu_k^{(2)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\mu_{kt}^{(2)},$$
$$\ldots$$
$$\nu_k^{(n)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\mu_{kt}^{(n)},$$

которые характеризуют сходство между объектом u_k и объектами группы G_2 по i-му показателю. Эту схему можно применить и для сравнения объекта u_k с остальными объектами группы G_1:

$$\bar{\nu}_k^{(1)} = \frac{1}{N-1}\sum_{s=1,s\neq k}^{N}\mu_{ks}^{(1)},$$
$$\bar{\nu}_k^{(2)} = \frac{1}{N-1}\sum_{s=1,s\neq k}^{N}\mu_{ks}^{(2)},$$
$$\ldots$$
$$\bar{\nu}_k^{(n)} = \frac{1}{N-1}\sum_{s=1,s\neq k}^{N}\mu_{ks}^{(n)},$$

где индекс s пробегает множество объектов в классе G_1.

Объединим усредненные меры близости в пары, образующие координаты в плоскости близости (i,j) для i-го и j-го показателей $\left(\nu_t^{(i)}, \nu_t^{(j)}\right)$, $\left(\bar{\nu}_s^{(i)}, \bar{\nu}_s^{(j)}\right)$ $(i,j = 1,2,...,m; t,s = 1,2,...,n)$. В итоге в каждой плоскости (i,j) получаем два множества точек, состоящих из точек, характеризующих среднюю внутриклассовую близость между объектами, и точек, характеризующих среднюю междуклассовую близость между объектами.

3.3. **Доверительные эллипсы Петунина.** Алгоритм построения эллипса Петунина, содержащего множество точек $M_n = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$, состоит из следующих этапов [5]. Построим выпуклую оболочку точек $M_n = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$. Найдем вершины выпуклой оболочки (x_k, y_k)

и (x_l, y_l), лежащие на диаметре выпуклой оболочки, т.е. вершины, наиболее удаленные друг от друга. Соединим точки (x_k, y_k) и (x_l, y_l) отрезком L. Найдем вершины выпуклой оболочки (x_r, y_r) и (x_q, y_q), наиболее удаленные от L. Соединим точки (x_r, y_r) и (x_q, y_q) отрезками L_1 и L_2, параллельными к отрезку L. Проведем через точки (x_k, y_k) и (x_l, y_l) отрезки L_3 и L_4, перпендикулярные к отрезку L. Пересечения отрезков L_1, L_2, L_3 и L_4 образуют прямоугольник П, стороны которого имеют длины a и b.

Допустим, что $a \leq b$. Переведем левый нижний угол прямоугольника в начало новой системы координат с осями Ox' и Oy' с помощью поворота и параллельного переноса. Точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) перейдут в точки (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n). Отобразим точки (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n) в точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$, где $\alpha = \frac{a}{b}$. В результате получим совокупность точек, лежащих в квадрате S.

Вычислим центр (x'_0, y'_0) квадрата S и найдем расстояния $r_1, r_2, ..., r_n$ от него до каждой точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$. Наибольшее число $R = \max(r_1, r_2, ..., r_n)$ определяет круг с центром в точке (x'_0, y'_0) и радиусом R. В итоге все точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$ оказываются внутри круга с радиусом R. Растягивая этот круг вдоль оси Ox' с коэффициентом $\beta = \frac{1}{\alpha}$ и выполняя обратные преобразования поворота и переноса, получим эллипс Петунина. В результате происходит их естественное ранжирование точек, каждая из которых лежит на отдельном эллипсе [21].

Теорема [20]. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ — независимые и одинаково распределенные случайные выборки из генеральной совокупности G, E_n — эллипс Петунина, содержащий точки $x_1, x_2, ..., x_n$, и $x_{n+1} \in G$, то

$$P(x_{n+1} \in E_n) = \frac{n}{n+1}.$$

4. Решающее правило

Гипотеза компактности в пространстве близости подразумевает симметричность отношения близости между объектами внутри и между классами. По этой причине схема принятия решений должна учитывать внутриклассовые и межклассовые расстояния между объектами классов G_1 и G_2. Следовательно, необходимо построить четыре вида эллипсов:

1. E_{11} — эллипсы, содержащие точки, представляющие собой значения меры близости между объектами внутри класса G_1.
2. E_{21} — эллипсы, содержащие точки, представляющие собой значения меры близости между объектами класса G_2 и класса G_1.
3. E_{22} — эллипсы, содержащие точки, представляющие собой значения меры близости между объектами внутри класса G_2.
4. E_{12} — эллипсы, содержащие точки, представляющие собой значения меры близости между объектами класса G_1 и G_2.

Классификация выполняется на основе совокупности пар полуплоскостей, содержащих эллипсы E_{11} и E_{21} на первой полуплоскости и E_{22} и E_{12} на второй полуплоскости. Количество полуплоскостей зависит от количества пар показателей, котоорые можно образовать. Поскольку из n

показателей можно образовать $n(n-1)/2$ пар, умножив это число на 2, получаем общее количество пар эллипсов, равное $n(n-1)$.

Если точка попадает в эллипс E_{11}, значит, средняя мера близости между объектом, которому она соответствует, и объектами класса G_1, характерна для объектов класса G_1. Следовательно, объект следует отнести к классу G_1. Аналогично, если точка попадает в эллипс E_{22}, значит, средняя мера близости между объектом, которому она соответствует, и объектами класса G_2, характерна для объектов класса G_2. Следовательно, объект следует отнести к классу G_2.

Если точка попадает в эллипс E_{21}, значит, средняя мера близости между объектом, которому она соответствует, и объектами класса G_1, характерна для объектов класса G_2. Следовательно, объект следует отнести к классу G_2. Аналогично, если точка попадает в эллипс E_{12}, значит, средняя мера близости между объектом, которому она соответствует, и объектами класса G_2, характерна для объектов класса G_1. Следовательно, объект следует отнести к классу G_1.

Если точка попадает к пересечение эллипсов, то сравниваются ранги точки в каждом из эллипсов. Это не требует дополнительных вычислений, поскольку ранги автоматически определяются в ходе построения эллипса Петунина. Точка относится к тому эллипсу, в котором он имеет меньший ранг, т. е. лежит "глубже".

Окончательный результат для тестируемого объекта принимается простым голосованием.

5. Результаты

Для проверки практической ценности предложеного метода были проведены эксперименты на основе данных о состоянии буккального эпителия у 25 больных раком молочной железы и 25 больных фиброаденоматозом. Эти данные были предоставлены Институтом экспериментальной патологии, онкологии и радиобиологии им. Р. Е. Кавецкого НАН Украины (доктор медицинских наук Н. В. Бородай). Содержание этих данных и результаты классификации без учета ранжирования приведены в монографии [23]. Чувствительность распознавания рака с помощью квадратичного метода без ранжирования составляла 72%, а специфичность была очень низкой (12%). Это привело к необходимости усложнить процедуру принятия решения, включив в нее дополнительные критерии. После устранения неопределенности чувствительность и специфичность квадратичного критерия (без дополнительных критериев) составили 80% и 44% соответственно. Несмотря на то, что специфичность остается недостаточно высокой, проведенные эксперименты позволяют утверждать, что процедура ранжирования на 10% повышает чувствительность и почти в 4 раза повышает специфичность распознавания рака молочной железы.

Для повышения чувствительности и специфичности критерия решающее правило можно усилить, например, за счет бустинга или применения

генетического алгоритма построения эллипса, уменьшающего площадь доверительной области без уменьшения уровня статистической значимости.

6. Выводы

Предложенный метод устранения неопределенности в квадратичном реляционном дискриминантном анализе на основе ранжирования многомерных выборок позволяет значительно снизить неопределенность, вызванную пересечением эллипсоидов, поскольку каждая точка выборки имеет уникальный ранг. Асимптотический уровень значимости статистического критерия, на котором основано решающее правило, не превышает 0,05. Вычислительный эксперимент продемонстрировал практическую ценность разработанной методики для повышения точности диагностики рака молочной железы.

Литература

1. Silverman B. W., Titterington D. M. Minimum covering ellipses // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1980. — V. 1. — P. 401–409.
2. Welzl E. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids) // In: Proceedings of New Results and New Trends in Computer Science. LNCS (Springer, Berlin). — 1991. — V. 555. — P. 359–370.
3. Ляшко С. И., Рублев Б. В. Минимальные эллипсоиды и максимальные симплексы в трехмерном евклидовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — №6. — С. 65–70.
4. Kumar P., Yildirim E. A. Minimum volume enclosing ellipsoids and core sets // J. Optim. Theory Appl. — 2005. — V. 126 — P. 1–21.
5. Петунин Ю. И., Рублев Б. В. Распознавание образов с помощью квадратичных дискриминантных функций // В сб: Вычислительная и прикладная математика. — 1996. — Вып. 80. — С. 89–104.
6. Andrushkiw R. I. Petunin Yu. I., Klyushin D. A. Nonlinear algorithms of pattern recognition for computer-aided diagnosis of breast cancer // Nonlinear analysis, Theory, Methods & Applications. — Oxford, Elsevier. — 1997. — V. 30, №8 — P. 5431–5336.
7. Duin R. P.W., Ridder D., and Tax D. M. J. Experiments with object based discriminant functions; a featureless approach to pattern recognition // Pattern Recognition Letters. — 1997. — V. 18, №11–13. — P. 1159–1166.
8. Duin R. P. W., Pekalska E., and Ridder D. Relational discriminant analysis // Pattern Recognition Letters. — 1999. — V. 20, №11–13. — P. 1175–1181.
9. Pekalska E., Duin R. P. W. Automatic pattern recognition by similarity representations // Electronics Letters. — 2001. — V. 37, №3. — P. 159–160.
10. Pekalska E., Duin R. P. W. Dissimilarity representations allow for building good classifiers // Pattern Recognition Letters. — 2002. — V. 23, №8. — P. 943–956.
11. Pekalska E., Duin R. P. W. The Dissimilarity Representation for Pattern Recognition, Foundations and Applications. — Singapore: World Scientific, 2005. — p. 636.
12. Середин О.С. Методы и алгоритмы беспризнакового распознавания образов // Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. наук: 05.13.17 — М., 2001. — 20 с.

13. Mottl V., Dvoenko S., Seredin O., Kulikowski C., Muchnik I. Featureless pattern recognition in an imaginary Hilbert space and its application to protein fold classification // Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — V. 2123.— P. 322–336.
14. Barnett V. The ordering of multivariate data // Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General).— V. 139. — 1976. — №3. — P. 318–355.
15. Tukey J. W. Mathematics and the picturing of data // Proceedings of the International Congress of Mathematician, Montreal, Canada. — 1975. — P. 523–531.
16. Titterington D. M. Estimation of correlation coefficients by ellipsoidal trimming // Appl. Statist. — 1978. — V. 27. — P. 227–234.
17. Oja H. Descriptive statistics for multivariate distributions // Statistics and Probability Letters. — 1983. — V. 1. — P. 327–332.
18. Liu R. J. On a notion of data depth based on random simplices //Annals of Statictics. — 1990. — V. 18. — P. 405–414.
19. Zuo Y., Serfling R. General notions of statistical depth function // Annals of Statistics. — 2000. — V. 28. — P. 461–482.
20. Ляшко С. И., Клюшин Д. А., Алексеенко В. В. Многомерное ранжирование и эллиптический пилинг // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №4. — С. 29–36.
21. Клюшин Д. А., Присяжна М. В. Еліптична функція статистичної глибини даних // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фіз.-мат наук. — 2014. — №1. — С. 179–184.
22. Клюшин Д. А., Петунин Ю. И. Непараметрический критерий эквивалентности генеральных совокупностей, основанный на мере близости между выборками // Український математичний журнал. — 2003. — Т. 5, №2. — С. 147—163.
23. Клюшин Д. А., Петунин Ю. И. Доказательная медицина. Применение статистических методов. — М.: Вильямс, 2008. — 320 с.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 7.09.14

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 004.932.2

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ КОМПЕНСАЦИИ ИСКАЖЕНИЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО ЗАТВОРА

А. Ю. Кобзарь

Резюме. В работе рассматривается проблема искривления изображения получаемого из КМОП сенсора, именуемая эффектом "скользящего затвора". Ее решения рассматривается в два этапа. Первый использует эффективный алгоритм регистрации изображений для расчёта углового смещения элементов видеоряда относительно предыдущего. Второй восстанавливает содержание кадра на основании геометрической модели углового движения камеры.

Введение

На сегодняшний момент наиболее распространены две технологии построения сенсоров для цифровых фотоаппаратов и видеокамер, а именно КМОП (сокр. от "комплементарный металлооксидный полупроводник") и ПЗС (сокр. от "прибор с зарядовой связью"). Одной из ключевых особенностей большинства КМОП сенсоров, является поочередное снятие данных из пикселей матрицы, в то время как изображение из ПЗС сенсоров получается в один момент времени. Такая конструкция КМОП сенсоров порождает определенные искажения (рис. 1), именуемые эффектом "скользящего затвора" (англ. "rolling shutter"). Он становится заметным при динамичной смене картинки. Искажения можно условно разделить на две категории по источнику движения — искажения от движения камеры (рис. 1а) и искажения от быстро движущихся объектов (рис. 1б–1г). Последние являются очень разнообразными и их устранение требует специфической обработки каждого случая отдельно. Но на видеоряде чаще всего заметны искажения первой категории, они достаточно просто компенсируются геометрически, при наличии информации о движении камеры [1–2]. В статье автор описывает подход к решению этой задачи, используя лишь данные видеоряда и некоторую информацию о камере.

а) б) в) г)

Рис. 1. Искажения порождаемые эффектом "скользящего затвора"

Потребность в алгоритме компенсации искажений скользящего затвора трудно переоценить, поскольку большинство современных фотоаппаратов, видеокамер и мобильных телефонов оснащены матрицами именно такого типа. Разработками в данном направлении занималось большое количество ученых. В частности Per-Erik Forssen и Erik Ringaby [1] построили алгоритм, на основании метода KLT [3], который используется для слежения за объектами видео. С его помощью находится матрица движения камеры, после чего очередной кадр искривляется для компенсации эффекта. Alexandre Karpenko, David Jacobs, Jongmin Baek и Marc Levoy [2] для получения информации о движении камеры использовали МЭМС гироскоп, который был предварительно откалиброван, используя SIFT [4] и RANSAC [5]. Такой подход позволяет минимизировать вычисления и сделать алгоритм независимым от данных с камеры. Стоит отметить, что все выше перечисленные методы компенсируют только искажения, вызываемые движением камеры. В процессе их выполнения можно выделить три этапа: предварительная калибровка, поиск движения камеры и искривление кадра для компенсации.

Для решения задачи автор предлагает использовать метод поиска движения камеры [6], поскольку его быстродействие и устойчивость полностью удовлетворяют поставленной задачи. Предполагается, что время полного снятия информации с кадра может изменятся и поэтому оно находится на ряду с тремя углами Эйлера при поиске движения камеры. Предполагается, что все параметры камеры известны. Такие условия позволяют избежать предварительной калибровки.

1. Регистрация изображений

Быстродействие алгоритма является одним из важнейших критериев, поскольку использоваться он будет в большинстве случаев на непроизводительных процессорах в режиме реального времени, приблизительно 30 раз в секунду. Поэтому для выделения точек используется алгоритм на базе оператора Кэнни (рис. 2). На первом этапе находятся все границы, градиент которых больше градиента соседних точек по его направлению. Тем самым выделяются устойчивые границы. Среди них нужно выделить устойчивые точки. Экспериментально было найдено функцию

$$P(p) = \sum_{n \in N} (g_x g_{ny} - g_y g_{nx}),$$

где (g_x, g_y) — градиент в проверяемой точке, (g_{nx}, g_{ny}) — градиент в точке из окрестности, N — множество близлежащих граничных точек. Ее экстремумы не только устойчивы, но относительно равномерно разбросаны по изображению, что положительно отражается на последующих этапах алгоритма.

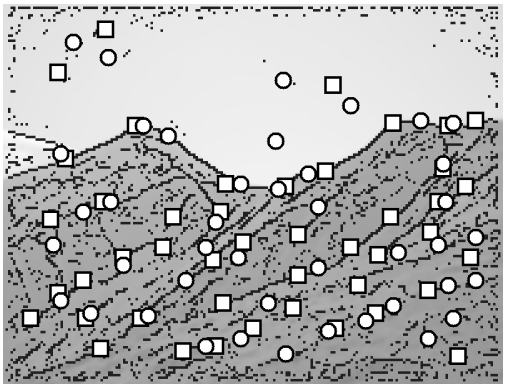


Рис. 2. Выделение границ и ключевых точек

Следующим этапом регистрации есть построение вектора признаков для каждой из найденных точек. Автор использует модифицированный вариант метода, предложенного в [4]. Для начала строится 32-элементная гистограмма ориентаций градиентов в окрестности точки. Среди ее элементов выбирается максимальный, его положение уточняется по значениях соседей. Все дальнейшие расчёты проводятся относительно, определенной таким образом, ориентации ключевой точки. Вектор признаков формируется как последовательность 8-элементных гистограмм ориентаций, каждая из которых рассчитывается в окрестности одной из 12 точек, фиксированных относительно ключевой. Для устойчивости алгоритма к перепадам яркости найденный вектор нормируется.

Описание точек 96-элементными векторами признаков позволяют для двух изображений провести сопоставление на основании Эвклидовой метрики. Рациональным способом выполнить такую задачу можно с помощью использования структуры данных KD-дерево, а в качестве алгоритма поиска выбрать BBF [7]. Выбранное дерево является бинарным и в каждом узле делит точки пополам в измерении с наибольшим разбросом. Операция выполняется до тех пор, пока на очередной ветви не останется одна точка, такую ветвь будем считать листом. Во время поиска сначала находится лист, куда попадает запрос и первым приближением считается точка, соответствующая найденному листу. Оказывается, найденная точка в большинстве случаев не является ближайшей к запросу, поэтому следует проверить все листья, в которых может располагаться точка, которая находится ближе к запросу. В сравнении с обычным поиском в алгоритме BBF производится сортировка кандидатов с помощью очереди с приоритетами, что позволяет значительно быстрее получить искомое значение. По точкам первого изображения строится выше описанное дерево, а точки второго поочередно ищутся в нем. Было замечено, что корректность построения пары для очередной точки второго изображения связана с отношением расстояний до двух ближайших точек из дерева [4]. Откидывая точки с большим значением описанного отношения, проводится первая фильтрация пар.

2. Геометрическая модель

Процесс получения изображения в камере рассматривается в рамках модели стенопа, то есть выполняется центральная проекция окружающего пространства на прямоугольник в плоскости. Размер и положение прямоугольника определяется параметрами камеры, в частности углами обзора. Для полного описания перемещения камеры от кадра к кадру необходимо 6 значений — 3 Эйлеровых угла поворота и 3 координаты смещения. При использовании такой модели возникает множество проблем: низкая точность определения смещения; необходимость применять к разным объектам различные компенсации, что ведет к разрыву изображения; медленный поиск параметров модели; необходимость большого числа ключевых точек на этапе регистрации. Устранение всех перечисленных недостатков возможно благодаря предположению, что камера (точнее ее центр проекции) остается неподвижной в пространстве. В этом случаи количество параметров снижается до 3 углов. Такое предположение возможно благодаря тому, что большинство резких изменений изображения вызываются изменением углов поворота камеры. В [1] было доказано, что модель с 3-мя углами дает лучший результат чем модель с 6-ю параметрами.

Ограничивая перемещение камеры выбранной моделью, можно проверить пары пар точек, которые одновременно не могут ее удовлетворять с одинаковыми параметрами. Пусть проверяются пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где a_1, a_2 — точки первого изображения, а b_1, b_2 — второго. Тогда углы, под которыми видно отрезки a_1a_2 и b_1b_2 с определенной точностью ε, будут равны, то есть

$$|\rho(a_1, a_2) - \rho(b_1, b_2)| < \varepsilon.$$

Исходя из этого, попарно перебираем все пары точек и отмечаем сколько раз для каждой из пар не выполнялось неравенство. Если пара определена некорректно, то количество ошибок для нее будет гораздо больше чем количество ошибок правильно определенной пары. Таким образом, постепенно откидываем пары с наибольшим количеством несовместимостей. В результате остается группа пар, для которых попарно выполняется рассматриваемое неравенство.

Конечной целью этого этапа есть поиск изменения углов камеры между кадрами. Классическим подходом к решению данной проблемы есть применение алгоритма Левенберга-Марквардта для минимизации ошибки отклонения:

$$\sum_i \left| \frac{\left(x_i^1, y_i^1, 1\right)^T}{\left|x_i^1, y_i^1, 1\right|} - R(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\left(x_i^2, y_i^2, 1\right)^T}{\left|x_i^2, y_i^2, 1\right|} \right|^2 \to \min_{\alpha,\beta,\gamma},$$

где $\left(\left(x_i^1, y_i^1\right), \left(\left(x_i^2, y_i^2\right)\right)\right)$ — пары точек, а R — матрица поворота. При таком решении не используется специфика преобразования, следствием чего является не достижение максимальной скорости расчетов. Предлагается использовать метод описанный в [6], основная идея которого состоит в том, что задача итеративного трехмерного поиска на каждом шаге рассматривается как задача поиска на плоскости. В соответствии со значениями углов

на предыдущем шаге точки второго изображения проектируются на плоскость первого, на которой и ведется оптимизация методом наименьших квадратов. Дальше согласно найденному преобразованию модифицируется проекция центра второго изображения и как следствие углы Эйлера (рис. 3). Быстрая сходимость схемы и несложные расчеты на каждом шаге делают алгоритм применимым в режиме реального времени.

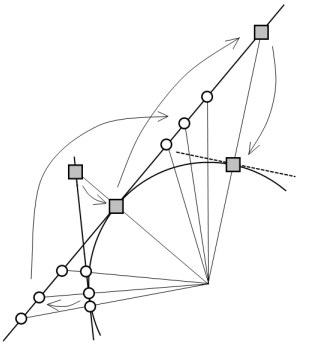


Рис. 3. Оптимизация на плоскости

3. Компенсация искривления

Процесс съемки видео состоит из отдельных кадров, частота которых колеблется от 25 до 30 герц, то есть один кадр снимается за 30–40 мс. В КМОП матрицах некоторую часть этого времени занимает получение данных, начиная с верхней строчки, заканчивая нижней. Эффект скользящего затвора вызван этим интервалом и пропорционален его длине. Для устранения проблемы необходимо зафиксировать момент времени и перенести строки изображения на места, где они были в то время.

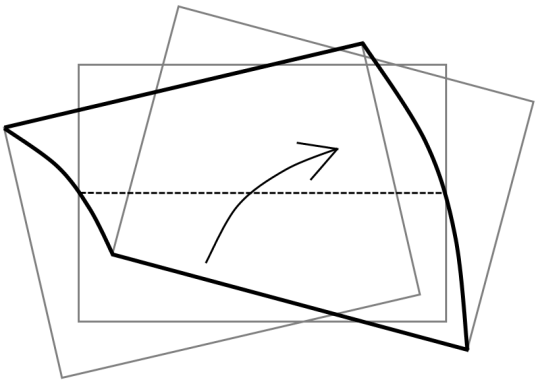


Рис. 4. Формирование кадра

Зафиксируем время сьемки центральной точки изображения. Пусть известны: угловая скорость — (α, β, γ), количество времени сьемки кадра от

времени между кадрами — $k \in [0,1]$, размеры изображения — (w,h), положение точки на изображении — $(x,y), x \in \left[-\frac{w}{2};\frac{w}{2}\right], y \in \left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$. Тогда новое положение (x'',y'') можно записать так:

$$\left(x',y',z'\right)^T = R\left(\alpha k\frac{2y}{h},\beta k\frac{2y}{h},\gamma k\frac{2y}{h}\right)(x,y,1)^T,$$

$$\left(x'',y''\right)^T = \left(\frac{x'}{z'},\frac{y'}{z'}\right)^T.$$

Пользуясь полученной формулой, можно компенсировать эффект скользящего затвора (рис. 4). Проблема состоит в том, что значение k не известно и в алгоритме поиска углового отклонения не бралось во внимание компенсируемое искажение. Для определения значение k воспользуемся градиентным методом, а поиск угловой скорости для компенсированных изображений будет находится в пределах каждой итерации. Начальное значение отклонения и коэффициента k берется из предыдущего кадра.

На многопроцессорных устройствах можно находить отклонение изображения сразу от нескольких предыдущих изображений, что пропорционально увеличит точность результата.

4. Сравнение результатов

При известных параметрах камеры предложенный алгоритм не требует дополнительной калибровки, что его качественно отличает от описанного в [1]. Так же в сравнении с ним предложенный подход использует более совершенный и устойчивый алгоритм поиска движения камеры, что дает большую устойчивость при быстрых перемещениях.

Метод описанный в [2] принципиально отличается от разработанного алгоритма тем, что для его функционирования нужен гироскоп. Он позволяет свести расчеты практически к нулю и повысить точность. К сожалению, на данный момент большинство устройств им не укомплектованы, исключение составляют мобильные телефоны верхней ценовой категории. Стоит заметить, что для эффективной работы метода гироскоп должен быть жестко связан с камерой, то есть он не будет работать при наличии оптической стабилизации.

Наличие калибровки в упомянутых методах не позволяет применять их для обработки ранее снятого видео, тогда как описанный здесь подход дает такую возможность.

Выводы

Наличие гироскопа на борту дает возможность без проблем компенсировать различные недостатки, такие как эффект скользящего затвора и дрожание камеры при съемке с рук. Его отсутствие передает всю нагрузку на процессор, этим самым увеличивая нагрев и уменьшая заряд батареи. Скорость работы современных процессоров достигла тех показателей, при которых стает возможным внедрение таких вычислительно "тяжелых" алгоритмов в режиме реального времени.

Литература

1. Forssen P.-E., Ringaby E. Rectifying rolling shutter video from hand-held devices // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2010. — P. 507–514.
2. Karpenko A., Jacobs D., Baek J., Levoy M. Digital video stabilization and rolling shutter correction using gyroscopes // Stanford Computer Science Tech Report CSTR 2011-03. — 2011.
3. Lucas B., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // International Joint Conferences on Artificial Intelligence. — 1981. — P. 674– 679.
4. Lowe D. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision. — 2004. — V. 60, Issue 2. — P. 91–110.
5. Fischler M. A., Bolles R. C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the Association for Computing Machinery 24. — 1981. — P. 381– 395.
6. Верченко А. П., Кобзар А. Ю. Про один алгоритм побудови панорамних знімків // Вісник КНУ ТШ: серія фізико-математичних наук. — 2011. — №3. — С. 109– 114.
7. Beis J., Lowe D. Shape indexing using approximate nearest-neighbour search in highdimensional spaces // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — June 17– 19, 1997. — San Juan, Puerto Rico: proceedings. — P. 1000–1006.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 30.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ОБГРУНТУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ІЗОТЕРМІЧНИХ ПОТОКІВ НЕСТИСЛОЇ РІДИНИ

А. С. Марцафей

Резюме. Побудовано ефективний обчислювальний ДС-алгоритм для початково крайової задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса. Встановлено його консервативність. За допомогою методу першого диференціального наближення досліджено дисперсійність та дисипативність алгоритму.

Вступ

Серед методів вивчення фізичних, економічних та соціальних процесів математичне моделювання займає одне з провідних місць. Математичні моделі в основному базуються на системах лінійних або нелінійних рівнянь в частинних похідних. Зокрема динаміку в'язкої рідини та газів моделює система рівнянь Нав'є-Стокса. Ця система описує основні закони збереження руху в'язкої рідини або газів. Дослідженню цих моделей присвячено багато робіт видатних вчених: О. О. Ладиженської, Г. І. Марчука, Р. Темама, Ж.-Л. Лионса, М. М. Яненка та їх учнів [1–3]. Проте багато питань все ж залишилися відкритими. Це як питання існування та єдності розв'язку, так і питання побудови ефективних методів знаходження розв'язку. Серед чисельних методів, які використовуються для розв'язування практичних задач основними є скінченно-різницеві алгоритми або методи скінченних елементів. Одним із перспективних скінченно-різницевих методів для таких задач є двокроково-симетризований алгоритм (ДС-алгоритм) [4]. В роботі [5] запропоновано версію ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса, записану у недивегентній формі, але не наведено теоретичного дослідження цього алгоритму. Дана робота присвячена модифікації ДС-алгоритму для дивергентної форми цієї ж системи, обґрунтуванню адекватності чисельного алгоритму диференціальній моделі ізотермічних потоків нестислої рідини (консервативність алгоритму) та визначенню низки таких обчислювальних характеристик різницевих схем як асимптотична збіжність (апроксимація), збіжність на грубих сітках (перше диференціальне наближення), дисперсійність та дисипативність алгоритму.

Алгоритм Розв'язку

В області $G = \{\Omega \times (0 < t < T)\}$, $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ розглядається система рівнянь Нав'є-Стокса, яка описує модель руху в'язкої

нестислої рідини

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u)^2}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \frac{\partial (v)^2}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

де u, v — проекції вектора швидкості, P — тиск, ρ — щільність, υ — в'язкість.

Рівняння нерозривності (3) замінюємо еквівалентним йому рівнянням Пуассона для тиску

$$-\frac{\partial}{\partial t}D + \upsilon\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 \left(u^2\right)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \left(v^2\right)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \tag{4}$$

де $D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

В області Ω введено рівномірну сітку: $\omega_{\tau h} = \{x_{1,i}, x_{2,j}, t_n : x_{1,i} = ih_1$, $x_{2,j} = jh_2$, $t_n = n\tau$; $i = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, $h_k = \frac{1}{m_k}$, $(k = 1, 2), \tau > 0\}$, сіткові функції $\varphi_{ij}^k = \varphi(x_i, y_j, t_k)$ і оператори різницевих похідних другого порядку апроксимації.

Розв'язок різницевої задачі будуємо за двокроковою схемою. Враховуючи, що рівняння нерозривності виконується точно на часових кроках $(2n+1)$ та $(2n+2)$, а на кроці $2n$ його різницевий аналог не дорівнює нулю, рівняння (4) можна апроксимувати різницевим рівнянням

$$\frac{P_{i-1j}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \frac{P_{ij-1}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2} = S_{ij}^{2n}, \tag{5}$$
$$i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2},$$

де $S_{ij}^{2n} = \upsilon \Delta D_{ij}^{2n} + U_1^{2n} + U_2^{2n} + U_3^{2n} + D_{ij}^{2n}/\tau$,

$$D_{ij}^{2n} = \frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_1} + \frac{v_{ij+1}^{2n} - v_{ij-1}^{2n}}{2h_2},$$

$$U_1 = \frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - 2\left(u_{ij}^{2n}\right)^2 + \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{h_1^2},\ U_2 = \frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2 - 2\left(v_{ij}^{2n}\right)^2 + \left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{h_2^2},$$

$$U_3 = \frac{u_{i+1j+1}^{2n} v_{i+1j+1}^{2n} - u_{i+1j-1}^{2n} v_{i+1j1}^{2n} - u_{i-1j+1}^{2n} v_{i-1j+1}^{2n} + u_{i-1j-1}^{2n} v_{i-1j-1}^{2n}}{2h_1 h_2},$$

$$\Delta D_{ij}^{2n} = \frac{D_{i+1j}^{2n} - 2D_{ij}^{2n} + D_{i-1j}^{2n}}{h_1^2} + \frac{D_{ij+1}^{2n} - 2D_{ij}^{2n} + D_{ij-1}^{2n}}{h_2^2}.$$

Як бачимо, на кроці $(2n+1)$ права частина цього рівняння залежить тільки від відомих умов u_{ij}^{2n} та v_{ij}^{2n} $(n = 0, 1...)$. Отже, на кроці $(2n+1)$ його розв'язок можна знайти з довільною точністю одним із відомих економічних методів [6].

Перейдемо до побудови розв'язку системи рівнянь (1), (2).

Сіткову область $\omega_{\tau h}$ розділено на дві допоміжні підобласті $\Omega_{\tau h}^{(1,n)}$ й $\Omega_{\tau h}^{(2,n)}$. Елементами першої є точки (x_{1i}, x_{2j}, t_n) такі, що сума індексів $s = i + j + n$ —- парна, а інші точки віднесено до другої підобласті. За часовий крок 2τ прийнято дві складові: непарний півкрок $(2n+1)$ і парний $(2n+2)$.

Рівняння збереження кількості руху (1) та (2) апроксимовано за прийнятою в ДС-алгоритмах схемою [4]:

на кроці $(2n+1)$ в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+1)}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} &= -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_1} - \frac{u_{ij+1}^{2n} v_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n} v_{ij-1}^{2n}}{2h_2} - \\ &- \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} + \\ &+ \upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{ij}^{2n+1} - v_{ij}^{2n}}{\tau} &= -\frac{u_{i+1j}^{2n} v_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n} v_{i-1j}^{2n}}{2h_1} - \frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2 - \left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{2h_2} - \\ &- \frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1} - P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} + \\ &+ \upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{7}$$

а на множині точок $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} &= -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1} - \frac{u_{ij+1}^{2n+1} v_{ij+1}^{2n+1} - u_{ij-1}^{2n+1} v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} - \\ &- \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} + \\ &+ \upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{ij}^{2n+1} - v_{ij}^{2n}}{\tau} &= -\frac{u_{i+1j}^{2n+1} v_{i+1j}^{2n+1} - u_{i-1j}^{2n+1} v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} - \frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2 - \left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2} - \\ &- \frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1} - P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} + \\ &+ \upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1} - 2v_{ij}^{2n+1} + v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1} - 2v_{ij}^{2n+1} + v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{9}$$

на кроці $(2n+2)$ в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1}-$$
$$\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+ \tag{10}$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},$$
$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-$$
$$-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+ \tag{11}$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},$$

і в точках $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+2)}$:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_1}-$$
$$-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+ \tag{12}$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2},$$
$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+2}v_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}-$$
$$-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+2}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+2}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+ \tag{13}$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}.$$

Оскільки в рівняннях значення функції тиску P_{ij}^{2n+1} вже визначені з (5), а значення u_{ij}^{2n}, v_{ij}^{2n} відомі (обчислені при $n>0$ або відомі при $n=0$), то очевидно, що в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+1)}$ значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} знаходяться явно. Після цього, використавши ці значення, явно знайдемо і решту значень на кроці $(2n+1)$. Аналогічно з (10), (11) та (12), (13) знаходимо значення u_{ij}^{2n+2} та v_{ij}^{2n+2}.

Обгрунтування алгоритму

Для наведеного алгоритму проведемо аналіз оцінки головного члена похибки апроксимації, доведемо відповідність алгоритму протіканню фізичних законів, які описують рівняння Нав'є-Стокса.

Теорема 1. *Для задачі (1)–(3) ДС-алгоритм (6)–(13) має сумарну похибку апроксимації* $O\left(\tau^2+h^2\right)$ *і, також, є слабко дисперсійним та слабко дисипативним.*

Доведення. Скористаємося методом першого диференціального наближення (ПДН). Спочатку розглянемо рівняння (1). Складемо різницеві рівняння (8) та (10) в точках множин $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$ та $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$ відповідно, отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-\\&-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+\\&+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_y^2}.\end{aligned}\tag{14}$$

Розпишемо кожен з доданків (14) в ряд Тейлора в точці $(i,j,2n+1)$:

$$u_{ij}^{2n\pm2}=u_{ij}^{2n+1}\pm\tau{u_t}'+\frac{\tau^2}{2}{u_t}''\pm\frac{\tau^3}{3}{u_t}'''+O\left(\tau^4\right),$$

$$u_{i\pm1j}^{2n+1}=u_{ij}^{2n+1}\pm h_x{u_x}'+\frac{h_x^2}{2}{u_x}''\pm\frac{h_x^3}{3}{u_x}'''+O\left(h_x^4\right)$$

та підставимо знайдені розвинення в рівняння (14), отримаємо

$${u_t}'+\frac{\tau^2}{3!}{u_t}'''=-\left[\left(u^2\right)_x{}'+\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''\right]-\left[(uv)_y{}'+\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''\right]-\frac{1}{\rho}{P_x}'+$$
$$+\upsilon\left[{u_x}''+\frac{h_x^2}{12}{u_x}^{IV}\right]+\upsilon\left[{u_y}''+\frac{h_y^2}{12}{u_y}^{IV}\right].$$

Виділимо в отриманому виразі окремо рівняння (1) та залишок:

$${u_t}'+\frac{1}{\rho}{P_x}'-\upsilon\left({u_x}''+{u_y}''\right)+\left(u^2\right)_x{}'+(uv)_y{}'=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial(u)^2}{\partial x}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}=$$
$$=-\frac{\tau^2}{3!}{u_t}'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''-\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{12}{u_x}^{IV}+\frac{h_y^2}{12}{u_y}^{IV}\right).$$

Таким чином, головний член похибки на кроці $(2n+1)$ буде мати вигляд:

$$R_1\left(u\right)=-\frac{\tau^2}{3!}{u_t}'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''-\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''+\upsilon\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}+\upsilon\frac{h_y^2}{12}u_y^{IV}.\tag{15}$$

Присутність в головному члені похибки 3-х похідних вказує на дисперсійність різницевого розв'язку, а 4-х — на дисепативність. Але множники h_x^2 та h_y^2 вказують, що ці характеристики мають слабкий вплив на розрахунковий алгоритм. Тепер складемо рівняння (6) та (11):

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}+\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\\
&-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\\
&-\frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+\\
&+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\\
&+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_y^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_y^2}.
\end{aligned}\tag{16}$$

В даному випадку розвинення в ряд Тейлора відбувається в два етапи. Спочатку скористаємося розвиненням за просторовими змінними відносно точок $(i,j,2n)$ та $(i,j,2n+2)$, а потім за часом відносно точки $(i,j,2n+1)$. Тоді вираз

$$\begin{aligned}
R_2(u)=&-\frac{\tau^2}{3}u_t{}'''+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right]-\frac{h_x^2}{3}\left(u^2\right)_x{}'''-\\
&-\frac{h_y^2}{3}(uv)_y{}'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{6}u_x^{IV}+\frac{h_y^2}{6}u_y^{IV}\right)
\end{aligned}\tag{17}$$

буде головним членом похибки цієї пари різницевих рівнянь. Перейдемо до рівняння (2). Провівши аналогічні розрахунки, отримаємо відповідні для сум (9)+(11) та (7)+(13) головні члени похибки $R_1(v)$ та $R_2(v)$, які матимуть аналогічний (15) та (17) вигляд та зміст. Тепер проведемо дослідження впливу головних членів похибки на розв'язок. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ — відомі функції, визначені з рівняння (5), то систему (1)–(3) перепишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial(u)^2}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\equiv f_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v)^2}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\equiv f_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Така задача поставлена коректно і, як відомо [3], в двовимірному випадку розв'язок цієї задачі в L_2 єдиний для всіх правих частин із L_2 і початкових

значень з деякого гільбертового простору H. Крім того, цей розв'язок майже всюди дорівнює деякій неперервній функції з часового відрізку $[0,T]$ в просторі H. Отже, доданок $\tau^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 t}$ в $R_2(u)$ можна вважати похибкою обчислення f_1. Аналогічно для f_2. Доданки, які містять треті просторові похідні, вказують на можливість виникнення обчислювальних осциляцій, а відповідні четверті похідні — на його дисипативні властивості. Множники h_x^2 та h_y^2 при цих доданках вказують на слабку дисипативність та слабку дисперсійність. Даний алгоритм реалізується в 2 кроки, і хоча на кожному кроці похибка є величиною $O\left(\tau+h^2\right)$, проте сумарна апроксимація для всіх рівнянь буде $O\left(\tau^2+h^2\right)$. □

Для того, щоб показати адекватність на грубих сітках (кроки h_x, h_y та τ не прямують до нуля) різницевої схеми фізичному процесу потрібно записати інтегральний аналог диференціального рівняння, побудувати відповідний йому аналог різницевого рівняння на сітковій множині та порівняти їх. Якщо ці вирази мають один і той же фізичний зміст (закон збереження або його наслідок), то кажуть, що різницева схема буде консервативною. Оскільки для різницевого рівняння Пуассона (5) його консервативність досліджена, наприклад в [6], то нам достатньо дослідити консервативність ДС-алгоритмів (6)–(13). Проінтегрувавши рівняння (1) та (2) по паралелепіпеду зі сторонами Δx, Δy, а потім за часом по проміжку Δt, отримаємо інтегральний наслідок рівнянь кількості руху (рівняння балансу):

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdydt=-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial (u)^2}{\partial x}dxdydt-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial (uv)}{\partial y}dxdydt+$$

$$+\upsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydt+\upsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dxdydt-$$

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydt.$$

Після інтегрування маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u\left(x,y,t_0+\Delta t\right)-u\left(x,y,t_0\right)\right)dxdy=$$

$$=-\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u^2\left(x_0+\Delta x,y,t\right)-u^2\left(x_0,y,t\right)\right)dydt-$$

$$- \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left(u\left(x, y_0+\Delta y, t\right) v\left(x, y_0+\Delta y, t\right) - u\left(x, y_0, t\right) v\left(x, y_0, t\right)\right) dxdt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left(\upsilon \frac{\partial u\left(x_0+\Delta x, y, t\right)}{\partial x} - \upsilon \frac{\partial u\left(x_0, y, t\right)}{\partial x}\right) dydt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left(\upsilon \frac{\partial u\left(x, y_0+\Delta y, t\right)}{\partial y} - \upsilon \frac{\partial u\left(x, y_0, t\right)}{\partial y}\right) dxdt -$$

$$- \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left(P\left(x_0+\Delta x, y, t\right) - P\left(x_0, y, t\right)\right) dydt. \tag{18}$$

Теорема 2. *Схеми ДС-алгоритму (6)–(13) є консервативними.*

Доведення. Виходячи з означення консервативності покажемо, що для нашого різницевого ДС-алгоритму виконується інтегральні закони збереження (наслідок другого закону Ньютону), які притаманні для рівнянь (1) та (2). Проміжки $[x_0, x_0+\Delta x]$, $[y_0, y_0+\Delta y]$, $[t_0, t_0+\Delta t]$ розіб'ємо на M_1, M_2 та N частин довжини h_x, h_y та τ відповідно. Спочатку розглянемо рівняння (1) та відповідні різницеві рівняння (6), (8), (10), (12). Складемо (8) з (10) та (6) з (12):

$$\frac{u_{ij}^{2n+2} - u_{ij}^{2n}}{2\tau} = -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x} - \frac{u_{ij+1}^{2n+1} v_{ij+1}^{2n+1} - u_{ij-1}^{2n+1} v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y} +$$
$$+ \upsilon \frac{u_{i-1j}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2} + \upsilon \frac{u_{ij+1}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2} - \tag{19}$$
$$- \frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x};$$

$$\frac{u_{ij}^{2n+2} - u_{ij}^{2n}}{\tau} = -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x} - \frac{u_{ij+1}^{2n} v_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n} v_{ij-1}^{2n}}{2h_y} -$$
$$- \frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x} - \frac{u_{ij+1}^{2n+2} v_{ij+1}^{2n+2} - u_{ij-1}^{2n+2} v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y} +$$
$$+ \upsilon \frac{u_{i-1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2} + \upsilon \frac{u_{ij+1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2} + \tag{20}$$
$$+ \upsilon \frac{u_{i-1j}^{2n+2} - 2u_{ij}^{2n+2} + u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2} + \upsilon \frac{u_{ij+1}^{2n+2} - 2u_{ij}^{2n+2} + u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2} -$$
$$- \frac{2}{\rho} \frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}.$$

Ці різницеві рівняння легко привести до дивергентної форми:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+1}u_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{h_x}\right]+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y}\right]$$

та

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n}u_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}u_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-$$
$$-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{h_x}\right]+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{h_y}\right]-$$
$$-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+2}u_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}}{h_x}\right]+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y}\right].$$

Помножимо їх на $2\tau\cdot 2h_x\cdot 2h_y$, підсумуємо від 1 до M_1-1, M_2-1,$N-2$ по всім індексам i, j, n множин $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$ та $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+2)}$ відповідно. Після скорочення проміжних доданків одержимо інтегральні суми, які відповідають (18). Отже, одержана рівність виражає інтегральний закон збереження на сітці, а різницева схема (6), (8), (10), (12) є консервативною. Аналогічно встановлюється консервативність різницевого алгоритму для рівняння (2). Таким чином, схеми ДС-алгоритму (6)–(13) є консервативними. □

Висновки

1. В даній роботі, на відміну від [5], побудовано ДС-алгоритм моделювання ізотермічних процесів динаміки в'язкої рідини, записаних у дивергентній формі рівнянь Нав'є-Стокса.
2. В доведених теоремах встановлено консервативність, що вказує на відповідність різницевої моделі фізичним законам, досліджена дисперсійність та дисипативність алгоритму.
3. Розроблений алгоритм дає можливість знаходити чисельні розв'язки початково-крайової задачі, не розв'язуючи систему нелінійних рівнянь.

Література

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 208 с.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и чисельный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
4. Грищенко А. Е., Марцафей А. С. Об одном двухшаговом алгоритме расщепления в задачах тепломасопереноса // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — Вип. №6. — С. 125–131.
5. Грищенко О. Ю., Довбня П. І. Модифікація ДС-алгоритму розв'язування початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 3(106). — С. 19–26.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 12.11.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, № 3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ В СХЕМІ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З РОЗЩЕПЛЕННЯМ ТА ПОДВІЙНИМ УКРУПНЕННЯМ

І. В. Самойленко, Ю. В. Шушарін

Резюме. В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкової еволюції з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації з розщепленням та подвійним укрупненням. Великі відхилення для випадкової еволюції з незалежними приростами визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами.

Вступ

В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації з розщепленням та подвійним укрупненням (див. [5]). Така постановка задачі є новою та досі недослідженою.

Асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації проведено в роботі [6].

В монографії [2] для дослідження проблеми великих відхилень розвинуто ефективний метод, побудований на теорії збіжності експоненційних (нелінійних) операторів. В роботах [7, 8] експоненційний оператор в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) має вигляд:

$$\mathbb{H}^{\varepsilon}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}^{\varepsilon}e^{\varphi(x)/\varepsilon},$$

де оператори $\mathbb{L}^{\varepsilon}, \varepsilon > 0$, визначають марковські процеси $x^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, в схемі серій.

Випадкові еволюції з незалежними приростами (див. [5]) задаються співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x^{\varepsilon}(s)),\ t \geq 0. \tag{1}$$

Тут марковські процеси з незалежними приростами $\eta(t; x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, задаються генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(dv; x),\ x \in E.$$

Перемикаючий марковський процес $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, E_k \cap E_{k'} = \emptyset, k \neq k'$$

в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - e^{-q(x)t}],\ x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0.$$

Також виконуються такі умови:

ME1:: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ має представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, x \in E_k, \\ 0, x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова $x_n, n \geq 0$ на відокремлених класах $E_k, 1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності $P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1$.

ME2:: Асоційований марковський процес $x^0(t), t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів $E_k, 1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx), 1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношення:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx),\ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3:: Усереднені імовірності виходу

$$\widehat{p}_k := \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E \backslash E_k) > 0, 1 \leq k \leq N$$

є додатними, крім того

$$0 < q(x) < +\infty.$$

Таким чином, збурююче ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні імовірності між класами $E_k, 1 \leq k \leq N$. Отже, рівність $P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$ означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^ε, $n \geq 0$ проводить довгий час в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими імовірностями $\varepsilon P_1(x, E \backslash E_k)$.

За умов **ME1**—**ME3** має місце слабка збіжність [5, ch. 4]

$$v(x^\varepsilon(t/\varepsilon)) \Rightarrow \widehat{x}(t), \varepsilon \to 0,\ v(x) = k \in \widehat{E} = \{1, ..., N\},\ x \in E_k.$$

Граничний марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\widehat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\widehat{Q}_1 = (\widehat{q}_{kr}, 1 \leq k, r \leq N),$$

де:

$$\widehat{q}_{kr} = \widehat{q}_k \widehat{p}_{kr},\ k \neq r,\ \widehat{q}_k = q_k \widehat{p}_k,\ 1 \leq k \leq N.$$

$$\widehat{p}_{kr} = p_{kr}/\widehat{p}_k,\ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r),\ 1 \leq k, r \leq N, k \neq r,$$

$$\widehat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

ME4:: Укрупнений марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\widehat{\pi} = (\pi_k, k \in \widehat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді:

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції φ визначається так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \widehat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x),\ \widehat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(x).$$

Має місце співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенційний оператор ([5], ch. 1)

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi$$

має властивість

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Означимо зведений оператор $\widehat{Q}_1$ за допомогою співвідношення

$$\widehat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\widehat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\widehat{Q}_1$:

$$\widehat{\Pi}\widehat{\varphi} := \sum_{k \in \widehat{E}} \widehat{\pi}_k \widehat{\varphi}_k.$$

Означимо потенціальну матрицю $\widehat{R}_0 = [\widehat{R}^0_{kl};\ 1 \leq k, l \leq N]$ такими співвідношеннями:

$$\widehat{Q}_1 \widehat{R}_0 = \widehat{R}_0 \widehat{Q}_1 = \widehat{\Pi} - I.$$

Випадкова еволюція (1) характеризується генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ (див. [5], ch. 2])

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = Q^\varepsilon \varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot) =$$

$$= Q\varphi(\cdot, x) + \varepsilon Q_1\varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot) \tag{2}$$

Зауваження 1. *Дослідження граничних властивостей марковських процесів базується на мартингальній характеризації таких процесів, а саме розглядаються мартингали*

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{L}\varphi(x(s))ds, \tag{3}$$

де $\mathbb{L}$ *— генератор на банаховому просторі* $\mathcal{B}_E$ *дійснозначних обмежених тест-функцій* $\varphi(x) \in E$*, з нормою* $\|\varphi\| := \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$*, що визначає марковський процес* $x(t)$*,* $t \geq 0$*, на стандартному фазовому просторі* $(E, \mathcal{E})$*.*

Теорія великих відхилень базується на використанні експоненційної мартингальної характеризації (див. [2]*, ch.1):*

$$\widetilde{\mu}_t = \exp\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{H}\varphi(x(s))ds\} \tag{4}$$

є мартингалом.

Тут експоненційний нелінійний оператор

$$\mathbb{H}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}\mathbb{L}e^{\varphi(x)},\ \varphi(x) \in \mathcal{B}_E.$$

Еквівілентність співвідношень (3) *та* (4) *випливає з такого:*

Твердження (див. [1], с.66). *Нехай* $x(t)$ *та* $y(t)$ *дійснозначні, неперервні справа процеси, асоційовані з потоком* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t\}$*. Припустимо, що для будь-якого* t*,* $\inf\limits_{s\leq t} x(s) > 0$*. Тоді*

$$\mu(t) = x(t) - \int_0^t y(s)ds$$

є $\{\mathcal{F}_t\}$*-локальним мартингалом, тоді і тільки тоді, коли*

$$\widetilde{\mu}(t) = x(t)exp\left\{-\int_0^t \frac{y(s)}{x(s)}ds\right\} \text{ є } \{\mathcal{F}_t\} \text{ –локальний мартингал.}$$

Проблема великих відхилень, як правило, реалізується в 4 етапи ([2], ch.2):

1. Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення.
2. Визначення експоненційної компактності.
3. Визначення принципу порівняння для граничного оператора.
4. Конструкція варіаційного представлення функціоналу дії, що розв'язує проблему великих відхилень.

Етапи (2)—(4) для експоненційного генератора, що відповідає процесам з незалежними приростами, реалізовано в монографії [2]. Важливо, що граничний генератор, який виникає при дослідженні випадкової еволюції, співпадає з генератором, що відповідає процесу з незалежними приростами без перемикань.

Отже, для випадкової еволюції, яка розглядається в статті і для відповідного граничного генератора всі необхідні технічні умови (етапи 2—4) вже

досліджені в монографії [2]. А саме, питання експоненційної компактності для процесів з незалежними приростами розглянуто в прикладах 1.5, 4.23 та в пп. 10.1.2 та 10.3.2; перевірка принципу порівняння для граничного експоненційного генератора вигляду $\widehat{H}^0\varphi(u) = H^0(\varphi'(u))$ (див. нижче (7)) проведена в пп. 10.1.3 із застосуванням леми 9.15; варіаційне представлення граничного експоненційного генератора проведено в пп. 10.1.5 на с.200 із застосуванням теореми 8.14.

Зауваження 2. *Деякі з вказаних етапів реалізовано також в монографії* [3]*, де проблема великих відхилень досліджується з використанням кумулянти процесу з незалежними приростами. Зв'язок між кумулянтою та експоненційним генератором випливає з наступного.*

Генератор марковського процесу можна подати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(x) = \int_R e^{\lambda x} a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda)d\lambda,$$

де $a(\lambda)$ *— кумулянта процессу,* $\overline{\varphi}(\lambda) = \int_R e^{\lambda x}\varphi(x)dx$.

Зворотнє перетворення дає

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda).$$

Перепишемо

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = \int_R e^{-\lambda x}a(\lambda)\varphi(x)dx$$

та за допомогою заміни

$$e^{-\lambda x}\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$$

отримаємо

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x}\widetilde{\varphi}(x)dx = \int_R a(\lambda)\widetilde{\varphi}(x)dx.$$

Таким чином,

$$e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x} = a(\lambda),$$

або через експоненційний генератор

$$\mathbb{H}\varphi_0(x) = a(\lambda), \quad де \ \varphi_0(x) = \lambda x.$$

В роботах [7, 8] В. С. Королюк запропонував метод розв'язання проблеми сингулярного збурення при дослідженні великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі асимптотично малої дифузії.

В класичних роботах асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень виконується, як правило, з використанням великого параметра серії $n \to \infty$, а іноді навіть кількох різних параметрів (див. напр. [9]).

Нормування випадкової еволюції (1) малим параметром серії для розв'язання проблеми великих відхилень в схемі пуассонової апроксимації реалізується таким чином:

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta(ds; x^\varepsilon(s/\varepsilon^3)),\ t \geq 0,$$

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \varepsilon\eta^\delta(t/\varepsilon^2),$$

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{R}}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma^\delta(dv; x),\ x \in E,$$

де $\varepsilon, \delta \to 0$ так що $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$.

1. Основні умови пуассонової апроксимації

C1: *Пуассонова апроксимація.* Сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\delta(t; x)$, $x \in E$, $t \geq 0$ задовольняє умови пуассонової апроксимації:

PA1: Апроксимация середніх:

$$a_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[a(x) + \theta_a^\delta(x)]$$

та

$$c_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v^2\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[c(x) + \theta_c^\delta(x)],$$

де

$$\sup_{x\in E}|a(x)| \leq a < +\infty, \sup_{x\in E}|c(x)| \leq c < +\infty.$$

PA2: Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\Gamma_g^\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} g(v)\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[\Gamma_g(x) + \theta_g^\delta(x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbb{R})$ — класу функцій, що визначає міру (див. [4], ch. 7), $\Gamma_g(x)$ — обмежене ядро,

$$|\Gamma_g(x)| \leq \Gamma_g \quad \text{(константа залежна від } g\text{)}.$$

Ядро $\Gamma^0(dv; x)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbb{R})$ співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(v)\Gamma^0(dv; x), \quad g \in C_3(\mathbb{R}).$$

Знехтувально малі доданки θ_a^δ, θ_c^δ, θ_g^δ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E}|\theta_\cdot^\delta(x)| \to 0, \quad \delta \to 0.$$

РАЗ: Має місце співвідношення

$$c(x) := \int_{\mathbb{R}} v^2 \Gamma^0(dv; x),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в експоненційному генераторі, який визначає розв'язання проблеми великих відхилень.

С2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv; x) = 0.$$

С3: *Експоненційна обмеженість*:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{p|v|} \Gamma^\delta(dv; x) < \infty, \forall p \in \mathbb{R}.$$

2. Основний результат

Теорема 1. *Розв'язання проблеми великих відхилень для випадкової еволюції*

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta(ds; x^\varepsilon(s/\varepsilon^3)),\ t \geq 0,$$

яка задається генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi_\varepsilon^\delta(t),\ x^\varepsilon(t),\ t \geq 0$

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\delta \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} Q\varphi(\cdot, x) + \varepsilon^{-2} Q_1 \varphi(\cdot, x) + \Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u, \cdot), \tag{5}$$

де

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \Gamma^\delta(dv; x),\ x \in E \tag{6}$$

і $\varepsilon, \delta \to 0$ *так, що* $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$ *визначається експоненційним генератором*

$$\widehat{H}^0 \varphi(u) = \widehat{\widehat{a}} \varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}} [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)] \widehat{\widehat{\Gamma^0}}(dv), \varphi(u) \in C^3(\mathbb{R}), \tag{7}$$

$$\widehat{\widehat{a}} = \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) a(x), \quad \widehat{\widehat{\Gamma^0}}(v) = \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) \Gamma^0(v; x).$$

Зауваження 3: *Великі відхилення для випадкових еволюцій в схемі пуассонової апроксимації визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами. Вичерпне дослідження проблеми випадкових відхилень для стрибкового процесу з незалежними приростами викладено в монографіях* [3, 2].

Для доведення теореми використовуємо таку лему.

Лема 1. *Експоненційний генератор в схемі серій*

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon \Gamma_\varepsilon^\delta(x) e^{\varphi/\varepsilon} \tag{8}$$

має таке асимптотичне представлення

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_\Gamma(x)\varphi(u) + \theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup\limits_{x\in E}|\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)|\to 0,\ \varepsilon,\delta\to 0,$

$$H_\Gamma(x)\varphi(u)=a(x)\varphi'(u)+\int_{\mathbb{R}}[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)]\Gamma^0(dv;x).$$

Доведення. Перепишемо (8), враховуючи вигляд генератора (6). Маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1]\Gamma^\delta(dv;x),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u):=\varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора таким чином:

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\Delta_\varepsilon\varphi(u)+\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^\varepsilon(v)=e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^\varepsilon(v)/v^2\to 0,\ v\to 0$$

рівномірно по u, оскільки $\varphi(u)\in C^3(\mathbb{R})$. Крім того, функція $\psi_u^\varepsilon(v)$ неперервна і обмежена для кожного ε завдяки обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^\varepsilon(v)$ є рівномірною по u завдяки умовам **C2, C3** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\Delta_\varepsilon\varphi(u)-v\varphi'(u)-\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\Gamma^\delta(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u)+\delta c(x)\varphi''(u)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u)\in C^3(\mathbb{R})$ та умову **PA2**, отримаємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}(e^{v\varphi'(u)}\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})-\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})-\varepsilon^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2)\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}\varepsilon^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u})\Gamma^0(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u)+\delta c(x)\varphi''(u)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}\varepsilon^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\Gamma^0(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи **PA3** та граничну умову $\varepsilon^{-1}\delta\to 1$, остаточно маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=H_\Gamma(x)\varphi(u)+\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup\limits_{x\in E}|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)|\to 0,\ \varepsilon,\delta\to 0.$

Лему доведено. □

Доведення. Граничний перехід в експоненційному нелінійному генераторі винадкової еволюції реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi_{\varepsilon}^{\delta}(u,x)=\varphi(u)+\varepsilon\ln[1+\delta\varphi_1(u,x)+\delta^2\varphi_2(u,x)].$$

Таким чином, маємо

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\delta}\varphi^{\varepsilon}=e^{-\varphi^{\varepsilon}/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}_{\varepsilon}^{\delta}e^{\varphi^{\varepsilon}/\varepsilon}=e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon\mathbb{L}_{\varepsilon}^{\delta}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2].$$

Обчислення асимптотичної поведінки останнього експоненційного генератора дає такий результат.

Лема 2. *Має місце асимптотичне представлення*

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\delta}\varphi^{\varepsilon}=\varepsilon^{-1}Q\varphi_1+Q\varphi_2+Q_1\varphi_1-\varphi_1Q\varphi_1+H_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)+\theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup\limits_{x\in E}|\theta^{\varepsilon,\delta}(x)|\to 0,\ \varepsilon,\delta\to 0.$

Доведення. Враховуючи (5) та граничне співвідношення $\varepsilon^{-1}\delta\to 1$, $\varepsilon,\delta\to 0$, маємо

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\delta}\varphi^{\varepsilon}=e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\delta\varphi_1+\frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}]\left\{\varepsilon^{-2}Q+\varepsilon^{-1}Q_1+\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)\right\}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2]=$$

$$=e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\delta\varphi_1+\delta^2\frac{\varphi_1^2-\varphi_2+\delta\varphi_1\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}]\left\{\varepsilon^{-2}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_1+\varepsilon^{-2}\delta^2e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_2+\right.$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q_1\varphi_1+\varepsilon^{-1}\delta^2e^{\varphi/\varepsilon}Q_1\varphi_2+\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}+\varepsilon\delta\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1+$$

$$\left.+\varepsilon\delta^2\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right\}=\varepsilon^{-1}Q\varphi_1+Q\varphi_2+Q_1\varphi_1-\varphi_1Q\varphi_1+H_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)+\theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де

$$\theta^{\varepsilon,\delta}(x)=\delta\left[Q_1\varphi_2-\varphi_1Q\varphi_2-\varphi_1Q_1\varphi_1-\delta\varphi_1Q_1\varphi_2+e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1+\right.$$

$$+\delta e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2-\varphi_1e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}-\delta\varphi_1e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1-$$

$$-\delta^2\varphi_1e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2+\frac{\varphi_1^2-\varphi_2+\delta\varphi_1\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}\left\{\varepsilon^{-2}\delta^2Q\varphi_1+\varepsilon^{-2}\delta^3Q\varphi_2+\right.$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta^2Q_1\varphi_1++\varepsilon^{-1}\delta^3Q_1\varphi_2+\delta e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}+\delta^2e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1+$$

$$\left.\left.+\delta^3e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right\}\right].$$

Лему доведено.

□

Враховуючи лему 1, маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon}=\varepsilon^{-1}Q\varphi_1+Q\varphi_2+Q_1\varphi_1-\varphi_1Q\varphi_1+H_{\Gamma}(x)\varphi(u)+h^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $h^{\varepsilon,\delta}(x)=\theta^{\varepsilon,\delta}(x)+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x).$

Тепер використовуємо розв'язок задачі сингулярного збурення (див. [5], ch. 1) для системи рівнянь

$$Q\varphi_1 = 0,$$
$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u).$$

З першого рівняння маємо $\varphi_1(u,x) = \varphi_1(u,\widehat{x}) \in N_Q$, тому з умови розв'язності для другого рівняння

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u),$$

де

$$H^0\varphi(u) = \Pi Q_1 \Pi\varphi_1 + \Pi H_\Gamma(x)\Pi\varphi(u).$$

Застосуємо тепер умову розв'язності для останнього рівняння. Маємо

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u).$$

Отже,

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 = H^0\varphi(u) - \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u),$$

а для того, щоб це рівняння було розв'язним відносно $\widehat{\varphi}_1$ права частина має належати простору значень оператора $\widehat{Q}_1$, тобто має виконуватись умова

$$\widehat{\Pi}[H^0 - \widehat{H}_\Gamma(x)]\widehat{\Pi}\varphi(u) = 0,$$

звідки остаточно отримуємо (7).

Теорему доведено.

□

Висновки

В статті вперше поставлено та розв'язано проблему великих відхилень в схемі фазового укрупнення для випадкової еволюції з незалежними приростами. Запропоновано алгоритм, що дозволяє визначити нелінійний експоненційний генератор, який розв'язує проблему великих відхилень. Показано, що граничний експоненційний генератор є класичним експоненційним генератором стрибкового процесу.

Література

1. Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov Processes: Characterization and convergence // J. , — New York: Wiley & Sons, 1986.
2. Feng J., Kurtz T. G. Large Deviation for Stochastic Processes // AMS, 131, RI. —2006.
3. Freidlin M. J., Wentzel A. D. Random Perturbation of Dynamical Systems — Berlin: Springer-Verlag, 1998.
4. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes — Berlin: Springer-Verlang, 1987.
5. Koroliuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // WSP. —2005.
6. Самойленко І.В. Великі відхилення для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації // Теорія ймовірностей та математична статистика. —2011, — С. 95–101.

7. Королюк В. С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Допов. НАН України. —2010, №. 6, — С. 22–26.
8. Королюк В. С. Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії // Укр. матем. журн. —2010, №. 5, — С. 643–650.
9. Mogulskii A. A. Large deviation for processes with independent increments // Ann. Prob. —1993, — P. 202–215.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, пр-т Перемоги, 54/1, м. Київ, 03680, Україна.

Надійшла 05.10.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 531.553:531.555

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ЦЕНТРА МАСИ ТІЛА, КИНУТОГО ПІД КУТОМ ДО ГОРИЗОНТУ

О. Б. Стеля, Л. І. Потапенко, І. П. Сіренко

Резюме. В роботі розглядається математична модель руху центра мас снаряда, з урахуванням дії балістичних та метеорологічних чинників. Як базова використовується стандартна модель НАТО. Для врахування сили опору повітря використовується закон 1943 року. Наведено результати чисельних розрахунків в порівнянні з даними таблиць стрільби.

Вступ

Для практичних застосувань необхідно мати математичну модель руху снаряда, за допомогою якої можна було б розрахувати траєкторію його польоту з врахуванням дії балістичних та метеорологічних чинників. Відомо, що на тіло, кинуте під кутом до горизонту із заданою швидкістю, діють різноманітні сили, які змушують його відхилятись від початкової траєкторії. Дослідження впливу сил, що діють на снаряд в польоті, є однією з головних задач зовнішньої балістики.

Одним із засновників балістики як науки є Леонард Ейлер. Його балістичні дослідження мають безпосереднє практичне значення і в даний час [1]. У роботах радянських вчених [2–5] на основі рівнянь балістики були сформульовані математичні моделі польоту ракет і снарядів. В традиціях цієї школи зовнішньої балістики найчастіше використовується так звана швидкісна система координат, в якій одна з осей співпадає за напрямом з вектором швидкості центра маси снаряда. Вплив зовнішніх факторів, зокрема вітру, суттєво впливає на траєкторію літального апарата. При чому на пасивній та активній ділянках траєкторії цей вплив суттєво відрізняється. Модель руху літальних апаратів у збуреному середовищі розглядається в роботі [6]. В роботі [7] запропоновано математичну модель руху літальних апаратів, яка дозволяє досліджувати вплив режимів роботи реактивного двигуна на такі параметри, як дальність, час у польоті, точність доставки в задану точку та ін. Також, розглянуто вплив температури реактивного заряду на одиничний імпульс тяги і час роботи двигуна. Розроблено методику врахування впливу вітру на активній і пасивній ділянках траєкторії для літальних апаратів, які стабілізуються різними способами.

В країнах НАТО створено стандарт для математичної моделі (в правосторонній декартовій прив'язаній до Землі системі координат), за якою здійснюються балістичні розрахунки [8].

Загальна постановка задачі зовнішньої балістики

При побудові комп'ютерної моделі зовнішньої балістики використовувалась система рівнянь, викладена в [8–10]:

$$\frac{du_i}{dt} = -J_i + \frac{\pi\rho\, d^2 f_L}{8m}\Big[C_{L_0} + C_{L_{\alpha^3}}\alpha_e^2\Big]v^2\alpha_{e_i} + \\ + \frac{\pi\rho\, d^3 Q_M p C_{mag-f}}{8m}(\overrightarrow{\alpha_e} \times \overrightarrow{v})_i + \Lambda_i - g_i,\ i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

де J_i — компоненти "вектора прискорення опору повітря", u_i — компоненти вектора швидкості польоту снаряда, w_i — компоненти вектора швидкості вітру, $\vec{v}$ — вектор швидкості снаряда по відношенню до повітря,

$$v_i = u_i - w_i,\ i = \overline{1,3},$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

$$(\overrightarrow{\alpha_e} \times \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_{e_2}v_3 - \alpha_{e_3}v_2 \\ \alpha_{e_3}v_1 - \alpha_{e_1}v_3 \\ \alpha_{e_1}v_2 - \alpha_{e_2}v_1 \end{pmatrix}.$$

Перший та другий члени правої частини рівняння (1) — це внесок сил опору повітря та підйомної силою. Третій член — сили Магнуса. Λ_i — компоненти вектора, обумовленого силою Кориоліса

$$\vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2\Omega[\sin(lat)u_3 + \cos(lat)\sin(AZ)u_2] \\ 2\Omega[\cos(lat)\sin(AZ)u_1 + \cos(lat)\cos(AZ)u_3] \\ -2\Omega[\cos(lat)\cos(AZ)u_2 - \sin(AZ)u_1] \end{pmatrix},$$

$\Omega = 7.29211510^{-5}$ рад/c — швидкість обертання Землі, lat — широта місцяположення гармати, AZ — азимут напрямку постріла. $\vec{g}$ — вектор гравітаційного прискорення

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_0\dfrac{X_1}{R} \\ g_0\left(1 - \dfrac{2X_2}{R}\right) \\ g_0\dfrac{X_3}{R} \end{pmatrix},\ g_0 = 9.80665(1 - \cos(lat))\ \text{м}/c^2,$$

де X_1, X_2, X_3 — координати снаряда, $R = 6356.766$ м — радіус Землі. $\vec{\alpha_e}$ — вектор деривації

$$\vec{\alpha_e} = \begin{pmatrix} A(v_2\frac{du_3}{dt} - v_3\frac{du_2}{dt}) \\ A(v_3\frac{du_1}{dt} - v_1\frac{du_3}{dt}) \\ A(v_1\frac{du_2}{dt} - v_2\frac{du_1}{dt}) \end{pmatrix},\ A = -\frac{8I_x p}{\pi\rho d^3(C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}\alpha_e^2)v^4},$$

де C_{D_0}, $C_{D_{\alpha^2}}$ — нульовий та квадратичний коефіцієнти лобового опору, C_{L_0}, $C_{L_{\alpha^3}}$ — коефіцієнти підйомної сили, Q_D — фактор відхилення лобового опору, f_L — фактор підйомної сили, p — вісьова швидкість обертання снаряда.

Координати снаряда та вісьова швидкість його обертання задовольняють таким рівнянням

$$\frac{dX_i}{dt} = u_i,\ i = \overline{1,3}, \tag{2}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\pi\rho d^4 pvC_{spin}}{8I_x}, \tag{3}$$

де C_{spin} — коефіцієнт сповільнення обертання, I_x — вісьовий момент інерції снаряда.

Окрім форми запису моделі (1)–(3), рівняння зовнішньої балістики можуть бути записані в іншому вигляді [2, 3]. Основна відмінність форм запису полягає в тому, що шуканими функціями, наприклад, у випадку двох змінних є модуль швидкості U та кут θ між напрямком швидкості та віссю OX_1, а координати снаряда обчислюються через них. Вважаючи, що на тіло діють тільки дві сили (сила опору повітря та гравітаційна сила) та за відсутністю вітру, система рівнянь записується у вигляді:

$$\frac{dU}{dt} = -J - g_0 \sin\theta, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g_0 \cos\theta}{U}, \tag{5}$$

де J — модуль "вектора прискорення опору повітря".

Слід зазначити, що система (4)–(5) еквівалентна системі (1), записаної для двох змінних у випадку відсутності дії підйомної сили, сил Магнуса, Коріоліса та відсутності вітру. В цьому випадку система рівнянь (1) в векторному вигляді може бути записана

$$\frac{d\overrightarrow{U}}{dt} = -\overrightarrow{J} - \overrightarrow{g}. \tag{6}$$

Вважаючи, що напрямок сили опору повітря протилежний напрямку руху тіла, одержуємо:

$$\overrightarrow{J} = (J\cos\theta,\ J\sin\theta),\ \overrightarrow{u} = (U\cos\theta,\ U\sin\theta),\ \overrightarrow{g} = (0,\ g_0).$$

Використовуючи комплексний запис векторів $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{g}$, одержуємо

$$\overrightarrow{J} = Je^{i\theta},\quad \overrightarrow{u} = Ue^{i\theta},\quad \overrightarrow{g} = ig_0, \tag{7}$$

де i — уявна одиниця.

Підставляючи (7) в (6), одержуємо

$$\frac{d(Ue^{i\theta})}{dt} = -Je^{i\theta} - ig_0. \tag{8}$$

Після диференціювання у (8)

$$e^{i\theta}\frac{dU}{dt} + iUe^{i\theta}\frac{d\theta}{dt} = -Je^{i\theta} - ig_0.$$

Далі одержуємо

$$\frac{dU}{dt} + iU\frac{d\theta}{dt} = -J - g_0\,\sin\theta + ig_0\,\cos\theta. \tag{9}$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини (9), одержуємо (4)–(5).

Закон сили опору повітря

Визначення функції опору повітря для тіл різної форми є ключовим питанням в балістичних дослідженнях. В даній роботі для врахування цієї сили використовувався емпіричний закон, який отримав назву закон 1943 року [3,11,12]. Розрахунки більшості таблиць для практичної стрільби здійснені на основі цього закону. У зв'язку з цим та згідно з [11] будемо використовувати вираз

$$J = cH_\tau(y)F(V),$$

де y — висота над площиною стрільби, V — швидкість снаряда для нормальних артилерійських умов, c — балістичний коефіцієнт, який задається так

$$c = \frac{id^2\cdot 10^3}{m}\frac{\rho_0}{\rho_{0_H}},$$

де i — коефіцієинт форми снаряда, ρ_0 — густина повітря на поверхні Землі в точці пострілу, ρ_{0_H} — густина повітря на поверхні Землі в точці пострілу для нормальних артилерійських умов. Функція

$$F(V) = \frac{\pi}{8}\rho_{0_H}\cdot\,10^{-3}\cdot\,V^2C_x(M) = 4.74\cdot\,10^{-4}\,V^2C_x(M)$$

називається закон опору повітря, хоча іноді так називають також залежність $C_x(M)$. Тут $M = V/a$ — число Маха, a — швидкість звуку.

Вираз

$$H_\tau(y) = \frac{\rho}{\rho_0} = H(y)\frac{\tau}{\tau_0}$$

характеризує залежність опору повітря від висоти, тут ρ — густина повітря, τ — "віртуальна" температура, що враховує вологість повітря, τ_0 — "віртуальна" температура на поверхні Землі в точці пострілу.

За [11] задамо

$$\frac{\tau}{\tau_0} \approx \frac{\tau}{\tau_{0_H}} = \begin{cases} 1 - 2.19\cdot 10^{-5}y,\ y \le 9300, \\ 0.796 - 2.19\cdot 10^{-5}(y - 9.3\cdot 10^3)\times \\ \times\left[1 - 1.85\cdot 10^{-4}(y - 9.3\cdot 10^3)\right],\ 9300 < y \le 12000, \\ 0.767 = const,\ 12000 < y \end{cases}$$

та залежність

$$H(y)=\begin{cases}(1-0.0219\cdot 10^{-3}y)^{4.4}, & y\le 9300,\\ \dfrac{0.367}{1-0.0275\cdot 10^{-3}(y-9.3\cdot 10^3)\left[1-0.185\cdot 10^{-3}(y-9.3\cdot 10^3)\right]}\times & \\ \times\exp\left[-2.12(0.194-\operatorname{arctg}\dfrac{12\cdot 10^3-y}{1.375\cdot 10^4})\right], & 9300<y\le 12000,\\ 0.253\cdot\exp\left[-1.542\cdot 10^{-4}\cdot(y-12\cdot 10^3)\right], & 12000<y.\end{cases}$$

Для інтерполяції заданого в табличному вигляді коефіцієнту опору повітря 1943 року $C_x(M)$ використовується параболічний інтерполяційний сплайн [13]. Перевагою такого способа інтерполяції є представлення табличних даних у вигляді кусково-квадратичної функції неперервної разом зі своєю першою похідною. Обраний сплайн не вимагає задання додаткових умов на вихідні дані і дає можливість визначати значення опору повітря в залежності від числа Маха для всього відрізка інтерполяції. На рис. 1 наведено графік експериментальних та інтерпольованих даних відповідно до закону 1943 року.

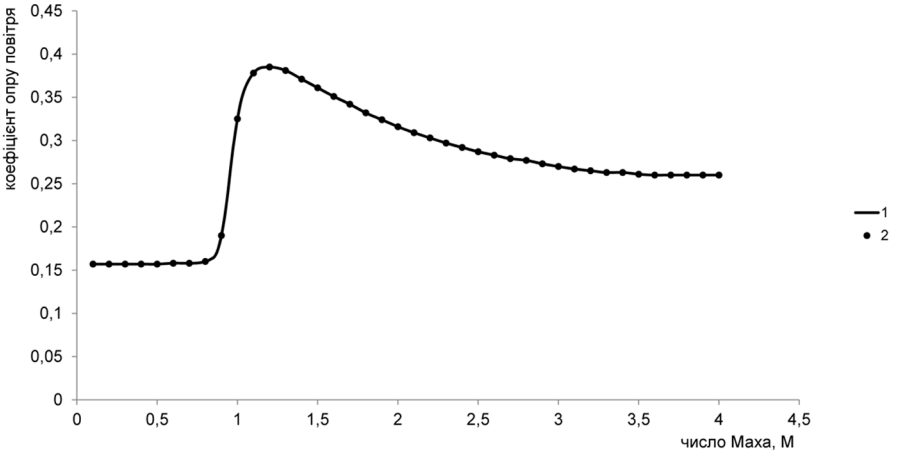


Рис. 1. Інтерполяція коефіцієнту опору повітря закону 1943 р. за допомогою сплайну (1 — значення сплайну, 2 — експериментальні дані)

В реалізованій моделі для J_1, J_2, J_3 використовуються такі вирази

$$J_1 = J\cos\theta\cos\phi,\quad J_2 = J\sin\theta\cos\phi,\quad J_3 = J\sin\phi,$$

де ϕ — кут між напрямом вектора швидкості снаряда та віссю OX_1.

Таким чином, з еквівалентності постановок задач (1)–(3) та (4)–(5) випливає, що в моделі (1)–(3) можемо використовувати закон 1943 року з покомпонентним представленням "прискорення опору повітря".

Алгоритм розв'язання задачі та результати чисельних експериментів

Для розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь використовується чисельний метод Кутта-Мерсона 5-го порядка [14]. Перевагою цього метода над "стандартним" методом Рунге-Кутта 4-го порядка є можливість оцінювати похибку на кожному кроці розрахунків. Це дозволяє визначати необхідний крок дискретизації для серій розрахунків.

При проведенні чисельних розрахунків нам необхідно знаходити такий кут прицілювання θ_0 при якому місце падіння снаряда буде на відстані $X_1(T)$ від точки стрільби при висоті місцезнаходження цілі $X_2(T)$ над площиною стрільби. При цьому час польота снаряда T є також невідомою величиною.

Розв'язання загальної задачі здійснюється за допомогою метода стрільби [15, 16].

Для перевірки практичної придатності моделі було проведено серію розрахунків з метою дослідження впливу опору повітря на рух снаряда для різних дальностей і висот цілей.

Результати розрахунків порівнювались з таблицями стрільби [17]. В таблиці 1 наведено результати розрахунків (стовпці 3 та 5 таблиці) для різної дальності та дані таблиць стрільби. Траєкторії снаряда одержані шляхом моделювання наведені на рис. 2.

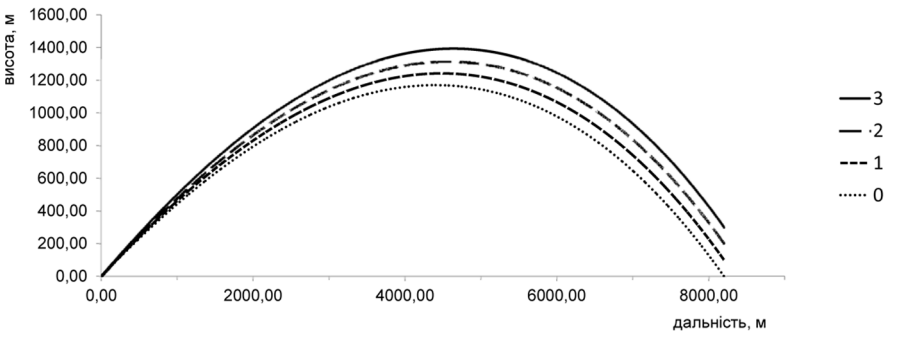


Рис. 2. Траєкторії польоту снаряда для різних висот місцезнаходження цілі (0 — 0 м, 1, — 100 м, 2 — 200 м, 3 — 300 м)

Таблиця 1. Дані таблиць стрільби та результати чисельних розрахунків

Дальність, м	Кут кидання, тис.	Кут обчислений, тис.	Час польоту, сек	Час обчислений, сек
1	2	3	4	5
5200	219	219.5	17	16.8
5400	231	231	18	17.6
5600	242	242.6	18	18.4
5800	254	254.4	19	19.2
6000	266	266.6	20	20
6200	279	279.1	21	20.9
6400	291	291.9	22	21.7
6600	305	305	22	22.6
6800	318	318.4	23	23.5
7000	332	332.3	24	24.4
7200	346	346.6	25	25.4
7400	361	361.4	26	26.4
7600	376	376.7	27	27.3
7800	392	392.7	28	28.4
8000	409	409.3	29	29.4
8200	426	426.8	30	30.6
8400	444	445	32	31.7
8600	463	464.5	33	32.9
8800	483	485	34	34
9000	504	507	35	35.5
9200	528	530.5	36	36.9
9400	555	556	38	38.5
9600	586	585.2	40	40.2
9800	624	624.2	42	42.4

Висновки

Результати моделювання за створеним програмним забезпеченням показали хорошу узгодженність модельних розрахунків з даними таблиць стрільби. Це дає можливість за допомогою математичної моделі зовнішньої балістика досліджувати, як дію окремих, так і сумарну силу, що впливають на рух снаряда.

Література

1. Эйлер Леонард. Исследования по баллистике. — Москва: Гос. изд. физ.- мат. лит., 1961. — 228 с.
2. Коновалов А. А., Николаев Ю. В. Внешняя баллистика. — Москва: ЦНИИ информации, 1979. — 228 с.
3. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. — Москва: Машиностроение, 2005. — 607 с.

4. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С. Внешняя баллистика. — Москва: Машиностроение, 1991. — 640 с.
5. Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. Ч. I. — Ленинград: Арт. акад. им. Ф. Э. Дзержинского, 1933.
6. Шийко О. М., Поленица П. В., Коплик І. В., Остапова О. П., Авдєєва О. М. Модель руху артилерійського снаряда, стабілізованого обертанням. / Системи обробки інформації. — 2010. — Вип. 1 (82). — С. 147–152.
7. Макеев В. И., Ляпа Н. Н., Латин С. П., Трофименко П. Е. Математическая модель динамики полета летательных аппаратов в возмущенной среде. / Electronic Modeling. — 2011. — V. 33. — №6. — P. 19–32.
8. STANAG 4355 JAIS (Edition 3) — The Modified Point Mass and Five Degrees or Freedom Trajectory Models. — NATO Stardartization Agency, 2009. — 95 p.
9. Balon R., Komenda J. Analysis of the 155 mm ERFB/BB projectile trajectory. // Advances in MT. — 2006. — №1. — P. 92–114.
10. Baranowski L. Feasibility analysis of the modified point mass trajectory model for the need of ground artillery fire control systems. // Journal of theoretical and applied mechanics. — 2013. — V. 51, №3. — P. 511–522.
11. Ефремов А. К. Аппроксимация закона сопротивления воздуха 1943 г. / Наука и образование. Научное издание МГТУ им. Баумана. — 2013. — №10. — С. 269–284.
12. Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. — Москва: Оборонгиз, 1946.
13. Стеля О.Б. Про існування одного параболічного сплайну. / Журн. обчисл. та прикл. матем. — 1997. — №1(81). — С. 62–67.
14. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране — Москва: Изд-во МГУ, 1990. — 336 с.
15. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач — М.: Мир, 1982. — 296 с.
16. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений— М.: Наука, 1986. — 288 с.
17. Збірник таблиць стрільби: навчальний посібник / В. М. Петренко, В. Є. Житник, В. І. Макеєв та ін. — Суми: Сумський державний університет, 2011. — 300 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 06.11.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2015, №1(119)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

АПРОКСИМАЦІЇ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ПРОСТОРОМ ДЛЯ РІВНЯНЬ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИФУЗІЇ

О. О. Халимон, О. С. Бондар

Резюме. У роботі досліджуються методи апроксимації дробової похідної у застосуванні до рівнянь узагальненої дифузії з дробовою похідною порядку $\alpha \in (1,2)$ за простором. Розглянуто відомі підходи. Запропоновано новий метод, що забезпечує ліпшу точність.
Ключові слова: аномальна дифузія, узагальнена дифузія, дробова похідна, похідна Рімана-Ліувілля, формула Грюнвальда.

Abstract. We've been considered approxmethods for fractional derivative in applications to α-order space-fractional diffusion-wave equations with $\alpha \in (1,2)$ and proposed a new method, which offers better accuracy then known ones.
Key words: anomalous diffusion, generalized diffusion, fractional derivative, Riemann-Liouville derivative, Grünwald's formula.

1. Вступ

Процеси дифузії аномальної природи, що відхиляються від класичної гауссівської дифузії, зустрічаються у багатьох фізичних системах [1, 2, 3]. У роботі [2] розглядаються приклади систем із різних галузей (геології, фізики, хімії, економіки), в яких були виявлені процеси аномальної дифузії. Зокрема, сюди можна віднести явища тепло-, масопереносу, розповсюдження забруднення у пористих середовищах [4]. Аномальна дифузія виникає у середовищах із самоподібною структурою. Навіть матеріали, котрі не мають фрактальної "архітектури" на мікрорівні, а володіють лише масштабною інваріантністю кількох порядків (мезорівень), мають унікальні фізичні властивості, що є наслідком їх самоподібної структури [5]. У зв'язку з цим постає проблема побудови адекватних математичних моделей таких середовищ.

Одним із найбільш плідних підходів є опис цих процесів за допомогою узагальнених рівнянь дифузії. Як правило, узагальнюють часову похідну [6, 7, 8, 9], замінюючи її на похідну деякого дробового порядку β у розумінні Рімана-Ліувілля або ж Капуто.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = d(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + q(x,t); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}u(x,t) = d(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + q(x,t). \tag{2}$$

Якщо покласти $\beta = 1$, матимемо класичне рівняння дифузії (1). При $\beta \in (0,1)$ відповідні процеси дістали назву повільної дифузії чи субдифузії, при $\beta \in (1,2)$ — супердифузії; при $\beta = 2$ — хвильове рівняння. Тому інколи рівняння дробової дифузії називають також дифузійно-хвильовими рівняннями (diffusion-wave equations). Ці узагальнення є досить добре вивченими: для систем типу (2) отримано апріорні оцінки для крайових задач першого та третього роду [10], знайдено фундаментальні розв'язки [11, 12], розв'язано задачі ідентифікації джерела [13], розроблено чисельні методи [14, 15] тощо.

Зазначимо, що узагальнення можна проводити й в інший спосіб. А саме, вести його не за часовою змінною, а за просторовими:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = d(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u(x,t) + q(x,t), \tag{3}$$

при цьому зазвичай розглядають $\alpha \in (1,2)$ (такі процеси теж називають супердифузією). При $\alpha = 2$ отримуємо рівняння (1), при $\alpha = 1$ класичне гіперболічне рівняння.

Дослідженню систем із дробовими похідними за простором присвячено кілька праць [15, 16, 17, 18]. Зокрема, у [18] в якості дробової похідної розглядався оператор Рісса Вейля та було прослідковано зв'язок із блуканнями Леві. Загалом, питання апроксимації дробової похідної у рівняннях фрактальної дифузії з дробовою похідною за простором лишаються маловивченими, що говорить про актуальність теми.

2. Наближення дробової похідної за формулою Грюнвальда

Розглянемо детальніше рівняння дифузії з дробовою похідною за простором (3):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + q(x,t),$$

де $x_L < x < x_R$, $1 < \alpha \le 2$, $d(x) > 0$; введемо також початково-крайові умови $u(x, t=0) = s(x) \forall x \in (x_L, x_R)$, $u(x_L, t) = 0$, $u(x_R, t) = b_R(t)$.

Для функції $f(x)$ дробову похідну Рімана-Ліувілля порядку α визначимо таким чином [7]:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_L^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}d\xi.$$

Як правило, для моделювання (3) використовують ту чи іншу модифікацію формули Грюнвальда. Звичайна формула Грюнвальда не забезпечує стійкості (як для прямих методів, так й для обернених [18, 19]). Тому зазвичай послуговуються зміщеною формулою Грюнвальда [6] для оцінки дробової похідної:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}u(x-(k-1)h,t), \tag{4}$$

де N – натуральне, $h = (x - x^L)/N$.

Наприклад, для схеми Кранка-Ніколсон, визачивши сітку таким чином: $t_n = n\Delta t$, $0 \le t_N \le T$; $\Delta x = h > 0$, $\Delta x = (x_R - x_L)/N_x$, $x_i = x_L + i\Delta x$ для $i = 0, ..., N_x$; $u_i^n = u(x^i, t_n)$, $d_i = d(x_i)$, $q_i^n + 1/2 = q(x_i, t_{n+1/2})$, через U_i^n позначимо чисельне наближення до точного значення розв'язку u_i^n. Введемо також вагові множники Грюнвальда:

$$g_{\alpha,k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}.$$

Отже, застосовуючи (4) до (3) на означеній вище сітці, одержуємо таку різницеву схему типу Кранка-Ніколсон:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{d_i}{2}(\delta_{\alpha,x} U_i^{n+1} + \delta_{\alpha,x} U_i^n) + q_i^{n+1/2},$$

де оператор дробового диференціювання запишеться як

$$\delta_{\alpha,x} U_i^n = \frac{1}{(\Delta x)^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} U_{i-k+1}^n,$$

який для дробової похідної за простором порядку α забезпечує точність $O(\Delta x)$.

3. Наближення дробової похідної за допомогою похідних цілих порядків

Розпишемо ліву похідну Рімана-Ліувілля для $\alpha \in (1, 2)$ таким чином:

$${}_aD_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} x(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Важливою є наступна

Теорема 1. *Нехай (c, d), $-\infty < c < d < +\infty$ — відкритий дійсний інтервал; $[a, b] \subset (c, d)$ такий, що $\forall t \in [a, b]$ замкнена куля $B_{b-a}(t)$ з центром в t та радіусом $(b-a)$ лежить в (c, d); $x(\cdot)$ — довільна аналітична на (c, d) функція. Тоді*

$${}_aD_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha x^{(k)}(t)}{k!(k-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки $x(t)$ є аналітичною на (c, d), а $B_{b-a}(t) \subset (c, d)$ для довільного $\tau \in (a, t)$, де $t \in (a, b)$, то функцію $x(\tau)$ можна представити у вигляді ряду Тейлора:

$$x(\tau) = x(t - (t-\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(k)}(t)}{k!} (t-\tau)^k.$$

А отже, згідно (5), матимемо:

$${}_aD_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(k)}(t)}{k!} (t-\tau)^k d\tau.$$

Оскільки функція $(t-\tau)^{k-\alpha}x^{(k)}(t)$ є аналітичною, можемо змінити порядок інтегрування та сумування, отримаємо:

$$
{}_aD_t^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{(k)}(t)}{k!}(t-\tau)^k d\tau =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k x^{(k)}(t)}{k!(k+1-\alpha)}(t-a)^{k+1-\alpha}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k x^{(k+1)}(t)}{k!(k+1-\alpha)}(t-a)^{k+1-\alpha} + \frac{(-1)^k x^{(k)}(t)}{k!}(t-a)^{k-\alpha}\right) =
$$

$$
= \frac{x(t)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\alpha)(k-1)!} + \frac{(-1)^k}{k!}\right)x^{(k)}(t)(t-a)^{k-\alpha}.
$$

Відмітимо, що

$$
\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\alpha)(k-1)!} + \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{k(-1)^{k-1} + k(-1)^k - a(-1)^k}{(k-\alpha)k!} = \frac{(-1)^{k-1}\alpha}{(k-\alpha)k!}
$$

(бо для довільного цілого невід'ємного k має місце $k(-1)^{k-1} + k(-1)^k = 0$), що й завершує доведення.

□

Зауваження 1. Теорема 1 відкриває шлях для чисельних застосувань, а саме, достатньо в (6) взяти перші $K = (N+1)$ членів (пам'ятаймо, що це є ряд Тейлора):

$$
{}_aD_t^{\alpha}x(t) \approx \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k \alpha x^{(k)}(t)}{k!(k-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}. \tag{7}
$$

Таким чином, стає можливим наближати дробову похідну за допомогою похідних цілих порядків. Продемонструємо це на прикладі вже розглянутого вище рівняння (3). Отже, нехай $N = 2$, тоді для дробової похідної матимемо

$$
\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{2}\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\frac{(-1)^{k-1}\alpha}{k!(k-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} = u(x,t)\left(\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) +
$$

$$
+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\alpha(x-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{-\alpha}{2(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{2-\alpha}\right).
$$

Таким чином, (3) набуває вигляду

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P(x)u(x,t) + Q(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + R(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t), \tag{8}
$$

де

$$P(x) = d(x)\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$
$$Q(x) = d(x)\frac{-\alpha(x-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)},$$
$$R(x) = d(x)\frac{-\alpha(x-a)^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)},$$

а отже, може бути розв'язане чисельно за допомогою класичних схем другого порядку точності.

4. Чисельний приклад

Продемонструємо застосування апроксимації (7) на прикладі пробної функції $f(x) = x^{4.5}$, для якої дробова похідна порядку $\alpha = 0.5$ у явному вигляді є відомою [6], а саме:

$${}_0D_x^{0.5} f(x) = \frac{\Gamma(5.5)}{\Gamma(5)} x^4.$$

Результати наведено на рис. 1.

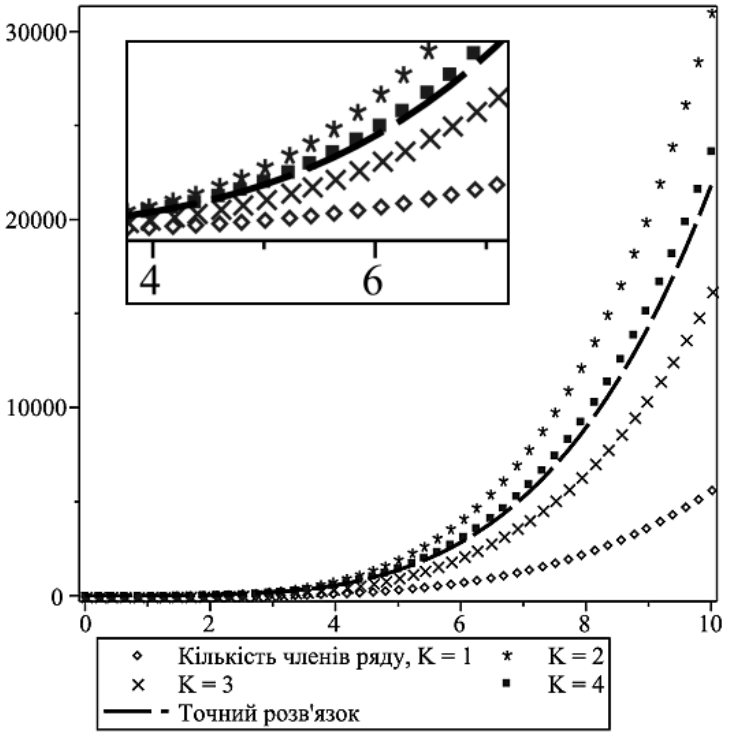


Рис 1.

5. Висновки

Апроксимація (7) дозволяє наближати дробову похідну за допомогою похідних цілих порядків, завдяки чому рівняння аномальної дифузії зводяться до добре вивчених систем, котрі можуть бути розв'язані класичними методами. Разом з тим, (7) має й недолік, а саме: нарощуючи кількість перших $(N + 1)$ членів ряду, отримуватимемо щоразу складніші моделі (з'являтимуться похідні все більш старших порядків). Тому вибір $N = 2$ (перші три члени) в плані точності/складності моделі є, імовірно, найбільш оптимальним.

Література

1. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. // Phys. Rep. — 2000. — V. 339. — P. 1–77.
2. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2004. — V. 37.
3. Vasiliev V.V., Simak L.A. Fractional calculus and approximation methods in dynamic systems modeling. // National Academy of Science of Ukraine. — Kiev. — 2008 (in Russian).
4. Nakhushev A.M. Fractional calculus and it's applications. // — Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).
5. Zeleny L. M., Milovanov A. V. Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. // Progress of Phisical Sciences. — 2004. — V. 174, №8. — P. 809–852 (in Russian).
6. Oldham K., Spanier J. The fractional calculus. // Academic Press. — London, New York. — 1973.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. // Academic Press. — San Diego. — 1999.
8. Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. // J. Math. Phys. — 1989. — V. 30. — P. 134–144.
9. Wyss W. Fractional diffusion equation. // J. Math. Phys. — 1986. — V. 27. — P. 2782–2785.
10. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional order eqations. // Differential equations. — 2010. — V. 46, №5. — P. 660– 666.
11. Eidelman S. D., Kochubei A .N. Cauchy problem for fractional diffusion equatoins. // Differential equations. — 2004. — V. 199, №2. — P. 211–255.
12. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional duffusion-wave equation. // Appl. Math. Lett. — 1996. — V. 9, №6. — P. 23–28.
13. Sakamoto K., Yamamoto M. Inverse sourse problem with a final overdeterminatoin for a fractional diffusion equation. // Mathematical control and related fields. — 2011. — V. 1, №4.
14. Lin Y., Xu C. Finite difference-spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. // Journal of Computational Physics. — 2007. — V. 225. — P. 1533–1552.
15. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2004. — V. 37.

16. Vasiliev V.V., Simak L.A. Fractional calculus and approximation methods in dynamic systems modeling. // National Academy of Science of Ukraine. — Kiev. — 2008 (in Russian).
17. Huang J., Nie N., Tang Y. A second order finite difference spectral method for space fractional diffusion equation. // Chinese Academy of Sciences. — Beijing. — 2008.
18. Prehl J. Diffusion on fractals and space-fractional diffusion equations. // Chemnitz University of Technology — 2004.
19. Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two sided space fractional partial differential equations. // Applied Numerical Mathematics. — 2006. — V. 56, №1. — P. 80–90.
20. Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — V. 172, №1. — P. 65–77.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна

Надійшла 22.10.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №1(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

UDC 514.74

APPROXIMATING A CONTOUR BY LINEAR SEGMENTS AND CIRCULAR ARCS WITH GIVEN CURVATURE BOUNDS[1]

V. M. Patsuk

Abstract. A method of approximation of a contour by a set of linear segments and circular arcs is proposed. Starting from the vertex with minimal scalar product of the vectors issuing from a vertex to neighbouring ones, we consecutively construct the next element which is either a linear segment or a circular arc. In each such step we guarantee that constraints on distance to the initial contour and constraints on circular arc radii are satisfied.

1. Introduction

In a number of problems of placement, cutting and packing, the information on detailes (objects) enters after digitising their contour (frontier) in a form of a vertex sequence. The contour is a polygon or it includes circular arcs as well as linear segments. Such information is often a result of operating of appropriate equipment: digitizers, etc. and contains quite great, in most cases redundant, amount of elements (segments).

A complete class of Φ-functions [1, 2] has been constructed for a series of basic objects whose frontier consists of linear segments and concave or convex (with respect to the interior of the object) circular arcs.

Composed objects can be represented by a set of basic objects of four types [1, 2].

The Φ-functions allow us to use effective solution methods of solving optimization problems of placement, cutting and packing.

At the same time, effectiveness of a series of solution methods depends essentially on complexity of objects. Knowing admissible error of contour definition we may signigicantly reduce the number of elemantary curves defining the contour, and therefore optimization problem runtime.

Optimization problem solution methods are often such that their solution quality depends on quantity of local extrema explored.

Hence, reduction of contour element number for many problem statements provides summary improvement of solution as well.

[1]This research was supported by the STCU grant №5710.

2. Review of Existing Methods

The simplest contours are linear segments and circular arcs and the need of approximating scattered points by a circle or a circular arc arises in physics, biology and medicine, archeology, industry, etc [5].

Due to its importance the problem of approximation of a contour by a set of linear segments and/or circular arcs was investigated in numerous works.

Paper [4] addresses the problem of identifying perceptually significant segments on general planar curvilinear contours. The problem posed there is to identify all segments of a contour that can be interpreted as a "natural" or "perceptually salient" section to approximate using a circular arc model. Unfortunately, as the author writes, what it means to be perceptually salient is not specified by any formal definition. Therefore, in his paper he attempts to articulate subjective criteria for what constitutes a perceptually natural contour segment by examining a number of prototypical situations that occur on curvilinear contours and appeals to the reader's own judgements. An algorithm attempting to meet these criteria is presented in [4]. The segments delivered have the following properties: (1) each segment is well-approximated by a circular arc, (2) each pair of segments describe different sections of the contour, and (3) the curve either terminates or changes in orientation and/or curvature beyond each end of every segment. The result is a description of the contour at multiple scales in terms of circular arcs that may overlap one another.

In [5] the problem of fitting standard shapes or curves to incomplete data (which represent only a small part of the curve) is considered. Even if the curve is quite simple, such as an ellipse or a circle, it is hard to reconstruct it from noisy data sampled along a short arc.

The least squares fit (LSF) of circular arcs is studied to incomplete scattered data. The authors reveal the cause of unstable behavior of conventional algorithms and propose an algorithm that accurately fits circles to data sampled along arbitrarily short arcs.

In [6] proposed is an algorithm of constructing an approximate continuous representation of a digital contour by circular arcs with guarantees on the Hausdorff error between the digital shape and its reconstruction.

Article [7] introduces an approach for the segmentation and approximation of 2D contours. The algorithm deals with the pixel representation of the contour.

In our work we investigate the problem in a statement arising when preparing data for cutting and packing optimization algorithms. A representation by minimal number of linear segments and circular arcs of curvature bounded from above and below is convenient for further computations.

3. Problem Statement

Let us have a polygonal object frontier (contour) $K_0 = \operatorname{fr} S_0$ defined by a cyclic sequence of vertices $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \mathbb{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

It is required to construct its approximation by a cyclic sequence of segments and circular arcs of minimal quantity so that the new frontier K' lie within $G = (S_0 \oplus B_{\varepsilon_+}) \cap (\complement S_0 \oplus B_{\varepsilon_-})$ where

$\complement S_0 = \mathbb{R}^2 \backslash S_0$ is the complement of S_0,
$\oplus$ is the Minkowski sum operation [3],
ε_+ and ε_- are the required outer and inner accuracy limits respectively,
B_ε is the disc of radius ε.

It is supposed that G has no self-intersections of its contour curves consisting of two components.

We also have a restriction on minimal and maximal radii of circles, separately for convex and concave arcs:
$\hat{r}_- \le \hat{r} \le \hat{r}_+$,
$\breve{r}_- \le \breve{r} \le \breve{r}_+$.

4. Solution Algorithm

The following algorithm to solve the problem is proposed.

1. Renumber the vertices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ of the object P cyclically. We write i_{++} and i_{--} instead of $\begin{cases} i+1, & \text{if } x < n; \\ 1, & \text{if } x = n \end{cases}$ and $\begin{cases} i-1, & \text{if } x > 1; \\ n, & \text{if } x = 1 \end{cases}$ respectively.
2. Start with $i = 1$.
3. Let $U_\varepsilon(\mathbf{v}_i)$ be a small enough neighbourhood of $\mathbf{v}_i$ of radius ε, $\varepsilon \ll \varepsilon_+$, $\varepsilon \ll \varepsilon_-$. Find the so called effective neighbours $\mathbf{v}_{i^-}$, $\mathbf{v}_{i^+}$ of the current vertex $\mathbf{v}_i$. For that find the first index k among $k \in \mathbb{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $\mathbf{v}_{i_{(--)^k}} \notin U_\varepsilon(\mathbf{v}_i)$ and denote it as $\mathbf{v}_{i^-}$. Notation $i_{(--)^k}$ means here that operation $--$ for i, i. e. $i \to i_{--}$, is performed k times. Similarly find $\mathbf{v}_{i^+}$.
4. Renumber the vertices $\mathbf{v}_i$ of the object P so that only effective neighbours of $\mathbf{v}_i$ be included.
5. Form normalised vectors to the effective neighbours of a vertex $\mathbf{v}_i$ as follows:
   $\mathbf{a}_i^\sigma = (\mathbf{v}_{i^\sigma} - \mathbf{v}_i) / \|(\mathbf{v}_{i^\sigma} - \mathbf{v}_i)\|$, $\sigma \in \{-, +\}$.
6. Choose $\mathbf{v}_i$ with minimal scalar product $(\mathbf{a}_i^-, \mathbf{a}_i^+)$ (the sharpest corner, no matter whether convex or concave).
7. Renumber the vertices starting from the found sharpest corner.
8. For each vertex $\mathbf{v}_i$ define $\mathbf{a}_i^* = (\mathbf{a}_{i^+} - \mathbf{a}_{i^-}) / \|(\mathbf{a}_{i^+} - \mathbf{a}_{i^-})\|$, then define outward and inward normals $\mathbf{n}_i^+$, $\mathbf{n}_i^-$ so that $(\mathbf{a}_i^*, \mathbf{n}_i^+)$ and $(\mathbf{n}_i^-, \mathbf{a}_i^*)$ would form a right orthgonal basis.
9. For each vertex $\mathbf{v}_i$ construct $\mathbf{v}_i^+ = \mathbf{v}_i + \varepsilon_+ \mathbf{n}_i^+$ and $\mathbf{v}_i^- = \mathbf{v}_i + \varepsilon_- \mathbf{n}_i^-$
10. Starting from the new first vertex $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1$ assume $\mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i$ and try to construct a section of the frontier consecutively, constructing linear segment and circular arcs issuing from $\mathbf{v}'_i$ to $\mathbf{v}_{i+k}$, $\mathbf{v}_{i+k}^+$ and $\mathbf{v}_{i+k}^-$, $k = 2, 3, \ldots$.

    In so doing, check a possibility to construct a linear segment as well as a concave or convex circular arc without violating approximation restrictions (outer and inner ones) on distances between the original and constructed frontiers.

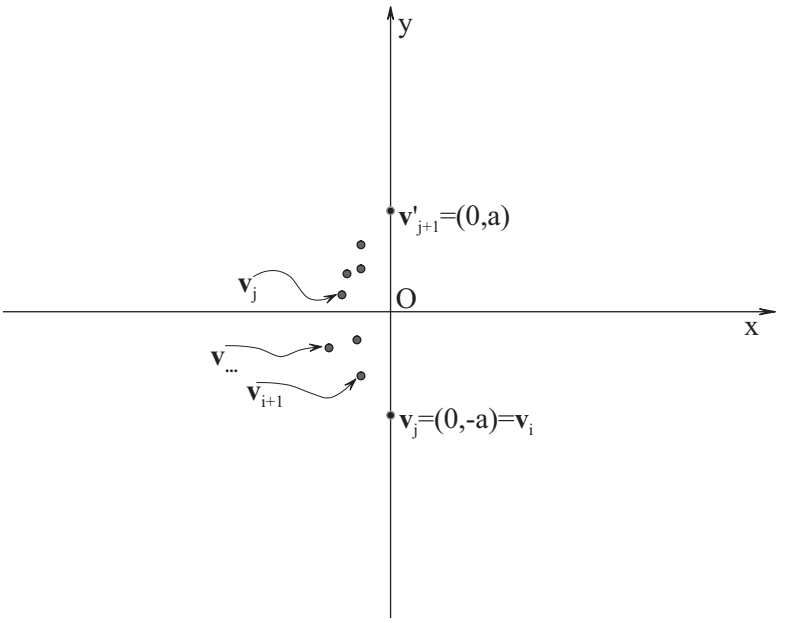


FIG. 1. Approximating the contour by an arc

If there is no admissible choice for k, but there is one for $k-1$, assume $\mathbf{v}'_{i+1} = \mathbf{v}^+_{i+k-1}$, and choose as the curve connecting $\mathbf{v}'$ and $\mathbf{v}'_{i+1}$ such curve that privides minimal deviation from the original frontier.

5. Admissibility of an Arc

Let us consider now the question of detecting admissibility of an arc (from $\mathbf{v}'_i$ to $\mathbf{v}'_{i+1}$ as an approximating contour element).

1. By translation and rotation, transform object P so that $\mathbf{v}'_i$, $\mathbf{v}'_{i+1}$ move into $(0, a)$, $(0, -a)$ respectively (Fig. 1).

Each intermediate vertex $\mathbf{v}_j$ defines (with account of tolerances ε_+, ε_-) possible bounds of the radius of the circular arcs $r_j^{\min}$, $r_j^{\max}$ respectively (Fig. 2).

The values $r_j^{\max}$, $r_j^{\min}$ can be obtained from the next equations, in which $(x_c, 0)$ are the center coordinates of the required arc.

$$\begin{cases} a^2 + x_c^2 = r_j^{\max} \\ (x_c - x_j)^2 + (0 - y_j)^2 = (r_j^{\max} + \varepsilon_-)^2, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a^2 + x_c^2 = r_j^{\min} \\ (x_c - x_j)^2 + (0 - y_j)^2 = (r_j^{\min} - \varepsilon_+)^2, \end{cases} \tag{2}$$

The following solution was obtained in the Maple 13 package.

Designate

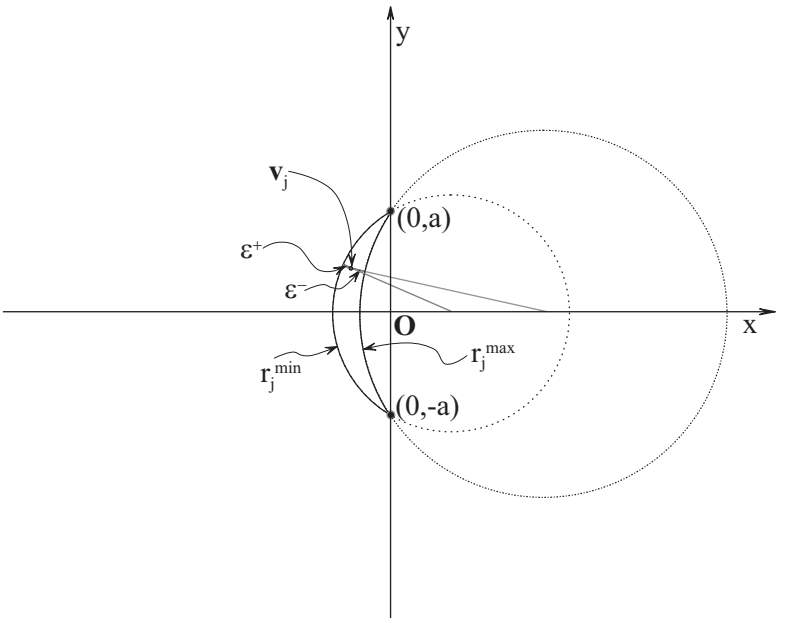


FIG. 2. Feasible arc radius limits

$$\begin{aligned} D &= 2x_j^2y_j^2\varepsilon_+^2 + 2\varepsilon_+^2x_j^2a^2 - 2\varepsilon_+^2a^2y_j^2 + x_j^4\varepsilon_+^2 \\ &\quad -2\varepsilon_-^4x_j^2 - 2\varepsilon_-^4y_j^2 + \varepsilon_+^2y_j^4 + \varepsilon_-^6 + a^4\varepsilon_+^2 - 2\varepsilon_-^4a^2. \end{aligned} \tag{3}$$

A similar expression is valid for ε_+.
Then solution of (1) is either

$$\begin{aligned} {}_c &= \tfrac{1}{2}(-x_j^3 - x_jy_j^2 + \varepsilon_-^2x_j + a^2x_j + \sqrt{D})/(\varepsilon_-^2 - x_j^2), \\ r_j^{\max} &= -\tfrac{1}{2\varepsilon_-}(x_j\tfrac{-x_j^3-x_jy_j^2+\varepsilon_+^2x_j+a^2x_j+\sqrt{D}}{\varepsilon_-^2-x_j^2} + a^2 - x_j^2 - y_j^2 + \varepsilon_-^2), \end{aligned} \tag{4}$$

or

$$\begin{aligned} x_c &= \tfrac{1}{2}(-x_j^3 - x_jy_j^2 - \varepsilon_-^2x_j + a^2x_j - \sqrt{D})/(\varepsilon_-^2 - x_j^2), \\ r_j^{\max} &= -\tfrac{1}{2\varepsilon_-}(x_j\tfrac{-x_j^3-x_jy_j^2+\varepsilon_+^2x_j+a^2x_j-\sqrt{D}}{\varepsilon_-^2-x_j^2} + a^2 - x_j^2 - y_j^2 + \varepsilon_-^2), \end{aligned} \tag{5}$$

The solution of (2) is either

$$\begin{aligned} x_c &= \tfrac{1}{2}(-x_j^3 - x_jy_j^2 + \varepsilon_+^2x_j + a^2x_j + \sqrt{D})/(\varepsilon_+^2 - x_j^2), \\ r_j^{\min} &= \tfrac{1}{2\varepsilon_+}(x_j\tfrac{-x_j^3-x_jy_j^2+\varepsilon_+^2x_j+a^2x_j+\sqrt{D}}{\varepsilon_+^2-x_j^2} + a^2 - x_j^2 - y_j^2 + \varepsilon_+^2), \end{aligned} \tag{6}$$

or

$$\begin{aligned} x_c &= \tfrac{1}{2}(-x_j^3 - x_jy_j^2 - \varepsilon_+^2x_j + a^2x_j - \sqrt{D})/(\varepsilon_+^2 - x_j^2), \\ r_j^{\min} &= \tfrac{1}{2\varepsilon_+}(x_j\tfrac{-x_j^3-x_jy_j^2+\varepsilon_+^2x_j+a^2x_j-\sqrt{D}}{\varepsilon_+^2-x_j^2} + a^2 - x_j^2 - y_j^2 + \varepsilon_+^2). \end{aligned} \tag{7}$$

We take the second solution (5) of the system (1) and the first solution (6) of the system (2) since r has to be positive.

If the values (x_j, y_j) and ε_- (or ε_+ respectively) are still such that the obtained values $r_j^{\max} < 0$ ($r_j^{\min} < 0$ respectively), then in dependence upon situation, we assume that $r_j^{\max} = \infty$ or $r_j^{\max} = a$ ($r_j^{\min} = \infty$ or $r_j^{\min} = a$ respectively).

For all the finite sequence of the intermediate points $\mathbf{v}_j$ we assume that

$$r^{\max} = \min_j r_j^{\max}, \tag{8}$$

$$r^{\min} = \max_j r_j^{\min}. \tag{9}$$

Find

$$[r_*^-, r_*^+] = [r^{\min}, r^{\max}] \cap [\hat{r}_-, \hat{r}_+] \tag{10}$$

in the case of a convex circular arc and

$$[r_*^-, r_*^+] = [r^{\min}, r^{\max}] \cap [\breve{r}_-, \breve{r}_+] \tag{11}$$

in the case of a concave one.

Denote by $\delta_j^+(r)$, $\delta_j^-(r)$ the outer and the inner deviation of the considered arc of the new contour from the vertex of the initial one respectively;

denote by $\widehat{\delta}_k^+(r)$, $\widehat{\delta}_k^-(r)$ the outer and the inner deviation of the considered arc of the new contour from the segment $[\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k]$ of the initial contour respectively.

In the last case for finding the values $\widehat{\delta}_k^+(r)$, $\widehat{\delta}_k^-(r)$ we construct the perpendiculars from the circle center to segments $[\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k]$.

Let $\delta(r) = \left\{ \frac{\max\limits_j \delta_j^+(r)}{\varepsilon^+}, \frac{\max\limits_j \delta_j^-(r)}{\varepsilon^-}, \frac{\max\limits_k \widehat{\delta}_k^+(r)}{\varepsilon^+}, \frac{\max\limits_k \widehat{\delta}_k^-(r)}{\varepsilon^-} \right\}$.

Find in the closed segment $[r_*^-, r_*^+]$ the optmial value $r = r^{\text{extr}}$ so that

$$\delta(r^{\text{extr}}) = \arg\min \delta(r). \tag{12}$$

Function $\delta(r)$ is a monotone function of one argument r. Its minimum $\delta(r_*)$ can be found e. g. by dichotomy.

If the obtained value $|\delta(r^{\text{extr}})| \le 1$, then the obtained solution is admissible.

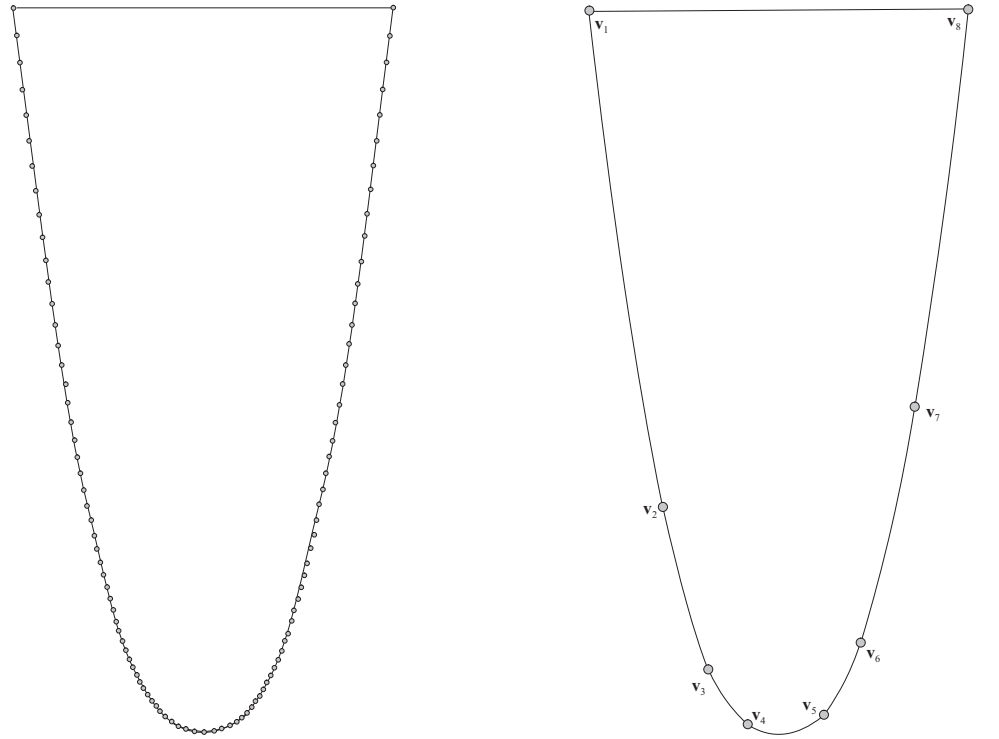
6. Stable vertices

We can fix some contour vertices and retain them in the new contour. Criteria for such solution are as follows.

First, we check the condition $(\mathbf{a}_i^+, \mathbf{a}_i^-) \ge \alpha$. If it is satisfied, we attach $\mathbf{a}_i$ to the set of stable vertices.

Then, to a vertex $\mathbf{v}_i$ we can assign curvature $\kappa_i = 1/r_i$ where r_i is the radius of the circle C_i generated by vertices $\mathbf{v}_{i-1}$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_{i+1}$. Denote the centre of C_i by c_i.

We can assign a sign to κ_i in dependence on whether we deal with a convex or concave arc with respect to the interior of P.



(a) The initial digitized parabola segment

(b) The approximated parabola segment

FIG. 3. Approximating a parabola segment

Value $\Delta\kappa = \|\kappa_{i-1} - \kappa_i\| + \|\kappa_i - \kappa_{i+1}\|$ characterizes curvature change in the vertex $\mathbf{v}_i$ and can be used as a criterion to consider vertex $\mathbf{v}_i$ as a stable one. We may require that $\Delta\kappa \geq \varepsilon_\kappa$ for that.

Conditions $\frac{\|C_{i-1}-C_i\|}{r_{i-1}+r_i} + \frac{\|C_i-C_{i+1}\|}{r_i+r_{i+1}} \geq \varepsilon_1$, and $\frac{\|C_{i-1}-C_i\|}{\max\{r_{i-1},r_i\}} + \frac{\|C_i-C_{i+1}\|}{\max\{r_{i-1},r_i\}} \geq \varepsilon_2$, where ε_1 , ε_2 are some threshold values that also may be used as criteria for vertex stability.

7. EXAMPLES

An approximation of an object formed by a part of a parabola (Fig. 3(a)) with 7 arcs and one segment is shown in Fig. 3(b).

An approximation of an object having given inner and outer approximation tolerances are shown in Fig. 4.

REFERENCES

1. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., and Pankratov A. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs. // Advances in Operations Research, doi:10.1155/2012/346358. — 2012. — 26 p.

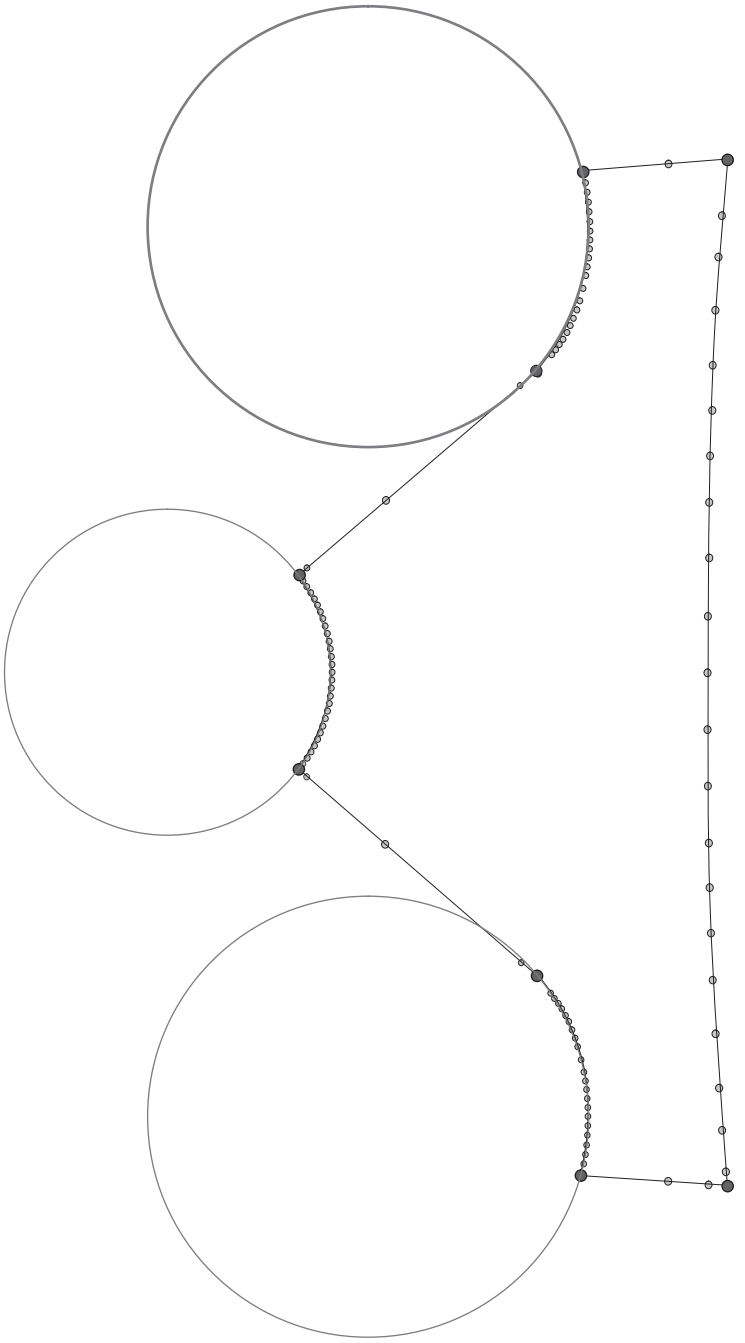


FIG. 4. Approximating an object of diameter 60.74 with parameters: outer precision 0.1, inner precision 0.1, minimal outer radius 0.1, minimal inner radius 0.1, maximal outer radius 300, maximal inner radius 300, $(\mathbf{a}_i^+, \mathbf{a}_i^-)$ threshold -0.99, curvature change threshold 0.3, circle centers' shift threshold 0.9888. The resulting object has 5 linear segments and 4 circular arcs

2. Chernov N., Stoyan Yu., and Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. // Comput. Geometry: Theory & Appl. — 2010. — V. 43, — P. 535–553.
3. Minkowski H. Dichteste gitterförmige Lagerung. kongruenter Körper // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1904. — P. 311–355.
4. Saund. E. Identifying Salient Circular Arcs on Curves. // CVGIP: Image Understanding. — 1993. — 58:3. — P. 327–337.
5. Chernov N. and Lesort. C. Least squares fitting of circles. // J. Math. Imaging and Vision. — 2005. — V. 23, № 3. — P. 239–252.
6. Kerautret B., Lachaud J.-O., Nguyen T.P. Circular Arc Reconstruction of Digital Contours with Chosen Hausdorff Error. // Discrete Geometry for Computer Imagery. Lecture Notes in Computer Science. — 2011. — V. 6607. — P. 247–259.
7. Mokhtari M., Bergevin R. Generic Multi-scale Segmentation and Curve Approximation Method. // Lecture Notes in Computer Science. — 2006. — V. 2106. — P. 227–235.

Department of Mathematical Modeling and Optimal Design, A. N. Podgorny Institute for Engineering problems of NAN of Ukraine, Dm. Pozharsky str. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine.

Submitted on 03.04.2012

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 518.83

ВЕКТОР ШЕПЛИ КАК СПОСОБ СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С. И. Доценко

Резюме. В статье дан краткий обзор математических результатов, которые легли в основу нобелевской премии по экономике за 2012 год. Рассмотрены основные положения теории кооперативных игр, Вектор Шепли рассмотрен как механизм справедливого распределения доходов и расходов. Рассмотрено применение механизма справедливого распределения для различных задач исследования операций, таких, как задача о банкротстве, задача о назначениях и других.

ВВЕДЕНИЕ

В 2012 году Нобелевская премия по экономике была присуждена американским ученым Алвину Роту и Ллойду Шепли за "Теорию стабильных размещений и практику формирования рынков". Необычность данной работы заключается в том, что она исследует так называемые некоммерческие рынки, на которых участвующие в них агенты борются за собственные интересы, но при этом на рассматриваемых рынках отсутствуют деньги. Ключевым понятием данной работы, получившей нобелевскую премию, является алгоритм Гейла-Шепли, при помощи которого находится стабильное распределение на некоммерческих рынках. Суть алгоритма и примеры его применения были рассмотрены в [1].

В обзоре нобелевского комитета по данной премии упоминается понятие вектора Шепли как "прочие заслуги" и является как бы второстепенным. Однако понятие "вектор Шепли" пользуется гораздо большей известностью, чем алгоритм Гейла-Шепли. Это понятие стало ключевым в прикладной математике и экономической теории и возникает в задачах справедливого распределения доходов и расходов. За исследование способов справедливого распределения ряд экономистов стал называть Ллойда Шепли "социалист" или "коммунист", что на самом деле не имеет отношения к действительности и является не более, чем навешиванием ярлыков.

Ллойда Шепли принято считать основоположником теории кооперативных игр. В отличии от некооперативных игр, в которых каждый игрок выбирает стратегию, исходя из своих эгоистических мотивов, стремится максимизировать собственный выигрыш и безразличен к выигрышам остальных игроков, в кооперативной модели игроки (или агенты) действуют сообща, стремясь максимизировать суммарный выигрыш. Конфликт же возникает на этапе дележа полученного суммарного выигрыша. Каждый

из игроков может претендовать на определенную часть общего выигрыша, аргументируя свой вклад в общие усилия при его получении.

Далее, дадим основные определения и на простых примерах рассмотрим основные понятия кооперативной теории игр. Пусть N — множество игроков, n — их количество.

Определение 1. Коалиция — подмножество множества игроков. Большая (Гранд) коалиция — это множество N всех игроков.

Для кооперативной игры задается отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, которое носит название характеристической функции игры.

Характеристическая функция V каждой коалиции ставит в соответствие совместный заработок ее членов. Характеристическая функция в принципе может быть отрицательной (распределение затрат), но чаще она неотрицательная. При этом всегда предполагается, что пустая коалиция ничего не зарабатывает и никому ничего не должна, т. е. $V(\phi) = 0$.

Пример 1. У Пети и Васи есть по одному кроссовку, а у Коли шнурки.

Один кроссовок ничего не стоит. Пара кроссовок без шнурков стоит 300 грн. Пара кроссовок со шнурками стоит 350 грн. Шнурки можно продать отдельно за 20 грн.

Тогда характеристическая функция имеет вид:
V(П)=V(В)=0, V(К)=20, V(П,В)=300,
V(П,К)=V(В,К)=20, V(П,В,К)=350.

Интуитивно ясно, что Пете, Васе и Коле надо объединиться, продать весь комплект и поделить деньги. Но как? Следующим ключевым понятием является *ядро игры*.

Допустим, что большая коалиция решила каким-то образом распределить $V(N)$, то есть $x_1 + x_2 + \ldots x_n \le V(N)$.

Эффективность распределения — это отсутствие потерь. Распределение называется эффективным, если распределена вся доступная сумма, т. е.

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n = V(N).$$

Стабильность — это отсутствие у игроков сепаратистских тенденций, т. е. для любой коалиции S выполняется $\sum_{i \in S} x_i \ge V(S)$.

Ядро игры — множество всех возможных эффективных и стабильных распределений.

Согласно определения, ядро — это множество точек в векторном пространстве R^n, удовлетворяющих одному равенству и нескольким неравенствам. Ядро может иметь одну точку, бесконечно много точек или быть пустым (как в задаче линейного программирования). Ядро игры может быть пусто, что иллюстрирует следующий простой пример.

1. Пример пустого ядра — игра в носки

У Пети, Васи и Коли есть по одному носку. Пару носков можно продать за 10 грн., а один носок ничего не стоит. Здесь

V(П)=V(В)=V(К)=0, V(П,В)=V(П,К)=V(В,К)=10, V(П,В,К)=10.

Ядро игры должно удовлетворять соотношениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 \geq 10,$$
$$x_1 + x_3 \geq 10,$$
$$x_2 + x_3 \geq 10,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Складывая три неравенства имеем: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$. Что противоречит равенству.

Определение 2. Вкладом игрока i в коалицию S ($i \notin S$) называется величина $V(S \cup i) - V(S)$ и обозначается $Add(i, S)$.

Зафиксируем некоторую перестановку игроков. Для данной перестановки заработком каждого игрока назовем его вклад в коалицию, состоящую из предыдущих игроков. Ясно, что заработок может зависеть от порядка игроков в перестановке.

Например при игре в продажу кроссовок при перестановке (Петя, Вася, Коля) Петя Вася и Коля зарабатывают 0, 300 и 50, а при перестановке (Коля, Вася, Петя) — Петя — 20, Вася — 0, Коля — 330.

Вектор Шепли — это вектор заработков игроков, усредненный по всем возможным $n!$ перестановкам

$$Sh(V) = \frac{1}{n!} \sum_{n_j} (add(1, \Pi_j), \ldots, add(n, \Pi_j)).$$

Таблица вычисления вектора Шепли для игры в продажу кроссовок имеет вид:

	П	В	К
(П,В,К)	0	300	50
(П,К,В)	0	300	20
(В,П,К)	300	0	50
(В,К,П)	330	0	20
(К,П,В)	0	330	20
(К,В,П)	330	0	20
$\sum$	960	960	180
Шепли	160	160	30

V(П)=V(В)=0, V(К)=20, V(П,В)=300, V(П,К)=V(В,К)=20, V(П,В,К)=350.

При исследовании свойств ядра возникают такие вопросы.

При каких условиях ядро не пусто?

Когда вектор Шепли принадлежит ядру?

Какие свойства вектора Шепли?

Пусть каждой коалиции S ставится в соответствие число $\lambda_S \in [0;1]$, которое называется весом коалиции.

Характеристическим вектором коалиции e^S называется вектор $\vec{x}$ с n компонентами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i = \chi(i \in S)$ — индикатор принадлежности множеству S. Например, $N = \{1;2;3\}$, $e^{(1;3)} = (1;0;1)$, тогда $e^N = (1, \ldots 1)$ — характеристический вектор большой коалиции, состоящий из n единиц.

Определение 3. Набор весов называется $\lambda_S \geq 0$ сбалансированным, если $\sum_S \lambda_S e^S = e^N$.

Например,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/2, \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1/8, \lambda_{123} = 1/4$$

— сбалансованный набор весов, поскольку

$$\frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{8}(1,1,0) + \frac{1}{8}(1,0,1) +$$

$$+\frac{1}{8}(0,1,1) + \frac{1}{4}(1,1,1) = (1,1,1).$$

Критерий существования ядра был получен независимо в 1963 г. О.Бондаревой и в 1966 г. Л.Шепли и получил название теоремы Бондаревой.

Теорема Бондаревой (Бондарева, 1963; Шепли, 1966, [2],[3])

Ядро игры не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного набора весов справедливо неравенство

$$\sum_S \lambda_s V(s) \leq V(N).$$

Следует заметить, что данная теорема является следствием первой теоремы двойственности (для задач линейного программирования): если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача имеет решение, причем значения целевых функций совпадают.

Условие теоремы Бондаревой часто бывает трудно проверить, поскольку невозможно перебрать все возможные сбалансированные наборы весов. Чаще оно бывает полезно для доказательства того, что ядро пусто, поскольку в этом случае просто достаточно построить контрпример.

Более удобными для проверки являются достаточные условия существования ядра.

Определение 4. Игра называется супермодулярной (выпуклой), если для любых коалиций S, T выполнено условие

$$V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T)$$

Определение 5. Игра имеет эффект снежного кома (snowball effect), если справедливо:

$$V(K \cup i) - V(K) \geq V(L \cup i) - V(L).$$

"Эффект снежного кома" означает, что если одна коалиция включает другую, то вклад игрока в такую коалицию будет не меньше. Данная ситуация соответствует образному сравнению, что к большему снежному кому снег прилипает лучше, чем к меньшему.

Оказывается, что условия супермодулярности и снежного кома равносильны и являются достаточными условиями существования ядра.

Для сбалансированной и нормированной игры трех лиц, т. е.

$$V(1) = V(2) = V(3) = 0,\ V(1,2,3) = 1,$$

условие Теоремы Бондаревой имеет вид:

$$\lambda_{12}V(1,2) + \lambda_{13}V(1,3) + \lambda_{23}V(2,3) + \lambda_{123} \leq 1,$$

что равносильно неравенству $V(1,2) + V(1,3) + V(2,3) \leq 2$ (*), а эффект снежного кома эквивалентен системе неравентств

$$\begin{cases} V(1,2) + V(1,3) \leq 1 \\ V(1,2) + V(2,3) \leq 1 \quad (**) \\ V(1,3) + V(2,3) \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, (**) является подмножеством (*).

Теорема 1. *Если ядро игры не пусто, то оно включает в себя вектор Шепли.*

Теорема 2. *Ядро супермодулярной игры — это многогранник с вершинами в* $(Add(1,\pi), Add(2,\pi), \ldots Add(n,\pi))$, *где* n *— все возможные перестановки. Этот многогранник имеет* $n!$ *вершин (некоторые вершины могут сливаться).*

Шепли показал, что в этом случае вектор Шепли является центром масс многогранника.

Проиллюстрируем это утверждение на следующем примере. Рассмотрим кооперативную игру "распределение потока" (рис. 1). Пусть каждый игрок является владельцем одной трубы и выигрыш коалиции равен величине максимального потока из источника в сток. Очевидно, что D является "болваном". Исключаем его из рассмотрения, для остальных игроков строим ядро и вектор Шепли

$$V(A) = V(B) = V(C) = 0,$$

$$V(A,B) = 2,\ V(A,C) = 4,\ V(B,C) = 0,\ V(A,B,C) = 6.$$

Ядро игры и его проекция на плоскость $(x1, x2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 6, &\quad x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 2, &\quad x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_3 \geq 4, &\quad x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, &\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

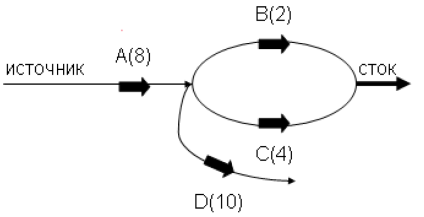


Рис. 1

Здесь ABC сливается с ACB, а BCA с CBA. В результате ядро представляет собой паралелограмм вершинами $(2, 0, 4)$, $(0, 2, 4)$, $(4, 2, 0)$, $(6, 0, 0)$, а вектор Шепли $(3, 1, 2)$ является центром параллелограмма. Проекция ядра на плоскость изображена на рис. 2.

Таблица вычисления вектора Шепли имеет вид:

	П	В	К
ABC	0	2	4
ACB	0	2	4
BAC	2	0	4
BCA	6	0	0
CAB	4	2	0
CBA)	6	0	0
$\sum$	18	16	12
Шепли	3	1	2

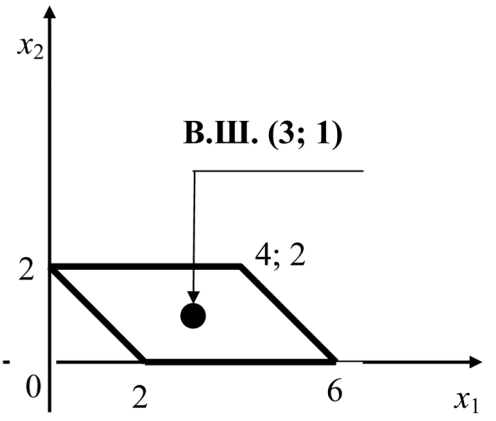


Рис. 2

2. Свойства вектора Шепли

Определение 6. Игрок называется болваном (dummy), ели его вклад в любую коалицию равен нулю.

1. Вектор Шепли эффективен (т. е. сума його компонент равна $V(N)$).

2.Линейность:

а) пусть $V : (2^N - 1) \to R$, $W : (2^N - 1) \to R$ — две разные игры, заданные на одном множестве игроков;

б) пусть игре V отвечает вектор $\vec{x}_V$, игре W — вектор $\vec{x}_W$.

Тогда игре $(V + W)$ отвечает вектор $\vec{x}_V + \vec{x}_W$.

Игре $\alpha\vec{V}$ отвечает вектор $\alpha\vec{x}_V$.

3.Справедливость:

а) симметричность — одинаковые игроки имеют одинаковые компоненты в векторе Шепли;

б) монотонность — если игрок начинает вносить больший вклад в любую коалицию, то это приводит к увеличению его компоненты в векторе Шепли;

в) болваны получают ноль.

Теорема 3. *Единственным распределением, удовлетворяющим условиям эффективности, линейности, симметричности и "болваны получают ноль" является вектор Шепли.*

3. Вычисление вектора Шепли для игры с затратами

Оказывается, что игры с затратами (т. е. с отрицательными значениями характерис тической функции) можно путем эквивалентных преобразований свести к игре с неотрицательной характеристической функцией, положив

$$U(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V(i),$$

тогда значение характеристической функции для любой коалиции, состоящей из одного игрока, по определению равно нулю.

Процедура приведения является аналогом аффинного преобразования в алгебре. При этом форма ядра не меняется, происходит только его параллельный перенос в векторном пространстве. Все свойства игры при приведении не меняются, подобно тому, как не меняются точки экстремума при добавлении к функции константы.

Для приведенной игры трех игроков формула вычисления компонент вектора Шепли имеет простой вид (похожий на формулу Симпсона):

$$Sh(A) = \frac{1}{6}\left(V(A,B) + V(A,C) + 2V(A,B,C) - 2V(B,C)\right).$$

Компоненты вектора для других игроков считаются циклической перестановкой.

В 1984 году Aumann и Masher ([4]) дали экономическую интерпретацию задачи о банкротстве на основе текстов Талмуда.

Спор двух человек из-за имущества. Пусть два человека претендует на имущество (200 у.е.). Первый претендует на все (200), а второй только на половину (100). Раввин признал претензии обоих правомерными. Как разделить имущество?

Талмуд приписывает отдать 3/4 (т. е. 150) первому претенденту и 1/4 (т. е. 50) второму, руководствуясь принципом уступок (здесь неявно присутствует общая формула дележа).

Пусть первый претендент забирает все — значит он не уступает второму ничего.

Пусть второй претендент забирает половину, значит он уступает первому половину (100).

Каждый из общей суммы получает уступку (100 и 0), а остаток делится поровну (50 и 50). Оказывается, что рассмотренный принцип дележа для двух претендентов полностью совпадает с принципом, основанном на векторе Шепли. Пусть претензии заявляются поочередно и удовлетворяются полностью (если остаточной суммы достаточно) или частично (если остаточной суммы недостаточно, выдается вся доступная сумма). Согласно принципу построения вектора Шепли, следует найти значения выплат, усредненных по всем возможным перестановкам порядка заявления претензий.

A претендует на 200, B на 100. Доступно 200. Таким образом, A получает 150, B получает 50 (рис. 3).

На графике (рис. 3) показаны суммы, выплачиваемые претендентам, заявив претензии на 200 и 100 единиц соответственно. По оси абсцисс отложена доступная для дележа сумма (резервный фонд). Интересно, что на начальном этапе графики сливаются, т. е. при небольшом значении (до 100) резервный фонд делится между претендентами поровну.

	A	B
(A,B)	200	0
(B,A)	100	100
Сумма	300	100
Среднее	**150**	**50**

Для случая трех претендентов возможные варианты раздела в талмуде носят рекомендательный характер, без аргументации механизма раздела.

4. Раздел имущества между тремя женами

У человека было три жены. Их наследство в брачном контракте было оговорено в количестве 100, 200 и 300 у. е. соответственно. После смерти мужа оказалось, что наличной суммы недостаточно, чтобы выплатить наследство всем женам. Талмуд предлагает три варианта дележа в случаях, когда наличная сумма составляет 100, 200 и 300 у. е. Оказалось, что в двух случаях из трех дележ соответствовал вектору Шепли.

	A(100)	B(200)	C(300)
100, совпадает	33.33	33.33	33.33
200, Т/Ш	50/33.33	100/80.33	150/80.33
300, совпадает	150	100	50

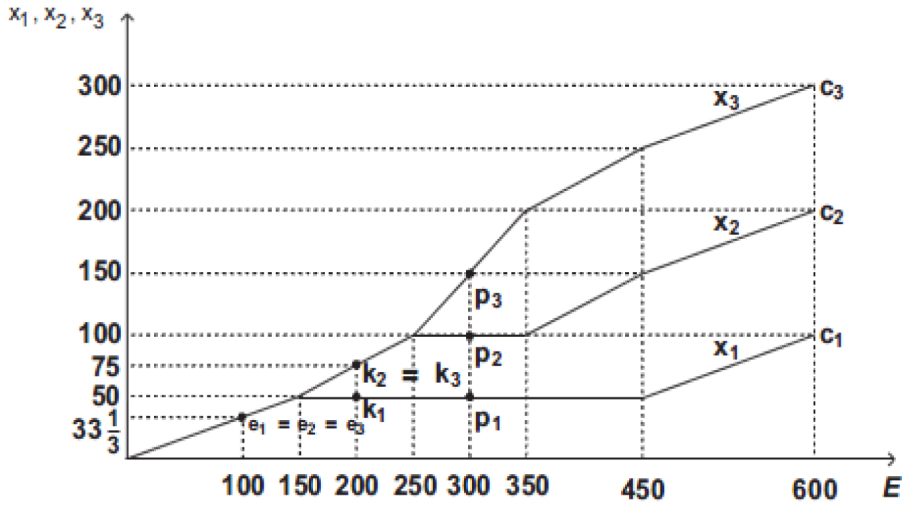


Рис. 3

Данная задача в настоящее время является актуальной при разделе имущества субъекта, признанного банкротом между кредиторами. При расчетах приняты различные механизмы, которые могут отличаться от механизма Шепли, однако они подобны ему по сути и графики выплат претендентам также имеют кусочно-линейный вид.

5. Вектор Шепли и справедливое распределение на рынке труда

Классическая задача о назначениях формулируется следующим образом. Пусть имеется n работников и n работ и пусть задана матрица эффективностей, элемент C_{ij} которой равен эффективности от использования i-го работника на j-й работе. Пусть каждый работник получает зарплату, пропорциональную эффективности выполняемой работы, на которую он назначен.

Оказывается, что в таком случае, при достижении максимальной эффективности не всегда соблюдается справедливость ([5]). Рассмотрим простой пример. Пусть имеется два работника (A и B) и две работы (1 и 2).

		Работы
		1 2
Работники	A	6^* 2
	B	7 5^*

Очевидно, что назначение A на 1-ю работу, а B на 2-ю дает суммарную эффективность $6 + 5 = 11$, что превосходит $7 + 2 = 9$ (см. рис 4). Таким образом 1-й работник получает 6, а 2-й 5. Хотя B безусловно лучше A (поскольку он выполняет лучше обе работы), он получает меньше.

Рассмотрим другой пример.

		Работы
		1 2 3
Работники	A B C	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5^* \\ 10^* & 8 & 3 \\ 4 & 6^* & 2 \end{pmatrix}$

Оптимальное решение — назначить A на 3-ю, B на 1-ю, C на 2-ю работу. При этом суммарный заработок равен $5+10+6 = 21$. При таком совокупно оптимальном назначении возникают такие несправедливости:

1) B и C в выигрыше, они назначены на лучшие свои работы, а A в проигрыше, он назначен на худшую свою работу

2) A лучше C но зарабатывает меньше ($5 < 6$).

Применим теорию Шепли для нахождения механизма перераспределения.

Пусть коалиция состоит из k работников. Выделим из n работ подмножество из k работ и решим задачу о назначениях $k \times k$.

Под выигрышем коалиции, состоящей из данных k работников, будем понимать значение максимума задачи о назначениях $k \times k$, усредненное по всем C_n^k возможным вариантам выбора k работ из n.

$$V(A) = \frac{9+7+5}{3} = 7;\ V(B) = \frac{10+8+3}{3} = 7;\ V(C) = \frac{4+6+2}{3} = 4;$$

$$V(A,B) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 5^* \\ 10^* & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5^* \\ 8^* & 3 \end{pmatrix} \sim \frac{17+15+13}{3} = 1.5$$

Аналогично

$$V(A,C) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{15+11+11}{3} = 12\frac{1}{2},$$

$$V(B,C) \sim \begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{16+12+10}{3} = 12\frac{2}{3},$$

$V(A,B,C) = 21$ (эта задача была решена раньше).

Строим таблицу и вычисляем вектор Шепли

	A	B	C
A, B, C	7	8	6
A, C, B	7	5 1/3	8 2/3
B, A, C	8	7	6
B, C, A	8 1/3	7	5 2/3
C, A, B	8 1/3	8 2/3	4
C, B, A	8 1/3	8 2/3	4
$\sum$	47	44 2/3	34 1/3
Шепли	7.83	7.45	5.72
Номинальная выплата	5	10	6
Дотация (налог)	+2.83	-2.55	-0.28

Несколько иным образом решается задача о назначениях с изначальным предписанием работ (задача обмена машинами). Напомним, что в алгоритме Гейла-Шепли рассматривалось две модификации обмена домами — для случая, когда жильцы имеют право владения домами или не имеют его).

Пусть, согласно некоторого предписания, каждый работник назначен на работу и при этом не достигается суммарная эффективность. В этом случае будем считать, что работа, на которую он назначен, принадлежит ему по праву собственности. Тогда, очевидно, каждый из работников согласен сменить работу, если его новая зарплата плюс компенсация будет большей, чем старая. В этом случае под заработком коалиции из k работников будем понимать оптимальное значение решения задачи о назначениях $k \times k$ для данных k работников и объединенного множества (их) работ (каждый работник приносит в коалицию свою работу).

В этом случае

$$V(A) = 9, V(B) = 8, V(C) = 2,$$

$$V(A,B) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix} \sim 17,$$

$$V(A,C) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 5 \\ 4 & 2^* \end{pmatrix} \sim 11,$$

$$V(B,C) \sim \begin{pmatrix} 8^* & 3 \\ 6 & 2^* \end{pmatrix} \sim 10,$$

$$V(A,B,C) = 21.$$

И расчетная таблица вектора Шепли имеет вид:

	A	B	C
A, B, C	9	8	4
A, C, B	9	10	2
B, A, C	9	8	4
B, C, A	11	8	2
C, A, B	9	10	2
C, B, A	9	10	2
$\sum$	56	54	16
Шепли	9 1/3	9	2 2/3
Прежний заработок	9	8	8
Дотация	+1/3	+1	+2/3

Литература

1. Доценко С. И. Математические модели стабильных размещений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 2(112) — С. 3–13.
2. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. — 1963. — Т. 10. — С. 119–140.
3. Shapley, L. S. On balanced sets and cores // Naval Research Logistics Quarterly. — 1967. — V. 14. — P. 453–460.
4. Aumann R., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // Journal of economic theory. — 1985. — V. 36. — P. 195–213.
5. Sanchez-Sanchez F. A salary system for the assignment problem //Economics Bulletin.- 2004. — V. 3, № 5. — P. 1–9.
6. Roth A., Shapley L. Scientific background. Stable allocations and the practice of market design // Advanced information on Nobel prize in economics. — http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 10.11.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МАКСИМАЛЬНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Н. И. Ляшко, В. В. Семенов, Л. М. Чабак

Резюме. В работе для решения вариационных неравенств с многозначными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложен алгоритм расщепления без вычисления резольвент. Доказана теорема о слабой эргодической сходимости алгоритма.

Ключевые слова: максимальный монотонный оператор, вариационные неравенства, алгоритм расщепления, среднее по Чезаро, слабая сходимость.

1. Введение

Задачи ряда прикладных математических дисциплин могут быть записаны в форме вариационных неравенств, численное решение которых является ареной интенсивных исследований [1–11]. Важное значение имеют различные схемы расщепления, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры [12–18]. Одной из актуальных проблем, связанных с необходимостью привлечения идей расщепления (декомпозиции), является эффективное решение сетевых задач выделения ресурсов (Network Resource Allocation) [19].

Популярные сейчас алгоритмы расщепления для вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C: \ \exists u \in \sum_i A_i x \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C$$

используют на каждом шаге резольвенты многозначных операторов [1, 12–19]. Явный шаг в алгоритмах цитируемых работ используется только для однозначных операторов-слагаемых. Эти методы обладают достаточным запасом устойчивости, однако вычисление резольвенты часто требует высоких вычислительных затрат.

В алгоритмике выпуклой оптимизации для задач вида

$$f_1 + f_2 + ... + f_n \to \min_C$$

в последнее время появилась серия субградиентых алгоритмов расщепления явного характера [20, 21]. В работе [22] однин из этих алгоритмов перенесен на случай вариационных неравенств. Также в [22] (замечание 2 цитируемой статьи) описан без обоснования метод, обобщающий известный в оптимизации "incremental subgradient method" [20]. В настоящей работе мы,

опираясь на технику [23–27], обосновываем упомянутый явный алгоритм расщепления для решения вариационных неравенств с многозначными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. А именно, доказываем теорему о слабой эргодической сходимости алгоритма.

2. Постановка задачи

Введем обозначения и сформулируем задачу. Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим символом P_K оператор метрической проекции пространства H на замкнутое выпуклое множество $K \subseteq H$.

Напомним некоторые понятия [1, 2]. Пусть $A : H \to 2^H$ — оператор с графиком $\mathrm{gr}(A) = \{(x,u) : \ y \in Ax\}$.

Определение 1. Оператор $A : H \to 2^H$ называют монотонным, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u-v, x-y) \geq 0.$$

Определение 2. Оператор $A : H \to 2^H$ называют сильно монотонным с константой $\mu > 0$, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u-v, x-y) \geq \mu \|x-y\|^2 .$$

Определение 3. Оператор $A : H \to 2^H$ называют максимальным монотонным, если для любого монотонного оператора $B : H \to 2^H$ из соотношения $\mathrm{gr}(A) \subseteq \mathrm{gr}(B)$ следует $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$.

Пусть:

- $A_i : H \to 2^H$ — монотонный оператор, $i = \overline{1,p}$;
- $A = \sum_{i=1}^{p} A_i$ — максимальный монотонный оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{dom}(A_i)$ — замкнутое выпуклое множество.

Вариационное неравенство с оператором A на множестве C формулируется следующим образом:

$$\text{найти } x \in C : \ \exists u \in Ax \ \text{ и } \ (u, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим $VI(A,C)$. Важным фактом о структуре множества решений вариационного неравенства является следующая

Лемма 1. *Если оператор $A : H \to 2^H$ — максимальный монотонный, то*

$$VI(A,C) = \{x \in C : \ (v, y-x) \geq 0 \ \ \forall y \in C \ \forall v \in Ay\} .$$

В частности, множество $VI(A,C)$ выпуклое и замкнутое.

Цель данной работы состоит в исследовании явного алгоритма расщепления для решения вариационного неравенства (1), обобщающего известный в выпуклой оптимизации "incremental subgradient method" [20]. Под

явным мы понимаем алгоритм не содержащий операций вычисления резольвент операторов $A_i + N_C$, где N_C — нормальный конус множества C в точке-аргументе, то есть

$$N_C x = \begin{cases} \{w \in H : \ (w, y - x) \leq 0\}, & x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Алгоритм расщепления

Опишем алгоритм расщепления для вариационного неравенства (1).

Зафиксируем последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяющую условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \tag{2}$$

Алгоритм 1 ([22])**.**

1) *Задаем* $x_1 \in C$; $n := 1$.
2) *Начиная с* $y_{(n,0)} = x_n$ *последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C \left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)} \right), \ \ u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \ \ i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Покажем, что если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то $x_n \in VI(A,C)$. Действительно, пусть $x_n = y_{(n,1)} = P_C \left(x_n - \lambda_n u_{(n,1)} \right)$. Тогда

$$\left(x_n - \left(x_n - \lambda_n u_{(n,1)} \right), y - x_n \right) = \lambda_n \left(u_{(n,1)}, y - x_n \right) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$\left(u_{(n,1)}, y - x_n \right) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Аналогично получаем для всех $i = \overline{2,p}$

$$\left(u_{(n,i)}, y - x_n \right) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$\left(u_n, y - x_n \right) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{(n,i)} \in \sum_{i=1}^{p} A_i x_n = A x_n.$$

То есть $x_n \in VI(A,C)$.

Далее рассматриваем ситуацию, когда алгоритм 1 порождает бесконечную последовательность. Даже в случае $p = 1$, когда алгоритм 1 совпадает с классическим "субградиентным методом", на таком уровне общности не приходиться ожидать сходимости последовательности (x_n). Нашей

основной целью является доказательство слабой сходимости в H последовательности чезаровских средних

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$

Результаты такого типа традиционно называют теоремами чезаровской или эргодической сходимости [23–25].

Сделаем относительно операторов A_i следующее предположение:

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i y_{(n,i-1)} \text{ равномерно ограничены.} \tag{3}$$

Замечание 1. Предположение (3) — аналог использованного в [20, 21] "subgradient boundedness assumption".

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 2 ([2])**.** *Пусть неотрицательные последовательности (a_n), (b_n) таковы, что $a_{n+1} \le a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.*

Лемма 3 ([25])**.** *Пусть H — гильбертово пространство; $F \subseteq H$ — непустое множество; (x_n) — последовательность элементов H и*

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k},$$

где (λ_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности (z_{n_k}) лежит в F; 2) для произвольного $y \in F$ существует $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $z \in F$.

4. Основные оценки

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства двух важных оценок для последовательностй (x_n) и (z_n).

Лемма 4. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и элемента $y \in C$ выполняется неравенство*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \le \|x_n - y\|^2 - 2\lambda_n (v, x_n - y) + \\ + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^{p} \|v_i\| \sum_{k=1}^{i} \left\|u_{(n,k)}\right\|, \tag{4}$$

где $v = \sum_{i=1}^{p} v_i$, $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1,p}$.

Доказательство. Для $y \in C$ и x_{n+1} имеем

$$\|x_{n+1}-y\|^2 = \\ = \left\|P_C\left(y_{(n,p-1)}-\lambda_n u_{(n,p)}\right)-y\right\|^2 \le \left\|y_{(n,p-1)}-\lambda_n u_{(n,p)}-y\right\|^2 = \\ = \left\|y_{(n,p-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,p)}\right\|^2-2\lambda_n\left(u_{(n,p)},y_{(n,p-1)}-y\right).$$

Возьмем $v_p \in A_p y$. Благодаря монотонности оператора A_p, получаем

$$\left(u_{(n,p)},y_{(n,p-1)}-y\right) \ge \left(v_p,y_{(n,p-1)}-y\right).$$

Следовательно

$$\|x_{n+1}-y\|^2 \le \left\|y_{(n,p-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,p)}\right\|^2-2\lambda_n\left(v_p,y_{(n,p-1)}-y\right). \quad (5)$$

Аналогично получаем неравенства

$$\left\|y_{(n,i)}-y\right\|^2 \le \left\|y_{(n,i-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-2\lambda_n\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right), \quad (6)$$

где $v_i \in A_i y$, $i=\overline{1,p-1}$. Учитывая (6) в (5), получаем

$$\|x_{n+1}-y\|^2 \le \|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-2\lambda_n\sum_{i=1}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right).$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right)=(v,x_n-y)+\sum_{i=2}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-x_n\right),$$

где $v=\sum_{i=1}^{p}v_i \in \sum_{i=1}^{p}A_i y = Ay$. Поскольку

$$\left|\left(v_i,y_{(n,i-1)}-x_n\right)\right| \le \|v_i\|\|y_{(n,i-1)}-x_n\| \le \|v_i\|\lambda_n\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|,$$

то

$$\|x_{n+1}-y\|^2 \le \|x_n-y\|^2-2\lambda_n(v,x_n-y)+ \\ +\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n), последовательности средних (z_n) и элемента $y \in C$ выполняется неравенство*

$$\frac{\|x_{m+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n} \le 2(v,y-z_m)+ \\ +\frac{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n}+\frac{2\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n}, \quad (7)$$

где $v=\sum_{i=1}^{p}v_i$, $v_i \in A_i y$, $i=\overline{1,p}$.

Доказательство. Запишем неравенство леммы 4 в виде

$$\|x_{n+1}-y\|^2-\|x_n-y\|^2\le 2\,(v,\lambda_n y-\lambda_n x_n)+ \\ +\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|. \quad (8)$$

Суммируя (8) по n от 1 до $m\in\mathbb{N}$, получаем

$$\|x_{m+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2\le 2\left(v,\sum_{n=1}^{m}\lambda_n y-\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n\right)+ \\ +\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|. \quad (9)$$

Поделив (9) на $\sum_{n=1}^{m}\lambda_n$, приходим к неравенству (7). □

5. Эргодическая сходимость алгоритма

Предположим, что $VI(A,C)\neq\emptyset$. Имеет место

Лемма 6. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Тогда для произвольного элемента $y\in VI(A,C)$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|$. В частности, последовательность (x_n) ограничена.*

Доказательство. Воспользуемся леммами 2 и 4. В неравенстве (4) предположим, что $y\in VI(A,C)$. Пусть $v_i\in A_i y$, $i=\overline{1,p}$. Получим

$$\|x_{n+1}-y\|^2\le\|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|, \quad (10)$$

поскольку $(v,x_n-y)\ge 0$, $v=\sum_{i=1}^{p}v_i\in Ay$.

Из неравенства (10), предположения (3) и условия $(\lambda_n)\in\ell_2$ следует существование предела $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|\in\mathbb{R}$. □

Ограниченность последовательности (x_n) влечет ограниченность последовательности средних (z_n). А из леммы 5 следует

Лемма 7. *Все слабые частичные пределы последовательности средних (z_n) принадлежат множеству $VI(A,C)$.*

Доказательство. Рассмотрим слабо сходящуюся подпоследовательность (z_{n_l}) последовательности (z_n). Пусть $z\in H$ — слабый предел (z_{n_l}). Ясно, что z принадлежит множеству C. Записав неравенство (7) для элементов z_{n_l}, после предельного перехода при $l\to\infty$, получим

$$(v,y-z)\ge 0\quad\forall y\in C\ \forall v\in Ay,$$

что в силу леммы 1 равносильно включению $z\in VI(A,C)$. □

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $VI(A,C) \neq \emptyset$, *то последовательность средних по Чезаро* (z_n) *слабо сходится к некоторому элементу* $x \in VI(A,C)$;
2) *если* $VI(A,C) = \emptyset$, *то* $\|z_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае $VI(A,C) \neq \emptyset$ для сгенерированной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и для множества $F = VI(A,C)$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x \in VI(A,C)$.

Предположим, что $VI(A,C) = \emptyset$. Тогда $\|z_n\| \to +\infty$. Действительно, иначе последовательность (z_n) имеет слабую предельную точку z, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $VI(A,C)$. □

6. Заключительные замечания

Включив операцию усреднения в схему вычислений, получаем следующий явный алгоритм расщепления.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Полагаем* $y_{(n,0)} = x_n$ *и последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \quad u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \quad i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Если $VI(A,C) \neq \emptyset$, то последовательность (z_n), порожденная этим алгоритмом, слабо сходится к некоторому элементу $x \in VI(A,C)$, иначе $\|z_n\| \to +\infty$.

Интересной и актуальной задачей является построение и обоснование схем расщепления для вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in \bigcap_k F(T_k): \ \exists u \in \sum_i A_i x \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \bigcap_k F(T_k), \quad (11)$$

где $F(T_k)$ — множество неподвижных точек (квази)нерастягивающего оператора T_k. В случае $A_i \equiv 0$ задача (11) переходит в классическую задачу поиска элемента множества $\bigcap_k F(T_k)$ — общей неподвижной точки операторов T_k (common fixed point problem), имеющую богатую алгоритмику [1].

Литература

1. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + XVI p.
2. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
3. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — XXXIII + 666 p.
4. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47, № 4. — P. 631–639.
5. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
6. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
7. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
8. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — P. 1–10. — DOI 10.1007/s10898–014–0150–x.
9. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, № 2. — P. 271–277.
10. Семенов В. В., Чабак Л. М. Новий варіант регуляризації методів екстрагрдієнтного типу // Доповіді НАН України. — 2014. — №10. — С. 45–50.
11. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, V. 211, Springer International Publishing Switzerland. — 2014. — P. 131–146.
12. Lions P. L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — V. 16, № 6. — P. 964–979.
13. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
14. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
15. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 40–48.
16. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.
17. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46, № 5. — P. 45–56.

18. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, № 5. — P. 741–749.
19. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — V. 151. — P. 525–540.
20. Nedic A., Bertsekas D. P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12, № 1. — P. 109–138.
21. Bertsekas D. P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization // Math. Program., Ser. B. — 2011. — V. 129. — P. 163–195.
22. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
23. Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — V. 61. — P. 159–164.
24. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Чезаровская сходимость градиентного метода аппроксимации седловых точек выпукло-вогнутых функций // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 239, вып. 5. — С. 1056–1059.
25. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — V. 72. — P. 383–390.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
27. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 155–160.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, ул. Фрунзе, 9, Киев, 04071, Украина, e-mail: lyu_bov1@mail.ru

Поступила 10.09.2014

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2014, №3(117)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

О РЕШЕНИИ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ

П. И. Стецюк, В. И. Ляшко, С. И. Яремчук

Резюме. Исследуется эффективность программы gurobi для решения задачи линейного программирования с булевыми переменными, соответствующей минимаксной задаче размещения источников физического поля. Определяются количества точек измерения поля и мест размещения источников, при которых можно найти решение задачи за несколько часов. Для релаксированной задачи оценивается время решения с помощью gurobi, а также построены две равносильные задачи негладкой оптимизации.
Ключевые слова: минимаксная задача размещения, ЛП-задача с булевыми переменными, релаксированная задача (ЛП-задача), gurobi.

Введение

При проектировании систем, качество работы которых зависит от физических полей, генерируемых компонентами системы (поля могут быть тепловыми, диффузионными и др.), возникает следующая задача. В заданной области требуется разместить источники полей на фиксированные места так, чтобы максимальное из значений поля в заданных точках области было наименьшим. Если соответствующее физическое поле описывается линейной краевой задачей, то математическая модель этой задачи оптимизации может быть представлена таким образом[1, 2]:

$$f(x) = \max_{k\in[1:K]} f_k(x) \to \min, \tag{1}$$

где

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}, \quad k \in [1:K], \tag{2}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N], \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N]. \tag{4}$$

Здесь булевая переменная

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й источник размещается на } j\text{-ом месте,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й источник не размещается на } j\text{-ом месте,} \end{cases} \tag{5}$$

$i, j \in [1 : N]$, где N — количество мест размещения источников; K — количество точек измерения значения поля; c_{ij}^k — вклад i-го источника при назначении его на j-ое место ($i \in [1 : N]$, $j \in [1 : N]$) в значение поля в k-ой точке измерения ($k \in [1 : K]$).

Предполагается, что K — небольшое по сравнению с N. Если $N > 60$, то задача (1)–(5) является задачей больших размеров [1]. Цель статьи — найти такие параметры N и K, при которых за несколько часов можно получить решение задачи (1)–(5) с помощью программы gurobi [3], которая считается одной из наилучших для решения задач линейного и целочисленного программирования. Задача (1)–(5) сводится к задаче линейного программирования (ЛП-задача) с булевыми переменными. Для генерации c_{ii}^k используются равномерно распределенные на интервале $[-100, 100]$ случайные числа, которые содержат две значащих десятичных цифры после точки. Такая модель рассчитана на наихудший случай представления физического поля, где соседние компоненты c_{ij}^k для одного и того же k могут сильно отличаться друг от друга.

Последовательность изложения материала следующая. В разделе 1 приведена ЛП-задача с булевыми переменными и описаны два тестовых эксперимента. Первый эксперимент связан с оценкой N при $K = 20$, а второй эксперимент — с оценкой K при $N = 100$. В разделе 2 описан тестовый эксперимент для оценки времени решения нецелочисленной ЛП-задачи при $N = 100$ и $N = 200$, что позволяет определить потенциальные границы использования симплекс-метода и метода внутренних точек в схемах ветвей и границ для решения ЛП-задачи с булевыми переменными. Для всех трех тестовых экспериментов даны коды на языке моделирования AMPL [4]. В третьем разделе приведены две задачи негладкой оптимизации для нахождения оптимального значения целевой функции в ЛП-задаче.

1. ЛП-задача с булевыми переменными и программа gurobi

Задачу (1)–(5) можно сформулировать в форме ЛП-задачи с булевыми переменными [1]. Она имеет следующий вид:

$$z \to \min \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} \le z, \quad k = [1 : K], \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1 : N], \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N], \tag{9}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in [1:N],\ j \in [1:N]. \tag{10}$$

Для решения задачи (6)–(10) можно использовать программу gurobi. Ниже дан код на языке AMPL, где gurobi установлена в качестве солвера для двух задач: BLP — задача (6)–(10) и LP — релаксированная BLP, полученная ослаблением булевых переменных в задаче (6)–(10). Последняя будет рассмотрена в разделе 2.

```
# section 1: parameters and variables
param Table1{i in 1..10, j in 1..5};
param N := 17; param K:=20; param irun default 0;
param c{k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N};
var x {i in 1..N, j in 1..N} binary; var z;
var y {i in 1..N, j in 1..N} >=0;
# section 2: objective and constraints
minimize obj: z;
subject to con7x {k in 1..K}:
   sum {i in 1..N, j in 1..N} c[k,i,j]*x[i,j] <= z;
subject to con8x {j in 1..N}: sum {i in 1..N} x[i,j] = 1;
subject to con9x {i in 1..N}: sum {j in 1..N} x[i,j] = 1;
subject to con7y {k in 1..K}:
   sum {i in 1..N, j in 1..N} c[k,i,j]*y[i,j] <= z;
subject to con8y {j in 1..N}: sum {i in 1..N} y[i,j] = 1;
subject to con9y {i in 1..N}: sum {j in 1..N} y[i,j] = 1;
# section 3: solver, BLP and LP problem
option solver gurobi;
problem BLP: obj,x,z,con7x,con8x,con9x;
problem LP: obj,y,z,con7y,con8y,con9y;
# section 4: 10 tests and Table1
repeat {
  let irun:=irun+1;
  for {k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N}{
     let c[k,i,j] := round(Uniform(-1,1)*10000.)/100.;
  }
  solve BLP; display z, _solve_time;
  let Table1[irun,1] := obj; let Table1[irun,2] := _solve_time;
  solve LP; display z, _solve_time;
  let Table1[irun,3] := obj; let Table1[irun,4] := _solve_time;
  let Table1[irun,5] := Table1[irun,1]-Table1[irun,3];
  let Table1[irun,5] := Table1[irun,5]/max(1,abs(Table1[irun,3]));
} while irun <= 9;
display K, N, Table1;
```

AMPL-код оформлен в виде 4-х секций. Первая секция содержит описание параметров и переменных обеих задач. Вторая секция описывает

целевую функцию и ограничения задач. Третья секция определяет солвер, формирует BLP и LP задачи. Четвертая секция генерирует величины c_{ij}^k, осуществляет вычисления для десяти тестовых примеров и готовит выходную таблицу Table1.

Значения c_{ij}^k для $i, j \in N$ и $k \in K$ генерируется с помощью AMPL-функций *Uniform* и *round*. Значение c_{ij}^k равно *round(Uniform(-1,1)*10000.)/100.*, т. е. случайному числу в интервале $[-100, 100]$ с точностью до двух значащих десятичных цифр после точки. Цикл по индексам i, j и k построен таким образом, чтобы обеспечить равномерно распределенные случайные величины для каждой k-ой точки измерения поля, $k \in K$.

Таблица Table1 формируется следующим образом. Ее строки соответствуют десяти различным расчетам. Столбцы 1 и 2 содержат оптимальное значение целевой функции и полное время решения (в секундах) для задачи BLP. Столбцы 3 и 4 содержат такие же величины, но для задачи LP. Столбец 5 содержит относительный разрыв между оптимальными значениями целевых функций BLP и LP задач. Он вычисляется как отношение их разности к модулю оптимального значения целевой функции задачи LP.

Результаты работы этого кода под студенческой версией AMPL, которая включает программу gurobi версии 2.0.1, представлены в таблице:

```
Gurobi 2.0.1: K = 20, N = 17, Table1 [*,*]
        1         2          3          4          5
1    -132.69    509.609   -245.13    0.015625   0.458696
2    -152.11   1306.53    -274.662   0.015625   0.446193
3    -176.66    538.016   -289.772   0.015625   0.390349
4    -181.92    214.875   -284.107   0.015625   0.359678
5    -199.31    529.438   -313.041   0.015625   0.36331
6    -188.68    465.891   -291.875   0.015625   0.353558
7    -190.57   1671.81    -302.283   0          0.369564
8    -201.22    158.516   -307.906   0.015625   0.346488
9    -197.96    230.672   -310.64    0.015625   0.362736
10   -203.97    279.328   -314.035   0.015625   0.350486
```

Здесь $K = 20$ и $N = 17$ выбраны из следующих соображений. Если $N = 17$, то BLP и LP задачи содержат 290 переменных, из них $289 = 17 \times 17$ переменных x_{ij} и одна переменная z. Студенческая версия AMPL поддерживает решение задач математического программирования до 300 переменных. $K = 20$ выбрано из соображений приемлимого времени для решения BLP задачи. Вычисления проводились на компьютере Pentium E5200/2.5GHz/4 GB в среде Windows Server.

Из таблицы видим, что время решения тестовых BLP задач составляет от чуть меньше трех минут (восьмая задача) до немногим более 30 минут (седьмая задача). При этом LP задачи решаются почти мгновенно, т. е. за сотые доли секунды. Это обьясняется очень большим количеством симплексных итераций и обусловлено тем, что относительный разрыв между целевыми функциями BLP и LP задач составляет не менее тридцати процентов, а для первой и второй задач — больше 40 процентов. Так, например,

для второй BLP задачи программа Gurobi 2.0.1 нашла оптимальное решение (objective −152.11) за 16.881.239 симплексных итераций при 1.699.284 вершинах ветвления. При этом оптимальное решение LP задачи (objective −274.662447) было найдено всего за 160 симплексных итераций.

Второй эксперимент для программы gurobi состоял в проверке того, для каких K можно решить BLP задачу при $N = 100$ за приемлемое время. Ему соответствует такой код на языке AMPL.

```
# section 1: parameters and variables
param Table2{i in 1..10, j in 1..7};
param N := 100; param K default 1; param irun default 0;
param c{k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N};
var x {i in 1..N, j in 1..N} binary; var z;  #
var y {i in 1..N, j in 1..N} >=0;
#  section 2: objective and constraints
minimize obj: z;
subject to con7x {k in 1..K}:
   sum {i in 1..N, j in 1..N} c[k,i,j]*x[i,j] <= z;
subject to con8x {j in 1..N}: sum {i in 1..N} x[i,j] = 1;
subject to con9x {i in 1..N}: sum {j in 1..N} x[i,j] = 1;
subject to con7y {k in 1..K}:
   sum {i in 1..N, j in 1..N} c[k,i,j]*y[i,j] <= z;
subject to con8y {j in 1..N}: sum {i in 1..N} y[i,j] = 1;
subject to con9y {i in 1..N}: sum {j in 1..N} y[i,j] = 1;
#  section 3: set BLP and LP problems
problem BLP: obj,x,z,con7x,con8x,con9x;
problem LP: obj,y,z,con7y,con8y,con9y;
#  section 4: 10 tests and Table2
for {ik in 5..6, ir in 1..5} {
   let irun:=irun+1; let K:=ik;
   let Table2[irun,1] := K; let Table2[irun,2] := ir;
   for {k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N}{
      let c[k,i,j] := round(Uniform(-1,1)*10000.)/100.;
   }
   solve BLP; display z, _solve_time;
   let Table2[irun,3] := obj; let Table2[irun,4] := _solve_time;
   solve LP; display z, _solve_time;
   let Table2[irun,5] := obj; let Table2[irun,6] := _solve_time;
   let Table2[irun,7] := Table2[irun,3]-Table2[irun,5];
   let Table2[irun,7] := Table2[irun,7]/max(1,abs(Table2[irun,5]));
}
display N, Table2;
```

Он оформлен по аналогии с предыдущим в виде 4-х секций. Первая и вторая секции содержат описание параметров и переменных, целевой функции

и ограничений. Третья секция определяет BLP и LP задачи, но не устанавливает тип солвера. Это означает, что код может быть использован и другими программами NEOS-солвера [5], которые поддерживают решение задач смешанного линейно-целочисленного программирования. Для них нет ограничений на количество переменных, как в студенческой версии AMPL.

Четвертая секция генерирует величины c_{ij}^k по тому же правилу, как выше, но осуществляет расчеты для пяти тестовых примеров при $K = 5$ и пяти тестовых примеров при $K = 6$. Здесь же заполняется выходная таблица Table2, аналогичная по данным Table1, но с тем отличием, что в столбцах 1 и 2 располагаются значения K и соответствующие им номера тестовых примеров. Столбцы 3–7 в таблице Table2 заполняются аналогично столбцам 1–5 таблицы Table1.

Результатом работы программы gurobi версии 5.5.0 из NEOS-солвера есть следующая таблица.

```
Gurobi 5.5.0: N = 100, Table2 [*,*]
     1   2      3          4          5          6          7
1    5   1   -5869.42    400.626   -5892.05   1.44978   0.00384047
2    5   2   -5710.5     282.692   -5734.12   0.26196   0.00412004
3    5   3   -5871.45    349.114   -5891.31   0.498923  0.00337047
4    5   4   -5767.9     409.281   -5790.15   0.384941  0.00384262
5    5   5   -5706.69    458.018   -5727.5    0.619906  0.00363362
6    6   1   -5285.61   4329.85    -5318.75   1.43478   0.00623152
7    6   2   -5260.29   5996.05    -5289.63   0.643902  0.00554717
8    6   3   -5272.42   1585.42    -5301.35   0.965853  0.00545705
9    6   4   -5334.62   2723.5     -5366.18   0.893864  0.00588089
10   6   5   -5345.87   3186.58    -5373.33   0.527919  0.00511129
```

Из нее видим, что, если $K = 6$, то время решения BLP задач составляет от 1585 до 5996 секунд, т.е максимальное время решения не превышает двух часов. При $K = 7$ решить BLP задачу за несколько часов не представляется возможным. Это легко видеть из того, что время решения при $K = 6$ приблизительно в десять раз больше, чем время решения при $K = 5$.

Следовательно, второй эксперимент показывает, что, если $N = 100$, то решать задачи (1)–(5) для наихудшего случая физического поля можно, если использовать до 6 точек измерений поля. Реальные физические поля могут поднять эту границу, но это требует дополнительного исследования.

2. ЛП-задача и программа gurobi

Если для решения задачи (6)–(10) применяется метод ветвей и границ, то для нахождения оценок требуется решать ЛП-задачу, которая получена релаксацией (ослаблением) булевых ограничений (10). ЛП-задача имеет такой вид:

$$z \to \min \tag{11}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij} \le z, \quad k \in [1:K], \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N], \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N], \tag{14}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i \in [1:N],\ j \in [1:N]. \tag{15}$$

Здесь верхние границы на переменные x_{ij} отсутствуют, так как они следуют из ограничений (13) и (14) при условии (15).

Для решения ЛП-задачи (11)–(15) могут быть использованы стандартные программы для задач линейного программирования, в том числе и программа gurobi. Поэтому третий эксперимент состоял в оценке времени решения ЛП-задач (11)–(15) для $N = 100$ и $N = 200$ с помощью gurobi. Рассматривались два времени — общее время решения и время работы процессора. Последнее является более важным, так как оно адекватнее отражает многократный вызов ЛП-программы.

Третий эксперимент реализует следующий AMPL-код:

```
# section 1: parameters and variables
param Table3{i in 1..10, j in 1..6};
param N default 100;  param K := 10;
param c{k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N};
var x {i in 1..N, j in 1..N} >=0; var z;
#  section 2: objective and constraints
minimize obj: z;
subject to con11x {k in 1..K}:
   sum {i in 1..N, j in 1..N} c[k,i,j]*x[i,j] <= z;
subject to con12 {j in 1..N}: sum {i in 1..N} x[i,j] = 1;
subject to con13 {i in 1..N}: sum {j in 1..N} x[i,j] = 1;
#  section 3: 20 tests and Table3
for {ip in 1..2, irun in 1..10} {
   let N := 100*ip;
   for {k in 1..K, i in 1..N, j in 1..N}{
      let c[k,i,j] := round(Uniform(-1,1)*10000.)/100.;
   }
   solve; display z, _solve_time,_solve_system_time;
   let Table3[irun,3*(ip-1)+1]:=obj;
   let Table3[irun,3*(ip-1)+2] := _solve_time;
   let Table3[irun,3*(ip-1)+3] := _solve_system_time;
}
display K, Table3;
```

Он состоит из трех секций. В первой секции описаны параметры и переменные, во второй — целевая функция и ограничения ЛП-задачи. В третьей секции выполняются двадцать тестовых расчетов для случайно сгенерированных c_{ij}^k: из них десять — для задачи LP100 ($N = 100$) и десять — для задачи LP200 ($N = 200$). Параметр K выбирался равным 10 (промежуточный между наименьшим $K = 6$ и наибольшим $K = 20$ из предыдущих экспериментов).

Результатом третьего эксперимента на NEOS-солвере является следующая таблица:

Gurobi 5.5.0: K = 10, Table3 [*,*]

	1	2	3	4	5	6
1	-4203.85	0.734888	0.104984	-9350.55	3.2845	0.407938
2	-4248.12	0.392939	0.008998	-9150.88	3.14152	0.019997
3	-4150.84	0.402939	0.007999	-9175.7	2.79957	0.023996
4	-4143.26	0.356946	0.004999	-9213.25	3.80342	0.017997
5	-4126.99	0.320951	0.005999	-9157.11	3.39848	0.019997
6	-4288.25	0.338949	0.007999	-9113.78	3.54446	0.023997
7	-4284.13	0.391941	0.009999	-9235.04	2.77158	0.020996
8	-4215.55	0.310952	0.007998	-9259.78	2.84757	0.017998
9	-4181.55	0.353946	0.005999	-9218.42	3.02554	0.013997
10	-4078.52	0.338949	0.005	-9300.16	2.96055	0.019997

Ее строки соответствуют десяти различным тестам для задач LP100 и LP200. Первые 3 столбца соответствуют задаче LP100, а вторые три столбца — задаче LP200. Столбцы 1 и 4 содержат значения целевых функций, столбцы 2 и 5 — полное время работы программы gurobi, а столбцы 3 и 6 — время работы процессора.

Из таблицы Table3 видим, что время работы процессора для первой серии ЛП-задач составляет порядка 0.01 секунды, а для второй серии ЛП-задач — порядка 0.04 секунды. Первый тест здесь не следует принимать во внимание, так как он включает также затраты и самого AMPL на подготовку моделей LP100 и LP200, которые значительно превосходят затраты на решение ЛП-задач. Эти времена работы процессора можно использовать для грубых оценок затрат на решение ЛП-задач в схемах метода ветвей и границ, если $N = 100$ либо $N = 200$. В действительности, использование gurobi будет эффективнее, так как оптимальные решения ЛП-задач в ряде вершин ветвления незначительно отличаются друг от друга.

Программу gurobi можно использовать для нахождения приближенного решения ЛП-задачи с булевыми переменными посредством последовательного округления переменных к единицам (означает прикрепление источников к местам их размещения), решая последовательно ЛП-задачи, количество которых не превосходит N — количества источников. Это легко реализовать на том же языке AMPL и время работы такой программы на NEOS-солвере не будет превышать 10 минут, если $N = 200$.

3. Две лагранжевые оценки для ЛП-задачи

Для решения задачи (11)–(15) можно применять методы негладкой оптимизиции, используя лагранжеву релаксацию по части ограничений [6]. Это позволяет учесть специфические особенности матрицы ограничений задачи (11)–(15), а именно то, что ограничения (13)–(14) являются ограничениями классической задачи о назначениях [6].

Сформулируем две задачи негладкой оптимизации для нахождения оптимального значения целевой функции в задаче (11)–(15), которое для удобства дальнейшего изложения обозначим z^*. Из теории двойственности следует справедливость приведенных ниже утверждений.

Лемма 1. *Пусть z^* — минимальное значение целевой функции в задаче (11)–(15). Тогда $z^* = \psi_1^*$, где ψ_1^* является решением задачи негладкой оптимизации*

$$\psi_1^* = \psi_1(u^*) = \max_{u \geq 0} \psi_1(u), \tag{16}$$

где вогнутая негладкая функция $\psi_1(u)$ от переменных $u = (u_1, \ldots, u_K)$ определена следующим образом:

$$\psi_1(u) = \min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} u_k c_{ij}^k \right) x_{ij} + (1 - \sum_{k=1}^{K} u_k) z, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N], \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N], \tag{19}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i, j \in [1:N], \quad N \min_{i,j,k} \{c_{ij}^k\} \leq z \leq N \max_{i,j,k} \{c_{ij}^k\}. \tag{20}$$

Для решения задачи (16) можно использовать методы минимизации негладких выпуклых функций [6]. Количество переменных в ней равно K. Вычислительная сложность алгоритма определяется выбранными методом негладкой оптимизации и методом решения линейной задачи о назначениях с $N \times N$ переменными x_{ij}. Решение последней используется для вычисления значения функции $\psi_1(u)$ и ее суперградиента.

Задача (16) получена лагранжевой релаксацией ЛП-задачи (11)–(15) по ограничениям (12), которым и соответствуют неотрицательные множители Лагранжа $u_1, \ldots, u_K$. Если же использовать лагранжеву релаксацию по ограничениям (12) и (13) одновременно, то получаем такое утверждение.

Лемма 2. *Минимальное значение $z^* = \psi_2^*$, где ψ_2 можно получить как решение задачи негладкой оптимизации*

$$\psi_2^* = \psi_2(u^*, v^*) = \max_{u \geq 0} \psi_2(u, v), \tag{21}$$

где вогнутая негладкая функция $\psi_2(u,v)$ *от переменных* $u=(u_1,\ldots,u_K)$ *и* $v=(v_1,\ldots,v_N)$ *определена следующим образом:*

$$\psi_2(u)=\min\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(v_j+\left(\sum_{k=1}^{K}u_k c_{ij}^k\right)\right)x_{ij}+(1-\sum_{k=1}^{K}u_k)z-\sum_{j=1}^{N}v_j, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{N}x_{ij}=1, \quad i\in[1:N], \quad (23)$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i,j\in[1:N], \quad N\min_{i,j,k}\{c_{ij}^k\}\leq z\leq N\max_{i,j,k}\{c_{ij}^k\}. \quad (24)$$

В задаче (21) количество переменных равно $K+N$. Поэтому трудоемкость итерации метода негладкой оптимизации будет выше, чем при решении задачи (16). Но зато более простой является подзадача (22)–(24), решение которой требуется для вычисления значения функции $\psi_2(u,v)$ и ее суперградиента. Чтобы ее решить требуется N раз найти минимальный элемент в одномерном массиве длины N. Это значительно проще, чем решать линейную задачу о назначениях.

Алгоритмы на основе лемм 1 и 2 могут быть сориентированы на случай больших N (порядка тысяч) и сравнительно небольших K (до 20). Такие размеры трудны для ЛП-программ общего назначения, так как при $N=1000$ будем иметь K миллионов величин c_{ij}^k и только для их хранения потребуются мегабайты оперативной памяти. Поэтому субградиентные алгоритмы для решения задач (16) и (21) являются перспективными, так как они способны значительно поднять границы для эффективно решаемых задач вида (1)–(5) по отношению к тому, что позволяет либо симплекс-метод, либо метод внутренних точек. При использовании субградиентных методов легко учесть специфику ЛП-задачи (11)–(15), а также уточнять верхнюю оценку для целевой функции в ЛП-задаче с булевыми переменными, используя полученные на итерации множители Лагранжа.

Заключение

Для минимаксной задачи размещения источников физического поля результаты численных экспериментов с программой gurobi показали, что чем больше разрыв двойственности в ЛП-задаче с булевыми переменными, то тем меньше должно быть количество точек измерения значения поля и мест размещения источников, чтобы задача могла быть решена за приемлемое время. Однако, эти расчеты проводились на модельном примере, который генерировался датчиком случайных чисел из расчета на наихудший случай. Интересным представляется изучение возможностей решения подобных задач не на модельном примере, а, например, для реальной задачи о радиационной печи, для которой расчет температурного поля в заданной области требует решения краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Подготовка модели на языке AMPL, с последующим расчетом с помощью gurobi на NEOS-солвере, позволяет быстро и с небольшими затратами

проверить возможности решения реальных задач. Для требуемых размеров, если разрыв двойственности малый, то программа gurobi может успешно находить точные решения ЛП-задач с булевыми переменными. Если же разрыв двойственности большой, то на основе gurobi и AMPL легко строить приближенные алгоритмы, которые могут находить вполне приемлимые для практики решения реальных задач.

Для построения точных и приближенных алгоритмов перспективным представляется путь с использованием методов негладкой оптимизации, который позволяет учесть специфические особенности матрицы ограничений и увеличить размеры решаемых задач. В сочетании с применением быстро сходящихся вариантов субградиентных методов с преобразованием пространства [7] он способен обеспечить эффективные алгоритмы для решения оценочных ЛП-задач. Простые матрично-векторные операции делают эти алгоритмы перспективными для реализации в системах параллельных или распределенных вычислений. Существующие библиотеки стандартных программ для параллельных матрично-векторных операций позволяют в краткие сроки адаптировать такие алгоритмы для векторных процессоров на основе графических ускорителей (GPU) и других.

Литература

1. Яремчук С. І., Іващенко С. М. Побудова методу гілок та меж для розв'язання мімаксної задачі про призначення // Тези VII Міжнародної науково-технічної конференції "Інформаційно-компьютерні технології 2014" (29–30 травня 2014 року). — Житомир: ЖДТУ, 2014. — С. 61–64.
2. Яремчук С. І., Бурда Р. В. Р-алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2009. — № 2. — С. 119–133.
3. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014, `http://www.gurobi.com`.
4. Fourer R. AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming, Second Edition / R. Fourer, D. Gay, B. Kernighan. — Belmont: Duxburry Press, 2003. — 517 p.
5. NEOS Solver [Электронный ресурс]: `http://www.neos-server.org/neos/solvers/`. — Режим доступа: свободный.
6. Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. — М.: Наука, 1986. — 264 с.
7. Стецюк П. И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы. — Кишинэу: Эврика, 2014. — 488 с.

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, пр. Академика Глушкова, 40, Киев-187, 03680, Украина.
Национальный университет "Киево-Могилянская академия", ул. Сковороды,2, Киев, 04070, Украина.
Житомирский государственный технологический университет, ул. Черняховского, 103, Житомир, 10005, Украина.

Поступила 27.06.2014

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2014 **МАТЕМАТИКИ** 3(117)

Заснований в 1965 році

ЗМІСТ

Серія "Прикладна математика"

О. Ю. Грищенко
Про один напрямок практичного застосування теоретичної спадщини Г. М. Положія 5

С. А. Алдашев
Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения 17

Э. Н. Береславский
О трансформациях разрезов при конформном отображении некоторых круговых многоугольников, встречающихся в задачах механики жидкости и газа 23

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник
Моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення в n-шарових магнітних фільтрах за умов ідентифікації масообмінних коефіцієнтів 32

О. Ю. Грищенко, В. С. Федорова
Про один алгоритм розв'язання задач кінетики адсорбції 40

Д. А. Клюшин, М. В. Присяжная, Е. С. Бондарь
Квадратичный реляционный дискриминантный анализ матричных данных и устранение неопределенности 51

А. Ю. Кобзарь
Об одном алгоритме компенсации искажений скользящего затвора . 59

А. С. Марцафей
Обгрунтування ДС-алгоритмів при моделюванні ізотермічних потоків нестислої рідини 66

І. В. Самойленко, Ю. В. Шушарін
Великі відхилення для випадкової еволюції з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації з розщепленням та подвійним укрупненням 76

О. Б. Стеля, Л. І. Потапенко, І. П. Сіренко
Комп'ютерне моделювання траєкторії руху центра маси тіла, кинутого під кутом до горизонту 87

О. О. Халимон, О. С. Бондар
Апроксимації дробової похідної за простором для рівнянь узагальненої дифузії 95

V. M. Patsuk
Approximating a contour by linear segments and circular arcs with given curvature bounds 102

Серія "Оптимізація"

С. И. Доценко
Вектор Шепли как способ справедливого распределения 111
Н. И. Ляшко, В. В. Семенов, Л. М. Чабак
Алгоритм расщепления для вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами 123
П. И. Стецюк, В. И. Ляшко, С. И. Яремчук
О решении минимаксных задач размещения источников физического поля 132