

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
**Журнал обчислювальної та прикладної**  
**2014 МАТЕМАТИКИ 1(115)**  
*Заснований в 1965 році*

---

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський,  
І. М. Ляшенко, В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. М. Парасюк,  
І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар), Д. Я. Хусаїнов, А. О. Чикрій

**Серія “Прикладна математика”**

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарев, Д. А. Ключин,  
В. В. Козоріз, О. М. Новіков, Т. Є. Романова

**Серія “Оптимізація”**

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада),  
Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія),  
Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США),  
Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

К. О. Пришляк, І. П. Сіренко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: [opmjournal@gmail.com](mailto:opmjournal@gmail.com)    [html://www.opmj.univ.kiev.ua](http://www.opmj.univ.kiev.ua)

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики  
10 лютого 2014 року, протокол №6

---

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014  
©”ТВиМС”, 2014

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000  
Підписано до друку 10.02.2014

---

Для публікації в журналі приймаються не опубліковані раніше наукові праці з провідних методів дослідження та розв'язування задач оптимізації, обчислювальної математики, математичної фізики, теорії фільтрації, теорії пружності, математичної кібернетики, теорії управління та інших напрямків.

У журналі публікуються статті українською, російською й англійською мовами.

Стаття у друкованому вигляді з підписами авторів подається особисто або електронною поштою з подальшим дублюванням на папері в одному примірнику.

До статті додається анкета автора (-ів): ПІБ автора(-ів) українською, російською й англійською мовами, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреса проживання й організації, телефон, факс, електронна пошта тощо та додаткова інформація: назва статті, резюме та ключові слова українською, російською й англійською мовами на електронному носії особисто або електронною поштою (див. "Анкета автора" на сайті журналу [www.ormj.univ.kiev.ua](http://www.ormj.univ.kiev.ua)).

Обсяг статті не має перевищувати 12 сторінок, включаючи резюме (обсягом до 500 друкованих знаків, яке містить коротку характеристику досліджуваної проблеми, мету роботи й конкретну інформацію про отримані результати), рисунки, таблиці, графіки, список літератури та індекс УДК. Текст статті повинен відповідати структурній схемі: короткий літературний огляд проблеми, що розглядається; мета дослідження; постановка задачі та її актуальність; методи її вирішення й отримані результати; висновки про наукову новизну та практичне значення результатів. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком її згадування в тексті (посилання у тексті — арабськими цифрами у квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до ГОСТу 7.1:2006 (ознайомитися можна на сайті). Стаття має бути підготовлена за допомогою редактора LaTeX.

Редактор LaTeX може бути наданий або надісланий на електронному носії поштою на прохання автора. Додаткову інформацію, шаблони статті та анкету автора можна знайти на сайті журналу.

Місцезнаходження редакції: Україна, 01601, м. Київ, просп. Глушкова 4д, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, к. 218, редакція журналу "Журнал обчислювальної та прикладної математики", e-mail: [ormjournal@gmail.com](mailto:ormjournal@gmail.com).

УДК 517.9

## ВИБІР РАЦІОНАЛЬНИХ АЛЬТЕРНАТИВ ЗА НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ КОМПРОМІСНИХ ЦІЛЕЙ

О. М. Бовсунівський

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається задача раціонального вибору альтернатив, у якій ціль особи, що приймає рішення (ОПР), задана нечіткою множиною чітких множин компромісних цілей. Така модель дозволяє приймати рішення у випадку, коли неможливо побудувати функції корисності, які характеризують ціль ОПР, і дозволяє використовувати функцію належності нечіткої множини актуальних для ОПР цілей як джерело додаткової інформації для вибору однієї конкретної альтернативи. Також, пропонується метод побудови агрегованої цілі ОПР, як нечіткої множини типу 2, та прийняття рішень за нею.

Дослідження різноманітних задач нечіткого математичного програмування (НМП), свідчать про актуальність цієї тематики. Значна увага в літературі приділяється: задачам досягнення нечітко поставленої цілі з нечіткими обмеженнями [1]; задачам НМП з нечіткою множиною альтернатив; задачам узагальненого НМП з ціллю, що задана нечітким відображенням [2]; задачам математичного програмування з нечіткими параметрами [3] та іншим. В даній роботі розглядається задача прийняття рішень з нечіткою множиною компромісних цілей. З одного боку, таке узагальнення дозволяє аналізувати ситуації у випадку, якщо неможливо чітко вказати, які множини характеризують ціль ОПР, а з іншого — допомагає глибше та більш точно зрозуміти процес прийняття рішень, шляхи пошуку та вибору раціональних альтернатив в умовах нечіткої інформації.

Нехай  $X$  — універсальна множина альтернатив, на якій задані: нечітка множина  $D$  альтернатив з функцією належності  $\mu_D : X \rightarrow [0, 1]$ ;  $G_i \subseteq X$ ,  $i \in N$ , — чіткі цільові множини особи, що приймає рішення (ОПР), з характеристичними функціями, відповідно  $\mu_{G_i} : X \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $i \in N$ ;  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множина цільових множин,  $n$  — їхня кількість. ОПР намагається реалізувати хоча б одну зі своїх цілей. Тому далі будемо називати ці цілі компромісними.

По аналогії з відомим підходом Белмана-Заде [1] до задачі вибору раціональної альтернативи з нечіткої множини за ціллю ОПР, яка задана перетином цільових множин, загальним розв'язком поставленої вище задачі є нечітка множина  $X^* = D \cap G$ , де  $G = \bigcup_{i \in N} G_i$  є агрегованою множиною цілей. Якщо ОПР хоче вибрати деякий конкретний розв'язок, то вона може вибрати, так звану, максимізуючу альтернативу за умовою

$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x)$ , де  $\mu(x) = \min\{\mu_D(x), \max_{i \in N} \mu_{D_i}(x)\}$  — функція належності нечіткої множини  $X^*$  розв'язків.

На практиці досить часто виникають ситуації, коли в момент прийняття рішення ОПР не може чітко вказати, які саме множини  $G_i$ ,  $i \in N$ , характеризують її альтернативні цілі, а може задати їхню нечітку підмножину  $\tilde{N} \subseteq N$ . Нехай  $\eta : N \rightarrow [0, 1]$  — функція належності нечіткої множини  $\tilde{N}$  чітких множин  $G_i$ , які характеризують альтернативні цілі ОПР. Тоді агреговану ціль ОПР можна задати у вигляді об'єднання  $\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  нечіткої множини  $\tilde{N}$  чітких множин  $G_i$ ,  $i \in N$ . Визначимо це поняття відповідно до запропонованого у [4,5] підходу.

Розглянемо множину  $G = \bigcup_{i \in N} G_i$ , яка є об'єднанням чіткої множини  $N$  чітких множин  $G_i$ ,  $i \in N$ . За класичною теорією множин вона є чіткою множиною, яка задається характеристичною функцією  $\mu_G(x) = \max_{j \in N} \mu_{G_j}(x)$ ,  $x \in X$ , значення якої для кожної фіксованої альтернативи  $x \in X$  визначається як максимум цільової функції задачі звичайного (чіткого) математичного програмування вигляду  $\mu_G = \max_{j \in N} \mu_{G_j}$ .

У випадку об'єднання нечіткої множини  $\tilde{N}$  нечітких множин  $G_i$ ,  $i \in N$ , множина  $\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  буде задаватися функцією належності

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \max_{j \in \tilde{N}} \mu_{G_j}(x), \quad x \in X. \quad (1)$$

Значення цієї функції для кожної альтернативи  $x \in X$  буде визначатися як максимум цільової функції задачі нечіткого математичного програмування

$$\mu_{\tilde{G}} = \max_{j \in \tilde{N}} \mu_{G_j}. \quad (2)$$

Згідно до С. Орловського [2], розв'язком задачі (2) вважається нечітка множина  $\tilde{N}^U$ , носієм якої є множина оптимальних за Парето розв'язків (позначатимемо її через  $\text{supp} \tilde{N}^U$ ) задачі

$$\mu_{G_i} \rightarrow \max, \quad \eta(i) \rightarrow \max, \quad i \in N. \quad (3)$$

Функцією належності  $\eta^U$  нечіткої множини  $\tilde{N}^U$  є звуження функції належності  $\eta(i)$ ,  $i \in N$ , з універсальної множини індексів критеріїв  $N$  на множину  $\text{supp} \tilde{N}^U$ . Ця функція належності буде мати вигляд

$$\eta^U(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in \text{supp} \tilde{N}^U, \\ 0, & i \notin \text{supp} \tilde{N}^U. \end{cases}$$

Відповідно до розв'язку задачі (2), яким є нечітка множина  $\tilde{N}^U$ , за [2] визначається нечітка множина  $\mathfrak{R}$  оптимальних значень цільової функції цієї задачі. Вона задається функцією належності  $\rho : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\rho(z) = \max_{\mu_{G_j} = z} \eta^U(j)$ ,  $z \in \{0, 1\}$ .

Слід відмітити, що функція належності  $\rho(z)$ ,  $z \in \{0, 1\}$ , нечіткої множини  $\mathfrak{R}$  оптимальних значень цільової функції задачі (2) визначена на двоелементній множині  $\{0, 1\}$ . Це пояснюється тим, що при довільній фіксованій альтернативі  $x \in X$  будь-яка характеристична функція  $\mu_{G_j}(x)$ ,  $j \in N$ , може набувати значення 0 або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої альтернативи  $x \in X$  значення функції належності (1) нечіткої множини  $\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  також утворює нечітку множину, а це означає, що нечітка множина  $\tilde{G}$  є, так званою [4, 5], нечіткою множиною типу 2.

Для довільної альтернативи  $x \in X$  розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими множинами задачі (3) на універсальній множині цілей  $N$ .

Вважатимемо, що ціль з індексом  $i \in N$  домінує ціль з індексом  $j \in N$  для альтернативи  $x \in X$  і позначати це  $i \succ_{(x)} j$ , якщо мають місце такі нерівності:  $\mu_{G_i}(x) \geq \mu_{G_j}(x)$ ,  $\eta(i) \geq \eta(j)$ , і хоча б одна з цих нерівностей є строгою.

Дане відношення домінування дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двокритеріальної задачі (3), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі нечіткого математичного програмування (2).

Для довільної альтернативи  $x \in X$  позначимо цей носій у вигляді

$$\text{supp} \tilde{N}^{\cup}(x) = \{i \in N \mid j \not\succeq_{(x)} i, \forall j \in N\}. \quad (4)$$

Для довільних  $x \in X$ ,  $i \in N$  визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (2)

$$\eta^{\cup}(x, i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in \text{supp} \tilde{N}^{\cup}(x), \\ 0, & i \notin \text{supp} \tilde{N}^{\cup}(x). \end{cases} \quad (5)$$

Тоді, об'єднанням нечіткої множини  $\tilde{N}$  чітких множин  $G_i$ ,  $i \in N$ , відповідно до [5] будемо називати  $\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  — нечітку множину типу 2, яка задається трійками  $(x, \mu_{\tilde{G}}(x, z))$ , де  $x$  — елемент множини альтернатив  $X$ ,  $z$  — елемент універсальної множини  $\{0, 1\}$ , а  $\mu_{\tilde{G}}(x, z)$  — нечітке відображення  $X \times \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ , яке виконує роль його нечіткої функції належності:

$$\mu_{\tilde{G}}(x, z) = \max_{i \in N} \{\eta^{\cup}(x, i) \mid \mu_{G_i}(x) = z\}, \quad (6)$$

якщо  $\exists i \in N$ ,  $\mu_{G_i}(x) = z$ ,  $z \in \{0, 1\}$ , та

$$\mu_{\tilde{G}}(x, z) = 0, \quad (7)$$

якщо  $\mu_{G_i}(x) \neq z$ ,  $\forall i \in N$ ,  $z \in \{0, 1\}$ .

Позначимо  $I^* = \text{Argmax}_{j \in N} \eta(j)$ . Суттєве спрощення обчислення функції належності  $\mu_{\tilde{G}}(x, z)$  нечіткої множини типу 2 за формулами (4) – (7) надає

**Теорема 1.** Нехай  $G_i$ ,  $i \in N$ , — чіткі множини, які задані на множині  $X$  відповідними характеристичними функціями  $\mu_{G_i}(x)$ ,  $x \in X$ ,  $i \in N$ , — функція належності нечіткої множини  $\tilde{N}$ . Для того, щоб нечітка множина  $\tilde{G}$  типу 2, яка задана відображенням належності  $\mu_{\tilde{G}}(x, z)$ ,  $x \in X$ , була об'єднанням нечіткої множини  $\tilde{N}$  чітких множин  $G_i$ ,  $i \in N$ , тобто

$\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  необхідно й достатньо, щоб для  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{G}}(x, 1) &= \begin{cases} \max_{\mu_{G_i}(x)=1} \eta(i), & \exists i \in N : \mu_{G_i}(x) = 1, \\ 0, & \mu_{G_i}(x) = 0, \forall i \in N; \end{cases} \\ \mu_{\tilde{G}}(x, 0) &= \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i), & \mu_{G_i}(x) = 0, \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^* : \mu_{G_i}(x) = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

*Доведення.* Покажемо, що формули (6), (7) еквівалентні

$$\mu_{\tilde{G}}(x, z) = \begin{cases} \max_{i \in N(x, z)} \eta(i), & N(x, z) \neq \emptyset, \\ 0, & N(x, z) = \emptyset, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} N(x, z) &= \{i \in N \mid z = \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_i}(x), \eta(i) = \\ &= \max_{\mu_{G_j}(x) \geq \mu_{G_i}(x)} \eta(j)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Відзначимо, що з формул (6), (7) очевидно випливає

$$\mu_{\tilde{G}}(x, z) = \max_{i \in N \cup (x)} \{\eta(i) \mid \mu_{G_i}(x) = z\}, \quad (11)$$

якщо  $\exists i \in N : \varphi_i(x) = z$  та

$$\mu_{\tilde{G}}(x, z) = 0, \quad (12)$$

якщо  $\mu_{G_i}(x) \neq z, \forall i \in N$ .

Для доведення еквівалентності (6), (7) та (9) достатньо показати, що формули (11), (12) еквівалентні (9). Скористаймося відомою [6] теоремою про необхідні й достатні умови ефективності альтернатив в задачах багатокритеріальної оптимізації, згідно якої множина оптимальних за Парето розв'язків двокритеріальної задачі (3) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} M^{PO}(x) &= \{i \in M \mid \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x), \mu(i) = \\ &= \max_{\mu_{G_j}(x) \geq \mu_{G_i}(x)} \mu(j)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

З (10), (13) випливає, що  $N(x, z) = \text{supp } \tilde{N}^{\cup}(x) \cap \{i \in N \mid \mu_{G_i}(x) = z\}$ . Тому формули (11), (12) еквівалентні (9). Звідси можна зробити висновок, що формула (7) також еквівалентна (9).

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність формул (8) та (9). Для початку запишемо (10) для  $z = 1$  у двох можливих випадках. Нехай  $\mu_{G_i}(x) = 0, \forall i \in N$ . Тоді згідно (8)  $\mu_{\tilde{G}}(x, 1) = 0$ . З іншого боку, з (10) випливає, що  $N(x, 1) = \emptyset$ . Тому згідно (9) також отримуємо  $\mu_{\tilde{G}}(x, 1) = 0$ .

В другому випадку, нехай  $\exists i \in N : \mu_{G_i}(x) = 1$ . Визначимо відповідно до (9) значення  $\mu_{\tilde{G}}(x, 1)$ . Для цього за (10) побудуємо множину  $N(x, 0) = \{i \in N \mid 1 = \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x), \eta(i) = \max_{\mu_{G_j}(x)=1} \eta(j)\}$ . Покажемо, що  $N(x, 1) = \text{Argmax}_{\mu_{G_i}(x)=1} \eta(j)$ . Позначимо через  $\eta_1^*(x) = \max_{\mu_{G_i}(x)=1} \eta(j)$ .

Нехай  $i \in \text{Argmax}_{\mu_{G_j}(x)=1} \eta(j)$ , тоді  $\eta(i) = \eta_1^*(x)$  та  $\max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x) = \mu_{G_j}(x) = \max\{\max_{\eta(j)=\eta_1^*(x)} \mu_{G_j}(x), \max_{\eta(j) > \eta_1^*(x)} \mu_{G_j}(x)\}$ , звідси  $\mu_{G_j}(x) = 1$  (оскільки  $\max_{\eta(j)=\eta_1^*(x)} \mu_{G_j}(x) = 1$ ). З одержаних рівностей очевидно випливає, що  $i \in N(x, 1)$ .

Тепер навпаки, нехай  $i \in N(x, 1)$ . Тоді виконуються рівності:  $1 = \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) > \eta(i)} \mu_{G_j}(x)$  та  $\eta(i) = \eta_1^*(x)$ . Звідси  $i \in \text{Argmax}_{\mu_{G_j}(x)=1} \eta(j)$ , тоді згідно з (8) одержимо  $\mu_{\tilde{G}}(x, 0) = \eta_1^*$ . Таким чином, формули (8) та (9) еквівалентні при  $z = 1$ .

Далі запишемо (10) для  $z = 0$  у двох лише можливих випадках. Позначимо  $\eta_0^* = \max_{j \in N} \eta(j)$  та нагадаємо про позначення  $I^* = \text{Argmax}_{j \in N} \eta(j)$ . Спочатку нехай  $\mu_{G_i}(x) = 0, \forall i \in I^*$ . Тоді згідно з (8)  $\mu_{\tilde{G}}(x, 0) = \eta_0^*$ . Визначимо значення  $\mu_{\tilde{G}}(x, 0)$  за формулою (9). Для цього побудуємо у відповідності з (10):  $N(x, 0) = \{i \in N | 0 = \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x), \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\} = \{i \in I^* | 0 = \mu_{G_i}(x) = \max_{j \in I^*} \mu_{G_j}(x)\} = I^*$ . Звідси згідно з (9)  $\mu_{\tilde{G}}(x, 0) = \eta_0^*$ .

Розглянемо другий випадок. Нехай  $\exists i \in I^* : \mu_{G_i}(x) = 1$ . Тоді згідно з (8)  $\mu_{\tilde{G}}(x, 0) = 0$ . Визначимо значення  $\psi(x, 0)$  відповідно до (9). На підставі (10) одержимо множину  $N(x, 0) = \{i \in N | 0 = \mu_{G_i}(x) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x), \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j) = \eta_0^*\} = \{i \in I^* | 0 = \mu_{G_i}(x) = \max_{j \in I^*} \mu_{G_j}(x) = 1\} = \emptyset$ .

Звідси згідно з (9)  $\phi(x, 0) = 0$ , а тому формули (8) та (9) — еквівалентні при  $z = 0$ .

Теорему доведено. □

**Приклад 1.** Нехай множина  $X = \{a, b, c, d\}$ . На ній задані дві чіткі множини  $G_1, G_2$  з функціями належності, відповідно  $\mu_{G_1}(x)$ , і  $\mu_{G_2}(x)$  (табл. 1). Функція належності  $\max\{\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x)\}$  їх об'єднання вказана в третьому рядку табл. 1. Нехай також задана нечітка підмножина  $\tilde{N}$  множини  $N = \{1, 2\}$  з функцією належності  $\eta(i), i \in N$ , яка має значення:  $\eta(1)=0.7, \eta(2)=0.5$ . Значення функцій належності  $\mu(x, 0)$  і  $\mu(x, 1)$ , які задають відповідні перерізи нечіткої множини типу 2 вказані в табл. 1.

Перейдемо до побудови розв'язку задачі раціонального вибору альтернатив за нечіткою ціллю, яка задається нечіткою множиною типу 2.

ТАБЛИЦЯ 1. Об'єднання нечіткої множини чітких множин

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\mu_{G_1}(x)$	0	1	0	1
$\mu_{G_2}(x)$	0	0	1	1
$\max\{\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x)\}$	0	1	1	1
$\mu(x, 0)$	0,7	0	0,7	0
$\mu(x, 1)$	0	0,7	0,5	0,7

Перейдемо до побудови розв'язку задачі раціонального вибору альтернатив за нечіткою ціллю, яка задається нечіткою множиною  $\tilde{G} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} G_i$  типу 2.

Слід зазначити, що якщо у функції належності  $\mu_{\tilde{G}}(x, z)$  нечіткої множини  $\tilde{G}$  агрегованої цілі ОПР типу 2 зафіксувати  $z = 1$ , то ми отримаємо нечітку множину типу 1 елементів  $x \in X$ , що належать множині  $\tilde{G}$ , з функцією належності  $\mu_{\tilde{G}}(x, 1)$ . Позначимо цю множину  $\tilde{G}(1)$ .

Тепер, коли ми знайшли нечітку множину, яка описує агреговану ціль ОПР, побудуємо загальний розв'язок вихідної задачі, яким буде нечітка множина  $X^* = D \cap \tilde{G}(1)$  з функцією належності  $\mu(x) = \min\{\mu_d(x), \mu_{\tilde{G}}(x, 1)\}$ , цю множину варто вважати розв'язком вихідної задачі. Оскільки ОПР часто цікавить не вся множина розв'язків, а якийсь конкретний з них, то постає задача раціонального вибору єдиної альтернативи з нечіткої множини  $X^*$ . Таким розв'язком може бути максимізуюча альтернатива  $x^*$ , яка задовольняє умову  $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) > 0$ .

Насамкінець слід відмітити, що розглянутий у цій роботі підхід вибору компромісних цілей у задачі прийняття рішень з цільовою множиною, яка може бути задана об'єднанням нечіткої множини чітких множин є іншим поглядом на цю проблему, ніж метод, який був розвинений у роботах Р. Белмана та Л. Заде, зокрема в [1], для цільової множини, яка задана перетином цільових множин.

Операція об'єднання нечіткої множини нечітких множин, яка формалізована в цій роботі, представляє самостійний інтерес і може бути використана в різних нових постановках задач прийняття рішень.

Також варто зазначити, що розроблений метод можливо використовувати і для задачі прийняття рішень з ціллю, яка буде задаватися нечіткою множиною нечітких цільових множин.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Bellman R. E. Decision-Making in a Fussy Environment. / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Science. — 1970. — №17. — Р. 141–164.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. / С. А. Орловский — М. : Наука, 1981. — 208 с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация. / Ю. П. Зайченко — К. : Вища школа, 1991. — 191 с.
4. Bovsunivskyi O. Decision making problem with fuzzy set of goal sets. / O. Bovsunivskyi, S. Mashchenko // International Journal "Information Theories and Applications". — 2012. — 19. — № 3. — Р. 249–257.
5. Мащенко С. О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия. / С. О. Мащенко // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010. — Вып. 159. — С. 19–29.
6. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин — М.: Физматлит, 2007. — 255 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 15.12.2013

УДК 519.71:519.6

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧКОВИХ  
ДЖЕРЕЛ  
З НЕВІДОМИМИ КООРДИНАТАМИ ТА  
ІНТЕНСИВНОСТЯМИ**

О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький, Н. І. Ляшко

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано ефективний підхід розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел з невідомими координатами та інтенсивностями. Отримано явний вигляд критерію якості. Побудований ітераційний алгоритм. Проведений чисельний експеримент з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму).

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ**

Розглядається задача відновлення точкових джерел для параболічного рівняння другого порядку, яка є оберненою до задачі знаходження стану системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 c_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + a(x)u = - \sum_{\beta=1}^p \delta(x - r^{\beta})q^{\beta}(t), \quad (1)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t < T,$$

$\Omega = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$ ,  $k_{\alpha}(x) \geq k_0 > 0$ ,  $k_{\alpha}(x)$ ,  $c_{\alpha}(x)$ ,  $a(x)$ ,  $\alpha = \overline{1, 2}$  — неперервні функції в замиканні  $\overline{\Omega}$ ; крім того, вважаємо, що середовище є нестислим, тому маємо  $\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$ ,  $x \in \Omega$ . Тут  $r^{\beta}$  — координати джерел,  $q^{\beta}(t)$  — потужності,  $\beta = \overline{1, p}$ . У початковий момент часу відоме значення розв'язку в області  $\Omega$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

А на границі області у кожен момент часу  $t \in [0, T]$  відомий стан системи

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Відомими вважаємо вимірювання  $\varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, J}$  функції  $u(x, t)$  в деяких окремих точках  $z_j$  області  $\Omega$

$$\tilde{u}(z_j, t) = \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{1, J}, \quad (4)$$

де  $\tilde{u}(z_j, t) \equiv \int_{\varpi_j} u(x, t) dx / \int_{\varpi_x} dx$  — усереднення  $u(x, t)$  в деякому околі  $\varpi_j$  точки  $z_j$  [2].

Задача ідентифікації полягає у визначенні невідомих параметрів точкових джерел: інтенсивностей  $q^\beta(t)$  та координат  $r^\beta$  за додатковим спостереженням (4) у деяких точках області. Наведемо схему чисельного розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел на основі варіаційного підходу, запропонованого в роботі [1].

Згідно введених раніше позначень стан системи  $u(x, t; V, r)$  описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + au = F(x, r) V^T(t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

де  $V(t) = (V^1(t), V^2(t), \dots, V^p(t))$  — вектор інтенсивностей,  $r = (r^1, r^2, \dots, r^p)$  — вектор координат джерел,  $F(x, r) = (\delta(x - r^1), \delta(x - r^2), \dots, \delta(x - r^p))$  — вектор дельта-функцій.

Будемо вважати, що керування  $h = (V(t), r) \in H_{VR}$ , де  $H_{VR} = \{h = \{(V^\beta(t), r^\beta), \beta = \overline{1, p}\}\} \subset L_2^p(0, T) \otimes R^p$  — гільбертів простір із скалярним добутком  $\langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{\beta=1}^p \left( \int_0^T V_{(1)}^\beta(t) V_{(2)}^\beta(t) dt + r_{(1)}^\beta r_{(2)}^\beta \right)$  і нормою  $\|h\|_p = \langle h, h \rangle^{1/2}$ .

Функціонал якості розглядаємо у вигляді

$$\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) = \sum_{j=1}^J \int_0^T (\tilde{u}(z_j, t; V, r) - \varphi_j(t))^2 dt + \alpha \|V\|_{L_2^p(0, T)}^2 + \gamma^2 \|r\|_p^2. \quad (6)$$

Тут  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  — параметри регуляризації.

Оптимальне керування  $h^* = (V^*, r^*)$  визначається як мінімум функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r)$ , тобто

$$\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V^*, r^*) = \min_{(V, r) \in H_{VR}} \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r), \quad (7)$$

а за розв'язок варіаційної задачі (5)–(7), (2), (3) беремо  $u(x, t; V^*, r^*)$  та сам вектор  $(V^*(t), r^*)$ .

#### АЛГОРИТМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

**Теорема 1.** *Критерій якості (6) для задачі оптимального керування (7), (5), (2), (3) диференційовний за Гато. При цьому*

$$\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial V} \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \Psi(r, t) + 2\alpha V \\ \text{grad} \Psi(r, t) \cdot V + 2\gamma r \end{pmatrix}^T,$$

де

$$\text{grad} \Psi(r, t) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial r_2} \right).$$

*Доведення.* Для варіаційної задачі (5)–(7), (2), (3) розв'язок  $u(x, t; V, r)$  шукаємо у просторі  $L_2(\Omega)$  (при фіксованих  $t$ ,  $V(t)$  та  $r$ ). Рівняння (5) з

урахуванням граничних умов (7) записується в  $H_{VR}$  у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{C}u + \mathcal{D}u + au = FV, \quad 0 < t \leq T. \quad (8)$$

Оператор дифузійного переносу  $\mathcal{D}$  самоспряжений та додатньо визначений в  $L_2(\Omega)$ :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq k_0 E$ , де  $E$  — тотожний оператор. Оператор конвективного переносу є кососиметричним:  $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^*$  в  $L_2(\Omega)$ . Введемо функцію  $\chi = \sum_{j=1}^J \delta(x - z_j)$ , де  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака, і нехай вектор-функція

$$\varphi(t) \in [L_2(\Omega)]^J$$

така, що  $\chi\varphi(t) = \sum_{j=1}^J \delta(x - z_j)\varphi_j(t)$ . З урахуванням цих позначень функціонал (6) набуває вигляду

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \int_0^T (\chi, u(t; V, r) - \varphi(t))^2 dt + \alpha \|V\|_{L_2^p(0,T)}^2 + \gamma \|r\|_p^2. \quad (9)$$

Рівняння (8) з врахуванням (2) доповнюється початковою умовою

$$u(0) = g. \quad (10)$$

Отже, приходимо до задачі мінімізації (9) на розв'язках задачі (5), (2), (3).

Для даної задачі оптимального керування сформулюємо умови оптимальності, тобто, надамо конкретного змісту рівнянню Ейлера для квадратичного функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$ , яке в покомпонентному вигляді є системою

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V}(V^*, r^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r}(V^*, r^*) = 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Для знаходження градієнта  $\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$  розглянемо приріст  $\delta \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V + \delta V, r + \delta r) - \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$ . Через  $u + \delta u$  позначимо розв'язок задачі (5), (7), який відповідає правій частині з  $V + \delta V$  та  $r + \delta r$ . Внаслідок лінійності задачі маємо

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \mathcal{C}\delta u + \mathcal{D}\delta u + a\delta u = \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \quad (12)$$

$$0 < t < T, \quad \delta u(0) = 0. \quad (13)$$

Тоді для приросту функціоналу отримаємо

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) &= \int_0^T (\chi, (u + \delta u - \varphi)^2) dt + \alpha \|V + \delta V\|_{L_2^p(0,T)}^2 + \gamma \|r^\beta + \delta r^\beta\|_p^2 - \\ &- \int_0^T (\chi, u - \varphi)^2 dt - \alpha \|V\|_{L_2^p(0,T)}^2 - \gamma \|r^\beta\|_p^2 = 2 \int_0^T (\chi, (u - \varphi)\delta u) dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \left( \chi, (\delta u)^2 \right) dt + 2\alpha \langle V, \delta V \rangle + \alpha \|\delta V\|_{L_2^p(0,T)}^2 + 2\gamma \langle r, \delta r \rangle + \gamma \|\delta r\|_p^2. \quad (14)$$

Для знаходження виразу градієнту функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$  необхідно виразити приріст  $\delta u$  через прирости керування. З цією метою введемо нову вектор-функцію  $\psi(t) \in L_2(\Omega)$ , яка визначає спряжений стан і перетворюється в нуль на границі  $\partial\Omega$ . Помножимо рівняння (12) скалярно в  $L_2(\Omega)$  на  $\psi(t)$  і проінтегруємо за часом від 0 до  $T$ . Маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) + (\mathcal{C}\delta u, \psi) + (\mathcal{D}\delta u, \psi) + (a\delta u, \psi) \right) dt = \\ & = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta\delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Для першого доданку з урахуванням (13) маємо

$$\int_0^T \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) dt = (\delta u(T), \psi(T)) - \int_0^T \left( \delta u, \frac{d\psi}{dt} \right) dt. \quad (16)$$

Оскільки

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \text{ та } \mathcal{C} = -\mathcal{C}^*, \quad (17)$$

то

$$(\mathcal{C}\delta u, \psi) + (\mathcal{D}\delta u, \psi) + (a\delta u, \psi) = -(\delta u, \mathcal{C}\psi) + (\delta u, \mathcal{D}\psi) + (\delta u, a\psi). \quad (18)$$

Нехай

$$\psi(T) = 0. \quad (19)$$

Тоді після підстановки (16)–(19) в (15) приходимо до рівності

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \delta u, \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi \right) \right) dt = \\ & = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta\delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Функції  $\psi$  будемо визначати так, щоб ліва частина (20) давала перший доданок в (14), тобто

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi = 2\chi(u - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0. \quad (21)$$

Для перетворення правої частини (21) введемо вектор-функцію спряженого стану  $\Psi(r, t) = (\psi(r^1, t), \psi(r^2, t), \dots, \psi(r^p, t))$ . Тоді для правої частини

(20) маємо

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta\delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt = \\
 & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\psi(r^\beta + \delta r^\beta) - V^\beta\psi(r^\beta)] dt = \\
 & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p [V^\beta(\psi(r^\beta + \delta r^\beta) - \psi(r^\beta)) + \delta V^\beta\psi(r^\beta + \delta r^\beta)] dt = \\
 & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p \left[ V^\beta \left( \frac{(\psi(r_1^\beta + \delta r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta))}{\delta r_1^\beta} \delta r_1^\beta - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(\psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta))}{\delta r_2^\beta} \delta r_2^\beta \right) + \delta V^\beta\psi(r^\beta + \delta r^\beta) \right] dt. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Задачу (12), (13) поставлено коректно [3], отже, з (5) випливає, що  $\|\delta u\| \leq \text{const}_1 \|\delta V\|_p$  та  $\|\delta u\| \leq \text{const}_2 \|\delta r\|_p$ . Тоді з (14) та (20)–(22) для задачі (12), (13) визначимо градієнт функціоналу (9)

$$\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) = \left( \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial V}, \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial r} \right) = \left( \begin{array}{c} \Psi(r, t) + 2\alpha V \\ \text{grad} \Psi(r, t) V + 2\gamma r \end{array} \right)^T, \quad (23)$$

де  $\Psi(r, t)$  визначається за розв'язком задачі (19), (21).  $\square$

Необхідну і достатню умову (11) мінімуму функціоналу (9) подамо у вигляді двох рівнянь у векторній формі

$$\begin{cases} \Psi(r, t) + 2\alpha V(t) = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, t) V(t) + 2\gamma r = 0 \end{cases} \quad (24)$$

або системи  $2p$  скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \psi(r^\beta, t) + 2\alpha V^\beta(t) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}(r^\beta, t) V^\beta(t) + 2\gamma r^\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (25)$$

Резюмуючи викладене, запишемо ітераційний алгоритм визначення потужностей  $V^\beta$  та координат  $r^\beta$ . При переході з  $k$  ітерації на  $(k+1)$ :

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \mathcal{C}u^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^p V^{\beta, k} \delta(x - r^{\beta, k}), \quad 0 < t \leq T; \quad (26)$$

$$u^k(0) = 0. \quad (27)$$

2. Знаходиться спряжений стан, що відповідає  $(V^*, r^*)$

$$-\frac{\partial \psi^k}{\partial t} - \mathcal{C}\psi^k + \mathcal{D}\psi^k + a\psi^k = 2\chi(u^k - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0. \quad (28)$$

$$\psi^k(T) = 0. \quad (29)$$

3. Визначаються нові наближення для координат  $r$  та потужностей джерел  $V$

$$\begin{aligned} \frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k(r^{\beta,k}) + 2\alpha V^{\beta,k} &= 0, \\ \frac{r^{\beta,k+1} - r^{\beta,k}}{\sigma_{k+1}} + \frac{\partial \psi^k(r^{\beta,k})}{\partial r} V^{\beta,k} + 2\gamma r^{\beta,k} &= 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (30)$$

Тут  $s_{k+1}$  та  $\sigma_{k+1}$  — крокові множники, що обираються з умов  $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = +\infty$ ,  $s_k \rightarrow 0$ ,  $\sigma_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

4. Обчислюється значення  $\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})$  за формулою (9).

При виконанні умови

$|\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})| < \varepsilon$  обчислення зупиняємо та приймаємо  $(V^{k+1}, r^{k+1})$  за шуканий розв'язок, інакше переходимо на крок 1.

#### ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД

Для наближеного розв'язування прямої (26), (27) та спряженої (28), (29) задач було застосовано різницеві схеми ДС-алгоритму [4]. Пошук невідомих інтенсивностей та координат джерел здійснюється так. Покладаємо в  $V(t)$  та  $r(t)$  початкові наближення інтенсивностей та координат і проводимо ітераційний процес:

- 1) обчислюємо  $u$  за схемами ДС-алгоритму [4];
- 2) знаходимо  $\psi$  за схемами ДС-алгоритму [4];
- 3) уточнюємо інтенсивності та координати джерел за формулами

$$\begin{aligned} V^{\beta,n,s+1} &= V^{\beta,n,s} - s_k (\Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) + 2\alpha V^{\beta,n,s}), \\ r_x^{\beta,n,s+1} &= r_x^{\beta,n,s} - \sigma_k \left( \bar{\nabla}_x \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_x^{\beta,n,s} \right), \\ r_y^{\beta,n,s+1} &= r_y^{\beta,n,s} - \sigma_k \left( \bar{\nabla}_y \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_y^{\beta,n,s} \right), \\ \beta &= 1, 2, \dots, p, \quad n = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\bar{\nabla}_x \psi$ ,  $\bar{\nabla}_y \psi$  — різницеві апроксимації другого порядку частинних похідних  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  та  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  відповідно, що мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) &= (1 - \rho_1)((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_x \psi_{k_0, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \psi_{k_0, m_0+1}^{n,s}) + \\ &+ \rho_1((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_x \psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \psi_{k_0+1, m_0+1}^{n,s}), \\ \bar{\nabla}_y \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) &= (1 - \rho_1)((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_y \psi_{k_0, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \psi_{k_0, m_0+1}^{n,s}) + \\ &+ \rho_1((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_y \psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \psi_{k_0+1, m_0+1}^{n,s}), \\ \bar{\nabla}_x \psi_{k_0, m_0}^{n,s} &= \frac{\psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} - \psi_{k_0-1, m_0}^{n,s}}{2h_1}, \quad \bar{\nabla}_y \psi_{k_0, m_0}^{n,s} = \frac{\psi_{k_0, m_0+1}^{n,s} - \psi_{k_0, m_0-1}^{n,s}}{2h_2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$k_0 = [r_x^{\beta,s}/h_1], \quad m_0 = [r_y^{\beta,s}/h_2], \quad \rho_1 = (r_x^{\beta,s} - k_0 h_1)/h_1, \quad \rho_2 = (r_y^{\beta,s} - m_0 h_2)/h_2;$$

4) обчислюємо значення функціоналу якості за формулою

$$\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1}) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J (\tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) - \varphi_j(t))^2 + \alpha \|V\|_p^2 + \gamma \|r\|_p^2, \quad (33)$$

де  $\tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) = (1 - \rho_1)((1 - \rho_2)u_{k_0, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0, m_0+1}^n) + \rho_1((1 - \rho_2)u_{k_0+1, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0+1, m_0+1}^n)$ ,  $k_0 = [x_{1,j}/h_1]$ ,  $m_0 = [x_{2,j}/h_2]$ ,  $\rho_1 = (x_{1,j} - k_0 h_1)/h_1$ ,  $\rho_2 = (x_{2,j} - m_0 h_2)/h_2$ ;

5) якщо  $|\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1})| < \varepsilon$ , то  $V^{s+1}$  — шуканий розв'язок, інакше переходимо на 1).

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

На основі запропонованого алгоритму була розроблена програма для ЕОМ мовою C/C++. Була розглянута пряма модельна задача з відомими джерелами. Розв'язок визначався з рівняння (1), граничних та початкових умов (2), (3) при заданих значеннях інтенсивності  $q^\beta(t)$  і невідомих координатах джерел  $r_x^\beta(t)$ ,  $r_y^\beta(t)$ ,  $\beta = \overline{1, p}$ . Спочатку з використанням ДС-алгоритму [3] була чисельно розв'язана пряма модельна задача з такими параметрами: область  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 300\}$ ,  $h_1 = h_2 = 5$ ; період часу  $0 \leq t \leq 920$ ,  $\tau = 2$ ; 1 джерело з координатами  $x_0 = 165$ ,  $y_0 = 180$  та сталою інтенсивністю 1000. Далі з використанням обчислених значень в 4-х точках спостереження  $z_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  була розв'язана задача ідентифікації координат джерел з такими параметрами: початкове наближення  $x_0^{(0)} = 160$ ,  $y_0^{(0)} = 180$ ; параметри релаксації  $\alpha = \gamma = 1$ , параметри ітераційного алгоритму  $s^k = 0$ ,  $\sigma^k = 10^{-5}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В результаті виконання ітерацій спостерігалось як зменшення функціоналу  $\mathcal{I}$ , так і наближення обчислених координат джерела до модельних.

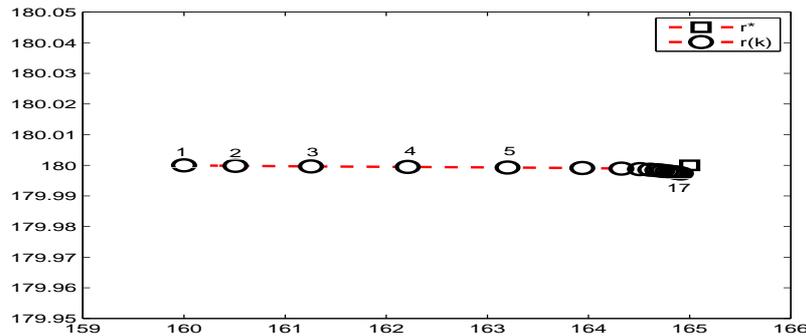


Рис. 1. Обчислені значення координат впродовж ітерацій ( $r^*$  — еталонне джерело,  $r^{(k)}$  — наближення,  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $s_k = 0$ ,  $\sigma_k = 10^{-5}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

### Висновки

В роботі побудовано ітераційний алгоритм розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел з невідомими координатами та інтенсивностями. Отримано явний вигляд критерію якості. Проведений чисельний експеримент з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму). Результати роботи можуть бути використані для розв'язання актуальних задач в екології, медицині та інших галузях народного господарства.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные методы решения задач идентификации источника для параболических задач // Вестник Московского университета, С.15, Вычислительная математика и кибернетика. — 1995. — № 1. — С. 47–56.
2. Ключин Д.А., Шевченко К.В. Идентификация точковых джерел для параболических задач с сингулярной правой частью // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2004. — №2. — С. 62–70.
3. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. / К.: Наукова думка. — 1998. — 466 с.
4. Грищенко О.Ю., Ключин Д.А., Оноцький В.В., Стещенко Г.М. Идентификация точковых структурированных за віком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 40–48.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 5.12.2013

УДК 517.9

## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ: ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ

Н. В. Задоянчук

**РЕЗЮМЕ.** Досліджується задача оптимального керування для виродженої еволюційної варіаційної нерівності з однорідними початковими умовами у випадку, коли пов'язана з нею білінійна форма не задовольняє умовам, що вимагаються для розв'язності таких еволюційних об'єктів. Залучаючи нерівність Харді-Пуанкаре, отримано достатні умови, за яких наведена оптимізаційна задача має єдиний розв'язок.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** Вироджена параболічна варіаційна нерівність, вироджена вагова функція, нерівність Харді-Пуанкаре, потенціал Харді

### 1. ВСТУП

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає задача оптимального керування для такої виродженої еволюційної варіаційної нерівності з однорідними початковими умовами: знайти елемент  $y \in \mathcal{K}$  такий, щоб співвідношення

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \dot{v} \cdot (v - y) \rho dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla(v - y))_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot (v - y) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u \cdot (v - y) d\xi dt \end{aligned}$$

мало місце для всіх елементів  $v \in \mathcal{K}$  таких, що

$$\dot{v} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*),$$

$v(0, x) = 0$ . Тут  $f$  — задане розподілення,  $u$  — керування,  $\rho$  — невід'ємна вагова функція з властивостями  $\rho \in L^1(\Omega)$ ,  $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$  і  $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$ ,  $\mathcal{K}$  — опукла замкнена підмножина простору  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$ ,  $\Gamma_D$  та  $\Gamma_N$  — дві підмножини додатної міри такі, що  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\xi \in \Gamma_N$ .

Для еволюційних варіаційних нерівностей “без виродження” існує багато результатів про розв'язність (див. [4, 5, 8]). Для розглянутих в роботі об'єктів характерною рисою є той факт, що проблема їх розв'язності суттєво

залежить від властивостей вагової функції  $\rho$ . Дійсно, оскільки функція  $\rho$  може бути необмеженою на області  $\Omega$  або досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, то білінійна форма, пов'язана з нерівністю, може втрачати властивості, виконання яких вимагається в теоремах про достатні умови розв'язності розглянутих еволюційних об'єктів. У свою чергу, це призводить до таких наслідків як неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності, ефекту Лаврентьєва та інше (див. [9, 10, 2, 3]).

Мета даної роботи полягає у визначенні достатніх умов на функцію  $\rho$ , за яких наведена задача оптимального керування мала б єдиний розв'язок. Для цього в роботі залучається перетворення, за яким вихідна задача зводиться до проблеми оптимального керування параболічною варіаційною нерівністю з необмеженими коефіцієнтами потенціального типу, і за нерівністю типу Харді-Пуанкаре досліджується питання про існування її єдиного розв'язку.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею  $\partial\Omega$  і нехай  $0 \in \mathbb{R}^N$  є внутрішньою точкою множини  $\Omega$ . Нехай далі  $Q = (0, T) \times \Omega$  є циліндром в  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$ , де  $T < +\infty$ . Через  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$  позначимо його бічну поверхню.

Нехай функція  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє умови:  $\rho > 0$  м.с. на  $\Omega$  і при цьому

$$\rho \in L^1(\Omega), \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N), \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \quad (1)$$

Отже, функцію  $\rho$  можна ототожнити з мірою Радона на  $\Omega$ , поклавши  $\rho(E) = \int_E \rho(x) dx$  для довільної вимірної множини  $E \subset \Omega$ . Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на  $\Omega$  називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина  $\Omega_*$  множини  $\Omega$  така, що

$$\text{dist}(\partial\Omega_*, \partial\Omega) = \delta, \rho > \sigma \text{ м.с. в } \Omega \setminus \Omega_*, \text{ і } \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \Omega_*) \quad (2)$$

для деяких  $\delta > 0$  та  $\sigma > 0$ . Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини  $\Omega$ .

Надалі невід'ємну функцію  $\rho$  з властивостями (1)–(2) будемо називати виродженою ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори  $L^2(\Omega, \rho dx)$  та  $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ , де зокрема  $L^2(\Omega, \rho dx)$  є гільбертовим простором вимірних функцій  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких

$$\|f\|_{L^2(\Omega, \rho dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega, \rho dx)} = \int_{\Omega} f^2 \rho dx < +\infty.$$

Нехай межа області  $\Omega$  розбита на дві підмножини додатної міри  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Покладемо далі  $\Sigma_D = (0, T) \times \Gamma_D$ ,  $\Sigma_N = (0, T) \times \Gamma_N$ . Введемо до розгляду такі функціональні простори  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D) = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$  та  $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)$  як замикання  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$  відносно норми  $\|y\| = \left( \int_{\Omega} y^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2}$ . Позначимо через  $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$  та

$W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D)$  замикання множини  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$  за нормами

$$\|y\|_{W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)}^2 := \int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx,$$

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D)} = \|y\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N}$$

відповідно.

Нехай  $\lambda_* = (N-2)^2/4$ . Тоді для довільної відкритої обмеженої області  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  з достатньо регулярною межею  $\partial\Omega$  знайдеться стала величина  $C(\Omega) > 0$  така, що

$$\int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \lambda_* \frac{y^2}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \right] dx \geq C(\Omega) \int_{\Omega} y^2 dx, \quad \forall y \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D). \quad (3)$$

В літературі співвідношення (3) зазвичай називають нерівністю типу Харді-Пуанкаре (див. [6]). Як випливає з (3), для довільних  $y \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D)$  та  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  можна записати

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \lambda \frac{y^2}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \right] dx \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \lambda_* \frac{y^2}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \right] dx \geq \\ & \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*} \int_{\Omega} y^2 dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, у випадку, коли  $0 < \lambda < \lambda_*$  вирази  $\left( \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \lambda \frac{y^2}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \right] dx \right)^{1/2}$  і  $\left( \int_{\Omega} y^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2}$  є еквівалентними нормами в просторі Соболева  $H_0^1(\Omega, \Gamma_D) = W_0^{1,2}(\Omega, \Gamma_D)$ .

Розглянемо непорожню опуклу замкнену в  $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$  множину  $K = \{v | v \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx), v \geq 0 \text{ м.с. на } \partial\Omega\}$ , що є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою:

$$\|y\|_{\rho}^2 := \int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx. \quad (5)$$

Також розглянемо опуклу замкнену підмножину

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{v | v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)), v(t) \in K \text{ м.с.}\} = \\ &= \{v | v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)), v \geq 0 \text{ м.с. на } \Sigma\} \end{aligned}$$

простору  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$ , що є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою:

$$\|y\|_{\rho(0,T)}^2 := \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx dt. \quad (6)$$

Нехай  $y_{ad} \in L^2(Q)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega; \rho^{-1} dx))$  та  $u_0 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi))$  — задані розподілення, а  $U_\partial$  — непорожня опукла замкнена підмножина в  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi))$  така, що

$$U_\partial = \{u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi)) : \|u - u_0\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi))} \leq R\}, \quad (7)$$

де  $\|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi))}^2 = \int_0^T \int_{\Gamma_N} u^2 \rho^{-1} d\xi dt$ , де  $\xi \in \Gamma_N$ .

Для кожного фіксованого  $t \in [0, T]$  розглянемо еліптичний оператор

$$A : W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \rightarrow (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*,$$

що визначається таким чином:

$$Ay = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right)$$

та для заданого  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$  розглянемо таку задачу оптимального керування на границі для виродженого параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами:

$$I(u, y) = \frac{1}{2} \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho dx))}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))}^2 \rightarrow \inf, \quad (8)$$

$$\rho(x) \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \quad \text{в } Q, \quad (9)$$

$$y|_{\Sigma_D} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n_A} \Big|_{\Sigma_N} \geq u, \quad (11)$$

$$y \left( \frac{\partial y}{\partial n_A} - u \right) = 0 \quad \text{на } \Sigma_N, \quad (12)$$

$$y(0, x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (13)$$

де  $\frac{\partial y}{\partial n_A} = \sum_{i,j=1}^n \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i)$ . Тобто маємо задачу пошуку пари функцій  $(u, y)$  такої, що

$$u \in U_\partial \subset L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi)), \quad y \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$$

та для якої мають місце співвідношення (9)–(13) і на якій функціонал (8) досягав би свого найменшого можливого значення.

Зауважимо, що з огляду на властивості функції  $\rho$  біля межі області  $\Omega$ , в якості простору керувань можемо обрати саме простір

$$\begin{aligned} L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi)) &\subset L^2(0, T; L^2(\partial\Omega, \rho^{-1} d\xi)) \subset \\ &\subset L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi)) \end{aligned}$$

(див. [5, теорема 3.2]).

Покажемо, що задачу оптимального керування (8)–(13) можна звести до задачі оптимального керування для виродженої еволюційної варіаційної

нерівності. Для цього спочатку помножимо обидві частини рівняння (9) на  $v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega, \Gamma_D, \rho dx))$  і застосуємо формулу Гріна. Матимемо:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y} v dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt$$

або

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y} v dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial y}{\partial n_A} v d\xi dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt$$

Пов'яжемо з оператором  $A$  білінійну форму

$$\pi : W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \times W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \rightarrow \mathbb{R},$$

що задається таким чином:

$$\pi(y, z) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} dx, \quad \forall y, z \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$$

і, враховуючи умову (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y} v dx dt + \int_0^T \pi(y, v) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial y}{\partial n_A} v d\xi dt \geq \\ &\geq \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u v d\xi dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер помножимо рівняння (9) на  $y \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega, \Gamma_D, \rho dx))$ . Застосовуючи аналогічні до попередніх міркування, в силу (12), отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y} y dx dt + \int_0^T \pi(y, y) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f y dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial y}{\partial n_A} y d\xi dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} f y dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u y d\xi dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Згідно з [5, зауваження 1.6] маємо, що у випадку, коли  $\mathcal{K}$  — замкнений опуклий конус в  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$  з вершиною в початку координат, співвідношення (14),  $\forall v \in \mathcal{K}$ , та (15) рівносильні співвідношенню

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y} (v - y) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) dx dt &\geq \\ \geq \int_0^T \int_{\Omega} f (v - y) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u (v - y) d\xi dt, \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, приходимо до такої варіаційної задачі:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y}(v-y) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \rho(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) dx dt \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} f(v-y) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u(v-y) d\xi dt, \quad \forall v \in \mathcal{K}, \\ & y \in \mathcal{K}, u \in U_{\partial}, \\ & y(0, x) = 0 \text{ в } \Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Однак, формулювання задачі (17) має сенс лише тоді, коли

$$\dot{y}(t) \in (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*$$

м.с. (щоб вираз  $\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) \dot{y}(v-y) dx dt$  мав сенс). Цю умову не завжди можна реалізувати, і тому потрібно ослабити формулювання задачі (17).

Для цього розглянемо таке сімейство елементів  $v(t) \in K$ , що  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*)$  та  $\sqrt{\rho} \dot{v} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*)$ . Відмітимо, що множина таких функцій є непорожньою, оскільки такій властивості задовольняють, принаймні, функції  $v(t) \in C_0^{\infty}(\Omega; \Gamma_D) \subset W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \subset (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*$ . Нехай

$$\begin{aligned} X &= \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \dot{v})(v-y) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} f(v-y) dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} u(v-y) d\xi dt. \end{aligned}$$

Будемо мати

$$\begin{aligned} X &= \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \dot{y})(v-y) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} f(v-y) dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} u(v-y) d\xi dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \rho(\dot{v} - \dot{y})(v-y) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \rho(\dot{v} - \dot{y})(v-y) dx dt. \end{aligned}$$

Доведемо, що  $\int_0^T \int_{\Omega} \rho(\dot{v} - \dot{y})(v-y) dx dt \geq 0$ . Проінтегруємо цей вираз частинами.

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\dot{v} - \dot{y}) \rho (v-y) dx dt = \int_{\Omega} \rho(x) (v-y)(v-y) dx \Big|_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} (v-y) \rho(x) (\dot{v} - \dot{y}) dt =$$

$$= \int_{\Omega} \rho(x) (|v(T) - y(T)|^2 - |v(0) - y(0)|^2) dx - \int_0^T \int_{\Omega} (v - y) \rho(\dot{v} - \dot{y}) dx dt.$$

Нехай  $v(0) = 0$ , тому  $2 \int_0^T \int_{\Omega} \rho(\dot{v} - \dot{y})(v - y) dx dt = \int_{\Omega} \rho(x) |v(T) - y(T)|^2 dx \geq 0$  як інтеграл від невід'ємної функції.

З огляду на зроблені перетворення можемо перейти від вихідної задачі (8)–(13) до такої задачі оптимального керування для виродженої параболічної нерівності:

$$I(u, y) = \frac{1}{2} \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho dx))}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi))}^2 \rightarrow \inf, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \dot{v} \cdot (v - y) \rho dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla(v - y))_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot (v - y) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u \cdot (v - y) d\xi dt \end{aligned} \quad (19)$$

$$\forall v \in \mathcal{K}, \dot{v} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*), v(0, x) = 0,$$

$$u \in U_{\partial}, y \in \mathcal{K}, \quad (20)$$

$$y(0, x) = 0, x \in \Omega. \quad (21)$$

Таким чином, маємо “слабку” постановку задачі оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: знайти таку пару функцій  $(u^0, y^0) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \rho^{-1} d\xi)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$ , для якої виконуються співвідношення (19)–(21) і на якій функціонал (18) досягав би свого найменшого можливого значення.

### 3. ПОПЕРЕДНІЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ (18)–(21)

**Твердження 1.** Для довільного елемента  $y \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$  має місце представлення  $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ .

*Доведення.* Зафіксуємо довільний елемент  $y \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$  і покажемо, що  $z = y\sqrt{\rho} \in L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 &= \|y\sqrt{\rho}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt \leq \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx dt = \|y\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))}^2. \end{aligned}$$

Звідки  $z \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Далі, розглянемо

$$\|z\|_{L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D))}^2 = \int_0^T \|z\|_{W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D)}^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \|z\|_{L^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\nabla z\|_{L^1(\Omega)^N}^2 dt + 2 \int_0^T \|z\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^1(\Omega)^N} dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \|z\|_{L^1(\Omega)}^2 dt + 2 \int_0^T \|\nabla z\|_{L^1(\Omega)^N}^2 dt = \\
 &= 2 \int_0^T \left( \int_{\Omega} y \sqrt{\rho} dx \right)^2 dt + 2 \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho} \left( \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right) \right|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^2 dt = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Проаналізуємо  $I_1$ . Оскільки

$$\left( \int_{\Omega} y \sqrt{\rho} dx \right)^2 \leq \left( \int_{\Omega} dx \right) \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right) = |\Omega| \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right),$$

то

$$I_1 \leq 2|\Omega| \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt. \quad (22)$$

Проаналізуємо  $I_2$ . Розглянемо

$$\begin{aligned}
 &\left( \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho} \left( \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right) \right|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^2 \leq \\
 &\leq \left[ \left( \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2} \right]^2 = \\
 &= |\Omega| \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{1}{4} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right) \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right) + \\
 &+ |\Omega|^{1/2} \left( \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq |\Omega| \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{1}{4} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right) \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} |\Omega| \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right) \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right) \leq \\
 &\leq C \left( \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right).
 \end{aligned}$$

Тому

$$I_2 \leq 2C \left( \int_0^T \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt \right). \quad (23)$$

В силу (22) та (23) маємо

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D))}^2 &\leq C_1 \left( \int_0^T \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} y^2 \rho dx dt \right) = \\ &= C_1 \|y\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))}^2. \end{aligned}$$

Отже,  $z \in L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D))$ .  $\square$

Аналогічно до [7] маємо, що відображення

$$\varphi : L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \rightarrow L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D) \cap L^2(\Omega)),$$

що визначається як  $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$ , не є сюр'єктивним. Проте у просторі  $L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$  множина його образів

$$\varphi(L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)))$$

є щільною. Легко бачити, що для довільного  $z \in L^2(0, T; C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \Gamma_D)) \subset L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$ , маємо  $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))}^2 &= \int_0^T \int_{\Omega} z^2 dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}} \nabla \ln \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx dt \leq \\ &\leq \|z\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla z|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} z^2 |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt \leq \\ &\leq \|z\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + 2 \int_0^T \| |\nabla z|_{\mathbb{R}^N} \|_{C(\Omega)}^2 |\Omega| dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \|z^2\|_{C(\Omega)} \| \nabla \ln \rho \|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2 dt \leq \|z\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ &+ 2\sqrt{T} |\Omega| \left( \int_0^T \| |\nabla z|_{\mathbb{R}^N} \|_{C(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_0^T \|z^2\|_{C(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \| \nabla \ln \rho \|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^4 dt \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= \|z\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + 2\sqrt{T}|\Omega| \|\nabla z\|_{L^2(0,T;C(\Omega))}^2 + \\ + \frac{1}{2} \|z^2\|_{L^2(0,T;C(\Omega))} \cdot \left( \int_0^T \|\nabla \ln \rho\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)}^4 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Таким чином, внаслідок встановленого результату та неперервності вкладення  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \subset L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$ , можемо стверджувати, що існує щільна множина  $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  така, що  $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \forall z \in \mathcal{D}_\rho$ .

Далі розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}_\rho \subset L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \rightarrow L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)),$$

де  $\mathcal{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ . Оскільки область визначення  $\mathcal{D}_\rho$  даного відображення є щільною множиною банахового простору  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ , то для  $\mathcal{F}$ , як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор

$$\mathcal{F}^* : D(\mathcal{F}^*) \subset L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*) \rightarrow L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*)$$

такий, що

$$\langle \mathcal{F}^* v, z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} = \langle v, \mathcal{F}z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))}, \\ \forall z \in \mathcal{D}_\rho \text{ і } \forall v \in D(\mathcal{F}^*),$$

де  $D(\mathcal{F}^*)$  — це множина тих елементів  $v \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*)$ , що  $\exists C > 0$  таке, що для всіх  $z \in \mathcal{D}_\rho$  має місце таке співвідношення

$$\left| \langle v, \mathcal{F}z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))} \right| \leq C \|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку, спряжений оператор  $\mathcal{F}^*$  не є щільно визначеним.

З огляду на отримані результати зауважимо наступну властивість для множини  $\mathcal{K}$ . Оскільки  $\mathcal{K}$  є замкненою підмножиною простору  $L^2(0, T; \mathcal{W}_\rho)$ , де  $\mathcal{W}_\rho$  утворено як замикання простору фінітних функцій  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$  за нормою (5), то  $\forall y \in \mathcal{K}$  маємо:  $y = \mathcal{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ , де  $z \in L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$  та  $\|y\|_{\rho(0,T)} = \left\| \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right\|_{\rho(0,T)} < +\infty$  (за вихідними припущеннями). Звідси отримуємо, що  $z \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ . Дійсно,  $\forall y \in L^2(0, T; \mathcal{W}_\rho)$  маємо

$$\|y\|_{L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)}^2 = \int_0^T \int_\Omega y^2(x) \rho(x) dx dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla y(x) + \frac{y(x)}{2} \nabla \ln \rho(x) \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho(x) dx dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left| \sqrt{\rho} \nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}} \nabla \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 dx dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} (y\sqrt{\rho})^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(\sqrt{\rho}y)|_{\mathbb{R}^N}^2 dxdt = \|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}^2.$$

Отже,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}(\mathcal{D}_\rho)$ .

Введемо до розгляду

**Означення 1.** Будемо казати, що  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  є ваговою функцією потенціального типу, якщо  $\rho > 0$  м.с. на  $\Omega$ ,  $\rho \in L^1(\Omega)$ ,  $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ ,  $\nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  та існують сталі  $\hat{C}(\Omega) > 0$ ,  $\tilde{C} > 0$  і підобласть  $\Omega_* \subset \Omega$  така, що  $\rho \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \Omega_*)$ , де  $\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$  при деякому  $\delta > 0$ , і при цьому виконуються нерівності

$$\rho(x) \geq \sigma \text{ на } \Omega \setminus \Omega_* \text{ при деякому } \sigma > 0, \quad (24)$$

$$0 < -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} \leq \tilde{C} \text{ на } \Sigma_N; \quad (25)$$

$$-\hat{C}(\Omega) \leq -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 < \frac{2\lambda_*}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} = \frac{(N-2)^2}{2|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \text{ в } \Omega. \quad (26)$$

В даному випадку функцію  $V(x) = -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2$  будемо називати потенціалом Харді для вагової функції  $\rho$ .

Пов'яжемо з нерівністю (19) білінійну форму

$$\pi(\cdot, \cdot) : L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \rightarrow \mathbb{R},$$

що визначається таким чином:

$$\pi(y, v) = \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dxdt.$$

**Твердження 2.** У випадку, коли  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  є ваговою функцією потенціального типу, має місце співвідношення

$$\pi(\mathcal{F}z, \mathcal{F}v) = \pi_1(z, v), \quad (27)$$

де білінійна форма

$$\pi_1(\cdot, \cdot) : L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \rightarrow \mathbb{R}$$

визначається таким чином:

$$\pi_1(z, v) = \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x) z v dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z v d\xi dt, \quad (28)$$

де

$$V(x) = -\Delta \ln \rho - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (29)$$

*Доведення.* Із [7] маємо, зокрема, що для  $z$  із деякої щільної підмножини в просторі  $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)$  елемент  $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$  та  $\nabla y = \nabla \left( \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (\nabla z - \frac{z}{2} \nabla \ln \rho)$ . Беручи до уваги ці перетворення, той факт, що для  $v$  та  $z$  із  $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  маємо, що

$$\mathcal{F}z, \mathcal{F}v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)),$$

та, враховуючи перетворення (29), будемо мати

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{F}z, \mathcal{F}v) &= \int_0^T \int_\Omega (\nabla(\mathcal{F}z), \nabla(\mathcal{F}v))_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla \left( \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right), \nabla \left( \frac{v}{\sqrt{\rho}} \right) \right)_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}} \nabla \ln \rho, \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla v - \frac{v}{2\sqrt{\rho}} \nabla \ln \rho \right)_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla z - \frac{z}{2} \nabla \ln \rho, \nabla v - \frac{v}{2} \nabla \ln \rho \right)_{\mathbb{R}^N} dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (v \nabla z, \nabla \ln \rho)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\nabla \ln \rho, z \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_\Omega (z \nabla \ln \rho, v \nabla \ln \rho)_{\mathbb{R}^N} dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\nabla(z \cdot v), \nabla \ln \rho)_{\mathbb{R}^N} dx dt + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^T \int_\Omega (z \nabla \ln \rho, v \nabla \ln \rho)_{\mathbb{R}^N} dx dt = \\ &= \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \left( -zv \Delta \ln \rho - \frac{1}{2} zv |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 \right) dx dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} zv d\xi dt = \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x) z v - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z v d\xi dt = \pi_1(z, v).$$

□

Перейдемо у варіаційній нерівності (19) до її еквівалентного опису. Для цього утворимо

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\eta \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D) | \eta = \\ &= \sqrt{\rho} y, \forall y \in K \subset W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)\} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{\eta \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) | \eta(t) \in K_1 \text{ м.с.}\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \eta \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) : \\ \eta = \sqrt{\rho} y, \forall y \in K \subset L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

які за побудовою та вихідними припущеннями є опуклими замкненими підмножинами просторів  $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)$  та  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  відповідно. Крім того, очевидно, елемент  $\eta \in K_1$  успадковує властивості сліду вздовж межі області  $\partial\Omega$  від елементу  $y \in K$ . Далі, беручи до уваги крайову умову (11) для  $y \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$ , що має представлення  $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ , будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial n_A} &= \sum_{i,j=1}^N \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \cos(n, x_i) = \sum_{i,j=1}^N \sqrt{\rho} \frac{\partial z}{\partial x_j} \cos(n, x_i) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sqrt{\rho} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_j} z \cos(n, x_i) = \sqrt{\rho} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2} \sqrt{\rho} z \frac{\partial \ln \rho}{\partial n}, \end{aligned}$$

де  $n$  — одиничний вектор зовнішньої нормалі до бокової поверхні  $\Sigma_N$ . Таким чином, для нової змінної  $z$  має місце крайова умова типу Робіна:

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2} z \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} \geq \frac{u}{\sqrt{\rho}} \text{ на } \Sigma_N. \quad (30)$$

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(p, z) = \frac{1}{2} \|z - y_{ad}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|p\|_{L^2(\Sigma_N)}^2 \rightarrow \inf, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(w - z) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x) z (w - z) dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z (w - z) d\xi dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}} (w - z) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p (w - z) d\xi dt, \end{aligned}$$

$$\forall w \in \mathcal{K}_1, \dot{w} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*), w(0, x) = 0, \quad (32)$$

$$p \in P_{\partial}, z \in \mathcal{K}_1, \quad (33)$$

$$z(0, x) = 0, x \in \Omega, \quad (34)$$

де  $p = \frac{u}{\sqrt{\rho}}$ ,  $V(x) = -\Delta \ln \rho - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2$ ,

$$P_{\partial} := \left\{ p \in L^2(\Sigma_N) : \left\| p - \frac{u_0}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Sigma_N)} \leq R \right\}$$

**Регулярність задачі оптимального керування (31)–(34).**

Тепер покажемо регулярність задачі (31)–(34), тобто покажемо, що обравши в якості вагової функції  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  функцію потенціального типу, варіаційна нерівність (32) матиме принаймні один розв'язок при кожному допустимому керуванні  $p \in P_{\partial}$ . Для цього скористаємось аналогами відомих результатів Ж.-Л. Ліонса (див. [4, теорема 8.2, теорема 9.2]), які стосуються розв'язності еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей.

**Твердження 3.** *Нехай  $K$  — опукла замкнена необмежена множина сепарабельного рефлексивного банахового простору  $V$ . Нехай  $\pi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — білінійна форма, для якої виконуються такі умови:*

1) *умова обмеженості:  $\exists L > 0$  таке, що  $|\pi(u, v)| \leq L \|u\|_V \|v\|_V$ ,  $\forall u, v \in V$ ;*

2) *якщо  $u_j \rightarrow u$  слабо в  $V$ ,  $u_j, u \in K$ ,  $i \limsup \pi(u_j, u_j - u) \leq 0$ , то*

$$\liminf \pi(u_j, u_j - v) \geq \pi(u, u - v) \quad \forall v \in V; \quad (35)$$

3) *умова коерцитивності: існує таке  $v_0 \in K$ , що*

$$\frac{\langle \pi(v, v - v_0) \rangle_V}{\|v\|_V} \rightarrow \infty \text{ при } \|v\|_V \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Тоді для заданого  $f \in V^*$  існує такий елемент  $u \in K$ , для якого має місце варіаційна нерівність

$$\pi(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_V \quad \forall v \in K, \quad (37)$$

де  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V \rightarrow \mathbb{R}$  — канонічне спарювання просторів  $V^*$  та  $V$ .

*Доведення.* Нехай  $B_R = \{v \in V, \|v\|_V \leq R\}$ ,  $K_R = K \cap B_R$ . Оскільки множина  $K_R$  опукла, замкнена і обмежена, то за [4, теорема 8.1] з відповідними змінами в термінах білінійної форми, існує таке  $u_R \in K_R$ , що

$$\pi(u_R, v - u_R) \geq \langle f, v - u_R \rangle_V \quad \forall v \in K_R. \quad (38)$$

Виберемо  $R \geq R_0$ , де  $R_0$  таке, що  $\|v_0\|_V \leq R_0$ . Тоді в (38) можна взяти  $v = v_0$ , звідки в силу (36) випливає, що  $\|u_R\|_V \leq C$ . Звідси та із умови 1) теореми випливає, що можна вказати таку послідовність  $R \rightarrow \infty$ , що  $u_R \rightarrow u$  слабо в  $V$  та  $\pi(u_R, v) \rightarrow \pi(u, v)$ . Оскільки  $K$  замкнена, то  $u \in K$ .

З іншого боку,  $\pi(u_R, u_R - u) \leq \langle f, u_R - u \rangle_V$ , коли  $R \geq \|u\|_V$ , так що  $\limsup \pi(u_R, u_R - u) \leq 0$ , і тому, в силу умови 2) теореми

$$\liminf \pi(u_R, u_R - v) \geq \pi(u, u - v), \quad (39)$$

а оскільки

$$\pi(u_R, u_R - v) \leq \langle f, u_R - v \rangle_V \rightarrow \langle f, u - v \rangle_V \quad \forall v \in K,$$

то із (39) маємо, що

$$\pi(u, u - v) \leq \langle f, u - v \rangle_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in K.$$

□

**Твердження 4.** Нехай  $\mathcal{V}$  — рефлексивний банахів простір,  $\mathcal{H}$  — гільбертів простір, причому  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^*$ ,  $K$  — замкнена опукла множина в  $\mathcal{V}$ . Нехай  $\Lambda$  — такий оператор, що

$$-\Lambda \text{ — інфінітезимальний породжуючий оператор напівгрупи } s \mapsto G(s) \text{ в } \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{V}^*, \text{ що є стискаючою напівгрупою в } \mathcal{H}. \quad (40)$$

Нехай білінійна форма  $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  така, що для неї виконуються умови 1), 2) та 3) з  $v_0 \in K \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*) = \{v \mid v \in K, \dot{v} \in \mathcal{V}^*, v(0) = 0\}$  твердження 3 (див. [4] щодо визначення простору  $D(\Lambda; \mathcal{V}^*)$ ).

Нехай для  $\Lambda$  і  $K$  виконуються “умови узгодженості”:  $\forall v \in K$  існує деяка “регуляризуюча” послідовність  $v_j$ , що задовольняє умови:

$$\begin{aligned} (i) & v_j \in K \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*), \\ (ii) & v_j \rightarrow v \text{ в } \mathcal{V}, \quad j \rightarrow \infty, \\ (iii) & \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle \Lambda v_j, v_j - v \rangle_{\mathcal{V}} \leq 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Тоді  $\forall f_1 \in \mathcal{V}^*$  існує розв’язок  $u \in K$  варіаційної еволюційної нерівності

$$\langle \Lambda v, v - u \rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v - u) \geq \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in K \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*). \quad (42)$$

*Доведення.* 1) Спочатку зведемо нерівність

$$\langle \Lambda u, v - u \rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v - u) \geq \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}}, \quad v \in K$$

до еліптичної нерівності, замінивши оператор  $\Lambda$  відповідним різницеvim співвідношенням, описаним в [4]. Тобто доведемо, що існує  $u_h \in K$  — розв’язок варіаційної нерівності

$$\left\langle \frac{I - G(h)}{h} u_h, v - u_h \right\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u_h, v - u_h) \geq \langle f_1, v - u_h \rangle_{\mathcal{V}}, \quad v \in K. \quad (43)$$

Розглянемо білінійну форму  $\pi_2 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , що визначається таким чином:

$$\pi_2(v, w) = \pi_1(v, w) + \left\langle \frac{I - G(h)}{h} v, w \right\rangle_{\mathcal{V}}, \quad v, w \in \mathcal{V}.$$

В силу виконання умов твердження 3 для  $\pi_1$  та властивостей різницевого оператора, будемо мати, що  $\pi_2$  також задовольняє умови теореми 3. Тому існує розв’язок  $u_h \in K$  нерівності (43).

2) Із коерцитивності  $\pi_2$  випливає, що  $u_h \rightarrow u$  слабко в  $\mathcal{V}$ , а із умови обмеженості для  $\pi_1$  одержуємо, що з точністю до підпослідовності  $\pi_1(u_h, v) \rightarrow \pi_1(u, v)$ . Із (43) маємо, що

$$\left\langle \frac{I - G(h)}{h} v, v - u_h \right\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u_h, v - u_h) \geq \langle f_1, v - u_h \rangle_{\mathcal{V}}, \quad v \in K. \quad (44)$$

Взявши  $v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*)$ , будемо мати:

$$\limsup \pi_1(u_h, u_h) \leq \langle \Lambda v, v - u \rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v) - \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}},$$

звідки

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \pi_1(u_h, u_h - u) \leq \pi_1(u, v - u) - \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda v, v - u \rangle_{\mathcal{V}} \quad (45)$$

$$\forall v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*).$$

З іншого боку, взявши до уваги умови узгодженості (41), будемо мати:

$$\inf_{v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*)} [\pi_1(u, v - u) - \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda v, v - u \rangle_{\mathcal{V}}] \leq$$

$$\leq \liminf [\pi_1(u, u_j - u) - \langle f_1, u_j - u \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda u_j, u_j - u \rangle_{\mathcal{V}}] \leq 0.$$

Далі із (45) випливає, що

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \pi_1(u_h, u_h - u) \leq 0. \quad (46)$$

Оскільки для білінійної форми  $\pi_1$  виконується умова 2) твердження 3, то одержимо

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \pi_1(u_h, u_h - v) \geq \pi_1(u, u - v) \quad \forall v \in \mathcal{K}. \quad (47)$$

Проте, в силу (44), маємо

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \pi_1(u_h, u_h - v) \leq$$

$$\leq \langle \Lambda v, v - u \rangle_{\mathcal{V}} - \langle f_1, v - u \rangle_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*). \quad (48)$$

Із (47) та (48) одержимо, що  $u$  задовольняє (42).  $\square$

По аналогії з [4, теорема 9.4] можемо одержати

**Твердження 5.** *Якщо в умовах твердження 4  $\forall u, v \in \mathcal{K}$  виконується*

$$\pi_1(u - v, u - v) \leq 0 \Rightarrow u = v, \quad (49)$$

*то варіаційна еволюційна нерівність (42) має єдиний розв'язок.*

Встановимо такий результат.

**Теорема 1.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$  та  $p \in P_{\partial}$  варіаційна нерівність (32) має єдиний розв'язок  $z = z(p, f) \in \mathcal{K}_1$  такий, що  $z \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ .*

*Доведення.* Покладемо

$$V = \left\{ w \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D) : \int_{\Omega} \left[ |\nabla w|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{1}{2} V(x) w^2 \right] dx < +\infty \right\}, \quad H = L^2(\Omega),$$

і покажемо, що в цьому випадку для нерівності (32) виконуються всі передумови твердження 5. Залучаючи міркування з доведення теореми 3.2 із [1], будемо мати, що  $V = W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)$ . Тому, поклавши

$$\mathcal{V} = L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)),$$

в силу теореми Реліха-Кондрашова, будемо мати наступні компактні вкладки:

$$L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*).$$

За множину  $\mathcal{K}$  із твердження 5 можемо взяти множину  $\mathcal{K}_1$ , описану вище. Вона задовольняє умови даного твердження.

Далі, згідно твердження 2 маємо, що з нерівністю (32) можна пов'язати білінійну форму  $\pi_1$ , визначену за правилом:

$$\begin{aligned} \pi_1(z, w) = & \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dxdt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} zV(x)w dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z w d\xi dt \quad \forall w \in \mathcal{K}_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (24)–(26), теорему про сліди та нерівність Харді-Пуанкаре, отримуємо: існують  $C_1, C_2 > 0$  такі, що:

$$|\pi_1(z, w)| \leq (1 + C_1) \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))} \|w\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \pi_1(z - w, z - w) \geq & \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla(z - w))_{\mathbb{R}^N}^2 dxdt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x)(z - w)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} (z - w)^2 d\xi dt \geq \\ & \geq C_2 \|z - w\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2 > 0, \quad \forall z \neq w. \end{aligned} \quad (52)$$

Отже, білінійна форма  $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою та задовольняє умову (49), а тому вона задовольняє умови 1) та 2) твердження 3. Крім цього,  $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  є коерцитивною в сенсі

$$\frac{\pi_1(z, z)}{\|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2} \rightarrow +\infty, \quad \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))} \rightarrow \infty.$$

Для довільного елемента  $w_0 \in \mathcal{K}_1 \cap D(\Lambda, \mathcal{V}^*)$  згідно (52) та оцінки (51), маємо

$$\begin{aligned} \pi_1(z, z - w_0) &= \pi_1(z, z) - \pi_1(z, w_0) \geq \\ &\geq C_2 \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2 - |\pi_1(z, w_0)| \geq \\ &\geq C_2 \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2 - (1 + C_1) \|w_0\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))} \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\pi_1(z, z - w_0)}{\|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2} \rightarrow +\infty, \quad \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))} \rightarrow \infty,$$

звідки маємо виконання умови 3) твердження 3.

У випадку, коли  $\Lambda = \frac{d}{dt}$ ,  $\mathcal{V} = L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ ,  $\mathcal{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ , виконуються умови (40) та (41) (див. [4, приклад 9.2 та теорема 9.1]).

Оскільки умова  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$  гарантує належність елемента  $\frac{f}{\sqrt{\rho}}$  простору  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , а умова  $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))$  гарантує, що  $\frac{u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N)) \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ , а простір  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  компактно вкладається в простір  $L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*)$  та вкладення

$$L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)) \subset L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*)$$

є щільним, то  $f_1$ , що задається таким чином:

$$\langle f_1, v \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u v d\xi dt, \quad v \in \mathcal{K}_1,$$

визначене в  $L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))^*)$ . Тому виконуються всі передумови твердження 5. Отже, варіаційна задача (32) має єдиний розв'язок  $z \in \mathcal{K}_1$  при кожному фіксованому допустимому керуванні  $p \in P_{\partial}$ .  $\square$

### Еквівалентність задач (18)–(21) та (31)–(34)

Далі введемо до розгляду множини

$$\Xi_1 = \{(u, y) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)) \mid \\ u \text{ та } y \text{ пов'язані співвідношеннями (19) – (21)}\}$$

та

$$\Xi_2 = \{(p, z) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \mid \\ p \text{ та } z \text{ пов'язані співвідношеннями 32 – (34)}\}$$

які надалі будемо називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (18)–(21) та (31)–(34) відповідно.

**Означення 2.** Будемо казати, що пари функцій  $(u^0, y^0) \in \Xi_1$  та  $(p^0, z^0) \in \Xi_2$  є оптимальними розв'язками задач (18)–(21) та (31)–(34) відповідно, якщо

$$\inf_{(u,y) \in \Xi_1} I(u, y) = I(u^0, y^0), \quad \inf_{(p,z) \in \Xi_2} J(p, z) = J(p^0, z^0).$$

Доведемо, що задачі оптимального керування (18)–(21) та (31)–(34) є в певному сенсі еквівалентними. Відтак, з регулярності задачі (31)–(34), буде впливати регулярність задачі (18)–(21).

**Теорема 2.** Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Нехай  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ ,  $y_{ad} \in L^2(Q)$  є заданими функціями. Тоді допустима пара  $(p^0, z^0) \in \Xi_2$  є оптимальною в задачі (31)–(34) в тому і тільки в тому випадку, коли

$$(u^0, y^0) := \left( \sqrt{\rho} p^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (53)$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (18)–(19) на множині  $\Xi_1$ . При цьому має місце рівність

$$\inf_{(p,z) \in \Xi_2} J(p, z) = J(p^0, z^0) = I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y) \in \Xi_1} I(u, y). \quad (54)$$

*Доведення.* Із твердження 1 маємо, що для довільного  $v \in \mathcal{K}$  існує елемент  $w \in \mathcal{K}_1$  такий, що  $v = \mathcal{F}w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$ . В силу твердження 2 маємо, що

$$\pi(y, v) = \pi_1(z, w).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \dot{v}(v-y)\rho dxdt &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\dot{w}}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \rho dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(w-z) dxdt; \\ \int_0^T \int_{\Omega} f(v-y) dxdt &= \int_0^T \int_{\Omega} f \left( \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}}(w-z) dxdt, \\ \int_0^T \int_{\Gamma_N} u(v-y) d\xi dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_N} u \left( \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{u}{\sqrt{\rho}}(w-z) dxdt. \end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до висновку, що  $y \in \mathcal{K}$  є розв'язком варіаційної нерівності (19) тоді й лише тоді, коли  $z = \sqrt{\rho}y \in \mathcal{K}_1$  є розв'язком варіаційної нерівності (32).

Отже, розв'язки варіаційних нерівностей (19) та (32) пов'язані співвідношенням  $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ . Тепер означимо в просторі  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))$  відображення  $G$  за правилом  $G(u) = \left( \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right)$  і покажемо, що воно ізометрично відображає простір  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))$  на простір  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N))$ . Для довільного керування  $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))$  маємо  $p = G(u)$ , де

$$\|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))}^2 = \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{u^2}{\rho} d\xi dt = \int_0^T \int_{\Gamma_N} p^2 d\xi dt = \|p\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N))}^2,$$

Більше того, умова (33) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u \in U_{\partial} \Leftrightarrow p = \frac{u}{\sqrt{\rho}} \in P_{\partial}.$$

Таким чином,  $(u, y) \in \Xi_1 \Leftrightarrow (p, z) \in \Xi_2$ .

Доведемо рівність (18) та (31) на відповідних допустимих парах:

$$\begin{aligned} I(u, y) &= \frac{1}{2} \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi))}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho}y - y_{ad}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|p\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N))}^2 = J(p, z), \end{aligned}$$

що і гарантує виконання умови (54).  $\square$

#### 4. Розв'язність оптимізаційної задачі

**Теорема 3.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Нехай  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ ,  $y_{ad} \in L^2(Q)$  є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування (18)–(21) має єдиний розв'язок  $(u^0, y^0)$  в просторі  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1} d\xi)) \times L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)))$ .*

*Доведення.* В силу теореми 2 задачі (18)–(21) та (31)–(34) є еквівалентними. Тому для однозначної розв’язності задачі (18)–(21) достатньо показати, що задача (31)–(34) має єдиний розв’язок. Спочатку покажемо, що має місце неперервна залежність розв’язку  $z$  від керування  $p$  в певному сенсі, а саме покажемо, що відображення  $p \mapsto z(p)$  простору  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N, \rho^{-1}d\xi))$  в  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  є слабо неперервним. Дійсно, нехай  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset P_\partial$  — слабо збіжна послідовність керувань (існування слабо збіжної послідовності випливає із компактності множини  $P_\partial$  в  $L^2(\Sigma_N)$ ). Покажемо, що відповідна послідовність розв’язків  $\{z_k = z(p_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  нерівності (32) є обмеженою, а відтак і слабо збіжною, в просторі  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ . Припустимо від супротивного, що існує  $\{z_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , така що  $\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Нагадаємо, що диференціальний оператор  $\Lambda = \frac{d}{dt}$  ми можемо наблизити різницеvim оператором  $\frac{I-G(h)}{h}$ . В силу умови 3) твердження 3 для  $\pi_1$  та властивостей оператора  $\frac{I-G(h)}{h}$ , маємо:

$$\begin{aligned} +\infty &\leftarrow \frac{\int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z_{k_n} - w) dx dt}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}} + \frac{\pi_1(z_{k_n}, z_{k_n} - v_0)}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}} \leq \\ &\leq \frac{\int_0^T \int_\Omega f / \sqrt{\rho}(z_{k_n} - v_0) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p_{k_n}(z_{k_n} - v_0) dx dt}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}} \leq \\ &\leq \frac{(\|f / \sqrt{\rho}\|_{L^2(0, T; L_2(\Omega))} + \|p_{k_n}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N))}) \|z_{k_n} - v_0\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}} \leq \\ &\leq (\|f / \sqrt{\rho}\|_{L^2(0, T; L_2(\Omega))} + \|p_{k_n}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_N))}) \left(1 + \frac{\|v_0\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}}\right) \leq C, \end{aligned}$$

для довільного фіксованого елемента

$$v_0 \in \mathcal{K}_1 \cap D(\Lambda; L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*)),$$

оскільки  $P_\partial$  є компактною множиною простору  $L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))^*)$ . Отже, приходимо до протиріччя. Далі, з обмеженості послідовності  $\{z_k = z(p_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  випливає її слабка збіжність (з точністю до підпослідовності) до деякого елемента  $z^* \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ .

Нехай  $z_k \rightarrow z^*$  слабо в  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ . Оскільки множина  $\mathcal{K}_1$  є замкнутою і опуклою, то, за теоремою Мазура, вона є слабо замкнутою. Отже,  $z^* \in \mathcal{K}_1$ . Покажемо, що  $(p, z^*) \in \Xi_2$ , тобто  $z^* = w(p)$ , а отже, множина  $\Xi_2$  є замкнутою відносно топології слабкої збіжності в  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$ . Для цього перейдемо до границі у наступному співвідношенні:

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z_k - w) dx dt + \pi_1(z_{k_n}, z_{k_n} - w) \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z_k - w) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p_k(z_k - w) d\xi dt \quad \forall w \in \mathcal{K}_1$$

і скористаємось компактністю вкладення

$$L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

та властивістю напівнеперервності норми в  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$  відносно слабкої збіжності. В результаті будемо мати

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(z^* - w) dx dt + \pi_1(z^*, z^* - w) &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(z^* - w) dx dt + \pi_1(z^*, z^*) - \pi_1(z^*, w) = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(z^* - w) dx dt + \|z^*\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} (z^*)^2 d\xi dt - \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla z^*, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x) z^* w dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z^* w d\xi dt \leq \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(z^* - w) dx dt + (1 + \tilde{C}) \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))}^2 - \\ &- \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla z_k, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} V(x) z_k w dx dt \right) - \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z_k w d\xi dt \right) \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \dot{w}(z_k - w) dx dt + \pi_1(z_k, z_k - w) \right) \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z_k - w) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p_k(z_k - w) dx dt \right) = \\ &= \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z^* - w) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p(z^* - w) dx dt \right), \end{aligned}$$

$\forall w \in \mathcal{K}_1$ ,  $\dot{w} \in L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))^*)$ ,  $w(0) = 0$ . Отже,  $(p, w^*) \in \Xi_2$  і тим самим доведено слабку неперервність відображення  $p \mapsto z(p)$ .

Відмітимо, що функціонал якості (31) — строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на

$$L^2(0, T; L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)).$$

Отже, за теоремою 1.1 та 1.2 із [5] існує єдина пара

$$(p^0, z^0) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$$

така, що  $(p^0, z^0) \in \Xi_2$  і  $J(p^0, z^0) = \inf_{(p,w) \in \Xi_2}$ , тобто  $(p^0, z^0)$  є оптимальною парою для задачі (31)–(34). Таким чином, за теоремою 2, пара

$$(u^0, y^0) := \left( \sqrt{\rho} p, \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right)$$

є єдиним оптимальним розв'язком для задачі (18)–(21), що і потрібно було встановити.  $\square$

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Balanenko I. G., Kogut P. I. On one optimal control problem for degenerate parabolic equation // Visnik DNU. Series: Modelling. — 2012. — 8 (4). — P. 3–18. (In Ukrainian).
2. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational Inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // J. Comp. & Appl. Math. — 2011. — №3(106). — P. 88–104.
3. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational Inequalities of Monotone Type. II. Attainability Problem // J. Comp. & Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 15–34.
4. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems. — Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
5. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
6. Vazquez J.L., Zuazua E. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential // J. of Functional Analysis. — 2000. — №173. — P. 103–153.
7. Zadoianchuk N. V., Kupenko O. P. On solvability for one class of optimal control problems for degenerate elliptic variational inequalities // J. Comp. & Appl. Math. — 2013. — №4(114). — P. 10–23.
8. Zgurovsky M. Z., Kasyanov P. O., Melnik V. S. Differential-operator inclusions and variational inequalities in infinite-dimensional spaces. — Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
9. Zhikov V. V. On Lavrentiev phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1994. — №2(3). — P. 249–269.
10. Zhikov V. V. Weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics. — 1998. — №8(189). — P. 27–58.

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА. E-MAIL: ZADOIANCHUK.NV@GMAIL.COM

Надійшла 12.01.2014

УДК 519.8

## ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

С. О. МАЩЕНКО, Аль-Саммаррай Мохаммед Саад Ибрахим

**РЕЗЮМЕ.** Предлагается метод решения транспортной задачи с нечеткими множествами поставщиков и потребителей. Построена функция принадлежности нечеткого множества типа 2, которое является множеством ее допустимых решений. Исследованы свойства этого множества и рассмотрены задачи выбора рациональных решений.

### ВВЕДЕНИЕ

Классическая транспортная задача (ТЗ) представляет собой задачу линейного программирования специального вида, которая возникает во многих важных приложениях. В естественной интерпретации она рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок от поставщиков к потребителям с минимальными затратами. Известны многочисленные обобщения транспортной задачи, которые широко используются на практике: многокритериальная ТЗ, в которой наряду с минимизацией затрат могут оптимизироваться другие показатели (время перевозки, надежность и т.д.) [1]; многоуровневая иерархическая ТЗ [2]; многопродуктовая ТЗ, в которой присутствует несколько видов грузов [2]; нечеткая ТЗ, в которой могут быть нечетко заданы как различные параметры задачи (удельные затраты, объемы запасов и потребностей), так и ограничения (например, в виде нечетких неравенств) [3]. В данной работе будет рассматриваться обобщение ТЗ на случай нечетких множеств поставщиков и потребителей.

### 1. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Сначала приведем классическую четкую постановку ТЗ. Предположим, что однородный груз сосредоточен у  $m$  поставщиков в объемах  $a_1, \dots, a_m$ . Обозначим  $M = \{1, \dots, m\}$  — универсальное множество поставщиков. Данный груз необходимо доставить  $n$  потребителям в объемах  $b_1, \dots, b_n$ . Обозначим  $N = \{1, \dots, n\}$  — универсальное множество потребителей. Известны  $c_{ij} > 0, i \in M, j \in N$  — затраты на перевозку единицы груза от каждого  $i$ -го поставщика каждому  $j$ -у потребителю. Требуется составить план перевозок с минимальными суммарными затратами. Обозначим  $x_{ij} \geq 0, i \in M, j \in N$  — объемы перевозок от  $i$ -го поставщика каждому  $j$ -у

потребителю. Тогда целевая функция задачи примет вид:

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

В общем случае (так называемая несбалансированная ТЗ) система ограничений задачи состоит из двух групп неравенств. Первая группа из  $m$  неравенств описывает условие того, что объемы перевозок не превышают запасы всех  $m$  поставщиков и имеет вид:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in M.$$

Вторая группа из  $n$  неравенств выражает требование удовлетворить запросы всех  $n$  потребителей и имеет вид:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in N.$$

Предположим, что лицо, принимающее решение (ЛПР), не может четко сказать, какие поставщики и потребители на момент принятия решения в действительности готовы работать, а может лишь задать функции принадлежности:

–  $\mu(i)$ ,  $i \in M$ , нечеткого множества индексов  $\tilde{M} \subseteq M$  поставщиков, намеренных отпускать грузы;

–  $\eta(j)$ ,  $j \in N$ , нечеткого множества индексов  $\tilde{N} \subseteq N$  потребителей, готовых получать грузы.

Тогда возникает ТЗ с нечеткими множествами поставщиков и потребителей в следующей постановке:

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \tag{1}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in M; \quad x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, \quad j \in N; \tag{2}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0, \quad i \in \tilde{M}; \tag{3}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in \tilde{N}, \tag{4}$$

где нечеткое множество  $\tilde{M}$  ограничений (3) отвечает ненулевым объемам поставок тех поставщиков, которые намерены отпускать грузы, а нечеткое множество  $\tilde{N}$  ограничений (4) отвечает требованию удовлетворить запросы потребителей, готовых получать грузы.

Объясним подробнее смысл модели (1)–(4). Действительно, если для некоторого поставщика  $i \in M$  соответствующее условие (3) не выполняется (т.е.  $\sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0$ ) со степенью принадлежности  $1 - \mu(i)$ , то из (2) следует, что объемы перевозок  $x_{ij} = 0 \quad \forall j \in N$  с такой же степенью принадлежности. Таким образом, объемы перевозок грузов от поставщика  $i \in M$  различным потребителям будут ненулевыми со степенью принадлежности  $\mu(i)$  тогда и

только тогда, когда выполняется неравенство  $\sum_{j \in N} x_{ij} > 0$  с такой же степенью принадлежности. Аналогично для потребителей. Предположим, что для некоторого потребителя  $j \in N$  не выполняется соответствующее условие (3) (т.е.  $\sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ ) со степенью принадлежности  $1 - \eta(i)$ , тогда в силу того, что коэффициенты целевой функции (1) положительны, очевидно, что в оптимальном решении  $x^*$  задачи (1)–(2) при условии  $\sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$  мы получим значения объемов перевозок  $x_{ij}^* = 0 \forall i \in M$  с такой же степенью принадлежности. Таким образом, объемы перевозок грузов к потребителю  $j \in N$  от всех поставщиков будут ненулевыми со степенью принадлежности  $\eta(i)$  тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j$  с такой же степенью принадлежности.

Обозначим  $X$  — множество допустимых решений системы неравенств (2), которое далее будем называть универсальным множеством решений ТЗ (1)–(4) с нечеткими множествами поставщиков и потребителей;

$F_i = \left\{ x \in X \mid \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \right\}$  — множество допустимых решений из универсального множества  $X$ , удовлетворяющих ограничению вида (3) с индексом

$i \in M$ , а  $H_j = \left\{ x \in X \mid \sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j \right\}$  — аналогичное множество для ограничения  $j \in N$  вида (4). Тогда задача (1)–(4) может быть представлена в

виде:

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad x \in \tilde{D} = \tilde{F} \cap \tilde{H},$$

где

- $\tilde{F} = \bigcap_{i \in M} F_i$  — множество допустимых решений системы (2), (3), представляющее собой пересечение нечеткого множества  $\tilde{M}$  четких множеств  $F_i, i \in M$ ;
- $\tilde{H} = \bigcap_{j \in N} H_j$  — множество допустимых решений системы (2), (4), которое представляет собой пересечение нечеткого множества  $\tilde{N}$  четких множеств  $H_j, j \in N$ ;
- $\tilde{D} = \tilde{F} \cap \tilde{H}$  — множество допустимых решений системы (2)–(4).

Определим понятие пересечения нечеткого множества четких множеств в соответствии с подходом, который был предложен в [4].

## 2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА ЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть  $G_k, k \in K$  — некоторая конечная совокупность четких множеств, которые являются подмножествами некоторого универсального множества  $G$ . Пусть  $\tilde{K}$  — некоторое нечеткое подмножество множества индексов  $K$  с функцией принадлежности  $\sigma(k), k \in K$ .

На универсальном множестве  $G$  для каждого  $k \in K$  определим функцию принадлежности (характеристическую функцию) четкого множества  $G_k$

следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_k, \\ 0, & x \notin G_k. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь пересечение  $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$  нечеткого множества  $\tilde{K}$  четких множеств  $G_k$ ,  $k \in K$ . Естественное обобщение классической операции пересечения приводит к тому, что множество  $\tilde{G}$  будет задаваться функцией принадлежности

$$y(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x), \quad x \in G. \quad (5)$$

Вполне понятно, что значение функции принадлежности  $y(x)$  для каждого фиксированного  $x \in G$  будет определяться как значение целевой функции задачи нечеткого математического программирования:

$$y = \min_{k \in K} \varphi_k. \quad (6)$$

Задачи нечеткого математического программирования достаточно хорошо изучены. Согласно [5] решением задачи (6) называется нечеткое множество  $\tilde{K}^*$ , носителем которого будет множество оптимальных по Парето альтернатив (обозначим его  $K^{PO}$ ) двухкритериальной задачи дискретной оптимизации:

$$\varphi_k \rightarrow \min, \quad \sigma(k) \rightarrow \max, \quad k \in K. \quad (7)$$

Функцией принадлежности  $\tilde{\sigma}$  нечеткого множества  $\tilde{K}^*$  будет сужение функции принадлежности  $\sigma(k)$ ,  $k \in K$  с универсального множества индексов  $K$  на множество  $K^{PO} \subseteq K$ . Иными словами, эта функция принадлежности будет иметь вид:

$$\tilde{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k), & k \in K^{PO}, \\ 0, & k \notin K^{PO}. \end{cases}$$

Множеству решений задачи (6), которым является нечеткое множество  $\tilde{K}^*$  с функцией принадлежности  $\tilde{\sigma}(k)$ ,  $k \in K$ , согласно [5] соответствует нечеткое множество  $\Psi \subseteq \{0, 1\}$  оптимальных значений целевой функции этой задачи с функцией принадлежности  $\psi : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\psi(y) = \max_{\varphi(k)=y} \tilde{\sigma}(k)$ ,  $y \in \{0, 1\}$ . Следует отметить, что универсальным множеством нечеткого множества  $\Psi$  оптимальных значений целевой функции задачи (6) будет множество  $\{0, 1\}$ , состоящее из двух элементов  $y = 0$  и  $y = 1$ . Это объясняется тем, что переменная  $y$  может принимать значения, равные только значениям  $\varphi_k(x)$ ,  $k \in K$ , которые в свою очередь при любом фиксированном  $x \in G$  могут быть равны или 0, или 1.

Таким образом, для каждого фиксированного  $x \in G$  значения  $y(x)$  функции принадлежности (5) нечеткого множества  $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$  образуют также нечеткое подмножество  $\Psi$  универсального множества  $Y = \{0, 1\}$ . Отсюда следует, что нечеткое множество  $\tilde{G}$  представляет собой так называемое [4] нечеткое множество типа 2.

Согласно [4] формализуем понятие пересечения  $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$  нечеткого множества  $\tilde{K}$  четких множеств  $G_k, k \in K$ .

Для произвольного  $x \in G$  рассмотрим отношение доминирования, которое порождается функциями  $\varphi_k(x)$  и  $\sigma(k)$  на множестве индексов  $K$ .

Будем говорить, что индекс  $i \in K$  доминирует индекс  $j \in K$  для решения  $x \in G$  и обозначать это  $i \succ^x j$ , если справедливы такие неравенства:  $\varphi_i(x) \leq \varphi_j(x)$ ,  $\sigma(i) \geq \sigma(j)$  и хотя бы одно из них строгое.

Это понятие позволяет определить множество оптимальных по Парето альтернатив двухкритериальной задачи (7), которое будет носителем нечеткого множества решений задачи (6). Для  $x \in G$  обозначим этот носитель

$$K^{PO}(x) = \left\{ k \in K \mid j \not\succeq^x k, \forall j \in K \right\}.$$

Для произвольных  $x \in X, k \in K$  определим функцию принадлежности нечеткого множества решений задачи (7):

$$\tilde{\sigma}(x, k) = \begin{cases} \sigma(k), & k \in K^{PO}(x), \\ 0, & k \notin K^{PO}(x). \end{cases}$$

Пересечением нечеткого множества  $\tilde{K}$  четких множеств  $G_k, k \in K$  будем называть  $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$  — нечеткое множество типа 2, которое задается тройками  $(x, \psi(x, y))$ , где

- $\psi : X \times Y \rightarrow [0, 1]$  — нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и заданное функцией принадлежности:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \max_{k \in K} \{ \tilde{\sigma}(x, k) \mid \varphi_k(x) = y \}, & \exists k \in K : \varphi_k(x) = y; \\ 0, & \varphi_k(x) \neq y \forall k \in K; \end{cases}$$

- $x$  — элемент универсального множества  $G$ ;
- $y$  — элемент универсального множества  $Y = \{0, 1\}$  значений функции принадлежности  $\psi(x, y)$  нечеткого множества  $\tilde{G}$  типа 2.

Значения функции принадлежности  $\psi(x, y)$  для фиксированного  $x^0 \in G$  образуют нечеткое подмножество  $\Psi_Y(x^0)$  множества  $Y = \{0, 1\}$  с функцией принадлежности  $\psi(x^0, y), y \in \{0, 1\}$ . Значение  $\psi(x^0, 1)$  можно понимать как степень принадлежности решения  $x^0 \in G$  множеству  $\tilde{G}$ . Соответственно значение  $\psi(x^0, 0)$  имеет смысл степени отсутствия принадлежности  $x^0 \in G$  множеству  $\tilde{G}$ .

С другой стороны, если в функции принадлежности  $\psi(x, y)$  зафиксировать  $y = 1$ , то мы получим нечеткое множество решений  $x \in G$ , принадлежащих множеству  $\tilde{G}$ , с функцией принадлежности  $\psi(x, 1)$ . Обозначим это множество  $\Psi_G(1)$ . Аналогично для фиксированного значения  $y = 0$  получим нечеткое множество альтернатив  $x \in G$ , не принадлежащих множеству  $\tilde{G}$ , с функцией принадлежности  $\psi(x, 0)$ . Обозначим его  $\Psi_G(0)$ . Интересно, что в общем случае  $\Psi_G(0) \neq \overline{\Psi_G(1)}$ , и, соответственно,  $\psi(x, 0) \neq 1 - \psi(x, 1)$ .

Поэтому, как  $\Psi_G(0)$ , так и  $\Psi_G(1)$  представляют собой нечеткие множества сечений соответственно при  $y = 0$  и  $y = 1$  нечеткого множества  $\tilde{G}$  типа 2 и являются его неотъемлемыми составляющими.

Упростить построение функции принадлежности  $\psi(x, y)$  позволяет такая **Теорема 1 [4]**. Пусть  $G_k, k \in K$  — четкие множества, которые заданы на универсальном множестве  $G$  соответствующими характеристическими функциями  $\varphi_k(x), x \in G, k \in K$ ;  $\sigma(k), k \in K$  — функция принадлежности нечеткого множества  $\tilde{K}$ . Для того, чтобы нечеткое множество  $\tilde{G}$  типа 2, которое задано функцией принадлежности  $\psi(x, y), x \in G, y \in \{0, 1\}$ , было пересечением нечеткого множества  $\tilde{K}$  четких множеств  $G_k, k \in K$ , т.е.  $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$ , необходимо и достаточно, чтобы для  $x \in G$

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \max_{\varphi_k(x)=0} \sigma(k), & \exists k \in K \quad \varphi_k(x) = 0, \\ 0, & \varphi_k(x) = 1 \quad \forall k \in K; \end{cases}$$

$$\psi(x, 1) = \begin{cases} \max_{k \in K} \sigma(k), & \varphi_k(x) = 1 \quad \forall k \in \text{Arg max}_{j \in K} \sigma(j), \\ 0, & \exists i \in \text{Arg max}_{j \in K} \sigma(j) \quad \varphi_k(x) = 0. \end{cases}$$

### 3. НЕЧЕТКОЕ МНОЖЕСТВО ТИПА 2 ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТЗ С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Из теоремы 1 следует, что множество  $\tilde{D} = \tilde{F} \cap \tilde{H}$  допустимых решений системы (2)–(4) представляет собой пересечение нечетких множеств типа 2  $\tilde{F}$  и  $\tilde{H}$ .

Пересечение  $\tilde{F} = \bigcap_{i \in M} F_i$  является множеством допустимых решений неравенств (3), которое задается функцией принадлежности  $\psi_{\tilde{F}}(x, y), y \in \{0, 1\}$ , где

$$\psi_{\tilde{F}}(x, 0) = \begin{cases} \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, & \exists i \in M \quad \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0, \\ 0, & \forall i \in M \quad \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

— достоверность недопустимости решения  $x$  для неравенств (3);

$$\psi_{\tilde{F}}(x, 1) = \begin{cases} \max_{i \in M} \mu(i), & \forall i \in \text{Arg max}_{i \in M} \mu(i) \quad \sum_{j \in N} x_{ij} > 0, \\ 0, & \exists i \in \text{Arg max}_{i \in M} \mu(i) \quad \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

— достоверность его допустимости.

Поскольку неравенства (3) описывают множество планов перевоза грузов, в которых все поставщики принимают ненулевое участие, то величину  $\psi_{\tilde{F}}(x, 0)$  можно интерпретировать как достоверность неучастия всех поставщиков в плане  $x$  перевоза грузов, а  $\psi_{\tilde{F}}(x, 1)$  можно понимать как достоверность их участия.

Нечеткое множество типа 2  $\tilde{H} = \bigcap_{j \in N} H_j$  является множеством допустимых решений неравенств (4), которое задается функцией принадлежности  $\psi_{\tilde{H}}(x, y)$ ,  $y \in \{0, 1\}$ , где

$$\psi_{\tilde{H}}(x, 0) = \begin{cases} \max_{i \in M} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j \right\}, & \exists j \in N \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j, \\ 0, & \forall j \in N \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \end{cases} \quad (10)$$

— достоверность недопустимости решения  $x$  для неравенств (4);

$$\psi_{\tilde{H}}(x, 1) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & \forall j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j, \\ 0, & \exists j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) \quad \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \end{cases} \quad (11)$$

— достоверность его допустимости.

Поскольку неравенства (4) описывают множество планов перевоза грузов, в которых все потребители принимают ненулевое участие, то величину  $\psi_{\tilde{H}}(x, 0)$  можно интерпретировать как достоверность неучастия всех потребителей в плане  $x$  перевоза грузов, а  $\psi_{\tilde{H}}(x, 1)$  можно понимать как достоверность их участия.

Из (8)–(11) следует, что множество  $\tilde{D} = \tilde{F} \cap \tilde{H}$  допустимых решений системы (2)–(4) представляет собой нечеткое множество типа 2. Обозначим его функцию принадлежности  $\psi_{\tilde{D}}(x, y)$ ,  $y \in \{0, 1\}$ . Используя операцию пересечения нечетких множеств типа 2, получим

$$\psi_{\tilde{D}}(x, y) = \max_{\substack{\nu, \omega \in \{0, 1\} \\ y = \min\{\nu, \omega\}}} \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, \nu), \psi_{\tilde{H}}(x, \omega) \}. \text{ Отсюда}$$

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = \max_{\substack{\nu, \omega \in \{0, 1\} \\ 0 = \min\{\nu, \omega\}}} \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, \nu), \psi_{\tilde{H}}(x, \omega) \} =$$

$$= \max \{ \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, 0), \psi_{\tilde{H}}(x, 0) \},$$

$$\min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, 0), \psi_{\tilde{H}}(x, 1) \}, \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, 1), \psi_{\tilde{H}}(x, 0) \} \}$$

— достоверность недопустимости решения для системы (2)–(4);

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 1) = \max_{\substack{\nu, \omega \in \{0, 1\} \\ 1 = \min\{\nu, \omega\}}} \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, \nu), \psi_{\tilde{H}}(x, \omega) \} = \min \{ \psi_{\tilde{F}}(x, 1), \psi_{\tilde{H}}(x, 1) \}$$

— достоверность его допустимости.

Построим эти функции. Для этого рассмотрим возможные варианты:

1. Пусть  $\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in M$ , отсюда  $\psi_{\tilde{F}}(x, 0) = 0$ ,  $\psi_{\tilde{F}}(x, 1) = \max_{i \in M} \mu(i)$ .

$$\text{Тогда } \psi_{\tilde{D}}(x, 0) = \max \left\{ 0, 0, \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x, 0) \right\} \right\} =$$

$$= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x, 0) \right\}, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x, 1) \right\}.$$

Возможны следующие случаи:

а) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = 0$ ,  $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max\{0, 0, 0\} = 0,$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}; \quad (12)$$

б) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$  и  $\exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ ,

то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}$ ,  $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

ПОЭТОМУ

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \right\}, \quad (13)$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\};$$

в) если  $\exists j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

$\psi_{\bar{H}}(x, 1) = 0$ , ПОЭТОМУ ПОЛУЧИМ

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, \quad (14)$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), 0 \right\} = 0.$$

2. Пусть  $\sum_{i \in M} x_{ij} > 0 \forall i \in \text{Arg max}_{i \in M} \mu(i)$  и  $\exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0$ . Тогда

$$\psi_{\bar{F}}(x, 0) = \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \quad \psi_{\bar{F}}(x, 1) = \max_{i \in M} \mu(i). \text{ Поэтому}$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \psi_{\bar{H}}(x, 0) \right\}, \right.$$

$$\left. \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\bar{H}}(x, 0) \right\} \right\} \right\},$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\bar{H}}(x, 1) \right\}.$$

Возможны следующие случаи:

а) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = 0$ ,  $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, \quad (15)$$

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\};$$

б) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$  и  $\exists j \in N : \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ ,

то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}$ ,  $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

ПОЭТОМУ ПОЛУЧИМ

$$\begin{aligned}
 \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \right. \right. \\
 &\max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \left. \right\}, \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \right. \\
 &\max_{j \in N} \eta(j) \left. \right\}, \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \right\} \left. \right\}, \\
 \psi_{\bar{D}}(x, 1) &= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\};
 \end{aligned} \tag{16}$$

в)  $\exists j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) : \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,  
 $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, \right. \\
 &0, \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\} \left. \right\} = \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, \\
 \psi_{\bar{D}}(x, 1) &= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), 0 \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

3. Пусть  $\exists i \in \text{Arg max}_{i \in M} \mu(i) : \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0$ . Тогда  $\psi_{\bar{F}}(x, 0) = \max_{i \in M} \mu(i)$ ,  
 $\psi_{\bar{F}}(x, 1) = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\bar{H}}(x, 0) \right\}, \right. \\
 &\min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \psi_{\bar{H}}(x, 1) \right\}, 0 \left. \right\}, \\
 \psi_{\bar{D}}(x, 1) &= \min \left\{ \psi_{\bar{F}}(x, 1), \psi_{\bar{H}}(x, 1) \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи:

а) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = 0$ ,  $\psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,  
 ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ 0, \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, 0 \right\} = \\
 &= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\};
 \end{aligned} \tag{19}$$

б) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$  и  $\exists j \in N : \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то

$$\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}, \quad \psi_{\bar{H}}(x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \right\} \right\}, \\ \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, 0 \right\} &= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

в) если  $\exists j \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j) : \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то  $\psi_{\bar{H}}(x, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$ ,

$\psi_{\bar{H}}(x, 1) = 0$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}, 0, 0 \right\} = \\ &= \min \left\{ \max_{i \in M} \mu(i), \max_{j \in N} \eta(j) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4. ПОИСК РАЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При поиске рационального решения ЛПР будет стараться минимизировать целевую функцию (1), а также максимизировать достоверности  $\psi_{\bar{F}}(x, 0)$  и  $\psi_{\bar{F}}(x, 1)$  соответственно неучастия и участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов. Иными словами, перед ЛПР возникает следующая трехкритериальная задача:

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 0) \rightarrow \max, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 1) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (22)$$

Обозначим  $SO$  — множество слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) решений этой задачи. Напомним, что решение  $x^* \geq 0$  называется оптимальным по Слейтеру для задачи вида (22), если  $\nexists x \geq 0$ , для которого имеют место неравенства:

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}^* > \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}, \quad \psi_{\bar{D}}(x^*, 0) < \psi_{\bar{D}}(x, 0), \quad \psi_{\bar{D}}(x^*, 1) < \psi_{\bar{D}}(x, 1).$$

Вполне понятно, что в определение рационального решения задачи (1)–(4) следует включать лишь решения из множества  $SO$ . Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим рациональным решением ТЗ (1)–(4) с нечеткими множествами поставщиков и потребителей будем называть нечеткое множество  $\tilde{X}$  типа 2 с функцией принадлежности

$$\psi_{\tilde{X}}(x, y) = \begin{cases} \psi_{\bar{D}}(x, y), & x \in SO, \\ 0, & x \notin SO, \end{cases}$$

где  $y \in Y = \{0, 1\}$ .

В случае, когда ЛПР интересуется конкретное рациональное решение  $x^*$ , то его можно выбрать из множества  $SO$  с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив задачу (22). Тогда мы его будем называть рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностями  $\psi_{\bar{F}}(x, 0)$  и  $\psi_{\bar{F}}(x, 1)$  соответственно неучастия и участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов.

Обозначим функции

$$\xi_D(x) = \begin{cases} \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 0 \right\}, & \exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 0, \\ 0, & \forall j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} > 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\xi_S(x) = \begin{cases} \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} < b_j \right\}, & \exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} < b_j, \\ 0, & \forall i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} \geq b_j. \end{cases} \quad (24)$$

Обозначим  $I^* = \text{Arg max}_{i \in M} \mu(i)$ ,  $J^* = \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$ . Упростить задачу (22) позволяет такая

**Теорема 2.** Если функции принадлежности  $\mu(i)$  – нечеткого множества индексов  $\tilde{M} \subseteq M$  поставщиков, намеренных отпустить грузы, и  $\eta(j)$  – нечеткого множества индексов  $\tilde{N} \subseteq N$  потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными, т.е.  $\max_{i \in M} \mu(i) = 1$  и  $\max_{j \in N} \eta(j) = 1$ , то для каждого заданного значения параметра  $\xi \in (0, 1]$ , при котором задача

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad \max \{ \xi_D(x), \xi_S(x) \} \geq \xi, \quad x \in X, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} x_{ij} &> 0 \quad \forall i \in I^*, \\ \sum_{i \in M} x_{ij} &\geq b_j \quad \forall j \in J^* \end{aligned} \quad (26)$$

имеет оптимальное решение, это решение будет рациональным для ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее  $\xi$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, какой вид примет функция принадлежности  $\psi_{\tilde{D}}(x, y)$  нечеткого множества типа 2 допустимых решений системы (2), (3). Для этого рассмотрим возможные варианты.

1. Пусть  $\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in M$ . Возможны такие случаи:

а) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in N$ , то из (12) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = 0, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 1; \quad (27)$$

б) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*$  и  $\exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то из (13) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 1; \quad (28)$$

в) если  $\exists j \in J^* \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то из (14) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = 1, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 0. \quad (29)$$

2. Пусть  $\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in I^*$  и  $\exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0$ . Возможны случаи:

а) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N$ , то из (15) следует, что

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1; \quad (30)$$

б) если  $\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in J^*$  и  $\exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то из (16) следует, что

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \right. \\ \left. \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \right\}, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1; \quad (31)$$

в)  $\exists j \in J^* : \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j$ , то из (17) следует, что

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = 1, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 1) = 0. \quad (32)$$

3. Пусть  $\exists i \in I^* : \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0$ , тогда из (18), (19)–(21) следует

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = 1, \quad \psi_{\bar{D}}(x, 1) = 0. \quad (33)$$

Таким образом, из (27)–(33) получим следующие формулы:

1)  $\psi_{\bar{D}}(x, 0) = 0$  и  $\psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1$ , если

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in M \text{ и } \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N;$$

2)  $\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}$  и  $\psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1$ , если

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in M, \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in J^*, \exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j;$$

3)  $\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}$  и  $\psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1$ , если

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in I^*, \exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0, \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N;$$

4)  $\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\} \right\}$   
и  $\psi_{\bar{D}}(x, 1) = 1$ , если

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*, \quad \exists i \in M \quad \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0, \\ \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*, \quad \exists j \in N \quad \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j;$$

5)  $\psi_{\bar{D}}(x, 0) = 1$  и  $\psi_{\bar{D}}(x, 1) = 0$ , если

$$\exists j \in J^* \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \text{ или } \exists i \in I^* \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0.$$

Из полученных формул следует, что

$$\psi_{\bar{D}}(x, 1) = \begin{cases} 1, & \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in I^*, \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in J^*, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (34)$$

Для окончательного вычисления  $\psi_{\bar{D}}(x, 0)$  случаи 2) – 4) можно объединить с 5). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \text{I) } \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= 0, \text{ если } \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in M \text{ и } \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N; \\ \text{II) } \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}, \text{ если} \\ & \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \forall i \in M, \exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j; \\ \text{III) } \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0 \right\}, \text{ если} \\ & \exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0, \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \forall j \in N; \\ \text{IV) } \psi_{\bar{D}}(x, 0) &= \max \left\{ \max_{i \in M} \left\{ \mu(i) \mid \sum_{j \in N} x_{ij} < b_j \right\}, \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \mid \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 0 \right\} \right\}, \\ & \text{если } \exists i \in M \sum_{j \in N} x_{ij} < b_j, \exists j \in N \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, используя обозначения (23), (24) очевидно получим

$$\psi_{\bar{D}}(x, 0) = \max \{ \xi_D(x), \xi_S(x) \}. \quad (35)$$

Теперь покажем, что для каждого заданного значения параметра  $\xi \in (0, 1]$ , при котором задача (25), (26) имеет оптимальное решение  $x^*$ , оно будет рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее  $\xi$ .

Предположим противное, что  $x^* \notin SO$ . Тогда  $\exists \hat{x} \geq 0$ , для которого имеют место неравенства

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} \hat{x}_{ij} < \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}^*, \quad \psi_{\bar{D}}(\hat{x}, 0) > \psi_{\bar{D}}(x^*, 0), \quad \psi_{\bar{D}}(\hat{x}, 1) > \psi_{\bar{D}}(x^*, 1). \quad (36)$$

Поскольку  $x^*$  — допустимое решение задачи (25), (26), то из (35) следует, что  $\psi_{\bar{D}}(x^*, 0) \geq \xi$ , из (34) следует, что  $\psi_{\bar{D}}(x^*, 1) = 1$ . Поэтому достоверность неучастия поставщиков и потребителей в плане  $x^*$  перевоза грузов не менее  $\xi$ , а достоверность их участия равна единице.

Тогда из неравенств (36) следует, что  $\psi_{\tilde{D}}(\hat{x}, 0) > \psi_{\tilde{D}}(x^*, 0) \geq \xi$  и  $\psi_{\tilde{D}}(\hat{x}, 1) > \psi_{\tilde{D}}(x^*, 1) \geq 1$ . Получили противоречие. Таким образом,  $x^*$  — оптимальная по Слейтеру альтернатива задачи (22), которая по определению будет рациональным решением задачи ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее  $\xi$ .  $\square$

Далее будем считать, что предположения теоремы 2 выполняются, т. е. функции принадлежности  $\mu(i)$  — нечеткого множества индексов  $\tilde{M} \subseteq M$  поставщиков, намеренных отпускать грузы, и  $\eta(j)$  — нечеткого множества индексов  $\tilde{N} \subseteq N$  потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными  $\left( \max_{i \in M} \mu(i) = 1 \text{ и } \max_{j \in N} \eta(j) = 1 \right)$ .

Посмотрим как можно упростить решение задачи (25), (26).

Обозначим  $M^\xi = \{i \in M | \xi \leq \mu(i)\}$  и  $N^\xi = \{j \in N | \xi \leq \eta(j)\}$  — множества индексов соответственно поставщиков и потребителей, которые имеют степени принадлежности соответствующим нечетким множествам  $\tilde{M}$  и  $\tilde{N}$  не менее  $\xi \in (0, 1]$ . Тогда задачу (25), (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \min_{k \in M^\xi, l \in N^\xi} \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}, \quad x \in X; \\ \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 0, \quad \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*, \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*. \quad (38)$$

Поскольку  $\max_{i \in M} \mu(i) = 1$  и  $\max_{j \in N} \eta(j) = 1$ , то очевидно, что при  $\xi = 1$  и  $k \in I^*$ ,  $l \in J^*$  ограничения (37) и (38) будут априори не совместны. Поэтому из теоремы 2 можно получить следующий результат.

Обозначим  $\bar{M}^\xi = \{i \in M | \xi \leq \mu(i) < 1\}$  и  $\bar{N}^\xi = \{j \in N | \xi \leq \eta(j) < 1\}$  — множества индексов соответственно поставщиков и потребителей, которые имеют достоверность степени принадлежности не менее  $\xi \in (0, 1)$ , но не равную единице.

**Следствие.** Если функции принадлежности  $\mu(i)$  — нечеткого множества индексов  $\tilde{M} \subseteq M$  поставщиков, намеренных отпускать грузы, и  $\eta(j)$  — нечеткого множества индексов  $\tilde{N} \subseteq N$  потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными, то для каждого заданного значения параметра  $\xi \in (0, 1)$ , при котором задача

$$\begin{aligned} \min_{k \in \bar{M}^\xi, l \in \bar{N}^\xi} \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}; \\ \sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in M; \quad \sum_{j \in N} x_{kj} \leq 0; \quad \sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*; \\ \sum_{i \in M} x_{il} < b_l; \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*; \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, \quad j \in N \end{aligned}$$

имеет оптимальное решение, оно будет рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее  $\xi$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение следует отметить, что предложенный метод расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечеткими множествами поставщиков и потребителей и может дать новый подход к решению других постановок задач оптимизации в условиях нечеткой информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Senapati P., Kumar R. T. Multi objective transportation model into Fuzzy parameters: Priority based Fuzzy Goal programming approach // Journal of Transportation systems Engineering and Information Technology. — 2008. — №8. — P. 40–48.
2. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Многоиндексные задачи линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1982.
3. Zinmenoz F., Vudegay J. L. Solving fuzzy solid transportation problem by an evolutionary algorithm based parametric approach // European Journal of Operations Research. — 1999. — 117. — P. 485–510.
4. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №1. — С. 73–81.
5. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64, КИЕВ, 01601,  
УКРАИНА

Поступила 06.01.2014.

УДК 519.71

## УМОВИ СПІВПАДАННЯ ОЦІНОК МЕТОДА НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ТА ОРТОГОНАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

М. Ю. САВКІНА

**РЕЗЮМЕ.** В роботі отримано необхідні та достатні умови співпадання оцінки метода найменших квадратів та оцінки ортогональної регресії невідомих параметрів лінійної регресійної моделі з вільним членом.

**Abstract.** The sufficient and necessary conditions for coincidence of least square estimation and estimation of ortogonal regression of parameters of linear regression model with absolute term were obtained in the paper.

### 1. ВСТУП

Розглянемо модель лінійної регресії

$$y_i = f(t_i) + \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

де  $\xi_0, \dots, \xi_n$  – незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з  $E\xi_i = 0$  та  $D\xi_i = \sigma^2$ , а функцію регресії можна подати у вигляді лінійної комбінації  $k$  базисних функцій  $x_0(t), x_1(t), \dots, x_{k-1}(t)$ :

$$f(t) = a_0x_0(t) + a_1x_1(t) + \dots + a_{k-1}x_{k-1}(t).$$

Таким чином, існують справжні значення незалежних змінних  $x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{k-1,i}$  та залежної змінної  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , (вони детерміновані), між якими існує лінійний зв'язок

$$f_i = a_0x_{0i} + a_1x_{1i} + \dots + a_{k-1}x_{k-1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В класичній регресії справжні значення  $f_i$  невідомі, замість них маємо  $y_i$ , а значення  $x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{k-1,i}$  спостерігаємо без помилок; параметри  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  невідомі, вони підлягають оцінюванню.

Поширенішим методом оцінювання невідомих параметрів в регресійному аналізі є метод найменших квадратів (МНК), який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^2$$

відносно вектора  $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ .

Позначимо

$$Y = (y_0, \dots, y_n)^T;$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{10} & \dots & x_{k-1,0} \\ x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{k-1,n} \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка МНК  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}$  параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  матиме вигляд [1]

$$(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})^T = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Припустимо тепер, що незалежні змінні вимірюються з похибками, тобто замість  $x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{k-1,i}$  спостерігаємо

$$w_{0i} = x_{0i} + \epsilon_{0i}, w_{1i} = x_{1i} + \epsilon_{1i}, \dots, w_{k-1,i} = x_{k-1,i} + \epsilon_{k-1,i},$$

де  $\epsilon_{0i}, \epsilon_{1i}, \dots, \epsilon_{k-1,i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з  $E\epsilon_{li} = 0$  та  $D\epsilon_{li} = \sigma_l^2$ ,  $l = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

В цьому випадку для невідомих параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  можна також побудувати оцінку МНК:

$$(\check{a}_0, \check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1})^T = (W_k^T W_k)^{-1} W_k^T Y,$$

де

$$W_k = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{10} & \dots & w_{k-1,0} \\ w_{01} & w_{11} & \dots & w_{k-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{0n} & w_{1n} & \dots & w_{k-1,n} \end{pmatrix}.$$

В класичній регресії оцінка МНК є незміщеною, лінійно ефективною в класі незміщених оцінок та при деяких умовах слушною[1]. В схемі з помилками в незалежних змінних ці властивості оцінки МНК зникають.

Тому природньо в схемі

$$y_i = a_0 w_{0i} + a_1 w_{1i} + \dots + a_{k-1} w_{k-1,i} + \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

шукати інші методи оцінювання параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

## 2. ОРТОГОНАЛЬНА РЕГРЕСІЯ

Принцип ортогональної регресії[2] полягає в мінімізації суми квадратів відстаней від точок  $(y_i, w_{0i}, w_{1i}, \dots, w_{k-1,i})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , до гіперплощини

$$\Pi = \{r \in R^{k+1} : \beta_0 r_0 + \beta_1 r_1 + \dots + \beta_k r_k = 0\},$$

де

$$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T = \left( -\frac{1}{A}, \frac{a_0}{A}, \dots, \frac{a_{k-1}}{A} \right)^T,$$

$$A = \sqrt{1 + a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2}.$$

Оцінку ортогональної регресії  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{k-1}$  параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  знаходимо наступним чином.

Нехай  $(b_0, b_1, \dots, b_k)^T$  – власний вектор, який відповідає мінімальному власному числу  $\lambda_0$  матриці  $(W_k^y)^T W_k^y$ , де

$$W_k^y = \begin{pmatrix} y_0 & w_{00} & w_{10} & \dots & w_{k-1,0} \\ y_1 & w_{01} & w_{11} & \dots & w_{k-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & w_{0n} & w_{1n} & \dots & w_{k-1,n} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\bar{a}_0 = -b_1/b_0, \bar{a}_1 = -b_2/b_0, \dots, \bar{a}_{k-1} = -b_k/b_0.$$

У випадку, коли  $w_{k-1,i} = x_{k-1,i} = 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  (регресія (1) з вільним членом), доцільно перейти до центрованих рядів, тобто замість матриці  $W_k^y$  розглядати матрицю

$$\dot{W}_k^y = \begin{pmatrix} \dot{y}_0 & \dot{w}_{00} & \dot{w}_{10} & \dots & \dot{w}_{k-2,0} \\ \dot{y}_1 & \dot{w}_{01} & \dot{w}_{11} & \dots & \dot{w}_{k-2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{y}_n & \dot{w}_{0n} & \dot{w}_{1n} & \dots & \dot{w}_{k-2,n} \end{pmatrix},$$

де

$$\dot{y}_i = y_i - \bar{y}, \bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i, \dot{w}_{li} = w_{li} - \bar{w}_l, \bar{w}_l = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n w_{li},$$

$$l = 0, 1, \dots, k-2, i = 0, 1, \dots, n.$$

Позначимо  $(\dot{b}_0, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_{k-1})^T$  – власний вектор, який відповідає мінімальному власному числу  $\dot{\lambda}_0$  матриці  $(\dot{W}_k^y)^T \dot{W}_k^y$ .

Тоді

$$\bar{a}_0 = -\dot{b}_1/\dot{b}_0, \bar{a}_1 = -\dot{b}_2/\dot{b}_0, \dots, \bar{a}_{k-2} = -\dot{b}_{k-1}/\dot{b}_0, \quad (2)$$

$$\bar{a}_{k-1} = \bar{y} - \bar{a}_0 \bar{w}_0 - \bar{a}_1 \bar{w}_1 - \dots - \bar{a}_{k-2} \bar{w}_{k-2}. \quad (3)$$

Оцінка ортогональної регресії є зміщеною, але при певних умовах слушною[1].

### 3. УМОВИ СПІВПАДАННЯ ОЦІНКИ МНК ТА ОЦІНКИ ОРТОГОНАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ В РІВНЯННІ З ВІЛЬНИМ ЧЛЕНОМ.

Розглянемо регресію

$$y_i = a_0 w_{0i} + \dots + a_{k-2} w_{k-2,i} + a_{k-1} + \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

**Теорема 1.** *Оцінка МНК та оцінка ортогональної регресії параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  співпадають тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з двох умов:*

1) точки  $(w_{0i}, w_{1i}, \dots, w_{k-2,i}, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , належать одній гіперплощині;

або

$$2) \sum_{i=0}^n y_i w_{0i} = (n+1)\bar{y}\bar{w}_0, \quad \sum_{i=0}^n y_i w_{1i} = (n+1)\bar{y}\bar{w}_1, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^n y_i w_{k-2,i} = (n+1)\bar{y}\bar{w}_{k-2} \text{ одночасно.}$$

*Доведення.* Необхідність. Нехай оцінки МНК та ортогональної регресії параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  співпадають.

Оцінка МНК  $\check{a}_0, \check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1}$  параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  задовільняє наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь[1]

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n w_{0i}^2 & \dots & \sum_{i=0}^n w_{0i}w_{k-2,i} & \sum_{i=0}^n w_{0i} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w_{k-2,i}w_{0i} & \dots & \sum_{i=0}^n w_{k-2,i}^2 & n+1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \check{a}_0 \\ \vdots \\ \check{a}_{k-2} \\ \check{a}_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i w_{0i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n y_i w_{k-2,i} \\ \sum_{i=0}^n y_i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

З останнього рівняння системи (4) маємо

$$\check{a}_{k-1} = \bar{y} - \check{a}_0\bar{w}_0 - \dots - \check{a}_{k-2}\bar{w}_{k-2}. \quad (5)$$

Підставляємо (5) в перші  $k-1$  рівняння системи (4); отримаємо систему  $(k-1)$ -го порядку відносно  $\check{a}_0, \check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-2}$ :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n w_{0i}^2 - (n+1)\bar{w}_0^2 & \dots & \sum_{i=0}^n w_{0i}w_{k-2,i} - (n+1)\bar{w}_0\bar{w}_{k-2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w_{k-2,i}w_{0i} - (n+1)\bar{w}_0\bar{w}_{k-2} & \dots & \sum_{i=0}^n w_{k-2,i}^2 - (n+1)\bar{w}_{k-2}^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \check{a}_0 \\ \vdots \\ \check{a}_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i w_{0i} - (n+1)\bar{w}_0\bar{y} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n y_i w_{k-2,i} - (n+1)\bar{w}_{k-2}\bar{y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Згідно (2) оцінка ортогональної регресії  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{k-2}$  параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-2}$  є розв'язок такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \dot{w}_{0i}^2 - \dot{\lambda}_0 & \dots & \sum_{i=0}^n \dot{w}_{0i} \dot{w}_{k-2,i} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n \dot{w}_{k-2,i} \dot{w}_{0i} & \dots & \sum_{i=0}^n \dot{w}_{k-2,i}^2 - \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \check{a}_0 \\ \vdots \\ \check{a}_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \dot{y}_i \dot{w}_{0i} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \dot{y}_i \dot{w}_{k-2,i} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи

$$\sum_{i=0}^n \dot{w}_{l_1 i} \dot{w}_{l_2 i} = \sum_{i=0}^n w_{l_1 i} w_{l_2 i} - (n+1) \bar{w}_{l_1} \bar{w}_{l_2}, \quad l_1, l_2 = 0, 1, \dots, k-2,$$

маємо

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n w_{0i}^2 - (n+1) \bar{w}_0^2 - \dot{\lambda}_0 & \dots & \sum_{i=0}^n w_{0i} w_{k-2,i} - (n+1) \bar{w}_0 \bar{w}_{k-2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w_{k-2,i} w_{0i} - (n+1) \bar{w}_0 \bar{w}_{k-2} & \dots & \sum_{i=0}^n w_{k-2,i}^2 - (n+1) \bar{w}_{k-2}^2 - \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \vdots \\ \bar{a}_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i w_{0i} - (n+1) \bar{w}_0 \bar{y} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n y_i w_{k-2,i} - (n+1) \bar{w}_{k-2} \bar{y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

З умови  $\bar{a}_0 = \check{a}_0, \dots, \bar{a}_{k-2} = \check{a}_{k-2}$  та систем рівнянь (6) та (7) отримаємо

$$\dot{\lambda}_0 \bar{a}_0 = 0, \dots, \dot{\lambda}_0 \bar{a}_{k-2} = 0,$$

звідки випливає, що

$$\dot{\lambda}_0 = 0 \quad (8)$$

або

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \dots = \bar{a}_{k-2} = 0. \quad (9)$$

Якщо має місце (8), то це означає, що стовпці матриці  $\dot{W}_k^y$  лінійно залежні (інакше матриця  $(\dot{W}_k^y)^T \dot{W}_k^y$  була б достатньо визначеною і мала б тільки достатні власні значення), тобто

$$y_i - \bar{y} = C_0(w_{0i} - \bar{w}_0) + \dots + C_{k-2}(w_{k-2,i} - \bar{w}_{k-2}), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

де  $C_0, \dots, C_{k-2}$  — деякі сталі. Отже, точки  $(w_{0i}, \dots, w_{k-2,i}, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ , належать одній гіперплощині

$$C_0 w_0 + C_1 w_1 + \dots + C_{k-2} w_{k-2} - y = \bar{y} - C_0 \bar{w}_0 - C_0 \bar{w}_0 \dots - C_{k-2} \bar{w}_{k-2},$$

так що виконується умова 1).

Припустимо, має місце (9). Підставимо (9) в систему (6), отримаємо умову 2).

Достатність. Нехай виконується умова 1). Це означає, що стовпці матриці  $\dot{W}_k^y$  лінійно залежні, і матриця  $(\dot{W}_k^y)^T \dot{W}_k^y$  має нульове власне число. Тоді системи (6) та (7) співпадуть, а значить, співпадуть і їх розв'язки:

$$\bar{a}_0 = \check{a}_0, \dots, \bar{a}_{k-2} = \check{a}_{k-2}. \quad (10)$$

З (3) та (9) урахувавши (10) отримаємо  $\bar{a}_{k-1} = \check{a}_{k-1}$ , тобто оцінки МНК та ортогональної регресії параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  в цьому випадку співпадуть.

Далі, припустимо виконується умова 2). Це означає, що системи рівнянь (6) та (7) перетворюються на однорідні, тобто вони мають тільки нульовий розв'язок. Отже,

$$\bar{a}_0 = \check{a}_0 = 0, \dots, \bar{a}_{k-2} = \check{a}_{k-2} = 0. \quad (11)$$

З (3) та (9) урахувавши (11) отримаємо  $\bar{a}_{k-1} = \bar{y}$  та  $\check{a}_{k-1} = \bar{y}$  відповідно, тобто

$$\bar{a}_{k-1} = \check{a}_{k-1}.$$

Таким чином, оцінки МНК та ортогональної регресії параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  і в цьому випадку співпадають.

Теорему доведено.

#### ВИСНОВКИ

В роботі доведено теорему, яка дає необхідні та достатні умови співпадання оцінки МНК та оцінки ортогональної регресії невідомих параметрів лінійної регресійної моделі з вільним членом. Умови накладено на зв'язок між залежними та незалежними змінними. Завдяки цій теоремі в деяких випадках можна замість оцінки ортогональної регресії шукати оцінку МНК навіть тоді, коли незалежні змінні вимірюються з похибками. Знайти оцінку МНК набагато легше.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. — Москва: Финансы и статистика, 1981.—304 с.
2. Грешилов А.А., Стакун В.А., Стакун А.А. Математические методы построения прогнозов. — Москва: Радио и связь, 1997.—112 с.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, вул. ТЕРЕЩЕНКІВСЬКА, 3, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 10.10.13

УДК 517.9

## ГІБРИДНИЙ ДЕКОМПОЗИЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

В. В. СЕМЕНОВ, О. А. ХАРЧЕНКО

**РЕЗЮМЕ.** У роботі розглянуто операторне включення з сумою двох максимальних монотонних операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Для цієї задачі запропоновано новий декомпозиційний метод, що є регуляризацією схеми Tseng'a за допомогою "shrinking" схеми. Доведено теорему про сильну збіжність породжених методом послідовностей до нормального розв'язку операторного включення. Результат отримано за умов, коли один з операторів є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** операторне включення, варіаційна нерівність, максимальний монотонний оператор, декомпозиція, алгоритм, нормальний розв'язок, сильна збіжність.

### 1. ВСТУП

Дана робота є продовженням недавньої статті [1] та присвячена побудові сильно збіжного декомпозиційного методу для операторних включень та варіаційних нерівностей, які належать до центральних об'єктів дослідження в сучасному прикладному нелінійному аналізі [2, 3, 4]. Зокрема, варіаційна нерівність є зручною загальною формою запису різних нелінійних задач. У вигляді задачі розв'язання варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги Неша в грі тощо. Дослідженню методів розв'язання операторних включень, варіаційних нерівностей та близьким до них питанням присвячено роботи [5–31].

У даній роботі розглянуто включення

$$0 \in (A + B)x$$

з максимальними монотонними операторами  $A$ ,  $B$ , що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Грунтуючись на методі декомпозиції Tseng'a (Tseng's modified forward-backward splitting method) [5] та відомому гібридному методі апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів (shrinking method) [6], запропоновано новий сильно збіжний декомпозиційний алгоритм розв'язання включень. Раніше подібний прийом було використано у роботі [7] для регуляризації слабо збіжного у нескінченновимірній ситуації екстрапроксимального методу розв'язання рівноважних

задач [8]. Теорема сильної збіжності отримана за умов, коли один з операторів (той, що використовується на "backward"-кроці) є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА АЛГОРИТМ

Нехай  $H$  — дійсний гільбертовий простір із скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та нормою  $\|\cdot\|$ ,  $P_C$  — оператор метричного проектування простору  $H$  на замкнену опуклу множину  $C \subseteq H$ . Для оператора  $T : H \rightarrow 2^H$  будемо використовувати позначення:

$$\begin{aligned} \text{dom}(T) &= \{x \in H : Tx \neq \emptyset\}, \\ T^{-1}0 &= \{x \in H : 0 \in Tx\}. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що резольвентою оператора  $T : H \rightarrow 2^H$  називають оператор  $J_T = (I + T)^{-1} : H \rightarrow 2^H$ . Відомо, що для максимального монотонного оператора  $T$  резольвента  $J_T$  є однозначним, скрізь заданим та міцно нерозтягуючим оператором, а множина  $T^{-1}0$  — замкненою та опуклою [4]. Корисною є

**Лема 1** ([2, 4]). *Нехай  $T : H \rightarrow 2^H$  — максимальний монотонний оператор,  $x, u \in H$ . Тоді*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(T) \quad \forall v \in Ty \quad \Rightarrow \quad x \in \text{dom}(T), \quad u \in Tx.$$

Нехай:

- A1)  $A : H \rightarrow 2^H$  — максимальний монотонний оператор;
- A2)  $B : H \rightarrow H$  — монотонний та ліпшицевий оператор.

Розглянемо операторне включення:

$$0 \in (A + B)x. \tag{1}$$

Припустимо, що

- A3)  $(A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$ .

**Зауваження 1.** Типовим прикладом (1) є варіаційні нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Tx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де  $C$  — замкнена опукла підмножина  $H$ ,  $T : H \rightarrow H$ . Дійсно, (2) можна подати у вигляді операторного включення [2, 4]:

$$0 \in (T + N_C)x,$$

де  $N_Cx$  — нормальний конус множини  $C$  в точці  $x \in H$ , тобто

$$N_Cx = \begin{cases} \{z \in H : (z, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для побудови сильно збіжних апроксимацій розв'язків включення (1) пропонуємо такий

**Алгоритм 1.** Для заданого  $x_1 = x \in H$  генеруємо послідовність елементів  $x_n \in H$  за допомогою ітераційної схеми ( $\lambda_n > 0$ ):

$$\begin{cases} C_1 = H, \\ y_n = x_n - \lambda_n Bx_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n Bz_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

**Зауваження 2.** Алгоритм 1 є регуляризацією за допомогою гібридної схеми [6] відомого декомпозиційного методу Tseng'a [5]. Подібний алгоритм для задачі рівноважного програмування досліджений в [7].

**Зауваження 3.** Основний недолік цих схем — зростаюча складність опуклих множин  $C_n$ , на які проектується точка  $x$ .

**Зауваження 4.** Цікавим та важливим є питання розробки сильно збіжного декомпозиційного методу для включення

$$0 \in (A_1 + A_2 + \dots + A_p + B)x,$$

де оператори  $A_i$  — максимальні монотонні, а оператор  $B$  — однозначний, монотонний та ліпшицевий.

Зробимо припущення:

A4)  $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$ , де  $L > 0$  — константа Ліпшиця оператора  $B$ .

### 3. ТЕОРЕМА СИЛЬНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Надалі припускаємо, що в алгоритмі 1  $z_n \neq x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Дійсно, якщо  $z_n = (I + \lambda_n A)^{-1}(I - \lambda_n B)x_n = x_n$ , то маємо  $x_n \in (A + B)^{-1}0$ .

Сформулюємо основний результат.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови A1)–A4). Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$  сильно збігаються до точки  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .*

Має місце важлива нерівність.

**Лема 2** ([1, 4, 5]). *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$  має місце нерівність*

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) \|x_n - z_n\|^2, \quad (3)$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ .

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.

Множини  $C_n$  — опуклі та замкнені. Покажемо, що алгоритм 1 породжує ланцюжок вкладень

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots \supseteq (A + B)^{-1}0.$$

Ясно, що  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_1 = H$ . Припустимо, що  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_n$ . Нехай  $z \in (A + B)^{-1}0$ . За лемою 2 маємо

$$\|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|.$$

Отже,  $z \in C_{n+1}$ . Тому  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

Покажемо, що існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \in \mathbb{R}$ . Оскільки  $x_n = P_{C_n}x$ , множина  $(A + B)^{-1}0$  лежить в  $C_n$ , то для всіх  $z \in (A + B)^{-1}0$  має місце нерівність

$$\|x_n - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|x_n - x\|^2.$$

Тоді

$$\|x_n - x\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \leq \|x - z\|^2.$$

Звідки випливає обмеженість зверху послідовності  $(\|x_n - x\|)$ . Оскільки  $C_{n+1} \subseteq C_n$ , то

$$\|x_{n+1} - x\| \geq \|x_n - x\|.$$

Отже, послідовність  $(\|x_n - x\|)$  — обмежена зверху та неспадна, тому існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ .

Покажемо фундаментальність послідовності  $(x_n)$ . Для довільного номеру  $m \in \mathbb{N}$ , врахувавши  $C_{n+m} \subseteq C_n$ , отримаємо

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \|x_{n+m} - P_{C_n}x\|^2 \leq \|x - x_{n+m}\|^2 - \|x_n - x\|^2.$$

Звідки випливає фундаментальність послідовності  $(x_n)$ .

Таким чином,  $x_n \rightarrow z^* \in H$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажемо, що  $z^* \in (A + B)^{-1}0$ . Оскільки  $x_{n+1} \in C_{n+1}$ , то

$$\|v_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Звідки

$$\|v_n - x_n\| \leq \|v_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (4)$$

Використовуючи нерівність з леми 2, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_n - z_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|v_n - z\|^2}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|v_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \|x_n - v_n\| = O(\|x_n - v_n\|), \end{aligned}$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ . З (4) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0. \quad (5)$$

З (5) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z^*\| = 0$$

та

$$(A + B)z_n \ni u_n = \frac{x_n - z_n}{\lambda_n} + Bz_n - Bx_n \rightarrow 0.$$

Маємо

$$(u_n - p, z_n - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A + B) \quad \forall p \in (A + B)y.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(0 - p, z^* - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A + B) \quad \forall p \in (A + B)y.$$

Оскільки оператор  $A + B$  є максимальним монотонним, то, завдяки лемі 1,  $0 \in (A + B)w$ .

Оскільки  $x_n = P_{C_n}x$  і  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_n$ , то

$$(x_n - x, z - x_n) \geq 0 \quad \forall z \in (A + B)^{-1}0. \quad (6)$$

Здійснивши граничний перехід в (6), одержимо

$$(z^* - x, z - z^*) \geq 0 \quad \forall z \in (A + B)^{-1}0,$$

тобто,  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .

#### 4. ВИПАДОК НЕВІДОМОЇ КОНСТАНТИ ЛІПШИЦЯ ОПЕРАТОРА $B$

Якщо невідома константа Ліпшиця оператора  $B$ , то замість алгоритму 1 можна застосувати процес з Арміхо-подібним регулюванням кроку  $\lambda_n$  (див. [5, 9]):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \frac{\|BJ_{\sigma 2^{-j}A}(I - \sigma 2^{-j}B)x_n - Bx_n\|}{\|J_{\sigma 2^{-j}A}(I - \sigma 2^{-j}B)x_n - x_n\|} \leq \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = J_{\lambda_n A}(I - \lambda_n B)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n(Bz_n - Bx_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{array} \right.$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  — задані параметри.

Процес обчислення  $j(n)$  є скінченним, а для породжених цим алгоритмом послідовностей має місце нерівність

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta^2) \|x_n - z_n\|^2,$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ .

З цієї нерівності можна вивести, що при виконанні умов А1)–А3) послідовності  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$ , що породжені описаним алгоритмом з регулюванням кроку  $\lambda_n$ , сильно збігаються до точки  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .

**Зауваження 5.** Для варіаційної нерівності (2) алгоритм з регулюванням кроку набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \frac{\|TP_C(I - \sigma 2^{-j}T)x_n - Tx_n\|}{\|P_C(I - \sigma 2^{-j}T)x_n - x_n\|} \leq \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = P_C(I - \lambda_n T)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n(Tz_n - Tx_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{array} \right.$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  — задані параметри.

Робота Семенова В.В. була підтримана Верховною Радою України (Імена стипендія ВР України для молодих вчених у 2013 році).

ЛІТЕРАТУРА

1. Семенов В. В. Сильно збіжний декомпозиційний алгоритм для операторного включення з сумою двох максимальних монотонних операторів // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №4(114). — С. 60–67.
2. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. — Wiley, New York, 1984. — 518 p.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. — xxi + 325 p.
4. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, New York, 2011. — xvi + 408 p.
5. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
6. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276–286.
7. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
8. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — 57(6). — P. 749–776.
9. Khobotov E. N. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 27. — P. 120–127.
10. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Springer-Verlag, Berlin, 2001. — xi + 181 p.
11. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — Springer, New York, 2003. — xxxiii + 666 p.
12. Васин В. В., Еремін І. І. Операторы и итерационные процессы фейеревского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
13. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 34–39.
14. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейерівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №4(103). — С. 89–93.
15. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101). — С. 120–128.
16. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
17. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13–18.

18. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's method for monotone equilibrium problems // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
19. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
20. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
21. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
22. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №4(110). — С. 100–111.
23. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // *Доповіді НАН України*. — 2012. — №2. — С. 56–62.
24. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
25. Семенов В. В. Явний алгоритм розщеплення для вариационних неравенств с монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №2(112). — С. 155–160.
27. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // *Доповіді НАН України*. — 2013. — №6. — С. 41–46.
28. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейєровских операторов // *Доповіді НАН України*. — 2013. — №7. — С. 47–52.
29. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // *Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications* / Eds.: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — V. 211. — P. 131–146.
30. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // *Journal of Global Optimization*. — 2014. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
31. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2014. — V. 50. — P. 271–277.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601,  
УКРАЇНА

Надійшла 17.01.2014.

УДК 517.9

## ПРО ОДИН СИЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РІВНОВАЖНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Л. М. ЧАБАК

**РЕЗЮМЕ.** У роботі запропоновано новий ітераційний метод розв'язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі. Метод базується на новому варіанті регуляризації відомої forward-backward схеми за допомогою в'язкісної апроксимації. Доведено теорему сильної збіжності методу.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** задача рівноважного програмування, біфункція, резольвента, ітераційний алгоритм, нерозтягуючий оператор, метод Гальперна, сильна збіжність.

### 1. ВСТУП

Популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження задач рівноважного програмування (нерівностей Кі Фаня) вигляду

$$\text{знайти } x \in C : \Psi(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1)$$

де  $C$  — непорожня підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $\Psi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  — біфункція. Задача (1) — зручна загальна форма запису та дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [1, 2, 3, 4, 5]. Наведемо ряд типових постановок [4, 6].

(1) Якщо  $\Psi(x, y) = g(y) - g(x)$ , де  $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ , то задача (1) є задачею умовної мінімізації  $g \rightarrow \min_C$ .

(2) Якщо  $\Psi(x, y) = (Ax, y - x)$ , де  $A : C \rightarrow H$ , то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2)$$

(3) Нехай  $P, Q$  — опуклі підмножини  $H$ ,  $C = P \times Q$ ,  $L : C \rightarrow \mathbb{R}$  — опукла-угнута функція. Точка  $(\bar{x}, \bar{p}) \in C$  називається сідловою точкою функції  $L$ , якщо

$$L(\bar{x}, p) \leq L(\bar{x}, \bar{p}) \leq L(x, \bar{p}) \quad \forall x \in C \quad \forall p \in Q. \quad (3)$$

Покладемо  $\Psi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$ , де  $v = (z, y)$ ,  $w = (x, p)$ . Тоді задача пошуку сідлової точки (3) рівносильна задачі (1).

(4) Нехай  $I$  — скінченна множина індексів. Для кожного  $i \in I$  задано множину  $C_i$  та функцію  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $C = \prod_{i \in I} C_i$ . Для  $x = (x_i)_{i \in I} \in C$  позначимо  $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$ . Точка  $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$  називається рівновагою Неша, якщо для всіх  $i \in I$  справедливі нерівності

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \quad \forall y_i \in C_i.$$

Визначимо функцію  $\Psi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  таким чином

$$\Psi(x, y) = \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Точка  $\bar{x} \in C$  є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли  $\bar{x}$  є розв'язком задачі (1).

Алгоритмам розв'язання рівноважних та близьких задач присвячено багато робіт, зокрема, [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. В «рівноважній алгоритміці» велике значення мають методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [11, 21, 22, 23, 24], які дозволяють регуляризовувати існуючі методи або будувати нові [4, 6, 11, 14, 17, 25, 26, 27].

У даній роботі ми пропонуємо новий ітераційний метод розв'язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі. Метод базується на новому варіанті регуляризації відомої forward-backward схеми [4] за допомогою в'язкісної апроксимації (viscosity approximation). Варіант регуляризації, в свою чергу, є привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи [23], що досліджена в [24]. Основний теоретичний результат роботи — теорема сильної збіжності методу.

Структура статті така. У другому пункті дано постановку задачі рівноважного програмування та сформульовані усі необхідні допоміжні факти. Третій пункт присвячено опису запропонованого ітераційного алгоритму та доведенню його сильної збіжності. В останній, четвертий, пункт винесено доведення сильної збіжності необхідного нам варіанту схеми Гальперна (в'язкісної апроксимації) для задачі пошуку спільної нерухомої точки певної зліченної родини нерозтягуючих операторів.

Автор щиро вдячна В. В. Семенову за конструктивні зауваження.

## 2. ЗАДАЧА РІВНОВАЖНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Нехай  $H$  — дійсний гільбертовий простір із скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та нормою  $\|\cdot\|$ . Множину нерухомих точок оператора  $T : H \rightarrow H$  будемо позначати  $F(T)$ . Через  $P_C$  будемо позначати оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину  $C \subseteq H$ :  $P_C x$  — єдиний елемент множини  $C$  із властивістю  $\|P_C x - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$ . Елемент  $y = P_C x$  характеризується таким чином [28]:  $y = P_C x \Leftrightarrow (y - x, z - y) \geq 0 \ \forall z \in C$ .

Для непорожньої опуклої замкненої множини  $C \subseteq H$ , оператора  $A$ , що діє в просторі  $H$ , та біфункції  $\Phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  розглянемо задачу рівноважного програмування у такій постановці:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) + \Phi(x, y) \geq 0 \ \forall y \in C. \quad (4)$$

Позначимо через  $S$  множину розв'язків задачі (4).

Припустимо, що біфункція  $\Phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє умовам [2, 4]:

- A1)  $\Phi(x, x) = 0$  для всіх  $x \in C$ ;
- A2)  $\Phi(x, y) + \Phi(y, x) \leq 0$  для всіх  $x, y \in C$ ;

A3) для всіх  $x \in C$  функціонал  $\Phi(x, \cdot)$  напівнеперервний знизу та опуклий;

A4)  $\limsup_{t \rightarrow +0} \Phi(x + t(z - x), y) \leq \Phi(x, y)$  для всіх  $x, y, z \in C$ .

**Означення 1** ([4]). Резольвентою біфункції  $\Phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  називають оператор  $J_\Phi : H \rightarrow 2^H$ :

$$x \rightarrow J_\Phi x = \{z \in C : \Phi(z, y) + (z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C\}.$$

**Теорема 1** ([4]). Нехай біфункція  $\Phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє умови A1)–A4). Тоді:

1)  $\text{dom } J_\Phi = \{x \in H : J_\Phi x \neq \emptyset\} = H$ ;

2) оператор  $J_\Phi$  однозначний та міцно нерозтягуючий, тобто

$$\|J_\Phi x - J_\Phi y\|^2 \leq (J_\Phi x - J_\Phi y, x - y) \quad \forall x, y \in H;$$

3) множина  $F(J_\Phi)$  дорівнює множині  $\{x \in C : \Phi(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C\}$  та є опуклою і замкненою.

Нехай:

A5)  $A : H \rightarrow H$  —  $L$ -обернено сильно монотонний оператор, тобто для числа  $L > 0$  виконується нерівність

$$(Ax - Ay, x - y) \geq L \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

**Зауваження 1.** Ясно, що  $L$ -обернено сильно монотонний оператор є  $1/L$ -ліпшицевим. Якщо оператор  $A$  є  $\mu$ -сильно монотонним та  $L$ -ліпшицевим, то він буде  $\mu/L^2$ -обернено сильно монотонним. Якщо  $g$  — заданий на замкненій опуклій множині  $C$  опуклий диференційовний функціонал з похідною, що задовольняє умові Ліпшиця зі сталою  $L > 0$ , то похідна  $\nabla g$  —  $1/L$ -обернено сильно монотонний на  $C$  оператор (теорема Байона-Аддада-Антіпіна) [29].

Має місце

**Лема 1.** Нехай виконуються умови A1)–A5). Тоді для всіх  $\lambda \in (0, 2L)$  оператор  $T_\lambda = J_{\lambda\Phi}(I - \lambda A)$  — нерозтягуючий та  $F(T_\lambda) = S$ .

*Доведення.* Перший факт випливає з оцінки ( $\lambda > 0$ )

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda\Phi}(x - \lambda Ax) - J_{\lambda\Phi}(y - \lambda Ay)\|^2 &\leq \|(x - \lambda Ax) - (y - \lambda Ay)\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda(x - y, Ax - Ay) + \lambda^2 \|Ax - Ay\|^2 \leq \\ &\leq \|x - y\|^2 - \lambda(2L - \lambda) \|Ax - Ay\|^2. \end{aligned}$$

Рівність  $z = T_\lambda x$  означає, що  $\lambda(\Phi(z, y) + (Ax, y - z)) + (z - x, y - z) \geq 0$  для всіх  $y \in C$ . Тому  $F(T_\lambda) = S$ .  $\square$

Перейдемо до розгляду алгоритму розв'язання задачі (4).

### 3. АЛГОРИТМ ТА ТЕОРЕМА ЗБІЖНОСТІ

Для довільної пари елементів  $x, y \in H$  визначимо множину

$$H(x, y) = \{z \in H : \|z - y\| \leq \|z - x\|\}.$$

Множина  $H(x, y)$  є замкненим напівпростором (що співпадає з  $H$  у випадку  $x = y$ ).

Зафіксуємо стискаючий оператор  $T : H \rightarrow H$ . Для розв'язання задачі рівноважного програмування (4) розглянемо

**Алгоритм 1.** Для  $x_1 \in H$  генеруємо послідовність елементів  $x_n \in H$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda_n A x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n \Phi} y_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n T x_n + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де  $\alpha_0 = 1$ ,  $(\alpha_n)$  – спадна послідовність чисел з  $(0, 1)$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 2L)$ .

**Зауваження 2.** Для обчислення  $z_n$  слід розв'язати задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } z_n \in C : \lambda_n \Phi(z_n, y) + (z_n - y_n, y - z_n) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Має місце

**Теорема 2.** Нехай  $H$  – гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина, виконуються умови А1)–А5) та  $S \neq \emptyset$ . Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність  $(x_n)$  сильно збігається до розв'язку  $z \in H$  задачі рівноважного програмування (4) такого, що  $z = P_S T z$ .

*Доведення.* Покажемо, що для всіх  $n \in \mathbb{N}$  має місце вкладення  $S \subseteq H(x_n, z_n)$ . Для  $p \in S$  маємо

$$\|z_n - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Отже,  $p \in H(x_n, z_n)$ . Звідки випливає  $S \subseteq H(x_n, z_n)$ .

За теоремою 3 (див. Додаток) послідовність  $(x_n)$  сильно збігається до елемента  $z \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(x_n, z_n)$  такого, що

$$(z - Tz, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in F.$$

Остання нерівність означає, що  $z = P_F T z$ .

Покажемо, що  $z \in S$ , чим і доведемо теорему. Оскільки  $z \in H(x_n, z_n)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\|x_n - z\| \geq \|z_n - z\|.$$

Після граничного переходу, отримаємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\| = 0$ . Звідки  $z \in C$ .

Для  $z_n = J_{\lambda_n \Phi} y_n$  маємо

$$\begin{aligned} \lambda_n \Phi(z_n, y) + (z_n - y_n, y - z_n) &= \\ &= \lambda_n (\Phi(z_n, y) + (A x_n, y - z_n)) + (z_n - x_n, y - z_n) \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

З умови монотонності біфункції  $\Phi$  випливає

$$\left( \frac{z_n - x_n}{\lambda_n}, y - z_n \right) + (A x_n, y - z_n) \geq \Phi(y, z_n) \quad \forall y \in C.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(Az, y - z) \geq \Phi(y, z) \quad \forall y \in C.$$

Для  $t \in (0, 1)$  покладемо  $y_t = z + t(y - z) \in C$ . Маємо

$$0 = \Phi(y_t, y_t) \leq t\Phi(y_t, y) + (1 - t)\Phi(y_t, z) \leq t\Phi(y_t, y) + (1 - t)t(Az, y - z).$$

Звідки

$$(1 - t)(Az, y - z) + \Phi(y_t, y) \geq 0.$$

Спрямувавши  $t$  до нуля, одержимо

$$(Az, y - z) + \Phi(z, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто  $z \in S$ . □

**Зауваження 3.** У випадку апроксимації нормального розв'язку варіаційної нерівності (2) алгоритм 1 набуває вигляду

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ x_{n+1} = \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n. \end{cases}$$

Цей алгоритм пропонується у якості альтернативи такій відомій схемі:

$$\begin{cases} C_0 = H, \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, z_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} 0, \end{cases}$$

яка ґрунтується на гібридному методі Такахасі-Такеучі-Куботи [23].

#### 4. ДОДАТОК: ЗБІЖНІСТЬ ВАРІАНТУ СХЕМИ ГАЛЬПЕРНА

Нехай  $T_i : C \rightarrow C$  — злічений набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині  $C$  простору  $H$ ,  $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ ,  $T : C \rightarrow C$  — стискаючий оператор з коефіцієнтом  $\mu \in [0, 1)$ . Розглянемо задачу

$$\text{знайти } x \in F : (x - Tx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F. \quad (5)$$

Варіаційна нерівність (5) має єдиний розв'язок. Для його знаходження можна використати такий варіант схеми Гальперна.

**Алгоритм 2.** Задаємо  $x_1 \in C$ , генеруємо послідовність елементів  $x_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де  $\alpha_0 = 1$ ,  $(\alpha_n)$  — спадна послідовність чисел з  $(0, 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

Сильна збіжність цієї схеми доводиться стандартними міркуваннями [21, 24]. Наведемо їх для замкненості статті.

Використаємо таке відоме твердження про числові послідовності.

**Лема 2** ([30]). Нехай  $(\xi_n)$  – послідовність невід’ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність  $\xi_{n+1} \leq (1-\alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n \forall n \in \mathbb{N}$ , де послідовності  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  і  $(\gamma_n)$  мають властивості: 1)  $\alpha_n \in [0, 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ; 2)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq 0$ ; 3)  $\gamma_n \in [0, +\infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$ . Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ .

**(Факт 1).** Послідовність  $(x_n)$  обмежена. Дійсно, для  $p \in F$  маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \alpha_n \|Tx_n - p\| + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n (\|Tx_n - Tp\| + \|Tp - p\|) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \mu \|x_n - p\| + \alpha_n \|Tp - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| = \\ &= (1 - (1 - \mu)\alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|Tp - p\| \leq \max \left\{ \frac{\|Tp - p\|}{1 - \mu}, \|x_n - p\| \right\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \max \{ \|Tp - p\| (1 - \mu)^{-1}, \|x_1 - p\| \}, \quad n \geq 1.$$

**(Факт 2).** Для послідовності  $(x_n)$  виконується  $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ . Маємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \alpha_n Tx_n - \alpha_{n-1} Tx_{n-1} + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_{n-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - T_i x_{n-1}) + \alpha_n (Tx_n - Tx_{n-1}) + \\ &\quad + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) (Tx_{n-1} - Tx_{n-1}). \end{aligned}$$

Звідки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq (1 - (1 - \mu)\alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\| + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \|Tx_{n-1} - Tx_{n-1}\|.$$

З леми 2 про числові послідовності випливає бажане.

**(Факт 3).** Для всіх  $i$  має місце  $\|x_n - T_i x_n\| \rightarrow 0$ . Маємо

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (x_n - T_i x_n) = \alpha_n (Tx_n - x_n) + x_n - x_{n+1}.$$

Для довільного  $p \in F$  розглянемо рівність

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (x_n - T_i x_n, x_n - p) &= \\ &= \alpha_n (Tx_n - x_n, x_n - p) + (x_n - x_{n+1}, x_n - p). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\|x_n - p\|^2 \geq \|T_i x_n - p\|^2 = \|T_i x_n - x_n\|^2 + \|x_n - p\|^2 + 2(T_i x_n - x_n, x_n - p),$$

то

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - x_n\|^2 \leq 2\alpha_n (Tx_n - x_n, x_n - p) + 2(x_n - x_{n+1}, x_n - p).$$

Для фіксованого  $i$  при  $n > i$  маємо

$$\|T_i x_n - x_n\|^2 \leq \frac{M(\alpha_n + \|x_n - x_{n+1}\|)}{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}.$$

Звідки

$$\|x_n - T_i x_n\| \rightarrow 0.$$

Нехай  $z \in C$  — єдиний розв'язок варіаційної нерівності (5). Доведемо, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (z - x_n, z - Tz) \leq 0. \quad (6)$$

Виділимо з  $(x_n)$  підпослідовність  $(x_{n_k})$  таку, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (z - x_n, z - Tz) = \lim_{k \rightarrow \infty} (z - x_{n_k}, z - Tz).$$

Можна вважати, що  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x} \in C$ . З принципу демізамкненості випливає включення  $\tilde{x} \in F$ . Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z - x_{n_k}, z - Tz) = (z - \tilde{x}, z - Tz) \leq 0,$$

чим і доводимо (6).

Покажемо тепер, що  $x_n \rightarrow z$ . Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \left\| \alpha_n T x_n + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - z \right\|^2 = \\ &= \left\| \alpha_n (T x_n - z) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - z) \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - z) \right\|^2 + 2\alpha_n (T x_n - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (T x_n - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (z - Tz, z - x_{n+1}) + \\ &\quad + \mu\alpha_n \|x_n - z\|^2 + \mu\alpha_n \|x_{n+1} - z\|^2. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{(1 - \alpha_n)^2 + \mu\alpha_n}{1 - \mu\alpha_n} \|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n}{1 - \mu\alpha_n} (z - Tz, z - x_{n+1}). \quad (7) \end{aligned}$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (7) лему 2 про числові послідовності, робимо висновок, що  $\|x_n - z\| \rightarrow 0$ . Отже, має місце

**Теорема 3.** *Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина,  $T_i : C \rightarrow C$  — нерозтягуючі оператори,  $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ ,  $T : C \rightarrow C$  — стискаючий оператор. Тоді згенерована алгоритмом 2 послідовність  $(x_n)$  сильно збігається до розв'язку варіаційної нерівності (5).*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
2. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // *Math. Stud.* — 1994, 63. — P. 123–145.
3. Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P. M. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models. — New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 300 p.
4. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces // *J. Nonlinear Convex Anal.* — 2005, 6. — P. 117–136.
5. Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Passacantando M. Existence and solution methods for equilibria // *Eur. J. Oper. Res.* — 2013. — 227. — P. 1–11.
6. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2011. — № 1(104). — С. 10–23.
7. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), *Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, Volume 211.* — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — P. 131–146.
8. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // *Экономика и математические методы.* — 1976. — №4. — С. 747–756.
9. Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1997. — 37, №11. — С. 1327–1339.
10. Антипин А. С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. — Москва: ВЦ РАН, 2002. — 130 с.
11. Takahashi S., Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces // *J. Math. Anal. Appl.* — 2007, 331. — P. 506–515.
12. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // *Optimization.* — 2008. — 57(6). — P. 749–776.
13. Van N. T. T., Strodiot J. J., Nguyen V. H. A bundle method for solving equilibrium problems // *Math. Program.* — 2009. — 116(1–2), Ser. B. — P. 529–552.
14. Nguyen B., Dang T. T. H. Tikhonov regularization method for system of equilibrium problems in Banach spaces // *Український математичний журнал.* — 2009. — 61, №8. — С. 1098–1105.
15. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2010. — №3(102). — С. 40–48.

16. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13–18.
17. Малицький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
18. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
19. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — №4. — P. 631–639.
20. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
21. Xu H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — 298. — P. 279–291.
22. Васин В. В., Еремін І. І. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
23. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276–286.
24. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
25. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — Москва: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
26. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
27. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
28. Киндерлерер Д., Стампакья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
29. Гольштейн Е. Г., Гольштейн Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — Москва: Наука, 1989. — 400 с.
30. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — Москва: Наука, 1988. — 549 с.

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, КИЇВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТУ ІМ. ГЕТЬМАНА ПЕТРА КОНАШЕВИЧА-САГАЙДАЧНОГО, ВУЛ. ФРУНЗЕ, 9, КИЇВ, 04071, УКРАЇНА, E-MAIL: LYU\_BOV1@MAIL.RU

Надійшла 20.11.2013

UDC 531.929

## CONSTRUCTION OF EXACT CONTROL FOR A ONE-DIMENSIONAL HEAT EQUATION WITH CONSTANT DELAY

D. YA. KHUSAINOV, M. POKOJOVY, E. I. AZIZBAYOV

**ABSTRACT.** We prove an exact controllability result for a one-dimensional heat equation with delay in both lower and highest order terms subject to nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions. Moreover, we give an explicit representation of the control function steering the system into a given final state. Under certain decay properties for corresponding Fourier coefficients which can be interpreted as a sufficiently high Sobolev regularity of the data, both control function and the solution are proved to be regular in the classical sense both with respect to time and space variables.

**KEYWORDS:** heat equation with constant coefficients, exact controllability, constant delay.

### 1. INTRODUCTION

Studying and developing mathematical models to describe various phenomena in physics, economics, ecology and population dynamics, etc., are one of central problems of the modern applied mathematics (cf. [6], [14]). Integral and differential equations with lumped and distributed parameters proved to be a useful and efficient tool for such studies. Whereas evolution equations with lumped parameters have already been rather well investigated (see, e.g., [7]), there still remain a lot of open questions for the case of dynamical systems with distributed parameters (cp. monographs [12], [13] and references therein).

The scope of the present paper is a linear one-dimensional heat equation in a bounded domain with discrete delay in terms of both lower and highest orders. Recently, an abstract semigroup treatment was proposed for distributed systems with delays (viz. [3], [4]). Though this rather general framework provides good analytical and control-theoretical tools for various delay scenarios, technical difficulties may arrive when applying to problems with delay in the highest order terms which have nevertheless been solved in [5] for certain parabolic-type equations.

Another important problem consists in obtaining explicit representation formulas for the solutions to distributed evolution equations with delay. We refer to [2], [9], [10], [11] for details. Such representation formulas can then be naturally used to carefully study the solutions, obtain semi-analytical approximations, address controllability and optimal control problems, etc.

2. REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO THE HEAT EQUATION WITH DELAY

In [11], a nonhomogeneous one-dimensional heat equation with delay

$$v_t(x, t) = a_1^2 v_{xx}(x, t) + a_2^2 v_{xx}(x, t - \tau) + b_1 v_x(x, t) + b_2 v_x(x, t - \tau) + d_1 v(x, t) + d_2 v(x, t - \tau) + g(x, t), \quad (2.1)$$

defined for  $0 \leq x \leq l$  and  $t \geq 0$  ( $l > 0$ ), was studied. The coefficients for the phase derivatives were assumed to be proportional, i.e., there should exist a constant  $\mu \in \mathbb{R}$  such that  $\mu = -\frac{b_1}{2a_1^2} = -\frac{b_2}{2a_2^2}$  holds true. A Dirichlet initial boundary value problem with nonhomogeneous initial

$$v(x, t) = \psi(x, t) \text{ for } 0 \leq x \leq l, -\tau \leq t \leq 0 \quad (2.2)$$

and boundary conditions

$$v(0, t) = \theta_1(t), \quad v(l, t) = \theta_2(t) \text{ for } t \geq -\tau \quad (2.3)$$

was considered under an additional compatibility condition on the data:

$$\psi(0, t) = \theta_1(t), \quad \psi(l, t) = \theta_2(t) \text{ for } t \geq -\tau.$$

Performing the substitution

$$v(x, t) := e^{\mu x} u(x, t) \text{ with } \mu = -\frac{b_1}{2a_1^2} = -\frac{b_2}{2a_2^2},$$

Equation (2.1) was transformed to

$$u_t(x, t) = a_1^2 u_{xx}(x, t) + a_2^2 u_{xx}(x, t - \tau) + c_1 u(x, t) + c_2 u(x, t) + f(x, t) \quad (2.4)$$

with

$$c_1 := d_1 - \frac{b_1^2}{4a_1^2}, \quad c_2 := d_2 - \frac{b_2^2}{4a_2^2}, \quad f(x, t) := e^{-\mu x} g(x, t)$$

whereby the initial and boundary conditions read as

$$u(x, t) = \varphi(x, t) \text{ for } 0 \leq x \leq l, -\tau \leq t \leq 0, \quad \varphi(x, t) := e^{-\mu x} \psi(x, t) \quad (2.5)$$

and

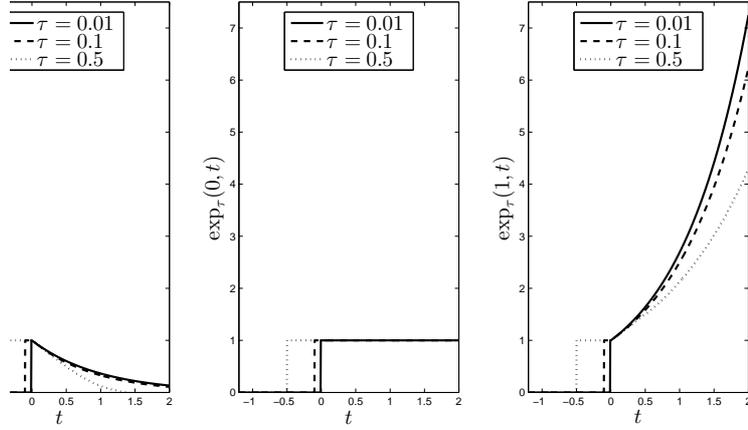
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \mu_1(t), \quad u(l, t) := \mu_2(t) \text{ for } -\tau < t < 0, \\ \mu_1(t) &:= \theta_1(t), \quad \mu_2(t) := e^{-\mu l} \theta_2(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

respectively.

Following [10], the delay exponential function  $\exp_\tau(b, \cdot)$  was introduced.

**Definition 1.** For  $\tau > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  (or  $b \in \mathbb{C}$ ), define for each  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\exp_\tau(b, t) := \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t < 0, \\ 1 + b \frac{t}{1!}, & 0 \leq t < \tau, \\ 1 + b \frac{t}{1!} + b^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!}, & \tau \leq t < 2\tau, \\ \dots & \dots \\ 1 + b \frac{t}{1!} + \dots + b^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (2.7)$$


 FIGURE 1. Delay exponential function  $\exp_\tau(b, \cdot)$ 

See Figure 1 for a plot of the delay exponential function.

Using the special function given in Equation (2.7), the classical solution to the initial boundary value problem (2.4)–(2.6) with delay can be represented as

$$u(x, t) = S_1(\varphi, \mu_1, \mu_2)(x, t) + S_2(f, \mu_1, \mu_2)(x, t) + \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x \quad (2.8)$$

with linear operators

$$\begin{aligned} S_1(\varphi, \mu_1, \mu_2)(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n(t+\tau)} \exp_\tau(D_n, t) \Phi_n(-\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_\tau(D_n, t - \tau - s) (\dot{\Phi}_n(s) - L_n \Phi_n(s)) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (2.9) \\ S_2(f, \mu_1, \mu_2)(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau(D_n, t - \tau - s) F_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^t f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \xi d\xi + M_n(\mu_1, \mu_2)(t), \\ \Phi_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi + m_n(\mu_1, \mu_2)(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

with

$$\begin{aligned}
 M_n(\mu_1, \mu_2)(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \left( -\frac{d}{dt} \left( \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} \xi \right) + \frac{b_2}{l} (\mu_1(t - \tau) - \right. \\
 &\quad \left. + \mu_2(t - \tau)) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \xi d\xi + c_1 m_n(\mu_1, \mu_2)(t) \\
 &\quad + c_2(\mu_1, \mu)(t - \tau), \\
 m_n(\mu_1, \mu_2)(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \left( \mu_1(t) + \frac{\xi}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 L_n &= c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2, \\
 D_n &= \left(c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right) e^{-\left(c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right)\tau}.
 \end{aligned}$$

Thus, the solution to the initial boundary value problem (2.4)–(2.6) is formally given as a Fourier series in Equation (2.9). Regarding its convergence, the following result was shown in [11] (cf. also [10]).

**Theorem 2.** For  $T > 0$ ,  $m := \lceil \frac{T}{\tau} \rceil$  and  $\alpha > 0$ , let  $F \in \mathcal{C}^0([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$ ,  $\Phi, \partial_t \Phi, \partial_{tt} \Phi \in \mathcal{C}^0([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$  be such that their Fourier coefficients  $F_n$  and  $\Phi_n$  satisfy

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2m+1+\delta} \max_{s \in [-\tau, 0]} [|\Phi_n''(s)| + n^2 |\Phi_n'(s)| + n^4 |\Phi_n(s)|] &= 0, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m} n^{2(m-k)+1+\delta} \max_{(k-1)\tau \leq s \leq k\tau} [|F_n'(s)| + n^2 |F_n(s)|] &= 0.
 \end{aligned}$$

Under these conditions, problem (2.4)–(2.6) possesses a unique classical solution  $u \in \mathcal{C}^0([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$  with  $\partial_t u, \partial_{xx} u \in \mathcal{C}^0([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$ . Moreover, the functions  $u$ ,  $\partial_t u$ , and  $\partial_{xx} u$  are represented by uniformly and absolutely convergent Fourier series given in (2.8) or obtained by a term-wise application of  $\partial_t$  or  $\partial_{xx}$  to (2.8), respectively.

**Remark 3.** Using standard arguments from the elliptic theory, the conditions of Theorem 2 can be interpreted as a requirement for the data  $\varphi$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $f$  to belong to certain Sobolev spaces (cf. [1]) of functions with sufficiently many weak derivatives (s. [11]). The larger  $T$  and  $\alpha$  are, the smoother the data are supposed to be.

Representing the solution to the initial boundary value problem (2.4)–(2.6) in the form (2.8) is not always convenient when the impact of the initial and boundary values or the inhomogeneity has to be treated separately. For our purposes, it is necessary to split corresponding terms into different sums.

Expanding the first sum in (2.8) and performing integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
 S_1(\varphi, \mu_1, \mu_2)(x, t) &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n(t+\tau)} \exp_{\tau}(D_n, t) \Phi_n(-\tau) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) (\dot{\Phi}_n(s) - L_n \Phi_n(s)) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n(t+\tau)} \exp_{\tau}(D_n, t) \Phi_n(-\tau) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \Phi_n(s) \Big|_{s=-\tau}^{s=0} \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\tau}^0 \left( -L_n e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \right) \Phi_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\tau}^0 \left( -e^{L_n(t-s)} D_n \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \right) \Phi_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau) \Phi_n(0) + \right. \\
 &\quad \left. + D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \Phi_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).
 \end{aligned}$$

Plugging  $\Phi_n$  from Equation (2.10), we get

$$\begin{aligned}
 S_1(\varphi, \mu_1, \mu_2)(x, t) &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi + m_n(\mu_1, \mu_2)(0) \right) \right) \times \\
 &\quad \times \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + m_n(\mu_1, \mu_2)(s) \right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).
 \end{aligned}$$

Expanding the sum in Equation (2.9) and plugging  $F_n$  from Equation (2.10) yields

$$\begin{aligned}
 S_2(\varphi, \mu_1, \mu_2)(x, t) &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) F_n(s) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + M_n(\mu_1, \mu_2) \right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).
 \end{aligned}$$

Thus, the solution  $u$  to the initial boundary value problem (2.4)–(2.6) given in Equation (2.8) can be written as follows:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau) \left( \frac{2}{l} \int_0^t \varphi(\xi, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t) m_n(\mu_1, \mu_2)(0) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \times \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) m_n(\mu_1, \mu_2)(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) ds \right) \times \\
 & \times e^{-\frac{\alpha}{2} x} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) M_n(\mu_1, \mu_2) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} x.
 \end{aligned}$$

Now, we collect appropriate terms in the following three operators — the first one depending on the initial data:

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_1(\varphi)(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau) \left( \frac{2}{l} \int_0^t \varphi(\xi, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \times \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),
 \end{aligned}$$

the second one depending on the boundary data:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(\mu_1, \mu_2)(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{L_n t} \exp_{\tau}(D_n, t) m_n(\mu_1, \mu_2)(0)) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) m_n(\mu_1, \mu_2)(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) M_n(\mu_1, \mu_2) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\ &+ \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} x, \end{aligned}$$

and the third one depending on the inhomogeneity:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(f)(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned}$$

Thus, we arrive at

$$u(x, t) = \tilde{S}_1(\varphi)(x, t) + \tilde{S}_2(\mu_1, \mu_2)(x, t) + \tilde{S}_2(f)(x, t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} x. \quad (2.11)$$

### 3. EXACT CONTROLLABILITY FOR THE HEAT EQUATION WITH DELAY

In this section, we consider the following exact controllability problem. Given an initial state  $\varphi$  and boundary data  $\gamma_1, \gamma_2$ , replace  $f$  with a control function  $U$  such that the solution  $u$  to (2.4)–(2.6) is steered into a given final state  $\Psi$  at a prescribed time  $T > 0$ , i.e.,

$$u(x, T) = \Psi(x) \text{ for } 0 \leq x \leq l. \quad (3.1)$$

Since we are interested in classical solutions, a compatibility condition on the boundary conditions and the end state has to be imposed:

$$\Psi(0) = \mu_1(T), \quad \Psi(l) = \mu_2(T).$$

As it follows from the representation formula given in Equation (2.11), Equation (3.1) is satisfied if and only if

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(\varphi)(x, T) + \tilde{S}_2(\mu_1, \mu_2)(x, T) + \tilde{S}_2(U)(x, T) + \frac{\mu_2(T) - \mu_1(T)}{l} x &= \Psi(x) \\ \text{for } 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (3.2)$$

We expand the functions  $\Psi$  and  $x \mapsto \frac{\mu_2(T) - \mu_1(T)}{l}x$  on the interval  $(0, l)$  into Fourier series with respect to the eigenfunctions of the corresponding elliptic operator. Equation (2.10) yields then

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \\ \text{with } \Psi_n(x) &= \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \text{ for } n \in \mathbb{N}, \\ \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu_1, \mu_2) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \end{aligned}$$

We assume now  $U$  to also have an expansion into Fourier series of the form:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (3.3)$$

The operator  $\tilde{S}_3(U)$  reads then as

$$\tilde{S}_3(U)(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) U_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Thus, the controllability condition rewrites as

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(\varphi)(x, T) + \tilde{S}_2(\mu_1, \mu_2)(T, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^T e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) \times \right. \\ \left. \times U_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu_1, \mu_2)(T) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned} s_{1n}(t) &= e^{L_n(t)} \exp_{\tau}(D_n, t) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \right) + \\ &\quad + D_n \int_0^l e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - 2\tau - s) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \right) ds, \\ s_{2n}(t) &= \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, t - \tau - s) M_n(\mu_1, \mu_2)(s) ds. \end{aligned}$$

There follows then from (3.2) that the controllability problem for an arbitrary time  $T > 0$  reduces to finding functions  $u_n$  satisfying the following condition

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (s_{1n}(T) + s_{2n}(T)) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^T e^{L_n(t-s)} \exp_{\tau}(D_n, T - \tau - s) \times \right. \\ \left. \times U_n(s) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu_1, \mu_2)(T) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{aligned}$$

which is in its turn equivalent to a system of countably many Fredholm integral equations of the first type:

$$s_{1n}(T) + s_{2n}(T) + \int_0^T e^{L_n(T-s)} \exp_\tau(D_n, T - \tau - s) U_n(s) ds + m_n(\mu_1, \mu_2)(T) = \Psi_n \text{ for } n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

**Lemma 4.** For  $\tau > 0$ ,  $D \neq 0$ , there holds for arbitrary  $T > 0$

$$\int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_\tau(D, s) ds = \frac{1}{D} (\exp_\tau(D, T) - 1). \quad (3.5)$$

*Proof.* There exists a unique  $k \in \mathbb{N}$  such that  $(k-2)\tau \leq T - \tau < (k-1)\tau$ . Therefore,

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_\tau(D, s) ds &= \int_{-\tau}^0 ds + \int_0^\tau (1 + D \frac{s}{1!}) ds + \\ &+ \int_\tau^{2\tau} \left(1 + D \frac{s}{1!} + D^2 \frac{(s-\tau)^2}{2!}\right) ds + \\ &+ \int_{2\tau}^{3\tau} \left(1 + D \frac{s}{1!} + D^2 \frac{(s-\tau)^2}{2!} + D^3 \frac{(s-2\tau)^3}{3!}\right) ds + \dots + \\ &+ \int_{(k-2)\tau}^{(k-1)\tau} \left(1 + D \frac{s}{1!} + D^2 \frac{(s-\tau)^2}{2!} + D^3 \frac{(s-2\tau)^3}{3!} + \dots + D^k \frac{(s-(k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right) ds. \end{aligned}$$

Performing the integration, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_\tau(D, s) ds &= \frac{s}{1!} \Big|_{s=-\tau}^{s=0} + \left( \frac{s}{1!} + D \frac{s^2}{2!} \right) \Big|_{s=0}^{s=t} + \\ &+ \left( \frac{s}{1!} + D \frac{s^2}{2!} + D^2 \frac{(s-\tau)^3}{3!} \right) \Big|_{s=\tau}^{s=2\tau} + \\ &+ \left( \frac{s}{1!} + D \frac{s^2}{2!} + D^2 \frac{(s-\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{(s-2\tau)^4}{4!} \right) \Big|_{s=2\tau}^{s=3\tau} + \dots + \\ &+ \left( \frac{s}{1!} + D \frac{s^2}{2!} + D^2 \frac{(s-\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{(s-2\tau)^4}{4!} + \dots + D^k \frac{(s-(k-2)\tau)^k}{k!} \right) \Big|_{s=(k-2)\tau}^{s=T-\tau} \\ &= \frac{\tau}{1!} + \left( \frac{\tau}{1!} + D \frac{\tau^2}{2!} \right) + \left( \left( \frac{2\tau}{1!} + D \frac{(2\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{\tau^3}{3!} \right) - \left( \frac{\tau}{1!} + D \frac{\tau^2}{2!} \right) \right) + \\ &+ \left( \left( \frac{3\tau}{1!} + D \frac{(3\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{(2\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{\tau^4}{4!} \right) - \left( \frac{2\tau}{1!} + D \frac{(2\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) + \dots + \\ &+ \left( \left( \frac{T-\tau}{1!} + D \frac{(T-\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{(T-2\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{(T-3\tau)^4}{4!} + \dots + D^k \frac{(T-\tau-(k-1)\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \right. \\ &- \left. \left( \frac{(k-1)\tau}{1!} + D \frac{((k-1)\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{((k-2)\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{((k-3)\tau)^4}{4!} + \dots + D^{k-1} \frac{\tau^k}{k!} \right) \right) = \\ &= \left( \frac{(T-\tau)}{1!} + D \frac{(T-\tau)^2}{2!} + D^2 \frac{(T-2\tau)^3}{3!} + D^3 \frac{(T-3\tau)^4}{4!} + \dots + D^k \frac{(T-\tau-(k-1)\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \frac{\tau}{1!}. \end{aligned}$$

Thus, we can write

$$\int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_\tau(D, s) ds = \frac{1}{D} \left( 1 + D \frac{T}{1!} + D^2 \frac{(T-\tau)^2}{2!} + \dots + D^{k+1} \frac{(T-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} - 1 \right).$$

This completes the proof. □

Using Lemma 4, the integral equation (3.4) can be rewritten as

$$\int_0^T e^{L_n(T-s)} \exp_\tau(D_n, T - \tau - s) U_n(s) ds = R_n(T), \quad (3.6)$$

where

$$R_n(T) := \Psi_n - s_{1n}(T) - s_{2n}(T) - m_n(\mu_1, \mu_2)(T).$$

Substituting  $t := T - \tau - s$  into (3.6), we further obtain

$$\int_{-\tau}^{T-\tau} e^{L_n(\tau+t)} \exp_\tau(D_n, t) U_n(T - \tau - t) dt = R_n(T). \quad (3.7)$$

We look now for a solution of Equation (3.7) in the form

$$U_n(T - \tau - t) = e^{-L_n(\tau+t)} A_n(T),$$

where  $A_n(T)$  are constants depending on  $T$ . Plugging this into (3.7) yields

$$A_n(T) \int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_\tau(D_n, t) dt = R_n(T).$$

Exploiting Equation (3.5) from Lemma 4, we can write

$$\frac{A_n(T)}{D_n} (\exp_\tau(D_n, T) - 1) = R_n(T).$$

Thus, we obtain the following Fourier coefficients for the control function

$$U_n(t) = e^{-L_n(T-t)} \frac{R_n(T) D_n}{\exp_\tau(D_n, T) - 1}.$$

Summarizing the calculations above, we have proved the following statement.

**Theorem 5.** Let  $\varphi$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and  $\Psi$  be such that the conditions of Theorem 2 are fulfilled. Then the control function

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

with

$$U_n(t) = e^{-L_n(T-t)} \frac{R_n(T) D_n}{\exp_\tau(D_n, T) - 1},$$

$$R_n(T) = \Psi_n - s_{1n}(T) - s_{2n}(T) - m_n(\mu_1, \mu_2)(T),$$

$$s_{1n}(t) = e^{L_n t} \exp_\tau(D_n, t) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) +$$

$$+ D_n \int_{-\tau}^0 e^{L_n(t-s)} \exp_\tau(D_n, t - 2\tau - s) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) ds,$$

$$s_{2n}(t) = \int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau(D_n, t - \tau - s) M_n(\mu_1, \mu_2)(s) ds$$

solves the exact controllability problem (2.4)–(2.6), (3.1).

4. CONCLUSIONS AND OUTLOOK

We proved an exact controllability result in the classical settings for a one-dimensional heat equation with delay. For practical applications, it would though be desirable to extend these results to a weak framework as, for example, the one described in [5] or even beyond it. For  $p, q \in (1, \infty)$ , using the maximal  $L^p$ -regularity property (cf. [15], [16]) for the elliptic operator in (2.4), the existence of a unique solution to (2.4)–(2.6)

$$u \in W^{1,p}((0, T), L^q((0, l))) \cap L^p((0, T), W^{2,q}((0, l)))$$

for the data

$$f \in L^p((0, T), L^q((0, l))),$$

$$\varphi \in W^{1,p}((-\tau, 0), L^q((0, l))) \cap L^p((-\tau, 0), W^{2,q}((0, l))),$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \in W^{1-\frac{1}{2p}}((0, T), \mathbb{R})$$

can be deduced from [5]. Using this fact to verify controllability for a larger class of data and control functions will be a part of our further investigations.

BIBLIOGRAPHY

1. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. — Second Ed. // Pure and Applied Mathematics. — Springer, New York, 2003. — V. 140. — P. 1–305.
2. Azizbayov E. I., Khusainov D. Ya. Solution to a heat equation with delay; in Russian // Bulletin of the National Taras Shevchenko University of Kyiv, Series: Cybernetics. — 2013. — №12. — P. 4–14.
3. Bátkai A., Piazzera S. Semigroups and Linear Partial Differential Equations with Delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2001. — V. 264, — P. 1–20.
4. Bátkai A., Piazzera S. Semigroups for Delay Equations // Research Notes in Mathematics. — A. K. Peters: Wellesley MA, 2005. — V. 10. — P. 1–259.
5. Bátkai A., Schnaubelt R. Asymptotic Behaviour of Parabolic Problems with Delays in the Highest Order Derivatives // Semigroup Forum. — 2004. — V. 60. — №3. — P. 369–399.
6. Eck Ch., Garcke H., Knabber P. Mathematische Modellierung — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — P. 1–503.
7. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics // Mathematics and Its Applications. — Kluwer Academic Publishers, 1992. — V. 74. — P. 1–501.
8. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations // Applied Mathematical Sciences Series. — 1977. — V. 3. — P. 1–365.
9. Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kovarzh I. V. Solution of one heat equation with delay // Nonlinear Oscillations. — V. 12. — №2. — P. 1–20.
10. Kukhareenko A. A., Khusainov D. Ya. Control of the Solution of a Parabolic Type Linear Equation; in Russian // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2011. — V. 8. — №2. — P. 1–20.
11. Khusainov D. Ya., Pokojovy M., Azizbayov E. On Classical Solvability for a Linear 1D Heat Equation with Constant Delay // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2013. — №2 (112). — P. 169–195.

12. Lasiecka I., Triggiani R. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — 2010. — V. 74. — P. 1–644.
13. Lasiecka I., Triggiani R. Abstract Hyperbolic-Like Systems over a Finite Time Horizon // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — 2011. — V. 74. — P. 1–423.
14. Okubo A., Levin S. A. Diffusion and Ecological Problems. Modern Perspectives // Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001. — P. 1–467.
15. Prüss J. Maximal Regularity for Abstract Parabolic Problems with Inhomogeneous Boundary Data in  $L_p$ -Spaces // Mathematica Bohemica. — 2002. — V. 127. — №2. — P. 311–327.
16. Weis L. Operator-Valued Fourier Multiplier Theorems and Maximal  $L_p$ -Regularity // Mathematische Annalen. — 2001. — V. 319. — P. 735–758.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, 03680, UKRAINE;

UNIVERSITY OF KONSTANZ, KONSTANZ, 78457, GERMANY;

BAKU STATE UNIVERSITY, BAKU, AZ 1148, AZERBAIJAN.

Received on 10.07.2013

УДК 517.982.22

## УЗАГАЛЬНЕНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

А. В. АНІКУШИН

**РЕЗЮМЕ.** У роботі наведено приклад інтегро-диференціального оператора з інтегральним ядром спеціального вигляду. Інтегральний доданок не є додатно або від'ємно визначеним. Використовуючи теорію оснащених просторів та методику апріорних оцінок в негативних нормах, доведено нерівності для вказаного та спряженого операторів. Також сформульовано теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку.

### ВСТУП

Сучасні дослідження в фізиці, біології, хімії часто приводять до розгляду деяких інтегро-диференціальних рівнянь. Такі рівняння з одного боку дозволяють більш детально і точно побудувати математичну модель природного явища (напр. при наявності "пам'яті" матеріалу [1], [2]), а з іншого є менш дослідженими ніж диференціальні рівняння з частинними похідними.

Теорія оснащених просторів та метод апріорних оцінок в негативних нормах, що був з успіхом затосований С. І. Ляшком та його школою при вивченні існування та єдиності розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними [3], [4], виявилися корисними і при дослідженні інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема за допомогою вказаних методів і прийомів у роботі [5] було досліджено коректність узагальненої постановки першої початково-краєвої задачі для еліптичного інтегро-диференціального рівняння (відзначимо, що таке рівняння є узагальненням нових математичних моделей з монографії [6]), а в роботах [7], [8] — для рівняння параболічного типу.

Спільною рисою вказаних досліджень є те, що апріорні оцінки отримані в них (а отже і теореми узагальненої розв'язності) співпадають з результатами для чисто диференціальних операторів з частинними похідними, що стоять у вказаних рівняннях поза інтегралом.

У роботах [9], [10], [11] було розглянуто деякі інтегро-диференціальні рівняння з невід'ємно визначеним інтегральними операторами для яких апріорні оцінки і простори, що фігурують у теоремах узагальненої розв'язності, суттєво залежать від ядер інтегральної частини оператора.

У данній роботі наведено приклад інтегро-диференціального оператора  $\mathcal{L} = D + I$  з частинними похідними з інтегральним доданком  $I$  типу Вольтерра, для якого інтегральний доданок  $I$  не є невід'ємно визначеним

та суттєво впливає на існування узагальненого розв'язку. Зокрема сформульовано теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку для правих частин з деякого негативного простору.

### ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ І ПРОСТОРИ

Розглянемо лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_i^2} d\tau.$$

Тут  $u(x, t)$  — функція, що описує стан системи в області  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega$  — обмежена область в  $n$ -вимірному просторі з гладкою межею  $\partial\Omega$ . Областю визначення оператора  $\mathcal{L}$  вважатимемо множину нескінченно диференційовних функцій  $u(x, t)$ , що задовольняють умови

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, T) = 0.$$

Цю множину позначимо через  $C_{BR}^{(\infty)}(Q)$ . Розглянемо також множину нескінченно диференційовних функцій  $v(x, t)$ , що задовольняють умови

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x, 0) = 0,$$

яку позначимо через  $C_{BR+}^{(\infty)}(Q)$ .

Для дослідження рівняння з оператором  $\mathcal{L}$  уведемо до розгляду спеціальні простори. Через  $p(u)$  та  $p_+(u)$  позначимо напівнорми

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x, \tau) d\tau dt \right)^2 + \left( \int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x, \tau) d\tau dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ & \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \int_0^T \int_t^T \cos t u_{x_i}(x, \tau) d\tau dt \right)^2 + \left( \int_0^T \int_t^T \sin t u_{x_i}(x, \tau) d\tau dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

відповідно. Нехай також

$$q(u) = \left( \int_Q \left( \int_0^t \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$q_+(u) = \left( \int_Q \left( \int_t^T \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{H_{BR}^+}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + p^2(u), \quad \|u\|_{H_{BR+}^+}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + p_+^2(u), \quad \|u\|_{W^+} = \|u_t\|_{L_2},$$

$$\|u\|_{E_{BR}^+}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + q^2(u), \quad \|u\|_{E_{BR+}^+}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + q_+^2(u).$$

Через  $W_{BR}^+$ ,  $H_{BR}^+$ ,  $E_{BR}^+$  позначимо поповнення простору  $C_{BR}^{(\infty)}(Q)$  за нормами  $\|\cdot\|_{W^+}$ ,  $\|\cdot\|_{H_{BR}^+}$ ,  $\|\cdot\|_{E_{BR}^+}$  відповідно, а через  $W_{BR+}^+$ ,  $H_{BR+}^+$ ,  $E_{BR+}^+$  позначимо поповнення простору  $C_{BR+}^{(\infty)}(Q)$  за нормами  $\|\cdot\|_{W^+}$ ,  $\|\cdot\|_{H_{BR+}^+}$ ,  $\|\cdot\|_{E_{BR+}^+}$  відповідно.

*Зауваження 1.* Має місце щільне і неперервне вкладення  $E_{BR}^+ \subset H_{BR}^+ \subset L_2$ .

*Доведення.* Покажемо, що має місце вкладення просторів. Для цього слід перевірит умову  $\pi$ ). Нехай послідовність  $u_m \in C_{BR}^{(\infty)}(Q)$  є фундаментальною у просторі  $E_{BR}^+$  і збігається до нуля у просторі  $H_{BR}^+$ . Тоді, очевидно  $u_m \rightarrow 0$  у просторі  $L_2$ . Позначимо

$$\Phi_m(x, t) = \int_0^t \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n (u_m)_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau.$$

Оскільки  $q(u_m - u_k) \rightarrow 0$ ,  $m, k \rightarrow \infty$ , то  $\|\Phi_m - \Phi_k\| \rightarrow 0$ ,  $m, k \rightarrow \infty$ , а отже, послідовність  $\Phi_m$  є фундаментальною у просторі  $L_2$ . Тому  $\Phi_n$  збігається у просторі  $L_2$  до деякого елементу  $\Phi \in L_2$ . Нехай  $v(x, t)$  довільна гладка функція, що дорівнює нулю на  $\partial\Omega$  разом з усіма своїми похідними першого порядку за просторовими змінними  $v_{x_i}$ . Розглянемо скалярний добуток  $(\Phi_m, v)_{L_2}$  та проінтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} (\Phi_m, v)_{L_2} &= \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n (u_m)_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau v(x, t) dQ = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) u_m(x, \tau) d\tau v_{x_i x_i}(x, t) dQ = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T \int_0^t \sin(t - \tau) u_m(x, \tau) v_{x_i x_i}(x, t) d\tau dt d\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T \int_\tau^T \sin(t - \tau) u_m(x, \tau) v_{x_i x_i}(x, t) dt d\tau d\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_Q u_m(x, \tau) \int_\tau^T \sin(t - \tau) v_{x_i x_i}(x, t) dt dQ. \end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля, оскільки  $u_n \rightarrow 0$  у просторі  $L_2$ . Крім того,  $(\Phi_m, v)_{L_2} \rightarrow (\Phi, v)_{L_2} = 0$ , де  $v$  пробігає всюди щільну у  $L_2$  множину. Тому  $\Phi = 0$ . Отже,  $q(u_m) = \|\Phi_m\|_{L_2} \rightarrow 0$ . Таким чином  $E_{BR}^+$  вкладається в  $H_{BR}^+$ .

Оскільки  $E_{BR}^+$  і  $H_{BR}^+$  містять  $C_{BR}^{(\infty)}$ , то вкладення є щільним. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського нескладно показати, що  $\|\cdot\|_{H_{BR}^+} \leq c \|\cdot\|_{E_{BR}^+}$ , з чого випливає неперервність оператора вкладення.

Аналогічно можна показати справедливість леми для пари просторів  $H_{BR}^+ \subset L_2$ .  $\square$

Через  $W_{BR}^-$ ,  $H_{BR}^-$ ,  $E_{BR}^-$  позначимо негативні простори побудовані відносно  $L_2$ . Оскільки вкладення  $D(\mathcal{L}) = C_{BR}^{(\infty)}(Q) \subset L_2(Q)$  щільне, то можна визначити спряжений оператор. Областю визначення оператора  $\mathcal{L}^*$  вважатимемо множину нескінченно диференційовних функцій  $C_{BR^+}^{(\infty)}(Q)$ . Неважко переконатися, що

$$\mathcal{L}^* u = -\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \int_t^T \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x_i^2} d\tau.$$

АПРІОРНІ НЕРІВНОСТІ

**Лема 1.** Існує така стала  $c_1 > 0$ , що для довільної функції  $u \in C_{BR}^{(\infty)}$  виконується нерівність  $\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \leq c_1 \|u\|_{E_{BR}^+}$ .

*Доведення.* Нехай  $u \in C_{BR}^{(\infty)}$ . Розглянемо довільну функцію  $v \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ . Оскільки  $\mathcal{L}u \in L_2(Q)$ , то можна розглянути білінійну форму

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u_t(x, t)v(x, t) dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau v(x, t) dQ.$$

Скористаємось нерівністю Шварца:

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q u_t(x, t)v(x, t) dQ \right| = \left| \int_Q u(x, t)v_t(x, t) dQ \right| \leq \\ & \leq \left( \int_Q u^2(x, t) dQ \int_Q v_t^2(x, t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L_2} \cdot \|v\|_{W_{BR^+}^+}, \\ & \left| \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau v(x, t) dQ \right| \leq \\ & \leq \left( \int_Q v^2(x, t) dQ \int_Q \left( \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq c \left( \int_Q v_t^2(x, t) dQ \int_Q \left( \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = c \cdot q(u) \|v\|_{W_{BR^+}^+}. \end{aligned}$$

Додамо отримані нерівності:

$$|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}| \leq \frac{1}{2} c_1 (\|u\|_{L_2} + q(u)) \|v\|_{W_{BR^+}^+} \leq c_1 \|u\|_{E_{BR}^+} \|v\|_{W_{BR^+}^+}.$$

Поділивши останню нерівність на  $\|v\|_{W_{BR^+}^+}$  та перейшовши до супремуму за функціями  $v(x, t) \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ , отримуємо шукану нерівність.  $\square$

*Зауваження 2.* Отримана в лемі 1 нерівність дозволяє розширити за неперервністю оператор  $\mathcal{L}$  з його області визначення  $D(\mathcal{L})$  на простір  $E_{BR}^+$ . При цьому, зазначена нерівність буде виконуватися вже для всіх елементів  $u \in E_{BR}^+$ . Зазначимо, що розширення оператора  $\mathcal{L}$  буде ін'єктивним. Дійсно, якщо  $\mathcal{L}u = 0$ , то  $u = 0$  у просторі  $H_{BR}^+$ . Оскільки простір  $E_{BR}^+$  вкладається у простір  $H_{BR}^+$ , то  $u = 0$  і у просторі  $E_{BR}^+$ .

**Лема 2.** Існує така стала  $c_1 > 0$ , що для довільної функції  $v \in C_{BR^+}^{(\infty)}$  виконується нерівність  $\|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-} \leq c_1 \|v\|_{E_{BR^+}^+}$ .

*Доведення.* Нехай  $v \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ . Розглянемо довільну функцію  $u \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ . Аналогічно доведено попередньої лемі, скориставшись нерівністю Шварца, отримаємо

$$\begin{aligned} \left| \int_Q v_t(x, t) u(x, t) dQ \right| &\leq \|v\|_{L_2} \cdot \|u\|_{W_{BR^+}^+}, \\ \left| \int_Q \int_t^T \sin(t - \tau) \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau u(x, t) dQ \right| &\leq c \cdot q_+(v) \|u\|_{W_{BR^+}^+}, \\ |(u, \mathcal{L}^* v)_{L_2(Q)}| &\leq \frac{1}{2} c_1 (\|v\|_{L_2} + q_+(v)) \|u\|_{W_{BR^+}^+} \leq c_1 \|v\|_{E_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR^+}^+}. \end{aligned}$$

Поділивши останню нерівність на  $\|u\|_{W_{BR^+}^+}$  та перейшовши до супремуму за функціями  $u \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ , отримаємо шукану нерівність.  $\square$

*Зауваження 3.* Оператор  $\mathcal{L}^*$  розширмо за неперервністю на простір  $E_{BR^+}^+$ . При цьому, зазначена в лемі 2 нерівність буде виконуватися вже для всіх елементів  $v \in E_{BR^+}^+$ . Зазначимо, що розширення оператора  $\mathcal{L}$  буде ін'єктивним.

**Лема 3.** *Існує така стала  $c_0 > 0$ , що для довільної функції  $u \in E_{BR^+}^+$  виконується нерівність  $\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \geq c_0 \|u\|_{H_{BR^+}^+}$ .*

*Доведення.* Нехай спочатку  $u \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ , а  $v(x, t) = -\int_0^t u(x, \tau) d\tau$ . Тоді,

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u_t(x, t) v(x, t) dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau v(x, t) dQ.$$

Розглянемо окремо перший доданок:

$$\begin{aligned} \int_Q u_t(x, t) v(x, t) dQ &= - \int_Q u_t(x, t) \int_0^t u(x, \tau) d\tau dQ = \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^T u_t(x, t) \int_0^t u(x, \tau) d\tau dt dx = \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t u_t(x, t) u(x, \tau) d\tau dt dx = - \int_{\Omega} \int_0^T \int_{\tau}^T u_t(x, t) u(x, \tau) dt d\tau dx = \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^T u(x, \tau) \int_{\tau}^T u_t(x, t) dt d\tau dx = - \int_{\Omega} \int_0^T u(x, \tau) u(x, t) \Big|_{\tau}^T d\tau dx = \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T u^2(x, \tau) d\tau dx = \int_Q u^2(x, t) dQ. \end{aligned}$$

Оцінимо другий доданок. Для цього скористаємось тим, що

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(t - \tau) u_{x_i}(x, \tau) d\tau &= \\ &= \sin(t - \tau) \int_0^{\tau} u_{x_i}(x, s) ds \Big|_0^t + \int_0^t \cos(t - \tau) \int_0^{\tau} u_{x_i}(x, s) ds d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \cos(t - \tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds d\tau = \int_0^t \int_0^\tau \cos(t - \tau) u_{x_i}(x, s) ds d\tau.$$

Проінтегруємо другий доданок частинами:

$$\begin{aligned} \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) u_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau v(x, t) dQ &= - \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) u_{x_i}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ = \\ &= \int_Q \int_0^t \sin(t - \tau) u_{x_i}(x, \tau) d\tau \int_0^t u_{x_i}(x, \tau) d\tau dQ = \\ &= \int_Q \int_0^t \cos(t - \tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds d\tau \int_0^t u_{x_i}(x, \xi) d\xi dQ = \\ &= \int_\Omega \int_0^T \int_0^t \left( \cos(t - \tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds \int_0^t u_{x_i}(x, \xi) d\xi \right) d\tau dt dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^T \int_0^T \left( \cos(t - \tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds \int_0^t u_{x_i}(x, \xi) d\xi \right) d\tau dt dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \cos \tau \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds d\tau \right)^2 + \left( \int_0^T \sin \tau \int_0^\tau u_{x_i}(x, s) ds d\tau \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 + \left( \int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} &= \int_Q u^2(x, t) dQ + \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 dx \geq \frac{1}{2} (\|u\|_{L_2}^2 + p^2(u)). \end{aligned}$$

Використаємо нерівність Шварца:

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \|v\|_{W_{BR^+}^+} \geq (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq \frac{1}{2} (\|u\|_{L_2}^2 + p^2(u)) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_{BR^+}^+} \|u\|_{L_2}.$$

Оскільки  $u(x, t) = -v_t(x, t)$  і  $v \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ , то  $\|u\|_{L_2} = \|v\|_{W_{BR^+}^+}$ . Отже,

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \|v\|_{W_{BR^+}^+} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_{BR^+}^+} \|v\|_{W_{BR^+}^+}.$$

Твердження лема для всіх функцій  $u \in E_{BR^+}^+$  отримаємо граничним переходом.  $\square$

**Лема 4.** *Існує така стала  $c_0 > 0$ , що для довільної функції  $v \in E_{BR^+}^+$  виконується нерівність  $\|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR^+}^-} \geq c_0 \|v\|_{H_{BR^+}^+}$ .*

*Доведення.* Нехай спочатку  $v \in C_{BR^+}^{(\infty)}$ , а  $u(x, t) = \int_t^T v(x, \tau) d\tau$ . Тоді, аналогічно доведенню лема 3, інтегруючи частинами, отримаємо:

$$(u, \mathcal{L}^*v)_{L_2(Q)} = - \int_Q u(x, t) v_t(x, t) dQ -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^n \int_Q \int_t^T \sin(t - \tau) v_{x_i x_i}(x, \tau) d\tau u(x, t) dQ = \\
 & = \int_Q v^2(x, t) dQ + \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \int_t^T \cos tv_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \int_t^T \sin tv_{x_i}(x, s) ds dt \right)^2 dx \geq \frac{1}{2} (\|v\|_{L_2}^2 + p_+^2(v)).
 \end{aligned}$$

Решта доведення аналогічна доведенню леми 3.  $\square$

Таким чином, справедливий

*Наслідок 1.* Для операторів  $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$  справедливі нерівності

$$\begin{cases} c^{-1} \|u\|_{H_{BR}^+} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \leq c \|u\|_{E_{BR}^+}, & \forall u \in E_{BR}^+, \\ c^{-1} \|v\|_{H_{BR^+}^+} \leq \|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-} \leq c \|v\|_{E_{BR^+}^+}, & \forall v \in E_{BR^+}^+. \end{cases}$$

### УЗАГАЛЬНЕНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Отримані нерівності дозволяють перенести результати, що стосуються узагальненої розв'язності, отримані в [3, 4], на інтегро-диференціальне рівняння, що вивчається.

Сформулюємо відповідні означення та теореми.

**Означення 1.** Функція  $u(x, t) \in H_{BR}^+$  називається узагальненим розв'язком рівняння  $\mathcal{L}u = f$ ,  $f \in W_{BR^+}^-$ , якщо існує послідовність  $u_i \in E_{BR}^+$  така, що

$$\|u - u_i\|_{H_{BR}^+} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W_{BR^+}^-} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Через  $\overline{\mathcal{L}(E_{BR}^+)}$  позначимо замикання образу оператора  $\mathcal{L}(E_{BR}^+)$  у просторі  $W_{BR^+}^-$ .

**Теорема 1.** Для довільного  $f \in \overline{\mathcal{L}(E_{BR}^+)}$  існує єдиний узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}u = f$  в сенсі означення (1).

**Означення 2.** Функція  $u(x, t) \in W_{BR}^+$  називається узагальненим розв'язком рівняння  $\mathcal{L}u = f$ ,  $f \in H_{BR^+}^-$ , якщо рівність

$$(\mathcal{L}^*v, u)_{W_{BR}^- \times W_{BR}^+} = (f, v)_{H_{BR^+}^- \times H_{BR^+}^+}$$

виконується для довільної  $v \in E_{BR^+}^+$ .

**Теорема 2.** Для довільного  $f \in H_{BR^+}^-$  існує узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}u = f$  в сенсі означення (2).

### ВИСНОВОК

У роботі досліджено деякі властивості узагальнених розв'язків інтегро-диференціального рівняння з частинними похідними з інтегральним доданком типу Вольтерра. Як бачимо навіть у випадку, коли інтегральна частина рівняння не є знакосталим оператором, для деяких специфічних ядер, метод апіорних оцінок у негативних нормах може бути застосований.

ЛІТЕРАТУРА

1. Duvant G., Lions J. L. Inequalities in Mechanics and Physics — Springer, 1976. — 397 p.
2. Falaleev M. V., Orlov S. S. Integro-differential equations with degeneration in banach spaces and it's applications in mathematical theory of elasticit // News of Irkutsk State University, Series "Mathematics". — 2011. — №1. — P. 118–134 (in Russian).
3. Lyashko S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
4. Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Ju. I., Semenov V. V. Twentieh Hilbert problem. Generalized solutions of operator equations — Dealektika, 2009. — 192 p. (in Russian).
5. Anikushyn A. V. Generalized solvability of linear elliptic-like integro-differential equation // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2010. — №3. — P. 163–168 (in Ukrainian).
6. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., Pletner Ju. D. Linear and non-linear equations of Sobolev type — M.: Fizmatlit, 2007. — 734 p. (in Russian).
7. Anikushyn A. V. Optimal control of integro-differential systems of parabolic type // Journ. of comp. and appl. math. — 2010. — №3. — P. 3–16. (in Ukrainian).
8. Anikushyn A. V., Huliannytskyi A. L. Generalized solvability of parabolic integro-differential equations // Differential Equations. — 2014. — №1. — P. 98–109.
9. Anikushyn A. V., Granishak H.M. Generalized solvability of some 4-th order integro-differential equation // VI Int. conference "Comp. and appl. math.". — Kyiv, 2013. — p. 59.
10. Anikushyn A. V., Nomirovskii D. A. Generalized optimal control of systems which are described by linear integro-differential equations with non-negative defined integral operators // Int. conference "Differential equations and their applications". — Lviv, 2010. — P. 38–39.
11. Anikushyn A. V. Generalized Optimal Control for Systems Described by Linear Integro-Differential Equations with Nonnegative Definite Integral Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46. — №6. — P. 58–67.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 10.10.2013

УДК 519.852:519.876

## ВИКОРИСТАННЯ ПЕРЕДОБУМОВЛЮВАЧІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В. О. Богаєнко, В. І. Кудін

**РЕЗЮМЕ.** Розглядаються передобумовлювачі, побудовані з використанням методики неповного розкладу на основі алгоритмів методу базисних матриць. Приводяться результати їх застосування при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема таких, що виникають при дискретизації методом скінченних елементів деяких задач розрахунку напружено-деформованого стану ґрунтів.

### Вступ

Матричні обчислення, зокрема, задача розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), виникають при математичному моделюванні більшості фізичних процесів. В багатьох випадках, це СЛАР з погано обумовленими розрідженими квадратними матрицями обмежень, що мають великий розмір. В таких ситуаціях найчастіше застосовними є ітераційні методи розв'язання СЛАР, зокрема такі як метод спряжених градієнтів (CG) чи стабілізований метод біспряжених градієнтів (BiCGstab) [2].

Основною методикою покращення швидкості збіжності та точності отримуваних розв'язків при розв'язанні погано обумовлених СЛАР ітераційними методами є використання передобумовлювачів [5] — матриць, домноження яких на розв'язувану СЛАР призводить до зменшення числа обумовленості її матриці обмежень. Оскільки ідеальним передобумовлювачем є обернена матриця, більшість передобумовлювачів будують як наближення до неї. Найбільш розповсюдженими методиками їх побудови є неповний розклад матриць (наприклад, неповний LU розклад) та неповне обернення (зокрема, поліноміальні передобумовлювачі). Серед інших варто виділити багатосіткові та вейвлетні передобумовлювачі.

Зауважимо, що ефективність передобумовлювачів в переважній більшості випадків неможливо довести теоретично, тож задачею є, зокрема, експериментальне визначення класів матриць, щодо яких конкретний передобумовлювач є ефективним з позиції пришвидшення розрахунків чи отримання більш точного розв'язку.

### АЛГОРИТМИ НЕПОВНОГО МЕТОДУ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

Однією з методик побудови передобумовлювачів для ітераційних методів розв'язання розріджених СЛАР є методика неповного розкладу, що

полягає у обмежені множини елементів матриці, що змінюються в процесі побудови її розкладу, наприклад LU [2] чи QR [5] або при застосуванні процедури обернення, наприклад методу Грамма-Шмідта [4]. Таким чином отримується матриця, наближена до оберненої, яка може використовуватись як передобумовлювач.

Така методика застосовна й до алгоритмів методу базисних матриць [1]. Будемо розглядати СЛАР

$$Ax = b, \quad (1)$$

де  $\dim A = [n, n]$ ,  $\dim x = \dim b = [n, 1]$ .

Алгоритм методу базисних матриць, результатом якого є матриця  $A^{-1}$ , обернена до  $A$ , запишемо так:

Нехай  $A_1^{(i)}$  — базисна матриця на  $i$ -тій ітерації алгоритму,  $\dim A_1^{(i)} = [n, n]$ ,  $A_1^{(i)}[j]$  — стовпець матриці  $A_1^{(i)}$ ,  $a_i$  — рядок матриці  $A$ ,  $A_1^{(0)} = A_1^0$ .

Тоді  $i$ -та ітерація алгоритму має такий вигляд:

- 1)  $v = \text{diag} \left( AA_1^{(i-1)} \right)$ ;
- 2)  $k = \max_i |v_i|$ ;
- 3)  $\alpha = a_k A_1^{(i-1)}$ ;
- 4)  $A_1^{(i)}[k] = A_1^{(i-1)}[k] / \alpha_k$ ;
- 5)  $A_1^{(i)}[l] = A_1^{(i-1)}[l] - \alpha_l A_1^{(i)}[k]$ ,  $l \neq k$ .

Після проведення  $n$  ітерацій  $A_1^{(n)} = A^{-1}$ .

Розглянемо сімейство алгоритмів неповного розкладу, побудоване на базі вищеописаного алгоритму методу базисних матриць.

Перепишемо пункт 5, ввівши обмеження на індекси елементів матриці, щодо яких будуть здійснюватись перетворення:

$$A_1^{(i)}[l]_j = A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j, \quad l \neq k, \quad (l, j) \in R, \quad (2)$$

де  $R$  — множина індексів елементів матриці.

За аналогією з алгоритмами неповного LU-розкладу [3], вибираючи конкретну множину  $R$ , будемо розглядати три алгоритми неповного методу базисних матриць:

- ІВММ0, якщо  $R$  — множина ненульових елементів матриці  $A$ ;
- ІВММ1, якщо  $R$  — множина ненульових елементів матриці  $AA^T$ ;
- ІВММd, якщо множина  $R$  змінюється динамічно в процесі обчислень.

Динамічна зміна множини  $R$  у алгоритмі ІВММd відбувається таким чином, щоб на кожному кроці для неї виконувалась

**Умова 1.** Кількість елементів  $(l, j)$  множини  $R$  не повинно перевищувати кількість ненульових елементів у  $l$ -тому рядку матриці  $A$ .

Для виконання цієї умови пункт 5 базового алгоритму змінюється таким чином:

якщо  $(l, j) \in R$ , або  $(l, j) \notin R$ , але умова 1 виконується для стовпця  $l$ , то  $A_1^{(i)}[l]_j = A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j$ ,  $l \neq k$ ,  $R = R \cup (l, j)$ , тобто елемент змінюється й додається до множини, якщо він там не присутній;

якщо  $(l, j) \notin R$  й умова 1 не виконується, то, якщо  $\exists t : \left| A_1^{(i-1)}[l]_m \right| < \left| A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j \right|$ , проводиться перетворення  $A_1^{(i-1)}[l]_m = 0$ ,  $A_1^{(i)}[l]_j = A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j$ ,  $R = (R - (l, m)) \cup (l, j)$ , тобто елемент змінюється й додається до множини, якщо у стовпці існує елемент з меншим за модулем значенням. Менший елемент при цьому обнуляється й видаляється з множини  $R$ .

### МЕХАНІЗМ КОРЕКЦІЇ У АЛГОРИТМАХ ІВММ

На кожній ітерації методу базисних матриць виконується умова  $a_k A_1^{(i)}[l] = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$ , виконання якої порушується при неповних перетвореннях. Пропонується алгоритм корекції, який забезпечує виконання цієї умови у неповному методі базисних матриць.

Для алгоритмів ІВММ0 та ІВММ1 додається такий крок алгоритму:

б) якщо  $(l, j) \notin R$  і  $a_{kj} \neq 0$ ,  $\exists t = \max_j |a_{kj}|$ , і  $A_1^{(i-1)}[l]_j \neq 0$ , то  $A_1^{(i)}[l]_m = A_1^{(i)}[l]_m - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j a_{kj} / a_{km}$ .

У випадку алгоритму ІВММd, крок 6 застосовується тоді, коли  $(l, j) \notin R$ , умова 1 не виконується й елемент з меншим за модулем значенням у стовпці не існує, або коли проводиться заміщення ненульового елемента:

ба) якщо  $(l, j) \notin R$ , умова 1 не виконується й  $\neg \exists t : \left| A_1^{(i-1)}[l]_m \right| < \left| A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j \right|$ , якщо  $\exists t = \max_j |a_{kj}|$ ,  $A_1^{(i-1)}[l]_j \neq 0$ , то  $A_1^{(i)}[l]_m = A_1^{(i)}[l]_m - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j a_{kj} / a_{km}$ ;

бб) якщо  $(l, j) \notin R$ , умова 1 не виконується й  $\exists t : \left| A_1^{(i-1)}[l]_m \right| < \left| A_1^{(i-1)}[l]_j - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_j \right|$ , та  $\exists p = \max_j |a_{kj}|$ ,  $A_1^{(i-1)}[l]_j \neq 0$ ,  $j \neq t$ , то  $A_1^{(i)}[l]_p = A_1^{(i)}[l]_p - \alpha_l A_1^{(i)}[k]_m a_{km} / a_{kp}$ .

Алгоритми з механізмом корекції будемо називати ІВММ0+c, ІВММ1+c, ІВММd+c.

### ПОЄДНАННЯ АЛГОРИТМІВ ІВММ З ПЕРЕДОБУМОВЛЮВАЧЕМ ЯКОБІ

Враховуючи ефективність передобумовлювача Якобі при розв'язанні багатьох СЛАР, він може бути поєднаний з алгоритмами неповного методу базисних матриць. В такому випадку лівий передобумовлювач матиме вигляд  $\left[ \text{diag} A_1^{(n)} A \right]^{-1} A_1^{(n)}$ . Такі алгоритми будемо позначати як "+rs".

До алгоритмів неповного методу базисних матриць може бути також застосована процедура уточнення [6], яка полягає у повторному виконанні алгоритму, беручи  $A_1^{(0)} = A_1^{(n)}$ .

ТЕСТУВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ.

Ефективність матриць, генерованих розробленими алгоритмами, в якості лівих передобумовлювачів, тестувалась на матрицях з Tim Davis Matrix Collection, розв'язуючи задачі щодо них алгоритмом Bicgstab. Окремим предметом аналізу було застосування розроблених алгоритмів до СЛАР, що виникають при дискретизації методом скінченних елементів стаціонарних задач теорії пружності.

Будемо розглядати двовимірну задачу розрахунку напружено-деформованого стану основи ґрунтової дамби.

Нехай  $\vec{w} = (u, v)$  — вектор зміщень ґрунту,  $\mu, \lambda$  — коефіцієнти Ляме,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $\vec{\sigma} = (\lambda(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \lambda(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y})$ ,  $\tau_{xy} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$  — складові тензора напруг,  $H$  — напір,  $\rho$  — щільність ґрунту.

У прямокутній області  $\Omega = \{x \in [0, l], y \in [0, m]\}$  розглядалися дві системи рівнянь:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}\right) = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\right) = -\rho g \quad (4)$$

та

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}\right) - \rho g \frac{\partial}{\partial x}H = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\right) - \rho g \frac{\partial}{\partial y}H = -\rho g, \quad (6)$$

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (7)$$

Ставилися крайові умови:

$$\vec{w} = (0, 0), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad y = m, \quad (8)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = l. \quad (9)$$

Для системи (3)–(4) на ділянці границі області  $y = 0$  ставилась умова  $\sigma_y = f(x)$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , а для системи (5)–(7) —  $\sigma_y = f_1(x)$ ,  $\tau_{xy} = 0$ ,  $H = f_2(x)$ , де  $f(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  — задані функції.

Розв'язуючи тестову задачу, СЛАР, що виникає при розв'язанні методом скінченних елементів задачі (3)–(4), будемо позначати як SD, а СЛАР, що виникає при розв'язанні системи (5)–(7) — як SD2. Матриця SD має розмір  $\sim 11000 \times 11000$  та кількість ненульових елементів  $\sim 4 \cdot 10^5$ , коефіцієнт наповненості —  $\sim 36$ . Матриця SD2 має розмір  $\sim 17000 \times 17000$  та кількість ненульових елементів  $\sim 6 \cdot 10^5$ , коефіцієнт наповненості —  $\sim 35$ .

Шаблон розрідженості матриці SD2 зображено на рис.1, а передобумовлювачів, згенерованих алгоритмами IBMM0, IBMM1 та IBMMd — на рис. 2–4. Відтінками сірого тут позначені ненульові елементи, яскравість яких визначалась як нормалізоване значення елемента матриці.

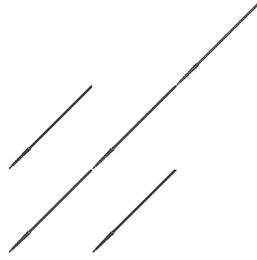


Рис.1 Шаблон розрідженості матриці SD2

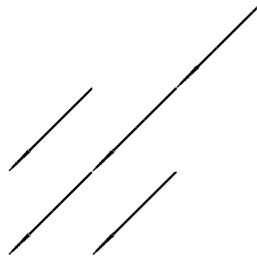


Рис.2 Шаблон розрідженості передобумовлювача, побудованого алгоритмом IBMM0

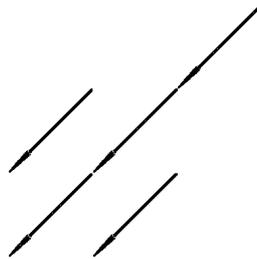


Рис.3 Шаблон розрідженості передобумовлювача, побудованого алгоритмом IBMM1

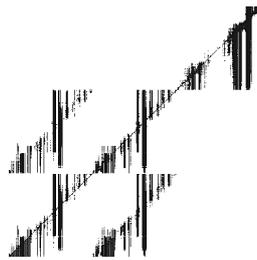


Рис.4 Шаблон розрідженості передобумовлювача, побудованого алгоритмом IBMMd

У таблиці 1 наведені дані стосовно того, на якій ітерації роботи алгоритму Bicstab досягалась відповідна точність розв'язання. Максимальна кількість ітерацій дорівнювала 1000. Всі елементи вектору  $b$  для матриць з Tim Davis Matrix Collection дорівнювали 1,  $A_1^0 = I$ .

Таблиця 1. Номер ітерації, на якій досягається відповідна нев'язка  $\varepsilon$

			1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	Кількість ітерацій уточнення
			-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	Механізм корекції
Матриця	-	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	Передобумовлювач Якобі
$i \log_{10} \varepsilon$	-	-	0	1	d	0	1	d	0	0	1	0	1	1	1	Передобумовлювач 0 – IBMM0 1 – IBMM1 d – IBMMd
bfa62																
-2	26	20	57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-4	35	23	61	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-6	37	31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-8	42	33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-10	44	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
bfa398																
-2	72	54	269	-	226	313	-	195	-	-	-	-	-	-	-	
-4	103	78	295	-	230	317	-	213	-	-	-	-	-	-	-	
-6	107	87	304	-	266	317	-	245	-	-	-	-	-	-	-	
-8	108	89	-	-	286	-	-	281	-	-	-	-	-	-	-	
-10	118	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
epb0																
-4	-	918	-	-	-	663	-	-	-	490	-	490	-	-	-	
-6	-	992	-	-	-	675	-	-	-	526	-	518	-	-	-	
-8	-	-	-	-	-	772	-	-	-	548	-	528	-	-	-	
-10	-	-	-	-	-	815	-	-	-	585	-	567	-	-	-	
-12	-	-	-	-	-	838	-	-	-	588	-	575	-	-	-	
olm100																
-2	82	-	73	-	-	-	-	-	-	56	-	-	-	35	58	
-4	83	-	79	-	-	-	-	-	-	56	-	-	-	35	61	
-6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35	61	
poli																
-6	17	17	8	6	-	8	7	-	-	8	8	8	10	-	-	
-10	20	20	9	9	-	9	9	-	-	9	9	9	12	-	-	
-14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	12	-	-	
SD																
3	123	109								100						
1	162	147								124						
-1	218	162								179						
SD2																
7	299	286	-	-	-	-	-	-	86	-	-	-	-	-	-	
5	524	499	-	-	-	-	-	-	155	-	-	-	-	-	-	
3	971	859	-	-	-	-	-	-	455	-	-	-	-	-	-	
1	-	-	-	-	-	-	-	-	811	-	-	-	-	-	-	

Логарифм нев'язки при розв'язанні СЛАР з матрицею epb0 в залежності від номера ітерації при використанні різних передобумовлювачів наведено на рис.5. Теж саме для матриць SD та SD2 наведено на рис.6 та 7.

У першому випадку спостерігається відсутність впливу передобумовлювачів на процес розв'язку до певної ітерації, після якої використання передобумовлювачів призводить до різкого зменшення нев'язки. Це може бути

пояснене розподілом власних значень матриці — переважна більшість з них має значення у діапазоні від  $10^{-2}$  до 10, але деяка кількість має суттєво менші значення порядку  $10^{-6}$ .

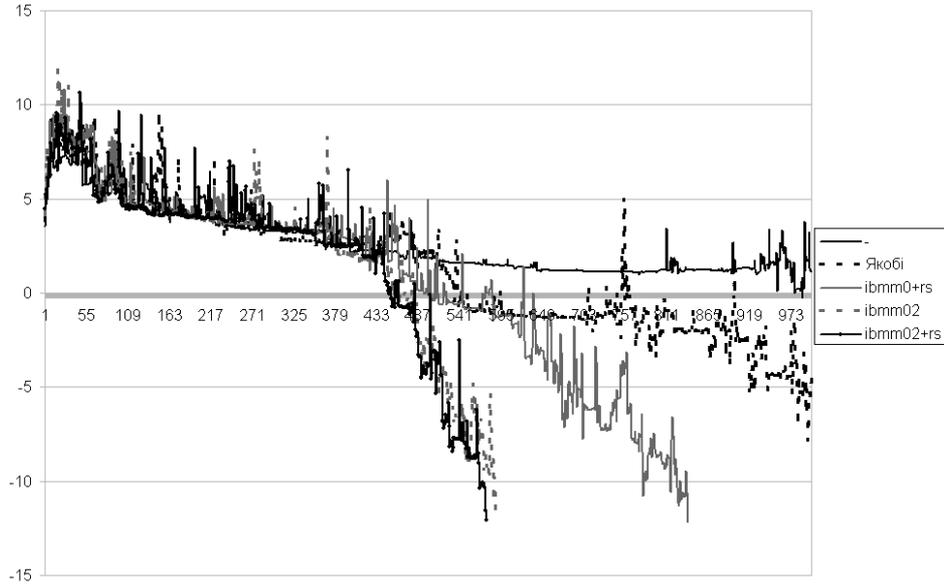


Рис.5  $\log_{10} \varepsilon$  при розв'язанні СЛАР з матрицею еrв0 в залежності від номера ітерації

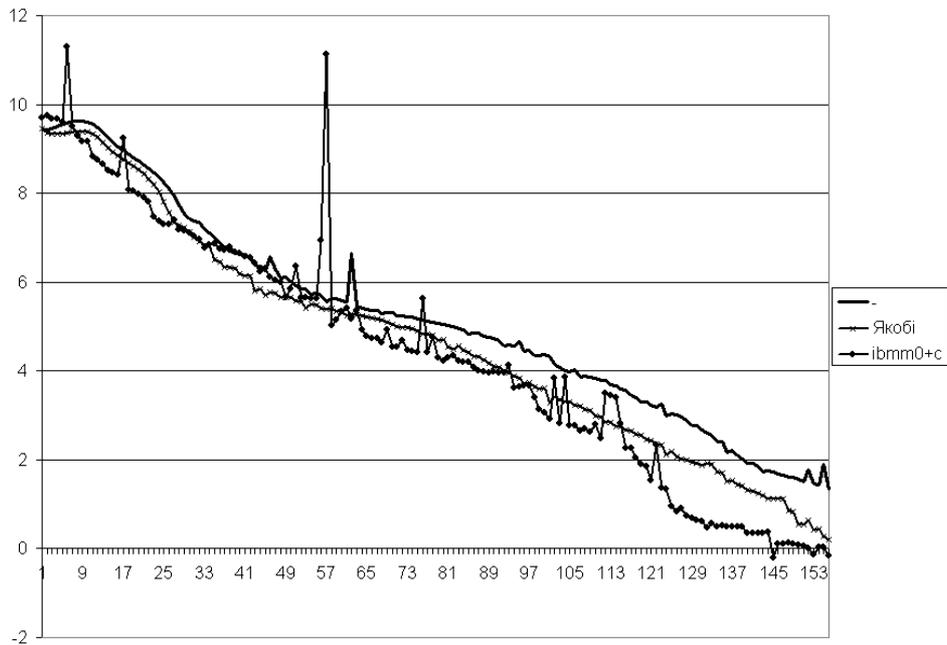


Рис.6  $\log_{10} \varepsilon$  при розв'язанні СЛАР з матрицею SD в залежності від номера ітерації

У другому випадку, через суттєво погану обумовленість матриці СЛАР, жодним з алгоритмів не вдалось отримати розв'язок достатньої точності. Проте використання передобумовлювача  $ibmm0+c$  дозволило ітераційному алгоритму швидше досягти мінімальної отриманої нев'язки. Зауважимо, що у випадку краще обумовленої й меншої за розміром матриці SD, ефективність від застосування передобумовлювача нижча.

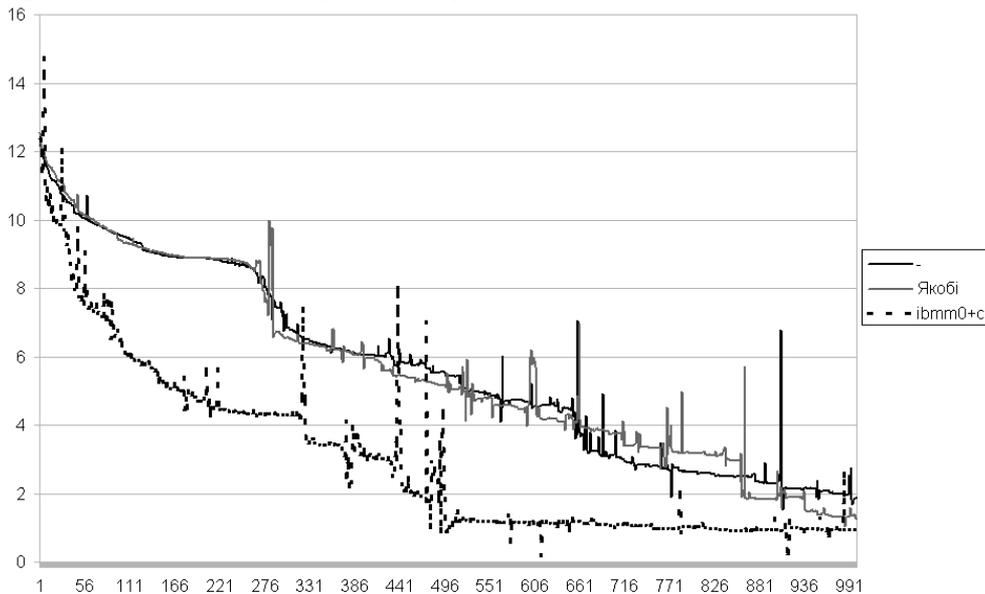


Рис.7  $\log_{10} \varepsilon$  при розв'язанні СЛАР з матрицею SD2 в залежності від номера ітерації

### Висновки

Як показують результати обчислювальних експериментів, різні модифікації розроблених переобумовлювачів є ефективними при їх використанні з різними матрицями.

Проте варто відзначити, що, загалом, вони ефективніші при застосуванні до матриць з високим числом обумовленості, зокрема, при застосуванні до порівняно погано обумовлених матриць  $olm100$  та  $erb0$  вдалось на декілька порядків підвищити точність розв'язання. З іншої сторони, при застосуванні до порівняно добре обумовлених матриць  $bfwa62$ ,  $bfwa398$  позитивних ефектів не спостерігалось.

У випадку застосування передобумовлювача  $ibmm0+c$  до СЛАР, отриманих в результаті дискретизації методом скінченних елементів стаціонарних задач теорії пружності, спостерігалось збільшення швидкості збіжності ітераційних методів розв'язання СЛАР. Як й у випадку з іншими матрицями, позитивний ефект був більший при застосуванні до матриць з більшим числом обумовленості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кудін В. І., Ляшко С. І., Яценко Ю. П., Хритonenко Н. В. Метод штучних базисних матриць // Доповіді НАН України. — 2007. — №9. — С. 30–34.
2. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems, 2 edition — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. — 528 p.
3. Y. Saad ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization // Numer. Linear Algebra Appl. — 1994. — 1(4). — P. 387–402.
4. Liu Q., Zhang F. Incomplete hyperbolic Gram-Schmidt-based preconditioners for the solution of large indefinite least squares problems // Journal of Computational and Applied Mathematics, 250. — 2013. — P. 210–216.
5. Chen K. Matrix Preconditioning Techniques and Applications — Cambridge University Press, 2005. — 592 p.
6. Богаенко В. А., Кудин В. И., Скопецкий В. В. Анализ вычислительных схем моделирования процессов геогидродинамики // Проблемы управления и информатики. — 2009, — №8. — С. 1–12.

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМ. В.М. ГЛУШКОВА НАН УКРАЇНИ, вул. Глушкова, 40, Київ, 03680, Україна.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 15.12.2013

УДК 517.9

## ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. Л. Гуляницький

**РЕЗЮМЕ.** Доведено збіжність гальоркінських наближень для слабкої постановки параболічних інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра. Для доведення коректності відповідної системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь застосовано метод апріорних нерівностей, а також використано відому теорему розв'язності для таких систем у просторі неперервних функцій. Для доведення збіжності методу Гальоркіна використано апріорні нерівності для розв'язків параболічних інтегро-диференціальних рівнянь.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** інтегро-диференціальні рівняння, рівняння Вольтерра, метод Гальоркіна, слабкий розв'язок, апріорні нерівності.

### 1. ВСТУП

Дослідження в'язко-пружних систем привели до появи нового класу математичних моделей — інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра у частинних похідних. Зокрема, дифузія і теплопровідність у деяких системах з пам'яттю відзначається невиконанням класичних законів Фіка і Фур'є (див. напр. [1]–[2] і посилання).

Метод скінченних елементів для таких рівнянь досліджувався, зокрема, у [3]–[4]. Зокрема, одержано оцінки для похибки й запропоновано обчислювальні схеми, які дають змогу економити пам'ять (ця проблема актуальна для рівнянь даного типу, на відміну від диференціальних рівнянь). Слід, однак, відзначити, що у більшості з цих праць припускалася гладкість правої частини за часовою змінною та/або самоспряженість оператора, що діє за просторовими змінними. У даній статті досліджено питання збіжності методу типу Гальоркіна без вказаних припущень.

Структура статті є такою. У ч. 2–3 вводяться основні позначення і формулюються обмеження на коефіцієнти оператора, а також наводиться теорема слабкої розв'язності досліджуваного рівняння розглядається. У ч. 4 формулюється система звичайних інтегро-диференціальних рівнянь, з якої визначаються коефіцієнти гальоркінських наближень, а у ч. 5 доводиться, що ця система має єдиний розв'язок у потрібних просторах. Нарешті, у ч. 6 доводиться збіжність послідовності наближених розв'язків.

## 2. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Розглянемо рівняння

$$\mathcal{L}u = u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{I}u = f. \quad (1)$$

Тут  $u = u(x, t)$  — шукана функція стану,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , де  $\Omega$  — обмежена область з достатньо гладкою межею  $\partial\Omega$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $f = f(x, t)$ ;  $\mathcal{A}$  — диференціальний оператор другого порядку, що діє за просторовими змінними:

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a(x)u;$$

$$\mathcal{I}u = \int_0^t \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t, s)u_{x_i}(x, s) \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t, s)u_{x_i}(x, s) + b(x, t, s)u(x, s) \right\} ds.$$

Рівняння розглядатимемо з однорідними початковими і крайовими умовами:

$$u|_{t=0} = 0, u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Припустимо виконання умов:

- функції  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_i$ ,  $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ ,  $a$  вимірні й обмежені в  $\Omega$ ;
- функції  $b_{ij} = b_{ji}$ ,  $b_i$ ,  $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ ,  $b$ ,  $\frac{\partial b_{ij}(x,t,\tau)}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial b_i(x,t,\tau)}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial b(x,t,\tau)}{\partial \tau}$  вимірні й обмежені в  $\Omega \times [0, T] \times [0, T]$ ;
- оператор  $\mathcal{A}$  рівномірно еліптичний, тобто  $\exists \alpha > 0 \forall x \in \Omega, \xi_i \in \mathbb{R}$  виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Під  $L_2([0, T])^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  розумітимемо простір вектор-функцій  $F = (f_1, \dots, f_m)^T$ , для яких  $f_k \in L_2([0, T])$ , з нормою  $\|F\|_{L_2([0, T])^m}^2 = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{L_2([0, T])}^2$ . Аналогічно означимо й простори  $C([0, T])^m$ ,  $C^1([0, T])^m$  і  $H_0^1([0, T])^m$ ; останній складається з вектор-функцій, які дорівнюють нулю у момент  $t = 0$  і мають похідні в  $L_2([0, T])^m$ .

Нарешті, введемо позначення  $V^+ = L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$  і  $V^- = L_2([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$ ,  $Q = \Omega \times [0, T]$ .

## 3. СЛАБКИЙ РОЗВ'ЯЗОК

Розглянемо випадок, коли права частина рівняння належить простору узагальнених функцій за просторовою змінною, а за часом інтегрована з квадратом.

Під слабким розв'язком задачі (1)–(2) розумітимемо елемент  $u$ , для якого виконується тотожність

$$\begin{aligned} & (u_t, v) + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j}, v_{x_i}) + \sum_{i=1}^n (a_i u_{x_i}, v) + (au, v) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left( \int_0^t b_{ij}(x, t, s) u_{x_i}(x, s) ds, v_{x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^t b_i(x, t, s) u_{x_i}(x, s) ds, v \right) + \\ & + \left( \int_0^t b(x, t, s) u(x, s) ds, v \right) = (f, v) \quad \forall v \in V^+, \end{aligned}$$

де через  $(\cdot, \cdot)$  позначено скалярний добуток у просторі  $L_2(Q)$ .

**Теорема 1.** *Нехай  $f \in V^-$ . Тоді задача (1)–(2) має єдиний слабкий розв'язок  $u \in V^+$ . Крім того, справедливі апріорні нерівності  $C_1 \|f\|_{V^-} \leq \|u\|_{V^+} \leq C_2 \|f\|_{V^-}$ , де сталі  $C_1, C_2 > 0$  не залежать від  $f$ .*

Доведення здійснено *abc*-методом, який раніше застосовувався для диференціальних рівнянь [5]; до інтегро-диференціальних рівнянь його застосовано у [6] і розвинено у [7], де одержано зокрема й цю теорему.

Надалі будемо розглядати функцію стану  $u$  і праву частину  $f$  як функції змінної  $t$  зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної  $x$ .

#### 4. СХЕМА МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

Виберемо базис  $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$  у просторі  $H_0^1(\Omega)$ . Для простоти будемо вважати цей базис ортонормованим у  $L_2(\Omega)$ , хоча ця вимога не є суттєвою. Через  $H_m$  позначимо лінійну оболонку системи  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ .

Наближений розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації  $u^m = \sum_{k=1}^m g_k(t)\omega_k$ . Коефіцієнти  $g_k(t)$  знаходяться зі співвідношень

$$\begin{aligned} & (u_t^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m(t), v_{x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + \left( \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}^m(t), v \right)_{L_2(\Omega)} + \\ & + (au^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left( \sum_{i,j=1}^n \int_0^t b_{ij} u_{x_i}^m(s) ds, v_{x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + \\ & + \left( \sum_{i=1}^n \int_0^t b_i u_{x_i}^m(s) ds, v \right)_{L_2(\Omega)} + \left( \int_0^t b u_{x_i}^m(s) ds, v \right)_{L_2(\Omega)} = (f(t), v)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3}$$

де  $v$  — довільний елемент простору  $H_m$ . Переписавши ці рівності з  $v = \omega_l, l = \overline{1, m}$ , одержимо систему звичайних інтегро-диференціальних

рівнянь відносно  $g_k(t)$ :

$$(LG)(t) \equiv G'(t) + AG(t) + \int_0^t B(t, s)G(s) ds = F(t) \quad (4)$$

з початковими умовами

$$G(0) = 0, \quad (5)$$

де  $G(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t))^T$ ,  $F(t) = ((f(t), \omega_1)_{L_2(\Omega)}, \dots, (f(t), \omega_m)_{L_2(\Omega)})^T$ ,  $A, B$  – матриці, елементи яких визначаються так:

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{k_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (a_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_k)_{L_2(\Omega)} + (a\omega_l, \omega_k)_{L_2(\Omega)},$$

$$B_{kl}(t, s) = \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{k_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (b_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_k)_{L_2(\Omega)} + (b\omega_l, \omega_k)_{L_2(\Omega)}.$$

Легко бачити, що  $F \in L_2([0, T])^m$ , тобто  $(f(t), \omega_k) \in L_2([0, T])$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

#### 5. Розв'язність системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь

Доведення того, що система (4)–(5) має єдиний розв'язок достатньої гладкості, здійснимо у два етапи. Спочатку покажемо, що існування і єдиність мають місце для неперервно диференційовних правих частин, що обертаються в нуль у початковий момент часу (така множина щільна у просторі  $L_2([0, T])^m$ ), а потім поширимо це твердження на весь простір  $L_2([0, T])^m$  за допомогою апіорних нерівностей.

**Лема 1.** *Нехай  $F \in C^1([0, T])^m$ ,  $F(0) = 0$ . Тоді система (4)–(5) має єдиний розв'язок  $u \in C^1([0, T])^m$ .*

*Доведення.* У [8] досліджено систему

$$G'(t) + \int_0^t K(t, s, G(s)) ds = Z(t, G(t))$$

з початковими умовами  $G(0) = G_0$ , яку можна інтегруванням від 0 до  $t$  звести до вигляду

$$\Lambda_1 G(t) \equiv \int_0^t Z(s, G(s)) ds - \int_0^t \int_0^s K(s, \nu, G(\nu)) d\nu ds = G(t),$$

(при  $G_0 = 0$ ), тобто до пошуку нерухомої точки оператора  $\Lambda_1$ . Доведено ([8], твердження 1 і теорема 2), що цей оператор має єдину нерухому точку  $G \in C([0, T])^m$ , якщо ядро  $K$  і права частина  $Z$  неперервні за усіма змінними й задовольняють умову Ліпшица:  $\|Z(t, y) - Z(t, z)\| \leq R_1 \|y - z\|$ ,  $\|K(t, s, y) - K(t, s, z)\| \leq R_2 \|y - z\|$ . Очевидно, що ці умови виконуються у випадку лінійної системи вигляду (4), тобто при  $Z(t, G(t)) = F(t) - AG(t)$ ,  $K(t, s, G(s)) = B(t, s)G(s)$ . Крім того, міркування справедливі й для інтегрального оператора дещо більш загального вигляду

$$\Lambda_1 G(t) \equiv \int_0^t F(s) - AG(s) ds - \int_0^t \int_0^s K(t, s, \nu)G(\nu) d\nu ds,$$

де ядро  $K$  є обмеженою функцією усіх трьох змінних. У такому випадку твкож виконується умова Ліпшица, і можна повторити міркування з [8]. Тепер підставимо у систему (4)–(5)  $G(t) = \int_0^t G'(s)ds$ . Маємо

$$\Lambda_2 G'(t) \equiv \int_0^t F'(s) ds - \int_0^t B(t, s) \int_0^s G'(\nu) d\nu ds = G'(t).$$

За вказаною теоремою цей оператор має єдину нерухому точку  $G' \in C([0, T])^m$ , яка і є єдиним розв'язком системи (4). □

Перейдемо до доведення апріорних нерівностей.

**Лема 2.** *Оператор  $L$  діє неперервно з  $H_0^1([0, T])^m$  у  $L_2([0, T])^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .*

Це твердження доводиться шляхом безпосередньої перевірки.

Тепер наведемо допоміжну нерівність, яка знадобиться для доведення коерцитивності оператора  $L$ .

**Лема 3.** *Нехай  $f, g \in C([0, T])$  – невід'ємні функції. Тоді  $\forall p > 0$*

$$\int_0^T f(t) \left( \int_0^t e^{p\tau} g(\tau) d\tau \right) dt \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \left( \int_0^T e^{pt} f^2(t) dt + \int_0^T e^{pt} g^2(t) dt \right).$$

Доведення цієї леми див. у [7].

**Лема 4.** *Оператор  $L$  коерцитивний, тобто*

$$\exists C > 0 \forall G \in H^1([0, T])^m \quad \|LG\|_{L_2([0, T])^m} \geq C \|G\|_{H_0^1([0, T])^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

*Доведення.* Достатньо довести ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} C \|LG\|_{L_2([0, T])^m} \|G\|_{H_0^1([0, T])^m} &\geq \|LG\|_{L_2([0, T])^m} \|H\|_{L_2([0, T])^m} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^m \|(LG)_k\|_{L_2([0, T])} \|h_k\|_{L_2([0, T])} \geq \sum_{k=1}^m ((LG)_k, h_k)_{L_2([0, T])} \geq \\ &\geq C \|H\|_{L_2([0, T])^m}^2 \geq C \|G\|_{H_0^1([0, T])^m}^2, \quad (6) \end{aligned}$$

де  $H = (h_1, \dots, h_m)^T$ , через  $C$  позначено додатну сталу, яка може бути різною для різних нерівностей з ланцюжка, а вектор-функції  $H$  і  $G$  пов'язані співвідношенням  $G(t) = \int_0^t e^{ps} H(s)ds$ , тобто  $g_k(t) = \int_0^t e^{ps} h_k(s)ds$ . Очевидно, що зі співвідношення  $G'(t) = e^{pt} H(t)$  випливають крайні нерівності у (6). Крім того, друга і третя зліва нерівності – це нерівності Коші та Коші-Буняковського. Залишилось довести другу справа нерівність. Маємо

$$\begin{aligned} ((LG)_k, h_k)_{L_2([0, T])} &= \int_0^T g'_k(t) h_k(t) dt + \sum_{l=1}^m A_{kl} \int_0^T g_l(t) h_k(t) dt + \\ &+ \sum_{l=1}^m \int_0^T \int_0^t B_{kl}(t, s) g_l(s) ds \cdot h_k(t) dt = I_{k,1} + I_{k,2} + I_{k,3}. \end{aligned}$$

Оцінимо окремо кожний з цих виразів.

$$I_{k,1} = \int_0^T g'_k(t) h_k(t) dt = \int_0^T e^{pt} h_k^2(t) dt.$$

Інші доданки оцінимо за модулем, використавши лему 3:

$$\begin{aligned} |I_{k,2}| &= \left| \sum_{l=1}^m A_{kl} \int_0^T g_l(t) h_k(t) dt \right| \leq \sum_{l=1}^m |A_{kl}| \int_0^T |h_k(t)| \int_0^t e^{ps} |h_l(s)| ds dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{l=1}^m \int_0^T e^{pt} (h_l^2(t) + h_k^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Аналогічно оцінимо й третю групу доданків, позначивши через  $M$  сталу, що мажорує величини  $|B_{kl}|$ ,  $k, l = \overline{1, m}$ :

$$\begin{aligned} |I_{k,3}| &= \left| \sum_{l=1}^m \int_0^T \int_0^t B_{kl}(t, s) g_l(s) ds \cdot h_k(t) dt \right| = \\ &= \left| \sum_{l=1}^m \int_0^T h_k(t) \int_0^t B_{kl}(t, s) \int_0^s e^{p\nu} h_l(\nu) d\nu ds dt \right| \leq \\ &\leq MT \sum_{l=1}^m \int_0^T |h_k(t)| \int_0^s e^{p\nu} |h_l(\nu)| d\nu dt \leq \frac{MT}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{l=1}^m \int_0^T e^{pt} (h_l^2(t) + h_k^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m ((LG)_k, h_k)_{L_2([0, T])} &= \sum_{k=1}^m I_{k,1} + I_{k,2} + I_{k,3} = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^T e^{pt} h_k^2(t) dt + O(p^{-1/2}) \sum_{k=1}^m \int_0^T e^{pt} h_k^2(t) dt. \end{aligned}$$

Тому, вибравши достатньо велике  $p$ , можна досягти, наприклад, нерівності

$$\sum_{k=1}^m ((LG)_k, h_k)_{L_2([0, T])} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_0^T e^{pt} h_k^2(t) dt \geq \frac{1}{2} \|H\|_{L_2([0, T])^m}^2,$$

що завершує доведення.  $\square$

Лема 1, 2, 4 дають змогу розширити оператор  $L$  до гомеоморфізму між  $H_0^1([0, T])^m$  і  $L_2([0, T])^m$ .

## 6. ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ НАБЛИЖЕНЬ

**Лема 5.** *Послідовність  $\{u^m\}_{m=1}^\infty$  обмежена за нормою простору  $V^+$ .*

*Доведення.* У [7], лема 4, коерцитивність оператора  $\mathcal{L}$  одержано як наслідок допоміжної нерівності  $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq C \|v\|_{V^+}^2$ , де  $v = e^{-pt}u$ , для достатньо гладких  $u$ . Ця нерівність справедлива й для  $u^m$  і  $v^m = e^{-pt}u^m$ . Зауважимо, що  $(\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} = (f, v^m)_{L_2(Q)}$ , у чому можна переконатися, підставивши  $v = e^{-pt}u^m(t)$  у (3) і проінтегрувавши цю рівність від 0 до  $T$ . Тому можна записати ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} C \|f\|_{V^-} \|u^m\|_{V^+} &\geq \|f\|_{V^-} \|v^m\|_{V^+} \geq \\ &\geq (f, v^m)_{L_2(Q)} = (\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} \geq C \|v^m\|_{V^+}^2 \geq C \|u^m\|_{V^+}^2, \end{aligned}$$

звідки випливає твердження лема.  $\square$

Тепер перейдемо до головного результату статті.

**Теорема 2.** *Нехай  $f \in V^-$ . Тоді послідовність  $\{u^m\}$  збігається до розв'язку  $u$  задачі (1)–(2) слабо у просторі  $V^+$ .*

*Доведення.* Міркування в цілому повторюють доведення аналогічної теореми для параболічного оператора ([5], теорема 2.2.1).

За лемою 5 з послідовності  $\{u^m\}$  можна виділити слабо збіжну підпослідовність  $\{u^{m_k}\}_{k=1}^\infty$ , а з неї, відповідно до властивості Банаха-Сакса — підпослідовність  $\{u^{m_{k_q}}\}_{q=1}^\infty$ , таку що послідовність  $\bar{u}^r = \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r u^{m_{k_q}}$  збігається до деякого  $\tilde{u} \in V^+$  за нормою цього простору. Цей самий елемент є границею і послідовності середніх  $\hat{u}^r = \frac{1}{r} \sum_{q=r}^{2r-1} u^{m_{k_q}}$ .

За лінійністю й неперервністю оператора  $\mathcal{L}$ , а також фундаментальністю послідовності  $\{\hat{u}^r\}_{r=1}^\infty$  маємо

$$\|\mathcal{L}\hat{u}^i - \mathcal{L}\hat{u}^j\|_{V^-} \leq C\|\hat{u}^i - \hat{u}^j\|_{V^+} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty.$$

Отже, послідовність  $\{\mathcal{L}\hat{u}^r\}_{r=1}^\infty$  фундаментальна. Позначимо її границю через  $\hat{f}$  і доведемо, що  $\hat{f} = f$ . Це означатиме, що  $\hat{u}$  і є розв'язком задачі (1)–(2), тобто  $\hat{u} = u$ .

Оскільки система функцій  $\{\psi_l = \varphi(t)\omega_l \mid \varphi \in C^\infty([0, T])\}_{l=1}^\infty$ , тотальна у  $V^+$ , достатньо показати, що  $\langle \hat{f}, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+}$  для будь-якого  $l \in \mathbb{N}$ .

Така рівність має місце, оскільки з (3) і з побудови функцій  $\psi_l$  випливає

$$\langle \mathcal{L}\hat{u}^r, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+}, \quad l = \bar{1}, m_{k_r},$$

але з іншого боку, для довільного фіксованого  $l$

$$\begin{aligned} \left| \langle f - \hat{f}, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+} \right| &= \left| \langle \mathcal{L}\hat{u}^r - \hat{f}, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+} \right| \leq \\ &\leq \|\psi_l\|_{V^+} \|\mathcal{L}\hat{u}^r - \hat{f}\|_{V^-} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(перша рівність справедлива принаймні для  $r \geq l$ ). Отже,  $u^{m_k} \rightharpoonup u$ , де  $u$  — розв'язок задачі (1)–(2). Оскільки за лемою 1 цей розв'язок єдиний, він є слабою границею усієї послідовності  $\{u^m\}$ . □

**Зауваження 1.** Завдяки компактності вкладення  $V^+$  у простір  $L_2(Q) = L_2([0, T], L_2(\Omega))$  має місце і сильна збіжність  $u^m$  до  $u$  в  $L_2(Q)$ .

**Зауваження 2.** До вигляду (1)–(2) зводяться задачі з неоднорідними початковими умовами  $u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Shaw S., Whiteman J.R. Application and numerical analysis of partial differential Volterra equations: A brief survey // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1997. — V. 150. — P. 397–409.

2. Shaw S., Whiteman J.R. Towards adaptive finite element schemes for partial differential Volterra equation solvers // *Advances in Computational Mathematics*.— 1996. — V. 6, №1. — P. 309–323.
3. Pani A.K., Thomee V., Wahlbin L.B., Numerical methods for parabolic and hyperbolic partial differential equations // *Journal of Integral Equations and Applications*.— 1992. — V. 4, №4. — P. 533–584.
4. Thomee V., Zhang N.-Y., Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Methods for Parabolic Integro-Differential Equations // *Mathematics of Computation*. — 1989. — V. 53, №187. — P. 121–139.
5. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами — К.: Наукова думка, 1998. — 465 с.
6. Анікушин А. В. Оптимальне керування інтеро-диференціальними системами параболічного типу // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2010. — № 3(102) — С. 3–16.
7. Anikushyn A. V., Hulianytskyi A. L. Generalized Solvability of Parabolic Integro-Differential Equations // *Differential Equations*. — 2014. — V.50, №1. — P. 98–109.
8. Berenguer M. I., Garralda-Guillem A. I., Ruiz Galan M. An approximation method for solving systems of Volterra integro-differential equations // *Applied Numerical Mathematics*. — 2013, May. — V. 67. — P. 126–135.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601,  
УКРАЇНА, E-MAIL: ANDRIYHUL@GMAIL.COM

Надійшла 01.02.2014.

УДК 519.6:531:537

## ВОЗМОЖНОСТЬ УСТОЙЧИВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МАГНИТНО-ДИПОЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

С. С. Зуб

**РЕЗЮМЕ.** В работе дано аналитическое доказательство устойчивости динамического относительного равновесия подвижного магнитного диполя в поле двух фиксированных диполей. Обсуждается связь данного результата с известной "проблемой  $1/R^3$ ", сформулированной по отношению к взаимодействию магнитных диполей Таммом и Гинзбургом.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости магнитного равновесия естественным образом распадается на задачи статического и динамического равновесия.

Обычно считается, что возможность существования статического равновесия для магнитно взаимодействующих тел исключается теоремой Ирншоу [1]. Однако, в области магнитных явлений существование диамагнетизма и сверхпроводимости нарушают условия применимости данной теоремы. Более того, удалось доказать, что тело, на которое действуют исключительно магнитные силы, может находиться в состоянии устойчивого статического равновесия [2].

Что же касается постоянных магнитов, то теорема Ирншоу справедлива в полной мере. Как показано в [2], система магнитных диполей не может быть статически устойчивой, если хотя бы один диполь не является закрепленным. Однако, вращение может создавать стабилизирующий эффект, а теорема Ирншоу не распространяется на динамические системы.

Поэтому возникает вопрос о существовании устойчивых движений в системе магнитных диполей. Эту проблему, как в классическом, так и в квантовом случае, рассматривали Тамм и Гинзбург в связи с гипотезой о магнитном происхождении ядерных сил [3]. Ими была сформулирована так называемая "проблема  $1/R^3$ " по отношению к взаимодействию магнитных диполей. Этот результат ставит под сомнение возможность устойчивых движений в системах, состоящих из магнитных диполей.

Отметим, что условия устойчивости, полученные в работе [4], полностью согласуются с выводами Тамма и Гинзбурга. В этой работе рассматривается движение магнитного диполя в поле двух закрепленных магнитных полюсов. Можно трактовать магнитные полюса, разделенные расстоянием  $2h$ , как "большой" магнитный диполь, а затем, устремляя  $h$  к нулю, получить правильное описание магнитного диполя, закрепленного в начале

системы координат. Одним из условий устойчивости орбитального движения подвижного диполя вокруг закрепленного "большого" диполя является неравенство  $r < 2h$ , где  $r$  — расстояние между подвижным и закрепленным диполями. Отсюда видно, что при  $h$  стремящемся к нулю, это условие не может быть выполнено ни при каком конечном  $r$ .

Тогда возникает вопрос: существуют ли системы, состоящие из магнитных диполей, в которых реализуются устойчивые движения?

Оказывается, что такие системы существуют. Однако, противоречия с выводами Тамма и Гинзбурга не возникает, т. к. некоторые диполи в таких системах закреплены, т. е. имеют место связи, которые не рассматривались в теории ядерных сил.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему, в которой источниками магнитного поля являются два магнитных диполя, расположенных на оси  $z$  в точках  $z = \pm h$  с равными магнитными моментами, одинаково ориентированными вдоль оси  $z$ . Очевидно, поле этой системы является аксиально-симметричным относительно оси  $z$  и зеркально симметричным относительно плоскости  $z = 0$ .

Поле магнитного диполя хорошо известно [1, (37.26) с. 261]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{R} \rangle \mathbf{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3} \right), \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  — вектор магнитного момента, а  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор от диполя до точки наблюдения поля.

Для диполей, расположенных на оси  $z$  в точках  $\pm h$ , в декартовых компонентах имеем

$$\begin{cases} B_C^\pm = 3\kappa \frac{(x_3 \mp h)x_C}{D_{\mp}^{5/2}}, & C = 1, 2; \\ B_3^\pm = \kappa \frac{2(x_3 \mp h)^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{D_{\mp}^{5/2}}, & D_{\pm} = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \mp h)^2; \end{cases} \quad (2)$$

где  $\kappa = \frac{\mu_0}{4\pi} |\boldsymbol{\mu}|$  — эквивалентный "магнитный заряд" полюса магнитного диполя.

В частности, в "экваториальной" плоскости для суммарного поля получаем

$$\begin{cases} B_C^0 = 0; \\ B_3^0 = 2\kappa \frac{2h^2 - r^2}{D_0^{5/2}}, & D_0 = r^2 + h^2, \end{cases} \quad (3)$$

где метка "0" соответствует  $z = x_3 = 0$ , а  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

В заданном таким образом поле движется магнитный диполь, представляющий собой малое намагниченное твердое тело — симметрический волчок — с магнитным моментом  $\mathbf{m} = |\mathbf{m}| \boldsymbol{\nu} = m \boldsymbol{\nu}$ , где  $\boldsymbol{\nu}$  направляющий орт оси симметрии волчка.

Состояние диполя описывается набором  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{p}, \mathbf{n})$  [4], где  $\mathbf{x}$  — положение диполя,  $\mathbf{p}$  — его импульс,  $\mathbf{n}$  — собственный момент импульса диполя.

Потенциальная энергия взаимодействия диполя с внешним полем имеет классический вид

$$V(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{m}, \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle = -m \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle \quad (4)$$

## 2. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Теоретико-групповые методы гамильтоновой динамики доказали свою эффективность во многих задачах механики [5, 6, 7, 8] и, в частности, при исследовании устойчивости магнитных динамических систем [4, 9].

Имеется ряд теорем [10, 8], которые дают условия устойчивости относительных равновесий, т. е. таких траекторий гамильтоновой системы, которые одновременно являются орбитами однопараметрических подгрупп группы инвариантности исследуемой системы [5, 10].

Так как магнитное поле, а, значит, и потенциальная энергия описанной выше динамической системы обладают аксиальной симметрией, то группой инвариантности данной системы является  $S^1$  — группа вращений вокруг оси симметрии магнитного поля  $z$ .

Таким образом, все физические векторы состояния системы в относительном равновесии вращаются вокруг оси  $z$ .

Кроме аксиальной симметрии магнитное поле в данной системе обладает также зеркальной симметрией, что выделяет класс относительных равновесий, пространственно расположенных в плоскости  $z = 0$ . Такие равновесия можно охарактеризовать, задавая единственную точку на траектории, а именно:

$$z_e = \begin{cases} \mathbf{x}_0 = r_0 \mathbf{e}_1; \\ \mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{e}_2; \\ \boldsymbol{\nu} = \nu \mathbf{e}_3, \quad \nu = \pm 1; \\ \mathbf{n} = n_0 \mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$  — орты декартовой системы координат,  $\mathbf{e}_3$  направлен по оси  $z$ .

Исследование устойчивости указанных относительных равновесий может быть проведено на основе energy-momentum метода [10, р. 90]. Благодаря использованию соображений симметрии, применение этого метода сводится к анализу положительной определенности некоторой квадратичной формы от определенного набора вариаций динамических переменных в единственной точке траектории, в нашем случае в точке (5).

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ  
МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В АКСИАЛЬНО И ЗЕРКАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ  
МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

В работе [11] рассматривается устойчивость относительных равновесий для магнитного диполя, взаимодействующего с аксиально и зеркально симметричным магнитным полем. С помощью energy-momentum метода [10, р. 90] доказана достаточно общая теорема, которая дает условия устойчивости для некоторого класса относительных равновесий.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{B}$  — магнитное поле, обладающее аксиальной симметрией относительно оси  $z$ , а также зеркальной симметрией относительно "экваториальной" плоскости  $z = 0$ . Предположим также, что в некотором слое  $|z| < h$  вне цилиндра  $r \leq \rho$  отсутствуют источники поля.

Тогда, если для  $z = 0, r_0 > \rho$  одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} B_{z,zz} = -\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} < 0; \\ \frac{3}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} < 0 \end{cases} \quad (6)$$

либо одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} B_{z,zz} = -\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} > 0; \\ \frac{3}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} > 0 \end{cases} \quad (7)$$

то в плоскости  $z = 0$  при  $|\mathbf{x}| = r_0$  возможно  $G_\mu$ -устойчивое [12, 8] относительное равновесие для динамики осесимметричного магнитного диполя в данном магнитном поле.

**Замечание 1.** В случае (6) диполь ориентирован вертикально вверх ( $\nu = 1$ ), а в случае (7) — вертикально вниз ( $\nu = -1$ ).

**Замечание 2.** Для того, чтобы указанная в теореме возможность устойчивого орбитального движения осуществилась, необходимо выбрать начальные условия (5) следующим образом ( $z = 0, r = r_0$ )

$$\begin{cases} p_0 = M\omega_0 r_0, & M\omega_0^2 = -\frac{m\nu}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r}; \\ n_0 > I_\perp \omega_0 + \frac{m}{\omega_0} \left[ \frac{(\partial_r B_z)^2}{(-\nu B_{z,zz})} - B_z \right] \end{cases} \quad (8)$$

где  $I_\perp$  — главный момент инерции, соответствующий вращениям вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии тела,  $\omega_0$  — угловая частота орбитального движения диполя вокруг оси  $z$ .

Физический смысл 1-го условия (8) состоит в том, что центробежная сила должна уравновешиваться центростремительной, а 2-го в том, что диполь, как твердое тело, должен обладать достаточным собственным моментом импульса, т. е. должен быть достаточно раскручен.

При выполнении условий теоремы соотношения (8) всегда могут быть выполнены.

## 4. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Рассмотрим, какие ограничения на параметры исследуемой системы — дипольтрона — накладывают условия предыдущего раздела.

Без ограничения общности считаем, что магнитный момент подвижного диполя направлен вверх, т. е.  $\nu = 1$ .

Используя соотношения (3) можно выразить все интересующие нас величины, беря производные  $B_z$  по  $r$  при  $z = 0$ .

$$\begin{cases} B_z = 2\kappa(2h^2 - r_0^2)D_0^{-5/2}; \\ B_{z,r} = B_{r,z} = -6\kappa r_0(-r_0^2 + 4h^2)D_0^{-7/2}; \\ B_{z,zz} = 6\kappa(3r_0^4 - 24r_0^2h^2 + 8h^4)D_0^{-9/2}; \\ \frac{3}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -6\kappa(r_0^4 - 28r_0^2h^2 + 16h^4)D_0^{-9/2}; \end{cases} \quad (9)$$

Т. к. величины  $\kappa$ ,  $D_0$  — положительные, то условиями теоремы при  $\nu = 1$  будут

$$\begin{cases} 3\left(\frac{r_0}{h}\right)^4 - 24\left(\frac{r_0}{h}\right)^2 + 8 < 0; \\ \left(\frac{r_0}{h}\right)^4 - 28\left(\frac{r_0}{h}\right)^2 + 16 > 0; \end{cases} \quad (10)$$

Решением системы (10) являются геометрические условия для системы дипольтрон

$$2\sqrt{1 - \sqrt{5/6}} < \frac{r_0}{h} < \sqrt{9 - \sqrt{65}} \quad (11)$$

или, приближенно,

$$0.5903526768 < \frac{r_0}{h} < 0.9683709269$$

Условия (8) при выполненных геометрических условиях (11) всегда могут быть удовлетворены.

Представляет интерес оценить величину необходимого для этого собственного момента импульса тела  $n_0$  в сравнении с орбитальным моментом импульса  $L_0 = r_0 p_0 = Mr_0^2 \omega_0$ .

В сумме

$$I_{\perp} \omega_0 + \frac{m}{\omega_0} \left[ \frac{(\partial_r B_z)^2}{(-\nu B_{z,zz})} - B_z \right] \quad (12)$$

1-м слагаемым можно пренебречь, т. к.  $I_{\perp} \ll Mr_0^2$ . 2-е слагаемое можно представить в виде  $L_0 \psi(d)$

$$\psi(d) = -\frac{2}{3} \frac{(1+d^2)}{d^2(4-d^2)} \frac{3d^4 - 4d^2 + 8}{3d^4 - 24d^2 + 8}, \quad (13)$$

где  $d = \frac{r_0}{h}$ .

Построен график этой функции. В точке  $d = 0.8$  ее значение — 0.5530132634. При  $0.724 < d < 0.9683709269$  эта функция  $< 1$ .

Т. о. значение собственного момента импульса диполя должно быть сравнимо со значением его орбитального момента импульса.

Используя указанные значений параметров было проведено численное моделирование орбитального движения при отклонениях начальных значений динамических переменных от значений, соответствующих относительному равновесию, в пределах 1%. Методом Монте-Карло (т. е. случайно выбирая начальные значения в данной окрестности) было совершено 1000 бросаний, которые продемонстрировали устойчивость орбитального движения. Подробно о методике такой проверки написано в работе [13].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм — М.: Высшая школа, 1983. — 463 с.
2. Зуб С. С. Вплив топології надпровідних елементів на стійкість рівноваги вільного тіла : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. — К., 2005. — 23 с.
3. Ginzburg V. L. The Mesotron Theory and Nuclear Forces // *Uspehi Fiz. Nauk.*, — 1947. — V. 31, № 2, — P. 174–209.
4. Zub S. S., Stable orbital motion of magnetic dipole in the field of permanent magnets // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2014. — V. 275C, — P. 67–73.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
6. Marsden J., Ratiu T. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems — New York: Springer-Verlag, 1994.
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics — Izhevsk: Izd. UdSU, 1999.
8. Ortega J.-P., Ratiu T. S., Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry // *Journal of Geometry and Physics.* — 1999. — V. 32, № 2, — P. 160–188.
9. Зуб С. С. Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки.* — 2011. — № 2 — С. 176–184.
10. Marsden J. E. Lectures On Mechanics — London: Cambridge University Press, 1992.
11. Grigoryeva L., Ortega J.-P., Zub S. S., Stability of Hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically confined rigid bodies // *The Journal of Geometric Mechanics.* — 2014. — V. 6, № 2, — P. 12–74.
12. Patrick G. W., Relative equilibria in Hamiltonian systems: the dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space // *Journal of Geometry and Physics.* — 1992. — № 9, — P. 111–130.
13. Зуб С. С., Ляшко С. І., Ляшко В. С. Исследование устойчивости орбитального движения магнитно взаимодействующих тел методом численного эксперимента // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — № 1(107) — С. 122–134.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601, УКРАИНА.

Поступила 22.01.2013

УДК 519.673:004.4

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ KRISFLOW

С. И. Ляшко, О. Б. Стеля, И. О. Стеля, Е. С. Бондарь

**РЕЗЮМЕ.** В работе рассмотрены принципы создания программного обеспечения компьютерных моделей на примере моделирующего комплекса KRISFLOW. Разработанный программный комплекс предназначен для моделирования и предсказания отклика грунтовых вод на различные воздействия, возникающие на больших ирригационных системах или промышленных территориях с интенсивным водообменом.

### ВВЕДЕНИЕ

Современные подходы к исследованию подземной гидросферы предполагают создание и развитие математических моделей и программных комплексов (ПК) максимально удобных для решения различных задач рационального использования водных и земельных ресурсов. Описание программных комплексов для гидрогеологического моделирования и прогнозирования, представленных различными производителями, содержится в [1–4].

В работе приведено описание программного комплекса KRISFLOW. При его построении использован опыт создания математических моделей, алгоритмов и программного обеспечения для задач подземного массопереноса [5–8]. Программный комплекс предназначен для решения плановых задач потока грунтовых вод на больших территориях с многочисленными факторами, влияющими на нестационарный режим исследуемых процессов. Значительные объемы необходимой для работоспособности компьютерной модели исходной информации требуют создания удобного пользовательского интерфейса для ввода данных, представленных в табличном и картографическом виде.

*Объектом исследования* являются большие территории с интенсивным воздействием на грунтовые воды различных внешних природных и искусственных факторов. В качестве таких объектов могут быть выбраны ирригационные системы или промышленные узлы с интенсивным водообменом. В работе приведен пример адаптации программного комплекса для условий Краснознаменской оросительной системы (Голопристанский район, Херсонская область).

*Целью исследования* является модельная оценка влияния внешних факторов, таких как: орошение поверхности почвы, утечки из каналов различного назначения, отбор грунтовых вод дренажными скважинами, поверхностных водоемов и др., на режим грунтовых вод и создание сценариев хозяйственной деятельности, оптимизирующих процессы орошения-дренирования территорий.

Основной характеристикой потока грунтовых вод является глубина залегания свободной поверхности грунтовых вод безнапорного водоносного горизонта. При дополнительном искусственном питании грунтовых вод возможно поднятие уровня грунтовых вод, что зачастую приводит к подтоплению и затоплению территорий и населенных пунктов со всеми вытекающими негативными последствиями этого явления. Управлением грунтовыми водами в такой ситуации является уменьшение питания грунтовых вод и отбор "лишней" воды с помощью дренажа.

### КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Исследование основывается на следующих предположениях о характере объекта и факторах, оказывающих наиболее существенное влияние на исследуемые характеристики объекта. Рассматривается толща грунта, содержащая напорный и безнапорный водоносные горизонты, разделенные тонкой слабопроницаемой прослойкой с возможными перетоками между ними. Повышение уровня грунтовых вод осуществляется за счет орошения сельхозугодий, осадков, утечек воды через фильтрующие основания оросительных каналов. Регулирование уровня грунтовых вод на исследуемой территории осуществляется с помощью дренажных скважин, которые производят отбор из верхнего (безнапорного) водоносного горизонта. В качестве границ территории выбираются участки с известным уровнем грунтовых вод или участки с отсутствием питания грунтовых вод через них. Исследуемая область содержит поверхностные водоёмы и водотоки. В качестве поверхностных водоёмов могут выступать озера с установившимся уровнем воды в них, а в качестве водотоков — каналы и реки.

Основываясь на объекте, цели исследования и концептуальной модели для формализации изучаемых процессов, используется математическая модель на основе дифференциальных уравнений с частными производными. Система дифференциальных уравнений описывает плановый поток грунтовых вод в связанных между собой водоносных горизонтах [9].

Для осуществления моделирования исследуемых процессов необходимо задание исходной информации, представленной в табличном, картографическом и аналитическом виде. От уровня детализации задания исходных данных во многом зависит адекватность модели реальной системе. Входную информацию для программного комплекса условно можно разделить на три типа:

1. Информация, необходимая для привязки ПК к местности и настройки на объект моделирования.

2. Информация о распределенных и точечных источниках и стоках, влияющих на режим грунтовых вод.
3. Информация, описывающая начальное состояние системы и режим грунтовых вод на границе исследуемой области.

Рассмотрим детальнее некоторые используемые в модели исходные данные:

- контуры орошаемых площадей на карте объекта и нормы полива на них;
- геометрия области;
- расположение на карте каналов различного назначения и объемы потерь на фильтрацию из них;
- расположение на карте дренажных скважин и объемы откачиваемой воды по каждой скважине;
- расположение наблюдательных скважин для мониторинга грунтовых вод;
- уровни грунтовых вод на границе области;
- контуры озер на карте и уровни поверхности воды в них.

Следует отметить, что характер и структура информации, необходимой для функционирования модели, во многом определяют архитектуру программного комплекса.

#### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Известные программные комплексы для моделирования грунтовых вод имеют в своем составе графические средства для рисования объекта исследования и его компонентов, с дальнейшим вводом исходных данных с помощью пользовательского интерфейса. Для сложных задач необходимо рисовать все картографические объекты и привязывать их к местности. Фактически это означает, что в программный комплекс необходимо встраивать географическую информационную систему (ГИС). Другими словами, мы должны иметь цифровую карту объекта с необходимой детализацией объектов на ней и привязкой к этим объектам соответствующей атрибутивной информации. Таким образом, для задания необходимой информации нам нужно знать не только количественные характеристики объекта, но и его расположение на карте местности. В силу вышеописанных соображений, в качестве инструмента для задания картографических объектов, была использована ГИС MapInfo [10]. Цифровая карта области моделирования с объектами, которые учитываются при моделировании, приведена на рисунке 1.

С каждым графическим объектом в модели связывается характеризующая его исходная информация. Разработана структура файлов хранения и обмена информацией между составляющими блоками программного комплекса. В силу значительного объема исходной информации необходимы удобные средства для ввода этой информации, проверки на полноту и редактирования.



Отдельным блоком является разработанная цифровая модель рельефа местности для объекта моделирования [13]. Цифровая модель рельефа используется для определения глубины залегания грунтовых вод путем сравнения значений абсолютных отметок поверхности земли с соответствующими отметками вычисленными путем моделирования свободной поверхности грунтовых вод. Информация в виде отметок поверхности земли хранится в файле специальной структуры и может быть отображена на цифровой карте области моделирования.

Разработанный ПК позволяет рассчитывать уровни грунтовых вод на некотором дискретном множестве точек — дискретной сеточной модели. Дискретная модель представляет собой множество узлов прямоугольной равномерной или неравномерной сетки, покрывающей изучаемую область. В дискретной модели различают внутренние узлы и узлы, принадлежащие границе области. В электронном виде информация о внутренних и граничных узлах хранится в файлах специальной структуры.

#### ГРАФИЧЕСКИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИЙ ИНТЕРФЕЙС

Программный комплекс оперирует дискретной моделью, а вся исходная информация и результаты расчетов привязываются к ее узлам. Для ввода и редактирования исходной информации служит графический пользовательский интерфейс. Рассмотрим его основные функциональные возможности.

Меню для выбора необходимой экранной формы для соответствующих манипуляций данными представлено на рисунке 2.

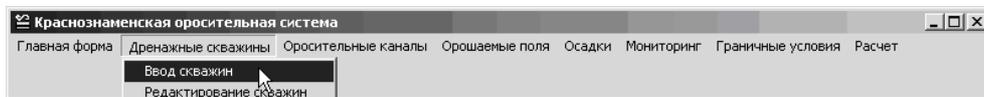
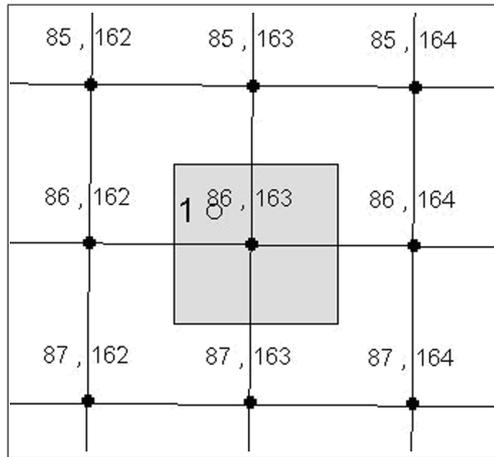


Рис. 2

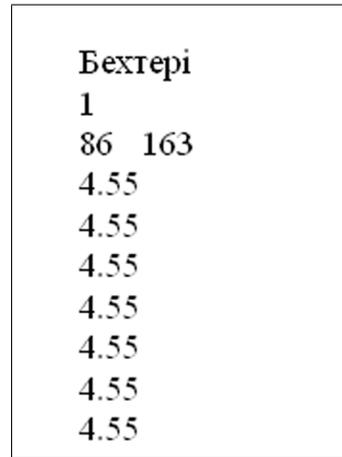
*Ввод данных для задания дренажных скважин.* Дренажные скважины характеризуются своим расположением и количеством воды, отбираемой посуточно. На рисунке 3а представлен фрагмент карты с нанесенной сеткой и номерами узлов дискретной модели, а также реальным расположением на карте скважины № 1. В компьютерной модели скважина смещается в ближайший узел дискретной модели, в данном случае в узел под номером (86,163). Объем воды, отбираемый скважиной "размазывается" по площади закрашенного квадрата. Все необходимые данные о скважине записываются в текстовый файл, фрагмент которого представлен на рисунке 3б. Для активации соответствующей экранной формы необходимо выбрать пункт меню "Дренажные скважины / Ввод скважин" (рис. 2).

Для задания новой дренажной скважины необходимо ввести ее координаты, которые должны совпадать с координатами одного из внутренних узлов сеточной области. Дополнительно задаются номер скважины и название населенного пункта, позволяющие идентифицировать скважину на топографической карте. С помощью экранной формы представленной

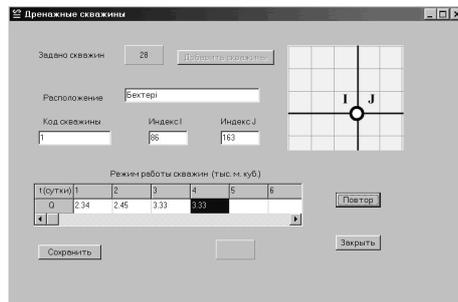
на рисунке 3г осуществляется редактирование информации для уже существующих скважин. Заполнение экранных форм является наглядным и интуитивно понятным. Вся введенная информация далее используется для расчетов модели, а также для отображения на цифровой карте в автоматическом режиме.



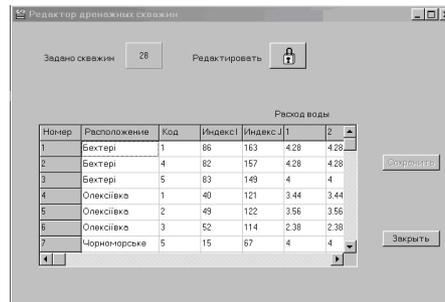
а)



б)



в)

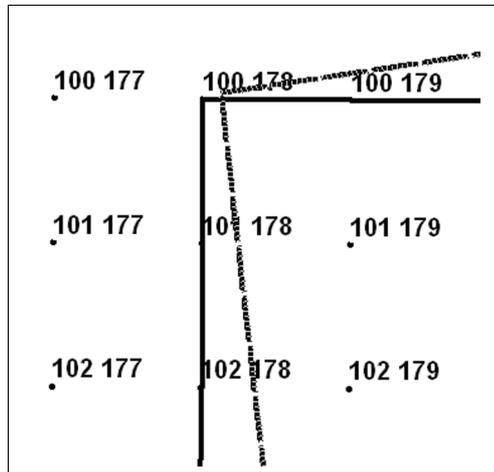


г)

Рис. 3

*Ввод данных для задания оросительные каналы.* В отличие от точечных объектов, таких как скважины, оросительные каналы представлены на карте ломаными линиями. На рисунке 4а изображены каналы на карте (пунктирная линия) и в модели (сплошная линия). Таким образом, в модели канал представляется совокупностью узлов ближайших к расположению канала на карте. Кроме того для каждого канала задаются потери на фильтрацию через его стенки и основание. Вся необходимая информация записывается в текстовый файл (рис. 4б). Выбор пункта меню "Оросительные каналы" приводит к активации экранной формы для ввода информации для каналов. Редактирование содержащейся в файлах информации осуществляется с помощью экранной формы "Редактирование каналов" (рис. 4г).

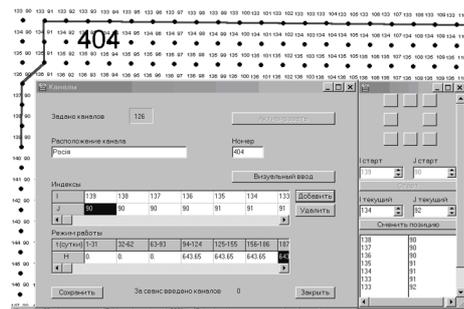
Номера узлов, принадлежащих каналу, могут задаваться как вручную, так и автоматизировано, с помощью нажатия соответствующих кнопок в направлении смещения вдоль канала в нужный узел дискретной модели (правая панель на экранной форме на рисунке 4в).



а)

Росія
404
187
139 90
136 90
135 91
...
0.
0.
0.
183.4
183.4
...

б)



в)

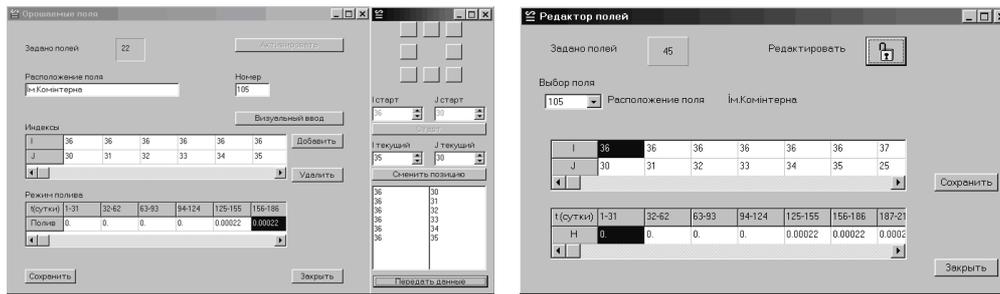


г)

Рис. 4

*Ввод данных для задания орошаемых полей.* Орошаемые поля в модели представляются совокупностью узлов дискретной модели, попадающих в ограничивающий поля контур. Для ввода информации, описывающей орошаемые поля, используется экранная форма "Орошаемые поля" (рис. 5а). Форма предназначена для задания расположения полей, их административной принадлежности и информации по объемам полива. Для редактирования сохраненной информации используется форма "Редактор полей" (рис.5б)

Представленные выше данные имеют динамический характер и могут изменяться как в рамках одного варианта расчета (нестационарность осадков, полива, отбора воды дренажными скважинами и др.), так и изменяться в зависимости от выбранного сценария моделирования.



а)

б)

Рис. 5

Примером стационарных объектов в области являются озера задаваемые совокупностью узлов, попадающих внутрь ограничивающих их контуров. В каждом из таких узлов задается абсолютная отметка поверхности воды в водоеме. На рисунке 6 приведен пример представления водоема в дискретной модели. Информация задается один раз для всего цикла расчетов.

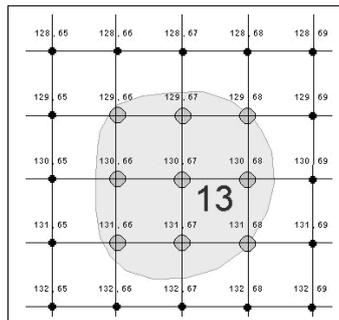


Рис. 6

### Визуализация исходной информации и результатов моделирования на цифровой карте

Для манипулирования слоями цифровой карты модели, отображения исходных данных и результатов моделирования, используется географическая информационная система MapInfo [10]. Разработанный на языке MapBasic, встраиваемый в ГИС модуль позволяет отображать на цифровой карте такие объекты, как узлы дискретной модели, границу области моделирования, дренажные скважины, наблюдательные скважины системы мониторинга, оросительные каналы, орошаемые поля и др. После проведения расчетов результаты моделирования в виде абсолютных отметок свободной поверхности грунтовых вод и в виде тематической карты глубин залегания грунтовых вод могут быть нанесены на карту в автоматическом режиме. Такие карты удобны с точки зрения анализа ситуации на объекте моделирования и принятия управленческих решений.

Активация модуля приводит к появлению рядом со стандартными меню MapInfo пунктов пользовательского меню "Карта области", "Модель", "Результаты моделирования", "Вихід" (рис. 7).

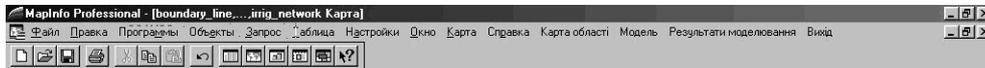


Рис. 7

Важной особенностью программного комплекса является то, что отображение исходной информации на карте происходит динамически в автоматическом режиме. На карту наносится информация, введенная или отредактированная с помощью пользовательского интерфейса и сохраненная в файлах описанной выше структуры. Любые изменения в исходных данных задачи (расположение и количество скважин различного типа, расположение полей и каналов, их конфигурация) по желанию пользователя, могут быть отображены для визуального контроля на цифровой карте. Кроме самих графических объектов на карте отображается необходимая атрибутивная информация. Таким образом, ГИС используется, как на начальном этапе для привязки модели к исследуемой области, введения координатно-привязанных данных в модель и их контроля, так и на этапе отображения результатов моделирования.

Апробация ПК происходила на Краснознаменной оросительной системе для Голопристанского и Гениченского районов. Результаты моделирования в виде тематической карты и сравнение рассчитанных отметок поверхности грунтовых вод с наблюдаемыми значениями в скважинах сети мониторинга приведены в работе [11].

### Выводы

В результате адаптации разработанного программного комплекса к объекту моделирования можно отметить его хорошую применимость для решения сложных задач гидрогеологии. Пользовательский интерфейс позволяет удобно вводить большие объемы исходных данных и манипулировать уже существующими. Отображение исходных данных и результатов моделирования на цифровой карте дает наглядное представление о влиянии различных источников и стоков на динамику грунтовых вод на больших территориях. Эффективный вычислительный модуль позволяет осуществлять долгосрочные прогнозы с учетом всего разнообразия природных и антропогенных факторов. Дальнейшим развитием предложенного ПК может быть его использование в качестве информационной среды для решения не только общей задачи на всем объекте, но для решения локальных задач (например, решение задачи оптимизации дренажа для отдельного населенного пункта [15]), использующих существующую информацию.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Scientific Software Group products [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.scisoftware.com/html/products.html>. — Название с экрана.

2. Environmental Simulations, Inc. products [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.scisoftware.com/html/products.html>. - Название с экрана.
3. Schlumberger Water Services products [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://www.swstechnology.com/groundwater-software/groundwater-modeling-software>. — Название с экрана.
4. Chunmiao Zheng FEFLOW: A Finite-Element Ground Water Flow and Transport Modeling Tool // Ground Water. — 2007. — V. 45, Issue 5. — P. 525–528.
5. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Лычман В. В., Мистецкий Г. Е., Стеля О. Б. и др. Функциональное наполнение пакета прикладных программ ФСП-ОС // Пакеты прикладных программ. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1983. — С. 139–145.
6. Стеля О. Б., Стеля Л. П. Комбінована тривимірна модель потоку та транспорту забруднень в насичено-ненасичених пористих середовищах // Вісник Київського університету, Сер. фіз.-мат. науки. — 1997. — №4. — С. 195–205.
7. Стеля О. Б., Ходорівський М. С. Математичне моделювання в системі моніторингу майданчика об'єкта "Вектор" (30-км зона ЧАЕС) // Волинський математичний вісник. — 1998. — №5. — С. 134–138.
8. Стеля О. Б., Вакал Є. С., Тригуб А. С. Визначення фільтраційних втрат з каналів // Тези доповідей Міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатка, 24-28 вересня 2007, Дрогобич, Україна. — Дрогобич, 2007. — С. 46.
9. Крукиер Л. А., Шевченко И. В. Сравнение моделей гравитационного режима течения грунтовых вод // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, №2. — С. 51-60.
10. Pitney Bowes Software MapInfo MapBasic [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.pbinsight.com/support/product-documentation/details/mapinfo-mapbasic>. — Название с экрана.
11. Стеля О. Б. Моделирующий комплекс для расчета потока грунтовых вод в сложных гидрогеологических условиях / Матем. модел. — 2011. — Т. 23, №4. — С. 120–130.
12. Intel Fortran Compiler [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://software.intel.com/en-us/fortran-compilers>. — Название с экрана.
13. Embarcadero products [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.embarcadero.com/ru/products/delphi>. — Название с экрана.
14. Стеля О. Б., Фломбойм О. В., Демиденко С. В. Відтворення рельєфу за набором ізоліній / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Сер. фіз.-мат. науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 356–362.
15. Ляшко С. І., Стеля О. Б. Оптимізація дренажу підтоплених територій / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Сер. кібернетика. — 2008. — Вип. 8. — С. 356–362.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64, КИЕВ, 01601, УКРАИНА.

Поступила 10.11.2013

УДК 519.85

## ОПТИМАЛЬНАЯ УПАКОВКА ЭЛЛИПСОВ С УЧЕТОМ ДОПУСТИМЫХ РАССТОЯНИЙ

А. В. ПАНКРАТОВ, Т. Е. РОМАНОВА, И. А. СУББОТА

**РЕЗЮМЕ.** Рассматривается задача оптимальной упаковки эллипсов, допускающих непрерывные вращения. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази- $\rho$ -функции и псевдонормализованные квази- $\rho$ -функции. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагается эффективные алгоритмы поиска стартовых точек из области допустимых решений и поиска локальных экстремумов. Приводятся результаты численных экспериментов.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального размещения (в частности, задачи упаковки и раскроя [1, 2]) относятся к классу NP-сложных задач [3] и является частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений (см. например, <http://smartimtech.com>), в том числе: в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

Предметом исследования данной статьи является задача упаковки в следующей постановке. Пусть задана прямоугольная область  $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w\}$  переменной длины  $l$  и переменной ширины  $w$ , и набор эллипсов  $E_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$ , которые должны размещаться внутри области  $\Omega$ . Каждый эллипс  $E_i$  задан большой и малой полуосями  $a_i$  и  $b_i$ . Полус эллипса  $E_i$  совпадает с началом его собственной системы координат, а граница эллипса  $E_i$  описывается в параметрическом виде:  $x_i = a_i \cos t_i, y_i = b_i \sin t_i, 0 \leq t_i \leq 2\pi$ . Полагаем, что система координат контейнера  $\Omega$  — фиксирована. Положение эллипса  $E_i$  характеризуется вектором трансляции  $(x_i, y_i)$  и углом поворота  $\theta_i$ . Между эллипсами  $E_i$  и  $E_j$  могут быть заданы ограничения на минимально  $\rho_{ij}^-$  и/или максимально  $\rho_{ij}^+$  допустимые расстояния, а между эллипсом  $E_i$  и границей контейнера  $\Omega$  — ограничения на минимально допустимые расстояния  $\rho_i^-$ .

*Задача упаковки эллипсов.* Разместить множество эллипсов  $E_i(x_i, y_i, \theta_i), i \in I_n$ , в контейнере  $\Omega$  минимальной площади  $F = l \cdot w$ , учитывая ограничения на заданные допустимые расстояния.

Один из способов решения данной задачи — аппроксимация эллипсов дугами окружностей и использование метода, предложенного в [4, 5], который основан на применении свободных от радикалов  $\phi$ -функций, приведенных в [6]. Однако в этом случае полученное приближенное решение в значительной степени зависит от точности аппроксимации эллипсов.

Обзор публикаций (см. например, [7–9]) по этой тематике дает возможность сделать вывод о том, что только в недавней работе Josef Kallrath и Steffen Rebennack [9] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. В этой статье приводится достаточно подробный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. С целью аналитического описания условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [10] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В этом исследовании получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ( $n \leq 4$ ). Однако при  $n > 14$  авторам не удалось получить локально-оптимального решения. В этой связи авторы предложили эвристический *polylithic*-алгоритм для размещения большего числа эллипсов ( $n \leq 100$ ) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины. Публикаций, посвященных размещению эллипсов с учетом допустимых расстояний, найти не удалось.

В данном исследовании рассматривается новый подход, основанный на математическом моделировании отношений между эллипсами (непересечение, расположение на минимально и максимально допустимом расстоянии) с использованием свободных от радикалов квази- $\phi$ -функций (нормализованных, псевдонормализованных квази- $\phi$ -функций). Этот подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования и получать локально оптимальные решения при  $n \leq 120$ . Кроме того, используя квази- $\phi$ -функции, удалось улучшить результаты по времени и значению функции цели для многих примеров ( $5 \leq n \leq 100$ ), приведенных в статье [9].

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В качестве эффективного средства математического моделирования отношений неориентированных замкнутых  $\phi$ -объектов  $A$  и  $B$  с переменными метрическими характеристиками используется новый класс функций — квази- $\phi$ -функции [11].

Полагаем, что по крайней мере один из объектов ограничен. Размеры объектов могут изменяться в соответствии с коэффициентами гомотеции  $\lambda_A, \lambda_B > 0$ . Положение объекта  $A$  определяется вектором трансляции  $v_A = (x_A, y_A)$  и углом поворота  $\theta_A$ . Обозначим  $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$  вектор переменных объекта  $A$ .

*Определение и основные свойства квази-phi-функций.* Квази-phi-функцией для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$  называется всюду определенная, непрерывная по всем переменным  $(u_A, u_B, u')$  функция  $\Phi'^{AB}$ , для которой при фиксированных  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$  функция  $\max_{u' \in U \subset R^n} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$  является phi-функцией объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ . Здесь  $u'$  — вектор вспомогательных переменных.

Квази-phi-функция  $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$  обладает рядом важных свойств:

1. Если  $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') \geq 0$ , то  $\text{int}A(u_A) \cap \text{int}B(u_B) = \emptyset$ . Здесь  $\text{int}(\bullet)$  — внутренность объекта  $\bullet$ .

2. Если  $\Phi^{AP}(u_A, u_P)$  — phi-функция для  $A(u_A)$  и  $P(u_P)$ , а  $\Phi^{BP^*}(u_B, u_P)$  — phi-функция для  $B(u_B)$  и  $P^*(u_P) = R^2 \setminus \text{int}P(u_P)$ , где  $P(u_P) = \{(x, y) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \mu_P \leq 0\}$ ,  $u_P = (\theta_P, \mu_P)$ ,  $\alpha = \cos \theta_P$ ,  $\beta = \sin \theta_P$ , то функция, определенная в виде

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi^{AP}(u_A, u_P), \Phi^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \quad (1)$$

является квази-phi-функцией для пары ограниченных выпуклых объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ . Здесь  $u' = u_P$ .

3. Если  $\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1)$  и  $\Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)$  — квази-phi-функции для пар объектов  $A(u_A)$ ,  $P(u_P)$  и  $B(u_B)$ ,  $P^*(u_P)$ , то функция

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)\} \quad (2)$$

является квази-phi-функцией для пары ограниченных объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ . Здесь  $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$ .

*Определение нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции.* Понятие квази-phi-функции может быть использовано также для моделирования ограничений на допустимые расстояния между объектами. С этой целью используются определения нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции, основываясь на аналогичных терминах для phi-функций [5].

Пусть  $\text{dist}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ ,  $d(a, b)$  — евклидово расстояние между точками  $a$  и  $b$ . Обозначим  $\rho^- > 0$ ,  $\rho^+ > 0$  — заданные минимально и максимально допустимые расстояния между объектами  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ .

Квази-phi-функция  $\tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$  называется нормализованной, если функция  $\max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  является нормализованной phi-функцией.

Таким образом,  $\rho^- \leq \max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB} \leq \rho^+ \Leftrightarrow \rho^- \leq \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$ .

Функция  $\hat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  называется псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ , если функция  $\max_{u' \in U} \hat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  является псевдонормализованной phi-функцией.

Аналогично понятиям псевдонормализованных phi-функций [6] будем различать псевдонормализованные квази-phi-функции  $\hat{\Phi}'_{-}{}^{AB}$  для моделирования ограничений  $\text{dist}(A, B) \geq \rho^-$  и псевдонормализованные квази-phi-функции  $\hat{\Phi}'_{+}{}^{AB}$  для моделирования ограничений  $\text{dist}(A, B) \leq \rho^+$ .

Тогда,  $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow dist(A, B) \geq \rho^{-}$ ,  $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}'_{+}{}^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow dist(A, B) \leq \rho^{+}$ .

Пусть квази-phi-функция имеет вид

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A, u_P), \widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \quad (3)$$

где  $\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A, u_P), \widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B, u_P)$  — нормализованные phi-функции.

Тогда квази-phi-функция  $\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = 2\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P)$  является нормализованной квази-phi-функцией для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ , а квази-phi-функция  $\widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) - 0.5\rho^{-}$  является псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ .

Пусть уравнение  $f^A = 0$  ( $f^B = 0$ ) описывает границу множества  $A$  ( $B$ ), при этом для  $p_1 \in R^2$  ( $p_2 \in R^2$ ),  $f^A(p_1) \geq 0$  ( $f^B(p_2) \geq 0$ ), если  $p_1 \in A$  ( $p_2 \in B$ ), и  $f^A(p_1) < 0$  ( $f^B(p_2) < 0$ ) — в противном случае.

Тогда функция вида

$$\widehat{\Phi}'_{+}{}^{AB}(u_A, u_B, u' = (p_1, p_2)) = \min\{(\rho^{+})^2 - dist^2(p_1, p_2), f^A(p_1), f^B(p_2)\} \quad (4)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для моделирования ограничений  $dist(A, B) \leq \rho^{+}$ .

*Квази-phi-функция для эллипсов.* Пусть  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  — эллипсы с полуосями  $\lambda_i a_i$  и  $\lambda_i b_i$ ,  $a_i > b_i$   $i = 1, 2$ . Переменные параметры эллипса  $E_i(u_i)$  имеют вид:  $u_i = (v_i, \theta_i, \lambda_i)$ , где  $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$  — вектор трансляции,  $\theta_i$  — угол поворота,  $\lambda_i$  — коэффициент гомотетии. Параметр  $t_i$  определяет точку  $(x_i, y_i) = (\lambda_i a_i \cos t_i, \lambda_i b_i \sin t_i)$  на границе эллипса  $E_i$ ,  $0 \leq t_i \leq 2\pi$ ,  $i = 1, 2$ .

После поворота эллипса  $E_i$  на угол  $\theta_i$  и трансляции на вектор  $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$  каждая точка  $(x_i, y_i)$  преобразуется следующим образом:  $(x'_i, y'_i) = v_i + M(\theta_i) \cdot (x_i, y_i)$ , где  $M(\theta_i)$  — матрица поворота, т. е.  $x'_i = x_{E_i} + x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i$ ,  $y'_i = y_{E_i} - x_i \sin \theta_i + y_i \cos \theta_i$ .

Пусть  $u' = (t_1, t_2)$ , тогда квази-phi-функцию для  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  можно представить в следующем виде:

$$\Phi'^{E_1 E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\chi(\theta_1, \theta_2, u'), \chi^+(u_1, u_2, u'), \chi^-(u_1, u_2, u')\}, \quad (5)$$

где  $\chi = -\langle N'_1, N'_2 \rangle = -\alpha'_1 \alpha'_2 - \beta'_1 \beta'_2$ ,  $\alpha'_i = \alpha_i \cos \theta_i + \beta_i \sin \theta_i$ ,  $\beta'_i = -\alpha_i \sin \theta_i + \beta_i \cos \theta_i$ ,  $\alpha_i = \frac{\cos t_i}{\lambda_i a_i}$ ,  $\beta_i = \frac{\sin t_i}{\lambda_i b_i}$ ,  $\chi^+ = \alpha'_1(x_2^+ - x_1) + \beta'_1(y_2^+ - y_1) - 1$ ,  $\chi^- = \alpha'_1(x_2^- - x_1) + \beta'_1(y_2^- - y_1) - 1$ ,  $(x_2^+, y_2^+) = (x'_2, y'_2) + \eta(-\beta'_2, \alpha'_2)$ ,  $(x_2^-, y_2^-) = (x'_2, y'_2) - \eta(-\beta'_2, \alpha'_2)$ ,  $\eta = (\lambda_2 a_2)^2$ .

Квази-phi-функция для  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  может быть определена также в соответствии с формулой (2) в виде

$$\Phi'^{E_1 E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{E_1 P}(u_1, u_P, u'_1), \Phi'^{E_2 P^*}(u_2, u_P, u'_2)\}.$$

Квази-phi-функция для эллипса  $E(u_E)$  и полуплоскости  $P(u_P)$  имеет вид

$$\Phi'^{EP}(u_E, u_P, t) = \min\{\chi(\theta_E, \theta_P, t), \psi_P(x_E^+, y_E^+), \psi_P(x_E^-, y_E^-)\},$$

где  $0 \leq t \leq 2\pi$  — вспомогательный параметр,  $\psi_P(x, y) = \alpha_P x + \beta_P y - 1$ ,  $\chi = -\langle N_P, N'_E \rangle$ ,  $N_P = (\alpha_P, \beta_P)$  — внешний вектор нормали полуплоскости  $P(u_P)$ ,  $N'_E = (\alpha'_E, \beta'_E)$  и  $(x_E^\pm, y_E^\pm)$  определяется аналогично  $(\alpha'_2, \beta'_2)$  и  $(x_2^\pm, y_2^\pm)$  в (4).

Пусть задано минимально допустимое расстояние  $\rho^-$  между эллипсами  $E_1$  и  $E_2$ . Полагаем, что  $\widehat{\Phi}'^{E_1 P}(u_1, u_P)$  и  $\widehat{\Phi}'^{E_2 P^*}(u_2, u_P)$  — псевдонормализованные квази-phi-функции, причем выполняется  $\max_{u_P \in U} \widehat{\Phi}'^{E_1 P}(u_1, u_P) \geq 0$ , если  $dist(E_1, P) \geq 0.5\rho^-$  и  $\max_{u_P \in U} \widehat{\Phi}'^{E_2 P^*}(u_2, u_P) \geq 0$ , если  $dist(E_2, P^*) \geq 0.5\rho^-$ . Тогда функция

$$\widehat{\Phi}'_{-}^{E_1 E_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\widehat{\Phi}'^{E_1 P}(u_1, u_P), \widehat{\Phi}'^{E_2 P^*}(u_2, u_P)\} \quad (6)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для описания условия  $dist(E_1, E_2) \geq \rho^-$ .

Пусть уравнение  $f^{E_1} = 0$  ( $f^{E_2} = 0$ ) описывает границу эллипса  $E_1(u_1)$  ( $E_2(u_2)$ ), при этом для  $p_1 \in R^2$  ( $p_2 \in R^2$ ),  $f^{E_1}(p_1) \geq 0$  ( $f^{E_2}(p_2) \geq 0$ ), если  $p_1 \in E_1(u_1)$  ( $p_2 \in E_2(u_2)$ ), и  $f^{E_1}(p_1) < 0$  ( $f^{E_2}(p_2) < 0$ ) — в противном случае.

$$\widehat{\Phi}'_{+}^{E_1 E_2}(u_{E_1}, u_{E_2}, u') = \min\{(\rho^+)^2 - dist^2(p_1, p_2), f^{E_1}(p_1), f^{E_2}(p_2)\} \quad (7)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для моделирования  $dist(E_1, E_2) \leq \rho^+$ , где

$$u' = (p_1, p_2), f^{E_i}(p_i) = 1 - \frac{x_{p_i}'^2}{a_i'^2} - \frac{y_{p_i}'^2}{b_i'^2},$$

$$(x_{p_i}', y_{p_i}') = M(-\theta_i) \cdot (p_i - v_i), (p_i - v_i) = (x_{p_i} - x_{E_i}, y_{p_i} - y_{E_i}),$$

т. е.  $x_{p_i}' = (x_{p_i} - x_{E_i}) \cos \theta_i - (y_{p_i} - y_{E_i}) \sin \theta_i$ ,  $y_{p_i}' = (x_{p_i} - x_{E_i}) \sin \theta_i + (y_{p_i} - y_{E_i}) \cos \theta_i$ .

*Квази-phi-функция для эллипса и объекта  $\Omega^*$ .* Пусть:  $E(u_1)$  — эллипс с переменными параметрами  $u_1 = (x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1)$ ;  $\Omega$  — прямоугольный контейнер с соответствующими вершинами  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (l, 0)$ ,  $v_3 = (l, w)$ ,  $v_4 = (0, w)$ ;  $\Omega^* = R^2 \setminus int \Omega$ .

Квази-phi-функция для  $E$  и  $\Omega^*$  имеет вид

$$\Phi'^{E\Omega^*}(u) = \min\{\varphi_{11}(v_1), \varphi_{11}(v_2), \varphi_{12}(v_3), \varphi_{12}(v_4), \varphi_{21}(v_2), \varphi_{21}(v_3), \varphi_{22}(v_1), \varphi_{22}(v_4)\}, \quad (8)$$

Здесь  $0 \leq t'_k \leq 2\pi$ ,  $\varphi_{k1} = A_k x + B_k y + C_k - 1$ ,  $\varphi_{k2} = -A_k x - B_k y - C_k - 1$ ,  $A_k = \alpha_k \cdot \cos \theta_1 + \beta_k \cdot \sin \theta_1$ ,  $B_k = -\alpha_k \cdot \sin \theta_1 + \beta_k \cdot \cos \theta_1$ ,  $\alpha_k = \frac{\cos t'_k}{\lambda_k a_1}$ ,  $\beta_k = \frac{\sin t'_k}{\lambda_k b_1}$ ,  $C_k = -A_k x_1 - B_k y_1$ ,  $k = 1, 2$ .

Пусть  $\rho^-$  — минимально допустимое расстояние между эллипсом  $E(u_1)$  и границей области  $\Omega$ . Тогда функция

$$\widehat{\Phi}'_{E\Omega^*} = \min\{\varphi_{11}(p_1^-), \varphi_{11}(p_2^-), \varphi_{12}(p_3^-), \varphi_{12}(p_4^-), \varphi_{21}(p_2^-), \varphi_{21}(p_3^-), \varphi_{22}(p_1^-), \varphi_{22}(p_4^-)\} \quad (9)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для моделирования  $dist(E_1, \Omega^*) \geq \rho^-$ , где  $p_i^-, i = 1, 2, 3, 4$  — вершины объекта  $\Omega^* \oplus C(\rho^-)$ ,  $C(\rho^-)$  — круг радиуса  $\rho^-$ , т. е.  $p_1^- = (\rho^-, \rho^-)$ ,  $p_2^- = (l - \rho^-, \rho^-)$ ,  $p_3^- = (l - \rho^-, w - \rho^-)$ ,  $p_4^- = (\rho^-, w - \rho^-)$ ,  $\oplus$  — символ суммы Минковского.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Прежде всего, определим вектор переменных задачи оптимизации. На данном этапе фиксируем коэффициенты гомотетии эллипсов, полагая, что  $\lambda_i = 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Вектор переменных  $u \in R^\sigma$  определяется так:  $u = (l, w, u_1, u_2, \dots, u_n, \tau)$ , где  $(l, w)$  — вектор метрических характеристик прямоугольного контейнера  $\Omega$ ,  $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$  — вектор параметров размещения эллипса  $E_i$ ,  $i \in I_n$ ,  $\tau$  — вектор дополнительных переменных.

Если не накладываются ограничения на допустимые расстояния, то вектор  $\tau$  имеет вид:  $\tau = t = (t_1^1, t_2^1, \dots, t_1^m, t_2^m, t_1^1, t_2^1, \dots, t_1^n, t_2^n)$ , где  $t_1^k, t_2^k$  — дополнительные переменные для  $k$ -й пары эллипсов, в соответствии с формулой (4),  $k = 1, \dots, m$ ,  $m = \frac{(n-1)n}{2}$ , а  $t_1^i, t_2^i$  — вспомогательные переменные для каждого эллипса  $E_i$ ,  $i \in I_n$ , в соответствии с формулой (8).

Если накладываются ограничения на допустимые расстояния, то  $\tau = (t, u_P, p_1^1, p_2^1, \dots, p_1^m, p_2^m)$ , где  $u_P = (u_P^1, \dots, u_P^m)$ ,  $u_P^k = (\theta_P^k, \mu_P^k)$ ,  $p_1^k = (x_{p_1}^k, y_{p_1}^k)$ ,  $p_2^k = (x_{p_2}^k, y_{p_2}^k)$ , поскольку в этом случае используются псевдонормализованные квази-phi-функции вида (6), (7) и (9). Таким образом, размерность  $\sigma$ -мерного Евклидова пространства  $R^\sigma$  определяется  $\sigma = n^2 + 4n + 2$ , если не накладываются ограничения на допустимые расстояния и  $\sigma = 4n^2 - n + 2$ , если учитываются минимально- и максимально- допустимые расстояния для всех пар эллипсов.

Математическая модель поставленной задачи может быть представлена в виде:

$$\min_{u \in W \subset R^\sigma} F(u), \quad (10)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \Upsilon_{ij} \geq 0, \Upsilon_i \geq 0, i < j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (11)$$

где  $F(u) = l \cdot w$ ,  $\Upsilon_{ij}$  — функция отношений для пары эллипсов  $E_i$  и  $E_j$ ,  $\Upsilon_i$  — функция отношений для эллипса  $E_i$  и объекта  $\Omega^*$ ;

$\Upsilon_{ij} = \Phi'_{ij}$ , если  $\rho_{ij}^- = 0$ ,  $\rho_{ij}^+$  не задано,  $\Upsilon_{ij} = \widehat{\Phi}'_{-ij}$ , если  $\rho_{ij}^- > 0$ ,  $\rho_{ij}^+$  не задано,

$\Upsilon_{ij} = \min\{\Phi'_{ij}, \widehat{\Phi}'_{+ij}\}$ , если  $\rho_{ij}^- = 0$ ,  $\rho_{ij}^+ > 0$ ,  $\Upsilon_{ij} = \min\{\widehat{\Phi}'_{-ij}, \widehat{\Phi}'_{+ij}\}$ , если  $\rho_{ij}^+ \geq \rho_{ij}^- > 0$ ,

$\Upsilon_i = \Phi'_i$ , если  $\rho_i^- = 0$ ,  $\Upsilon_i = \widehat{\Phi}'_{-i}$ , если  $\rho_i^- > 0$ ;

$\Phi'_{ij}$  — квази-phi-функция вида (5) для моделирования условия непересечения эллипсов  $E_i$  и  $E_j$ ;  $\widehat{\Phi}'_{-ij}$  — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (6) для моделирования ограничения на минимально допустимое расстояние  $\rho_{ij}^-$  между эллипсами  $E_i$  и  $E_j$ ;  $\widehat{\Phi}'_{+ij}$  — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (7) для моделирования ограничения на максимально допустимые расстояния  $\rho_{ij}^+$  между эллипсами  $E_i$  и  $E_j$ ;  $\Phi'_i$  — квази-phi-функция вида (8) для моделирования ограничения включения эллипса  $E_i$  в область  $\Omega$ ;  $\widehat{\Phi}'_{-i}$  — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (9) для моделирования ограничения на минимально допустимое расстояние  $\rho_i^-$  между эллипсом  $E_i$  и объектом  $\Omega^*$ .

Задача условной оптимизации (10)–(11) является NP-сложной задачей нелинейного программирования. Граница множества  $W$  образована нелинейными поверхностями. Матрица системы неравенств, которая описывает  $W$ , сильно разрежена и имеет блочную структуру, при этом не может быть сведена к блочно-диагональному виду.

### 3. СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ

Стратегия решения состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Генерируем набор стартовых точек из области допустимых решений задачи (10)–(11), используя алгоритм (SPA), описанный ниже.

Шаг 2. Ищем локальный минимум функции цели  $F(u)$  задачи (10)–(11), стартуя из точек, полученных на шаге 1, применяя процедуру (LOFRT) локальной оптимизации с преобразованием области допустимых решений, описанную ниже.

Шаг 3. Выбираем лучшее локальное решение из полученных на шаге 2, как приближение к глобальному решению задачи (10)–(11).

Важной частью алгоритма локальной оптимизации (Шаг 2) является LOFRT процедура, которая позволяет сократить вычислительные затраты, благодаря сведению задачи (10)–(11) к последовательности подзадач меньшей размерности. Благодаря этому, предложенная стратегия решения задачи (10)–(11) позволяет получать локально оптимальные решения для  $n < 120$ . Поиск локальных экстремумов осуществляется с помощью программы IPOPT [12], доступной на открытом некоммерческом ресурсе (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>).

*Алгоритм построения стартовых точек (SPA).* Для построения стартовой точки  $u^0$ , принадлежащей области допустимых решений  $W$ , применяем следующий алгоритм, основанный на гомотетических преобразованиях эллипсов. Полагаем, что коэффициенты гомотетии  $\lambda_i$  переменные, при этом  $\lambda_i = \lambda$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Алгоритм включает следующие итерации:

1. Определяем начальные размеры контейнера  $\Omega^0$  достаточно большими, чтобы гарантировать размещение всех заданных эллипсов с учетом допустимых расстояний внутри  $\Omega^0$ . Например,  $l^0 = w^0 = 2 \sum_{i=1}^n a_i + (n-1)\rho^-$ ,  $\rho^- = \max_{i,j \in I_n} \rho_{ij}^-$ .

2. Полагаем  $\lambda = \lambda^0 = \frac{\delta}{\max_i a_i}$ , где  $\delta = 0.01(\min_i b_i)$ .
3. Генерируем множество  $n$  непересекающихся кругов радиуса  $\delta$  со случайно выбранным центром  $(x_i^0, y_i^0), i = 1, 2, \dots, n$ , принадлежащих  $\Omega^0$ .
4. Генерируем множество случайно выбранных параметров вращения  $\theta_i^0, i = 1, 2, \dots, n$ .
5. Определяем при фиксированных параметрах  $u_i^0, u_j^0$  для  $i < j = 1, 2, \dots, n$  начальные значения вектора вспомогательных переменных  $\tau^0$  при помощи специальной процедуры оптимизации для задачи поиска  $\max_{u_i \in R^2} \Upsilon_i(u_i^0, u_i')$  и  $\max_{u_{ij} \in R^2} \Upsilon_{ij}(u_i^0, u_j^0, u_{ij}')$ . Для решения вспомогательных задач в случае, если  $\Upsilon \in \{\Phi', \hat{\Phi}'_-\}$ , используем следующую модель:

$$\max \mu, \text{ s.t. } u' \in W'_\mu,$$

где  $W'_\mu = \{(u', \mu) : \Upsilon(u^0, u') \geq \mu\}$ ,  $\mu \in R^1$  — вспомогательная переменная,  $u'$  — вектор вспомогательных переменных и  $u^0$  — вектор фиксированных параметров для квази-phi-функции (соответственно, псевдонормализованной квази-phi-функции).

Таким образом, все квази-phi-функции (псевдонормализованные квази-phi-функции) в точке  $u^0 = (l^0, w^0, u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0, \tau^0)$  дают неотрицательные значения, где  $\tau^0 = (t^0)$  (или, соответственно,  $\tau^0 = (u_P^0, t^0, p_1^{01}, p_2^{01}, \dots, p_1^{0m}, p_2^{0m})$ ).

6. Стартуя из точки  $u^0$ , решаем вспомогательную задачу:

$$\kappa(u'^0) = \max_{u' \in W'} \kappa(u'), \kappa(u') = \lambda, \quad (12)$$

$$W' = \{u' \in R^{\sigma+1} : \Upsilon_{ij} \geq 0, \Upsilon_i \geq 0, i < j = 1, 2, \dots, n, l = l^0, w = w^0, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}, \quad (13)$$

где  $u' = (u, \lambda)$  — вектор переменных,  $\lambda$  — переменный коэффициент гомотеции для всех эллипсов,  $u$  — вектор переменных задачи (10)–(11).

Таким образом, точка  $u'^0 = (l^0, w^0, u_1'^0, u_2'^0, \dots, u_n'^0, \tau'^0, 1)$  глобального максимума задачи (12)–(13) генерирует точку  $u^0 = (l^0, w^0, u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0, \tau^0)$  из области допустимых решений  $W$  задачи (10)–(11).

7. Вектор  $u^0$  рассматриваем в качестве стартовой точки для поиска следующего локального минимума задачи (10)–(11).

*Алгоритм локальной оптимизации с возможной трансформацией области (LOFRT) в задаче упаковки эллипсов.* Пусть  $u^0 \in W$  — одна из стартовых точек, полученных предыдущим методом. Основная идея последующего алгоритма LOFRT заключается в следующем.

Прежде всего, вокруг каждого эллипса  $E_i$  опишем круг  $C_i$  радиуса  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Далее для каждого круга  $C_i$  строим «индивидуальный» прямоугольный контейнер  $\Omega_i \supset C_i \supset E_i$  с равными полусторонами длиной

$a_i + \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , так, что  $C_i$ ,  $E_i$  и  $\Omega_i$  имеют один центр в центре симметрии  $(x_i^0, y_i^0)$  при условии, что стороны  $\Omega_i$  параллельны соответствующим сторонам  $\Omega$ . Здесь  $\varepsilon$  — наперед заданное положительное число. Строим область допустимых решений для задачи оптимизации следующим образом.

Определяем систему ограничений на вектор трансляции  $v_i$  для каждого эллипса  $E_i$  в виде  $\Phi^{C_i\Omega_i^*} = \min\{-x_i + x_i^0 + \varepsilon, -y_i + y_i^0 + \varepsilon, x_i - x_i^0 + \varepsilon, y_i - y_i^0 + \varepsilon\} \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Неравенство  $\Phi^{C_i\Omega_i^*} \geq 0$  эквивалентно системе из четырех линейных неравенств  $-x_i + x_i^0 + \varepsilon \geq 0$ ,  $-y_i + y_i^0 + \varepsilon \geq 0$ ,  $x_i - x_i^0 + \varepsilon \geq 0$ ,  $y_i - y_i^0 + \varepsilon \geq 0$ .

Определяем систему неравенств (дополнительных ограничений на размеры области размещений):  $l \geq l^0 - \varepsilon$ ,  $w \geq w^0 - \varepsilon$ .

Далее формируем область допустимых решений вида

$$W_1 = \{u \in R^{\sigma-\sigma_1} : \Upsilon_{ij} \geq 0, (i, j) \in \Xi_1, \Upsilon_i \geq 0, i \in \Xi_2, \Phi^{C_i\Omega_i^*} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$l \geq l^0 - \varepsilon, w \geq w^0 - \varepsilon\}, \Xi_1 = \{(i, j) : \Upsilon^{\Omega_i\Omega_j} < 0\}, \Xi_2 = \{i : \Upsilon^{\Omega^*\Omega_i} < 0\}.$$

Другими словами, из системы, которая описывает  $W$ , удаляем неравенства с квази-phi- функциями для тех пар эллипсов, у которых индивидуальные контейнеры не пересекаются с учетом минимально допустимых расстояний. При этом добавляем вспомогательные неравенства, описывающие условие включения кругов  $C_i$  в соответствующий индивидуальный контейнер  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , с учетом минимально допустимых расстояний. Такое преобразование позволяет уменьшить число вспомогательных переменных вектора  $\tau$  на  $\sigma_1$ . Затем осуществляем поиск точки локального минимума  $u_{w_1}^*$  подзадачи  $\min_{u_{w_1} \in W_1 \subset R^{\sigma-\sigma_1}} F(u_{w_1})$ . Точка  $u_{w_1}^*$  используется

при построения стартовой точки  $u^{(1)}$  для второй итерации оптимизационной процедуры (заметим, что ранее удаленные вспомогательные переменные должны быть переопределены с помощью процедуры, используемой в SPA, см. пункт 5). На данном этапе вновь определяем все пары эллипсов с непересекающимися индивидуальными контейнерами, формирующие соответствующую подобласть  $W_2$  (аналогично  $W_1$ ) и находим точку локального минимума  $u_{w_2}^* \in W_2$ , которая используется для построения стартовой точки  $u^{(2)}$  для третьей итерации, и т.д.

Итерационная процедура заканчивается, когда  $F(u_{w_k}^*) = F(u_{w_{k+1}}^*)$ , при этом  $u_{w_k}^*$  — точка локального минимума задачи

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^{\sigma-\sigma_k}} F(u_{w_k}),$$

$$W_k = \{u \in R^{\sigma-\sigma_k} : \Upsilon_{ij}^k \geq 0, (i, j) \in \Xi_{k1}, \Upsilon_i^k \geq 0, i \in \Xi_{k2}, \Phi^{C_i\Omega_{ki}^*} \geq 0, i = 1,$$

$$2, \dots, n, l \geq l_{w_k}^* - \varepsilon, w \geq w_{w_k}^* - \varepsilon\}, \Xi_k = \{(i, j) : \Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}} < 0, i > j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Точка  $u^* = u^{(k)*} = (u_{w_k}^*, \tau_k) \in R^\sigma$  является точкой локального минимума задачи (10)–(11), где точка  $u_{w_k}^* \in R^{\sigma-\sigma_k}$  является точкой локального минимума на последней итерации, а  $\tau_k \in R^{\sigma_k}$  — вектор удаленных ранее дополнительных переменных. Это утверждение следует из того факта, что размещение каждой пары эллипсов  $E_i$  и  $E_j$  при  $(i, j) \in \Xi \setminus \Xi_k$  и гарантирует существование вектора  $\tau_k$  дополнительных переменных, при которых  $\widehat{\Phi}'_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in \Xi \setminus \Xi_k$  в точке  $u^{(k)*}$ . Здесь  $\Xi = \{(i, j) : i > j = 1, 2, \dots, n\}$ . Следовательно, значение дополнительных переменных вектора  $\tau_k$  не влияет на значение функции цели, т.е.  $F(u_{w_k}^*) = F(u^{(k)*})$ . В этой связи нет необходимости переопределять значение дополнительных переменных вектора  $\tau_k$  на последней итерации.

Для  $O(n^2)$  пар эллипсов в контейнере алгоритм проверяет квази-phi-функции в общем случае только для  $O(n)$  пар эллипсов (это зависит от размеров эллипсов и величины  $\varepsilon$ ). Таким образом, LOFRT алгоритм позволяет свести задачу (10)–(11) с  $O(n^2)$  неравенствами и пространством решений  $W$  размерности  $O(n^2)$  к последовательности задач с  $O(n)$  неравенствами и пространством решений  $W_k$  размерности  $O(n)$ . Это приводит к значительному сокращению вычислительных ресурсов при решении задач нелинейного программирования.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем ряд примеров, чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода. Эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Athlon 64 X2 5200+, для локальной оптимизации применялась программа IPOPT (<https://projects.coin-or.org/Ipropt>) на основе метода внутренней точки, приведенного в [9]. Полагаем  $\varepsilon = \sum_{i=1}^n b_i/n$  в вычислительных экспериментах, приведенных ниже.

Установленное ограничение по времени составляет 1 час. Для каждого примера вычисляется не менее 10 локальных минимумов.

##### Пример 1.

$n=28$ ,  $\{(a_i, b_i)=(2.2, 1.80), i = 1, \dots, 7\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(2.60, 1.70), i = 8, \dots, 14\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(3.5, 0.7), i = 15, \dots, 21\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(3.6, 2.7), i = 22, \dots, 28\}$ . Размещение эллипсов в прямоугольном контейнере без учета допустимых расстояний, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 1а. Контейнер имеет размеры  $(l^*, w^*) = (22.273763, 24.126932)$  и площадь  $F(u^*) = 537.397581$ . Размещение эллипсов с учетом допустимых расстояний  $\rho^- = 0.5$  в прямоугольном контейнере, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 1б. Контейнер имеет размеры  $(l^*, w^*) = (25.984532, 25.024524)$  и площадь  $F(u^*) = 650.250548$ .

##### Пример 2.

$n=36$ ,  $\{(a_i, b_i)=(2.2, 1.80), i = 1, \dots, 9\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(2.60, 1.70), i = 10, \dots, 18\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(3.5, 0.7), i = 19, \dots, 27\}$ ,  $\{(a_i, b_i)=(3.6, 2.7), i = 28, \dots, 36\}$ . Размещение эллипсов в прямоугольном контейнере без учета допустимых расстояний, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 2а. Контейнер имеет размеры  $(l^*, w^*) = (25.176786, 27.380105)$  и площадь

$F(u^*) = 689.343044$ . Размещение эллипсов с учетом допустимых расстояний  $\rho^- = 0.5$  в прямоугольном контейнере, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 26. Контейнер имеет размеры  $(l^*, w^*) = (27.498755, 30.282542)$  и площадь  $F(u^*) = 832.732196$ .

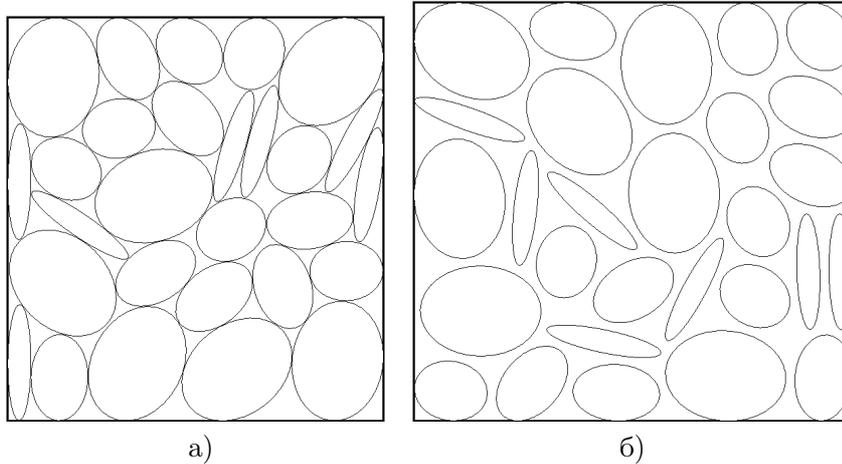


Рис. 1. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 1: (а) — без учета допустимых расстояний между эллипсами, (б) — с учетом минимально допустимых расстояний между эллипсами

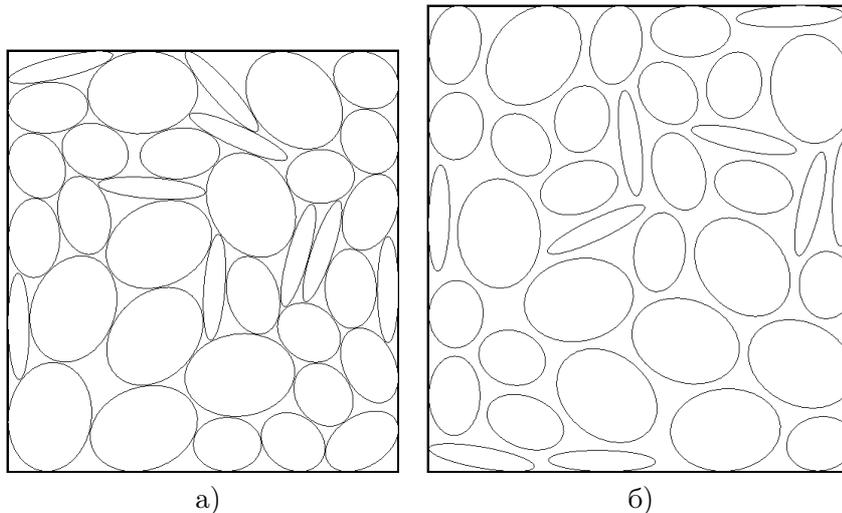


Рис. 2. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 2: (а) — без учета допустимых расстояний между эллипсами, (б) — с учетом минимально допустимых расстояний между эллипсами

Для задачи упаковки эллипсов без учета допустимых расстояний предложенный алгоритм позволяет улучшить результаты по значению функции цели для многих примеров, приведенных в работе [4]: в частности, для

небольших наборов эллипсов (от 5 до 20) — на 1%–2%, для больших наборов эллипсов (от 14 до 100) — на 8%–9%. По времени решения получены рекорды для всех наборов данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wascher G., Hauner H. and Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. — 2007. — V. 183, Issue 3. — P. 1109–1130.
2. Bennell J. and Oliveira J. The geometry of nesting problems: A tutorial // *European J. Operational Research*. — 2008. — V. 184, Issue 2. — P. 397–415.
3. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L. J. The complexity of cutting complexes // *Discrete & Computational Geometry*. — 1989. — V. 4, Issue 1. — P. 139–181.
4. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry: Theory and Applications*. — 2010. — V. 43, Issue 5. — P. 535–553.
5. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T. and Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects // *Journal of Global Optimization*. — 2014. DOI: 10.1007/s10898-014-0192-0. (Has been accepted for publication).
6. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // *Advances in Operations Research*. Article ID 346358. — 2012. — V. 2012. — 26 pages. — doi:10.1155/2012/346358.
7. Birgin E. G., Bustamante L. H., Callisaya H. F., Mart J. M. Packing circles within ellipses // *International transactions in operational research*. — 2013. — V. 20, Issue 3. — P. 365–389.
8. Xu W. X., Chen H. S., Lv Z. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles // *Physica A*. — 2011. — V. 390, № 13. — P. 2452–2467.
9. Josef K. and Steffen R. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles // *Journal of Global Optimization*. — V. 59, Issue 2–3. — 2014. — P. 405–437.
10. Kallrath J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. — V. 43, Issue 2–3. — 2009. — P. 299–328.
11. Стоян Ю. Г., Панкратов А. В., Романова Т. Е., Чернов Н. И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов // *Доповіді Національної академії наук України*. — № 9. — 2014. (Прийнято до опублікування).
12. Wachter A., Biegler L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Mathematical Programming*. — V. 106, Issue 1. — 2006. — P. 25–57.

ОТДЕЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ ИМ. А. Н. ПОДГОРНОГО НАН УКРАИНЫ, УЛ. ДМ. ПОЖАРСКОГО, 2/10, Г. ХАРЬКОВ, 61046, УКРАИНА.

УДК 519.2:519.6

## ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

А. О. ПАШКО

**РЕЗЮМЕ.** Вивчаються строго субгауссові випадкові процеси, що допускають зображення у вигляді стохастичних інтегралів. Будуються моделі таких процесів у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделей гауссових випадкових процесів в нормі простору неперервних функцій.

### ВСТУП

В роботі досліджуються строго субгауссові випадкові процеси, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів. Моделі випадкових процесів будуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. Ці моделі наближають випадкові процеси із заданими точністю і надійністю в просторі неперервних функцій. При отриманні результатів істотно використовувались роботи [1–2]. В роботах [3–5] розглядалися деякі модифікації стохастичних інтегралів, їх властивості та умови рівномірної збіжності. Більш детально з методами моделювання випадкових процесів та полів можна познайомитись в роботах [6–10].

### 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

Нехай  $(\Omega, \mathbf{B}, P)$  — стандартний ймовірносний простір.

**Означення 1.** Випадкова величина  $\xi$  називається субгауссовою, якщо існує таке  $a \geq 0$ , що для всіх  $\lambda \in R$  виконується нерівність

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Простір субгауссових величин  $Sub(\Omega)$  є банаховим відносно норми

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \left[ \frac{2 \ln E \exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Означення 2.** Сім'я випадкових величин  $\Theta \subset Sub(\Omega)$  називається строго субгауссовою, якщо для кожної скінченної або зліченної множини випадкових величин  $\{\xi_i, i \in I\} \subseteq \Theta$  та всіх  $\lambda \in R$  виконується співвідношення

$$\tau^2\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) = E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2.$$

Нехай  $(T, \rho)$  — компактний метричний простір.

**Означення 3.** Випадковий процес  $X(t), t \in T$  називається строго субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин  $\{X(t), t \in T\}$  є строго субгауссовою.

Відомості з теорії субгауссових випадкових величин та процесів містяться в [11].

Нехай  $X(t)$  — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Нехай існує така неперервна монотонно неспадна функція  $\sigma(h)$ , що  $\sigma(h) > 0, h > 0, \sigma(h) \rightarrow 0$ , коли  $h \rightarrow 0$ , що виконується умова

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} (E(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h). \quad (1)$$

З умови (1) випливає, що процес  $X(t)$  неперервний за ймовірністю. Нехай  $\theta$  — довільна точка з  $T$ . Позначимо  $\gamma_\theta = (E|X(\theta)|^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\chi = \sigma(\sup_{t \in T} \rho(t, \theta))$ . Нехай  $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\chi p^k), k = 0, 1, 2, \dots$  та  $0 < p < 1$ .  $V_{\varepsilon_k}$  — множина центрів мінімального покриття простору замкненими кулями радіуса  $\varepsilon_k > 0$ , а множина  $V_{\varepsilon_0}$  складається з точки  $\theta$ ,  $N(\varepsilon_k)$  — число точок в множині  $V_{\varepsilon_k}$ . Нехай  $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ . Множину  $V$  можна розглядати як множину сепарабельності процесу  $X(t)$ .

ОЦІНКИ СУПРЕМУМА СУБГАУССОВОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Має місце

**Теорема 1.** Нехай  $X(t)$  — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Якщо

$$\int_0^p \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty,$$

то для будь-якого  $\lambda > 0$  та  $0 < p < 1$  має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| > x\right\} \leq \quad (2)$$

$$\leq 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(\frac{\gamma_\theta^2}{1-p} + \frac{\chi^2}{p(1-p)^2}\right)}\right\} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}x \int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du}{\gamma_\theta^2 p + \frac{\chi^2}{1-p}}\right\}.$$

*Доведення.* Побудуємо відображення  $\alpha_k(t)$  таким чином. Нехай  $t \in T$ , тоді  $\alpha_k(t)$  це точка з  $V_{\varepsilon_k}$  така, що  $\rho(t, \alpha_k(t)) \leq \varepsilon_k$ . Якщо  $t \in V_{\varepsilon_k}$ , то  $\alpha_k(t) = t$ . Для довільної точки  $t \in V$ , аналогічно, як і в роботах [1–2], доводиться нерівність

$$\sup_{t \in T} |X(t)| = \sup_{t \in V} |X(t)| \leq |X(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} |X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))|.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, для всіх  $\lambda > 0$  отримаємо співвідношення

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\right\} \leq \quad (3)$$

$$\leq 2 \exp\left\{\frac{\lambda^2 \gamma_\theta^2 g_0}{2}\right\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 g_k^2 \sigma^2(\varepsilon_{k-1})}{2g_k}\right\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\},$$

де  $\{g_k\}$  задовольняють нерівності  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g_k} \leq 1$ .

Покладемо

$$g_0 = \frac{1}{1-p}, \quad g_k = \frac{\sqrt{2}}{\lambda \chi p^{k-1}} \left( \frac{\lambda^2 \chi^2}{2(p(1-p))^2} + \ln(N(\varepsilon_k)) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При такому виборі  $\{g_k\}$  маємо  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g_k} \leq 1$ . Оскільки  $\sigma^2(\varepsilon_k) = \chi^2 p^{2k}$  та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 g_k^2 \chi^2 p^{2k-2}}{2g_k} = \frac{\lambda^2 \chi^2}{2p^2(1-p)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k},$$

то із (3) випливає нерівність

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\right\} &\leq \\ &\leq 2 \exp\left\{\frac{\lambda^2 \gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\} \exp\left\{\frac{\lambda^2 \chi^2}{2p(1-p)^2}\right\} \exp\left\{2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \chi p^{k-1} \ln(N(\varepsilon_k))}{\sqrt{2}} \left( \frac{\lambda^2 \chi^2}{2p^2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_k)) \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\lambda \chi}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} (\ln(N(\varepsilon_k)))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Через те, що  $\sigma(h)$  — монотонно неспадна функція, а  $N(\varepsilon_k)$  незбільшується при зростанні  $\varepsilon_k$ , то  $\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))$  монотонно незростаюча функція. Має місце оцінка

$$\chi p^{k-1} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\chi p^k))) \leq \frac{1}{p(1-p)} \int_{\chi p^{k+1}}^{\chi p^k} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du.$$

Отже,

$$\frac{\lambda \chi}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} (\ln(N(\varepsilon_k)))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}p(1-p)} \int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du$$

і нерівність (3) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\right\} &\leq 2 \exp\left\{\frac{\lambda^2 \gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\} \exp\left\{\frac{\lambda^2 \chi^2}{2p(1-p)^2}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{\sqrt{2}\lambda}{p(1-p)} \int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

За нерівністю Чебишева

$$P\{\sup_{t \in T} |X(t)| > x\} \leq E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\right\} \exp\{-\lambda x\},$$

тобто

$$P\{\sup_{t \in T} |X(t)| > x\} \leq 2 \exp\left\{\frac{\lambda^2 \gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\} \exp\left\{\frac{\lambda^2 \chi^2}{2p(1-p)^2}\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{\sqrt{2}\lambda}{p(1-p)} \int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du\right\} \exp\{-\lambda x\}.$$

Виберемо  $\lambda = \frac{x}{A_p}$ , де

$$A_p = \frac{\gamma_\theta^2}{1-p} + \frac{\chi^2}{p(1-p)^2}, \quad (5)$$

і отримаємо оцінку (2). □

**Наслідок 1.** Якщо виконуються умови теореми 1, то для  $x > D_p$  має місце нерівність

$$P\{\sup_{t \in T} |X(t)| > x\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(x - D_p)^2}{2A_p}\right\} \quad (6)$$

де

$$D_p = \frac{\sqrt{2}}{p(1-p)} \int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du,$$

$A_p$  визначено в (5).

*Доведення.* Якщо в(4) покласти  $\lambda = \frac{x - D_p}{A_p}$ , то при  $x > D_p$  отримаємо необхідну нерівність. □

Позначимо  $\gamma_0 = \sup_{t \in T} (E(X(t))^2)^{\frac{1}{2}}$  і виберемо  $\beta > 0$  — деяке довільне число таке, що  $\beta \leq \sigma(\inf_{s \in T} \sup_{t \in T} \rho(t, s))$ .

**Теорема 2.** Нехай  $X(t)$  — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Якщо виконуються умови теореми 1, то для будь-якого  $\lambda > 0$  та  $0 < p < 1$  при  $x > D_{1_p}$  має місце нерівність

$$P\{\sup_{t \in T} |X(t)| > x\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(x - D_{1_p})^2}{2A_{1_p}}\right\}, \quad (7)$$

де

$$A_{1_p} = \frac{\gamma_0^2}{1-p} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2}, \\ D_{1_p} = \sqrt{2} \left( \gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}} N(\sigma^{(-1)}(p\beta)) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right).$$

*Доведення.* Теорема доводиться аналогічно з теоремою 1. Використовуючи відображення  $\alpha_k(t)$ , доводиться нерівність

$$\sup_{t \in T} |X(t)| = \sup_{t \in V} |X(t)| \leq \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} |X(u)| + \sum_{k=2}^{\infty} \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} |X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))|.$$

За нерівністю Гельдера, для всіх  $\lambda > 0$  отримаємо співвідношення

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\right\} \leq \quad (8)$$

$$\leq 2 \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \gamma_0^2}{2} g_1 + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g_k^2 \beta^2 p^{2k-2}}{g_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k} \right\},$$

де  $\{g_k\}$  задовольняють нерівність  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g_k} \leq 1$ .

Покладемо

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}}{\lambda \gamma_0} \left( \frac{\lambda^2 \gamma_0^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_1)) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\lambda \beta p^{k-1}} \left( \frac{\lambda^2 \beta^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_k)) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

При такому виборі  $\{g_k\}$  маємо  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g_k} \leq 1$ . Оскільки

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{g_k^2 \beta^2 p^{2k-2}}{g_k} = \frac{\lambda^2 \beta^2}{2(1-p)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{g_k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}$$

та

$$\frac{\lambda^2 \gamma_0^2}{2} g_1 = \frac{\lambda^2 \gamma_0^2}{2g_1(1-p)^2} + \frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1},$$

то із (8) впливає нерівність

$$E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} |X(t)| \right\} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2(1-p)} \left( \gamma_0^2 + \frac{p\beta^2}{1-p} \right) + 2 \frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k} \right\}.$$

Так як і при доведенні теореми 1, отримаємо

$$\exp \left\{ 2 \frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k} \right\} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ \sqrt{2} \lambda \gamma_0 \ln(N(\varepsilon_1)) \left( \frac{\lambda^2 \gamma_0^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_1)) \right)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2} \sum_{k=2}^{\infty} \lambda \beta p^{k-1} \ln(N(\varepsilon_k)) \left( \frac{\lambda^2 \beta^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_k)) \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ \sqrt{2} \lambda \gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}}(N(\varepsilon_1)) + \sqrt{2} \sum_{k=2}^{\infty} \lambda \beta p^{k-1} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\varepsilon_k)) \right\} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ \sqrt{2} \lambda \gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(p\beta))) + \frac{\sqrt{2} \lambda}{p(1-p)} \int_0^{p^2 \beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right\}.$$

Покладемо  $\lambda = \frac{x-D1_p}{A1_p}$ . Скористаємось нерівністю Чебишева, нерівністю (8) та останньою нерівністю і отримаємо необхідну оцінку (7).  $\square$

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Нехай  $X(t), t \in T$  — випадковий процес, що зображується у вигляді

$$X(t) = \sum_{r=1}^N \int_0^\infty f_r(t, u) d\xi_r(u), \quad (9)$$

де  $\xi_r(u), r = 1, \dots, N$  — випадкові процеси з незалежними приростами, підпорядковані мірі  $\nu$ , а функції  $f_r(t, u)$  при кожному  $u > 0$  неперервні по  $t$ , і при кожному  $t \in T$  належать класу  $L_2(R, \nu)$ .

**Означення 4.** Нехай  $\xi_r = \{\xi_r(u), u \geq 0\}, r = 1, \dots, N$ , сумісно строго субгауссові випадкові процеси,  $E|\xi_r(t)\xi_r(s)| < \infty, t, s \in T, r = 1, \dots, N$ , а функції  $f_r = \{f_r(t, u), t \in T, u \geq 0\}$  такі, що  $f_r(t, u)$  неперервна по  $t$  і неперервно диференційована по  $u \geq 0$ . Такий процес  $X$  називається регулярним строго субгауссовим процесом.

Нехай  $X = \{X(t), t \in T\}$  — регулярний строго субгауссовий випадковий процес, що має зображення (9), де  $\xi_r, r = 1, \dots, N$  — сумісно строго субгауссові випадкові процеси. Для таких процесів розроблено алгоритм знаходження параметрів моделі, що наближає процес із заданими точністю та надійністю в рівномірній метриці.

**Означення 5.** Нехай  $\Lambda > 0, D_{\Lambda, n}$  — розбиття інтервалу  $[0, \Lambda], D_{\Lambda, n}: 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = \Lambda$ . Випадковий процес  $X_n(t, \Lambda), t \in T$ , де

$$X_n(t, \Lambda) = \sum_{r=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t, u_i)(\xi_r(u_{i+1}) - \xi_r(u_i))$$

називається апроксимаційною моделлю процесу  $X(t)$  ( $A$ - моделлю).

Тобто,  $A$ -модель процесу  $X(t)$  моделюється у вигляді

$$\sum_{r=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t, u_i) \zeta_{r,i},$$

де  $\zeta_{r,i}, r = 1, 2, \dots, N, i = 0, \dots, n-1$ , — сім'я строго субгауссових випадкових величин із відомими коваріаціями  $E\zeta_{r,i}\zeta_{r_1,i_1}$ .

При  $x > 0$  виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{t \in T} |X(t) - X_n(t, \Lambda)| > x\right\} \leq \inf_{0 \leq \delta \leq 1} (G_1(x\delta) + G_2(x(1-\delta))),$$

де

$$X_\Lambda(t) = \sum_{r=1}^N \int_0^\Lambda f_r(t, u) d\xi_r(u),$$

$$G_1(x) = P\left\{\sup_{t \in T} |X_\Lambda(t) - X_n(t, \Lambda)| > x\right\},$$

$$G_2(x) = P\left\{\sup_{t \in T} |X_\Lambda(t) - X(t)| > x\right\}.$$

Модель  $X_n(t, \Lambda) \in A$ -моделлю, що наближає процес  $X(t)$  з точністю  $x > 0$  і надійністю  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  в рівномірній метриці, якщо область  $\Lambda$  та її розбиття  $D_{\Lambda, n}$  вибрані так, що виконується нерівність

$$\inf_{0 \leq \delta \leq 1} (G_1(x\delta) + G_2(x(1 - \delta))) \leq \alpha.$$

Для оцінювання ймовірності  $G_1(x)$  доцільно використовувати теорему 1, а для оцінювання ймовірності  $G_2(x)$  доцільно використовувати теорему 2. Для отримання необхідних оцінок потрібно оцінити величини

$$E(X_{\Lambda}^{\infty}(t))^2 = \sum_{r=1}^N \int_{\Lambda}^{\infty} f_r^2(t, u) d\nu(u)$$

та

$$E(X_{\Lambda}^{\infty}(t) - X_{\Lambda}^{\infty}(s))^2 = \sum_{r=1}^N \int_{\Lambda}^{\infty} (f_r(t, u) - f_r(s, u))^2 d\nu(u),$$

а також величини

$$E(Y_n(t))^2 = \sum_{r=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (f_r(t, u_i) - f_r(t, u))^2 d\nu(u),$$

та

$$E(Y_n(t) - Y_n(s))^2 = \sum_{r=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (f_r(t, u_i) - f_r(t, u) - f_r(s, u_i) + f_r(s, u))^2 d\nu(u),$$

де

$$Y_n(t) = X_{\Lambda}(t) - X_n(t, \Lambda).$$

Нехай  $T$  це деякий відрізок  $[a, b]$  із  $R$ . В цьому випадку

$$N(\varepsilon) \leq \frac{b-a}{\varepsilon} + 1.$$

Якщо  $\theta$  — довільна фіксована точка в  $T$ , а  $\chi = \sigma(\sup_{t \in T} \rho(t, \theta))$ , то при  $u < \chi$  має місце  $\sigma^{(-1)}(u) \leq \sigma^{(-1)}(\chi) \leq b - a$ . Оскільки  $\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)} \geq 1$  при  $u \leq \chi$ , то

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{2(b-a)}{\sigma^{(-1)}(u)}.$$

В якості  $\sigma(u)$  можна розглядати функції  $\sigma(u) = Cu^{\gamma}$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  або  $\sigma(u) = C(\ln(\frac{a}{u}))^{-\gamma}$ ,  $\gamma > \frac{1}{2}$ .

Розглянемо приклад. Нехай  $X = \{X(t), t \in R\}$  стаціонарний центрований випадковий процес,  $EX(t + \tau)X(t) = B(\tau) = \int_0^{\infty} \cos u\tau dF(u)$ , де  $F(u)$  — спектральна функція процесу. Випадковий процес  $X$  має зображення.

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos(tu) d\xi_1(u) + \int_0^{\infty} \sin(tu) d\xi_2(u),$$

де  $\xi_1(u)$  та  $\xi_2(u)$  центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для довільних  $0 \leq u_1 < u_2$

$$E(\xi_1(u_2) - \xi_1(u_1))^2 = E(\xi_2(u_2) - \xi_2(u_1))^2 = F(u_2) - F(u_1).$$

Якщо  $\xi_1(u)$  та  $\xi_2(u)$  сумісно строго субгауссові вимірні випадкові процеси, то  $X(t)$  — регулярний строго субгауссовий випадковий процес.

Тоді  $A$ -модель такого процесу має вигляд

$$X_n(t, \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} (\cos(tu_i)\xi_{1i} + \sin(tu_i)\xi_{2i}), \quad (10)$$

де  $\xi_{1i}, \xi_{2i}, i = 0, 1, \dots, n-1$ , — некорельовані або незалежні строго субгауссові величини такі, що  $E\xi_{1i} = E\xi_{2i} = 0$  та  $E\xi_{1i}^2 = E\xi_{2i}^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$ .

Оцінимо необхідні величини.

$$\begin{aligned} E(Y_n(t))^2 &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\cos(ut) - \cos(u_it))^2 dF(u) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\sin(ut) - \sin(u_it))^2 dF(u) \leq \\ &\leq 4 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \sin^2\left(\frac{t(u - u_i)}{2}\right) dF(u) \leq t^2 \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^2 F(\Lambda), \\ E(Y_n(t) - Y_n(s))^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\cos(u_it) - \cos(ut) - \cos(u_is) + \cos(us))^2 dF(u) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\sin(u_it) - \sin(ut) - \sin(u_is) + \sin(us))^2 dF(u) \leq \\ &\leq \frac{(t-s)^2}{4} \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^2 (1 + \Lambda^2 T^2) F(\Lambda). \end{aligned}$$

В якості  $\sigma(h)$  розглянемо функцію  $\sigma(h) = Ch$ , де  $C = \frac{\Lambda}{2n} ((1 + \Lambda^2 T^2) F(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$ , а ймовірність  $G_1(x\delta)$  можна оцінити за теоремою 1.

В якості  $\theta$  можна вибрати точку  $t = 0$ . Тоді  $\gamma_\theta^2 = 0$ ,  $\chi = \sigma(T) = CT$ .

Для оцінки ймовірності  $G_2(x(1 - \delta))$  скористаємось теоремою 2.

$$\begin{aligned} E(X_\Lambda^\infty(t))^2 &= \int_\Lambda^\infty \cos^2(ut) dF(u) + \int_\Lambda^\infty \sin^2(ut) dF(u) = \\ &= \int_\Lambda^\infty dF(u) = F(\infty) - F(\Lambda), \end{aligned}$$

Отже,  $\beta$  — будь-яке число таке, що  $\beta < F(\infty) - F(\Lambda)$ .

$$\begin{aligned} E(X_\Lambda^\infty(t) - X_\Lambda^\infty(s))^2 &= \\ &= \int_\Lambda^\infty (\cos(ut) - \cos(us))^2 dF(u) + \int_\Lambda^\infty (\sin(ut) - \sin(us))^2 dF(u) \leq \\ &\leq 4 \int_\Lambda^\infty \sin^2\left(\frac{u(t-s)}{2}\right) dF(u). \end{aligned}$$

В якості  $\sigma(h)$  можна розглянути

$$\sigma(h) = 2 \left( \int_\Lambda^\infty \sin^2\left(\frac{h}{2}u\right) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Задачі статистичного моделювання випадкових процесів використовуються при розв'язуванні задач атмосферної турбулентності, неоднорідностях земної поверхні, метеорології, обчисленні інтегралів [8–10]. Представляє інтерес використання методів статистичного моделювання при розв'язуванні задач фінансової та актуарної математики, математичної статистики. Саме ці задачі і лягли в основу для подальших досліджень.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів I. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 61. — С. 61–74.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів II. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 62. — С. 61–74.
3. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1989. — 40. — С. 37–44.
4. Пашко А. А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов. // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1992. — 46. — С. 124–132.
5. Пашко А. А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, Вып. 4. — С. 793–798.
6. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових полів. — К.: Задруга, 2007. — 232 с.
7. Пашко А. О. Чисельне моделювання субгауссових випадкових полів. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 2006. — Вип. №1. — С. 35–39.
8. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — Москва:Наука, 1982. — 296 с.
9. Prigarin S. M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht:VSP, 2001. — 195 p.
10. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск, 2005. — 259 с.
11. Будыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К.:ТВиМС, 1998. — 289 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 01.12.2013

УДК 519.71

## ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЛИПСОВ ПЕТУНИНА

М. В. Присяжная

**РЕЗЮМЕ.** Предложен новый метод фильтрации изображений с использованием эллипсов Петунина. Для выявления преимуществ и недостатков нового метода проведено его сравнение с методом фильтрации изображений на основе маргинального ранжирования.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В реальной жизни изображение, которое по той или иной причине должно быть обработано, не попадает в руки исследователя в идеальном состоянии. Достаточно распространенной является ситуация, когда препятствием выступает шум (помехи, артефакты и т.п.). Кроме того, возможны ситуации, когда на изображении информативными являются лишь некоторые его части. Тогда препятствием становятся другие, неинформативные для данной задачи, части изображения.

В данной работе решается задача отделения изображения ядра клетки, окрашенного по Фельгену, от окружающего его фона. В ходе реакции Фельгена все содержимое клетки растворяется и становится бежевым фоном, а ДНК ядра окрашивается в розовый цвет и образует компактную область. Подобные задачи обработки медицинских изображений являются традиционными: существует много методов фильтрации изображений для решения поставленной задачи, например, метод Оцу, фильтры Лапласа, Собеля и т.д. Особый интерес вызывает метод маргинального упорядочения наборов точек (пикселей), образующих исследуемые изображения. В данной работе рассмотрено новое сочетание уже разработанных методик для решения поставленной задачи — применение метода на основе эллипсов Петунина для фильтрации изображения клетки. Для сравнения наряду с новым методом в работе реализуется классический метод маргинального упорядочения.

### 2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Задача выделения ядра в общем случае сводится к задаче выделения границ (контуров) [1], которая чаще всего решается путем применения к изображениям различных фильтров, в результате работы которых получают контурные изображения.

**Фильтр Лапласа.** Для выделения контуров может использоваться дискретный оператор Лапласа, который также называют лапласианом [2]. Лапласиан двумерной функции  $f(x, y)$  является производной второго порядка, которая определяется выражением  $\nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Для выделения контуров изображений оператор применяется к окрестностям  $3 \times 3$ , на которых исчисляется сумма перепадов по отношению к центральному пикселю.

**Фильтр Собеля.** В области обработки изображений очень часто используется фильтр Собеля. Он представляет собой дискретный дифференциальный оператор, который вычисляет приближенное значение градиента яркости изображения [3]. Результатом применения фильтра Собеля в каждой точке изображения является или вектор градиента яркости, или его норма. Оператор Собеля основывается на свертке изображения небольшими отдельными целочисленными фильтрами в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Благодаря поиску градиента в каждой точке изображения, находится направление наибольшего роста яркости и величина ее изменения в этом направлении. Контур изображения обнаруживаются по величине изменения яркости изображения.

**Адаптивная пороговая обработка изображений.** Класс методов пороговой обработки изображений основывается на предварительном выборе так называемого порога яркости, который нужен для разбиения изображения на два кластера. Задача усложняется тем, что каждое изображение имеет свой собственный порог, поскольку среднее значение яркости различных изображений очень отличается.

Наиболее известной и распространенной в использовании на сегодняшний день является пороговая обработка по методу Оцу [4]. Этот метод используется для выполнения пороговой бинаризации полутоновых изображений. Алгоритм предполагает наличие в изображении двух классов пикселей (основных и фоновых) и ищет оптимальный порог, который делит их на два класса таким образом, чтоб их внутриклассовая дисперсия была минимальной. Описанный принцип может быть использован для выделения ядер, рассматривая два кластера: пиксели ядра и пиксели фона.

**Метод маргинального ранжирования.** Метод маргинального ранжирования является одним из классических методов фильтрации изображений.

В данной работе применяется маргинальный метод, определенный на основе трех различных центральных точек каждой из компонент изображения [5].

1. Среднее значение: вычисляется как среднее значение по соответствующей компоненте заданного набора точек.
2. Медиана: вычисляется как срединное значение отсортированного по возрастанию набора точек по соответствующей компоненте.
3. Срединное значение: точка, которая находится посередине заданного вектора набора точек по соответствующей компоненте.

Пусть рассматривается множество точек  $M_n = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$ , где  $\vec{x}_n = (x_n, y_n, z_n) \in R^3$ .

Обозначим указанные выше центральные точки как  $x_{\alpha_i}$  (среднее значение),  $x_{\beta_i}$  (медиана) и  $x_{\gamma_i}$  (срединное значение), где индекс  $i$  означает одну из трех компонент изображения, которое рассматривается.

Введем следующие функции для каждой из трех компонент изображения:

$$\begin{aligned} f_x(x_i) &= \|x_{\alpha_i} - x_i\| + \|x_{\beta_i} - x_i\| + \|x_{\gamma_i} - x_i\| \\ f_y(y_i) &= \|x_{\alpha_i} - y_i\| + \|x_{\beta_i} - y_i\| + \|x_{\gamma_i} - y_i\| \\ f_z(z_i) &= \|x_{\alpha_i} - z_i\| + \|x_{\beta_i} - z_i\| + \|x_{\gamma_i} - z_i\|, \end{aligned}$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма.

Осуществив упорядочение точек заданного набора в соответствии со значениями введенных функций по каждой из компонент изображения, можно получить вариационный ряд  $\vec{x}_{(1)} \prec \vec{x}_{(2)} \prec \dots \prec \vec{x}_{(n)}$ .

### 3. Эллипсоид Петунина [6]

Не ограничивая общности, опишем алгоритм построения эллипсоида Петунина на плоскости, а затем перенесем его в пространство  $R^m$  при  $m > 2$ . Исходными данными для алгоритма является множество многомерных точек  $M_n = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ , где  $\vec{x}_n = (x_n, y_n)$ .

**Эллипс Петунина.** На первом этапе построим выпуклую оболочку точек  $M_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ . Найдем вершины выпуклой оболочки  $(x_k, y_k)$  и  $(x_l, y_l)$ , лежащие на диаметре выпуклой оболочки, т.е. вершины, наиболее удаленные друг от друга. Соединим точки  $(x_k, y_k)$  и  $(x_l, y_l)$  отрезком  $L$ . Найдем вершины выпуклой оболочки  $(x_r, y_r)$  и  $(x_q, y_q)$ , наиболее удаленные от  $L$ . Соединим точки  $(x_r, y_r)$  и  $(x_q, y_q)$  отрезками  $L_1$  и  $L_2$ , параллельными к отрезку  $L$ . Проведем через точки  $(x_k, y_k)$  и  $(x_l, y_l)$  отрезки  $L_3$  и  $L_4$ , перпендикулярные к отрезку  $L$ . Пересечения отрезков  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  образуют прямоугольник  $\Pi$ , стороны которого имеют длины  $a$  и  $b$ .

Будем считать, что  $a \leq b$ . Переведем левый нижний угол прямоугольника в начало новой системы координат с осями  $Ox'$  и  $Oy'$  с помощью поворота и параллельного переноса. Точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  перейдут в точки  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_n, y'_n)$ . Отобразим точки  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_n, y'_n)$  в точки  $(\alpha x'_1, y'_1), (\alpha x'_2, y'_2), \dots, (\alpha x'_n, y'_n)$ , где  $\alpha = \frac{a}{b}$ . В результате получим совокупность точек, лежащих в квадрате  $S$ .

Вычислим центр  $(x'_0, y'_0)$  квадрата  $S$  и найдем расстояния  $r_1, r_2, \dots, r_n$  от него до каждой точки  $(\alpha x'_1, y'_1), (\alpha x'_2, y'_2), \dots, (\alpha x'_n, y'_n)$ . Наибольшее число  $R = \max(r_1, r_2, \dots, r_n)$  определяет круг с центром в точке  $(x'_0, y'_0)$  и радиусом  $R$ . В итоге все точки  $(\alpha x'_1, y'_1), (\alpha x'_2, y'_2), \dots, (\alpha x'_n, y'_n)$  оказываются внутри круга с радиусом  $R$ . Растягивая этот круг вдоль оси  $Ox'$  с коэффициентом  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  и выполняя обратные преобразования поворота и переноса, получим эллипс Петунина.

**Эллипсоид Петунина.** В  $m$ -мерном пространстве на первом шаге найдем две вершины выпуклой оболочки  $\vec{x}_k$  и  $\vec{x}_l$ , лежащие на ее диаметре.

Соединим точки  $\vec{x}_k$  и  $\vec{x}_l$  отрезком  $L$ . Повернем и перенесем систему координат, так чтобы диаметр выпуклой оболочки лежал на оси  $Ox'_1$ . Построим наименьший прямоугольный параллелепипед, содержащий точки  $\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n$ .

Сжимая прямоугольный параллелепипед, отобразим точки в гиперкуб. Найдем центр  $\vec{x}_0$  гиперкуба и вычислим расстояния  $r_1, r_2, \dots, r_n$  от него до каждой точки. Найдем наибольшее число  $R = \max(r_1, r_2, \dots, r_n)$  и построим гипершар с центром в точке  $\vec{x}_0$  и радиусом  $R$ . Применяя к этому гипершару обратные операции растягивания, поворота и переноса, получим эллипсоид Петунина в  $m$ -мерном пространстве.

**Теорема 1** [7]. Если векторы  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  являются независимыми и одинаково распределенными случайными векторами из генеральной совокупности  $G$ ,  $E_n$  — доверительный эллипсоид, содержащий точки  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ , и  $\vec{x}_{n+1} \in G$ , то  $P(\vec{x}_{n+1} \in E_n) = \frac{n}{n+1}$ .

#### 4. МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПСОВ ПЕТУНИНА

Рассмотрим множество точек  $M_n = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$ , где  $\vec{x}_n = (x_n, y_n, z_n) \in R^3$ .

Построим доверительные эллипсоиды  $E_n$ , на границах которых содержатся точки из множества  $M_n$ . Согласно алгоритму Петунина эти эллипсы будут концентрическими, поскольку они получены путем растяжения концентрических сфер. Вероятность, что на границе эллипса Петунина лежит две или более точек, равна нулю.

Точки, которые лежат на эллипсоидах  $E_n$ , образуют вариационный ряд  $\vec{x}_{(1)} \prec \vec{x}_{(2)} \prec \dots \prec \vec{x}_{(n)}$ , где отношение порядка  $x \prec y$  означает, что из того, что  $x \in E$ ,  $y \in G$  следует, что  $G \subset E$ .

#### 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Входными данными были изображения (сканограммы) клеток буккального эпителия больных раком молочной железы, предоставленные Институтом экспериментальной патологии, онкологии и радиобиологии НАН Украины им. Р. Е. Кавецкого (автор благодарит за помощь доктора медицинских наук Н. В. Бородай). Размер входных изображений был равен 159 на 159 пикселей. На вход от каждого изображения, которое рассматривалось, подавалось три матрицы значений интенсивности цветов пикселей по красной, зеленой и синей компоненте.

На рис. 1–3 ниже приведены пример исходного изображения (в черно-белом исполнении), результаты работы метода маргинального ранжирования и метода, основанного на концентрических эллипсах Петунина соответственно.

Перечислим критерии, по которым сравнивались рассматриваемые методы, в порядке важности.

1. Целостность формы отфильтрованной части изображения.
2. Геометрическая точность выделения отфильтрованной части изображения каждым из методов.



Рис. 1. Исходное изображение

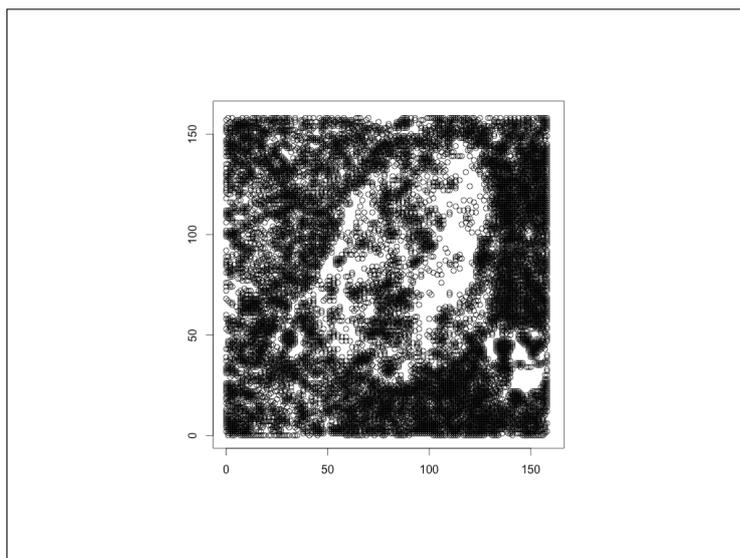


Рис. 2. Результат работы метода маргинального ранжирования (по красной компоненте)

3. Наличие новообразований в форме отфильтрованной части изображения: отростки, островки и т.п.
  4. Оценка быстродействия работы каждого из методов.
- Результаты оценки работы рассматриваемых методов по указанным критериям приведены в Таблице 1.

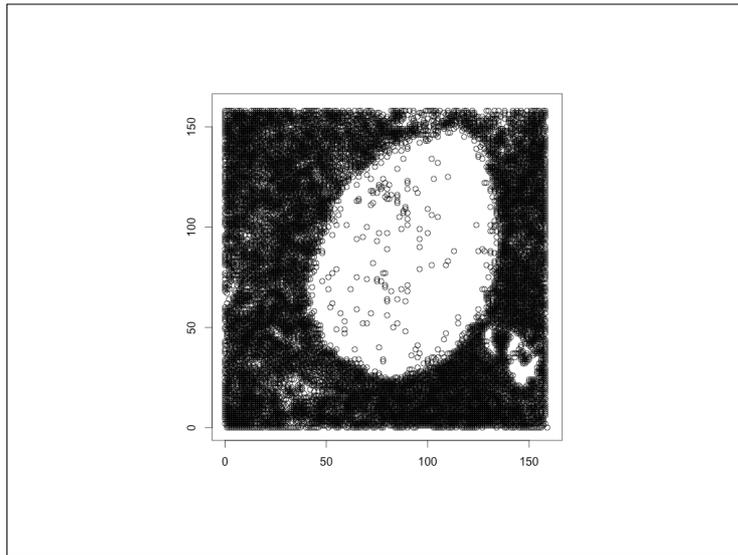


Рис. 3. Результат работы метода с использованием концентрических эллипсов Петунина

Таблица 1. Сравнение метода маргинального ранжирования и метода, основанного на концентрических эллипсах Петунина

№ критерия	Метод маргинального ранжирования	Метод с использованием эллипсов Петунина
1	Прослеживается нестабильность целостности отфильтрованной части изображения по различным компонентам.	Форма отфильтрованной части изображения целостная, за исключением небольшого количества пикселей.
2	Форма отфильтрованной части изображения нестабильно точно повторяет соответствующую форму на исходном изображении.	Прослеживается явное геометрическое сходство формы отфильтрованной части изображения и формы на исходном изображении, кроме случаев изменения выпуклости в некоторых ее частях.
3	В отфильтрованной части изображения имеются островки и отростки.	В отфильтрованной части изображения имеются островки и отростки, которых не было в соответствующей части на исходном изображении.
4	Метод работает достаточно быстро (в среднем на фильтрацию одного изображения необходимо 3,2 секунды).	Метод работает почти так же быстро (на фильтрацию одного изображения необходимо около 4,5 секунды).

### Выводы

В данной работе описан новый метод фильтрации изображения с использованием концентрических эллипсов Петунина. Для более точной оценки качества предложенного метода в работе был рассмотрен еще один, классический метод фильтрации изображений — метод маргинального упорядочения.

На основании проведенного анализа по заявленным критериям можно сделать вывод, что предложенный новый метод фильтрации изображений в рамках поставленной в работе задаче обеспечивает не менее стабильные результаты, чем классические методы, например, метод маргинального ранжирования. В рамках дальнейших исследований планируется усовершенствовать метод, основанный на концентрических эллипсах Петунина и таким образом улучшить результаты фильтрации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Соيفер В. А. Компьютерная обработка изображений. Часть 2. Методы и алгоритмы // Соросовский образовательный журнал. — 1996. — № 3. — С. 110–121.
2. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений / В. Т. Фисенко, Т. Ю. Фисенко. — СПб. : СПбГУ ИТМО. — 2008. — 192 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт. — Т. 2. — М. : Мир. — 1982. — 478 с.
4. Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms / N. Otsu // Trans. Sys., Man., Cyber. — 1979. — 9, № 1. — P. 62–66.
5. Kaijun Tang, Jakko Astola, Yrjo Neuvo. Multivariate order statistic filters in color image processing // IEEE International Conference on. — 1992. — P. 584–587
6. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Алексеенко В.В. Многомерное ранжирование и эллиптический пилинг // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 4. — С. 29–36.
7. Матвейчук С.А., Петунин Ю.И. Обобщение схемы Бернулли, возникающее в вариационной статистике. // Укр. матем. журнал. — 1991. — 42, № 4. — С. 518–528.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601, УКРАИНА.

Поступила 24.01.14

УДК 517.9

## ЗАСТОСУВАННЯ ГРУПОВИХ СТРУКТУР І ОПЕРАЦІЇ ЗСУВУ НА РОЗФАРБОВАНИХ ГРАФАХ ДО ПОБУДОВИ БЛОЧНИХ ШИФРІВ

Р. В. СКУРАТОВСЬКИЙ

**РЕЗЮМЕ.** Встановлені достатні умови можливості побудови добуток операцій шифрування на бінарному розфарбованому графі дереві. Побудовано алгоритм. Зроблені оцінки складності прямого відновлення тексту за отриманим шифром.

### Вступ

Сьогодні на практиці частіше всього шифрування тексту відбувається симетричним алгоритмом, асиметричні ж шифри застосовуються для шифрування ключа [1], який передається отримувачу шифру чи цифрового підпису. Для швидкого шифрування тексту застосовують блочні симетричні шифри, саме такого типу шифр і розглянемо в роботі.

Інструментом для побудови такого шифра є розфарбовані графи. Розфарбовані графи це складний комбінаторний об'єкт, який може мати багато інтерпретацій та застосувань. Особливо цікаво вивчати групи автоморфізмів таких графів та їх сумісне використання з самими графами для побудови різних композицій шифрів. Різноманітні групові конструкції можуть бути застосовані для шифрування на графах та заслуговують особливого вивчення. При цьому певний конкретний колір відповідає певному блоку тексту. Як відомо, граф дерево має експоненційну функцію росту. Саме це і дозволить зробити процес бруталного підбору ключа обчислювально складною задачею.

Однією із загальноприйнятих сучасних вимог до блочних шифрів є їх обґрунтована стійкість відносно відомих на сьогоднішній день методів криптоаналізу, до яких, зокрема, належать алгебраїчні методи, що базуються на методах гомоморфізмів. Багато спеціалістів відносять ці методи до одних із перспективних атак на сучасні симетричні системи шифрування. Представлений в роботі метод має обґрунтовані оцінки стійкості до деяких атак та є достатньо швидким, що є однією з переваг симетричного блочного шифрування. Стійкість блочних шифрів до методів криптоаналізу, що одержані в роботах К. Патерсона і Д. Вагнера [10] і які називаються методами гомоморфізму та групового криптоаналізу, як правило, визначається алгебраїчними властивостями різних груп підстановок. Саме вивчення таких властивостей і можливостей їх застосування присвячена дана робота. Вибір шифру з тими чи іншими властивостями диктується конкретною ситуацією [3]. Даний алгоритм блочного шифрування може при

довжині блока  $n \leq 8$  бути застосовано у якості нелінійних перетворень, що є у  $s$ -блоках шифрів типу *AES* чи ГОСТ 28147-89.

Щоб досягти наявності всіх цих властивостей одночасно, доцільно застосувати композицію кількох шифрів або їх добуток. Завдяки рекурсивному принципу побудови шифру, що має залежність від відкритого тексту, досягається імітостійкість шифра, в данному випадку принцип його здійснення подібний до принципу гамування. Також цьому сприяє успішно реалізований завдяки спеціальній груповій конструкції блочний шифр заміни.

В роботі детально описана *NP*-повна задача, зроблено аналіз її складності. Дається підхід до знаходження відображення слова, за допомогою рекурсивно заданих групових конструкцій, побудовано композицію шифрів зсуву та підстановки. Описані операції на групах та на графах.

### 1. ОЗНАЧЕННЯ І ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нагадаємо основні означення і технічні засоби. Нехай  $X$  — скінченний алфавіт. Позначимо через  $X^\omega$  множину всіх нескінченних вправо послідовностей (слів)  $x_1x_2\dots$ , де  $x_i \in X$ , аналогічно  $X^{-\omega}$  — нескінченних вліво послідовностей над  $X$  а  $X^{\mathbb{Z}} = X^\omega \sqcup X^{-\omega}$ . В теорії блочного кодування і блочного шифрування часто зустрічаються поняття скінченного зсуву, простору зсуву [4].

**Означення 1.** Відображення  $\sigma : X^{\mathbb{Z}}$  за правилом:  $\sigma(X) = Y$ , де  $Y_i = X_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ , називається зсувом.

Аналогічним є означення зсуву  $\sigma$  на просторі  $X^\omega$  як відображення

$$\sigma(x_1x_2x_3, \dots) = x_2x_3\dots,$$

яке витирає першу літеру нескінченного вправо слова. Для будь-яких нескінченних слів  $\omega_1 = x_1x_2x_3, \dots, \omega_2 = y_1y_2y_3, \dots \in X^\omega$  введено відстань  $d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2^n}$ , де  $n$  — довжина спільного початку слів  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

**Означення 2.** Простором зсуву над алфавітом  $X$  називається підмножина  $X_F \subseteq X^{\mathbb{Z}}$  така, що ніяке слово з  $F$  не входить у жодне нескінченне слово з  $X_F$  для деякого  $F \subseteq X^*$ , де  $F$  — множина заборонених слів.

Характерною властивістю простору зсуву  $X_F$  є  $\sigma$ -інваріантність підмножини  $X_F$  з множини  $X^{\mathbb{Z}}$  [4].

**Означення 3.** Скінченний зсув називається  $N$ -зсувом, якщо існує  $F \subseteq X^{N+1}$ .

**Означення 4.** Розфарбований граф  $\Gamma$  в кольори 0 і 1 назвемо  $\Gamma(0, 1)$  графом, якщо виконується:

- 1) вершини  $i$ -го рівня піддерева графа з коренем на  $(i - 1)$ -ому рівні мають різний колір;
- 2) з кореня кожного піддерева виходять ребра різних кольорів.

Надалі умова 1) може бути розширена так, що вершини  $i$ -го рівня мають усі наявні кольори.

**Означення 5.** Графом двоїстим до графа дерева  $\Gamma(0, 1)$  назвемо дерево

$$\tilde{\Gamma}(0, 1) := \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} \dot{\Gamma}_{ij}(0, 1),$$

де  $\dot{\Gamma}_{ij}(0, 1)$  — піддерево  $i$ -го рівня з коренем у  $j$ -тій вершині цього рівня. В підграфі  $\dot{\Gamma}_{ij}(0, 1)$  відбулася інверсія кольорів крім випадків, коли колір вершини та ребра, що в нього входить співпадають.

**Означення 6.** Підмножина  $A : A \subseteq X^\omega$  називається *раціональною*, якщо існує скінченний орієнтований граф  $\Gamma$  з відміченою початковою вершиною  $v_0$  і стрілками, що помічені елементами алфавіта  $X$ . При цьому мітки стрілок, що виходять з однієї вершини  $v_i \in \Gamma$  попарно різні і множина усіх слів, які можна отримати послідовною конкатенацією міток на шляхах з початком у  $v_0$ , співпадає з  $A$ .

Граф, що фігурує в означенні 6 називається *детермінованим* автоматом, який розпізнає множину  $A$ . Зрозуміло, що простір односторонніх зсувів скінченного типу є раціональною множиною в  $X^\omega$ .

**Означення 7.** Нескінченною геодезичною назвемо шлях в графі дереві  $T$  з вершини  $v_{i_0}$ , в одному з можливих напрямків, що являє собою послідовність попарно різних вершин  $(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots)$ ,  $\{v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\} \in ET$ , і ребер, що з'єднують сусідні вершини.

Для побудови блочного шифру введемо скінченні геодезичні.

**Означення 8.** Назвемо скінченною геодезичною шлях в скінченному графі дереві з вершини  $v_{i_0}$  в одному з можливих напрямків послідовність попарно різних вершин  $(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots)$ , сусідні з яких з'єднані ребром. Висотою геодезичної назвемо кількість її ребер.

Природньо, що довжина блока дорівнює висоті геодезичної. Опишемо алгоритм шифрування на  $\Gamma(0, 1)$  :

1. розбиваємо алфавіт  $X = x_1x_2 \dots x_n$  на дві частини  $X_1 = y_1y_2 \dots y_k$  і  $X_2 = z_1z_2 \dots z_{n-k}$  так, щоб  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ,  $X_1 \cup X_2 = X$ ;
2. вводимо бієктивну відповідність  $X_1 \longleftrightarrow 1$ ,  $X_2 \longleftrightarrow 0$ ;
3. вхідне повідомлення розбиваємо на блоки по  $n$  символів та шифруємо кожен блок окремо;
4. кожен блок шифруємо починаючи з кореня дерева однакою алгоритмом незалежно від попереднього блока:
  - (а) з нульового рівня дерева рухаємось по ребру, колір якого відповідає типу підалфавіта до якого належить перша літера;
  - (б) у відповідність цій літері ставимо або наступну літеру цього ж підалфавіту, якщо колір вершини, в яку ми прийшли, та колір підалфавіту, до якого відноситься перша літера співпадають, або літеру іншого підалфавіту з цим же порядковим номером у підалфавіті, якщо кольори різні.

Введемо позначення:  $X_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}, \dots\}$  тоді якщо  $x_i \in X_j$ , то  $x_i = \sigma_{j_q}$  а зашифрований символ  $c_i = E(x_i) = \sigma_{j_{(q+k_j) \pmod{|M_j|}}$ .

Якщо  $X = \{a, c, e, \dots\} \cup \{c, d, \dots\}$  і всі величини зсувів  $k_j$  однакові, то це шифр зсуву на  $k_j$  позицій.

Алгоритм дешифрування на  $\Gamma(0, 1)$  :

1. Будуємо  $\tilde{\Gamma}(0, 1)$  по заданому  $\Gamma(0, 1)$  дереву.
2. Виконуємо пункти с) і d) з перетворення шифрування але відповідність літера — колір будуємо дещо по-іншому. Якщо колір вершини, в яку ми прийшли та колір алфавіту до якого відноситься літера співпали, то ставимо у відповідність попередню літеру цього ж підалфавіту.

**Означення 9.** Позначимо  $\hat{\Omega}_1 = \{x_i : i \equiv 0 \pmod{2}, 1 \leq i \leq n, x_i \in X\}$ , тобто літери з непарними номерами позицій в алфавіті  $X$ ,  $\hat{\Omega}_2 = \{x_i : i \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq i \leq n, x_i \in X\}$ .

**Теорема 1.** *Бінарне нескінченне дерево  $\Gamma(0, 1)$  визначає шифр 2-зсув (зсув на 2 позиції), якщо з кожної вершини  $i$ -го рівня  $i \in \mathbb{N} \cup 0$  виходить лише одна нескінченна геодезична, в якій всі вершини і ребра зафарбовані в колір 0 і лише одна нескінченна геодезична в якій всі вершини і ребра зафарбовані в колір 1 та має місце розбиття  $X : X = \hat{\Omega}_1 \cup \hat{\Omega}_2$ .*

*Доведення.* З процесу дешифрування по  $\Gamma(0, 1)$  випливає: за умовою на  $\Gamma(0, 1)$  існує однокольорова геодезична, стартуючи з довільної вершини і рухаючись по такій геодезичній, ми для довільної літери не будемо виходити за межі підалфавіту, до якого вона відноситься, тобто рухаючись по кольору 0 або 1, ми прийдемо в вершину кольору 0 або 1 відповідно. Отже, ми будемо ставити у відповідність наступну літеру цього ж підалфавіту, яка має номер в алфавіті  $X$  на 2 більший.  $\square$

Модернізація графа  $\Gamma(0, 1)$ : проіндексуємо кожну позицію блоку, тобто поставимо у відповідність деяке число  $l_i \in \mathbb{N}$  відмінне від нуля. Отримаємо послідовність  $\{l_1, l_2, \dots, l_M\}$ ,  $M \leq n$ . Процес шифрування залишається тим же, але для кожної літери, що знаходиться на  $i$ -му місці в блоці, ми спускаємось по дереву не на один, а на  $l_i$  рівнів, при цьому отримаємо літеру з номером в  $X$  більшим на  $2l_i$ .

Розглянемо узагальнений підхід тут розфарбування графа довільне і теж є ключем. Наступну процедуру шифрування називатимемо  $\Gamma(0, 1)$ -шифром для розбиття алфавіту  $X = \sqcup_{i=1}^t X_i$ , асоційованого з підстановкою  $\pi$  індексів множин розбиття алфавіту. Введемо відповідність між підалфавітами алфавіту  $X$  і кольорами:

$$X_i \longleftrightarrow C_i,$$

де під  $C_i$  маємо на увазі колір відповідного підалфавіту, також позначимо  $C(v_i)$  — колір вершини  $v_i$  з  $\Gamma$ . Нехай  $x_1 x_2 \dots$  — блок відкритого тексту для шифрування. Розглянемо випадки:

Тип 1. Якщо  $x_i \in X_j$ , то до  $x_i$  застосовуємо шифр зсуву на  $k_j$  позицій в блоці  $X_j$ . Тоді компонентами ключа є:  $X = \sqcup_{i=1}^t X_i$ , та  $k_i$  — відповідні величини зсувів в підалфавітах  $X_i$ ,  $X_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots\}$ . Шифрування: нехай

$x_i \in X_j$ , позначимо його  $x_i = \sigma_{j_q}$ ,  $q < |X_j|$ , як символ з  $j$ -го блоку, де діє зсув на  $k_j$  символів, тоді  $E(x_i) = \sigma_{j_{q+k_j \bmod |X_j|}}$ . Якщо  $X = \{a, b, c, \dots\} \cup \{b, d, f, \dots\}$ , де  $k_j$  всі однакові, то це зсув на  $k_j$ .

Оцінимо величину простору ключів. Вона складається з кількості способів впорядкування і розбиття  $X$  на  $t$  блоків. Впорядкувань є  $n!$ , крім того є  $C_{n-1}^{t-1}$  розбиттів алфавіту (хоча тут враховані не рівновеликі блоки), кількість розфарбувань вершин  $2^n - 1$ . Зсув можна вибрати  $|X_i| - 1$  способами в  $i$ -ому блоці. Отже, простір всіх ключів зсуву містить  $n! \prod_{i=1}^t (|X_i| - 1)$  можливостей вибору. Відмітимо, що для шифру підстановки на блоках вони повинні бути рівновеликі, тому надалі  $|X_i| = \lfloor \frac{n}{t} \rfloor + 1$ , інакше треба вносити додаткову інформацію, щоб відновити підстановку. Компонентом простору ключів також є вибір точної дії групи підстановок на множині  $\mathbb{N}_n$ . Тоді, якщо обмежитись дією спряження і  $\varphi$ -спряження, то кількість різних дій може бути оцінена знизу, кількістю дій (відображень), які дають різні набори класів  $\mathfrak{R}(\Psi)$ , де  $\Psi : X \rightarrow X$ , тобто класів Радемайстера в  $S_n$  на  $\mathbb{N}_n$ . Кількість таких підкручених спряжень, при фіксованому елементі  $g$ , що діє звичайним спряженням (коли немає підкрутки) і є компонентом ключової послідовності, впливає з  $y = gxhg^{-1}h^{-1} = gx\varphi(g^{-1})$ , визначається кількістю  $h$ , який можна вибрати  $n!$  способами. Вкажемо існування взаємно-однозначної відповідності між елементами класів спряженості і підкрученої спряженості: маємо  $y = gxhg^{-1}h^{-1}$  звідси  $yh = gxhg^{-1}$ ,  $yh = g(xh)g^{-1}$ . Елементи  $yh$  і  $xh$  спряжені. Домноження  $x$  на  $h$  і є цим взаємно-однозначним перетворенням, що встановлює відповідність і задає нову циклову структуру класу подвійної спряженості.

Для розсіювання вибираємо поліалфавіт  $X_0$ , який є більшим ніж мінімально потрібний алфавіт  $X$  і застосуємо до кожного символа шифр багатозначної заміни (пропорційної заміни) Гауса, де образом  $x_i$  є множина символів (множина шифропозначень данного символа), величина якої пропорційна частоті появи  $x_i$  [10]. Це дасть розсіювання. Зауважимо, що  $|X_0|$  має бути такою, щоб дія групи на  $X_0$  була точною.

Тип 2. Якщо у  $X_j \leftrightarrow k_j(\sigma_{j_s})$ ,  $k_j$  всі однакові і не виходимо за межі  $X_j$ , то це шифр циклічної підстановки степеня  $\lfloor \frac{n}{t} \rfloor + 1$  або просто зсув не більше ніж на  $\lfloor \frac{n}{t} \rfloor + 1$  символів, інакше це поліалфавітний шифр.

Тип 3. Перетворення-підстановка з областями імпримітивності —  $X_j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , де усі  $X_j$  рівновеликі за потужністю, помітимо, що фактично

$$\pi = \begin{pmatrix} X_1, & \dots & X_j, & \dots & X_t \\ X_{q_1}, & \dots & X_{q_j}, & \dots & X_{q_t} \end{pmatrix},$$

такі підстановки утворюють групу, яка діє імпримітивно.

Цю підстановку зручно записувати так:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, & \dots & j, & \dots & t \\ q_1, q_2, & \dots & q_j, & \dots & q_t \end{pmatrix}$$

перетворення  $\sigma_{j_s} \longleftrightarrow k(\sigma_{j_s})$ .

Перетворення, що задає шифрування:

$$E(\sigma_{j_s}) = \sigma_{(q_j)_{s+k(\sigma_{j_s} \pmod{|X_{q_j}|})}}.$$

Частковим випадком є  $k(\sigma_{j_s}) = 0$ , тоді це шифр підстановки. У випадку, коли  $k(\sigma_{j_s}) \neq 0$ ,  $k(\sigma_{j_s}) = k$  всі однакові, то це добуток шифру підстановки та шифру зсуву на  $k$  позицій.

Тип 4: У випадку шифру Віженера  $\pi$  є циклом довжини  $t$ , при цьому всі  $X_i$  є рінопотужними, як і в попередньому випадку  $\sigma_{j_s} \rightarrow k(\sigma_{j_s})$ .

Перетворення, що задає шифрування:

$$E(\sigma_{j_s}) = \sigma_{(j_s)_{s+k_j \pmod{\pi^{k_j} X_j}}}$$

3. Алфавіт  $X$  розбиваємо на

$$X = \sqcup_{i=1}^t X_i$$

Впорядкуємо букви підалфавіту  $X_i$  згідно з їх порядком у алфавіті  $X$ . Номером букви  $x \in X_i$  є номер позиції цієї літери в такому розміщенні і позначимо  $n_i(x)$ . Тоді величина  $|X_i|$  дорівнює номеру останньої букви у впорядкуванні літер з  $X_i$ . Символом  $n_X(x)$  позначимо номер позиції  $x$  в усьому алфавіті  $X$ .

Надалі вважатимемо, що у диз'юнктному розбитті алфавіту всі літери множин  $X_i$  впорядковані саме за таким правилом. Для  $x \in X_i$  символом  $\pi(x)$  позначимо букву із множини  $\pi(X_i)$  номер якої дорівнює номеру літери  $x$  в  $X_i$ , тобто  $n_i(x) = n_{\pi(X_i)}(\pi(x))$ , або мовою алгебри, це образ елемента після дії підстановки  $\pi(X_i)$ , заданої на  $X_i$ .

**Означення 10.** Властивістю перемішування називається перетворення, де кожний символ шифро-тексту залежить від кожного символу відкритого тексту і від кожного символу ключа для симетричного шифра (закритого ключа для асиметричного тексту).

**Означення 11.** Нехай  $E_1, E_2(x) \dots$  — шифри зсуву такі, що  $E_1$  це зсув на  $\alpha(x)$ ,  $E_2(x_1)$  це зсув на  $\alpha_2(x_1, x_2)$  і т.д. Тоді вінцевим добутком цих шифрів називатимемо результат такого процесу шифрування: нехай  $(x_1, \dots)$  — буквенне повідомлення у алфавіті  $X$ ; позначатимемо  $(x_1, \dots)^E$  — результат виконання процедури  $E$  до набору  $(x_1, \dots)$ , аналогічно  $y^{E_i}$  — результат виконання процедури  $E_i$  до  $y$ , де  $i$  це номер раундового перетворення шифрування, тобто

$$(x_1, \dots)^{[E_1, E_2, \dots]} = (x_1, \dots)^E = (x_1^{E_1}, x_2^{E_2(x_1^{E_1})}, \dots).$$

Це перетворення має структуру словарного автоморфізма [9], образ  $x_n$  залежить від образу усього кортежу з попередніх символів, тобто від:  $x_n^{(x_1, \dots, x_{n-1})^{E_{n-1}}} = x_n^{(x_1, \dots, x_{n-1})^g}$ , де  $(x_1, \dots, x_{n-1}) = u \in X^{n-1}$ . Позначимо  $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Для автоморфізма  $f$  і вершини  $u \in X^*$  маємо новий автоморфізм  $(u)f$ , що називається секцією автоморфізма  $f$  у вершині  $u$  і однозначно задається рівнянням  $(ux_n)^f = (u)^f(x_n)^{(u)f}$ ,  $f \in G(\Lambda)$  або у запису через дію групи на підслові з префіксом  $u \in X^{n-1}$  це  $f(\bar{x}_n) = (f(x_1)f|_{x_1}(x_2), \dots, f|_{x_1x_2\dots x_{n-1}}(x_n))$ . Якщо при цьому для  $\forall u, u \in X^*$ ,

$\forall f \in G$  виконується  $(u)f \in G$ , то  $G$  самоподібна і автомат  $\Lambda(G)$ , що їй відповідає є скінченим. Побудований автомат  $\Lambda$  є обертовим, бо в кожному стані він виконує обертове перетворення над прочитаною літерою  $x_i$ , це так оскільки у вершинах графа в процесі шифрування застосовуються лише зсуви та підстановки.

З метою класифікації зазначимо, якщо для  $\forall i \in \mathbb{N}$  маємо  $E(\bar{x}_{i-1}) = \alpha_i = \alpha(\bar{x}_{i-1})$ , то такий вінцевий добуток називатимемо композицію шифрів, яка реалізує конструкцію вінцевого степеня,  $E_1, E_2(x_1), \dots, E_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-2})$ . Частковим випадком вінцевого добутку є  $\Gamma(0, 1)$ -шифр.

Зауважимо, що при дії на  $k$ -ту букву функція виходу  $\lambda(\bar{x}, g) = \lambda(\bar{x}_i \omega_i, v_i) = x_n^{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})g}$  автомата  $\Lambda$ , який відповідає цій групі  $G(\Lambda)$ , залежить лише від попередніх літер і від стану, тому вона не зміниться при заміні наступних після неї літер. Якщо на кожній ітерації фіксувати префікс  $u \in X^k, k < n$  і брати різні продовження з  $v_i \in X^*$ , то неважко знайти оператор такого автоматного перетворення склавши систему рівнянь  $uv_i = c(ux_i) = c(u)c_u(x_i), x_i \in X$ . Зокрема якщо брати кожний раз меншу частину префікса  $u$ , то система матиме матрицю трикутного вигляду, яка може бути легко розв'язана і тим самим оператор, що задає автоматне перетворення у цьому стані знайдено. Для уникнення властивості префіксності реалізуємо перемішування шляхом спряження перетворення шифрування  $c(X^n)$  цілого блока з  $X^n$ , щоб префікс шифру як і кожне символ залежав від символів усього блока відкритого тексту  $u \in X^n$ . Для цього пригадаємо, що автоматній групі  $G(\Lambda) < AutX^\omega$  відповідає група автоморфізмів, які діють на словах:  $(ux_n)^f = (u)^f(x_n)^{(u)^f}, f \in G$  володіючи властивістю префіксності, скінченна  $G(\Lambda)$  може бути задана вінцевою рекурсією  $f_i = (f_{i0}f_{i1}\dots f_{id-1})\sigma_i$ .

Спрягаючи автоморфізми  $f \in G(\Lambda)$ , що діють на словах з  $X^n$  і які мають вигляд:  $f(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1)f|_{x_1}(x_2)f|_{x_1x_2}(x_3), \dots, f|_{x_1x_2\dots x_{n-1}}(x_n))$ , з цієї групи досягнемо потрібного перемішування. Але слід врахувати, що спряження слід робити не одним і тим самим елементом  $g$  для усіх  $x_n^{(x_1, \dots, x_{n-1})f}$  а вибрати обертове перетворення  $g \in G(\Lambda)$ , тоді перетворення прийме вигляд

$$\phi(\bar{x}_n) = g^{-1}(\bar{x}_n)f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(\bar{x}_n)$$

Таким чином отримаємо автоморфізм  $\phi(\vec{x}_n)$ , який вже не має властивості префіксності завдяки принципу перемішування і великому порядку групи  $G(\Lambda)$  твірними якої є автоморфізми з  $AutX^\omega$ , важливо також щоб перетворення  $g(\vec{x}_n)$  не потрапляло в просту підгрупу скінченнозаданої групи бо там проблема слів а значить і проблема спряженості є розв'язною.

Зрозуміло, що вибір таких компонентів ключа як розбиття алфавіту і простої поліалфавітної підстановки  $x \rightarrow y, n_i(x) = n_j(y), x \in X_i, y \in X_j$ , яка діє у випадку не співпадіння кольорів, перетворення  $E_n$  як словарного автоморфізму, впливає на результат — весь шифротекст завдяки цьому маєм гарне перемішування [1, 5]. При цьому проста підстановка, при якій

$n_i(x) = n_j(y)$  легко узагальнюється до  $n_i(x) \neq n_j(y), 0 < i, j < \frac{n}{t}$ . Для зручності позначатимемо  $k(\sigma_{q_s})$  як  $k_{\sigma_{q_s}}$ . Перемішування задаємо нелінійним алгебраїчним перетворенням — підстановками і зсувами.

Довготерміновим ключем є розбиття на підалфавіти, група, яка діє підстановками на літерах і розфарбування вершин, яке можна зробити  $2^{n+1} - 1$  способами. Раундовим ключем є підстанока, яка обчислюється через дію композиції групових перетворень, або відповідна величина зсуву, яка також визначається в залежності від літери і підалфавіту. У випадку поліалфавітного розбиття на  $t$  алфавітів маємо  $n!$  відповідних впорядкувань і підстановки рангу  $[n/t] + 1$ . Потужність простору ключів визначається кількістю зсувів з композиції шифрів  $E_1, E_2(x_1), E_3(x_1, x_2), \dots, E_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Образ довільного  $x \in X_i$  позначимо  $\pi(x)$ , літерою з множини  $\pi(X_i)$ , номер якої дорівнює номеру  $x$  як букви із  $X_i$ , тобто це образ  $x \in X_i$  при дії підстановки  $\pi(X_i)$  і тому  $n_i(x) = n_{\pi(X_i)(\pi(x))}$ .

**Теорема 2.** *Вінцевий добуток шифрів  $E_1, E_2(x_1), E_3(x_1, x_2), \dots, E_n(x_1, \dots, x_{n-1})$  є шифром типу  $\Gamma(0, 1)$  для розбиття алфавіту  $X = \sqcup_{i=1}^t X_i$  асоційованого з підстановкою на областях імпримітивності  $X_i$*

$$\pi = \begin{pmatrix} X_1, & \dots & X_j, & \dots & X_t \\ X_{q_1}, & \dots & X_{q_j}, & \dots & X_{q_t} \end{pmatrix},$$

які є елементами диз'юнктного розбиття алфавіту  $X$  тобто множинами  $X_1, \dots, X_t$ . Частковим випадком цього шифру є шифр на  $\Gamma(0, 1)$ .

Образ рекурсивно визначається через усі попередні символи і елементи групи:  $\alpha_2(x_1, x_2) = k(\pi(x_2) + \alpha_1(x_1)), \dots,$

$$\alpha_\beta(x_1, \dots, x_\beta) = \sum_{i=1}^{\beta_k} (\pi(x_i) + \alpha_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})), \text{ з початковою умовою } \alpha_0 = 0.$$

*Доведення.* Легко бачити, що  $x_1^{E_1} = x_1 + k_{\sigma_{q_s}}$  (позначаємо  $x_{1+k_{\sigma_{q_s}}}$  як  $x_{1+k_{\sigma_{q_s}}}$ ), тому  $\alpha_1(x_1) = k(\sigma_{q_s})$ , де  $s = n_1(x_1)$ ,  $(x_1, x_2)[E_1, E_2] = (x_1^{E_1}, x_2^{E_2(x_1^{E_1})}) = (x_1 + k_{\sigma_{q_s}}, \pi(x_2) + k_{\sigma_{q_s}})$ ,  $\sigma_q = \pi(x_2) + \alpha_1(x_1)$ ,  $\pi(X_{q_1}) = X_q$ , бо  $\pi(q_1) = q$ . Тому

$$\alpha_2(x_1, x_2) = k(\pi(x_2) + \alpha_1(x_1)).$$

Ітеруючи цей процес, нарешті отримаємо

$$(x_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}}^{E_1, E_2, \dots} = (x_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}}^{E_\beta(x_1^{E_1}, \dots, x_{\beta-1}^{E_{\beta-1}(x_1, \dots, x_{\beta-2})})} = (\pi(x_\beta) + k_{\sigma_{q_s}}),$$

де  $\sigma_q = \pi(x_\beta) + \alpha_{(\beta-1)}(x_1, \dots, x_{\beta-1})$ . □

Зауважимо, що закон перетворення шифрування це залежність, яка забезпечує гарне перемішування та високу імітостійкість. Залежність має вигляд  $C(v_i) = f(\vec{x}_{i-1}, C(v_{i-1}))$ , де  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i$  —  $i$ -ий символ відкритого тексту,  $c_i$  —  $i$ -ий символ шифротексту,  $\vec{x}_{i-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ ,  $\vec{v}_{i-1} = (v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$ , причому  $c_i = F(\vec{x}_i, E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, \pi_1, \dots, \pi_{i-1}, C(\vec{v}_{i-1}))$ .

**Твердження 1.** *Довільний  $\Gamma(0, 1)$  шифр для розбиття алфавіту  $X = \sqcup_{i=1}^t X_i$  асоційованого з підстановкою  $\pi$  буде вінцевим добутком шифру зсуву  $E_1$  на  $k_{\sigma_{q_s}}$  позицій, що застосовується до  $\pi(x_1)$ , шифру зсуву*

$E_2(x_1)$  на  $k_{\sigma_{q_{s_2}}}$  позицій, що застосовується до  $\pi(x_2)$ , і т.д., для шифру зсуву  $E_\beta(x_1, \dots, x_{\beta-1})$  на  $k_{\sigma_{q_{s_\beta}}}$  позицій, що застосовується до  $\pi(x_\beta)$ .

*Доведення.* Розглянемо деякі шифри зсуву  $E_1, E_2(x_1) \dots$  на  $\alpha_1(x_1) \alpha_1(x_1, x_2)$  позицій відповідно. Виразивши  $k(\sigma_q)$  через  $\alpha_1(x_1)$ , отримуємо шифр типу 3, який задовольняє умови твердження.  $\square$

**Наслідок 3.** Нехай  $\Gamma(0, 1)$  — шифр для розбиття алфавіту  $X = \sqcup_{i=1}^t X_i$ , де  $X_1 = \{x \in X : n_X(x) \equiv 1(\text{mod}2)\}$  і  $X_2 = \{x \in X : n_X(x) \equiv 0(\text{mod}2)\}$ , тобто номер символу  $x$  в  $X$  є парним числом, асоційованим з транспозицією  $(1, 2)$  і буде вінцевим добутком шифрів зсуву  $E_1, E_2(x_1)$ , де  $E_1$  є шифром зсуву на 1-ну позицію,  $E_2(x_1)$  — на 2 позиції.

**Теорема 3.** *Застосування операції вінцевого добутку до перетворень, які є поліалфавітними шифрами, дає поліалфавітний шифр.*

*Доведення.* Виходячи з означення поліалфавітного шифру (це шифр, що ставить у відповідність кожній літері повідомлення літеру з певної множини за наперед визначеним правилом), ми маємо, що при вінцевому добутку кожній літері повідомлення ставиться у відповідність літера з певної множини за наперед визначеним правилом, яке залежить від типу шифра.  $\square$

**Теорема 4.** *Алгоритм шифрування для вінцевого добутку шифрів  $E_1$  та  $E_2(x_1)$  є вінцевим добутком алгоритмів шифрування.*

*Доведення.* У нашому випадку кожна  $i$ -та літера блоку  $X$  шифрується з допомогою деякого поліалфавітного шифру, причому кожен з цих шифрів має свій алгоритм (зсуву, підстановки або їх суперпозиції). Ці алгоритми можуть повторюватися і результат наступного рекурсивно залежить від дії на його аргумент попереднього перетворення. Тому при шифруванні таким способом ми отримуємо для наших алгоритмів конструкцію вінцевого добутку, що була описана вище. А тому загальний алгоритм буде вінцевим добутком алгоритмів. Порядок групи, яка йому відповідає і сама є вінцевим добутком групових перетворень циклічних зсувів  $(x_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}}^{E_1, E_2, \dots}$ , експоненційно зростає з ростом  $\beta$ , що забезпечує стійкість до перебору.  $\square$

**Теорема 5.** *Обчислювальна складність повного перебору для алгоритму шифрування на розфарбованому графі  $\Gamma(0, 1)$  оцінюється як  $O(2^{n+1})$ .*

*Доведення.* Нехай ми маємо повідомлення довжини  $n$ . Тоді процес шифрування (дешифрування) цього повідомлення нашою криптосистемою полягає в наступному. На першому кроці ми вибираємо один з двох напрямів руху, на другому кроці перед нами постає вибір з чотирьох шляхів, бо маємо  $2^2$  гілок, на третьому ще більше — вісім шляхів ( $2^3$ ), ..., на  $n$ -тому кроці —  $2^n$  шляхів. Таким чином, на кожному  $k$ -ому кроці, у найгіршому випадку, ми маємо перевірити  $2^k$  шляхів. Тому загальна кількість операцій які ми робимо, буде дорівнювати  $2 + 4 + 8 + \dots = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k = 2^{n+1} - 2$ . Таким чином, за означенням оракула  $O$ -великого, складність алгоритму буде дорівнювати  $O(2^{n+1})$ .  $\square$

1. ВИСНОВОК.

В роботі ефективно використаний добуток двох шифрів, один з яких є поліалфавітним. Доведена висока стійкість до прямого підбору ключа. Вдосконалено метод поліалфавітного шифрування буквенного тексту з використанням ключового слова, яке у шифрі Віженера використовувало шифрувальний шаблон, тепер же зі зміною кольору ребра графа змінюється величина зсуву та алфавіт. Залежність для обчислення шифрованого тексту задається складною груповою конструкцією, де рекурсивно обчислюється відповідна підстановка на символах алфавіту. Для розсіювання, яке не забезпечується підстановками і зсувами, застосовано шифр багатозначної заміни, зокрема пропорційної заміни на більшому алфавіті. Можливим шляхом вдосконалення шифру є урізноманітнення методів вибору розподільника підстановок для шифровеличин [7] та переобчислення розфарбування  $C$  вершин  $AutX^*$  як раундового ключа для кожного блоку  $X^n$ .

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабаш А. В., Шанкин Г. П. Криптография. — М., Солон-Р, 2002. — 511 с.
2. Василенко О. Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. — М.: МЦНМО, 2003. — 328 с.
3. Вербицкий О. В. Вступление в криптологию. — Львов: Издательство научно-технической литературы, 2005. — 300 с.
4. Douglas Lind, Brian Marcus. An introduction to symbolic dynamics and coding. — Cambridge University Press, 1995. — 490 p.
5. N. Koblitz. Algebraic aspects of cryptography. Vol. 3, Algorithms and Computation in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 2004. — 207 p.
6. Диффи У. Первые десять лет криптографии с открытым ключом // Труды института инженеров по электронике и радиотехнике. — 1988. — Т. 76, № 5. — С. 54–74.
7. Барычев С. В. Криптография без секретов. — М.: Наука. — 1998. — 120 с.
8. Задирака В. К., Олексюк О. А. Компьютерная арифметика многоразрядных чисел. — Тернопіль: Вища Школа, 2003. — 502 с.
9. Laurent Bartholdi, Rostislav I. Grigorchuk. Branch Groups. Handbook of algebra, V. 3. — North-Holland, Amsterdam, 2005. — P. 989–1112.
10. Wagner D. X. Generalized birthday problem // CRYPTO'02. Lect. Notes Comput. Sci. — 2002. — V. 2442. — P. 288–303.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 01.02.2014

УДК 517.9

## АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІИ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю. В. ШУШАРІН

**РЕЗЮМЕ.** Досліджуються умови асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному розв'язків лінійних різницевих рівнянь із марковськими коефіцієнтами. Дослідження асимптотичної стійкості зводиться до дослідження асимптотичної стійкості частинних моментів першого порядку та їх частинних дисперсійних матриць. Використовуючи рекурентні рівняння для моментів першого порядку розв'язків різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами, одержані необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому. Показано, що із рекурентних рівнянь для частинних дисперсійних матриць можна одержати алгебраїчні критерії у вигляді необхідних і достатніх умов для стійкості в середньому квадратичному. В просторі матриць вводиться аналог функцій Ляпунова, за допомогою яких приводяться достатні умови стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами.

### Вступ

Дослідженням стійкості стохастичних різницевих рівнянь займалися К. Г. Валеєв [1]–[6], І. І. Гіхман, А. В. Скороход [7], І. А. Джаладова, Д. Г. Коренівський [8, 9], Д. Я. Хусаїнов [10] та інші.

В роботі досліджується проблема одержання алгебраїчних критеріїв асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному розв'язків загальних лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами.

### АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІИ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ ТА СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ

Нехай послідовність  $X_n$  є розв'язком різницевого рівняння

$$X_{n+1} = A(\xi_{n+1}, \xi_n)X_n + \sum_{j=1}^r B_j(\xi_{n+1}, \xi_n)\eta_{jn}X_n, \quad X_0 = \zeta_0, \quad (1)$$

де  $\xi_n$  — випадкові величини. Вектори  $\eta_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , де  $\eta_k = (\eta_{1k}, \dots, \eta_{rk})^*$ , є послідовність незалежних величин, що не залежать від  $\xi_k$  і від випадкового вектора  $\zeta_0$ .  $A(\theta_k, \theta_s)$ ,  $B_j(\theta_k, \theta_s)$  — матриці розмірності  $m \times m$ .

**Означення 1.** Нульовий розв'язок рівняння (1) назвемо асимптотично стійким в середньому та середньоквадратичному відповідно, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n \rangle = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle |X_n|^2 \rangle = 0$$

для довільного детермінованого вектора  $X_0$ .

Оскільки  $\langle X_n \rangle = \sum_{k=1}^q m_k(n)$ , а  $\langle |X_n|^2 \rangle = spD(n) = \sum_{k=1}^q spD_k(n)$ , то для асимптотичної стійкості в середньому достатньо, щоб виконувалась умова  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_k(n) = 0$ ,  $k = \overline{1, q}$ . Зауважимо також, що матриці  $D_k(n)$  є невід'ємно визначеними, а із того, що  $spD_k(n) \rightarrow 0$  випливає рівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_k(n) = 0$ . Таким чином, для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_k(n) = 0$ .

Оскільки частинні моменти  $m_k(n)$  є розв'язком рівняння

$$m_k(n+1) = \sum_{s=1}^q A_{ks} m_s(n) \pi_{ks},$$

то для вектора  $(m_1(n), \dots, m_q(n))^* = M(n)$  можна записати рівняння:

$$M(n+1) = AM(n),$$

де  $A$  — матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{11} A_{11} & \pi_{12} A_{12} & \dots & \pi_{1q} A_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{q1} A_{q1} & \pi_{q2} A_{q2} & \dots & \pi_{qq} A_{qq} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, враховуючи рівняння (1), можна зробити висновок, що має місце

**Твердження 1.** Для асимптотичної стійкості в середньому нульового розв'язку рівняння (1) необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова

$$Re \lambda_i(A) < 1, \quad i = \overline{1, q},$$

де  $\lambda_i(A)$  — власні числа матриці  $A$ .

Приведемо далі необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному.

Введемо спочатку поняття тензорного добутку матриць. Якщо  $A$  та  $B$  — матриці з елементами  $a_{ij}, b_{ij}$  відповідно,  $i, j = \overline{1, n}$ , то під тензорним добутком матриць  $A$  та  $B$  будемо розуміти функцію  $f(A, B)$ , що приймає значення в просторі  $R^{n^4}$ , компоненти якої мають вигляд  $c_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$ ,  $i, j, k, l = \overline{1, n}$ . Тензорний добуток матриць  $A$  та  $B$  будемо позначати у вигляді  $A \otimes B$ . Зауважимо, що має місце рівність

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Нехай далі  $\langle \eta_{kn} \eta_{jn} \rangle = \delta_{kj}$ , де  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Позначимо через  $d_k(n)n^2$ -вимірний вектор-стовбець

$$d_k(n) = (d_{11}^{(k)}(n), \dots, d_{1m}^{(k)}(n), d_{21}^{(k)}(n), \dots, d_{1m}^{(k)}(n), \dots, d_{mm}^{(k)}(n))^*,$$

де  $d_{ij}^{(k)}(n)$  — елементи матриці  $D_k(n)$ . Тоді систему рекурентних рівнянь

$$D_k(n+1) = \sum_{s=1}^q \pi_{ks} (A_{ks} D_s(n) A_{ks}^* + \sum_{ij} B_{ijs} D_s(n) B_{jks}^* E \eta_{in} \eta_{jn}), \quad D_k = E \zeta_0 \zeta_0^* p_s. \quad (2)$$

можна записати у вигляді

$$d_k(n+1) = \sum_{s=1}^q \pi_{ks} (A_{ks} \otimes A_{ks} + \sum_{j=1}^r B_{jks} \otimes B_{jks}) d_k(n), \quad k = \overline{1, q}, \quad (3)$$

або

$$d(n+1) = A_1 d(n), \quad (4)$$

де  $d(n) = (d_1, \dots, d_q(n))^*$ ,  $A_1$  — матриця вигляду

$$A_1 = \begin{pmatrix} \pi_{11} C_{11} & \pi_{12} C_{12} & \dots & \pi_{1q} C_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{q1} C_{q1} & \pi_{q2} C_{q2} & \dots & \pi_{qq} C_{qq} \end{pmatrix},$$

$$C_{ks} = A_{ks} \otimes A_{ks} + \sum_{j=1}^r B_{jks} \otimes B_{jks}.$$

**Твердження 2.** Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова  $\lambda_i(A_1) < 1 \quad \forall i$ , де  $\lambda_i$  — власні числа матриці  $A_1$ .

Доведення цього твердження впливає з того факту, що умова асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в нашому випадку еквівалентна умові асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння для вектора  $d(n)$ .

Приведемо далі алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості.

Нехай  $d_k(n)$ ,  $k = \overline{1, q}$  — розв'язок рівняння (3). Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(d) = \sum_{i,k=1}^q (Q_{ik} d_i, d_k),$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{q1} & \dots & Q_{qq} \end{pmatrix} \text{ — додатно визначена матриця.}$$

**Твердження 3.** Для того, щоб нульовий розв'язок стохастичного рівняння (1) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно та достатньо, щоб існувала додатно визначена матриця  $Q$ , що є розв'язком рівняння

$$Q_{ik} - \sum_{s_1=1}^q \sum_{s_2=1}^q \pi_{is_1} \pi_{is_2} (A_{ks_1}^* \otimes A_{ks_2}^* + \sum_{j=1}^q B_{jks_2}^* \otimes B_{jks_2}^*) Q_{ik} (A_{is_1} \otimes A_{is_2} + \sum_{j=1}^r B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}) = E \delta_{ik}, \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

*Доведення.* Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(d(n)) - V(d(n+1)) = \\ &= \sum_{i,k=1}^q (Q_{ik} d_i(n), d_k(n)) - \sum_{i,k=1}^q (Q_{ik} d_i(n+1), d_k(n+1)). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &(Q_{ik} d_i(n+1), d_k(n+1)) = \\ &= \sum_{s_1=1}^q \sum_{s_2=1}^q \pi_{is_1} \pi_{ks_2} \left( Q_{ik} (A_{is_1} \otimes A_{is_1} + \sum_{j=1}^r B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}) d_i(n), \right. \\ &\left. (A_{ks_2} \otimes A_{ks_2} + \sum_{j=1}^r B_{jks_2} \otimes B_{jks_2}) d_k(n) \right) = (\bar{Q}_{ik} d_i(n), d_k(n)), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{ik} &= \sum_{s_1=1}^q \sum_{s_2=1}^q \pi_{is_1} \pi_{ks_2} (A_{ks_2}^T \otimes A_{ks_2}^T + \sum_{j=1}^r B_{jks_2}^* \otimes B_{jks_2}^*) \times \\ &\times Q_{ik} (A_{is_1} \otimes A_{is_1} + \sum_{j=1}^r B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}), \end{aligned}$$

то  $\Delta V$  — додатна, коли виконується умова (5). В силу лінійності системи для  $d_k(n)$  ця умова є і необхідною.  $\square$

**Твердження 4.** Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким в середньому квадратичному достатньо, щоб існували додатно визначені матриці  $Q_k$  розмірності  $t \times t$ , що є розв'язками рівнянь

$$Q_k - \sum_{s=1}^q \pi_{sk} (A_{sk}^* Q_k A_{sk} + \sum_{j=1}^r B_{j sk}^* Q_s B_{j sk}) = E, \quad k = \overline{1, q}. \quad (6)$$

*Доведення.* В просторі матриць розмірності  $q \times q$ , що є невід'ємно визначеними, введемо функції

$$f(n) = V(D_1, \dots, D_q) = \sum_{k=1}^q sp Q_k D_k(n) = \sum_{k=1}^q V_k(D_k(n)),$$

де  $V_k(D_k(n)) = sp Q_k D_k(n)$ .

Якщо матриця  $Q_k$  — додатно визначена, то  $sp Q_k D \geq 0$ , а в тому випадку, коли  $D$  також додатно визначена, то  $sp Q_k D > 0$ . Нехай  $D_k(n)$  — розв'язок системи рівнянь (1). Розглянемо різницю

$$f(n) - f(n+1) = \Delta f_n.$$

Оскільки

$$V_k(D_k(n+1)) = sp Q_k \sum_{s=1}^q \pi_{ks} \left[ A_{ks} D_k(n) A_{ks}^* + \sum_{j=1}^r B_{j ks} D_k(n) B_{j ks}^* \right],$$

то

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=1}^q V_k(D_k(n+1)) = \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^r sp Q_k \left[ A_{ks} D_s(n) A_{ks}^* + \sum_{j=1}^r B_{j ks} D_k(n) B_{j ks}^* \right] \pi_{ks} = \\ &= \sum_{k=1}^n sp \left[ \sum_{s=1}^q A_{sk}^* Q_k(n) A_{sk} + \sum_{j=1}^r B_{j sk}^* Q_s B_{j sk} \right] \pi_{sk} D_k(n), \end{aligned}$$

а значить

$$f(n) - f(n+1) = \sum_{k=1}^n sp D_k(n) \left[ Q_k - \sum_{s=1}^q \left( A_{sk}^* Q_k A_{sk} + \sum_{j=1}^r B_{j sk}^* Q_s B_{j sk} \right) \pi_{sk} \right].$$

При умові, що існує додатно означена матриця  $Q_k$ , що є розв'язком системи рівнянь (6), одержимо

$$f(n) - f(n+1) = \sum_{k=1}^n sp D_k(n) > 0,$$

а значить  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_k(n) = 0$ . Тобто розв'язок рівняння (1) асимптотично стійкий.  $\square$

**Наслідок.** Нехай виконується умова

$$\sum_{s=1}^q (A_{ks}^* A_{ks} + \sum_{j=1}^r B_{jks}^* B_{jks}) \pi_{ks} < E, \quad k = \overline{1, q},$$

тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_k(n) = 0$ .

#### ВИСНОВКИ

В роботі одержані необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному загальних лінійних рівнянь з марковськими коефіцієнтами. За допомогою функцій Ляпунова із матричним аргументом одержані достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному таких рівнянь.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. Расщепление спектра матриц — Киев: Вища школа, 1986. — 272 с.
2. Валеев К. Г. Устойчивость линейных динамических систем со случайными параметрами — Киев: Общ. "Знание" УССР, 1986. — 24 с.
3. Валеев К. Г., Саннуфи М. А. Синтез оптимального управления для системы разностных уравнений со случайными коэффициентами — Киев: 1988. — 7 с. /Деп. в УкрНИИНТИ 02.01.89. №93 — Ук 89/.
4. Валеев К. Г., Стрижак О. Л. Метод моментных уравнений — Киев: Препринт, 1986. — 56 с.
5. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функций Ляпунова — Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с.
6. Валеев К. Г., Хайтхам А. М. Построение функций Ляпунова для системы линейных разностных уравнений с нестационарными марковскими или полумарковскими случайными коэффициентами — Киев, 1991. — 11 с.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Стахостические дифференциальные уравнения — Киев: Наукова думка, 1968. — 354 с.
8. Кореневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии — Киев: Наукова думка, 1989. — 208 с.
9. Коренівський Д. Г. Стійкість розв'язків систем різницевих рівнянь при стохастичних збуреннях їх коефіцієнтів. Алгебраїчні критерії — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — 210 с.
10. Хусаинов Д. Я., Ивохин Е. В. Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова — Киев: Кибернетика, 1985. №2. — С. 7–10.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАДИМА ГЕТЬМАНА, ПР-Т ПЕРЕМОГИ, 54/1, М. КИЇВ, 03680, УКРАЇНА.

Надійшла 8.01.2014

УДК 519.622

**SPECIFICITY OF NUMERICAL INTEGRATION  
OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS  
FOR SYSTEMS WITH COULOMB FRICTION  
BY RUNGE-KUTTA METHOD\***

A. G. ZABUGA

**ABSTRACT.** By example of concrete system with one degree of freedom, that firstly was investigated analytically specificity of numerical integration of ordinary second-order differential equations for systems with Coulomb and viscous friction was considered. A modification of Runge-Kutta formulas for mentioned systems was developed. This modification can be easily extended for systems with dry friction and any given finite number of degrees of freedom.

INTRODUCTION

The dynamics equation of mechanical system with one degree of freedom in Cartesian coordinates has general form

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad (1)$$

where  $t$  is time,  $x$  is coordinate,  $\dot{x}$  is first time derivative of coordinate, which is velocity,  $\ddot{x}$  is second time derivative of coordinate, which is acceleration,  $t_0$  is initial time,  $x_0$  is initial coordinate, and  $\dot{x}_0$  is initial velocity. In the equation (1) mass  $m$  was carried to right side. If right side of the equation (1) is continuous it can be integrated numerically by well known classical Runge-Kutta method for second-order differential equations [1, 2, 3].

In systems with Coulomb friction the right side of the equation (1) is discontinuous, so directly using of classical Runge-Kutta formulas. In spite of these systems are investigated by many authors from different countries during more than one hundred years [3, 4] general ways of their analysis are not described enough in literature. It can be conditioned on the one hand by mechanical features of such systems [5] and on the other hand by complication of numerical [6] and analytical integration of appropriate differential equations [3, 7]. The mechanical features mean that Coulomb friction causes imperfection of constraints [8]. It causes impossibility of directly using of analytical mechanics, because it is necessary to eliminate unknown reactions [4].

Complication of numerical integration is caused by discontinuity of right sides of differential equations of dynamics of systems with Coulomb friction.

---

\*Recommended for publication by Programm Committee of 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", Kyiv, 25–29 November, 2013.

Actually, Coulomb friction force  $F_{CFr}$  depends on the sliding velocity  $v$  of one surface relative to another, maximum absolute value of the static friction  $F$  and the sum of components of active and inertial forces tangent to interacting surfaces  $\sum F_{Af}$ . Velocity  $v$  is the certain function of coordinates and velocities of material system's points. Form of this function depends on concrete problem specification. Relation has the form

$$F_{CFr} = \begin{cases} -F \operatorname{sign}(v) & \text{if } v \neq 0, \\ -F \operatorname{sign}(\sum F_{Af}) & \text{if } v = 0 \text{ and } |\sum F_{Af}| > F, \\ -\sum F_{Af} & \text{if } v = 0 \text{ and } |\sum F_{Af}| \leq F. \end{cases} \quad (2)$$

It is necessary to note that transition from static friction to sliding friction, which occurs if both of  $v = 0$  and  $|\sum F_{Af}| > F$ , is going on during infinitely small time span. But in case of using numerical solution, mentioned transition continues during time span that equal to step of calculation  $\Delta t$ . So in case of using numerical solution, the situation expressed by second string in (2) cannot be neglected.

So, according to (2) Coulomb friction force is discontinuous function. Moreover, material system dynamics behavior in point of discontinuity  $v = 0$  cannot be defined from behavior of  $F_{CFr}$  in the domain of continuity  $v \neq 0$  only. Actually, behavior of  $F_{CFr}$  in point of discontinuity  $v = 0$  depends on relation between  $F$  and  $|\sum F_{Af}|$ . One of authors who noticed this complication was A.F. Philippov [9].

Because of mentioned above complication simply particular case of mechanical system is considered in many articles [10]. It is necessary to consider a short view of this case.

#### 1. TRANSITION FROM SLIDING FRICTION TO STATIC FRICTION DOESN'T OCCUR

This situation occurs in case of  $|\sum F_{Af}| > F$  if  $v = 0$  during all time spawn investigating. In terms of mechanics it means that frictional constraint doesn't form, so transition from sliding friction to static friction doesn't occur and sliding velocity  $v$  reverses sign. Under such conditions material system instanter passes through the point of discontinuity  $v = 0$ . So, for this case relation (4) has form

$$F_{CFr} = -F \operatorname{sign}(v). \quad (3)$$

Relation (3) is essentially simpler than (2) in general form because of  $F_{CFr}$  depends on  $v$  only. In this case it is enough to have an information about behavior of function  $-F \operatorname{sign}(v)$  in the domain of continuity  $v \neq 0$ .

Moreover, in this case it is possible to eliminate discontinuity by using e.g. following approximate relationship

$$-F \operatorname{sign}(v) \approx -F \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\beta v), \quad (4)$$

where  $\beta$  is parameter with dimensionality in SI is s/m. Choice of approximation in form (4) can be understood from graphs on fig. 1, where was accepted  $v \in [-3; 3]$  m/s and  $\beta = 25$  s/m.

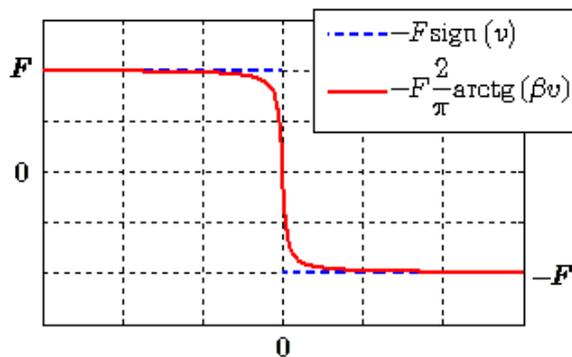


FIG. 1. Approximation of  $-F \text{sign}(v)$  by  $-F \frac{2}{\pi} \text{arctg}(\beta v)$ .

Function  $-F \frac{2}{\pi} \text{arctg}(\beta v)$  is continuous and multiple differentiable if  $v$  is finite. So, after acceptance of approximation (4) numerical integration of differential equations can be carried out by standard methods. For example, mentioned above classical Runge-Kutta formulas can be used.

If approximation (4) is used for numerical integration of dynamics equation parameter  $\beta$  should be chosen on the one hand for function  $\frac{2}{\pi} \text{arctg}(\beta v)$  was as close as possible to  $\text{sign}(v)$  and on the other hand for this function has not too high value of derivative. High value of derivative is unwanted because during numerical solution with automatic step of calculation control it leads to extremely low step of calculation in neighborhood of  $v = 0$ . Extremely low step of calculation may lead to high number of iterations and perhaps to decrease of precision.

In spite of the fact that approximation (4) is effective, but possibility of its using is limited by case of  $|\sum F_{Af}| > F$  during every passing through the point of discontinuity  $v = 0$ .

## 2. AN EXAMPLE OF CONCRETE SYSTEM WITH COULOMB FRICTION. ANALYTICAL SOLUTION

There is studied mechanical system shown sketchy on fig. 2. Perfectly rigid body with mass  $m = 2$  kg slides on the immobile rigid horizontal surface with sliding friction coefficient  $\mu = 0.75$ . On the left side body is bonded by spring with coefficient of rigidity  $k = 3$  N/m and dissipation factor  $2h$ , where  $h = 0.3$  N · s/m, to the immobile rigid vertical surface. Free fall acceleration  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Initial time  $t_0 = 0$ , initial coordinate  $x_0 = 85$  m and initial velocity  $\dot{x}_0 = 225$  m/s. Coordinate of center of mass  $m$  when spring is unstrained is accepted as coordinate basic origin. Dynamics of this system during first 20 s from initial time  $t_0$  will be investigated.

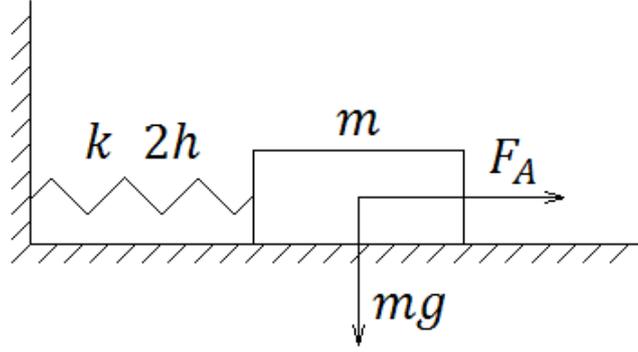


FIG. 2. Sketchy image of studied system.

On fig. 2  $F_A$  is active force that begins to exert at the time  $t_F = 16$  s and increases in proportion to time. This force can be characterized by relation

$$F_A = \begin{cases} 0 & \text{if } t < t_F, \\ a(t - t_F) & \text{if } t \geq t_F, \end{cases} \quad (5)$$

where  $a = 50$  N/s.

For given system it can be used law of friction in form (4)

$$v = \dot{x}, \quad F = \mu mg, \quad \sum F_{Af} = -2h\dot{x} - kx + F_A. \quad (6)$$

Therefore, a dynamics equation can be defined in the next form

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -F\text{sign}(\dot{x}) + F_A & \text{if } \dot{x} \neq 0, \\ m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -F\text{sign}(\sum F_{Af}) + F_A & \text{if } \dot{x} = 0 \text{ and } |\sum F_{Af}| > F, \\ m\ddot{x} = 0 & \text{if } \dot{x} = 0 \text{ and } |\sum F_{Af}| \leq F, \end{cases} \quad (7)$$

where designations  $F$  and  $\sum F_{Af}$  according to (6) were used. Given equation can be easily reduced to form (1) by division by  $m$  of the left and right sides of the equation and carrying of all summands except  $\ddot{x}$  into the right side.

Equation (7) can be solved analytically. Since  $t_0 = 0$ , so firstly there is situation  $t < t_F$ . Moreover,  $\dot{x} \neq 0$  in initial time. To obtain the analytical solution of equation (7) for this case it is necessary to consider both situations  $\dot{x} > 0$  and  $\dot{x} < 0$  separately. If  $\dot{x} > 0$  it will be  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$ . So for this situation the solution is

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\mu mg}{k}, \\ \dot{x} &= A\delta e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta = -\frac{h}{m} = -0.15 \text{ s}^{-1}, \quad \omega = \frac{\sqrt{km-h^2}}{m} \approx 1.2155 \text{ s}^{-1}.$$

For obtaining the solution (8) it was taken into account the fact that the appropriate characteristic equation with given values of  $m$ ,  $h$  and  $k$  has two

complex-conjugate roots. In (10) the values  $A$  and  $\varphi$  can be defined from initial conditions by the relations

$$A = \frac{+\sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right)^2 (\delta^2 + \omega^2) - 2\dot{x}_0 \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \delta}}{\omega e^{\delta t_0}} \approx 215.8177 \text{ m}, \quad (9)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_0 \cos \omega t_0 - \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) (\delta \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0)}{\dot{x}_0 \sin \omega t_0 - \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) (\delta \sin \omega t_0 + \omega \cos \omega t_0)} \approx -1.1411.$$

Solution of equation (7) in form (8) and (9) will be appropriate while  $\dot{x} > 0$ . The situation when  $\dot{x}$  vanishes will firstly occur at the time  $T_1$ , that can be found from the solution (8) by substitution of  $\dot{x}(T_1) = 0$  into appropriate equation. The solution of obtained trigonometric equation for  $T_1$  is

$$T_1 = \frac{1}{\omega} \left( \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega} - \varphi \right) \approx 0.8378 \text{ s}. \quad (10)$$

Magnitude of coordinate  $x$  at the time  $T_1$  can be obtained by substitution of (10) into appropriate expression (8)

$$x(T_1) = A e^{\delta T_1} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{\mu mg}{k} \approx 183.9938 \text{ m}. \quad (11)$$

To ascertain that  $|\sum F_{Af}| > \mu mg$  at the time  $T_1$  the relations (5), (6), (10) and (11) were used.

Therefore, at the time  $T_1$  the case  $\dot{x} = 0$  and  $|\sum F_{Af}| > \mu mg$  occurs. But it is not necessary to solve the appropriate differential equation because this situation occurs at the time  $T_1$  only and the coordinate  $x(T_1)$  and the velocity  $\dot{x}(T_1)$  at this time are already known.

After the time  $T_1$  the case  $\dot{x} < 0$  occurs. For this case  $\operatorname{sign}(\dot{x}) = -1$ . The solution of equation (7) is nearly the same as (8). The difference is that sign before  $\frac{\mu mg}{k}$  is "+" and there is a coefficient  $A(T_1)$  instead of  $A$ . Coefficient  $A(T_1)$  can be found from initial conditions  $T_1$ ,  $x(T_1)$ ,  $\dot{x}(T_1) = 0$  by formula that is analogous to (9), but differs from it by sign "-" before  $\frac{\mu mg}{k}$ . Therefore, in consideration of remarks mentioned above and expression (11) the coefficient  $A(T_1)$  is

$$A(T_1) = A - \frac{2\mu mg}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega e^{\delta T_1}} \approx 204.6098 \text{ m}. \quad (12)$$

It is necessary to notice that  $\varphi(T_1) = \varphi$ . This fact can be easily proved by substitution of (10) and (11) into the appropriate equation (9) with taking into account remarks about signs mentioned above.

Repeating of the same reasoning as carried out above gives the time  $T_2$  when situation  $\dot{x} = \dot{x}(T_2) = 0$  will occur again. In the same way as mentioned above it is possible to ascertain that  $|\sum F_{Af}| > \mu mg$  at the time  $T_2$ . Therefore,

$$T_2 = \frac{1}{\omega} \left( \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega} - \varphi + \pi \right) \approx 3.4223 \text{ s},$$

$$x(T_2) = -A e^{\delta T_2} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} + \frac{2\mu mg}{k} \left( 1 + e^{\frac{\delta \pi}{\omega}} \right) - \frac{\mu mg}{k} \approx -116.6295 \text{ m}, \quad (13)$$

$$A(T_2) = A - \frac{2\mu mg}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega e^{\delta T_2}} \left( 1 + e^{\frac{\delta \pi}{\omega}} \right) \approx 188.0941 \text{ m}.$$

Finally, in the same way as mentioned above it is possible to found the time  $T_l$  when the situation  $\dot{x} = 0$  occurs for the  $l$ -th time

$$T_l = \frac{1}{\omega} \left( \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega} - \varphi + \pi (l - 1) \right). \quad (14)$$

In the same way  $x(T_l)$  and  $A(T_l)$  were found

$$x(T_l) = \left( A e^{\delta T_l} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2\mu mg}{k} \sum_{i=0}^{l-1} e^{\frac{\delta \pi i}{\omega}} + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{l-1}, \quad (15)$$

$$A(T_l) = A - \frac{2\mu mg \sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{k \omega e^{\delta T_l}} \sum_{i=0}^{l-1} e^{\frac{\delta \pi i}{\omega}}.$$

The sum, that is a part of (15), is the sum of geometric progression terms. Therefore, the equations (15) can be written in next form. For  $\delta = 0$  it is

$$x(T_l) = \left( A - \frac{2l\mu mg}{k} + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{l-1}, \quad (16)$$

$$A(T_l) = A - \frac{2l\mu mg}{k}.$$

For  $\delta \neq 0$  it is

$$x(T_l) = \left( A e^{\delta T_l} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2\mu mg}{k} \frac{e^{\frac{\delta \pi l}{\omega}} - 1}{e^{\frac{\delta \pi}{\omega}} - 1} + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{l-1}, \quad (17)$$

$$A(T_l) = A - \frac{2\mu mg \sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{k \omega e^{\delta T_l}} \frac{e^{\frac{\delta \pi l}{\omega}} - 1}{e^{\frac{\delta \pi}{\omega}} - 1}.$$

Using formulas (5), (6), (14) and (17), we find that case  $\dot{x} = 0$  and  $|\sum F_{Af}| \leq \mu mg$  takes place when  $l = 6$ . According to equation (7) it means that at the time  $T_6 \approx 13.7606$  s a transition from sliding friction to static friction occurs. It means that during certain time, starting from  $T_6$ , the system will be in a quiescent state. The solution of the equation (7) will be as follows

$$x = x(T_6) \approx -4.5498 \text{ m}, \quad \dot{x} = \dot{x}(T_6) = 0. \quad (18)$$

At the time  $t_F = 16$  s the active force  $F_A$ , that described by equation (5), is starting to exert. As this force is constantly growing, at the definite time  $t_{br}$  a moving will start i.e., break of kinematic constraint  $\dot{x} = 0$  will occur. Basing on the fact that the system was in a quiescent state up to specified moment, we can accept  $x(t_{br}) = x(T_6)$  and  $\dot{x}(t_{br}) = \dot{x}(T_6)$ . Starting from it and using (5), (6) and (18) we find

$$t_{br} = t_F + \frac{\mu mg + x(T_6) k}{a} \approx 16.0213 \text{ s}. \quad (19)$$

As the force  $F_A$  exerts in positive direction then starting from  $t_{br}$ , the situation  $\dot{x} > 0$  will take place. At these conditions the equation (7), taking into account





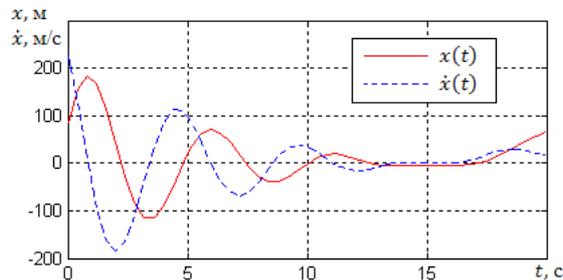


FIG. 4. The numerical solution of the equation (7).

this equation was numerically integrated under the same conditions that were taken for the analytical solution. Step  $\Delta t = 0.4$  s was accepted. Such step means that  $x_n$  and  $\dot{x}_n$  on the studied interval were calculated only for 50 values of  $t_n$ . The result of the numerical integration is shown on fig. 4.

As we can see from the comparison of fig. 3 and 4, the numerical solution even at  $\Delta t = 0.4$  s has little difference from analytical one. It can be expected, that at not much smaller step e.g.,  $\Delta t = 0.2$  s, graphs, indicated on fig. 4, will not differ visually from the graphs on fig. 3. These results confirm the high efficiency of the proposed approach to problems of numerical integration of differential equations for systems with Coulomb friction.

Above it was discussed the numerical integration of the equation (7), the right side of which at  $\dot{x} \neq 0$  depends on  $\text{sign}(\dot{x})$ . Quite similarly we can consider also more general case

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \text{sign}[g(t, x, \dot{x})]), \quad x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad (25)$$

where  $g(t, x, \dot{x},)$  is a continuous function of  $t, x, \dot{x}$ . Repeating the same reasoning that we used for construction of the formulas (23), we obtain the Runge-Kutta formulas for the equation (25) when  $g(t, x, \dot{x},) \neq 0$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n, \dot{x}_n, \text{sign}[g(t_n, x_n, \dot{x}_n)]) \Delta t, \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \text{sign}[g(t_n, x_n, \dot{x}_n)]\right) \Delta t, \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4} \Delta t, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \text{sign}[g(t_n, x_n, \dot{x}_n)]\right) \Delta t, \\ k_4 &= f\left(t_n + \Delta t, x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{k_2}{2} \Delta t, \dot{x}_n + k_3, \text{sign}[g(t_n, x_n, \dot{x}_n)]\right) \Delta t. \end{aligned} \quad (26)$$

Formulas (26) were considered for systems with one degree of freedom, but it can be generalized for case of systems with any finite number of degrees of freedom.

Because of efficiency of modification (26) of Runge-Kutta formulas was considered for particular case only there is a problem of its usage for general case. The problem of stability conditions of integration algorithm is important. It can be expected that stability conditions will be classical in the domain of continuity  $g(t, x, \dot{x},) \neq 0$ . In case of transition through the point of discontinuity  $g(t, x, \dot{x},) = 0$  validity of computation results for mechanical systems can be estimated proceeding from mechanical laws for systems with Coulomb friction. Consideration of stability condition in general case requires further researches.

## CONCLUSION

Modification (26) of Runge-Kutta formulas for the equation (25) when  $g(t, x, \dot{x}) \neq 0$  is developed. The efficiency of the specified modification is demonstrated by the example of the concrete system with one degree of freedom, in which viscous and Coulomb frictions are present. As the efficiency of the used approach is shown only for particular case, the proof of advisability of similar methods for more general cases requires further researches. Considered approach for the numerical integration of ordinary differential equations of dynamics of systems with Coulomb and viscous friction can be generalized for case of systems with any finite number of degrees of freedom and more general and complicated law of friction.

## REFERENCES

1. Korn G., Korn T. *Mathematical handbook for scientists and engineers* — Mineola, New York : Dover Publications, 2000.
2. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of mathematics for engineers and scientists* — Boca Raton, London, New York : Chapman and Hall/CRC, 2007.
3. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations: In 2 volumes. Vol. 1 : Nonstiff problems* — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1993.
4. Пэнлеве. Лекции о трении / Пер. с франц. И. Н. Веселовского. — М. : Физматлит, 1954. — 314 с.
5. Кильчевский Н. А. *Курс теоретической механики : В 2 т. Т. 2 : Динамика системы. Аналитическая механика. Элементы теории потенциала, механики сплошной среды, специальной и общей теории относительности* — М. : Наука, 1977. — 544 с.
6. Bereteu L. Numerical integration of the differential equations for one dynamic system with dry friction coupling // *Facta Universitatis*. — 2003. — V. 3, №14, — P. 931–936.
7. Plakhtienko N. P. Investigation by the averaging method of the motion of bodies under the action of discontinuous forces // *Int. Appl. Mech.* — 1985. — V. 21, №8, — P. 798–804.
8. Plakhtienko N. P. Forced oscillations of a system with nonmonotonic discontinuous characteristic friction // *Int. Appl. Mech.* — 1980. — V. 16, №7, — P. 639–645.
9. Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* — М. : Наука, 1985. — 225 с.
10. Антонюк Е. Я. *Динамика механизмов переменной структуры* — Киев: Наук. думка, 1988. — 182 с.

DEPARTMENT OF COMPLEX SYSTEMS DYNAMICS, S. P. TIMOSHENKO  
INSTITUTE OF MECHANICS, NAS OF UKRAINE, NESTEROV STR., 3,  
KIEV, 03057, UKRAINE.

Received 25.01.2014

З М І С Т

С е р і я "О п т и м і з а ц і я"

<i>О. М. Бовсунівський</i>	
Вибір раціональних альтернатив за нечіткою множиною компромісних цілей .....	3
<i>О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький, Н. І. Ляшко</i>	
Розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел з невідомими координатами та інтенсивностями .....	9
<i>Н. В. Задоянчук</i>	
Задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: теорема існування .....	17
<i>С. О. Мащенко, Аль-Саммарраи Мохаммед Саад Ибрахим</i>	
Транспортная задача с нечеткими множествами поставщиков и потребителей .....	39
<i>М. Ю. Савкіна</i>	
Умови співпадання оцінок метода найменших квадратів та ортогональної регресії параметрів лінійної регресійної моделі .....	54
<i>В. В. Семенов, О. А. Харченко</i>	
Гібридний декомпозиційний алгоритм для операторного включення .....	60
<i>Л. М. Чабак</i>	
Про один сильно збіжний метод розв'язання задачі рівноважного програмування .....	67
<i>D. Ya. Khusainov, M. Pokojov, E. I. Azizbayov</i>	
Construction Of Exact Control For A One-Dimensional Heat Equation With Constant Delay .....	76

С е р і я "П р и к л а д н а м а т е м а т и к а"

<i>А. В. Анікушин</i>	
Узагальнена розв'язність одного інтегро-диференціального рівняння .....	88
<i>В. О. Богаєнко, В. І. Кудін</i>	
Використання передобумовлювачів на основі методу базисних матриць для розв'язання задач теорії пружності .....	96
<i>А. Л. Гуляницький</i>	
Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь .....	105

---

<i>С. С. Зуб</i>	Возможность устойчивых траекторий в магнитно-дипольных конфигурациях .....	113
<i>С. И. Ляшко, О. Б. Стеля, И. О. Стеля, Е. С. Бондарь</i>	Программное обеспечение гидрогеологической модели KRISFLOW .....	119
<i>А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, И. А. Суббота</i>	Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний .....	129
<i>А. О. Пашко</i>	Оцінка точності моделювання гауссових випадкових процесів в рівномірній метриці .....	141
<i>М. В. Присяжняя</i>	Фильтрация изображений с использованием эллипсов Петунина ...	150
<i>Р. В. Скуратовський</i>	Застосування групових структур і операції зсуву на розфарбованих графах до побудови блочних шифрів .....	157
<i>Ю. В. Шушарін</i>	Алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами .....	167
<i>А. G. Zabuga</i>	Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with coulomb friction by Runge-Kutta method .....	173