Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2013 **МАТЕМАТИКИ** 4(114)

Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський, І. М. Ляшенко, В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. М. Парасюк, І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар), Д. Я. Хусаінов, А. О. Чикрій

Серія "Прикладна математика"

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарєв, Д. А. Клюшин, В. В. Козоріз, О. М. Новіков, Т. Є. Романова

Серія "Оптимізація"

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада), Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія), Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США), Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

К. О. Пришляк, І. П. Сіренко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjournal@gmail.com html://www.opmj.univ.kiev.ua

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики
18 листопада 2013 року, протокол №3

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013
©"ТВіМС", 2013

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Підписано до друку 18.11.2013

Для публікації в журналі приймаються не опубліковані раніше наукові праці з провідних методів дослідження та розв'язування задач оптимізації, обчислювальної математики, математичної фізики, теорії фільтрації, теорії пружності, математичної кібернетики, теорії управління та інших напрямків.

У журналі публікуються статті українською, російською й англійською мовами.

Стаття у друкованому вигляді з підписами авторів подається особисто або електронною поштою з подальшим дублюванням на папері в одному примірнику.

До статті додається анкета автора (-ів): ПІБ автора(-ів) українською, російською й англійською мовами, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреса проживання й організації, телефон, факс, електронна пошта тощо та додаткова інформація: назва статті, резюме та ключові слова українською, російською й англійською мовами на електронному носії особисто або електронною поштою (див."Анкета автора" на сайті журналу www.opmj.univ.kiev.ua).

Обсяг статті не має перевищувати 12 сторінок, включаючи резюме (обсягом до 500 друкованих знаків, яке містить коротку характеристику досліджуваної проблеми, мету роботи й конкретну інформацію про отримані результати), рисунки, таблиці, графіки, список літератури та індекс УДК. Текст статті повинен відповідати структурній схемі: короткий літературний огляд проблеми, що розглядається; мета дослідження; постановка задачі та її актуальність; методи її вирішення й отримані результати; висновки про наукову новизну та практичне значення результатів. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком її згадування в тексті (посилання у тексті — арабськими цифрами у квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до ГОСТу 7.1:2006 (ознайомитися можна на сайті). Стаття має бути підготовлена за допомогою редактора LaTeX.

Редактор LaTeX може бути наданий або надісланий на електронному носії поштою на прохання автора. Додаткову інформацію, шаблони статті та анкету автора можна знайти на сайті журналу.

Місцезнаходження редакції: Україна, 01601, м. Київ, просп. Глушкова 4д, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, к. 218, редакція журналу "Журнал обчислювальної та прикладної математики", e-mail: opmjournal@gmail.com.

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 516.9

ТРИКРОКОВИЙ МЕТОД З ПОРЯДКОМ ЗБІЖНОСТІ $1+\sqrt{2}$ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ

В. Я. Бартіш, Н. П. Огородник

Резюме. В роботі запропоновано трикроковий алгоритм розв'язування задач мінімізації нелінійної функції багатьох змінних, який використовує ідею побудови трикрокових методів і базується на методі із швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$. Досліджено швидкість збіжності запропонованого алгоритму, встановлено порядок збіжності. Проведено числові експеременти на функціях різних типів, які підтвердили перевагу трикрокового алгоритму над базовим в сенсі кількості обчислень.

Вступ

У різних галузях людського життя часто виникає потреба у розв'язуванні задач оптимізації. Такі задачі часто трапляються в науці, техніці, промисловості та багатьох інших галузях. Для розв'язування актуальних проблем побудовано широкі класи алгоритмів. Різні методи виявляють свою ефективність на різних класах задач і на даний час не існує універсального алгоритму. При визначенні ефективності алгоритму враховується критерій точності результату, швидкість збіжності та складність алгоритму [1, 2].

Запропоновано алгоритм розв'язування задач мінімізації функцій, який базується на методі із швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ [3]. На кожному кроці за допомогою даного методу обчислюються два проміжні наближення до розв'язку, а наступне наближення алгоритму шукається як точка мінімуму на прямій, що з'єднує отримані точки. Показано, що швидкість збіжності даного алгоритму є $1+\sqrt{2}$ із знаменником збіжності меншим, ніж знаменник збіжності базового методу.

Проведено тестування даного алгоритму на низці відомих задач, зроблено його порівняння з базовим.

1. Формулювання задачі

Розглянемо задачу безумовної мінімізації функції багатьох змінних

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

де $x \in R^n$ і $f(x) \in C^3(R^n)$.

Одним з класичних методів розв'язування задачі (1) є метод Ньютона. До недоліків методів Ньютона відносять трудомісткість кожної ітерації. У [3] для розв'язування задачі (1) запропоновано метод, який побудовано

на основі методу Ньютона, і у якому більш ефективно використовується інформація про матрицю других похідних, а саме

$$x_{k+1} = x_k - (f''(\theta_k))^{-1} f'(x_k), \tag{2}$$

$$\theta_{k+1} = x_{k+1} - \frac{1}{2}(f''(\theta_k))^{-1} f'(x_{k+1}), \theta_0 = x_0, k = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Показано, що швидкість збіжності даного методу дорівнює $1 + \sqrt{2}$.

Використовуючи ідею побудови методів з [4], на основі методу (2)–(3) досліджено новий трикроковий метод вигляду

$$x_1 = x_0 - (f''(\theta_0))^{-1} f'(x_0), \theta_0 = x_0, \tag{4}$$

$$u_k = x_k - (f''(\theta_{k-1}))^{-1} f'(x_k), \theta_k = \frac{x_k + u_k}{2}, \tag{5}$$

$$v_k = x_k - (f''(\theta_k))^{-1} f'(x_k), \tag{6}$$

$$x_{k+1} = \arg\min_{\gamma} f(v_k + \gamma(u_k - v_k)), k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

На кожному кроці додатково проводимо мінімізацію функції однієї змінної, формула (7).

2. Обгрунтування збіжності

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1. $f(x) \in C^3(D)$, $D = \{x \in R^n : f(x) \le f(x_0)\}$;

2. $\forall x, y \in D$: $\|f'''(x)\| \le M_3$ *і* $f'''(x)$ *задовольняє умову Ліпшіца*

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le N\|x - y\|,$$

де $0 < N, M_3 < \infty$;

3. $\forall x \in D$, $h \in R^n$

$$m\|h\|^2 \le (f''(x)h, h) \le M\|h\|^2,$$

де $0 < m < M < \infty$.

Тоді послідовність $\{x_k\}$ *коректно визначена за (4)–(7) та існує константа* $0 < C < \infty$ *така, що має місце оцінка*

$$(f(x_{k+1}) - f(x^*)) \le C\beta_{k+1}(f(x_k) - f(x^*))^2(f(x_{k-1}) - f(x^*)),$$

де x^* *— розв'язок задачі (1),* $\beta_{k+1} \in (0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо початкове наближення x_0 *вибране так, що виконується умова*

$$\mu = \sqrt{C}(f(x_0) - f(x^*)) < 1, \tag{8}$$

то

$$f(x_k) - f(x_*) \le \prod_{i=1}^{k} \beta_i^{l_{k+1-i}} \mu^{D_k}(f(x_0) - f(x_*)), k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

де $D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1} + 2$, *причому* $D_0 = 0$, $D_1 = 1$, $l_{k+1} = 2l_k + l_{k-1}$, $l_0 = 0$, $l_1 = 1$.

Доведення. Згідно з умовою 3) функція $f(x)$ сильно опукла. Отже, розв'язок задачі (1) існує та єдиний, при цьому справедлива оцінка [2]

$$\|f''(x)^{-1}\| \le \frac{1}{m}.$$

Припустимо, що наближення x_k, $k>1$ до розв'язку задачі (1), знайдено. Тоді враховуючи (6), маємо

$$\|v_k - x^*\| = \|x_k - (f''(\theta_k))^{-1} f'(x_k) - x^*\| \le \|(f''(\theta_k))^{-1}\| \times$$

$$\times \|f''(\theta_k)(x_k - x^*) - f'(x_k)\| \le \frac{1}{m}\|f''(\theta_k)(x_k - x^*) - (f'(x_k) - f'(x^*))\|. \quad (10)$$

Використовуючи розклад $f''(\theta_k)$ та $f'(x_k)$ в околі точки x^* та умову 2) теореми, отримаємо (при умові, що $\tau_1, \tau_2 \in (0,1)$)

$$\|v_k - x^*\| \le \frac{1}{m}\|f''(x^*)(x_k - x^*) + f'''(x^* + \tau_1(\theta_k - x^*))(\theta_k - x^*)(x_k - x^*) -$$

$$- f''(x^*)(x_k - x^*) - \frac{1}{2} f'''(x^* + \tau_2(x_k - x^*))(x_k - x^*)^2\| \le$$

$$\le \frac{N}{m}\|x^* + \tau_1(\theta_k - x^*) - x^*\|\|\theta_k - x^*\|\|x_k - x^*\| + \frac{N}{2m}\|x^* + \tau_2(x_k - x^*) - x^*\| \times$$

$$\times \|x_k - x^*\|^2 + \frac{1}{m}\|f'''(x^*)(\theta_k - x^*)(x_k - x^*) - \frac{1}{2} f'''(x^*)(x_k - x^*)^2\| \le$$

$$\le \frac{N}{m}\|\theta_k - x^*\|^2\|x_k - x^*\| + \frac{N}{2m}\|x_k - x^*\|^3 +$$

$$+ \frac{M_3}{2m}\|x_k - x^*\|\|u_k - x^*\|. \quad (11)$$

Використавши (5) та роклад $f''(\theta_{k-1})$ і $f'(x_k)$ в околі x^*, запишемо оцінку

$$\|u_k - x^*\| = \|x_k - (f''(\theta_{k-1}))^{-1} f'(x_k) - x^*\| \le \|(f''(\theta_{k-1}))^{-1}\| \times$$

$$\times \|f''(\theta_{k-1})(x_k - x^*) - f'(x_k)\| \le \frac{1}{m}\|f''(\theta_{k-1})(x_k - x^*) - (f'(x_k) - f'(x^*))\| \le$$

$$\le \frac{1}{m}\|f''(x^*)(x_k - x^*) + f'''(x^* + \tau_1(\theta_{k-1} - x^*))(\theta_{k-1} - x^*)(x_k - x^*) -$$

$$- f''(x^*)(x_k - x^*) - \frac{1}{2} f'''(x^* + \tau_2(x_k - x^*))(x_k - x^*)^2\| \le$$

$$\le \frac{1}{m}\|f'''(x^* + \tau_1(\theta_{k-1} - x^*))\|\|\theta_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\| +$$

$$+ \frac{1}{2m}\|f'''(x^* + \tau_2(x_k - x^*))\|\|x_k - x^*\|^2 \le \frac{M_3}{m}\|\theta_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\| +$$

$$+ \frac{M_3}{2m}\|x_k - x^*\|^2. \quad (12)$$

Використавши умови теореми, отримаємо

$$\frac{m}{2}\|x - x^*\|^2 \le f(x) - f(x_*) \le \frac{M}{2}\|x - x^*\|^2.$$

Тоді, врахувавши (7), маємо

$$\|u_k - x^*\|^2 \le \frac{2}{m}(f(u_k) - f(x^*)) \le \frac{2}{m}(f(x_k) - f(x^*)) \le \frac{M}{m}\|x_k - x^*\|^2$$

або

$$\|u_k - x^*\| \le \sqrt{\frac{M}{m}}\|x_k - x^*\|.$$

Використаємо (5) та запишемо

$$\|\theta_k - x^*\| = \|\frac{u_k + x_k}{2} - x^*\| \le \frac{1}{2}(\|u_k - x^*\| + \|x_k - x^*\|) \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{M}{m}} + 1)\|x_k - x^*\|. \tag{13}$$

Продовжимо оцінку (11), використавши (12) та (13) та умову 2):

$$\|v_k - x^*\| \le \frac{N}{m}\|\theta_k - x^*\|^2\|x_k - x^*\| + \frac{N}{2m}\|x_k - x^*\|^3 +$$

$$+\frac{M_3}{2m}\|x_k - x^*\|(\frac{M_3}{m}\|\theta_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\| + \frac{M_3}{2m}\|x_k - x^*\|^2) \le$$

$$\le \frac{N}{4m}(\sqrt{\frac{M}{m}} + 1)^2\|x_k - x^*\|^3 + \frac{N}{2m}\|x_k - x^*\|^3 +$$

$$+(\frac{M_3}{2m})^2(\sqrt{\frac{M}{m}} + 1)\|x_k - x^*\|^2\|x_{k-1} - x^*\| + (\frac{M_3}{2m})^2\|x_k - x^*\|^3 \le$$

$$\le (\frac{N}{4m}(\sqrt{\frac{M}{m}}+1)^2 + \frac{N}{2m} + (\frac{M_3}{2m})^2(\sqrt{\frac{M}{m}}+1) + (\frac{M_3}{2m})^2)\|x_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\|^2 =$$

$$= \tilde{C}\|x_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\|^2,$$

де $\tilde{C} = \frac{N}{4m}(\sqrt{\frac{M}{m}} + 1)^2 + \frac{N}{2m} + (\frac{M_3}{2m})^2(\sqrt{\frac{M}{m}} + 1) + (\frac{M_3}{2m})^2 < \infty$.

Тоді

$$f(v_k) - f(x_*) \le \frac{M}{2}(\tilde{C})^2\|x_{k-1} - x^*\|^2\|x_k - x^*\|^4 \le$$

$$\le \frac{M}{2}(\tilde{C})^2(\frac{2}{m})^3(f(x_{k-1}) - f(x_*))(f(x_k) - f(x_*))^2 =$$

$$= C(f(x_{k-1}) - f(x_*))(f(x_k) - f(x_*))^2. \tag{14}$$

З формул (7) і (14) випливає

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \le \beta_{k+1}C(f(x_{k-1}) - f(x_*))(f(x_k) - f(x_*))^2,$$

де $\beta_{k+1} \in (0, 1]$.

За допомогою методу математичної індукції, враховуючи (8), доведемо, що оцінка (9) виконується для довільного k. Спершу запишемо оцінку для $f(x_1) - f(x^*)$:

$$f(x_1) - f(x^*) \le \frac{M}{2}\|x_1 - x^*\|^2 = \frac{M}{2}\|x_0 - x^* - (f''(x_0))^{-1}f'(x_0)\|^2 \le$$

$$\le \frac{M}{2m^2}\|f''(x_0) - f''(x^* + \tau(x_0 - x^*))\|^2\|x_0 - x^*\|^2 \le \frac{MM_3}{m^2}\|x_0 - x^*\|^4 \le$$

$$\le \frac{MM_3}{m^2}(\frac{2}{m})^2\|f(x_0) - f(x^*)\|^2 \le \sqrt{C}(f(x_0) - f(x^*))\|^2 \le \mu^{D_1}(f(x_0) - f(x^*)),$$

де $\sqrt{C} = max\{\frac{MM_3}{m^2}(\frac{2}{m})^2, \tilde{C}\sqrt{\frac{M}{m}}\frac{2}{m}\} < \infty$.

Якщо $k=1$, одержимо

$$f(x_2)-f(x^*)\le\beta_2C(f(x_0)-f(x^*))(f(x_1)-f(x^*))^2\le$$
$$\le\beta_2C(f(x_0)-f(x^*))\beta_1^{2l_1}\mu^{2D_1}(f(x_0)-f(x^*))^2\le$$
$$\le\mu^2\mu^{2D_1}\beta_2^{l_1}\beta_1^{2l_1}(f(x_0)-f(x^*))\le$$
$$\le\prod_{i=1}^{2}\beta_i^{l_{3-i}}\mu^{D_2}(f(x_0)-f(x^*)).$$

Припустимо, що дана оцінка виконується для деякого $k>1$, тобто

$$f(x_k)-f(x^*)\le\prod_{i=1}^{k}\beta_i^{l_{k+1-i}}\mu^{D_k}(f(x_0)-f(x^*)).$$

Тоді для $k+1$, отримаємо

$$f(x_{k+1})-f(x^*)\le\beta_{k+1}C(f(x_{k-1})-f(x^*))(f(x_k)-f(x^*))^2\le,$$
$$\le\beta_{k+1}C(\prod_{i=1}^{k}\beta_i^{l_{k+1-i}})^2\mu^{2D_k}(f(x_0)-f(x^*))^2\prod_{i=1}^{k-1}\beta_i^{l_{k-i}}\mu^{D_{k-1}}(f(x_0)-f(x^*))=$$
$$=\beta_{k+1}\prod_{i=1}^{k}\beta_i^{2l_{k+1-i}}\prod_{i=1}^{k-1}\beta_i^{l_{k-i}}\mu^{2D_k+D_{k-1}+2}(f(x_0)-f(x^*))=$$
$$=\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i^{l_{k+2-i}}\mu^{D_{k+1}}(f(x_0)-f(x^*)).$$

Отже, за методом математичної індукції маємо, що послідовність наближень, побудованих за формулами (4)–(7), збігається до x_*. □

3. Чисельні експерименти

Нами розглянуто ряд прикладів і проведено порівняння запропонованого трикрокового алгоритму (4)–(7) з базовим методом із швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ (2)–(3). Для забезпечення вибору довільного початкового наближення у методи було введено крокові множники.

Обчислення проводили до виконання умови

$$\|x_{k+1}-x_k\|\le\varepsilon,$$

де $\varepsilon=10^{-8}$. В таблиці наведено кількість ітерацій N та кількість обчислень, еквівалентних обчисленню функції K, затрачених для отримання наближеного розв'язку наведених задач з [5].

1. Штрафна функція

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-1)^2+(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-0.25)^2;$$

$$x^0=(10,10,\dots,10);\qquad x^0=(5,5,\dots,5);\qquad n=2,3,\dots.$$

Розв'язок залежить від значення n.

2. Розширена функція Вайта і Холста

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2}[100(x_{2i} - x_{2i-1}^3)^2 + (1 - x_{2i-1})^2];$$

$$x^0 = (-1, 0.8, -1, 0.8 \ldots, -1, 0.8); \qquad x^0 = (0, 0, \ldots, 0); \qquad n = 2, 4, \ldots;$$
$$x^* = (1, 1, \ldots 1); \qquad f(x^*) = 0.$$

3. Розширена функція Пауела

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/4}[(x_{4i-3}+10x_{4i-2})^2+5(x_{4i-1}-x_{4i})^2+(x_{4i-2}-2x_{4i-1})^4+10(x_{4i-3}-x_{4i})^4];$$

$$x^0 = (3, -1, 0, 1, \ldots, 3, -1, 0, 1); \qquad x^0 = (30, -10, 0, 10, \ldots, 30, -10, 0, 10);$$
$$n = 4, 8, 12, 16, \ldots; \qquad x^* = (0, 0, \ldots, 0); \qquad f(x^*) = 0.$$

4. Штрафна функція 1

$$f(x) = 10^{-5}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 0.25)^2;$$

$$x^0 = (10, 10, \ldots, 10); \qquad x^0 = (5, 5, \ldots, 5); \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Розв'язок залежить від значення n.

Таблиця 1

ф-ція	x_0	$n = 4$				$n = 100$			
		(2)–(3)		(4)–(7)		(2)–(3)		(4)–(7)	
		N	K	N	K	N	K	N	K
1	1	10	145	7	467	12	61901	6	31878
1	2	9	131	7	433	10	51601	6	31876
2	1	23	585	19	893	23	234729	19	194459
2	2	19	483	12	605	19	193923	12	122824
3	1	35	495	2	119	38	195801	2	10679
3	2	39	551	2	119	43	221551	2	10679
4	1	11	159	2	120	12	62514	2	10680
4	2	10	145	2	149	13	67051	2	10680

Висновки

В даній статті запропоновано новий метод розв'язування задач безумовної мінімізації функцій багатьох змінних. Метод побудовано на основі методу із швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$, використовуючи ідею побудови трикрокових алгоритмів. В якості проміжних наближень у даному трикроковому методі використано наближення отримані за методом (2)–(3). Отже, на кожній ітерації алгоритму потрібно додатково проводити одновимірну

мінімізацію. При невеликих розмірностях функції, кількість обчислень затрачених на одновимірну мінімізацію може впливати на ефективність запропонованого методу (як видно з таблиці). Із збільшенням розмірності функції ($n > 10$) кількість обчислень затрачених на одновимірну мінімізацію стає несуттєвою в порівнянні із кількістю обчислень, затрачених на знаходження другої похідної запропонований алгоритм починає працювати краще. Проведено теоретичні та числові дослідження даного методу. Доведено, що швидкість збіжністі методу (4)–(7) є $1+\sqrt{2}$.

В числових експериментах запропонований трикроковий метод показав суттєві переваги для великої кількості тестових функцій, особливо для функцій з виродженим в точці розв'язку гессіаном (функції 3 і 4).

Література

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
2. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.Численные методы в экстремальных задачах — М. : Наука, 1975. — 320с.
3. Бартіш М. Я., Ковальчук О., Огородник Н. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь // ДАН УРСР. Сер. А. — 1968. — №5. — С. 387–391.
4. Бартіш М. Трикрокові методи розв'язування задач безумовної мінімізації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — Вип. 13. — С. 3–10.
5. Andrei N. An unconstrained optimization test functions collection // Advanced modelling and optimization. — 2008. — V. 10, №1. — P. 147–161.

Факультет прикладної математики та інформатики,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 70000, Україна.

Надійшла 01.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Н. В. Задоянчук, О. П. Купенко

Резюме. Досліджується задача оптимального керування для еліптичної варіаційної нерівності з однорідними умовами Діріхле на межі області у випадку, коли пов'язаний з нею лінійний еліптичний оператор не завольольняє умовам коерцитивності та обмеженності. Залучаючи нерівність Харді-Пуанкаре, отримано достатні умови, за яких наведена оптимізаційна задача має єдиний розв'язок.

Ключові слова: Задача Діріхле, еліптична вараційна нерівність, вироджена вагова функція, нерівність Харді-Пуанкаре

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає задача оптимального керування для такої виродженої еліптичної варіаційної нерівності: знайти елемент $y \in K$ такий, щоб співвідношення

$$\langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y), v-y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} \geq \langle f(x)+u(x), v-y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)}$$

мало місце для всіх елементів $v \in K$. Тут f — задане розподілення, u — керування, ρ — невід'ємна вагова функція з властивостями $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ і $\rho+\rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$, а K — опукла підмножина вагового простору Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)$.

Характерною рисою вироджених еліптичних рівнянь, варіаційних нерівностей та пов'язаних з ними оптимізаційних задач є той факт, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Дійсно, оскільки в силу зроблених припущень функції ρ та ρ^{-1} можуть бути локально необмеженими, то відповідний диференціальний оператор втрачає властивості коерцитивності та неперервності на $H_0^1(\Omega)$. У свою чергу, це призводить до таких наслідків як неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності, ефекту Лаврентьєва та інше (див. [1, 2, 3, 4]).

Дана робота ставить за мету отримати на функцію ρ достатні умови, за яких наведена задача оптимального керування має єдиний розв'язок навіть якщо простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у ваговому просторі Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)$. Для цього в роботі залучається перетворення, за

яким вихідна задача зводиться до проблеми оптимального керування еліптичною варіаційною нерівністю з необмеженими коефіцієнтами потенціального типу, і за нерівністю типу Харді-Пуанкаре досліджується питання про існування її єдиного розв'язку.

2. Основні позначення та факти

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ — відкрита обмежена область з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ така, що $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з носіями в Ω. Через $H_0^1(\Omega)$ та $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$ позначимо простори Соболєва, які утворено шляхом замикання $C_0^\infty(\Omega)$ за нормами

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla y(x)|^2_{\mathbb{R}^N} \, dx \right)^{1/2}$$

та

$$\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|y\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla y\|^p_{L^p(\Omega)^N} \right)^{1/p},$$

відповідно, а через $H^{-1}(\Omega)$ — дуальний до $H_0^1(\Omega)$ простір.

Нехай є заданою функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ така, що: $\rho(x) > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω,

$$\rho \in L^1(\Omega),\ \rho^{-1} \in L^1(\Omega),\ \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \ \text{ і } \ \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \quad (1)$$

В цьому випадку функцію ρ можна утотожнити з невід'ємною мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int_E \rho(x)\, dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, що є скінченною на кожній компактній множині. Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина $\mathcal{O}$ множини Ω така, що

$$\operatorname{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = \varepsilon, \quad \rho > \varepsilon \ \text{ м.с. в } \ \Omega \setminus \mathcal{O}, \quad \text{і} \quad \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{O}) \quad (2)$$

для деякого $\varepsilon > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω.

Надалі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1)–(2) будемо називати виродженною ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho\, dx)$, $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ та $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$, де через $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$ позначено ваговий простір Соболєва, який утворений тими елементами з $W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких є скінченною норма

$$\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} = \left(\int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \right)^{1/2}.$$

Зокрема, $f \in L^2(\Omega, \rho\, dx)$, якщо

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} = \int_\Omega f^2 \rho\, dx < +\infty.$$

Нехай $\lambda_* = (N-2)^2/4$. Тоді для довільної відкритої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ знайдеться стала величина $C(\Omega) > 0$ така, що

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx \quad \forall\, y \in H^1_0(\Omega). \tag{3}$$

В літературі співвідношення (3) зазвичай називають нерівністю типу Харді-Пуанкаре (див. [5]). Як випливає з (3), для довільних $y \in H^1_0(\Omega)$ та $\lambda \in \mathbb{R}_+$ можна записати

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx = \\ = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq \\ \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda\, C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Отже, якщо $0 < \lambda < \lambda_*$, то

$$\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \right)^{1/2} \quad \text{та} \quad \left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx \right)^{1/2}$$

є еквівалентними нормами в просторі Соболєва $H^1_0(\Omega)$.

3. Постановка задачі

Нехай K — непорожня опукла підмножина простору $W^{1,2}_0(\Omega; \rho\, dx)$, яка є секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|^2_\rho := \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx. \tag{5}$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ та $u_0 \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ — задані розподілення, а U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ така, що

$$U_\partial = \{ u \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx) :\ \|u - u_0\|_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} \leq R \}. \tag{6}$$

Тут $\|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} = \int_\Omega u^2(x) \rho^{-1}\, dx$. Всюди далі функції $u \in U_\partial$ розглядаються як допустимі керування.

Розглянемо таку задачу оптимального керування для варіаційної нерівності з керуванням у правій частині:

$$I(u, y) = \frac{1}{2} \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega, \rho dx)} + \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} \to \inf, \tag{7}$$

$$u \in U_\partial,\ y \in K, \tag{8}$$

$$\int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \geq \int_\Omega (f + u)\, (v - y)\, dx \quad \forall\, v \in K. \tag{9}$$

Задача оптимального керування (7)–(9) полягає у визначенні пари функцій $(u^0, y^0) \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$ (надалі її будемо називати оптимальною), яка б задовольняла співвідношення (8), (9) і на якій функціонал (7) досягав би свого найменшого можливого значення.

Пов'яжемо з варіаційною нерівністю (9) лінійний оператор

$$A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^*,$$

залучивши правило:

$$\left\langle Ay,\ v - y\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} = \int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \quad \forall v \in K.$$

Тут

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} : \left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^* \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \mathbb{R}$$

є операцією дуального спарювання елементів з просторів $\left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^*$ та $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$, відповідно. Тоді ясно, що

$$Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y),$$

а отже, в силу вихідних припущень, означений оператор $A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^*$ не задовольняє умові коерцитивності. Дійсно, оскільки

$$\langle Ay, y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} = \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \neq \|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} \quad \forall y \in W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx),$$

то не має жодних підстав стверджувати факт існування елемента $v_0 \in K$ такого, що

$$\frac{\langle Ay, y - v_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)}}{\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)}} \to +\infty \text{ при } \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} \to \infty,\ y \in K.$$

До того ж множина K, в загальному випадку, не є замкненою підмножиною простору $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$. В результаті проблема існування розв'язків варіаційної нерівності (9) на класі допустимих керувань залишається відкритим питанням.

Таким чином, характерною рисою задачі оптимального керування (7)–(9) є те, що за певного вибору функції ρ з властивостями (1) відповідна множина допустимих розв'язків задачі (7)–(9) може виявитися порожньою.

4. Попередній аналіз задачі оптимального керування (7)–(9)

Для подальшого дослідження задачі (7)–(9) нам знадобиться такий результат (для порівняння, див. також [6]).

Твердження 1. *Для довільного елемента $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ має місце подання $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)$ і покажемо, що $z = y\sqrt{\rho} \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Дійсно, маємо

$$\|z\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |y\sqrt{\rho}|^2\,dx = \left(\int_\Omega y^2\rho\,dx\right) \le C\|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)}.$$

Далі, залучаючи перетворення

$$\nabla(\sqrt{\rho}\,y) = y\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho + \sqrt{\rho}\,\nabla y = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{1}{2\rho}y\nabla\rho\right) = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right)$$

та властивості вагової функції $\rho(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} &= \int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right)\right|_{\mathbb{R}^N} dx \le \\ &\le \int_\Omega |\sqrt{\rho}\nabla y|_{\mathbb{R}^N}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\sqrt{\rho}y\nabla\ln\rho|_{\mathbb{R}^N}dx \le \\ \le \left(\int_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}dx\right)^{1/2}|\Omega|^{1/2} &+ \frac{1}{2}\left(\int_\Omega y^2\rho\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}dx\right)^{1/2} \le \\ &\le C_1\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)}.\end{aligned}$$

Таким чином, $z \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Окрім того, елемент $z = y\sqrt{\rho}$, успадковує властивості сліду вздовж межі області $\partial\Omega$ від елементу y, і нарешті, отримаємо $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Твердження доведене. □

Насправді, відображення $\varphi : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx) \to W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, що визначається як $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$, не є сюр'єктивним. Проте у просторі $W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ множина його образів $\varphi(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx))$ є щільною. Легко бачити, що для довільного $z \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ маємо $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)$. Дійсно,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} &= \int_\Omega \frac{z^2}{\rho}\,\rho\,dx + \int_\Omega \left|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx \le \\ &\le \|z^2\|_{C(\Omega)}|\Omega| + 2\int_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega z^2|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx \le \\ &\le \|z^2\|_{C(\Omega)}|\Omega| + 2\||\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}\|_{C(\Omega)}|\Omega| + \frac{1}{2}\|z^2\|_{C(\Omega)}\|\nabla\ln\rho\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \infty.\end{aligned}$$

Таким чином, як очевидний наслідок попереднього результату та неперервності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, отримаємо такий результат.

Наслідок 1. *Існує щільна множина $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$ така, що*

$$\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)\ \forall\, z \in D_\rho.$$

Приймаючи до уваги дане твердження, введемо до розгляду лінійне відображення

$$\mathfrak{F} : D_\rho \subset H_0^1(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx), \quad \text{де} \quad \mathfrak{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}.$$

Оскільки область визначення D_ρ даного відображення є щільною множиною банахового простору $H_0^1(\Omega)$, то для $\mathfrak{F}$, як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор

$$\mathfrak{F}^* : D\left(\mathfrak{F}^*\right) \subset \left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)\right)^* \to H^{-1}(\Omega)$$

такий, що

$$\langle \mathfrak{F}^* v, z\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle v, \mathfrak{F} z\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \ \forall\, z \in D_\rho \text{ і } \forall\, v \in D\left(\mathfrak{F}^*\right),$$

де

$$D\left(\mathfrak{F}^*\right) = \left\{ v \in \left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)\right)^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, C > 0 \text{ таке, що для всіх } z \in D_\rho \\ \left|\langle v, \mathfrak{F} z\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}\right| \le C \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array} \right\}.$$

Проте, в загальному випадку, спряжений оператор $\mathfrak{F}^*$ не є щільно визначеним.

Введемо до розгляду таке поняття.

Означення 1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho > 0$ м. с. на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, $\nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ і існують стала $\widehat{C}(\Omega) > 0$ і підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*})$, де $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$, і при цьому виконуються такі нерівності:

$$\rho(x) \ge \sigma \text{ на } \Omega \setminus \Omega_* \text{ при деякому } \sigma > 0, \tag{10}$$

$$-\widehat{C}(\Omega) \le -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{11}$$

В цьому випадку функцію $V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ.

Наступне твердження встановлює важливу властивість оператора

$$A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^*.$$

Теорема 1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді*

$$\langle A\left(\mathfrak{F} z\right), \mathfrak{F} v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} = \langle B(z), v\rangle_{H_0^1(\Omega)}, \tag{12}$$

де

$$B(z) = -\triangle z - \frac{1}{2} V(x) z, \tag{13}$$

$$V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \tag{14}$$

і лінійний оператор B визначає ізоморфізм простору $H_0^1(\Omega)$ в його дуальний простір $H^{-1}(\Omega)$.

Доведення. Нехай v та z – довільні елементи з $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$. Тоді, за наслідком 1, маємо $\mathfrak{F}z, \mathfrak{F}v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx)$. Далі, згідно означення оператора $\mathfrak{F}$, можна отримати таку низку перетворень

$$\begin{aligned} A\left(\mathfrak{F}z\right) &= -\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\mathfrak{F}z\right)\right) = -\mathrm{div}\left(\rho\,\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right) = \\ &= -\rho^{1/2}\triangle z + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\left(\rho\triangle\rho - \frac{1}{2}|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right) z = \\ &= -\sqrt{\rho}\,\triangle z - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,z\left(-\frac{\triangle\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}\right) = \\ &= \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\,z\,V(x)). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} &= |\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \\ \triangle\ln\rho = \mathrm{div}(\nabla\ln\rho) &= \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right) = \frac{\triangle\rho\cdot\rho - (\nabla\rho,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = \\ &= \frac{\triangle\rho\cdot\rho}{\rho^2} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = \frac{\triangle\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}, \end{aligned}$$

то функцію $V(x)$ можна подати у вигляді

$$V(x) = -\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = -\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{15}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &\left\langle A\left(\mathfrak{F}z\right), \mathfrak{F}v\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\ &\qquad = \left\langle -\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\ &\qquad = \left\langle \rho^{1/2}\Big(-\mathrm{div}\left(\nabla z\right) - \frac{1}{2}V(x)z\Big), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\ &\qquad\qquad = \left\langle -\triangle z - \frac{1}{2}V(x)z, v\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle B(z), v\right\rangle_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Насамкінець, оскільки вагова функція ρ є функцією потенціального типу, то з нерівності Харді-Пуанкаре випливає еквівалентінсть в просторі $H_0^1(\Omega)$ норм $\left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}$ та $\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda\frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}}\right] dx\right)^{1/2}$, а це означає, що оператор B визначає ізоморфізм між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$. □

З огляду на отримані результати, зауважимо наступну властивість множини K. Оскільки K є замкненою підмножиною простору $\mathcal{W}_\rho$, який утворимо як замикання простору фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою (5),

$$\mathcal{W}_\rho := \mathrm{cl}_{\|\cdot\|_\rho} C_0^\infty(\Omega),$$

то для будь-якого елемента $y \in K$ маємо: $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ за твердженням 1, та $\|y\|_\rho = \left\| \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right\|_\rho < +\infty$ (за вихідними припущеннями). Звідки отримуємо, що $z \in H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для довільного $y \in \mathcal{W}_\rho$, маємо

$$\begin{aligned}
\|y\|^2_{\mathcal{W}_\rho} &= \int_\Omega y^2(x)\rho(x)\,dx + \int_\Omega \left| \nabla y(x) + \frac{y(x)}{2} \nabla \ln \rho(x) \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = \\
&= \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 dx + \int_\Omega \left| \sqrt{\rho}\,\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}} \nabla \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} dx = \\
&= \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2\,dx + \int_\Omega |\nabla(\sqrt{\rho}\,y)|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx = \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Отже, $K \subset \mathfrak{F}(D_\rho)$.

Приймаючи до уваги даний результат, перейдемо у варіаційній нерівності (9) до її еквівалентного опису. Для цього утворимо множину

$$K' = \left\{ \eta \in H_0^1(\Omega) \mid \eta = \sqrt{\rho}\,y, \forall\, y \in K \subset W_0^{1,2}(\Omega; \rho\,dx) \right\},$$

яка за побудовою та вихідними припущеннями є замкненою опуклою підмножиною простору $H_0^1(\Omega)$. В результаті, для вихідного об'єкту керування (8)–(9), маємо такий результат:

Твердження 2. *$y \in K$ є розв'язком варіаційної нерівності* (8)–(9) *тоді і тільки тоді, коли $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in K'$ задовольняє співвідношення*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\,dx - \int_\Omega \frac{1}{2} V(x) z\,(w - z)\,dx \geq \\
\geq \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right)(w - z)\,dx \quad \forall\, w \in K'. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Доведення. Оскільки для довільного $v \in K$ існує елемент $w \in K'$ такий, що $v = \mathfrak{F} w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$, маємо

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f + u)\,(v - y)\,dx &= \int_\Omega (f + u) \left(\frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) dx = \\
&= \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right)(w - z)\,dx \quad \forall\, w \in K',
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx = \langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y), v - y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$

$$= \langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla(\mathfrak{F}z)), \mathfrak{F}w - \mathfrak{F}z\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$

$$= \left\langle -\mathrm{div}\left(\rho(x)\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$

$$= \left\langle \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\, z\, V(x)), \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$

$$= \left\langle -\triangle z - \frac{1}{2}\, V(x) z, w - z\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{2}\, V(x) z\, (w - z)\, dx.$$

□

Тепер покажемо, що коли обирати в якості вагової функції $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ функцію потенціального типу, варіаційна нерівність (9) матиме єдиний розв'язок при кожному допустимому керуванні $u \in U_\partial$. Для цього скористаємось наступними відомими результатами Ж.-Л. Ліонса (див. [7]), які стосуються розв'язності нелінійних варіаційних нерівностей.

Твердження 3. [7, теорема 8.2] *Нехай V — банахів простір і $K \subset V$ — замкнена опукла підмножина. Нехай також $A : K \to V^*$ — нелінійний оператор, $f \in V^*$ — задане розподілення і нехай для A виконуються такі умови:*

1. *A — псевдомонотонний оператор, а саме, A є обмеженим і таким, що при $y_k \to y$ слабко в V, y_k, $y \in K$ і $\overline{\lim}_{k\to\infty}\langle A(y_k), y_k - y\rangle_V \le 0$, має місце нерівність*

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \langle A(y_k), y_k - v\rangle_V \ge \langle A(y), y - v\rangle_V \ \forall v \in V;$$

2. *A — коерцитивний оператор, тобто існує елемент $v_0 \in K$ такий, що*

$$\frac{\langle A(y), y - v_0\rangle_V}{\|y\|_V} \to +\infty \text{ при } \|y\|_V \to \infty,\ y \in K. \tag{17}$$

Тоді варіаційна задача знаходження елементу $y \in K$, при якому

$$\langle A(y), v - y\rangle_V \ge \langle f, v - y\rangle_V \ \forall v \in K, \tag{18}$$

має принаймні один розв'язок.

Твердження 4. [7, теорема 8.3] *Якщо оператор $A : K \to V^*$ у твердженні 3 є строго монотонним на K, то варіаційна задача (18) має єдиний розв'язок.*

Встановимо такий результат:

Теорема 2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ та $u \in U_\partial$ варіаційна нерівність* (8)–(9) *має єдиний розв'язок $y = y(u, f) \in K$ такий, що $y = z/\sqrt{\rho}$ і $z \in H_0^1(\Omega)$.*

Доведення. Оскільки варіаційні нерівності (8)–(9) та (16) є еквівалентними з точки зору проблеми їх розв'язності, то покладемо $V = H_0^1(\Omega)$ і покажемо, що в цьому випадку для варіаційної нерівності (16) виконуються усі передумови твердження 3. Згідно теореми 1, з нерівністю (16) можна пов'язати лінійний оператор $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, який означений за правилом:

$$\langle Bz, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \left((\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x) z w \right) dx. \tag{19}$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (10), (11) та нерівність Харді-Пуанкаре, отримуємо (див.(4)): існує стала $C_1 > 0$ така, що:

$$\langle Bz, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{20}$$

$$\langle B(z-w), z-w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \left((\nabla(z-w))^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x)(z-w)^2 \right) dx \ge$$
$$\ge C_1 \|z-w\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0 \quad \forall\, z \ne w. \tag{21}$$

Отже, оператор B є обмеженим, строго монотонним і коерцитивним в сенсі

$$\frac{\langle Bz, z\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z\|_{H_0^1(\Omega)}} \to +\infty, \text{ якщо } \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty.$$

Тоді, за твердженням 2.5 з [7], відображення $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ є псевдомонотонним. Окрім того, для довільного елемента $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ та для всіх $z \in K'$, згідно (21) та оцінки (20), маємо:

$$\langle Bz, z - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle Bz, z\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle Bz, w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} \ge$$
$$\ge C_1 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} - |\langle Bz, w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}| \ge C_1 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Отже, $\dfrac{\langle Bz, z - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z\|_{H_0^1(\Omega)}} \to +\infty$, при $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

Оскільки умова $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ гарантує, що $\dfrac{f}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega)$, а простір $L^2(\Omega)$ компактно вкладається в $H^{-1}(\Omega)$, то виконуються всі передумови твердження 3. Таким чином, варіаційна задача (16) має єдиний розв'язок $z \in K'$ при кожному фіксованому допустимому керуванні $u \in U_\partial$. □

Беручи до уваги наведені вище перетворення, розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$J(p, w) = \frac{1}{2}\|z - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(\Omega)} \to \inf, \tag{22}$$

за обмежень (16) та за умови, що

$$z \in K', \quad p \in P_\partial := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \ \left\| p - \frac{u_0}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Omega)} \le R \right\}. \tag{23}$$

Далі розглянемо такі множини:
$\Lambda = \big\{(p,z) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$ де p та $z -$ пов'язані співвідношенням

$$\int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{2} V(x) z\,(w-z)\, dx \geq$$
$$\geq \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + p\right)(w-z)\, dx \quad \forall\, w \in K'$$

та задовольняють обмеження (23)$\}$,

$\Xi = \{(u,y) \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho dx),$ де u і y задовольняють (8)–(9)$\}$, які надалі будемо називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (22), (16), (23) та (7)–(9) відповідно.

Означення 2. Будемо казати, що пари функцій $(p^0, z^0) \in \Lambda$ та $(u^0, y^0) \in \Xi$ є оптимальними розв'язками задач (22), (16), (23) та (7)–(9) відповідно, якщо

$$\inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p,z) = J(p^0, z^0), \quad \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^0, y^0).$$

Наступний результат показує, що означені задачі оптимального керування є в певному сенсі еквівалентними. Отже, з регулярності задачі (22), (16), (23) (див. теорему 2), буде випливати регулярність задачі оптимального керування (7)–(9).

Теорема 3. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $(p^0, z^0) \in \Lambda$ є оптимальною в задачі* (22), (16), (23) *в тому і тільки в тому випадку, коли*

$$(u^0, y^0) := \left(\sqrt{\rho} p^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{24}$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (7)–(9). *При цьому має місце рівність*

$$\inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p,z) = J(p^0, z^0) = I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y). \tag{25}$$

Доведення. Як випливає з твердження 2, об'єкти керування задач оптимального керування (7)–(9) і (22), (16), (23) є еквівалентними, більше того, розв'язки цих двох варіаційних нерівностей пов'язані співвідношенням $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$. Означивши в просторі $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ відображення $\mathcal{G}$ за правилом $\mathcal{G}(u) = \dfrac{u}{\sqrt{\rho}}$, легко бачити, що воно ізометрично відображає простір $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ на простір $L^2(\Omega)$. Дійсно, для довільного керування $u \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ маємо $p = \mathcal{G}(u)$, де

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} = \int_\Omega u^2(x)\rho^{-1}(x)\, dx = \int_\Omega p^2(x)\, dx = \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Більше того, умова (23) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u \in U_\partial \Leftrightarrow p = \frac{u}{\sqrt{\rho}} \in P_\partial. \tag{26}$$

Таким чином, $(u, y) \in \Xi \Leftrightarrow (p, z) \in \Lambda$. Для завершення доведення залишається зауважити, що для будь-якої пари $(u, y) \in \Xi$ має місце рівність

$$I(u,y) = \frac{1}{2}\left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega,\rho dx)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega,\rho^{-1}dx)} =$$
$$= \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}y - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\| \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = J(p,z),$$

що гарантує виконання умови (25). □

5. Теорема існування

Доведемо розв'язність вихідної задачі оптимального керування (7)–(9).

Теорема 4. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування (7)–(9) має єдиний розв'язок (u^0, y^0) в просторі $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$.*

Доведення. За теоремою 3 задачі (22), (16), (23) та (7)–(9) є еквівалентними. Отже, для однозначної розв'язності задачі (7)–(9) достатньо показати, що задача (22), (16), (23) має єдиний розв'язок. Для початку зауважимо, що відображення $p \mapsto z(p)$ простору $L^2(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ є слабко неперервним. Дійсно, оберемо довільну послідовність допустимих керувань $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset P_\partial$. За означенням множини P_∂ можемо вважати, що $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є слабко збіжною послідовністю. Покажемо, що відповідна послідовність розв'язків $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ нерівності (16) є обмеженою в просторі $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, припустивши обернене, а саме, що існує підпослідовність $\{z_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що $\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ при $n \to \infty$, приходимо до протиріччя з властивістю коерцитивності оператора B (див. (19)) в сенсі (17)

$$+\infty \leftarrow \frac{\langle Bz_{k_n}, z_{k_n} - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le \frac{\langle f/\sqrt{\rho} + p_{k_n}, z_{k_n} - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le$$
$$\le \frac{\|f/\sqrt{\rho} + p_{k_n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|z_{k_n} - w_0\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le$$
$$\le \left(\|f/\sqrt{\rho}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|p_{k_n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right)\left(1 + \frac{\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}}\right) \le C$$

для довільного фіксованого елементу $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, оскільки P_∂ є компактною множиною простору $H^{-1}(\Omega)$. Далі, з обмеженості послідовності $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ випливає її слабка збіжність (з точністю до підпослідовності) до деякого елементу $z^* \in H_0^1(\Omega)$.

Нехай $z_k \to z^*$ слабко в $H_0^1(\Omega)$. Оскільки множина K' є замкненою і опуклою, то за лемою Мазура, вона є також слабко замкненою. Отже, $z^* \in K'$. Покажемо, що $(p, z^*) \in \Lambda$, тобто $z^* = z(p)$, а отже, множина Λ є замкненою відносно топології слабкої збіжності в $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Для цього перейдемо до границі у співвідношенні

$$\langle Bz_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \langle f/\sqrt{\rho} + p_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, w \in K'$$

і скористаємося компакністю вкладення $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ та властивістю напівнеперервності знизу норми в $H_0^1(\Omega)$ відносно слабкої збіжності. В результаті маємо

$$\begin{aligned}
\langle Bz^*, z^* - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \|z^*\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle Bz^*, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \|z_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lim_{k\to\infty} \langle Bz_k, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \liminf_{k\to\infty} \langle Bz_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \langle f/\sqrt{\rho} + p_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left(f/\sqrt{\rho} + p_k\right)(z_k - w)\, dx \le \\
&= \int_\Omega \left(f/\sqrt{\rho} + p\right)(z^* - w)\, dx = \langle f/\sqrt{\rho} + p, z^* - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, w \in K'.
\end{aligned}$$

Отже, $(p, z^*) \in \Lambda$ і тим самим доведено слабку неперервність відображення $p \to z(p)$.

Для завершення досить зауважити, що функціонал вартості (22) — строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Отже, згідно теорем 1.1 та 1.2 з [8], існує єдина пара $(p^0, z^0) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ така, що $(p^0, z^0) \in \Lambda$ і $J(p^0, z^0) = \inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p, z)$, тобто (p^0, z^0) є оптимальною парою для задачі (22)–(23). Таким чином, за теоремою 3, пара $(u^0, y^0) := \left(\sqrt{\rho}p, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)$ є єдиним оптимальним розв'язком для задачі (7)–(9), що і потрібно було встановити. □

Література

1. Zhikov V. V. On Lavrentiev phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1994. — №2(3). — P. 249–269.
2. Zhikov V. V. Weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics. — 1998. — №8(189). — P. 27–58.
3. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational Inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №3(106), P. 88–104.
4. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degener-ate Variational Inequalities of Monotone Type. II. At-tainability Problem // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 15–34.
5. Vazquez J. L., Zuazua E. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential // J. of Functional Analysis. — 2000. — 173. — P. 103–153.
6. Балененко І.Г., Когут П.І. Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2012. — №8(4). — P. 3–18.

7. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems. — Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
8. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Механіко-математичний факультет, Київський національный університет імені Тараса Шевченко, вул. Володимирська, 64, Киев, 01601, Україна, e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com;
Факультет інформаційних технологій, Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет просп. Карла Маркса, 19, Дніпропетровськ, 49005,
Лабораторія нелінійного аналізу диференціально-операторних систем, Навчально-науковий комплекс "Інститут прикладного системного аналізу" Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут", просп. Перемоги 37, корп.6, Київ, 03056, Україна, e-mail: kogut_olga@bk.ru.

Надійшла 4.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.954

ПРИБЛИЖЁННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев

Резюме. В работе построено приближённое оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества. Для построенного приближенного управления доказана сходимость, проведены численные эксперименты, характеризующие его свойства.

Введение

Изучение уравнений смешанного типа является одним из важнейших направлений теории уравнений с частными производными. Необходимость исследования краевых задач для уравнений смешанного типа продиктована многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых сгибаний поверхностей, в теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в математической биологии и других областях ([1], [2]).

Задачи для таких уравнений изучены слабо. В работе [3] найдено решение однородной краевой задачи для параболо-гиперболический уравнений с нелокальными краевыми условиями, в работе [4] результаты расширены на неоднородный случай. Особенностью таких задач при решении является необходимость построения биортогонального базиса. Стоит так же отметить, что были выведены только классические решения, что требует сходимости всех рядов, которые формируют решение краевых задач.

В работе рассматривается приближённое оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Ly(x,t) = g(x)\hat{u}(t) \tag{1}$$

с начальным

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничным условиями

$$y(0,t) = 0,\ y'(0,t) = y'(1,t),\ -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

где функции g, φ считаем заданными, $\hat{u}(t) = v(t),\ t \in [-\alpha, 0);\ \hat{u}(t) = u(t),\ t \in [0, T]$,

$$L\ y\ =\ \begin{cases} y_t\ -\ y_{xx}, & t\ >\ 0, \\ y_{tt}\ -\ y_{xx}, & t\ <\ 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть управляемый процесс $y(x,t)$ описывается краевой задачей (1)–(3). Требуется найти управления $v^*(t) \in C[-\alpha, 0) : |v^*(t)| \le 1; |u^*(0)| \le l_0;$ $\xi^*(t) \in L_2[0,T] : |\xi^*(t)|\ \le l_1$ почти всюду на $[0,T]$, которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u}) = 0.5((\int_0^1 q(x)(y(x,T) - \psi(x))dx)^2 +$$

$$+\gamma(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)\ dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)dt)), \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — фиксированная функция, $\gamma, l_0, l_1 = const\ > 0$,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \xi(\tau)d\tau.$$

Сформулированная задача оптимального управления может быть формально сведена к одномерной задаче путём представления решения задачи (1)–(3) в ряд по базису Рисса [4].

Тогда (1)–(5) сводится к задаче определения управлений $v^*(t) \in C[-\alpha, 0) :$ $|v^*(t)| \le 1; |u^*(0)| \le l_0; \xi^*(t) \in L_2[0,T] : |\xi^*(t)|\ \le l_1$почти всюду на $[0,T]$, минимизирующих критерий качества

$$I(\hat{u}) = 0.5((\sum_{i=0}^{\infty} q_i\ (y_i(T) - \psi_i))^2 + \gamma(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)\ dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)dt)), \tag{6}$$

где

$$y_0(T) = \Phi_{1,0}(T)\varphi_0 + \Phi_{3,0}(T)\ u(0) + \int_{-\alpha}^0 g_0 \Psi_{1,0}(t)v(t)dt + \int_0^T g_0\ \tilde{\Psi}_{1,0}(t)u(t)dt,$$

$$y_{2k-1}(T) = \Phi_{1,2k-1}(T)\varphi_{2k-1} + \Phi_{3,2k-1}(T)u(0) + \int_{-\alpha}^0 g_{2k-1}\Psi_{1,2k-1}(t)\ v(t)dt +$$

$$+ \int_0^T g_{2k-1}\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)\ u(t)dt,$$

$$y_{2k}(T) = \Phi_{1,2k}(T)\varphi_{2k-1} + \Phi_{2,2k}(T)\ \varphi_{2k} + \Phi_{3,2k}(T)u(0) + \int\limits_{-\alpha}^{0}(g_{2k-1}\Psi_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\Psi_{2,2k}(t))v(t)dt + \int\limits_{0}^{T}(g_{2k-1}\tilde{\Psi}_{1,2k}(t) + g_{2k}\ \tilde{\Psi}_{2,2k}(t))u(t)dt. \qquad (7)$$

В представлении (7) приняты такие обозначения:

$$\Phi_{1,0}(T) = 1, \Phi_{3,0}(T) = g_0\alpha,\ \Psi_{1,0}(t) = -(\alpha + t), \tilde{\Psi}_{1,0}(t) =\ 1;$$

$$\Phi_{1,2k-1}(T) = \frac{1}{\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2 T}, \Phi_{3,2k-1}(T) = \frac{g_{2k-1}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2 T},$$

$$\Psi_{1,2k-1}(t) = -\frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2 T},\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) = \exp(-\lambda_k^2(T-t));$$

$$\Phi_{1,2k}(T) = -\frac{\sin\lambda_k\alpha + 2\lambda_k T\delta_k(\alpha) + \alpha(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha)}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2 T)},$$

$$\Phi_{2,2k}(T) = \Phi_{1,2k-1}(T),$$

$$\Phi_{3,2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2 T)}[-g_{2k-1}(2\sin^2\lambda_k\alpha + 2\lambda_k T\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha -$$

$$-\alpha + \frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k}) + g_{2k}\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha],$$

$$\Psi_{1,2k}(t) = \frac{1}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2 T)}[\delta_k(\alpha)(\frac{\cos\lambda_k\alpha\sin\lambda_k t}{\lambda_k^2} - \frac{t\cos\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k})+$$

$$+2\sin\lambda_k(t+\alpha)(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k} + \delta_k(\alpha)) + (\alpha - \frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k})(\sin\lambda_k t - \frac{\cos\lambda_k t}{\lambda_k})],$$

$$\Psi_{2,2k}(t) = \Psi_{1,2k-1}(t),$$

$$\tilde{\Psi}_{1,2k}(t) = -2\lambda_k(T-t)\exp(-\lambda_k^2(T-t)), \tilde{\Psi}_{2,2k}(t) =\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t). \qquad (8)$$

С учетом выписанных значений $y_i(T)$ критерий (6) представим в виде

$$I(u) = 0.5[(\int\limits_{-\alpha}^{0} A(t)v(t)dt + \int\limits_{0}^{T}(\int\limits_{t}^{T} B(\tau)d\tau)\xi(t)dt + (M + \int\limits_{0}^{T} B(t)\ dt)u(0)+$$

$$+C)^2 + \gamma(\int\limits_{-\alpha}^{0} v^2(t)dt + \int\limits_{0}^{T}\xi^2(t)dt + u^2(0))], \qquad (9)$$

где

$$A(t) = q_0 g_0\Psi_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}g_{2k-1}\Psi_{1,2k-1}(t) + q_{2k}(g_{2k-1}\Psi_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\Psi_{2,2k}(t))],$$

$$B(t) = q_0 g_0\tilde{\Psi}_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}g_{2k-1}\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) + q_{2k}(g_{2k-1}\ \tilde{\Psi}_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\tilde{\Psi}_{2,2k}(t))],$$

$$C = q_0\varphi_0\Phi_{1,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}\varphi_{2k-1}\ \Phi_{1,2k-1}(T) + q_{2k}(\varphi_{2k-1}\Phi_{1,2k}(T)+$$
$$+\varphi_{2k}\Phi_{2,2k}(t))] - \sum_{i=0}^{\infty} q_i\psi_i,$$
$$M = q_0\Phi_{3,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty}(q_{2k-1}\Phi_{3,2k-1}(T) + q_{2k}\Phi_{3,2k}(T)). \qquad (10)$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (9) имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{0}[A(t)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M + \int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0)+$$
$$+C) + \gamma v^*(t)][v(t) - v^*(t)]dt \geq 0\ \forall |v(t)| \leq 1,$$
$$[(M + \int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M+$$
$$+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0) + \ C) + \gamma u^*(0)][u(0) - u^*(0)] \geq \ 0\ \forall |u(0)| \leq l_0,$$
$$\int_{0}^{T}[\int_{t}^{T} B(\tau)d\tau(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M + \int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)\times$$
$$\times u^*(0) + C) + \gamma\ \xi^*(t)][\xi(t) - \xi^*(t)]dt \geq 0\ \forall\ |\xi(t)| \leq l_1. \qquad (11)$$

Система вариационных неравенств (11) эквивалентна таким локальным условиям [5]:

$$v^*(t) = -1, A(t)(\int_{-\alpha}^{0}\ A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}\ (\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma + C+$$
$$+(M + \int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0)) - \gamma > 0, t \in [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha,\ 0), i = \overline{1, V_1}, \qquad (12)$$
$$|v^*(t)| < 1, v^*(t) = -\frac{A(t)}{\gamma}(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)\ v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$
$$+C + (M + \int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0)), t \in\ [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), i = \overline{V_1 + 1, V_2}, \qquad (13)$$
$$v^*(t) = 1, A(t)(\int_{-\alpha}^{0}\ A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}\ (\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma + C+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ u^*(0))+\gamma<0, t\in[\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i]\subset[-\alpha,0), i=\overline{V_2+1,V_3},$$

$$\cup_{i=1}^{V_3}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]=[-\alpha,0); \tag{14}$$

$$u^*(0)=-l_0,(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau-$$

$$-(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)l_0+\ C)-\gamma l_0>0, \tag{15}$$

$$|u^*(0)|<l_0, u^*(0)=-\frac{1}{\gamma}\ (M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ (\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0)), \tag{16}$$

$$u^*(0)=l_0,(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ l_0+C)+\gamma l_0<0; \tag{17}$$

$$\xi^*(t)=-l_1,\int\limits_t^T B(\tau)\ d\tau(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$

$$+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0))-\gamma l_1>0, t\in[\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i]\subset(0,T], i=\overline{1,U_1}, \tag{18}$$

$$|\xi^*(t)|<l_1,\xi^*(t)=-\frac{\int\limits_t^T B(\tau)d\tau}{\gamma}(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$

$$+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0)), t\in\ [\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i]\subset(0,T],\ i=\overline{U_1+1,U_2}, \tag{19}$$

$$\xi^*(t)=l_1,\int\limits_t^T B(\tau)d\tau(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\ d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+C+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ u^*(0))+\gamma l_1<0, t\in\ [\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i]\subset(0,\ T], i=\overline{U_2+1,U_3},$$

$$\cup_{i=1}^{U_3}[\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i]=(0,T]. \tag{20}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $|v^*(t)|<1, |u^*(0)|<l_0, |\xi^*(t)|<l_1$. Тогда из (12)–(20) находим

$$v^*(t)=-\frac{A(t)C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau}, t\in[-\alpha,0);$$

$$u^*(0)=-\frac{(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau};$$

$$\xi^*(t)=-\frac{\int\limits_t^T B(\tau)d\tau C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau},$$

$$t\in(0,T]. \tag{21}$$

Теперь рассмотрим случай, когда управление выходит на ограничение. Вернемся к условиям оптимальности (12)–(20) и положим $\underline{V}_1=1$, $V_2=2$, $V_3=0$, $\underline{\xi}_1=-\alpha$, $\overline{\xi}_1=\underline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_2=0$, $U_i=0$, $i=\overline{1,3}$. Тогда получим управление

$$v^*(t)=-1,\ t\in[-\alpha,\overline{\xi}_1),$$

$$v^*(t)=-\frac{A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)dt},\ t\in[\overline{\xi}_1,0), \tag{22}$$

зависящее от параметра $\overline{\xi}_1$, который определяется из условий

$$\frac{A(\overline{\xi}_1)\hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)dt}=1,\ \frac{dv^*(\overline{\xi}_1+0)}{dt}>0. \tag{23}$$

Другие варианты реализаций управлений анализируются аналогично.

2. Приближенные управления

Полученные в предыдущем пункте управления выражены через функции, которые представлены рядами, т. е. являются нереализуемыми. Поэтому рассмотрим приближенные управления, заменив ряды соответствующими суммами. Рассмотрим управления вида

$$v^{(N)}(t) = -\frac{A^{(N)}(t)C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}}, t \in [-\alpha, 0); u^{(N)}(0) = -\frac{(M^{(N)} + \int\limits_0^T B^{(N)}(\tau)d\tau)C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}};$$

$$\xi^{(N)}(t) = -\frac{\int\limits_t^T B^{(N)}(\tau)d\tau C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}}, t \ \in (0, T], \tag{24}$$

где

$$\Upsilon^{(N)} = \gamma + (M^{(N)} + \int\limits_0^T B^{(N)}(\tau)d\tau)^2 + \int\limits_{-\alpha}^0 (A^{(N)})^2(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^T (\int\limits_\tau^T B^{(N)}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau$$

и при этом

$$|\lim_{N\to\infty} v^{(N)}(t)| < 1, t \ \in [-\alpha, 0),$$

$$|\lim_{N\to\infty} u^{(N)}(0)| < l_0,$$

$$|\lim_{N\to\infty} \xi^{(N)}(t)| < l_1, t \in (0, T]. \tag{25}$$

Управлениям (24) соответствует решение краевой задачи

$$Ly^{(N)}(x,t) = g(x)\ \hat{u}^{(N)}(t), \tag{26}$$

$$y^{(N)}(x, -\alpha) = \varphi(x),\ x \in\ [0, 1], \tag{27}$$

$$y^{(N)}(0,t) = 0, \frac{\partial y^{(N)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y^{(N)}(1,t)}{\partial x},\ -\alpha \le t \le T. \tag{28}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть задача оптимального управления (1)–(3), (5) имеет решение и для неё выполнено условие(25). Тогда формулы (24) представляют собой приближенное управление для задачи(1)–(3), (5), т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} |v^*(t) - v^{(N)}(t)| = 0,\ t \in [-\alpha, 0), \lim_{N\to\infty} |u^*(0) - u^{(N)}(0)| = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} |\xi^*(t) - \xi^{(N)}(t)| = 0,\ t \in (0, T],$$

$$\lim_{N\to\infty} |y^*(x,t) - y^{(N)}(x,t)| = 0,\ x \in [0,1],\ t \in [-\alpha, T),$$

$$\lim_{N\to\infty} |I(\hat{u}^*) - I(\hat{u}^{(N)})| = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Оценим разность $|v^*(t) - v^{(N)}(t)|$, используя формулы (21) и (24),

$$|v^*(t) - v^{(N)}(t)| \le \frac{|A^{(N)}(t)C^{(N)}\Upsilon - A(t)C\,\Upsilon^{(N)}|}{\Upsilon^{(N)}\Upsilon} \le$$

$$\le (\Upsilon^{(N)}\Upsilon)^{-1}(|A(t)|\,\Upsilon^{(N)}|C - C^{(N)}| + \Upsilon^{(N)}|C^{(N)}||A(t) - A^{(N)}(t)| +$$

$$+|A^{(N)}(t)||C^{(N)}||\Upsilon - \Upsilon^{(N)}|).$$

Отсюда и сходимости последовательностей $\{A^{(N)}(t)\}$, $\{C^{(N)}\}, \{\Upsilon^{(N)}\}$ получим первое предельное равенство из (29). Два последующих равенства устанавливаются аналогично.

Разность $\Delta y^{(N)}(x,t) = y(x,t) - y^{(N)}(x,t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$L\Delta y^{(N)}(x,t) = g(x)\,\Delta\hat{u}^{(N)}(t), \tag{30}$$

$$\Delta y^{(N)}(x,-\alpha) = 0, x \in [0,1], \tag{31}$$

$$\Delta y^{(N)}(0,t) = 0, \frac{\partial \Delta y^{(N)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta y^{(N)}(1,t)}{\partial x}, -\alpha \le t \le T, \tag{32}$$

где $\Delta\hat{u}^{(N)}(t) = \hat{u}(t) - \hat{u}^{(N)}(t)$.

Решая краевую задачу (30)–(32) в виде ряда и учитывая предыдущие предельные равенства теоремы, получим четвертое предельное равенство из (29). Сходимость по функционалу является следствием предыдущих предельных равенств из (29). □

Рассмотрим далее случай "выхода"управления на ограничение. Определим приближенно управление в виде

$$v^{(N)}(t) = -1, \frac{A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau} > 1,\ t \in [-\alpha, \overline{\xi}_1^{(N)});$$

$$|v^{(N)}(t)| < 1 : v^{(N)}(t) = -\frac{A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in [\overline{\xi}_1^{(N)}, 0), \tag{33}$$

а число $\xi_1^{(N)}$ определяется как единственное решение уравнения

$$1 = \frac{A^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ \frac{dv^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)} + 0)}{dt} > 0, \tag{34}$$

где

$$\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)}) = C^{(N)} - \int\limits_{-\alpha}^{\overline{\xi}_1^{(N)}} A^{(N)}(\tau)d\tau.$$

Предположим, что, как и в предыдущем случае, приближенные управления удовлетворяют условиям

$$\lim_{N\to\infty} v^{(N)}(t) = -1,\ t \in [-\alpha, \lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}); |v^{(N)}(t)| < 1, t \in [\lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}, 0). \quad (35)$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть задача оптимального управления (1)–(3), (5) имеет решение и для неё выполнено условие(35). Тогда формулы (33)–(34) представляют собой приближенное управление для задачи(1)–(3), (5), т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\xi}_1 - \ \overline{\xi}_1^{(N)}| = 0, \lim_{N\to\infty} |v^*(t) - v^{(N)}(t)| = 0, t \in [-\alpha, 0),$$

$$\lim_{N\to\infty} |y^*(x,t) - y^{(N)}(x,t)| = 0, x \in [0,1],\ t \in [-\alpha, T),$$

$$\lim_{N\to\infty} |I(v^*) - \ I(v^{(N)})| = 0. \quad (36)$$

Доказательство. Прежде всего, из единственности решений уравнений (23), (34) следует, что

$$\overline{\xi}_1 = \lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}.$$

Действительно, последовательность $\{\overline{\xi}_1^{(N)}\}$ ограничена и, согласно теореме Больцано-Вейерштасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Ее границу обозначим через $\tilde{\xi}_1$. Если $\tilde{\xi}_1 \neq \ \overline{\xi}_1$, то уравнение (23) будет иметь более одного решения, что недопустимо.

Предположим, что $\overline{\xi}_1^{(N)} < \overline{\xi}_1$. Рассмотрим разность $\Delta v^{(N)}(t) = v^*(t) - v^{(N)}(t)$. Тогда

$$\Delta v^{(N)}(t) = 0,\ t \in [-\alpha, \overline{\xi}_1^{(N)});$$

$$\Delta v^{(N)}(t) = -1 + \frac{A^{(N)}(t)\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in\ [\overline{\xi}_1^{(N)}, \overline{\xi}_1);$$

$$\Delta v^{(N)}(t) = -\frac{A(t)\ \hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} A^2(t) dt} + \ \frac{A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in\ [\overline{\xi}_1, 0). \quad (37)$$

Из (37) следует, что функция $\Delta v^{(N)}(t)$ — непрерывна при $t \in [-\alpha, 0)$. Более того,

$$\lim_{N\to\infty} \Delta v^{(N)}(t) = 0,\ t \in [-\alpha, 0). \quad (38)$$

Действительно, из второго равенства (37) при $t \in\ [\overline{\xi}_1^{(N)}, \overline{\xi}_1)$ получим

$$\Delta v^{(N)}(t) = -\frac{dv^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{dt}(t - \ \overline{\xi}_1^{(N)}) + O((t - \ \overline{\xi}_1^{(N)})^2), \quad (39)$$

а из последнего равенства будем иметь

$$|\Delta v^{(N)}(t)| \leq (\Theta\Theta^{(N)})^{-1} |A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)\Theta^{(N)} - A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})\Theta|) \leq$$

$$\leq (\Theta\Theta^{(N)})^{-1}(|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)|\Big|\int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0}(A(\tau))^2d\tau)-$$

$$-\int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0}(A^{(N)}(\tau))^2d\tau|+\Theta|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)-A^{(N)}(t)\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})|), \qquad (40)$$

где

$$\Theta=\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0}A^2(t)dt,\Theta^{(N)}=\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0}(A^{(N)}(\tau))^2d\tau.$$

Так как

$$|\int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0}(A(\tau))^2d\tau)-\int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0}(A^{(N)}(\tau))^2d\tau|\leq\max_{t\in\ [-\alpha,0)}|A(t)-A^{(N)}(t)|\times$$

$$\times\int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0}|A(\tau)+A^{(N)}(\tau)|d\tau+\max_{t\in\ [-\alpha,0)}(A^{(N)}(t))^2|\overline{\xi}_1-\ \overline{\xi}_1^{(N)}|,$$

$$|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)-A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})|\leq|A(t)||\hat{C}(\overline{\xi}_1)-\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})|+$$

$$+|\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})||A(t)-A^{(N)}(t)|,$$

$$|\hat{C}(\overline{\xi}_1)-\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})|\leq|C-C^{(N)}|+\max_{t\in[-\alpha,0)}|A(t)-A^{(N)}(t)||\overline{\xi}_1|+$$

$$+\max_{t\in[-\alpha,0)}|A^{(N)}(t)|\ |\overline{\xi}_1-\overline{\xi}_1^{(N)}|$$

и, учитывая ограниченность последовательностей $\{A^{(N)}(t),C^{(N)}\}$, из (40) будем иметь $\lim\limits_{N\to\infty}\Delta v^{(N)}(t)=0,\ t\in\ [\overline{\xi}_1,0)$.

Для справедливости равенства (39) должен равномерно сходиться ряд $d^2A(t)/dt^2$. Из определения ряда $A(t)$ получим оценку

$$|\frac{d^2A(t)}{dt^2}|\leq|q_0||g_0|\ |\frac{d^2\Psi_{1,0}(t)}{dt^2}|+\sum_{k=1}^{\infty}[|q_{2k-1}||g_{2k-1}||\frac{d^2\Psi_{1,2k-1}(t)}{dt^2}|+|q_{2k}|\times$$

$$\times(|g_{2k-1}|\frac{d^2\Psi_{1,2k}(t)}{dt^2}|+\ |g_{2k}||\frac{d^2\Psi_{2,2k}(t)}{dt^2})]\leq$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\ \frac{|q_{2k-1}||g_{2k-1}|+|q_{2k}|(|g_{2k-1}|\ \lambda_k+|g_{2k}|)}{\exp(\lambda_k^2T)},$$

т. е. при указанных требованиях на функции $g(x),q(x)$ выписанный выше ряд сходится равномерно. Отсюда следует равенство (38). В случае $\overline{\xi}_1^{(N)}>\overline{\xi}_1$ будет справедлив тот же результат. Оставшиеся равенства из (36) доказываются аналогично теореме 1. □

3. Вычислительные эксперименты

Пусть заданы функции $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 30x$, $q(x) = x$, $g(x) = 5x$, а так же $\alpha = 1$, $T = 10$, $\gamma = 20$. Тогда используя формулы (24), получим для разных N значения критерия I (рис. 1).

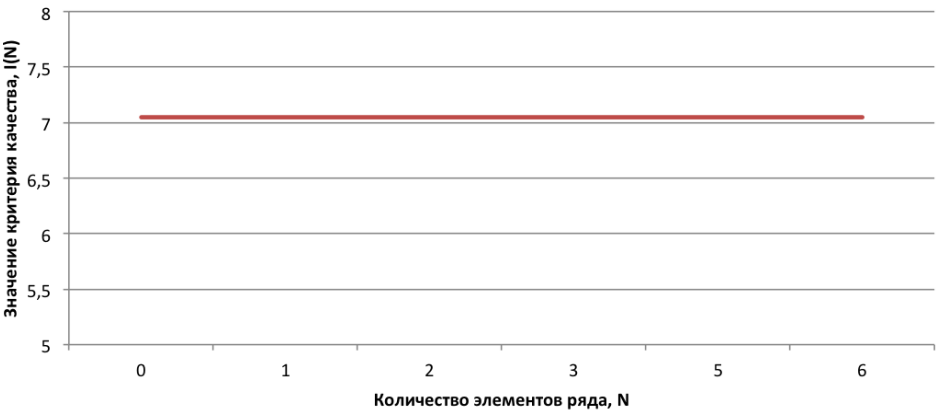

Рис. 1. Значение критерия

Для $N > 1$ значения критерия практически не меняются, потому выберем $N = 1$. Тогда найденные управления представлены на рис. 2, а значение критерия $I = 7,049$.

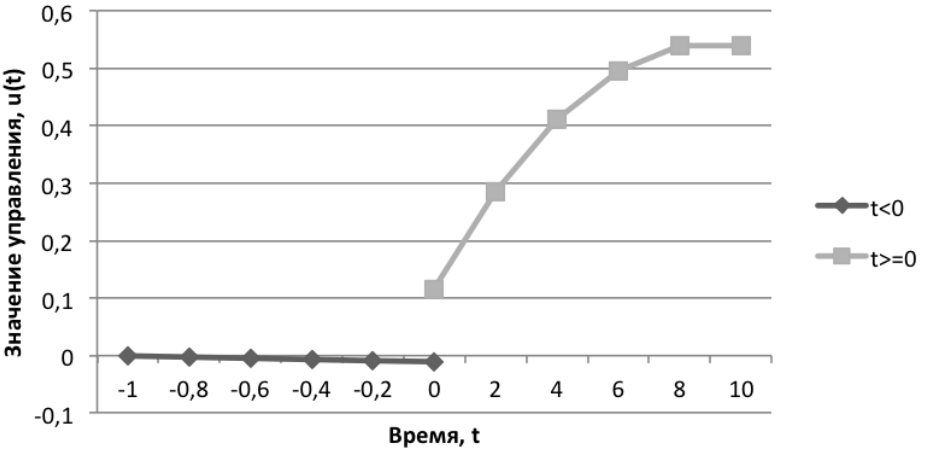

Рис. 2. Значение управления

Пусть теперь заданы функции $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 300x^2$, $q(x) = 5x$, $g(x) = 10x$, а так же $\alpha = 0.5$, $T = 0.5$, $\gamma = 20$. В данном случае управление при $t < 0$ выходит на ограничение. Изменяя N от 2 до 20, время выхода

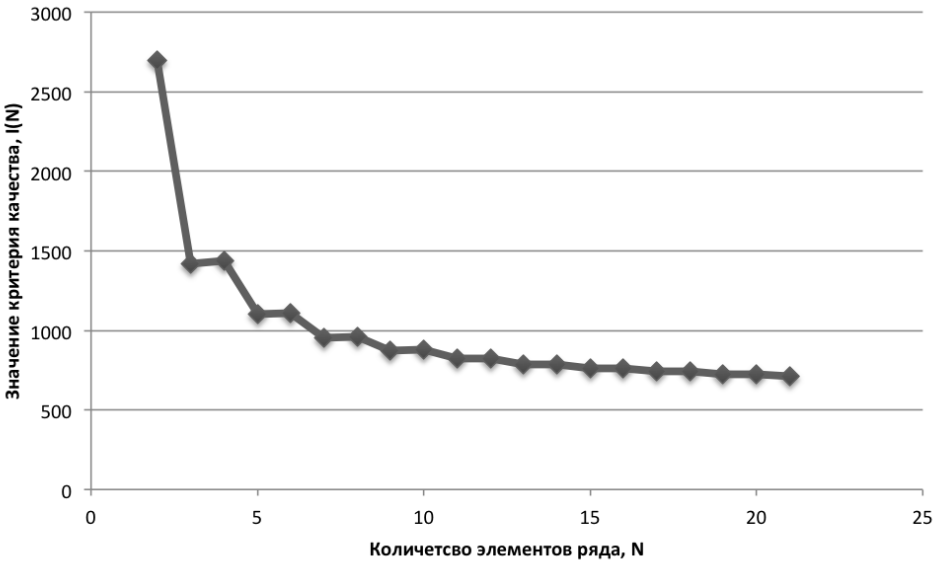

Рис. 3. Значение критерия

на ограничение составляет от -0.285 до -0.15 соответственно. Проследим зависимость значения критерия от количества элементов ряда в решении. Из рис. 3 видим, что в данном случае изменение значения критерия сильно падает при $N \geq 8$, поэтому здесь можно положить $N = 8$.

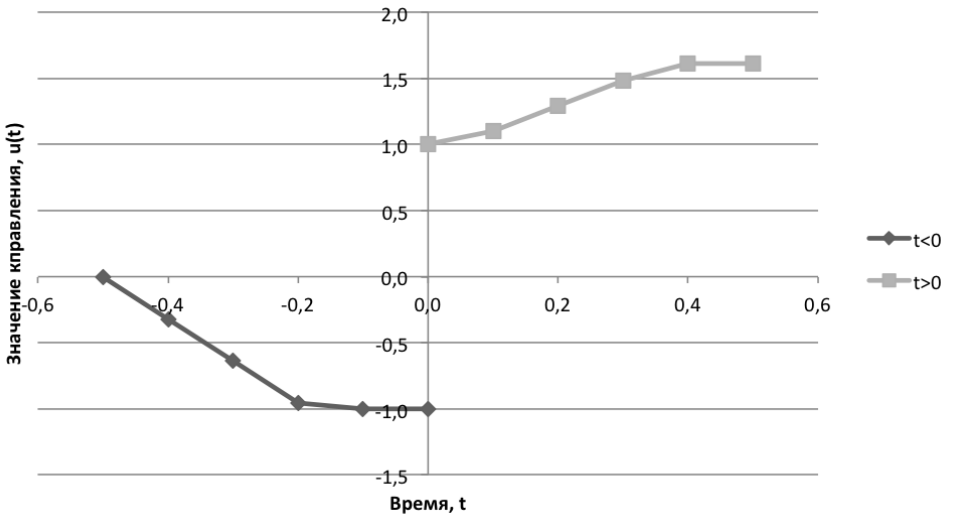

Рис. 4. Значение управления

Построим для этого случая приближенное оптимальное управление. Время выхода на ограничения для этого случая $t = -0.185$, а управление изображено на рис. 4.

Литература

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. — 1959. — Т. 14, №3. — С. 3–19.
3. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, №7. — С. 969–978.
4. Капустян В. О., Пишнограєв І. О. Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними граничними умовами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2012. — №4. — С. 72–86.
5. Лионс Ж. — Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Мир, 1972. — 412 с.

Факультет менеджмента и маркетинга, НТУУ "КПИ", просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина.

Поступила 02.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.977

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

М. П. Коцур

Резюме. Запропоновано спосіб розв'язування задачі оптимального керування об'єктом з розподіленими параметрами, що описується системою нелінійних диференційних рівнянь з нестандартними крайовими умовами. Варіаційним методом отримано загальний вигляд необхідних умов оптимальності. Розроблено алгоритм чисельного методу послідовних наближень для вирішення такої оптимізаційної задачі. Результати застосовані для оптимізації нестаціонарного процесу термоелектричного охолодження. Розраховані оптимальні залежності струму живлення термоелектричного модуля від часу, що забезпечують мінімальну температуру охолодження.

Вступ

Великий клас оптимізаційних задач стосується об'єктів (систем і процесів) з розподіленими параметрами, поведінка яких описується за допомогою крайової задачі для рівнянь з частинними похідними. Раціональне функціонування таких об'єктів можливе за умов розв'язання задач оптимального керування, результатом яких є побудова оптимальних функцій керування.

Теорія оптимального керування широко застосовується до оптимізації об'єктів із зосередженими параметрами, стан яких описується системами звичайних диференційних рівнянь[1]–[4]. Для них сформульовані необхідні умови оптимальності, наприклад, принцип максимуму Понтрягіна [5], на основі яких створюються алгоритми і комп'ютерні методи пошуку функцій керування, що оптимізують об'єкт.

Розвиток теорії оптимального керування для об'єктів з розподіленими параметрами, а також методів визначення їх характеристик є значно складнішою задачею, ніж аналогічна проблема для систем із зосередженими параметрами, оскільки доводиться мати справу з диференційними рівняннями в частинних похідних, враховуючи складність реальних крайових умов, що характеризують роботу об'єкта. Крайові умови задачі можуть включати частинні похідні, функції керування, тощо. Необхідні умови оптимальності отримані лише для окремих задач з розподіленими параметрами з простими граничними умовами [6]–[9]. Тому актуальною задачею є розвиток теорії оптимального керування для об'єктів, які описуються системами

диференційних рівнянь в частинних похідних з оригінальними граничними умовами.

Такі оптимізаційні задачі знаходять широке практичне застосування в багатьох технічних галузях. Прикладом об'єкту з розподіленими параметрами є нестаціонарний процес термоелектричного охолодження. Аналіз результатів попередніх досліджень [4], [10] показує, що задачі оптимізації цього процесу, наприклад, пошук оптимальних функцій струму, що забезпечують екстремальні значення характеристик охолодження, розв'язувались лише для найпростіших фізичних моделей термоелектричного перетворювача, або взагалі не розглядалися. Це зумовлено складністю математичної моделі процесу нестаціонарного охолодження, який описується диференційними рівняннями в частинних похідних, крайові умови яких визначаються фізичною моделлю термоелектричного перетворювача і режимом його роботи.

Мета даної роботи полягала в оптимізації нестаціонарного режиму термоелектричного охолоджувача шляхом розробки методів оптимального керування та алгоритмів чисельного розв'язання відповідної математичної задачі оптимізації нестаціонарних одновимірних процесів із розподіленими параметрами.

1. Постановка задачі оптимального керування нестаціонарним процесом термоелектричного охолодження

Розглянемо постановку однієї із задач оптимального керування нестаціонарним процесом термоелектричного охолодження. Об'єктом дослідження є охолоджувальний модуль (рис. 1*а*), що складається з термоелементів (рис. 1*б*), з'єднаних між собою послідовно в електричне коло і паралельно по відношенню до теплового потоку. Кожен термоелемент містить дві вітки з напівпровідникового матеріалу n- і p-типів провідності. За умови протікання електричного струму, вказаної на рис. 1 полярності, внаслідок поглинання тепла Пельтьє спай 1 охолоджується, а протилежний спай нагрівається. Зазвичай шляхом інтенсивного тепловідводу температура гарячого спаю підтримується близькою до температури оточуючого середовища.

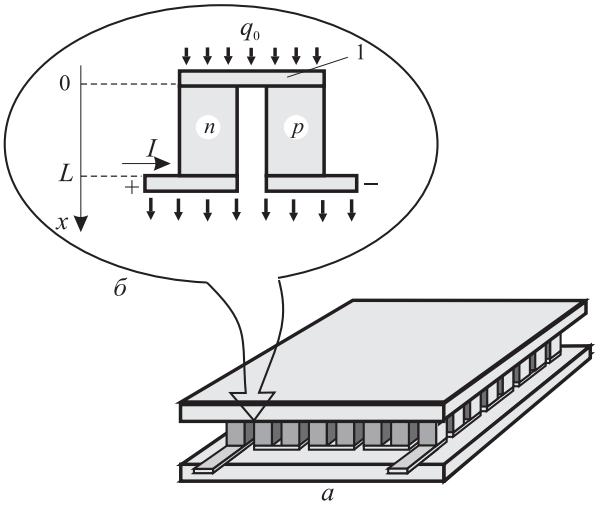

Рис. 1. Схема охолоджувального модуля ($а$) і термоелемента ($б$)

За умови рівномірного розподілу теплового навантаження на холодні спаї термоелементів модуля теплові процеси у всіх термоелементах подібні і описуються системою рівнянь нестаціонарної теплопровідності [4] у вітках термоелементу, що має вигляд

$$\begin{cases} c_n \dfrac{\partial T_n}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_n \dfrac{\partial T_n}{\partial x}\right) + \rho_n \dfrac{I^2(t)}{s_n^2} - T_n \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial T_n} \dfrac{I(t)}{s_n} \dfrac{\partial T_n}{\partial x} \\ c_p \dfrac{\partial T_p}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_p \dfrac{\partial T_p}{\partial x}\right) + \rho_p \dfrac{I^2(t)}{s_p^2} - T_p \dfrac{\partial \alpha_p}{\partial T_p} \dfrac{I(t)}{s_p} \dfrac{\partial T_p}{\partial x} \end{cases} . \tag{1}$$

У цих рівняннях $T_{n,p}$ — температури, I — струм живлення термоелементу, $c_{n,p}, \alpha_{n,p}, \rho_{n,p}, \kappa_{n,p}$ — характеристики матеріалів n- і p-віток, а саме теплоємність, коефіцієнт Зеєбека, питомий опір та теплопровідність відповідно, $s_{n,p}$ — площі перерізу віток.

Якщо ввести безрозмірну координату $x = x/L$, позначити фактор форми $\phi_{n,p} = s_{n,p}/L$ (L — висота віток) і застосувати заміну змінних $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{I}{\phi} T$, то система (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_n}{\partial t} + a_n \frac{\partial q_n}{\partial x} = f_{1n}\left(T_n, q_n, I\right) \\ \frac{\partial T_p}{\partial t} + a_p \frac{\partial q_p}{\partial x} = f_{1p}\left(T_p, q_p, I\right) \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} = f_{2n}\left(T_n, q_n, I\right) \\ \frac{\partial T_p}{\partial x} = f_{2p}\left(T_p, q_p, I\right) \end{cases} , \tag{2}$$

де $a_{n,p} = 1/(c_{n,p} L^2)$,

$$f_{1n,p} = a_{n,p}\left(\frac{\alpha_{n,p}^2}{\phi_{n,p}^2 \kappa_{n,p}} I^2 T_{n,p} - \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I q_{n,p} + \frac{I^2}{\phi_{n,p}^2} \rho_{n,p}\right),$$

$$f_{2n,p} = \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I T_{n,p} - \frac{q_{n,p}}{\kappa_{n,p}}.$$

Початкові і крайові умови задачі нестаціонарного термоелектричного охолодження такі:

$$T_n(x,0) = T_p(x,0) = T_0, \tag{3}$$

$$\begin{array}{l} T_n(1,t) = T_p(1,t) = T_0, \\ \frac{\partial T_n(0,t)}{\partial t} = F_0\left(T_n(0,t), q_n(0,t), q_p(0,t), I\right), \\ T_p(0,t) = T_n(0,t), \end{array} \tag{4}$$

де

$$F_0 = \frac{1}{g}\left[q_0 - K(s_n+s_p)(T_n(0,t) - T_0) - \phi_n q_n(0,t) - \phi_p q_p(0,t) + I^2 r_0\left(\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_p}\right)\right].$$

У цих рівняннях характеристики матеріалів віток $\alpha_{n,p}(T), \rho_{n,p}(T), \kappa_{n,p}(T)$ є функціями температури, а питома теплоємність матеріалів віток термоелементу $c_{n,p}$, фактор форми $\phi_{n,p}$, електричний контактний опір r_0 віток, коефіцієнт теплообміну холодного спаю термоелементу K, теплоємність g та тепловиділення q_0 під'єднаного до спаю теплового навантаження — константи.

Залежно від величини струму I, температура в певній точці термоелемента за певний проміжок часу може бути нижчою або вищою за початкову. Струмом можна керувати, змінюючи його величину з часом в межах $0 < I < I_{max}$. Оптимізаційна задача полягає у визначенні оптимальної функції струму $I(t)$ такої, що мінімізує температуру охолодження в точці $x = 0$ в певний момент часу $t = \theta$, тобто функціонал, що мінімізується, $\Phi = T_{n,p}(0,\theta)$.

Аналіз наукової інформації [4, 10, 11] дозволяє стверджувати, що до сьогодні для загального випадку температурно-залежних параметрів матеріалів термоелемента $\alpha_{n,p}(T), \rho_{n,p}(T), \kappa_{n,p}(T)$ способів розв'язання такої задачі не запропоновано.

Оптимізація нестаціонарного процесу термоелектричного охолодження належить до задач оптимізації об'єктів з розподіленими параметрами, для розв'язання яких можна скористатися методами теорії оптимального керування.

2. Оптимальне керування об'єктом з розподіленими параметрами

Розглянемо об'єкт з розподіленими параметрами, поведінка якого описується системою нелінійних рівнянь із частинними похідними [7] у вигляді

$$\delta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{M} a_{kj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = f_k\left(\varphi(x,t), u(t)\right), \quad k = 1, \ldots, M, \tag{5}$$

заданою в області $[0, L] \times [0, \theta]$. Початкові та нестандартні крайові умови на кінцях відрізку L, мають вигляд

$$\delta_k \varphi_k(x,0) = \varphi_0(x), \quad k = 1, \ldots, M, \tag{6}$$

$$\begin{array}{l}\delta_{0k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\Big|_{x=0} = F_{0k}\left(\varphi\left(0,t\right),u\left(t\right)\right), k=1,\ldots,M/2,\\ \delta_{1k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\Big|_{x=L} = F_{1k}\left(\varphi\left(L,t\right),u\left(t\right)\right), k=1,\ldots,M/2.\end{array} \tag{7}$$

У рівняннях (5)–(7) $\varphi=\{\varphi_1\left(x,t\right),\ldots,\varphi_M\left(x,t\right)\}$ — вектор-функція стану об'єкта, $u=\{u_1\left(t\right),\ldots,u_N\left(t\right)\}$ — вектор-функція керування, a_{kj} — константи, $f_k\left(\varphi\left(x,t\right),u\left(t\right)\right)$, $F_{0k}\left(\varphi\left(0,t\right),u\left(t\right)\right)$, $F_{1k}\left(\varphi\left(L,t\right),u\left(t\right)\right)$ — неперервно-диференційовані функції своїх аргументів, $\delta_k,\delta_{0k},\delta_{1k}\in\{0,1\}$ і це означає, що не обов'язково всі рівняння системи (5) або крайові умови (7) містять похідну по t.

Зауважимо, що крайова задача (5)–(7) є загальним виглядом задачі (2)–(4), що описує процес нестаціонарного термоелектричного охолодження.

Задамо функціонал Φ, наприклад, у вигляді деякої функції, залежної від вектора стану в крайовій точці $x=0$ в кінцевий момент $t=\theta$

$$\Phi=\Phi(\varphi\left(0,\theta\right). \tag{8}$$

Задача полягає в мінімізації Φ шляхом вибору вектора $u(t)$ із допустимої області зміни керування G_u.

Одним із способів, яким можна отримати необхідні умови оптимальності для такої задачі, є варіаційний метод. Для цього формується розширений функціонал

$$J=J_1+J_2, \tag{9}$$

де $J_1=\int_0^\theta\int_0^L\sum_{k=1}^M\psi_k\left(x,t\right)\left[f_k-\delta_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}-\sum_{j=1}^M a_{kj}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right]dxdt,$

$$J_2=-\Phi(\varphi\left(0,\theta\right)+\int_0^\theta\sum_{k=1}^{M/2}\nu_{0k}\left(t\right)\left[F_{0k}-\delta_{0k}\frac{\partial\varphi_k\left(0,t\right)}{\partial t}\right]dt+$$

$$+\int_0^\theta\sum_{k=1}^{M/2}\nu_{1k}\left(t\right)\left[F_{1k}-\delta_{1k}\frac{\partial\varphi_k\left(L,t\right)}{\partial t}\right]dt,$$

$\psi_k\left(x,t\right),\nu_{0k}\left(t\right),\nu_{1k}\left(t\right)$ — невідомі функції, що відіграють роль множників Лагранжа.

Після інтегрування (9) за частинами з умови екстремуму $\delta J=0$ (δJ — повна варіація J за аргументами φ,u) отримаємо необхідні умови оптимальності, а саме систему диференційних рівнянь, спряжену до системи (5), якій повинні задовольняти невідомі функції ψ:

$$\delta_j\frac{\partial\psi_j}{\partial t}-\sum_{k=1}^M a_{kj}\frac{\partial\psi_k}{\partial x}=-\sum_{k=1}^M\psi_k\frac{\partial f_k}{\partial\varphi_j},\quad j=1,\ldots,M, \tag{10}$$

прикінцеві умови у вигляді

$$\begin{array}{l}\delta_j\psi_j\left(x,\theta\right)=0,\quad 0<x<L,\quad j=1,\ldots,M,\\ \delta_j\psi_j\left(0,\theta\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_j(0,\theta)}+\delta_{0j}\nu_{0j}\left(\theta\right)=0,\quad j=1,\ldots,M/2,\\ \delta_j\psi_j\left(0,\theta\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_j(0,\theta)}=0,\quad j=M/2+1,\ldots,M,\\ \delta_j\psi_j\left(L,\theta\right)+\delta_{1j}\nu_{1j}\left(\theta\right)=0,\quad j=1,\ldots,M/2,\\ \delta_j\psi_j\left(L,\theta\right)=0,\quad j=M/2+1,\ldots,M,\end{array} \tag{11}$$

умови трансверсальності

$$\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{M} a_{kj}\psi_k(0,t) = \left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=0}, \quad j=1,\ldots,M, \\ \sum_{k=1}^{M} a_{kj}\psi_k(L,t) = \left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=L}, \quad j=1,\ldots,M, \end{array} \tag{12}$$

де

$$\left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=0} = \delta_{0j}\frac{\partial \nu_{0j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{0k}(t)\frac{\partial F_{0k}}{\partial \varphi_j(0,t)}, \quad j=1,...,M/2,$$

$$\left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=0} = \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{0k}(t)\frac{\partial F_{0k}}{\partial \varphi_j(0,t)}, \quad j=M/2+1,...,M,$$

$$\left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=L} = \delta_{1j}\frac{\partial \nu_{1j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{1k}(t)\frac{\partial F_{1k}}{\partial \varphi_j(L,t)}, \quad j=1,...,M/2,$$

$$\left.\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j}\right|_{x=L} = \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{1k}(t)\frac{\partial F_{1k}}{\partial \varphi_j(L,t)}, \quad j=M/2+1,...,M,$$

а також умови для знаходження оптимального вектор-керування:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i=1,\ldots,N, \tag{13}$$

де

$$H(\varphi(x,t),\psi(x,t),\nu_0(t),\nu_1(t),u(t)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M}\Big[\int_0^L \psi_j(x,t) f_j(\varphi(x,t),u(t))\,dx + \nu_{0j}(t) F_{0j}(\varphi(0,t),u(t)) +$$

$$+\nu_{1j}(t) F_{1j}(\varphi(L,t),u(t))\Big]. \tag{14}$$

Умова (13) означає, що для кожного значення t повинна задовольнятися умова максимуму функції H за компонентами вектора u:

$$H(\varphi(x,t),\psi(x,t),\nu_0(t),\nu_1(t),u(t)) =$$

$$= \max_{u\in G_u} H(\varphi(x,t),\psi(x,t),\nu_0(t),\nu_1(t),u). \tag{15}$$

Половина з умов трансверсальності (12) використовуються для визначення функцій ν, а решта є крайовими умовами для системи (10).

Отже, умови (10)–(15) разом з основними рівняннями (5)–(7), що описують об'єкт з розподіленими параметрами, задають розв'язок поставленої оптимізаційної задачі та дають змогу визначити оптимальний вектор керування $u(t)$.

3. Алгоритм для розв'язання задачі

Нелінійність в загальному випадку правих частин основних рівнянь (5) і складність задачі в цілому уможливлюють її розв'язання тільки чисельними методами. Для цього можна запропонувати такий алгоритм методу послідовних наближень.

1. Задаємо початкове наближення вектор-функції керування, наприклад, у вигляді $u^{(0)}(t) = u_0$, де $u_0 \in G_u$.
2. З цим наближенням розв'язуємо основну систему диференційних рівнянь (5) з умовами (6)–(7) і знаходимо вектор-функцію стану φ. Для чисельного методу розв'язання цієї системи можна використати метод скінчених різниць.
3. Обчислюємо значення функціоналу Ф (8).
4. Знайдену вектор-функцію стану φ і початкове наближення $u^{(0)}(t)$ використовуємо для розв'язання допоміжної системи (10) з умовами (11), (12), щоб знайти вектор-функцію ψ. Для чисельного її розв'язання можна застосувати метод скінчених різниць.
5. Використовуємо розв'язки основної і допоміжної систем для обчислення максимального значення функції H (14) за компонентами вектора u для кожного моменту часу t. Для пошуку оптимальних значень компонент u з області G_u можна запропонувати метод градієнтного спуску, визначаючи замість максимуму H мінімум $(-H)$. Отримаємо нове наближення вектор-функції керування $u^{(1)}(t)$.
6. З новою функцією керування розв'язуємо основну систему (5)–(7) і визначаємо нове значення функціоналу Ф (8). Повторюємо ітераційний процес до досягнення зміни функціоналу Ф в межах заданої похибки.

Такий алгоритм можна реалізувати комп'ютерними методами і визначити розв'язок поставленої оптимізаційної задачі.

4. Умови оптимальності для задачі нестаціонарного термоелектричного охолодження

Застосуємо отримані вище в загальному вигляді умови оптимальності для об'єкта з розподіленими параметрами (10)–(15) і запишемо співвідношення для розв'язання поставленої задачі нестаціонарного термоелектричного охолодження.

Згідно (10) допоміжна система рівнянь, спряжена до системи (2), набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial x} = y_{1n} \\ \frac{\partial \psi_{1p}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{2p}}{\partial x} = y_{1p} \\ a_n \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial x} = y_{2n} \\ a_p \frac{\partial \psi_{1p}}{\partial x} = y_{2p} \end{cases}, \tag{16}$$

де

$$y_{1\,n,p} = -a_{n,p} \frac{\alpha_{n,p}^2}{\phi_{n,p}^2 \kappa_{n,p}} R_{2n,p} I^2(t)\, \psi_{1n,p} - \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} R_{1n,p} I(t)\, \psi_{2n,p},$$

$$y_{2\,n,p} = a_{n,p} \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I(t)\, \psi_{1n,p} + \frac{\psi_{2n,p}}{\kappa_{n,p}},$$

$$R_{1\,n,p} = 1 + \frac{d \ln \alpha_{n,p}}{dT} T_{n,p} - \frac{d \ln \kappa_{n,p}}{dT} \left(T_{n,p} - \frac{\phi_{n,p}}{I} \frac{q_{n,p}}{\alpha_{n,p}} \right),$$

$$R_{2\,n,p} = R_{1\,n,p} + \frac{d \ln \alpha_{n,p}}{dT} \left(T_{n,p} - \frac{\phi_{n,p}}{I} \frac{q_{n,p}}{\alpha_{n,p}} \right) + \frac{\rho_{n,p} \kappa_{n,p}}{\alpha_{n,p}^2} \frac{d \ln \rho_{n,p}}{dT}.$$

Прикінцеві і крайові умови для системи будуть такими:

$$\psi_{1n}(x,\theta)=0,\ 0<x\le 1,\ \psi_{1n}(0,\theta)=-\frac{1}{1+\frac{a_n g}{\phi_n}},\ \psi_{1p}(x,\theta)=0,\ 0\le x\le 1, \tag{17}$$

$$\begin{array}{l}\frac{\partial\psi_{1n}(0,t)}{\partial t}=\frac{K(s_n+s_p)}{g}\psi_{1n}(0,t)-\frac{\phi_n}{a_n g}\left(\psi_{2n}(0,t)+\psi_{2p}(0,t)\right),\\ \psi_{1p}(0,t)=\frac{a_n s_p}{a_p s_n}\psi_{1n}(0,t),\qquad \psi_{1n}(1,t)=0,\qquad \psi_{1p}(1,t)=0.\end{array} \tag{18}$$

Оптимальна функція струму $I(t)$ повинна задовольняти умові максимуму функції H в кожний момент часу $t\in\{0,\theta\}$, яка матиме вигляд

$$H=\int_0^1\sum_{n.p}(\psi_1(x,t,I)\,f_1(x,t,I)\,\psi_2(x,t,I)\,f_2(x,t,I))dx+$$

$$+\frac{a_n g}{\phi_n}\psi_{1n}(0,t,I)\,F_0(t,I). \tag{19}$$

Умови (16)–(19) разом з основними рівняннями нестаціонарного термоелектричного охолодження (2)–(4) задають розв'язок поставленої оптимізаційної задачі та дозволяють визначити оптимальну функцію струму $I(t)$, що забезпечує мінімальну температуру охолодження об'єкта T_c за певний фіксований проміжок часу θ.

Така задача розв'язується комп'ютерними методами за допомогою запропонованого вище алгоритму методу послідовних наближень з використанням різницевих схем для розв'язання основної і спряженої крайових задач.

5. Результати оптимізації нестаціонарного процесу термоелектричного охолодження

Оцінки характеристик нестаціонарного процесу термоелектричного охолодження проводилися на прикладі термоелементу, вітки якого виконані з матеріалів на основі Bi-Te n- і p-типу провідності. Типові експериментальні температурні залежності термоелектричних параметрів $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ цих матеріалів [4] апроксимувалися поліномами і використовувалися для комп'ютерних розрахунків. Оцінки проводилися для термоелемента з висотою віток $L=0.2$ см, площею перерізу $s_{n,p}=0.1\times 0.1$ см^2, величиною контактного опору $r_0=5\cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ см^2. Враховувався теплообмін холодного спаю термоелемента з навколишнім середовищем, температура якого $T_0=300$ К, коефіцієнт теплообміну $K=10^{-3}$ Вт/(см$^2\cdot$К). Значення теплоємності та тепловиділення під'єднаного до спаю теплового навантаження приймалися $g=0.0012$ Дж/К і $q_0=0$ Вт відповідно.

На рис. 2 наведено приклад результатів розрахунку температури холодного спаю термоелемента $T_c(t)\equiv T_n(0,t)=T_p(0,t)$ в залежності від часу для різних значень постійного струму I. Результати отримані шляхом розв'язування системи рівнянь (2) за умов (3), (4) методом скінчених різниць. З рис. 2 видно, що температура холодного спаю термоелемента

в початкові моменти часу знижується, а надалі залежності $T_c(t)$ досягають насичення, тобто значень температури в стаціонарному режимі. Найнижча температура досягається при значенні струму $I = 3$ А і дорівнює $T_c = 228$ К. Таким чином максимальний перепад температур, що досягається на термоелементі за умови $q_0 = 0$ в стаціонарному режимі, дорівнює $\Delta T_{max} = 72$ К і відповідає рівню охолодження однокаскадних термоелектричних модулів промислового виробництва.

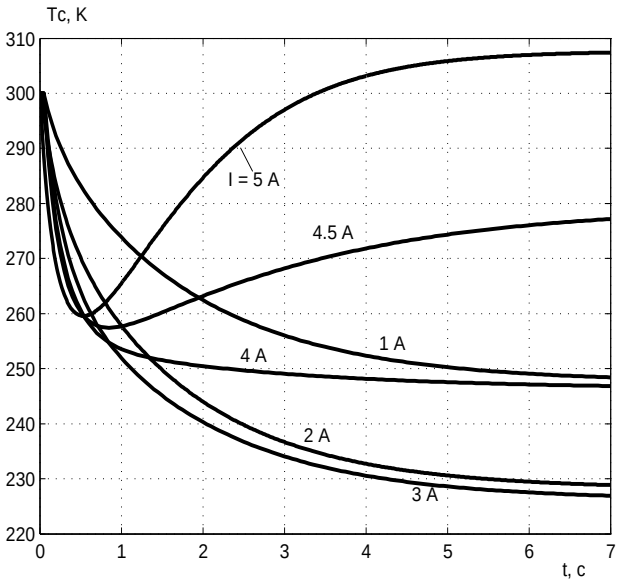

Рис. 2. Залежність температури охолодження T_c термоелемента від часу t за умов постійного струму I

Приклад результатів розрахунку оптимальних функцій струму живлення термоелемента наведено на рис. 3. Тут показані розраховані оптимальні залежності струму від безрозмірного параметра часу $I(t/\theta)$, що мінімізують температуру холодного спаю термоелемента T_c в різні кінцеві моменти часу θ=1 с, 2 с, 5 с. На цьому ж рисунку показано, як знижується температура охолодження T_c в залежності від часу при використанні цих оптимальних залежностей струму. Температура, яка досягається за час θ=5 с дорівнює T_c=220 К, що на 8 К нижче за мінімальну температуру в стаціонарному режимі.

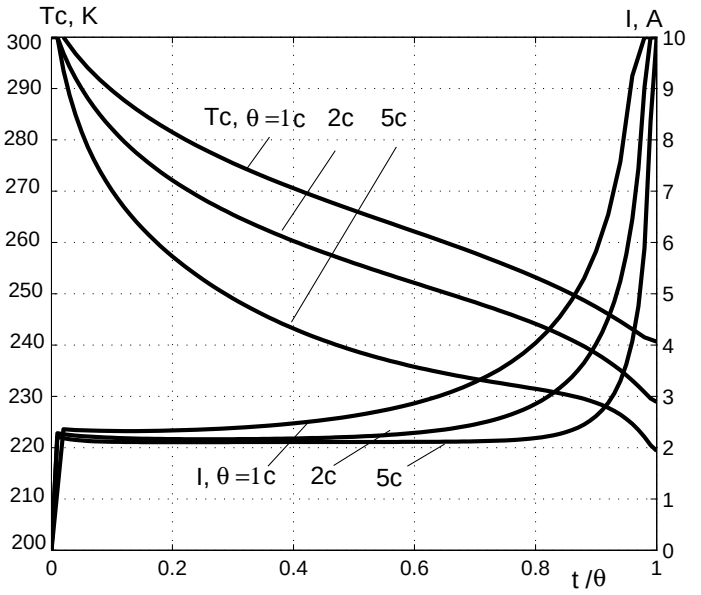

Рис. 3. Оптимальні залежності струму I та відповідні залежності температури охолодження термоелемента T_c від безрозмірного параметра часу t/θ для різних кінцевих моментів часу θ

Порівняння даних рис. 2 і рис. 3 демонструє можливості запропонованого методу оптимізації нестаціонарного термоелектричного охолодження і доводить, що використання оптимальних функцій струму дозволяє досягти суттєво нижчих температур ніж застосування постійного струму.

Висновки

Застосування варіаційного методу дозволило отримати в загальному вигляді необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування об'єктом з розподіленими параметрами, що описується системою нестаціонарних одновимірних рівнянь з нестандартними крайовими умовами.

Запропонований алгоритм методу послідовних наближень для чисельного розв'язання задачі дозволяє визначати оптимальні функції керування такими об'єктами.

Розглянуто задачу оптимізації процесу нестаціонарного термоелектричного охолодження в найбільш загальному її варіанті. Розраховані оптимальні залежності струму живлення термоелектричного модуля від часу, що забезпечують в нестаціонарному режимі температуру охолодження на 8–10 K нижчу за мінімальну температуру стаціонарного режиму.

Література

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузными процессами. — М: Наука, 1978. — 463 с.
2. Hans P. Geering. Optimal control with Engineering Applications. — NewYork, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 134 p.
3. Suresh P. Sethi, Gerald L. Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics. Thompson — Springer Science+Business Media, Inc., 2000. — 505 p.
4. Анатычук Л. И., Семенюк В. А. Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов. — Черновцы: Прут, 1992. — 263 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимального управления — М: Наука, 1976. — 392 с.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М: Наука, 1965. — 474 с.
7. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М: Наука, 1977. — 479 с.
8. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.
9. Шевяков А. А., Яковлєва Р. В. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами. — М: Энергоатомиздат, 1986. — 208 с.
10. Анатычук Л. И. Термоэлектричество. Том II. Термоэлектрические преобразователи энергии. — Киев, Черновцы: Институт термоэлектричества, 2003. — 376 с.
11. Ronggui Yang, Gang Chen, Ravi Kumar A., Jeffrey Snyder G. Jean-Pierre Fleurial. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices. Energy Conversion and Management. — 2005. — 46. — P. 1407–1421.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 28.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МУРАВЬИНЫМИ КОЛОНИЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЕДСКАЗАНИЯ СТРУКТУРЫ ПРОТЕИНА

В. А. Рудык

Резюме. Для прогнозирования третичной структуры протеина рассматривается гидрофобно-полярная модель Дилла. Для решения задачи комбинаторной оптимизации, возникающей при этом, предлагается алгоритм, базирующийся на методе оптимизации муравьиными колониями. Проводится теоретический анализ сходимости этого алгоритма, доказывается его сходимость по вероятности к глобальному решению.

1. Введение

Задача сворачивания протеина, состоящая в прогнозировании его пространственной структуры на основе заданной последовательности аминокислотных остатков — одна из самых важных и сложных задач в вычислительной биологии. Поскольку физическое исследование всего процесса сворачивания сложно и трудоемко, принято использовать математические модели, большинство из которых приводит к задачам оптимизации комбинаторного типа. Учитывая сложность возникающих задач, на практике не представляется возможным применять точные методы оптимизации. Поэтому перед исследователями стоит важная проблема — разработка приближенных алгоритмов решения. Это порождает необходимость в теоретическом исследования свойств таких алгоритмов, хотя сложность проблемы затрудняет получение удовлетворительных результатов. Работа посвящена вопросам разработки и исследования сходимости одного из классов метаэвристик, применяемых для решения задач предвидения пространственной структуры протеина, — алгоритмов оптимизации муравьиными колониями.

Одна из наиболее распространенных математических моделей процесса сворачивания — гидрофобно-полярная модель Дилла [1]. Исходными данными для нее является последовательность аминокислотных остатков $\xi_1\xi_2...\xi_n$, $\xi_i \in \{H, P\}$, $i = \overline{1,n}$, которая задает молекулу протеина длиной n. Каждый из остатков в зависимости от своих характеристик относится к одной из двух групп — гидрофобной (H) или полярной (P). Рассматривается некоторая дискретная решетка, и каждый из остатков размещается в ее узле так, чтобы удовлетворялись следующие условия: соседние в

последовательности остатки должны располагаться в соседних узлах решетки (условие связности молекулы); в каждом узле не должно быть больше одного остатка (условие отсутствия самопересечений).

Между гидрофобными остатками, расположенными в соседних узлах решетки, но не соседних в аминокислотной последовательности, возникает контакт. Каждой возможной конфигурации молекулы приписывается значение энергии этой структуры, которое равно числу контактов в ней со знаком минус. Необходимо найти структуру с минимальной энергией — считается, что это и будет естественная форма молекулы протеина.

Предметом исследования будет предложеный нами ранее алгоритм оптимизации муравьиными колониями (ОМК) [2] и вопросы его сходимости.

Как было указано выше, третичная структура молекулы задается путем в некоторой дискретной решетке. Выбор той или иной решетки определяет степень соответствия модели естественной структуре. В литературе рассматривается использование двухмерных квадратных и треугольных, а также трехмерных кубических и треугольных решеток [3]–[6]. Двухмерные решетки являются более простыми для визуализации и реализации, но не вполне адекватны для описания реальной формы молекулы. Квадратная и кубическая решетки обладают свойством, именуемым "проблема парности" — соседними могут быть только элементы последовательности с различными по четности индексами. Такое свойство не характерно для физических молекул и приводит к неестественным верхним оценкам целевой функции. Одной из определяющих характеристик решетки является число узлов, соседних с определенным. От него зависит количество допустимых структур, которые может принимать молекула фиксированной длины, чем оно больше тем больше трехмерных форм охватывает модель. Для квадратной решетки число соседних узлов равно 4, для двумерной треугольной — 6, для кубической — 8 и для трехмерной треугольной — 12. Упомянутый алгоритм может быть использован для всех четырех рассматриваемых решеток, но из-за приведенных причин для исследований была выбрана трехмерная треугольная.

2. Алгоритм оптимизации муравьиными колониями для задачи предсказания третичной структуры протеинов

Одним из наиболее эффективных методов решения задач комбинаторной оптимизации является метод оптимизации муравьиными колониями [7, 8]. Процесс построения решения в нем имитирует схему поиска кратчайших путей от муравейника к пище группой муравьев, каждый из которых обозначает свой маршрут феромоном. В зависимости от силы феромонного следа, муравьи выбирают направление движения, таким образом со временем на кратчайших путях формируется наиболее высокая концентрация феромона.

Рассмотрим алгоритм решения задачи прогнозирования третичной структуры протеина, разработанный на основе метода ОМК, схема которого представлена на рис. 1 [2]. Для описания пути в дискретной решетке могут

быть использованы различные представления — последовательность координат, абсолютная кодировка, q-кодировка, предложенная в [9], матрица расстояний между остатками. Разработанный алгоритм может использовать абсолютную или q-кодировку, но последняя является более предпочтительной, в ее основе лежит аппарат кватернионов и она более адекватно моделирует реальный процесс сворачивания.

Феромонная матрица Ф будет описываться двумерным массивом размером $|S| \times k$, где $|S|$ — количество элементов в алфавите кода (зависит от выбранной кодировки и решетки), а k — длина кода (зависит от длины молекулы и в меньшей мере — от выбранной кодировки). Процедура *ИнициализироватьФеромоннуюМатрицу*(Ф) устанавливает значения всех элементов матрицы Ф равными некоторому заданному параметру $\tau_0 < \tau_{min}$. Далее на каждой итерации определяемое параметром N_A количество муравьев независимо друг от друга строят допустимые структуры по правилу:

$$P(s_i = q_j) = \frac{\Phi[\mathrm{j}, \mathrm{i}-1]^{\alpha} \cdot Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_j)^{\beta}}{\sum_{l=1}^{|S|} \Phi[\mathrm{l}, \mathrm{i}-1]^{\alpha} \cdot Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_l)^{\beta}}. \quad (1)$$

```
procedure ACO()
    fold_rec:=null;
    ИнициализироватьФеромоннуюМатрицу(Ф);
    while (!УсловиеЗавершения()) do
        for i = 1,...,N_A do
            fold_i:=ДопустимоеРешение(Ф);
        end for;
        Отсортировать(fold);
        for i = 1,...,N_LS do
            fold_i:=ЛокальныйПоиск(fold_i);
        end for;
        fold_rec:=ОптимальноеЗначение(fold_rec,fold_1,...,fold_N_LS);
        ИспаритьФеромоннуюМатрицу(Ф);
        ОбновитьФеромоннуюМатрицу(Ф, fold, fold_rec);
    end while;
    return fold_rec;
end procedure.
```

Рис. 1. Схема алгоритма ОМК для задачи определения структуры протеина

Тут $P(s_i = q_j)$ обозначает вероятность (равную для всех муравьев, используемых на одной итерации) того, что i-м элементом кода структуры будет выбран элемент q_j, а $Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_j)$ обозначает априорную оценку. При ее вычислении предполагается, что следующая аминокислота располагается по направлению q_j, и подсчитывается количество гидрофобных (n_H) и полярных (n_P) остатков в соседних с ней узлах. Введем

параметры

$$0 < est_{HP} < est_{H0} < est_{HH}, est_{HP} + est_{H0} + est_{HH} = 1,$$

$$0 < est_{PH} < est_{P0} \leq est_{PP}, est_{PH} + est_{P0} + est_{PP} = 1,$$

и определим оценку $Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_j)$ следующим образом:

$$Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_j) = \begin{cases} n_P \cdot est_{HP} + n_H \cdot est_{HH} + \\ +(n - n_P - n_H) \cdot est_{H0}, \text{ если } \xi_{i+1} = H, \\ n_P \cdot est_{PP} + n_H \cdot est_{PH} + \\ +(n - n_P - n_H) \cdot est_{P0}, \text{ если } \xi_{i+1} = P. \end{cases}$$

Отметим, что

$$D \cdot \max(est_{HH}, est_{PP}) \geq Est(s_1 s_2 ... s_{i-1}, q_j) \geq D \cdot \min(est_{HP}, est_{PH}), \quad (2)$$

где D обозначает количество соседних узлов в заданной решетке.

Процедура *ЛокальныйПоиск*(fold) обозначает алгоритм локального поиска [10], использующий структуру fold в качестве начального приближения, который применяется для N_{LS} наиболее оптимальных структур, найденных на данной итерации. Для этого предварительно запускается процедура *Отсортировать*(fold), осуществляющая сортировку структур по возрастанию значений их энергии.

Далее находится псевдо-оптимальное на данный момент времени решение fold_{rec} — минимальное по значению энергии среди решений, сгенерированных на данной итерации алгоритма, и псевдо-оптимального решения предыдущей итерации, после чего проводится корректировка значений феромонной матрицы. Это происходит за два шага. Первый — процедура *ИспаритьФеромоннуюМатрицу*(Φ). Ее задача состоит в том, чтобы устаревшая информация со временем теряла актуальность. Эта модификация производится по формуле

$$\Phi[i, j] = \max\{(1 - \rho)\Phi[i, j], \tau_{\min}\}, \ i = \overline{1, |S|}, \ \ j = \overline{1, k},$$

где параметр $0 \leq \rho \leq 1$ определяет степень испарения феромона, а параметр $\tau_{\min}$ — минимальное значение феромона.

Цель процедуры *ОбновитьФеромоннуюМатрицу*(Φ, fold, fold_{rec}) — усилить значения феромонов на участках, которые учавствуют в формировании связей в структурах на данной итерации. С учетом особенностей задачи предлагается следующая процедура обновления: введем массив ϕ длиной $N - 2$ и заполним его нулями. Пусть l, m — номера остатков, образующих гидрофобную связь, $l < m$. В образовании этой связи принимают участие элементы $s_l, s_{l+1}, ..., s_{m-1}$. Подкорректируем массив ϕ для этой связи так:

$$\varphi[i] = \varphi[i] + 1, \ i = \overline{\max\{1, l - 1\}, \ m}$$

и повторим эту операцию для всех гидрофобных связей в структуре $v = s_1 s_2 ... s_{N-1}$, после чего обновим феромонную матрицу:

$$\Phi[k_{i+1}, i] = \Phi[k_{i+1}, i] + \phi[i]^{\gamma}, \ i = \overline{1, N - 2},$$

где γ — параметр алгоритма. Такая схема позволяет более точно учитывать приемлемость той или иной части структуры молекулы.

3. Анализ скорости сходимости алгоритма

Исследуем вопросы сходимости приведенного алгоритма ОМК, используя подход, аналогичный описанному в [11]. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 1. *На каждой итерации алгоритма выполняется условие:*

$$\Phi[i,j] \le \tau_{\max} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma}, \;\; i=\overline{1,|S|}, \;\; j=\overline{1,k},$$

где N_H — количество гидрофобных остатков в структуре.

Доказательство. На каждой итерации максимальное количество феромона, которое может быть добавлено, равно $\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma}$. Из этого следует, что на итерации t значения феромонной матрицы будут удовлетворять условию

$$\Phi[i,j] \le (1-\rho)^t\tau_0 + \sum_{l=1}^{t}(1-\rho)^{t-l}\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma} \le$$

$$\le \frac{1}{\rho}\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma} = \tau_{\max}, \;\; i=\overline{1,|S|}, \;\; j=\overline{1,k},$$

что и доказывает лемму. □

Теорема 1. *Пусть $P^*(t)$ — вероятность того, что алгоритм найдет оптимальное решение за первые t итераций. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при*

$$T > T_0 = \frac{\ln\varepsilon}{N_A \ln(1 - \left[\frac{\tau_{\min}^{\alpha}\cdot D^{\beta}\cdot\min(est_{HP},est_{PH})^{\beta}}{\sum_{l=1}^{|S|}\frac{1}{\rho}\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma\alpha}\cdot D^{\beta}\cdot\max(est_{HH},est_{PP})^{\beta}}\right]^k)} \qquad (3)$$

будет выполняться условие $P^*(T) \ge 1-\varepsilon$.

Доказательство. Оценим вероятность $P_{\min}$ генерации алгоритмом некоторой определенной структуры. Учитывая, что значения феромонной матрицы находятся в отрезке $\left[\tau_{\min}, \frac{1}{\rho}\left(\frac{N_H}{2}\right)^{\gamma}\right]$ и принимая во внимание формулы (1) и (2), получим

$$P_{\min} \ge \left[\frac{\tau_{\min}^{\alpha}\cdot D^{\beta}\cdot\min(est_{HP},est_{PH})^{\beta}}{\sum_{l=1}^{|S|}\frac{1}{\rho}\left(\frac{N_H(N_A+1)}{2}\right)^{\gamma\alpha}\cdot D^{\beta}\cdot\max(est_{HH},est_{PP})^{\beta}}\right]^k.$$

За t итераций N_A муравьев будут $t\cdot N_A$ раз генерировать структуру, следовательно,

$$P^*(t) > 1-(1-P_{\min})^{t\cdot N_A}.$$

Из условия $P^*(T_0) \ge 1-\varepsilon$ находим T_0:

$$(1-P_{\min})^{T_0\cdot N_A} \le \varepsilon,$$

откуда

$$T_0 \leq \frac{\ln \varepsilon}{N_A \ln(1 - P_{\min})},$$

чем и завершается доказательство теоремы. □

Отметим, что в формуле (3) $\tau_{\min}$,α, β, γ, ρ, N_A, est_{PH}, est_{HP}, est_{PP}, est_{HH} — это параметры алгоритма, $|S|$ зависит от выбранной кодировки и типа решетки, D — от типа решетки, а N_H и k — от конкретной решаемой задачи.

Формула (3) описывает зависимость скорости сходимости алгоритма от его параметров и может быть использована совместно с вычислительным экспериментом для подбора значений параметров, при которых алгоритм является наиболее эффективным.

4. Выводы

На основе метода оптимизации муравьиными колониями разработан алгоритм прогнозирования третичной структуры протеина. Проведено исследование алгоритма, которое сфокусировано на доказательстве его сходимости по вероятности к глобальному решению. Указано на возможность использования полученных результатов, в частности, формулы (3), для решения важнейшей проблемы — настройки варьируемых параметров алгоритмов с целью повышения их эффективности. Это открывает путь к дальнейшим исследованиям, целью которых может стать построение процедуры адаптивного подбора параметров на каждой итерации алгоритма в зависимости от характера его сходимости. Такой подход позволит уменьшить количество параметров, поступающих на вход алгоритма, и понизит чувствительность результатов к длине входящей последовательности и типу дискретной решетки, рассматриваемой в задаче.

Литература

1. Dill K. A. Theory for the folding and stability of globular proteins. // Biochemistry. — 1985. — №24(6). — P. 1501–1509.
2. Рудык В. Анализ эффективности алгоритмов ОМК для решения задачи о сворачивании протеинов. // Теория оптимальных решений. — 2012. — №1. — С. 66–73.
3. Giaquinta E., Pozzi L. An Effective Exact Algorithm and a New Upper Bound for the Number of Contacts in the Hydrophobic-Polar Two-Dimensional Lattice Model. // Journal of Computational Biology. — 2013. — №20(8). — P. 593–609.
4. Manning T., Sleator R., Walsh P. Naturally selecting solutions. The use of genetic algorithms in bioinformatics. // Bioengineered. — 2013. — №4(5). — P. 266–278.
5. Lin C., Su S. Using an Efficient Artificial Bee Colony Algorithm for Protein Structure Prediction on Lattice Models. // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. — 2012. — V. 8, №3(B). — P. 2049–2064.

6. Jiang M., Mayne M., Gillespie J. Delta: a Toolset for the Structural Analysis of Biological Sequences on a 3D Triangular Lattice. // Bioinformatics Research and Applications. — 2007. — №4463. — P. 518–529
7. Dorigo M., Stutzle T. Ant Colony Optimization. // — Cambridge: MIT Press, MA, 2004. — 348 p.
8. Talbi E. Metaheuristics: from design to implementation — New York: John Wiley and Sons, 2009. — 624 p.
9. Гуляницький Л., Рудык В. Проблема предсказания структуры протеина: формализация с использованием кватернионов // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №4. — С. 130–137.
10. Сергиенко И. В., Гуляницкий Л. Ф., Сиренко С. И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — №5. — С. 71–83.
11. Thomas S., Dorigo M. A short Convergence proof for a class of ant colony optimization algorithms // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2002. — №6(4). — P. 358–365.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03680, Украина.

Поступила 01.11.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.925.51

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ ДИНАМІКОЮ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

В. В. Рутицька

Резюме. Мета даного наукового дослідження полягає у розробці нових математичних моделей для розв'язування задач управління інвестиційними портфелями за допомогою методів фундаментального аналізу. Застосування прикладного математичного моделювання та теорії керування дає можливість конструктивно розв'язувати задачі інвестиційного менеджменту, досліджувати стратегії управління портфелем активів та інших фінансових інструментів у випадку опису відповідних процесів динамічними детермінованими математичними моделями.

При дослідженні ринку фінансових інвестицій зусилля математиків значною мірою спрямовані на розгляд багатокритеріальних задач з великою кількістю критеріїв, на вивчення і розв'язання задач інвестиційного менеджменту в динамічній постановці, способах адекватного опису випадкових процесів зміни цін, на розробку прикладних чисельних методів для розв'язання задач великої розмірності.

Динамічні моделі управління активами і зобов'язаннями (ALM) знайшли найбільш успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади роботи методики ALM включають реалізовані моделі для пенсійних фондів, страхових компаній, інвестиційних компаній, банків, університетських фондів.

Загальна схема активного управління портфелем акцій, як правило, складається з таких кроків:

1. Розрахунок ціни окремої акції на основі статичних детермінованих моделей.
2. Аналіз статичного портфеля акцій.
3. Моделювання динаміки активу.
4. Моделювання динаміки портфеля активів.
5. Інтегральне управління і диверсифікація портфеля активів.

Разом з тим, з метою перерозподілу і зменшення ризиків інвестування розглядають задачу Д. Тобіна для портфеля змішаної структури.

Відомі також приклади застосування «наївної політики» при розміщенні фінансових ресурсів. Хоча варто відмітити, що вона супроводжується значною волатильністю (дисперсія цільової функції до року). Прикладом такого інвестування є структура, що включає: 50% акцій компаній-резидентів;

5% звичайних акцій компаній-нерезидентів; 30% цінних паперів з фіксованим доходом (облігації, привілейовані акції, т. ін.); 5% паперів від вкладання в нерухомість; 10% активів, прирівняних до готівки.

Перші два кроки загальної схеми детально описано в сучасній науковій літературі, тому зосередимось на підходах, що дозволяють моделювати динаміку формування інвестицій та аналізувати її у детермінованому випадку.

Розглянемо «ринкову модель Шарпа» [4] з метою перейти від задачі статичної до динамічної

$$r = \alpha + \beta SM_{ind} + \varepsilon, \tag{1}$$

де r — ринкова ціна акції; SM_{ind} — індекс фондового ринку; α — деяке базове значення для r. Рівняння (1) описує лише загальні принципи формування ринкової вартості акції. Із наведеного вище співвідношення видно, що ринкова вартість акції формується за рахунок інтегрального впливу індексу фондового ринку та випадкової складової ε. Коефіцієнт β формально можна розглядати як характеристику впливу індексу ринку на формування ринкової вартості однієї акції. Зважаючи на те, що такі процеси відбуваються у часі, можемо записати

$$r(t) = \alpha(t) + \beta SM_{ind}(t) + \varepsilon.$$

Тоді

$$r(t + \delta t) = r(t) + \beta SM_{ind}(t).$$

Було б значним спрощенням при моделюванні такого складного процесу розглядати функцію SM_{ind} як основну і єдину, що формує значення $r(t+\delta t)$. Аналіз факторів, що впливають на динаміку процесу дає підстави стверджувати, що до таких суттєвих факторів можна віднести також кореляційні залежності між цінними паперами, а також інфляцію [1]. Тому запишемо його у вигляді

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + \beta(SM_{ind}(t),\, I(t),\, \rho_{ij}, r_i(t)), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Враховуючи сказане, праву частину (3) запишемо у вигляді

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\frac{r_i(t + \delta t) - r_i(t)}{\delta t} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сучасні технології торгівлі цінними паперами та умови формування ринкової вартості акцій на фондовому ринку дають можливість здійснити наступний крок

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

де α_1, α_2 — параметри моделі.

Динамічне рівняння формування ринкової вартості акції можна розглядати також у вигляді

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1,n}.$$

У цьому випадку $\rho_{i,j}$, $i = \overline{1,n}$ також є вектором параметрів моделі, що враховує кореляційні залежності між акціями. Тут кількість акцій, з якими корелює i-та акція.

Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування параметрами портфеля акцій, побудуємо його модель на основі моделі однієї акції [1].

На інтервалі часу $t \in [t_0, t_1]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p, має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t),$$

де x_i — частка акцій i-того виду у портфелі; r_i — очікувана прибутковість акцій i-того виду. Продиференціювавши обидві частини за t, отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t)\frac{dr_i(t)}{dt}). \tag{2}$$

Зважимо на те, що для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \tag{3}$$

В (3) функція f є правою частиною математичної моделі формування ціни акції [1]

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \alpha_3(x(t), r(t)). \tag{4}$$

Тоді динамічне рівняння формування ціни портфеля акцій матиме вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), \quad i \neq j. \tag{5}$$

Останнє співвідношення при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля.

Для моделей (4), (5) задачу з фіксованим часом, закріпленим лівим кінцем та вільним правим кінцем у випадку, коли оптимальність розглядають у розумінні мінімуму функціонала

$$J = \sum_i x_i r_i(t_1), \tag{6}$$

де $x_i(t)$ — величини, які характеризують структуру портфеля. Можемо припустити, що застосовуючи «наївну політику» інвестування для заданого інтервалу часу ці величини є постійними. Таким чином, необхідно побудувати оптимальний процес, що починається у заданій точці x_0 і надає функціоналу (6) найменше можливе значення. Матимемо

$$\begin{gathered} J = \textstyle\sum_i x_i r_i(t_1) = \sum_i x_i(r_i(t_1) - r_i(t_0)) + \sum_i x_i r_i(t_0) = \\ = \textstyle\sum_i x_i \int_{t_0}^{t_1} f_i(r(t), u(t))dt + const = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i x_i f_i(r(t), u(t))dt + const. \end{gathered} \tag{7}$$

Із наведеного вище випливає, що $J = I + const$, де I —функціонал в задачі принципу максимуму Понтрягіна, в якому функція f_0 має вигляд

$$f^0(x, u) = \sum_i c_i f^i(x, u).$$

Існування розв'язку даної задачі безпосередньо випливає із відповідної теореми про оптимальність розв'язку задачі оптимального керування із закріпленим часом [3]. Можна показати також, що побудова відповідних множин досяжності для моменту t_1 може бути зведена до розв'язання серії задач мінімізації функціонала $J = (x, r(t_1))$. Варіюючи вектором x і, розв'язуючи відповідні задачі оптимального керування для різних значень x, отримаємо точки границі множини досяжності і опорні гіперплощини у цих точках.

Для спрощення подальших викладок математичну модель (5) в більш загальній формі запишемо так

$$\dot{r}_p = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i). \tag{8}$$

Граничну умову, що характеризує ринкову вартість портфеля акцій у початковий момент часу t_0 сформулюємо у вигляді

$$r_p(t_0) = r_{p_0}, \tag{9}$$

Критерій якості, на відміну від (6), запишемо у вигляді

$$J = \sum_I x_i(t_1) r_i(t_1). \tag{10}$$

Для розв'язання задачі оптимального керування (8), (9), (10) застосуємо метод послідовних наближень. Уведемо позначення

$$f(x, u, t) = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), i \neq j.$$

Тут як змінна фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p. За керуючі параметри, згідно з моделлю, розглядаємо вектор

$$u(t) = \left(x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt} \right).$$

Відомо, що загальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t), k = 0, 1, 2, ...,$$

де u^0 — деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ — довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Для лінійної динамічної математичної моделі (5) формування вартості портфеля та критерія якості (6) $(k+1)$-ша ітерація методу матиме такий вигляд. Нехай $u^k(t)$ визначено.

Крок 1. Розв'язати задачу Коші для початкової системи (5) і знайти фазову траєкторію $r_p^k(t)$, що задовольняє керуванню $u^k(t)$.

Крок 2. Побудувати спряжену систему і, розв'язавши для неї задачу Коші, визначити вектор-функцію $p(t)$, що відповідає керуванню $u^k(t)$; при цьому замість $x(t)$ підставляється побудована функція $x^k(t)$. Тут $p(t)$ — вектор-функція, що є розв'язком задачі Коші відповідної спряженої системи.

Крок 3. За умови максимуму функції Гамільтона за керуванням знайти нове наближення $u^k(t)$ для керування. Після цього переходимо до наступної ітерації. Умовою закінчення процесу може слугувати близькість керуючих функцій двох послідовних наближень

$$\left\| u^{k+1}(t) - u^k(t) \right\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Величину ε можна вибирати, наприклад, за умови наявності у оптимального портфеля акцій наперед заданих якісних характеристик.

Література

1. Гаращенко Ф. Г., Кулян В. Р., Рутицкая В. В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента // Кибернетика и вычислительная техника. — 2005. — №148. — С. 3–10.
2. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления. — М: Наука, 1971. — 247 с.
3. William F. S., Gordon J. A., Jeffrey W. Bailey Investments. — Prentice Hall, 1999. — 992 p.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

СИЛЬНО ЗБІЖНИЙ ДЕКОМПОЗИЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З СУМОЮ ДВОХ МАКСИМАЛЬНИХ МОНОТОННИХ ОПЕРАТОРІВ

В. В. Семенов

Резюме. У роботі розглянуто операторне включення з сумою двох максимальних монотонних операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Для цієї задачі запропоновано новий декомпозиційний метод, що є регуляризацією схеми Tseng'a за допомогою гібридної CQ-схеми Nakajo, Takahashi. Доведено теорему про сильну збіжність породжених методом послідовностей до нормального розв'язку операторного включення. Результат отримано за умов, коли один з операторів є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

Ключові слова: операторне включення, максимальний монотонний оператор, декомпозиція, алгоритм, нормальний розв'язок, сильна збіжність.

1. Вступ

Операторні включення та варіаційні нерівності належать до центральних об'єктів дослідження в сучасному нелінійному аналізі [1, 2, 3]. Багато задач дослідження операцій, математичної економіки та математичної фізики можна записати у формі операторних включень, для наближеного розв'язання яких запропоновано та досліджено ряд алгоритмів [4–29].

У даній роботі розглянуто включення

$$0 \in (A + B)\, x$$

з максимальними монотонними операторами A, B, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Грунтуючись на методі декомпозиції Tseng'a (Tseng's modified forward-backward splitting method) [4] та відомому гібридному CQ-методі апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [5], запропоновано новий сильно збіжний декомпозиційний алгоритм розв'язання включень. Раніше подібний прийом було використано у роботі [6] для регуляризації слабко збіжного у нескінченновимірній ситуації екстраградієнтного методу Корпелевич розв'язання варіаційних нерівностей [7] (див. також [8]). Теорема сильної збіжності отримана за умов, коли один з операторів (той, що використовується на „backward"-кроці) є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

Опишемо коротко структуру статті. У другому пункті сформульовано задачу, наведено основні припущення та допоміжні факти, описано запропонований декомпозиційний метод. Третій пункт присвячено доведенню сильної збіжності методу. В останній, четвертий, пункт винесено ряд заключних зауважень стосовно можливих варіантів методу.

2. Постановка задачі та алгоритм

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, P_C — оператор метричного проектування простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$. Для оператора $T : H \to 2^H$ будемо використовувати позначення:

$$\operatorname{dom}(T) = \{x \in H :\ Tx \neq \emptyset\},$$
$$T^{-1}0 = \{x \in H :\ 0 \in Tx\}.$$

Нагадаємо, що резольвентою оператора $T : H \to 2^H$ називають оператор $J_T = (I+T)^{-1} : H \to 2^H$. Відомо, що для максимального монотонного оператора T резольвента J_T є однозначним, скрізь заданим та міцно нерозтягуючим (firmly nonexpansive) оператором, а множина $T^{-1}0$ — замкненою та опуклою [3]. Корисною є

Лема 1 ([1, 3]). *Нехай $T : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор, x, $u \in H$. Тоді*

$$(u-v, x-y) \geq 0 \ \ \forall y \in \operatorname{dom}(T)\ \ \forall v \in Ty \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{dom}(T),\ u \in Tx.$$

Нехай:

A1) $A : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор;
A2) $B : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий оператор.

Розглянемо операторне включення:

$$0 \in (A+B)\,x. \tag{1}$$

Припустимо, що

A3) $(A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$.

Типовим прикладом (1) є варіаційні нерівності:

$$\text{знайти } x \in C :\ \ (Tx, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де C — замкнена опукла підмножина H, $T : H \to H$. Дійсно, (2) можна подати у вигляді операторного включення [1, 3]:

$$0 \in (T + N_C)\,x,$$

де $N_C x$ — нормальний конус множини C в точці $x \in H$, тобто

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H :\ (z, y-x) \leq 0\ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для побудови сильно збіжних апроксимацій розв'язків включення (1) будемо використовувати

Алгоритм 1. Для заданого $x_1 = x \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми ($\lambda_n > 0$):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda_n B x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n, \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

Зауваження 1. Алгоритм 1 є регуляризацією за допомогою проекційної CQ-схеми [5, 6] відомого декомпозиційного методу Tseng'a [4].

Зауваження 2. Для варіаційної нерівності (2) алгоритм 1 набуває вигляду[1]:

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ z_n = P_C\left(x_n - \lambda_n B x_n\right), \\ v_n = z_n - \lambda_n\left(B z_n - B x_n\right), \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

Зробимо припущення:

A4) $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$, де $L > 0$ — константа Ліпшиця оператора B.

3. Теорема сильної збіжності

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A1)–A4). Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n), (z_n) та (v_n) сильно збігаються до точки $z^* = P_{(A+B)^{-1}0} x$.*

Спочатку доведемо важливу нерівність.

Лема 2. *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (z_n) та (v_n) має місце нерівність*

$$\|v_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \lambda_n^2 L^2\right)\|x_n - z_n\|^2, \tag{3}$$

де $z \in (A + B)^{-1}0$.

Доведення. Нехай $z \in (A + B)^{-1}0$. Маємо

$$\begin{aligned} \|v_n - z\|^2 &= \|x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n - z\|^2 = \\ &= \|(z_n - z) + \lambda_n\left(B x_n - B z_n\right)\|^2 = \|z_n - z\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n (B x_n - B z_n, z_n - z) + \lambda_n^2 \|B x_n - B z_n\|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

З монотонності оператора $\lambda_n A$ та рівності $z_n = J_{\lambda_n A} y_n$ випливає

$$(z_n - y_n - \lambda_n B z, z_n - z) \le 0.$$

[1]Оскільки $J_{\lambda N_C} = P_C$, де $\lambda > 0$.

З монотонності оператора B випливає

$$(\lambda_n Bz - \lambda_n Bz_n, z_n - z) \leq 0.$$

Склавши ці нерівності, отримаємо

$$(z_n - y_n - \lambda_n Bz_n, z_n - z) \leq 0. \tag{5}$$

З (5) випливає нерівність

$$\begin{aligned} 2\lambda_n(Bx_n - Bz_n, z_n - z) &= 2(z_n - y_n - \lambda_n Bz_n, z_n - z) + \\ &+ 2(\lambda_n Bx_n + y_n - z_n, z_n - z) \leq 2(x_n - z_n, z_n - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Урахувавши (6) в (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 + \lambda_n^2 \|Bx_n - Bz_n\|^2 \leq \\ \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - L^2\lambda_n^2) \|x_n - z_n\|^2 , \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1. Множини Q_n, C_n — опуклі та замкнені. Нехай $z \in (A+B)^{-1}0$. З нерівності (3) випливає $z \in C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 1$ маємо $Q_n = H$. Тому $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_1 \cap Q_1$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N}$ маємо $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$, така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$. З $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$ випливає

$$(x_{k+1} - z, x - x_{k+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Оскільки $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_k \cap Q_k$, то $(A+B)^{-1}0 \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином, $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$.

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $z^* \in (A+B)^{-1}0$, така, що $z^* = P_{(A+B)^{-1}0} x$. З $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x$ випливає

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \|z - x\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $z^* \in (A+B)^{-1}0 \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \|z^* - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Звідки випливає обмеженість (x_n).

Доведемо, що

$$\lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{8}$$

З $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x$, випливає

$$\|x_{n+1} - x\| \geq \|x_n - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(\|x_n - x\|)$ обмежена і неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x - x_n) \geq 0$ і

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n - x) - (x_{n+1} - x)\|^2 = \\ &= \|x_n - x\|^2 - 2(x_n - x, x_{n+1} - x_0) + \|x_{n+1} - x\|^2 = \\ &= \|x_{n+1} - x\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x - x_n) \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x\|^2 - \|x_n - x\|^2 .\end{aligned}$$

Звідки випливає (8).

Оскільки $x_{n+1} \in C_n$, то

$$\|v_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| .$$

Звідки

$$\|v_n - x_n\| \leq \|v_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2\|x_n - x_{n+1}\| \to 0. \tag{9}$$

Використовуючи нерівність з леми 2 отримуємо

$$\begin{aligned}\|x_n - z_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|v_n - z\|^2}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|v_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \|x_n - v_n\| = O(\|x_n - v_n\|) ,\end{aligned}$$

де $z \in (A + B)^{-1}0$. З (9) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0. \tag{10}$$

Розглянемо довільну підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $w \in H$. Покажемо, що $w \in (A + B)^{-1}0$. З (10) випливає

$$z_{n_k} \rightharpoonup w$$

та

$$(A + B)z_{n_k} \ni u_{n_k} = \frac{x_{n_k} - z_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + Bz_{n_k} - Bx_{n_k} \to 0.$$

Маємо

$$(u_{n_k} - p, z_{n_k} - y) \geq 0 \ \ \forall y \in \mathrm{dom}(A + B) \ \ \forall p \in (A + B)y.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(0 - p, w - y) \geq 0 \ \ \forall y \in \mathrm{dom}(A + B) \ \ \forall p \in (A + B)y.$$

Оскільки оператор $A + B$ є максимальним монотонним, то, завдяки лемі 1, $0 \in (A + B)w$.

Для $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ з нерівності (7) випливає

$$\|x - z^*\| \leq \|x - w\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| \leq \limsup_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| \leq \|x - z^*\| .$$

Тобто, ми отримали

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| = \|x - w\| = \|x - z^*\|.$$

Звідки, $x_{n_k} \to w = z^*$. Отже, $x_n \to z^*$. З (9) і (10) випливає $v_n \to z^*$ і $z_n \to z^*$, що і треба було довести.

4. Заключні зауваження

Зауваження 3. Аналогічне теоремі 1 твердження має місце і для такої схеми:

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \ C_1 = H, \\ y_n = x_n - \lambda_n B x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

Подібна схема для задачі рівноважного програмування досліджена в [9]. Основний недолік цих схем — зростаюча складність опуклих множин C_n, на які проектується точка x.

Зауваження 4. Якщо невідома константа Ліпшиця оператора B, то замість алгоритму 1 можна застосувати процес з Арміхо-подібним регулюванням кроку λ_n (див. [4, 10]):

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min\left\{ j \ge 0 : \ \frac{\left\|BJ_{\sigma 2^{-j}A}\left(I - \sigma 2^{-j} B\right)x_n - Bx_n\right\|}{\left\|J_{\sigma 2^{-j}A}(I - \sigma 2^{-j} B)x_n - x_n\right\|} \le \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = J_{\lambda_n A}\left(I - \lambda_n B\right) x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n \left(Bz_n - Bx_n\right), \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$, $\theta \in (0, 1)$ — задані параметри.

Зауваження 5. Цікавим та важливим є питання розробки сильно збіжного декомпозиційного методу для включення

$$0 \in \left(A_1 + A_2 + ... + A_p + B\right) x,$$

де ореператори A_i — максимальні монотонні, а оператор B — однозначний, монотонний та ліпшицевий.

Автор вдячний аспіранту Ю. В. Маліцькому за корисні зауваження під час дискусій.

Робота виконана за фінансової підтримки Верховної Ради України (Іменна стипендія ВР України для молодих вчених у 2013 році).

Література

1. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. — Wiley, New York, 1984.
2. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
3. Bauschke H. H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, New York, 2011.
4. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
5. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 279. — P. 372–379.
6. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — V. 16. — P. 1230–1241.
7. Korpelevich G. M. The extragradient method for finding saddle points and other problems // Ekonomika i Matematicheskie Metody. — 1976. — V. 12. — P. 747–756 (In Russian).
8. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — V. 58, №2. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
9. Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Strongly convergent modification of Korpelevich's method for equilibrium programming problems // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №1(104). — P. 10–23 (In Ukrainian).
10. Khobotov E. N. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 27. — P. 120–127.
11. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Springer-Verlag, Berlin, 2001.
12. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — Springer, New York, 2003.
13. Vasin V. V., Eremin I. I. Operators and iterative processes of Fejer type. (Theory and Applications). — Regulyarnaya i chaoticheskaya dinamika, Moscow-Izhevsk, 2005 (In Russian).
14. Semenov V. V. About convergence of methods for solving bilevel variational inequalities with monotone operators // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №2(101). — P. 121–129 (In Russian).
15. Voitova T. A., Semenov V. V. Method for solving the bilevel operator inclusions // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №3(102). — P. 34–39 (In Russian).
16. Semenov V. V. A strongly convergent algorithm for approximation of fixed point of multivalued Fejerian operator // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №4(103). — P. 89–93 (In Ukrainian).
17. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. The new theorems of strong convergence of proximal method for the problem of equilibrium programming // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №3(102). — P. 79–88 (In Ukrainian).
18. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13—18.

19. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's method for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
20. Denisov S. V., Semenov V. V. Proximal algorithm for bilevel variational inequalities: strong convergence // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №3(106). — P. 27–32 (In Ukrainian).
21. Apostol R. Ya., Grynenko A. A., Semenov V. V. Iterative algorithms for monotone bilevel variational inequalities // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 3–14 (In Ukrainian).
22. Malitsky Yu. V. Approximation of fixed point for Lipschitz semigroup of nonexpansive operators // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 35–39. (In Ukrainian).
23. Semenov V. V. Parallel decomposition of variational inequalities with monotone operators // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №2(108). — P. 53–58 (In Russian).
24. Semenov V. V. Convergence of proximal algorithm for bilevel convex minimization problem // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — 4 (110). — P. 100–111 (In Ukrainian).
25. Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Alternating proximal algorithm for the problem of bilevel convex minimization // Reports of the NAS of Ukraine. — 2012. — №2. — P. 56–62 (In Ukrainian).
26. Semenov V. V. About one principal scheme calculation of the generalized projection // Reports of the NAS of Ukraine. — 2013. — №6. — P. 41–46 (In Russian).
27. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. Outer approximations scheme for variational inequalities over the fixed point set of Fejer operators // Reports of the NAS of Ukraine. — 2013. — №7. — P. 47–52 (In Russian).
28. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A variant of extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50.
29. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications / Eds.: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — V. 211. — P. 131–146.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Надійшла 17.05.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

С. А. Алдашев

Резюме. В работе показано, что задача Пуанкаре в цилиндрической области одного класса многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: корректность, задача, функция, критерий, уравнение.

Введение

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач [1, 2].

В работе показано, что задача Пуанкаре в цилиндрической области одного класса многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $D_\beta-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно–сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$L^*v \equiv \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - bv_t + dv = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$, а $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r, \theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r, \theta), \tag{2}$$

при этом $\varphi(1, \theta) = \psi(\beta, \theta)$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка
n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \ \ c_1, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}^k_{in}(r, t)$, $a^k_{in} r, t$, $\tilde{b}^k_n(r, t)$, $\tilde{c}^k_n(r, t)$, $\tilde{d}^k_n(r, t)$, ρ^k_n, $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\psi^k_n(t)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $d(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\varphi(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\nu(r, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, $H-$единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta)$, $l \geq m+1$, $i = 1, ..., m$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^p(S_\beta)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $\nu(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $p \geq \frac{3m}{2}$ и выполняется условие

$$\cos \mu_s \beta \neq 0, \ \ s = 1, 2, ..., \tag{4}$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. Если $b(r, \theta, 0) = 0$, $\forall (r, \theta) \in S_0$, то решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

2. Доказательство теоремы 1.

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$\begin{gathered} Lu \equiv u_{rr} + \tfrac{m-1}{r}u_r - \tfrac{\delta u}{r^2} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + \\ + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1,\ g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}^k_n$ получим ([4–6])

$$\begin{gathered} \rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \widetilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \widetilde{c}^1_0\bar{u}^1_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \widetilde{b}^k_n\bar{u}^k_{nt} + \right. \\ \left. + \left[\widetilde{c}^k_n - \lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}^k_{in-1} - n a^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar{u}^1_{0r} = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \rho^k_1\bar{u}^k_{1rr} - \rho^k_1\bar{u}^k_{1tt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1\bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar{u}^k_1 = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \widetilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \widetilde{c}^1_0\bar{u}^1_0\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n\bar{u}^k_n = \\ = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\bar{u}^k_{n-1r} + \widetilde{b}^k_{n-1}\bar{u}^k_{n-1t} + [\widetilde{c}^k_{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}^k_{in-2} - (n-1)a^k_{in-1})]\bar{u}^k_{n-1}\right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots . \end{gathered} \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}^k_n\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$. — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n - \bar{u}^k_{ntt} = f^k_n(r,t), \tag{11}$$

где $f^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f^1_0(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\begin{gathered}\bar{u}^k_n(r,\beta) = \bar{\varphi}^k_n(r), \quad \bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_n(t), \quad \bar{u}^k_{nt}(r,0) = \bar{\nu}^k_n(r), \\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,...\end{gathered} \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{v}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_n(t)$ получим

$$\bar{v}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{v}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}^k_n - \bar{v}^k_{ntt} = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\bar{v}^k_n(r,\beta) = \varphi^k_n(r), \quad \bar{v}^k_n(1,t) = 0, \ \bar{v}^k_{nt}(r,0) = \nu^k_n(r), \\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,...,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\bar{f}^k_n(r,t) = f^k_n(r,t) + \psi^k_{ntt} + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_n, \ \varphi^k_n(r) = \bar{\varphi}^k_n(r) - \psi^k_n(\beta), \\ \nu^k_n(r) = \bar{\nu}^k_n(r) - \psi^k_{nt}(0).\end{gathered}$$

Произведя замену $\bar{v}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}v^k_n(r,t)$ задачу (13), (14) приведем к следующей задаче

$$Lv^k_n \equiv v^k_{nrr} - v^k_{ntt} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}v^k_n = \tilde{f}^k_n(r,t), \tag{15}$$

$$v^k_n(r,\beta) = \widetilde{\varphi}^k_n(r), \quad v^k_n(1,t) = 0, \quad v^k_{nt}(r,0) = \tilde{\nu}^k_n(r), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad \tilde{f}^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}^k_n(r,t), \\ \widetilde{\varphi}^k_n(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi^k_n(r), \tilde{\nu}^k_n(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\nu^k_n(r).\end{gathered}$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$v^k_n(r,t) = v^k_{1n}(r,t) + v^k_{2n}(r,t), \tag{17}$$

где $v^k_{1n}(r,t)$ — решение задачи

$$Lv^k_{1n} = \widetilde{f}^k_n(r,t), \tag{18}$$

$$v^k_{1n}(r,\beta) = 0, \ v^k_{1n}(1,t) = 0, \ v^k_{1nt}(r,0) = 0, \tag{19}$$

а $v^k_{2n}(r,t)$ — решение задачи

$$Lv^k_{2n} = 0, \tag{20}$$

$$v^k_{2n}(r,\beta) = \widetilde{\varphi}^k_n(r), v^k_{2n}(1,t) = 0, v^k_{2nt}(r,0) = \tilde{\nu}^k_n(r). \tag{21}$$

Решение выше указанных задач ищем в виде

$$v^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом полагаем

$$\widetilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \widetilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kR_s(r),\ \widetilde{\nu}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kR_s(r). \quad (23)$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23), получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \quad (24)$$

$$R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty, \quad (25)$$

$$T_{stt}+\mu T_s(t)=-a_{ns}^k(t),\ 0<t<\beta, \quad (26)$$

$$T_s(\beta)=0,\ T_{st}(0)=0. \quad (27)$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является ([7])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_s r), \quad (28)$$

где $\nu=n+\frac{m-2}{2},\ \mu=\mu_s^2$.

Общее решение уравнения (26) представимо в виде ([7])

$$T_s(t)=c_{1s}\cos\mu_s t+c_{2s}\sin\mu_s t+\frac{\cos\mu_s t}{\mu_s}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_s\xi d\xi-$$
$$-\frac{\sin\mu_s t}{\mu_s}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_s\xi d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (27). Тогда будем иметь

$$\begin{cases} c_{2s}=0, \\ \mu_{s,n}c_{1s}\cos\mu_s\beta=\sin\mu_{s,n}\beta\int\limits_0^\beta a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi- \\ \cos\mu_{s,n}\beta\int\limits_0^\beta a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi. \end{cases} \quad (29)$$

Подставляя (28) в (23) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_s r),\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kJ_\nu(\mu_s r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kJ_\nu(\mu_s r),0<r<1. \quad (30)$$

Ряды (30) — разложение в ряды Фурье-Бесселя ([8]), если

$$a_{ns}^k(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (31)$$

$$b_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$
$$e_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{\nu}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (32)$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядка возрастания их величины.

Из (28)–(29) получим решение задачи (18), (19) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\mu_{s,n}} \left\{ \left[(tg\mu_{s,n}\beta) \int_0^\beta a_{ns}^k(\xi) \cos\mu_{s,n}\xi d\xi - \right.\right.$$
$$\left. - \int_0^\beta a_{ns}^k(\xi) \sin\mu_{s,n}\xi d\xi \right] \cos\mu_{s,n}t + (\cos\mu_{s,n}t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin\mu_{s,n}\xi d\xi - \tag{33}$$
$$\left. - (\sin\mu_{s,n}t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos\mu_{s,n}\xi d\xi \right\} J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (31).

Далее, подставляя (28) в (20), (21), с учетом (23), будем иметь задачу

$$V_{stt} + \mu_{s,n}^2 V_s = 0,\ V_s(\beta) = b_{ns}^k,\ V_{st}(0) = e_{ns}^k, \tag{34}$$

решением которой является

$$\mu_{s,n}V_s(t) = e_{ns}^k \sin\mu_{s,n}t + (b_{ns}^k\mu_{s,n} - e_{ns}^k \sin\mu_{s,n}\beta)\frac{\cos\mu_{s,n}t}{\cos\mu_{s,n}\beta}. \tag{35}$$

Из (28), (34) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_s(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{36}$$

где $b_{ns}^k,\ e_{ns}^k$ определяются из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33), (35), $k = \overline{1, k_n}$, $\quad n = 0, 1, \ldots$.

Итак, в области D_β, имеет место

$$\int_H \rho(\theta) Lu dH = 0. \tag{37}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$плотна в $L_2(D_\beta)$ ([9]).

Отсюда и из (36), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu dD_\beta = 0 \ \text{ и } \ Lu = 0 \ \ \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя ([8]):

1). Если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, ...$ —положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,\,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,\,2} < \mu_{\nu,3} < ...,\ \nu > -1.$$

2). Пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно, тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)},\ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)},\ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)},\ \nu > 1,$$

и формулы ([13, 11])

$$\sin z = z(1 - z\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2),$$
$$J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}) + 0(\tfrac{1}{z^{3/2}}),\ \nu \geq 0,$$
$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

применяя признак Даламбера, доказывается, что ряды (33), (35) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее используя оценки ([8,3])

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y^k_{n,m}(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j = \overline{1,m-1},\ q = 0,1,..., \quad (39)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, а также леммы 1, 2, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [4–6], можно показать, что полученное решение (37) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.

Покажем единственность решения задачи 1. Для этого сначала построим решение задачи Пуанкаре для уравнения (1*) с данными

$$\upsilon\Big|_{S_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \quad \upsilon_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta), \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,..., \quad (40)$$

где $\bar{\nu}^k_n(r) \in G$, G — множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [9]. Решение задачи (1*), (39) будем искать в виде (6), где функции $\bar{v}^k_n(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{v}^k_n(r,t)$ удовлетворяют системам уравнений (8)–(10), где $\tilde{a}^k_{in}$, a^k_{in}, $\tilde{b}^k_n$ заменены соответственно на $-\tilde{a}^k_{in}$, $-a^k_{in}$, $-\tilde{b}^k_n$, а $\tilde{c}^k_n$ на $\tilde{d}^k_n$, $i = 1,...,m$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,...$.

Далее, из краевого условия (39), в силу (6), получим

$$\bar{v}^k_n(r,\beta) = \bar{v}^k_n(1,t) = 0,\ \bar{v}^k_n(r,0) = \bar{\nu}^k_n(r),\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,.... \quad (41)$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). В п.2 показано, что задача (11), (40) имеет единственное решение, если имеет место соотношение (4).

Таким образом, решение задачи (1*), (39) в виде ряда (37) построено и, в силу оценок (38), принадлежит классу $C^1\left(\bar{D}_\beta\right) \cap C^2\left(D_\beta\right)$.

Из определения сопряженных операторов $L,\ L^*$ [10] имеем

$$\upsilon Lu - uL^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos\left(N^\perp, x_i\right) - u_t \cos\left(N^\perp, t\right),$$
$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos\left(N^\perp, x_i\right) - b\cos\left(N^\perp, t\right),$$

а $N^\perp-$внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина, тогда

$$\int\limits_{D_\beta} \left(\upsilon Lu - uL^*\upsilon\right) dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} \left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N}\right) M + u\upsilon Q\right] ds, \qquad (42)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N^\perp, x_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos\left(N^\perp, t\right) \frac{\partial}{\partial t},$$
$$M^2 = \sum_{i=1}^{m} \cos^2\left(N^\perp, x_i\right) + \cos^2\left(N^\perp, t\right).$$

Из (41), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (39), получим

$$\int\limits_{S_0} \tau(r,\theta) u(r,\theta,0) ds = 0. \qquad (43)$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ ([9]), то из (42) заключаем, что $u(r,\theta,0) = 0,\ \forall (r,\theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$ для уравнения (1) ([10]) будем иметь $u(x,t) = 0$, $\forall (x,t) \in D_\beta$.

Таким образом, если выполняется условие (4), то решение задачи 1 единственно.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи 1, соответствующей задаче 1, будем искать в виде (6), то приходим к краевой задаче

$$L\upsilon_n^k = \tilde{f}_n^k(r,t),$$
$$\upsilon_{nt}^k(r,0) = 0,\ \upsilon_n^k(r,\beta) = 0,\ \upsilon_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots.$$

В силу (29), ее решением является функция

$$\mu_{l,n}\upsilon_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left[\cos\mu_{l,n}t + \cos\mu_{l,n}t \int\limits_0^t a_{nl}^k(\xi)\sin\mu_{l,n}\xi d\xi -\right.$$

$$-\sin\mu_l t\int\limits_0^t a_{nl}^k(\xi)\cos\mu_{l,n}\xi d\xi\Bigg]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r).$$

Следовательно, нетривиальное решение однородной задачи 1 записывается в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-p}r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta).$$

Из оценок (38) следует, что $u\in C^1(\bar{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, если $p>\frac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

В заключении отметим в [11] для многомерного волнового уравнения внутри характеристической области приведена корректная постановка задачи Пуанкаре.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. — М.: Изд. АН СССР, 1959. — 164 с.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
4. Алдашев С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, №1. — С. 64–68.
5. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
6. Алдашев С. А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 295 с.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т. 4. — М.: Наука, 1981. — 550 с.
11. Алдашев С. А. Задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения // Известия НАН РК, серия физ.-мат. наук. — 2010. — №3. — С. 3–5.

Казахский Национальный Педагогический Университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Поступила 06.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.71

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РАДІОАКТИВНОГО ТРИТІЯ (TRITIUM 3H) ТА НЕРАДІОАКТИВНОГО ГЕЛІЯ-3 (HELIUM-3)

О. Ю. Грищенко, Д. А. Клюшин, В. В. Оноцький, Л. І. Потапенко, Г. М. Стешенко

Резюме. В даній роботі було розглянуто задачу по ідентифікації параметрів джерел радіоактивного забруднення з врахуванням явища філіації, знаючи концентрації забруднення на досліджуваній території. Було проведено моделювання поширення радіоактивного забруднення на досліджуваній території з використанням псевдореальних даних.

Ключові слова: концентрація забруднення, ДС-алгоритм, задача оптимального керування, спряжена задача.

Вступ

Розв'язання задачі ідентифікації параметрів джерел суміші радіонуклідів, структурованих за віком, за допомогою варіаційного методу пов'язане із розв'язанням прямої та спряженої початково-крайових задач[5]. До того ж з формальної точки зору задача ідентифікації зосереджених джерел еквівалентна задачі узагальненого оптимального керування. Тому для розв'язання нашої варіаційної задачі нам необхідно розв'язати задачу оптимального керування системою[3, 4, 6, 7].

Математична модель переносу суміші радіонуклідів в пористому середовищі описана в роботі Шоке (Choquet) і Цимермана (Zimmerman) [13]. Слід зауважити, що моделюванню радіоактивного забруднення ґрунтових вод розчинами сумішей ізотопів із урахуванням трансмутації присвячено доволі мало робіт. В першу чергу слід назвати роботи Шоке (Choquet) [11, 12, 13], а також Дугласа (Douglas) і Спаньоло (Spagnuolo) [14].

Ідею двокрокового явно-неявного чисельного методу ще в 1962 році запропонував Шелдон для ітераційного розв'язування рівняння Пуассона. Грищенко О. Ю. поширив її для систем гіперболічних рівнянь, лінійних та нелінійних рівнянь переносу та систем рівнянь газової динаміки [1]. Для рівнянь параболічного типу Самарський [10] поставив проблему та отримали грунтовні результати про необхідні та достатні умови стійкості симетризованих різницевих схем, що не є самоспряженими, але приводяться до схем із симетричними операторами, зокрема, вибором спеціальних норм.

1. Моделювання розповсюдження радіоактивного забруднення

Постановка прямої задачі. Нехай радіоактивна суміш складається з двох ізотопів: радіоактивного трітія (tritium 3H) та нерадіоактивного гелія-3 (helium-3), причому період піврозпаду трітія у гелій складає 4500 днів. Розглядаємо модель, запропоновану Дугласом (Douglas) та Спаньоло (Spagnuolo) [14], що описує процес переносу суміші через пористе середовище.

Позначимо стан системи (u, υ), де $u = u(t, \xi_1, \xi_2)$, $\upsilon = \upsilon(t, \xi_1, \xi_2)$. Функції u та υ визначені в циліндричній області $Q = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset R^2$ обмежена зв'язна область з регулярною границею $\partial\Omega$. Стан (u, υ) системи, де u — концентрація трітія, υ — концентрація гелія, описується системою параболічних рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^{2} \left(k_m^{(1)}(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2} \right) + \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(c_m^{(1)}(\xi) u \right) + a_1(\xi) u = f(t, \xi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \sum_{m=1}^{2} \left(k_m^{(2)}(\xi) \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_m^2} \right) + \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(c_m^{(2)}(\xi) \upsilon \right) + a_2(x)(\xi) \upsilon - a_1(x) u = 0. \quad (2)$$

В операторному вигляді (1)–(2) можна переписати таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_1 u + C_1 u + q_1 u = f,$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - D_2 \upsilon + C_2 \upsilon + a_2 \upsilon - a_1 u = 0,$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Omega$, $(t, \xi) \in Q$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2$ — коефіцієнти розпаду, філіації; D_i — оператори дифузійного переносу, самоспряжені та додатньо визначені: $D_i = D_i^* \geq k_0^{(i)} E$, де E — тотожній оператор, C_i — оператори конвективного переносу, $C^{(i)} = -C^{(i)*}$, $c_m^{(i)}$ — швидкість переносу i-го ізотопа вздовж осі Ox_m. Вважаємо, що середовище є нестислим, тому маємо:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial c_k^{(i)}}{\partial x_k}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega,$$

$$f(t, \xi) = -\delta(\xi) V(t),$$

де $V(t) = (V_1(t), V_2(t), ..., V_p(t))$ — вектор невідомих інтенсивностей, $\delta(x) = (\delta(x - r_1), \delta(x - r_2), ..., \delta(x - r_p))$ — вектор δ-функцій Дірака, r_i — відомі положення джерел забруднень.

Задані початкові та граничні умови:

$$u|_{t=0} = \varphi_0^{(1)}(\xi),$$

$$\upsilon|_{t=0} = \varphi_0^{(2)}(\xi),$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0^{(1)}(\xi), \tag{3}$$

$$u|_{\xi\in\partial\Omega} = 0.$$

Використовуючи методику, описану в [8, 9], переходимо до задачі оптимального керування, що полягає в мінімізації функціоналу

$$J_\alpha(V) = \sum_{m=1}^{M}\int_0^T \left(\left(\tilde{u}(t,V) - \varphi_m^{(1)}(t)\right)^2 + \left(\widetilde{\upsilon}(t,V) - \varphi_m^{(2)}(t)\right)^2\right) dt + \alpha\|V\|^2, \tag{4}$$

$\varphi_m^{(i)}(t)$ — значення концентрації забруднень в точках спостереження z_m, $m = \overline{1,...,M}$, $i = 1,2$, α — параметр регуляризації [10], що вважається відомим і підбирається експериментально з врахуванням похибки спостережень $\Delta\varphi_m^{(i)}$;

$$\tilde{u}(t,V) = \int_\Omega g_m(x)\, u(t,x,V)\, dx, \widetilde{\upsilon}(t,V) = \int_\Omega g_m(x)\, \upsilon(t,x,V)\, dx,$$

$g_m(x) = \frac{\chi_{\omega_m}}{diam\omega_m}$ — функція усереднення в деякому околі ϖ_m точки спостереження z_m [6].

Спряжена задача для постановки описаної виразами (1)–(3) має вигляд

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2}\left(k_m^{(1)}(\xi)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_m^2}\right) - \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(c_m^{(1)}(\xi)\psi\right) + a_1\psi - a_1\eta =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{M}\int_0^T \left(\tilde{u}(t,V) - \varphi_m^{(1)}(t)\right)^2 dt, \tag{5}$$

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2}\left(k_m^{(2)}(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_m^2}\right) - \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(c_m^{(1)}(\xi)\eta\right) + a_2\eta =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{M}\int_0^T \left(\widetilde{\upsilon}(t,V) - \varphi_m^{(2)}(t)\right)^2 dt, \tag{6}$$

з наступними початково-крайовими умовами:

$$\psi|_{t=T} = 0; \psi|_{\xi\in\partial\Omega} = 0,$$

$$\zeta|_{t=T} = 0; \zeta|_{\xi\in\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

Ітераційний процес має вигляд

$$V_{i,n}^{k+1} = V_{i,n}^k - s_k(\psi^{(i),k}(r_i,\tau n) - \alpha V_{i,n}^k), \tag{8}$$

де k — номер ітерації, $i = \overline{1,p}$, $n = \overline{1,N_t}$, $N_t = [T/\tau]$, $\alpha = 0.001$.

Як відомо, процес збіжний при $s_k \to 0$, $k \to \infty$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k = \infty$.

2. Чисельна реалізація моделі розповсюдження радіоактивного забруднення

Застосуємо описаний вище метод до нашої конкретної задачі для її чисельної реалізації. На кожній ітерації послідовно розв'язуємо прямі задачі (1), (2), з врахуванням умов (3) для основного стану системи та задачі (5)–(7) для спряженого стану з використанням ДС-алгоритму [1, 2].

Розглянемо загальний випадок, коли $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R^2$ — 2-вимірний паралелепіпед. Область Ω покриваємо сіткою:

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t) | x_{s,k_s} = a_s + k_s h_s,$$
$$t = n\tau, k_s = \overline{0, M_s}, n = \overline{0, N_t},\ h_s = (b_s - a_s)/M_s, s = \overline{1,2},\ \tau > 0\},$$

яку розбиваємо на дві підмножини: $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$ та $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$. До першої з них відносимо всі точки $(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_n) \in \Omega_{h,\tau}$, для яких $(k_1 + k_2 + n)$ — непарне, а до другої — $(k_1 + k_2 + n)$ — парне. Покладемо

$$k_1 \pm 1 = (k_1 \pm 1, k_2), k_2 \pm 1 = (k_1, k_2 \pm 1), k = (k_1, k_2).$$

На внутрішніх точках сітковій множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$ задамо сімейство різницевих схем

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau \left(C_1 u_k^n - D_1 u_k^n + a_1 u_k^n\right) + \tau F_k^n V_k^n, \tag{9}$$

а на внутрішніх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$ —

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau \left(C_1 u_k^{n+1} - D_1 u_k^{n+1} + a_1 u_k^{n+1}\right) + \tau F_k^{n+1} V_k^{n+1}. \tag{10}$$

В свою чергу $C_1 u_k^n$ та $D_1 u_k^n$ вираховуємо за формулами

$$C_1 u_k^n = \sum_{s=1}^{2} c_{s,k_s}^{(1)} \frac{u_{k_s+1}^n - u_{k_s-1}^n}{2h_s},$$

$$D_1 u_k^n = \sum_{s=1}^{2} k_{k_s}^{(1)} \frac{u_{k_s+1}^n - 2u_k^n + u_{k_s-1}^n}{h_s^2},$$

$$F_k^{n+1} V_k^{n+1} = \begin{cases} V(\tau n), \text{ якщо точка співпадає з джерелом,} \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Схеми доповнюються початковою умовою

$$u_k^0 = \varphi_0^{(1)}(k_1 h_1, k_2 h_2), k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1,2},$$

та граничними умовами $u_k^{n+1} = 0$, де $k_s = 0$ або $k_s = M_s$, $s = \overline{1,2}$.

На внутрішніх точках сітковій множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$ задамо сімейство різницевих схем

$$\upsilon_k^{n+1} = \upsilon_k^n - \tau \left(C_2 \upsilon_k^n - D_2 \upsilon_k^n + a_2 \upsilon_k^n\right) + \tau a_1 u_k^n, \tag{11}$$

а на внутрішніх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$ —

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \tau\left(C_2 v_k^{n+1} - D_2 v_k^{n+1} + a_2 v_k^{n+1}\right) + \tau a_1 u_k^{n+1}. \tag{12}$$

$C_2 u_k^n$ та $D_2 u_k^n$ вираховуємо за формулами

$$C_2 v_k^n = \sum_{s=1}^{2} c_{s,k_s}^{(2)} \frac{v_{k_s+1}^n - v_{k_s-1}^n}{2h_s},$$

$$D_2 v_k^n = \sum_{s=1}^{p} k_{k_s}^{(2)} \frac{v_{k_s+1}^n - 2v_k^n + v_{k_s-1}^n}{h_s^2}.$$

Схеми доповнюються початковою умовою

$$v_k^0 = \varphi_0^{(2)}(k_1 h_1, k_2 h_2), k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1,2}, \tag{13}$$

та граничними умовами

$$v_k^{n+1} = 0, \text{ де } k_s = 0 \text{ або } k_s = M_s, s = \overline{1,2}. \tag{14}$$

Розв'язок задачі знаходимо послідовно при $n = 0, 1, 2, ..., N_t - 1$ таким чином: знаходимо u_k^{n+1}, використовуючи спочатку явне різницеве рівняння (9) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$, а потім неявне (10) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$, далі, використовуючи вже знайдене значення u_k^{n+1}, знаходимо v_k^{n+1}, використовуючи явне різницеве рівняння (11) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$, а потім неявне (12) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$.

Аналогічно для спряженого стану схеми ДС-алгоритму мають такий вигляд. Зокрема для функції ψ з рівняння (5)

$$\psi_k^{n-1} = \psi_k^n + \tau\left(C_1 \psi_k^n + D_1 \psi_k^n - a_1 \psi_k^{i,n}\right) + \tau a_1 \eta_k^n + \tau Z_k^{1,n},$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, ..., x_{p,k_p}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}, \tag{15}$$

$$\psi_k^{n-1} = \psi_k^n + \tau(C_1 \psi_k^{n-1} + D_1 \psi_k^{n-1} - a_1 \psi_k^{n-1}) + \tau q_1 \eta_k^{1,n-1} + \tau Z_k^{1,n-1},$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}, \tag{16}$$

де

$$Z_k^{1,n} = 2\chi_h(u_k^n - \varphi^{(1)}(t_n)).$$

В свою чергу $\chi_h(x)$ приймає значення

$$\chi_h(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{m=1}^{M} \int_{D_0} \delta(x - z_m) dx,$$

та виконуються умови

$$D_0 = [-h_1, h_1] \times [-h_2, h_2],$$

$$\psi_k^T = 0, k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1,2}, \tag{17}$$

$$\psi_k^{n-1} = 0,$$

де $k_s = 0$ або $k_s = M_s$, $s = \overline{1,2}$.

Зокрема для функції η з рівняння (6):

$$\eta_k^{n-1} = \eta_k^n + \tau\left(C_2\eta_k^n + D_2\eta_k^n - q_2\eta_k^n\right) + \tau Z_k^{2,n}, \tag{18}$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)},$$

$$\eta_k^{n-1} = \eta_k^n + \tau(C_2\eta_k^{n-1} + D_2\eta_k^{n-1} - q_2\eta_k^{n-1}) + \tau Z_k^{2,n-1}, \tag{19}$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)},$$

де:

$$Z_k^{2,n} = 2\chi_h(v_k^n - \varphi^{(2)}(t_n)),$$

$$\chi_h(x) = \frac{1}{h_1 h_2}\sum_{m=1}^{M}\int_{D_0}\delta(x - z_m)dx,$$

та виконуються наступні умови

$$\zeta_k^T = 0, k_s = \overline{0, ..., M_s}, s = 1,2, \tag{20}$$

$$\zeta_k^{n-1} = 0, \text{ де } k_s = 0 \text{ або } k_s = M_s, s = \overline{1,2}. \tag{21}$$

За цими схемами розв'язок знаходиться послідовно починаючи з $n = N_t, N_t - 1, ..., 1$ таким чином: знаходимо ζ_k^{n-1}, використовуючи спочатку явне різницеве рівняння (18) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}$, а потім неявне (19) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}$, далі, використовуючи вже знайдене значення ζ_k^{n-1}, знаходимо ψ_k^{n-1}, використовуючи явне різницеве рівняння (15) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}$, а потім неявне (16) в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}$.

3. Обчислювальний експеримент

Нехай задані наступні дані для проведення обчислювального експерименту. Область дослідження $\Omega = [0, 500] \times [0, 300]$ є прямокутною областю розмірами 500 на 300 метрів. Часовий проміжок, на якому відбувається моделювання $T = 920$ часових кроків. Коефіцієнти системи приймають наступні значення:

$$k_m^{(1)} = 4.755, c_m^{(1)} = 3.17,$$

$$k_m^{(2)} = 10^{-5}, c_m^{(2)} = 1,$$

$$q_1 = 1/4500, q_2 = 0.$$

На всій області Ω ми маємо 24 точки спостереження за нашою системою (свердловини для проведення контрольних замірів). Дані про місцеположення точок спостереження наведені нижче в таблиці 1. Так N це порядковий номер свердловини, x та y координати її положення (в метрах) відповідно.

Таблиця 1. Координати точок спостереження.

N	**x**	**y**
1	107.50	186.50
2	148.00	191.00
3	200.00	220.00
4	140.00	110.00
5	148.50	181.00
6	213.50	191.50
7	276.00	218.00
8	193.50	104.00
9	220.00	140.00
10	250.00	180.00
11	484.00	239.00
12	302.50	127.50
13	330.00	171.50
14	341.00	216.00
15	146.50	227.50
16	345.00	128.00
17	361.00	195.00
18	388.50	218.00
19	380.00	165.50
20	378.50	126.50
21	425.00	105.00
22	448.50	160.50
23	441.50	214.00
24	112.50	230.00

Також у нас за умовою є 92 джерела, з їх координатами (в метрах) та потужністю. Дані про них наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Опис джерел забруднення.

N	**x**	**y**	**V**		**N**	**x**	**y**	**V**
1	160.0	170.0	1252.1		47	190.0	185.0	280.64
2	165.0	170.0	1252.1		48	195.0	185.0	280.64
3	170.0	170.0	1252.1		49	200.0	185.0	215.88
4	175.0	170.0	1252.1		50	205.0	185.0	215.88
5	180.0	170.0	280.64		51	210.0	185.0	215.88
6	185.0	170.0	280.64		52	215.0	185.0	215.88
7	190.0	170.0	280.64		53	220.0	185.0	215.88
8	195.0	170.0	280.64		54	160.0	190.0	1252.1
9	200.0	170.0	215.88		55	165.0	190.0	1252.1
10	205.0	170.0	215.88		56	170.0	190.0	1252.1
11	210.0	170.0	215.88		57	175.0	190.0	1252.1
12	215.0	170.0	215.88		58	180.0	190.0	280.64
13	220.0	170.0	215.88		59	185.0	190.0	280.64
14	160.0	175.0	1252.1		60	190.0	190.0	280.64
15	165.0	175.0	1252.1		61	195.0	190.0	280.64
16	170.0	175.0	1252.1		62	200.0	190.0	215.88
17	175.0	175.0	1252.1		63	205.0	190.0	215.88
18	180.0	175.0	280.64		64	210.0	190.0	215.88
19	185.0	175.0	280.64		65	215.0	190.0	215.88
20	190.0	175.0	280.64		66	220.0	190.0	215.88
21	195.0	175.0	280.64		67	160.0	195.0	1252.1
22	200.0	175.0	215.88		68	165.0	195.0	1252.1
23	205.0	175.0	215.88		69	170.0	195.0	1252.1
24	210.0	175.0	215.88		70	175.0	195.0	1252.1
25	215.0	175.0	215.88		71	180.0	195.0	280.64
26	220.0	175.0	215.88		72	185.0	195.0	280.64
27	150.0	180.0	300.00		73	190.0	195.0	280.64
28	160.0	180.0	1252.1		74	195.0	195.0	280.64
29	165.0	180.0	1252.1		75	200.0	195.0	215.88
30	170.0	180.0	1252.1		76	205.0	195.0	215.88
31	175.0	180.0	1252.1		77	210.0	195.0	215.88
32	180.0	180.0	280.64		78	215.0	195.0	215.88
33	185.0	180.0	280.64		79	220.0	195.0	215.88
34	190.0	180.0	280.64		80	160.0	200.0	1252.1
35	195.0	180.0	280.64		81	165.0	200.0	1252.1
36	200.0	180.0	215.88		82	170.0	200.0	1252.1
37	205.0	180.0	215.88		83	175.0	200.0	1252.1
38	210.0	180.0	215.88		84	180.0	200.0	280.64
39	215.0	180.0	215.88		85	185.0	200.0	280.64
40	220.0	180.0	215.88		86	190.0	200.0	280.64
41	160.0	185.0	1252.1		87	195.0	200.0	280.64
42	165.0	185.0	1252.1		88	200.0	200.0	215.88
43	170.0	185.0	1252.1		89	205.0	200.0	215.88
44	175.0	185.0	1252.1		90	210.0	200.0	215.88
45	180.0	185.0	280.64		91	215.0	200.0	215.88
46	185.0	185.0	280.64		92	220.0	200.0	215.88

Для моделювання були використані наступні значення для параметрів ДС-алгоритму:

$$h_x = 5, h_y = 5, \tau = 0,5.$$

На рисунку 1 зображено значення функціоналу якості, що використовувався в нашій задачі, на 20 ітераціях.

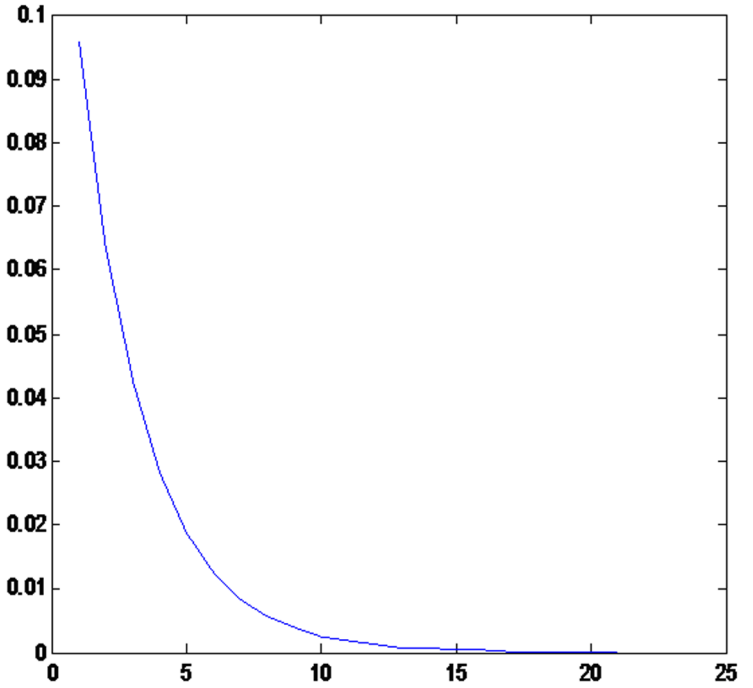

Рис. 1. Функціонал якості на 20 ітераціях

Висновки

В даному розділі авторами була розглянута практична задача розповсюдження радіоактивної суміші ізотопів: радіоактивного тритію (tritium 3H) та нерадіоактивного гелія-3 (helium-3). Було продемонстровано практичну значущість розроблених методів на прикладі чисельного моделювання розповсюдження радіоактивної суміші радіоактивного тритію (tritium 3H) та нерадіоактивного гелію-3 (helium-3) та ідентифікації їх точкових джерел.

Література

1. Грищенко О. Ю. Про один двокроковий скінченно-різнецевий алгоритм моделювання процесів переносу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика. — 2006. — №7. — С. 7–10.

2. Грищенко О. Ю., Клюшин Д. А., Оноцький В. В., Стешенко Г. М. Ідентифікація точкових структурованих за віком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — Вып. 104. — С. 40–48.
3. Клюшин Д. А., Кущан А. А., Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И. Обобщенное решение некоторых операторных уравнений в банаховых пространствах // Журн. обчисл. та прикл. матем. — №1 (81). — 1997.— С. 93–99.
4. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. — К. Наукова думка, 1998. — 472 с.
5. Пененко В. В. Вариационное усвоение данных в реальном времени // Вычислительные технологии. Специальный выпуск, часть 1. — 2005. — Т. 10. — С. 9–20.
6. Семенов В. В. Про глобально оптимальні керування в нелінійних операторних системах // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 2003. — №4. — С. 294–296.
7. Стеля О. Б., Тригуб О. С. Чисельна процедура відтворення невідомих параметрів джерел для задач масопереносу // Наукові записки. Комп'ютерні науки / Національний університет "Києво-Могилянська академія". —2000. — Т. 18. — С. 40–46.
8. Стешенко Г. М. Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — Вип. 1. — С. 144–151.
9. Стешенко Г. М. Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — №2.— С. 172–179.
10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики // М.: Наука. — 2001. — 345 с.
11. Choquet C. Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity // Journal of Mathematics and Fluid Mechanics. — 2004. — V. 6. — P. 365–388.
12. Choquet C. Radionuclide transport model with wells // Asymptotic Analysis. — 2004. — V. 37. — P. 57–78.
13. Choquet C., Zimmermann S. Study of a finite volume-finite element scheme for a nuclear transport model // Mode of access: WWW.URL: arxiv.org/abs/0704.1286. — Last access: 2009.
14. Douglas J., Spagnuolo A. The transport of nuclear contamination in fractured porous media // Journal of Korean Mathematical Society. — V. 38 . — P. 723–761.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул., Володимирська 64, Київ, 01601, Україна

Надійшла 15.10.13

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МНОЖИН ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МІРИ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Е. В. Івохін

Резюме. Запропоновано конструктивний підхід для представлення величин міри належності елементів нечітких множин, в основу якого покладено послідовності простих чисел спеціального вигляду. Введено операції над елементами послідовностей, поняття нижньої та верхньої спряженої множин, доведено твердження про співвідношення оцінок, що будуються на основі простих чисел. Результати можуть бути використані для формування та модифікації показників належності множини станів в процесах прийняття рішень в умовах невизначеності.

Прості числа як інструмент для опису нечітких множин

Швидкий розвиток математичних методів теорії прийняття рішень активно впливає на процеси застосування загальних підходів для розробки підходів для моделювання процесів соціальних та економічних систем. Специфіка таких систем полягає у необхідності передбачати можливі реакції об'єктів дослідження і використовувати такі механізми прийняття управлінських рішень, які б дозволяли максимально точно враховувати і узгоджувати інтереси усіх рівнів управління. Іншою особливістю соціальних і економічних систем є неавтономність їх станів, що приводить до необхідності детального аналізу та дослідження поведінки систем.

Для проведення дослідження дуже важливо правильно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження, застосовуючи, наприклад, підходи математичного моделювання. Опис динаміки системи має, як правило, "приблизний" характер з урахуванням різних методик спрощення поведінки всієї системи.

Для практичних задач моделювання в даних умовах пропонується використовувати нечіткий підхід, при якому неточність функціонування моделі описується в термінах теорії нечітких множин. Нечіткі множини характеризуються функціями належності, що визначає ступінь належності елементів до нечіткої множини. При цьому для вирішення задач побудови функцій належності можна запропонувати ефективні обчислювальні схеми та підходи, що базуються на використанні простих чисел.

Означення 1. Множини невід'ємних простих чисел $P_j(a) \geq 0$, $j \in Z$, що належать інтервалу $[a, \infty)$ при $j \geq 0$ або інтервалу $[0, a)$ при $j < 0$ для заданого, необов'язково простого, цілого числа $a \geq 0$, будемо називати послідовностями простих чисел відносно числа a.

Розглянемо довільні прості числа $P_j(a) \geq 0$ з порядковими номерами $j \in Z$ з послідовності простих чисел відносно числа $a \geq 0$. Нескладно перевірити, що справедливі співвідношення:

1) $P_0(0) = 0$, $P_0(1) = 1$, $P_1(0) = 1$;

2) $P_0(a) = a$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $P_0(a)$ – не існує, якщо $a \geq 0$ – непросте;

3) $P_j(a) \leq P_k(a)$, якщо $j \leq k$, $P_j(a) < P_k(a)$ при $j < k$, $j \in Z$, $k \in Z$;

4) $P_j(a) = P_j(a+1) = ... = P_j(a+l)$ для всіх $1 \leq l < P_{j+1}(a) - P_j(a)$, $j = 0, 1, 2, ...$, $a \geq 0$;

5) $P_j(a) = P_1(P_{j-1}(a)) = P_1(P_1(P_{j-2}(a))) = P_2(P_{j-2}(a)) = ... = P_{j-1}(P_1(a))$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $j \in Z$;

6) $P_j(a) \geq a$ для усіх $j = 0, 1, 2, ...$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $P_j(a) > a$ для усіх $j = 1, 2, ...$, якщо $a \geq 0$ – непросте;

7) $P_j(a) < a$ для $j = -1, -2, ..., j_0$, де номер $j_0 < 0$ визначається як найменший індекс простого числа з послідовності, для якого $0 \leq P_{j_0}(a) < a$.

Надалі будемо розглядати випадки, коли $a > 0$ – просте число або $a = 0$. У даному випадку існує число $P_0(a)$. Крім цього, виходячи з наведених вище властивостей, справедливі співвідношення $P_j(a)/P_k(a) \leq 1$, і $P_j(a)/P_k(a) = P_j(a)/P_1(P_{k-1}(a)) = ... = P_j(a)/P_j(P_{k-j}(a)) = P_j(a)/P_{k-j}(P_j(a))$ для будь-яких $j \leq k$, $j \in Z$, $k \in Z$.

Крім традиційних арифметичних операцій на послідовності простих чисел для довільного $P_j(a)$, $a \geq 0$, $j = 0, 1, 2, ...$, введемо операцію зсуву на m, $m \in Z$, $j + m \geq j_0$, простих чисел у вигляді

$$P_j(a) \oplus m = P_{j+m}(a) = P_m(P_j(a)), \tag{1}$$

яка не повинна виводити за межі заданої послідовності ($j + m \geq j_0$), та операцію n - кратної композиції ($n \in Z$) відношення двох чисел $P_j(a)$ та $P_k(a)$, $j \in Z$, $k \in Z$, $j \leq k$, у вигляді

$$\frac{P_j(a)}{P_k(a)} \circ n = \frac{P_j(a) \oplus n}{P_k(a) \oplus n} = \frac{P_{j+n}(a)}{P_{k+n}(a)} = \frac{P_n(P_j(a))}{P_n(P_k(a))}. \tag{2}$$

Лема 1. *Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a_{k_i})}{\prod\limits_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a_{n_j})}, \tag{3}$$

де s_p, s_q – кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a_{k_i} \geq 0$, $a_{n_j} \geq 0$ – деякі цілі числа, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Відомо, що будь-яке раціональне число r представляється у вигляді звичайного дробу $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$.

Припустимо, що число r невід'ємне, $r \geq 0$. Якщо при цьому обидва числа p та q є простими числами, то маємо твердження леми. У даному випадку

$s_p = 1,\ s_q = 1,\ P_{k_1}(a_{k_1}) = p,\ P_{n_1}(a_{n_1}) = q$ для деяких $k_1 \in Z,\ n_1 \in Z$ та $a_{k_1} \geq 0,\ a_{n_1} \geq 0$.

Якщо чисельник або знаменник або обидва числа p та q не є простими, то їх можна представити у вигляді добутків елементарних дільників, які є простими числами. При цьому, елементарні дільники записуються у добутках, кількість яких дорівнює їх кратності.

Нехай $s_p,\ s_q$ — кількості множників у представленні чисел p та q у вигляді добутків, де кожен з множників є простим числом з відповідних послідовностей простих чисел відносно чисел $a_{k_i}, a_{n_j}, k_i \in Z, n_j \in Z, i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$. Представлення (3) для довільного раціонального числа r доведено.

У випадку, якщо число r від'ємне, то можна покласти $r = -r$ і усі викладки повторюються. Лему доведено.

Наслідок 1. *Довільне раціональне число $r = p/q,\ p \in Z,\ q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a)}{\prod\limits_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a)}, \tag{4}$$

де $s_p,\ s_q$ — кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a \geq 0$ – деяке ціле число, $k_i \in Z,\ n_j \in Z,\ i = \overline{1, s_p},\ j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Як випливає з леми 1, будь-яке раціональне число $r = p/q$, $p \in Z,\ q \in N$, можна представити у вигляді (3).

Виходячи з того, що усі числа у представленні $P_l(a) \geq 0,\ l = \overline{1, s_p + s_q}$, є простими, знайдемо, наприклад, найменше з них $P_{\min} = \min P_l,\ l = \overline{1, s_p + s_q}$. Використовуючи властивість 5), можна записати усі числа представлення у вигляді

$P_i(a) = P_{k_i}(P_{\min}), k_i \in N \bigcup \{0\}, i = \overline{1, s_p}, P_j(a) = P_{n_j}(P_{\min}), n_j \in N \bigcup \{0\}$, $j = \overline{1, s_q}$, тобто $a = P_{\min}$, що і треба було показати.

Очевидно, що число $a \geq 0$ може бути вибране неєдиним способом. Будь-яке число $0 \leq a < P_{\min}$ також може бути обране в якості значення, відносно якого формується послідовність простих чисел.

Крім цього, може бути $a > P_{\min}$. У даному випадку, частина індексів $k_i < 0,\ i = \overline{1, s_p^0}$, та $n_j < 0,\ j = \overline{1, s_q^0}$, де s_p^0 та s_q^0 – відповідні кількості, що отримуються з обмежень на прості числа відносно числа $a : 0 \leq P_{k_i}(a) < a$, $i = \overline{1, s_p^0}$, $0 \leq P_{k_i}(a) < a,\ j = \overline{1, s_q^0}$. Таким чином, твердження доведено.

Наслідок 2. *Довільне раціональне число $r = p/q,\ p \in Z,\ q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} P_{k_i}(1)}{\prod\limits_{j=1}^{s} P_{n_j}(1)}, \tag{5}$$

де s — максимальне значення з кількостей множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $k_i \in N \bigcup \{0\}$, $n_j \in N \bigcup \{0\}$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Припустимо, що деяке раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, задане у вигляді (3). Повторюючи процес доведення наслідка 1 леми 1, покладемо $a = 1$. Тоді, використовуючи властивість 5), можна записати усі прості числа представлення у вигляді

$P_i(a) = P_{k_i}(1)$, $k_i \in N \bigcup \{0\}$, $i = \overline{1, s}$, $P_j(a) = P_{n_j}(1)$, $n_j \in N \bigcup \{0\}$, $j = \overline{1, s}$, $s = \max\{s_p, s_q\}$,

при чому $P_i(1) = 1$, $k_i = 0$, $i = \overline{s_p + 1, s}$, якщо $s_p \le s_q$, і $P_j(1) = 1$, $n_j = 0$, $j = \overline{s_q + 1, s}$, у випадку $s_p > s_q$, що і треба було показати.

Лема 2. *Для будь-яких двох простих чисел $P_k(a)$, $P_n(a)$, $k \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$, з послідовності простих чисел відносно числа a та довільного числа $T \ge 0$ справедливе співвідношення*

$$\frac{P_k(a) + T}{P_n(a) + T} \ge \frac{P_k(a)}{P_n(a)}. \tag{6}$$

Доведення. Нескладно перевірити, що для будь-яких $k \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$ маємо $\dfrac{P_k(a) + T}{P_n(a) + T} - \dfrac{P_k(a)}{P_n(a)} = \dfrac{T(P_n(a) - P_k(a))}{(P_n(a) + T)P_n(a)}$.

Використовуючи властивість 3), отримуємо

$$(P_k(a) + T)/(P_n(a) + T) - P_k(a)/P_n(a) \ge 0,$$

звідки випливає нерівність (5). Лему доведено.

Розглянемо множину невід'ємних раціональних чисел $r(k, n)$, $k \in Z$, $n \in Z$, $0 \le r(k, n) \le 1$, які подаються у вигляді відношення двох простих чисел з послідовності відносно числа $a \ge 0$:

$$r(k, n) = \frac{P_k(a)}{P_n(a)},\ k \le n,\ k \in Z,\ n \in Z. \tag{7}$$

Без обмежень загальності покладемо $a = 0$. При цьому, раціональні числа будуть представлятися у вигляді

$$r(k, n) = \frac{P_k(0)}{P_n(0)},\ k \le n,\ k \in N \bigcup \{0\},\ n \in N \bigcup \{0\}. \tag{8}$$

З урахуванням операції зсуву на m простих чисел у послідовності $P_j(0)$, $j \in Z$, маємо співвідношення

$$r(k + m, n + m) = r(k, n) \circ m,\ m \in N \bigcup \{0\}. \tag{9}$$

Разом із сукупністю $r(k, n)$ введемо до розгляду інші сукупності.

Означення 2. Множину раціональних чисел $r_T(k,n)$, $T \geq 0$, $k \leq n$, $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, вигляду

$$r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T),\ k \leq n,\ k \in N \bigcup \{0\},\ n \in N \bigcup \{0\} \quad (10)$$

назвемо T – послідовністю для множини чисел $r(k,n)$ і заданого $T \geq 0$.

Означення 3. Для заданої множини чисел $r(k,n)$, $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, і числа $m \in N \bigcup \{0\}$ множину чисел

$$r_*(k+m,n+m) = \frac{P_k(0) \oplus m_*}{P_n(0) \oplus m}, \quad (11)$$

$$k \leq n,\ k \in N \bigcup \{0\},\ n \in N \bigcup \{0\},\ m \in N \bigcup \{0\},$$

де $0 \leq m_* \leq m$ — найбільше ціле число таке, що $P_k(0) \oplus m / P_n(0) \oplus m \geq$ $\geq P_k(0) \oplus m_* / P_n(0) \oplus m$, будемо називати нижньою спряженою множиною, а множину чисел

$$r^*(k+m,n+m) = \frac{P_k(0) \oplus m^*}{P_n(0) \oplus m}, \quad (12)$$

$$k \leq n,\ k \in N \bigcup \{0\},\ n \in N \bigcup \{0\},\ m \in N \bigcup \{0\},$$

де $m^* \geq m$ — найменше ціле число таке, що $P_k(0) \oplus m / P_n(0) \oplus m \leq$ $\leq P_k(0) \oplus m^* / P_n(0) \oplus m$ — верхньою спряженою множиною.

Для прикладу, однократна композиція ($m = 1$) відношення $r(5,6) = P_5(0)/P_6(0) = 7/11$ дає значення $11/13$. Відповідні значення з нижньої та верхньої спряжених множин подаються числами $7/13$, яке не перевищує $11/13$, та $11/13$, а величини $m_* = 0$, $m^* = 1$. Аналогічні значення для однократної композиції відношення $r(6,7) = 11/13$ визначаються числами $13/17$, $13/17$, $17/17$, $m_* = 1$, $m^* = 2$.

Лема 3. *Справедливі співвідношення:*

$$r(k,n) \leq r_T(k,n), \quad (13)$$

$$r_*(k+m,n+m) \leq r(k+m,n+m), \quad (14)$$

$$r(k+m,n+m) \leq r^*(k+m,n+m), \quad (15)$$

$$r_*(k+m,n+m) \leq r_T(k+m,n+m), \quad (16)$$

для довільних $T \geq 0$, $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \leq n$, $m \in N \bigcup \{0\}$.

Доведення. Відповідно до леми 2, для довільного числа $T \geq 0$ справедлива нерівність

$$r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T) \geq P_k(0)/P_n(0) = r(k,n),$$

і виконуються співвідношення $r(k+m,n+m) = (P_k(0) \oplus m)/(P_n(0) \oplus m) \geq$ $\geq (P_k(0) \oplus m_*)/(P_n(0) \oplus m) = r_*(k+m,n+m)$ та $r(k+m,n+m) =$ $= (P_k(0) \oplus m)/(P_n(0) \oplus m) \leq (P_k(0) \oplus m)/(P_n(0) \oplus m^*) = r^*(k+m,n+m)$,

тобто $r_*(k+m,n+m) \le r(k+m,n+m) \le r^*(k+m,n+m)$ для довільних $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$, та будь-якого $m \in N \bigcup \{0\}$. Таким чином, нерівності (13), (14), (15) доведено.

Нерівність (13) виконується для усіх $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$. Тоді для будь-якого $m \in N \bigcup \{0\}$ маємо $k+m \le n+m$, звідки для $\forall T \ge 0$ є справедливим співвідношення $r(k+m,n+m) \le r_T(k+m,n+m)$. З урахуванням нерівності (13) остаточно отримуємо $r_*(k+m,n+m) \le \le r_T(k+m,n+m)$, що відповідає нерівності (16).

Наслідок 3. *Для довільних* $T \ge 0$, $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$ *справедливі співвідношення*

$$r_*(k,n) \le r(k,n), \tag{17}$$

$$r(k,n) \le r^*(k,n), \tag{18}$$

$$r_*(k,n) \le r_T(k,n). \tag{19}$$

Доведення. Справедливість нерівностей (17), (18), (19) є очевидною. Дійсно, покладемо $m = 0$ у співвідношеннях (14), (15), (16). В результаті маємо (17), (18), (19) для довільних $T \ge 0, k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$, що і треба було довести.

Зрозуміло, що властивість елементів сукупності у вигляді $0 \le r(k,n) \le \le 1$, зберігається для усіх членів T - послідовності з довільним $T \ge 0$, і елементів нижньої та верхньої спряжених множин:

$$0 \le r_T(k,n) \le 1,\ 0 \le r_*(k+m,n+m) \le 1,\ 0 \le r^*(k+m,n+m) \le 1 \tag{20}$$

для усіх $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$, та будь-якого $m \in N \bigcup \{0\}$.

З леми 3 та її наслідка можна зробити висновок, що існують співвідношення між відповідними елементами множини $r(k,n)$, $k \in N \bigcup \{0\}$, $n \in \in N \bigcup \{0\}$, $k \le n$, та елементами T — послідовності з довільним $T \ge 0$, нижньої та верхньої спряжених множин. При цьому, на жаль, нічого не можна сказати про співвідношення чисел $r(k,n)$ та $r(k+m,n+m)$ для довільного $m \in N \bigcup \{0\}$.

Запропоноване представлення множини раціональних чисел $r(k,n), k \le \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$, та введені операції на послідовності простих чисел у вигляді (1), (2) зручно використовувати при формалізації та дослідженні динаміки величин міри належності нечітких множин [1,2].

Використання простих чисел для визначення міри належності нечітких множин

Означення 4. Нечіткою множиною $\tilde{X}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{X} = \{(x, \mu_{\tilde{X}}(x))\}$, де $\mu_{\tilde{X}}(x) : X \to [0,1]$ - відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткої множини $\tilde{X}$.

Будемо вважати, що деякий об'єкт у будь-який момент часу може знаходитися у станах $X = \{x_1, ..., x_n\}$ з різними ступенями належності, що задається відповідними нечіткими множинами $\tilde{X}_s, s = 0, 1, 2, ...$, універсальної множини X з деякою функцією належності $\mu_{\tilde{X}_s}(x_i) = \mu_s(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, $s = 0, 1, 2, ...$.

Для визначення величини міри належності задамо два довільні значення номерів k та n, $k \in Z$, $n \in Z$, за якими з послідовності простих чисел, що розглядалася вище, знаходяться величини $P_k(a)$, $P_n(a)$ для деякого $a \geq 0$. За допомогою відношення цих значень $r(k,n) = P_k(a)/P_n(a)$ можна визначити величину міри належності елементів $x_1, ..., x_n$ до нечіткої множини $\tilde{X}_s$, $s = 0, 1, 2, ...$ у вигляді:

$$\mu_s(x_i) = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a),\ k_i \in Z,\ n_i \in Z,\ k_i \leq n_i,\ i = \overline{1,n},\ s = 0, 1, 2, ... \quad (21)$$

Використовуючи операцію кратної композиції відношення простих чисел (2) можна запропонувати схему модифікації величин міри належності. Дійсно, якщо модель динаміки має вигляд

$$\mu_{s+1}(x) = A_s \circ \mu_s(x),\ s = 0, 1, 2, ... , \quad (22)$$

то, розглядаючи в якості $A_s, s = 0, 1, 2, ...$, векторні $A_s = (a^s_i)_{i=\overline{1,n}}$ або скалярні $A_s = (a^s_0)$, $s = 0, 1, 2, ...$ цілочислові величини, що визначають збільшення ($a^s_i > 0$, $i = \overline{0,n}$), зменшення ($a^s_i < 0$, $i = \overline{0,n}$) або незмінність ($a^s_i = 0$, $i = \overline{0,n}$) рівнів належності станів системи, динамічний процес можна формалізувати у вигляді

$$\mu_{s+1}(x_i) = A_s \circ \mu_s(x_i),\ \ i = \overline{1,n}, s = 0, 1, 2, ... , \quad (23)$$

де $\mu_{s+1}(x_i) = \mu_s(x_i) \circ a^s_i = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a) \circ a^s_i$, $k_i + a^s_i \geq j^i_0$, $i = \overline{1,n}$, $s = 0, 1, 2, ...$, у випадку векторного представлення коефіцієнтів $A_s = (a^s_i)_{i=\overline{1,n}}, s = 0, 1, 2, ...$, та $\mu_{s+1}(x_i) = \mu_s(x_i) \circ a^s_0 = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a) \circ a^s_0$, $k_i + a^s_0 \geq j^i_0, i = \overline{1,n}$, $s = 0, 1, 2, ...$, у випадку скалярного представлення $A_s = (a^s_0), s = 0, 1, 2, ...$, а величини j^i_0, $i = \overline{1,n}$, — найменші відповідні значення індексів у множині простих чисел, для яких справедлива властивість (7).

Потрібно відмітити конструктивність даного підходу для формалізації та обробки величин мір належності нечітких множин, що знайшло застосування у ряді прикладних задач [3].

Висновки

Таким чином, використання спеціальних послідовностей простих чисел і специфічних операцій над ними дозволяє ефективно вирішувати задачу формалізації міри належності елементів нечітких множин, що було підтверджено рядом практичних прикладів. Запропонована технологія може бути використана в різних задачах підтримки прийняття рішень в нечітких умовах.

Література

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Contr. — 1965. — 8. — P. 338–353.
2. Борисов А. Н. Принятия решений на основе нечетких моделей — Рига: Зинатне, 1990. — 184с.
3. Івохін Є. В., Вадньов Д. О. Використання спеціальних множин простих чисел для шифрування методом рюкзака // Тези VI міжнародної конференції "Обчислювальна та прикладна математика"імені І.І.Ляшка. — Київ. — 2013. — С. 126–127.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 30.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.71

МНОГОМЕРНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЛИПСОВ ПЕТУНИНА

Д. А. Клюшин, М. В. Присяжная

Резюме. Предложен новый метод ранжирования многомерных выборок с помощью эллипсов Петунина и новая непараметрическая мера близости между многомерными выборками. Показано, при каких условиях асимптотический уровень значимости предложенного критерия не превышает 0,05.

1. Введение

Многие задачи математической морфологии сводятся к ранжированию многомерных выборок. Общепринятая систематизация методов многомерного ранжирования была предложена V. Barnett в работе [1]. В соответствии с этим подходом методы многомерного ранжирования подразделяются на маргинальные, редуцированные, частичные и условные. Маргинальные методы упорядочивают выборки по отдельным компонентам. Редуцированные методы вычисляют расстояние каждой выборки от центра распределения. Частичное ранжирование подразумевает разделение выборок на группы одинаковых выборок. В условных методах производится упорядочение выборок по выбранному компоненту, влияющему на остальные.

В настоящее время широкое распространение среди методов многомерного ранжирования получил подход, основанный на концепции статистической глубины выборок относительно центра распределения и соответствующих методах пилинга. Этим методам, в частности, посвящены работы J. Tukey [2], D. Titterington [3], H. Oja [4], R. Liu [5], Y. Zuo [6], Д. А. Клюшина [7] и других авторов. Эти методы позволяют учитывать геометрические свойства многомерных распределений и являются относительно простыми с вычислительной точки зрения. В этой статье мы предлагаем новый метод упорядочения многомерных данных, основанный на эллипсах Петунина [8]. Отметим, что в отличие от метода, предложенного в работе [7], этот метод не подразумевает пилинга, т.е. выполнения повторяющихся итераций одной и той же процедуры, применяемой к уменьшающемуся множеству точек, а сразу упорядочивает все точки.

2. Эллипсоид Петунина

Не ограничивая общности опишем алгоритм построения эллипсоида Петунина на плоскости, а затем перенесем его в пространство R^m при $m > 2$.

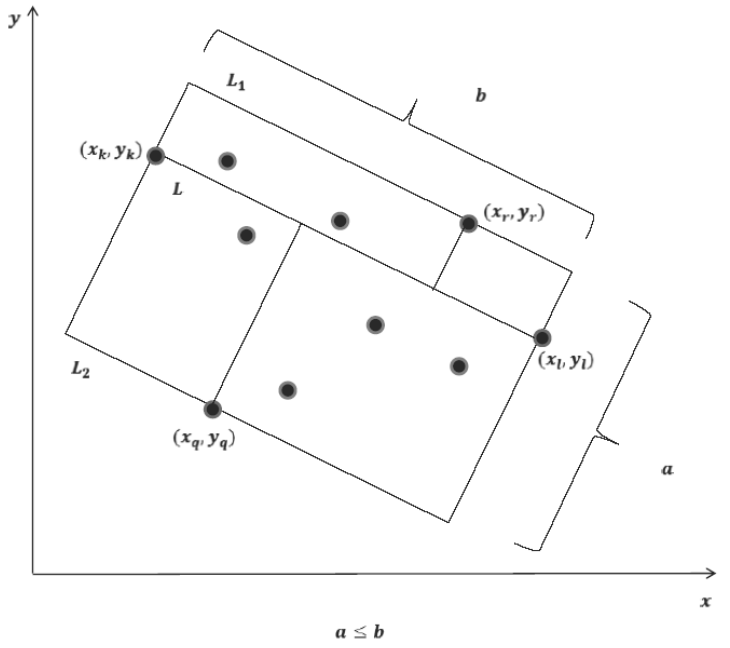

Рис. 1. Прямоугольник Петунина

Исходными данными для алгоритма является множество многомерных точек $M_n = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$, где $\vec{x}_n = (x_n, y_n)$.

Эллипс Петунина. На первом этапе построим выпуклую оболочку точек $M_n = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$. Найдем вершины выпуклой оболочки (x_k, y_k) и (x_l, y_l), лежащие на диаметре, т. е. вершины, наиболее удаленные друг от друга. Соединим точки (x_k, y_k) и (x_l, y_l) отрезком L. Найдем вершины выпуклой оболочки (x_r, y_r) и (x_q, y_q), наиболее удаленные от L. Соединим точки (x_r, y_r) и (x_q, y_q) отрезками L_1 и L_2, параллельными отрезку L. Проведем через точки (x_k, y_k) и (x_l, y_l) отрезки L_3 и L_4, перпендикулярные отрезку L. Пересечения отрезков L_1, L_2, L_3 и L_4 образуют прямоугольник П, стороны которого имеют длины a и b (рис. 1).

Будем считать, что $a \le b$. Переведем левый нижний угол прямоугольника в начало новой системы координат с осями Ox' и Oy' с помощью поворота и параллельного переноса. Точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) перейдут в точки (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n). Отобразим точки (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n) в точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$, где $\alpha = \frac{a}{b}$. В результате получим совокупность точек, лежащих в квадрате S.

Вычислим центр (x'_0, y'_0) квадрата S и найдем расстояния $r_1, r_2, ..., r_n$ от него до каждой точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$. Наибольшее число $R = \max(r_1, r_2, ..., r_n)$ определяет круг с центром в точке (x'_0, y'_0) и радиусом R. В итоге все точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$ оказываются

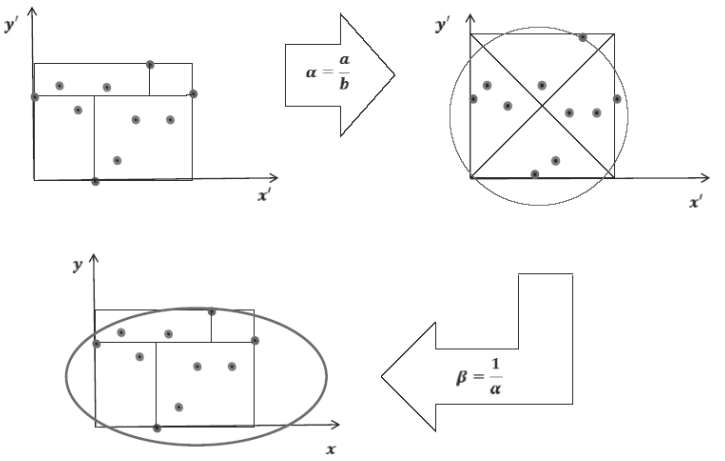

Рис. 2. Построение эллипса Петунина

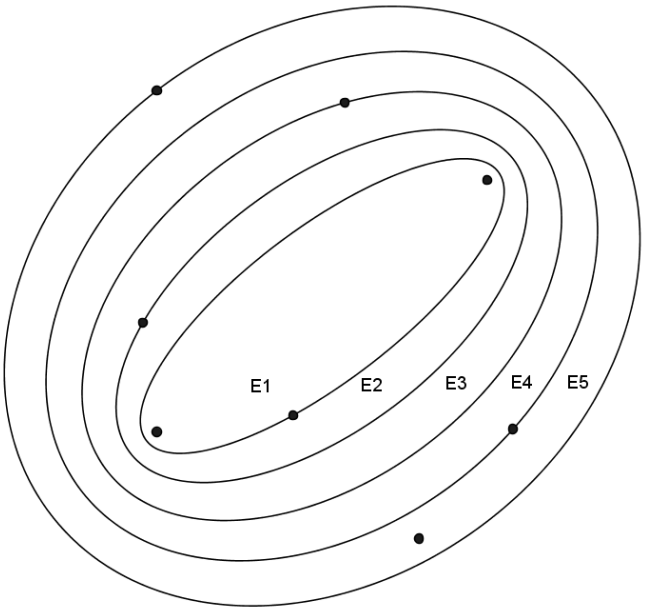

Рис. 3. Вложенные эллипсы Петунина

внутри круга с радиусом R. Растягивая этот круг вдоль оси Ox' с коэффициентом $\beta = \frac{1}{\alpha}$ и выполняя обратные преобразования поворота и переноса, получим эллипс Петунина (рис. 2).

Эллипсоид Петунина. В m-мерном пространстве на первом шаге найдем две вершины выпуклой оболочки $\vec{x}_k$ и $\vec{x}_l$, лежащие на диаметре выпуклой оболочки. Соединим точки $\vec{x}_k$ и $\vec{x}_l$ отрезком L. Повернем и перенесем систему координат, чтобы диаметр выпуклой оболочки лежал на оси Ox'_1. Построим наименьший прямоугольный параллелепипед, содержащий точки $\vec{x}'_1, ..., \vec{x}'_n$.

Сжимая прямоугольный параллелепипед, отобразим точки в гиперкуб. Найдем центр $\vec{x}_0$ гиперкуба и вычислим расстояния $r_1, r_2, ..., r_n$ от него до каждой точки. Найдем наибольшее число $R = \max(r_1, r_2, ..., r_n)$ и построим гипершар с центром в точке $\vec{x}_0$ и радиусом R. Применяя к этому гипершару обратные операции растягивания, поворота и переноса, получим эллипсоид Петунина в m-мерном пространстве.

В результате на каждом вложенном эллипсоиде лежит по одной точке из выборки, т. е.происходит их ранжирование (рис. 3).

Теорема 1 [7]**.** Если векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными векторами из генеральной совокупности G, E_n — доверительный эллипсоид, содержащий точки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$, и $\overrightarrow{x}_{n+1} \in G$, то $P(\vec{x}_{n+1} \in E_n) = \frac{n}{n+1}$.

3. Новая мера близости между многомерными выборками

По аналогии с p-статистикой, исследованной в статье [9] для одномерного случая, сконструируем меру близости, используя в качестве вариационного ряда многомерные выборки, построенные при ранжировании с помощью эллисоидов Петунина. Вариационному ряду выборок $\vec{x}_{(1)} \preceq \vec{x}_{(2)} \preceq ... \preceq \vec{x}_{(n)}$ поставим в соответствие последовательность вложенных эллипсоидов $E_{(1)} \subset E_{(2)} \subset ... \subset E_{(n)}$. Как следует из теоремы 1, вероятность того, что выборка $\vec{x}$ из многомерной генеральной совокупности G удовлетворяет условию $\vec{x}_{(i)} \preceq \vec{x} \preceq \vec{x}_{(j)}$, равна вероятности попасть между эллипсами $E_{(i)}$ и $E_{(j)}$, т. е. $\frac{j-i}{n+1}$. Это обстоятельство позволяет построить p-статистику для многомерного случая, используя теоремы, доказанные в работе [9].

Напомним основные определения. Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in G$ — выборка из генеральной совокупности G и p — некоторый известный или неизвестный показатель, значения которого могут зависеть от выборки x. Рассмотрим две непрерывные функции $a(u_1, ..., u_n)$ и $b(u_1, ..., u_n)$ от n переменных $u_1, ..., u_n$, удовлетворяющие неравенству $a(u_1, ..., u_n) \le b(u_1, ..., u_n)$ $\forall (u_1, ..., u_n) \in R^n$. Случайный интервал $(a(u_1, ..., u_n), b(u_1, ..., u_n)) = (a, b)$ называется доверительным интервалом для p, соответствующим уровню значимости β, если $P(p \in (a, b)) = 1 - \beta, (0 \le \beta \le 1)$; при этом числа $a = a(x_1, ..., x_n)$, $b = b(x_1, ..., x_n)$ называются доверительными границами для p, соответствующими уровню значимости β[9].

Определение 1 [9]**.** Интервалы $(a_k, b_k) = (a_k(x_1, ..., x_k), b_k(x_1, ..., x_k))$, $k = 1, 2, ...$ называются асимптотическими интервалами для показателей $p_i, i = 1, 2, ..., k, ...$, соответствующими уровню значимости β, если

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} P(p_k \in (a_k(x_1, ..., x_k), b_k(x_1, ..., x_k))) = 1 - \beta, \qquad (1)$$

а концы этих интервалов $a_k\,(x_1,...,x_k)$ и $b_k\,(x_1,...,x_k)$ называются асимптотическими доверительными границами.

Определение 2 [9]**.** Величина β называется асимптотическим уровнем значимости последовательности (a_k, b_k), $k = 1, 2, ...$

Определение 3 [9]**.** Если $p_k = p\ \forall k = 1, 2, ...$ то интервал (a_k, b_k) называется асимптотическим доверительным интервалом показателя p, а величина β — асимптотическим уровнем значимости интервала (a_k, b_k).

Обозначим через H гипотезу о равенстве непрерывных функций распределения $F_1(u)$ и $F_2(u)$ генеральных совокупностей многомерных случайных величин G_1 и G_1 соответственно. Пусть $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) \in G_1$ и $(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, ..., \vec{x}'_n) \in G_2$, $\vec{x}_{(1)} \preceq \vec{x}_{(2)} \preceq ... \preceq \vec{x}_{(n)}$, $\vec{x}'_{(1)} \preceq \vec{x}'_{(2)} \preceq ... \preceq \vec{x}'_{(n)}$ — соответствующие вариационные ряды. Предположим, что $F_1(u)$=$F_2(u)$. Обозначим через A_{ij}, $k = 1, 2, ..., m$ случайное событие, состоящее в том, что $\vec{x}'_k$ попадает в область $E_{(j)} \backslash E_{(i)}$. Как известно [11], если $F_1(u)$=$F_2(u)$, вероятность p_{ij} этого события вычисляется по формуле:

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{j-i}{n+1}. \tag{2}$$

Положим

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{h_{ij}m + g^2/2 - g\sqrt{h_{ij}(1-h_{ij})m + g^2/4}}{m+g^2}, \tag{3}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{h_{ij}m + g^2/2 + g\sqrt{h_{ij}(1-h_{ij})m + g^2/4}}{m+g^2}, \tag{4}$$

где h_{ij} — частота события A_{ij} в m испытаниях, величина g=3. Рассмотрим доверительные интервалы $I_{ij}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)}\right)$. Общее количество интервалов $I_{ij}^{(n)}$ равно $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Обозначим через L — количество тех интервалов $I_{ij}^{(n)}$, которые содержат вероятности $p_{ij}^{(n)}$. Положим $h = \rho\,(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{L}{N}$. Поскольку h — частота случайного события $B = \left\{p_{ij}^{(n)} \in I_{ij}^{(n)}\right\}$, имеющего вероятность $p(B) = 1 - \beta$, то, полагая, $h_{ij} = h, m = N$ и $g = 3$ в формулах (3), (4), получаем доверительный интервал $I^{(n)} = \left(p^{(1)}, p^{(2)}\right)$ для вероятности $p(B)$. Статистика h называется p-статистикой [9]. Она является мерой близости $\rho\,(\vec{x}, \vec{x}')$ между выборками $\vec{x}$ и $\vec{x}'$.

Если гипотеза H истинная, то схема испытаний, в которой могут появляться события $A_{ij}^{(k)}$, называется обобщенной схемой Бернулли, а если гипотеза H неверна — модифицированной схемой Бернулли [10], [11]. В общем случае, когда может быть истинной любая гипотеза, как $F_1(u)$ =$F_2(u)$, так и $F_1(u)$ ≠$F_2(u)$, эта схема испытаний называется МП-схемой [12].

Теорема 2. Если в обобщенной схеме испытаний Бернулли выполняются условия $n = m$, $0 < \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_0 < 1$ и $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n+1} = p^* < 1$, то

асимптотический уровень значимости β последовательности доверительных интервалов $I_{ij}^{(n)}$ для вероятностей $p_{ij}^{(n)}$, построенных по правилу 3s, не превышает 0.05.

Теорема 3. Если выборки $\vec{x} = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) \in G_1$ и $\vec{x}' = (\vec{x}'_1, ..., \vec{x}'_m) \in G_2$ имеют одинаковый объем, то асимптотический уровень значимости интервала $I^{(n)} = \left(p^{(1)}, p^{(2)}\right)$, построенный по правилу 3s при $g = 3$ с помощью формул (3), не превосходит 0,05.

Теоремы 2 и 3 являются прямыми следствиями теорем 1 и 2, доказанных в [9], если заменить интервалы $\left(x_{(i)}, x_{(j)}\right)$, образованные порядковыми статистиками одномерной случайной величины x, областями $E_{(j)} \backslash E_{(i)}$, полученными из вариационного ряда $\vec{x}_{(1)} \preceq \vec{x}_{(2)} \preceq ... \preceq \vec{x}_{(n)}$.

Вычислительный эксперимент

В рамках вычислительного эксперимента с помощью статистического пакета R было проведено попарное сравнение выборок из генеральных совокупностей, имеющих двумерное нормальное распределение, векторы математических ожиданий которых равны (0,0), (1,1), (2,2) и (3,3) соответственно, а ковариационная матрица является единичной. Кроме того, было проведено попарное сравнение выборок из генеральных совокупностей, имеющих двумерное нормальное распределение, векторы математических ожиданий которых $(0, 0)$, а на диагонали ковариационной матрицы стоят дисперсии $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ и $(4, 4)$ (внедиагональные элементы равны нулю). Для экспериментов генерировались выборки объемом 300 элементов и вычислена средняя мера близости.

Таблица 1. Усредненная мера близости между выборками

Центры	Мера близости	Дисперсии	Мера близости
(0,0)—(0,0)	0,922	(1,1)—(1,1)	0,922
(0,0)—(1,1)	0,395	(1,1)—(2,2)	0,428
(0,0)—(2,2)	0,120	(1,1)—(3,3)	0,289
(0,0)—(3,3)	0,063	(1,1)—(4,4)	0,223

Как видим, мера близости монотонно убывает по мере увеличения расстояния между центрами распределений при фиксированной дисперсии, а также по мере увеличения дисперсии при фиксированном центре.

Замечание. Предложенная мера близости позволяет проверить гипотезу сдвига и масштаба при одинаковом распределении углов векторов, проведенных из центра распределения к точкам, но, например, если точки двух генеральных совокупностей распределены одинаково, но в противоположных секторах круга, то для их правильного распознавания необходимо учитывать распределение углов векторов.

Выводы

Предложенный метод ранжирования многомерных выборок является точным, поскольку каждая точка выборки получает свой уникальный ранг.

Новая мера близости, основанная на вложенных эллипсах Петунина, позволяет сформулировать критерий для проверки гипотезы о равенстве функций распределения многомерных случайных величин (без учета углового распределения), асимптотический уровень значимости которого не превышает 0,05. Вычислительный эксперимент продемонстрировал практическую ценность разработанной методики.

Література

1. Barnett V. The ordering of multivariate data // Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General). — V. 139. — 1976. — №3. — P. 318–355.
2. Tukey J.W. Mathematics and the picturing of data // Proceedings of the International Congress of Mathematician, Montreal, Canada. — 1975. — P. 523–531.
3. Titterington D.M. (1978) Estimation of correlation coefficients by ellipsoidal trimming // Appl. Statist. — 1978. — V. 27. — P. 227–234.
4. Oja H. Descriptive statistics for multivariate distributions // Statistics and Probability Letters. — 1983. — 1. — P. 327–332.
5. Liu R.J. On a notion of data depth based on random simplices //Annals of Statictics. — 1990. — 18. — P. 405–414.
6. Zuo Y., Serfling R. General notions of statistical depth function // Annals of Statistics. — 2000. — 28. — P.461–482.
7. Ляшко С. И., Клюшин Д. А., Алексеенко В. В. Многомерное ранжирование и эллиптический пилинг // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №4. — С. 29—-36.
8. Петунин Ю. И., Рублев Б. В. Распознавание образов с помощью квадратичных дискриминантных функций // Вычисл. и прикл. матем. — 1996. — Вып. 80. — С. 89–104.
9. Клюшин Д. А., Петунин Ю. И. Непараметрический критерий эквивалентности генеральных совокупностей, основанный на мере близости между выборками // Український математичний журнал. — 2003. — Т. 5, №2. — С. 147–163.
10. Матвейчук С. А., Петунин Ю. И. Обобщение схемы Бернулли, возникающее в вариационной статистике. I // Укр. матем. журнал. — 1991. — 42, №4. — С. 518–528.
11. Матвейчук С. А., Петунин Ю. И. Обобщение схемы Бернулли, возникающее в вариационной статистике. II // Укр. матем. журнал. — 1991. — 48, №6. — С. 779–785.
12. Johnson N., Kotz S. Some generalizations of Bernoulli and Polya-Eggenberger contagion models // Statist. Paper. — 1991. — 32. — P.1–17.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 15.08.13

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ ПСЕВДОБАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

В. І. Кудін

Резюме. Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод псевдобазисних матриць (МПБМ) на стадіях дооптимізації та оптимізації. Метод грунтується на концепції базисних матриць. В роботі наведено всі необхідні теоретичні обгрунтування для побудови алгоритмічних схем на основі методу. Розглянуто особливості застосування схем релаксування, скорочення розмірності задачі на стадіях оптимізації. Встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків.

Вступ

За останні десятиріччя було розроблено багато варіантів сімплекс-методів для розв'язання задачі лінійного програмування [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задач. Положення теорії двоїстості Дж. Неймана [1] дали теоретичні узагальнення, що лягли в основу побудови нових методів та алгоритмів. Для подальших застосувань стало важливим не лише "здатність" методу знаходити оптимальні розв'язки, але й проводити аналіз властивостей задачі на різних стадіях обчислень.

В даній роботі запропоновано метод псевдобазисних матриць (МПБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, задач лінійного програмування великої розмірності на стадіях дооптимізації та оптимізації. Встановлено умови оптимальності, несумісності моделі, формули зв'язку елементів алгоритмічних схем у суміжних базисних матрицях, необхідні і достатні умови пасивності обмежень, побудовані різноманітні правила вводу-виводу нормалей обмежень в базисну матрицю. Релаксаційні схеми оптимізаційного аналіза дозволяють замінювати дослідження початкової моделі, можливо великорозмірної, послідовністю оптимізаційних моделей меншої розмірності. Доведено теореми, що встановлюють умови існування, єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків оптимізаційної задачі. Досліджено питання виродженості при розв'язанні задач.
Особливості схеми розв'язку задачі МПБМ такі:
в основі методу лежить ідея псевдобазисної матриці;
при переході до наступного недопустимого опорного розв'язку вводяться в псевдобазисну матрицю і виводяться на ітераціях вектори нормалі обмежень;

збіжність до оптимального розв'язку "іде зверху"за недопустимими вершинами, що називатимуться псевдовершинами, причому від ітерації до ітерації значення цільової функції строго зменшуватиметься (для невиродженої задачі на максимум);
на кожному кроці можливо уточнювать двосторонні оцінки оптимального розв'язку за цільовою функцією;
безпосередньо на ітераціях методу виявляються пасивні та неактивні обмеження;
передбачено визначення, як наближених так, і точних розв'язків задачі лінійного програмування;
застосування процедур релаксації дає змогу, при невеликих затратах на їх реалізацію, значно скоротити розмірність базової задачі при розрахунках.

Основні теоретичні положення методу псевдобазисних матриць

Розглядається, як базова, модель лінійного програмування вигляду:

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$Au \le C, \tag{2}$$

$$d_H \le u \le d_B, \tag{3}$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $C = (c_1, c_2, .., c_n)^T$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$,
$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})$, $j = \overline{1,n}$ — рядки матриці A^T,
$d_H = (d_{1(H)}, d_{2(H)}, ..., d_{m(H)})^T$, $d_B = (d_{1(B)}, d_{2(B)}, ...d_{m(B)})^T$ m–вимірні вектори, T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків (2) обмежена, замкнена. Модель (1)–(3) досліджується в евклідовому просторі E^m. Відкинемо частину обмежень (2), залишимо лише m із них, які утворять квадратну матрицю $A_б$, тобто розглянемо модель вигляду

$$\max_u \left\{ Bu / A_б u \le C^0 \right\},$$

де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T \subset C$ — підвектор C, який утворений компонентами обмежень, які входять у $A_б$, відповідно, $J_b = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ — множина індексів таких обмежень. Припустимо, що матриця $A_б$ невироджена, а задача має обмежений розв'язок u_0. Розв'язок задачі u_0 може бути недопустимим для релаксованих (відкинутих) обмежень, причому $U \subseteq U_R$, де U_R — релаксована (розширена) множина обмежень (2), утворена відкиданням деяких обмежень. Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$;
$u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ — розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u \le c_r$ за рядками псевдобазисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектора-градієнта цільової функції (1) за рядками базисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; J_b, J_H ($J = J_b \bigcup J_H$) — множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка

a_k на a_l, що не входить у базисну матрицю $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\alpha}_r,\ \overline{\Delta}_k, \overline{e}_{ri},\ \overline{\alpha}_0$.

Означення 1. Підматрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (2), будемо називати псевдобазисною, а розв'язок u_0 псевдобазисним, якщо $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$. Псевдобазисний розв'язок u_0 будемо вважати невиродженим, якщо $\neg\exists\, u_0^{'} \neq u_0,\ Bu_0 = Bu_0^{'}$, де $Bu = Bu_0$ — гіперплощина рівня цільової функції в u_0.

Означення 2. Дві псевдобазисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, к-й рядок будемо називати суміжними.

Теорема 1. *Між елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{a}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ \ r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ \ r = \overline{1,m};\ \ i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{5}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ \ r = \overline{1,n};\ r \neq k; \tag{7}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{8}$$

причому умовами: псевдобазисності матриці при вводі вектору нормалі a_l k-м рядком псевдобазисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$; псевдобазисності розв'язків є $\alpha_{lk} > 0$, спадання цільової функції в новій псевдобазисній матиці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$.

Доведення теореми розглянуто в [3].

Означення 3. Допустимий псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним, якщо $B\overline{u}_0 - Bu \geq 0$ для всіх u, що задовольняють (2).

Теорема 2. *Допустимість псевдобазисного розв'язку u_0, тобто виконання $\Delta_r \leq 0,\ r \in J$ є необхідною і достатньою умовою його оптимальності, при цьому $\alpha_{0i} > 0,\ i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 1. *Якщо $\alpha_{0k} \geq 0,\ k = \overline{1,m}$, то псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним при $\Delta_r \leq 0,\ r \in J$. Проміжні неоптимальні розв'язки є верхніми оцінками за значеннями цільової функції.*

Наслідок 2. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб для вектора розкладення нормалі B за рядками $A_б$ виконувалось $\alpha_{0k} \geq 0,\ k = \overline{1,m}$.*

Наслідок 3. *Умовою неєдиності розв'язків задачі (1), (2) є $\exists$ індексів (серед компонент розкладення вектора нормалі B) таких, що $\alpha_{0i} = 0$.*

Наслідок 4. *Неєдині розв'язки задачі (1), (2) утворюють необмежену замкнену множину при* $\exists\ i$, *що* $\alpha_{0i} = 0$ *і при цьому* $\alpha_{ki} > 0$, *для* $k \notin J_б$.

Наслідок 5. *Якщо існує індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\alpha_{rk} > 0$, $r \in J_H$, *то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Наслідок 6. *Номера* k, $k \in I$ *такі, що* $\alpha_{0k} = 0$ *утворюють ребра неєдиності розв'язків задачі (1), (2) причому при виконанні умови* $j \in J_H$ *таких, що* $\alpha_{jk} < 0$ *маємо обмежену замкнену множину (двосторонньо обмежене ребро), а за умови виконання* $\alpha_{jk} > 0$ *для* $j \in J_H$ *має місце необмеженість ребра–променя, що є необмеженою множиною вимірності 1.*

Нехай $U = \{u/a_j u \le c_j,\ j \in J\}$, $U_r = \{u/a_j u \le c_j,\ j \in J,\ j \ne r\}$,

$$U^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u\in U} Bu, u \in U\},\ U_r^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u\in U_r} Bu, u \in U_r\}.$$

Означення 4. Обмеження $a_r u \le c_r$ пасивне, якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \le c_r$ породжуюче нерозв'язність за несумісністю U, якщо $U = \varnothing,\ \ U_r \ne \varnothing$.

Теорема 3. *Для того, щоб обмеження* $a_r u \le c_r$ *було пасивним необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці* $A_б$, *відносно якої* $\alpha_{rk} \ge 0,\ k = \overline{1,m}$ *та* $\Delta_r = a_r u_0 - c_r \le 0$, *де* u_0 *— псевдобазисний розв'язок.*

Теорема 4. *Для того щоб* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а розв'язок* $\overline{u}_0$ *був псевдобазисним для задачі (1), (2) необхідно і достатньо існування такого номера* l *та відповідного номера* k, *для яких виконується нерівність* $\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}} \ge \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}$, $i \ne k$, $\alpha_{li} > 0$, $\Delta_l > 0$.

Теорема 5. *Для того, щоб обмеження* $a_r u \le c_r$ *було породжуючим нерозв'язність за несумістністю необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці* A_b, *відносно якої* $\alpha_{ri} \le 0,\quad i = \overline{1,m}$ *та* $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$, *де* u_0 *— псевдобазисний розв'язок.*

Доведення теорем 2—5 наведено в [4].

Приведені вище теореми та наслідки охоплюють всі можливі випадки для "організації роботи" МПБМ:

1. Якщо існує псевдобазисна матриця A_b, що для компонент розкладу вектора нормалі цільової функції виконується $\alpha_{0k} \ge 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \le 0$, $r \in J$, то дана псевдобазисна матриця та псевдобазисний розв'язок є оптимальними. При $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$ розв'язок єдиний. При $\exists r$ такого, що $\alpha_{0r} = 0$, розв'язок неєдиний. Характер неєдиності визначається наслідками теореми 2.

2. Якщо існує псевдобазисна матриця $A_б$, індекс l, що $\Delta_l > 0$, для якого $a_{li} > 0$ та індекс k такий, що $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{i,\\ \alpha_{li}>0}} \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}}$, то при заміні рядка k на нормаль обмеження l нова матриця $\overline{A}_б$ буде псевдобазисною. При цьому можна перейти до нового псевдобазисного розв'язку, в якому цільова функція зменшиться на $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l$.

3. Якщо існує $A_б$, в якому $a_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $a_r u_0 \leq c_r$, де u_0 псевдовершина, що відповідає $A_б$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ пасивне і може бути виключене із обчислень.
4. Існування для псевдобазисної матриці $A_б$ обмеження $a_r u \leq c_r$, $r \in J$, що $\alpha_{ri} \leq 0$, $i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$ є умовою нерозв'язності за несумісністю (1)–(2).
Встановлено існування регуляризуючого збурення за схемою МПБМ з властивістю невиродженості псевдобазисних розв'язків задачі (1), (2), тобто побудовано ε-задачу

$$\max_u B(\varepsilon)u, \tag{9}$$

$$a_j u \leq c_j \tag{10},$$

$$u \geq 0,\ \varepsilon \geq 0,\ j \in J, \tag{11}$$

для якої справедливо

Теорема 6. *Існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що ε-задача при $o < \varepsilon < \varepsilon_1$ буде невиродженою.*

Теорема 7. *Існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ оптимальний псевдобазисний розв'язок ε-задачі буде оптимальним для задачі (1), (2).*

Доведення теорем 6–7 наведено в [4].

Схема релаксаційного методу проведення оптимізаційного аналізу лінійної системи може бути представлена алгоритмом:

АЛГОРИТМ

Крок 1. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 та псевдобазисної матриці A_b формуємо J_b, $J_H \subset J$ — множини базисних та небазисних обмежень, $J = J_b \cup J_H$.

Крок 2. На основі u_0 утворимо множину J_R, а саме $J_R = J_b \bigcup J_H^+$, де $J_H^+ = \{\, \mathrm{j} / \ \mathrm{j} \in J_H,\ \ \Delta_\mathrm{j} > 0\}$ (схема допускає введення допоміжного обмеження на потужність елементів множини $\mathrm{J_H^+}$) .

Крок 3. Формуємо підзадачу

$$\max \mathrm{Bu}, \tag{12}$$

$$a_j u \leq b_{j\,,},\ \ j \in J_R. \tag{13}$$

Крок 4. Знаходимо розв'язок $\bar{u}_0$ задачі (12), (13) МПБМ.

Крок 5. Якщо множина $\mathrm{J_H^+} \neq \varnothing$ відносно $\bar{u}_0$, то $u_0 = \bar{u}_0$ і переходимо на **Крок 2**, в протилежному — на **Крок 6.**

Крок 6. Якщо $\mathrm{J_H^+} = \varnothing$, то це означає оптимальність $\bar{u}_0$ для (2).

Завершення роботи алгоритму.

Висновок

За побудовою, релаксаційна схема коректно вписується в МПБМ, що дає змогу замінити дослідження початкової, можливо, великорозмірної задачі послідовністю взаємозв'язаних задач меншої розмірності, а в ході ітераційного процесу ідентифікувати пасивні обмеження системи.

Література

1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. Т. 1 — М:, 1991. — 380 с.
2. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М. — 1968. — 488 с.
3. Кудин В. И., Ляшко С. І., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П. Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисних матриц. // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — №4 — С. 119–127.
4. Волкович В. Л., Войналович В. М., Кудин В. И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика. — 1987. — №4 — С. 79–86.
5. Кудін В. І., Ляшко С. І., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П. Метод штучних базисних матриць // Доповіді НАН України. — 2007. — № 9. — С. 29–33.
6. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. О вычислительной эффективности схем метода базисных матриц // Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV). Кацивелі 24–29 вересня 2009 р. — Т. 1. — Київ. — 2009. — С. 68–72.
7. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. Анализ компьютерных схем метода базисных матриц. // Компьютерная математика — 2009. — №2. — С. 3–13.
8. Богаенко В. А., Кудин В. И. О свойствах параллельных вычислительных схем метода базисных матриц // Математичне та комп'ютерне моделювання. — Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип. 2. — С. 3–14.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА МОМЕНТІВ ВИХОДУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗІ СМУГИ У ДИФУЗІЙНИХ МОДЕЛЯХ ЗІ СТРИБКАМИ

А. Г. Мороз, В. В. Томашик

Резюме. В роботі розглянуто дифузійну модель зі стрибками, що задається стохастичним диференційним рівнянням зі скінченною пуасонівською мірою, коефіцієнти якого залежать від параметра. Доведено, що при збіжності коефіцієнтів збігаються як розв'язок рівняння, так і моменти його виходу зі смуги.

Вступ

Дифузійні моделі зі стрибками мають широкі застосування, особливу роль вони відіграють в моделюванні цінових процесів на фондовому ринку та процесів ризику. Тому дослідження, пов'язані з подібними моделями, які задаються стохастичними диференціальними рівняннями (СДР), що містять стрибки, є вкрай актуальними. Для дифузійних моделей зі стрибками поширеною є ситуація, коли оптимальна стратегія для інвестора задається моментом виходу на певний рівень (див., наприклад, [7], [8]).

Звичайною ситуацією на практиці є, коли коефіцієнти рівняння, яке задає модельований процес, не є відомими й оцінюються за допомогою певних наближених методів. У такій ситуації маємо справу з наближеним рівнянням, коефіцієнти якого близькі до коефіцієнтів рівняння, що задає модельований процес. Таким чином, треба гарантувати, по-перше, щоб розв'язок наближеного рівняння був близьким до розв'язку вихідного рівняння, по-друге, щоб близькими були оптимальні стратегії, які задаються моментами виходу зі смуги. З огляду на це, у даній роботі встановлено умови, які гарантують збіжність розв'язків рівнянь зі стрибками та моментів виходу цих розв'язків зі смуги у разі збіжності коефіцієнтів. Як допоміжний результат, отримано стійкість моментів виходу по відношенню до меж смуги. Цей результат представляє окремий інтерес, оскільки рівняння, що задають межі смуги, вихід з якої є оптимальною стратегією для інвестора, вкрай рідко можна розв'язати точно.

Питання збіжності розв'язків рівнянь зі стрибками розглядалося у статтях [9], [10] та у багатьох підручниках, наприклад [11], [12]. Новизною даної роботи є те, що ми не накладаємо на коефіцієнти рівняння умову Ліпшиця, використовуючи натомість умову Ямада. Це дозволяє розглядати рівняння типу Кокса-Інгерсолла-Росса, які часто виникають у фінансовому моделюванні.

Стаття має таку структуру. У першому розділі визначений основний об'єкт дослідження та наведено припущення. У другому розділі наведено результати для рівнянь без стрибків, які використовуються для доведення основних результатів. У третьому розділі встановлено збіжність розв'язків СДР зі стрибками, а у четвертому розділі — збіжність моментів виходу зі смуги.

1. Основний об'єкт та припущення

Нехай $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ — повний імовірнісний простір з фільтрацією, що задовольняє звичайні умови.

Розглянемо послідовність стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(s, X_n(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s, X_n(s))dW(s) + \\ + \int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\mu(d\theta, ds), n \geq 0, t \geq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де початкові умовами $X_n(0)$ є F_0-вимірними; коефіцієнти $b_n, \sigma_n : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є вимірними, $\{W(t), t \geq 0\}$ – вінерів процес відносно фільтрації $\{F_t, t \geq 0\}$; міра $\mu(d\theta, dt)$ є пуассонівською мірою, для якої $E\mu(d\theta, dt) = \nu(d\theta)dt$, причому $\nu(\mathbb{R}) < \infty$.

Ми накладатимемо такі припущення щодо коефіцієнтів та початкових умов рівнянь (1):

(Y1$_n$) для всіх $\gamma > 0$ $\sup_{n\geq 1} E[|X_n(0)|^\gamma] < \infty$;

(Y2$_n$) неперервність коефіцієнтів b_n та σ_n за сукупністю змінних;

(Y3$_n$) лінійне зростання коефіцієнтів:

$$|b_n(t,x)| + |\sigma_n(t,x)| \leq L(1 + |x|^2), t \geq 0, x \in \mathbb{R};$$

(Y4$_n$) умова Ліпшиця на коефіцієнт b_n:

$$|b_n(t,x) - b_n(t,y)| \leq L\,|x-y|\,, t \geq 0, x, y \in \mathbb{R};$$

(Y5$_n$) умова Ямада: існує така строго зростаюча функція $\rho_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що $\int_{0^+} \rho_n^{-2}(u)du = \infty$ та виконується нерівність

$$|\sigma_n(t,x) - \sigma_n(t,y)| \leq \rho_n(|x-y|),\ t \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R};$$

(Y6$_n$) коефіцієнт $f_n(s,x,\theta)$ – неперервний по x для всіх s та майже всіх θ за мірою $\nu(d\theta)$;

(Y7$_n$) обмеженість коефіцієнта f_n:

$$|f_n(t,x,\theta)| < L;$$

(Y8$_n$)

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(t,x,\theta - f_n(t,x,\theta|^2\,\nu(d\theta) \leq L\,|x_1 - x_2|^2\,.$$

Щодо збіжності припускатимемо таке:

(U1$_n$) для всіх $\gamma > 0$ має місце збіжність початкових умов

$$E[X_n(0) - X_0(0)]^\gamma \to 0, n \to \infty;$$

(U2$_n$) для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів

$$b_n(t,x) \to b_0(t,x),\ \sigma_n(t,x) \to \sigma_0(t,x),\ n \to \infty;$$

(U3$_n$) для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів

$$f_n(t, X_n(s), \theta) \to f_0(t, X_n(s), \theta),\ n \to \infty.$$

2. Допоміжні результати для рівнянь без стрибків

Наведемо результати для рівнянь без стрибків, а саме для

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \int_0^t b_n(s, Z_n(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s, Z_n(s))dW(s),\ n \geq 0,\ t \geq 0. \quad (2)$$

Наступний результат щодо збіжності розв'язків СДР (2) без пуассонівської міри є узагальненням результату, отриманого в [1] при випадкових початкових умов.

Теорема 1. *Нехай для послідовності стохастичних диференціальних рівнянь (2) виконуються умови* (Y1$_n$)–(Y5$_n$) *та* (U1$_n$)–(U2$_n$). *Тоді має місце така збіжність*

$$E[|Z_n(t) - Z_0(t)|] \to 0, n \to \infty,$$

що виконується рівномірно на скінченних відрізках.

Доведення. Даної теорема доводиться аналогічно [1]. □

Аналогічно до того, як це зроблено в [2], можна встановити такий результат щодо рівномірної збіжності за ймовірністю розв'язків СДР (2) без пуассонівскої міри до граничного процесу.

Теорема 2. *Нехай виконано умови* (Y1$_n$)–(Y5$_n$) *та* (U1$_n$)–(U2$_n$). *Тоді для* $T > 0,\ \varepsilon > 0$ *має місце збіжність*

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |Z_n(t) - Z_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Наслідок 1. *Якщо виконано припущення попередньої теореми, то для довільного* $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}\left(|Z_n(t) - Z_0(t)|\right)^\gamma \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Доведення випливає з теореми та рівномірної інтегрованості послідовності $\{|Z_n(t) - Z_0(t)|\},\ n \geqslant 1$.

Під моментами виходу зі смуги $[l, r] : l,\ r \in \mathbb{R},\ l < r$ процесів $Z_n(t)$ та $Z_0(t)$ будемо розуміти такі моменти виходу

$$\tau_{Z_n}^{[l,r]} = \inf\{t \in [0,\infty) : Z_n(t) \notin [l,r]\},\ n \geq 0.$$

Має місце таке твердження [4].

Лема 1. *Нехай для процесів* $Z_n(t)$ *виконано умови* ($Y1_n$)–($Y5_n$).

(a) Якщо $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy = \infty$, *то*

$$P(\sup_{t>0} Z_n(t) = +\infty) = 1,\ n \geq 0.$$

(б) Якщо $\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy = \infty$, *то*

$$P(\inf_{t>0} Z_n(t) = -\infty) = 1,\ n \geq 0.$$

Тобто за виконання однієї з умов попередньої леми $\tau_{Z_n}^{[l,r]} < \infty$ майже напевне для кожного $n \geq 0$ [5].

Теорема 3. *Нехай виконано умови* $(Y1_n) - (Y4_5)$ *та одну з умов леми 1. Тоді має місце збіжність за ймовірністю*

$$\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} \longrightarrow^P \tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta \longrightarrow 0+,$$

$$\tau_{Z_0}^{[l+\delta,r-\delta]} \longrightarrow^P \tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta \longrightarrow 0+.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності доведення проведемо лише для першої збіжності. Другу збіжність можна довести аналогічним чином.

Очевидно, що $\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} \geq \tau_{Z_0}^{[l,r]}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) + P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = r\right).$$

Розглянемо першу ймовірність

$$P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) = P\left(\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} > \tau_{Z_0}^{[l,r]} + \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) \leq$$

$$\leq P\left(\min_{t\in[\tau_{Z_0}^{[l,r]}, \tau_{Z_0}^{[l,r]}+\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) = P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(0) = l\right),$$

де використали строго марковську властивість.

За монотонністю ймовірності можна записати, що

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0+} P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(0) = l\right) = P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l, Z_0(0) = l\right).$$

Оскільки коефіцієнт дифузії в точці l є додатним, то за властивостями дифузійних процесів [5] має місце $P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l, Z_0(0) = l\right) = 0$. Теорему доведено. □

3. Збіжність розв'язків СДР зі стрибками.

Тепер повернемось до стохастичного диференціального рівняння (1) зі скінченними пуассонівськими мірами. Позначимо через $\tau_i, i > 0$ – i-тий момент стрибків процесу Пуассона $\mu(\Theta, [0,t])$.

Наступний результат стосується рівномірної інтегровності процесу X_n.

Лема 2. *Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння (1) задовольняють умови* (Y1$_n$)–(Y7$_n$). *Тоді існує така стала C, незалежна від n, що для всіх $t \geq 0$ та $\gamma > 0$*

$$E\,|X_n(t)|^\gamma < [E\,|X_n(0)|^\gamma + C \cdot t] \cdot \exp\,[C \cdot t].$$

Доведення. Зауважимо, що достатньо довести лему для всіх $\gamma = 2p,\ p \in N$.

Нехай $R > 0$ — фіксоване.

Введемо такі позначення $A_{R,t} := \{\sup_{[0,t]} |X_n(s)| \leq R\}, 1_t := 1_{A_{R,t}}$. Запишемо такі оцінки

$$E[X_n(t)^{2p}1_t] \leq C_p\Bigg(E[X_n(0)^{2p}] + E\left[\left(\int_0^t b_n(X_n(s))ds\right)^{2p} 1_t\right] +$$

$$+E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))dW(s)\right)^{2p} 1_t\right] +$$

$$+E\left[\left(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\widetilde{\mu}(d\theta, ds)\right)^{2p} 1_t\right] +$$

$$+E\left[\left(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\nu(d\theta)ds\right)^{2p} 1_t\right]\Bigg) =$$

$$= C_p(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5),$$

де C_p — деяка стала, що залежить лише від p, а $\widetilde{\mu}(d\theta, ds)=\mu(d\theta, ds)-\nu(d\theta)ds$ — компенсована пуассонівська міра.

Оцінимо кожен з доданків окремо.

$$A_1 \leq C_p \int_0^t E((1 + X_n(s)^{2p})1_s)ds \leq$$

$$\leq C_p(t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds),$$

де використали нерівність Ієнсена та лінійне зростання коефіцієнта переносу. Далі,

$$A_2 \leq E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))1_s dW(s)\right)^{2p}\right] \leq$$

$$\leq C_p \int_0^t E((1 + X_n(s)^{2p})1_s)ds \leq C_p(t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds),$$

де використано властивість ізометрії стохастичного інтегралу по вінерівському процесу.

Для доданку A_4 використаємо оцінки з [6].

$$A_4 \leq C_p E[\Big(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds\Big)^p +$$

$$+ \int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds] \leq C_p t.$$

Нарешті, використовуючи обмеженість коефіцієнта f_n, маємо

$$A_5 \le C_p t.$$

Отже, маємо оцінку

$$E(X_n(t)^{2p}1_t) \le C_p[E(X_n(0)^{2p}) + t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds].$$

За лемою Гронуолла

$$E(X_n(t)^{2p}1_t) \le C_p[E(X_n(0)^{2p}) + t]\exp[C_p \cdot t],$$

звідки, спрямувавши R до $+\infty$, отримаємо результат леми. □

Поширимо результат теореми 2 на випадок процесів $\{X_n, n \ge 0\}$ зі стрибками, що є розв'язками СДР (1).

Теорема 4. *Нехай виконано умови* (Y1$_n$)–(Y8$_n$) *та* (U1$_n$)–(U3$_n$). *Тоді для* $T > 0,\ \varepsilon > 0$ *має місце збіжність*

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $P(\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty) = 1$, то для доведення теореми достатньо показати, що для всіх k

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le t<\tau_k\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Для доведення попереднього співвідношення застосуємо метод математичної індукції за параметром k. На проміжку $[\tau_k, \tau_{k+1})$ процес $X_n(t)$ співпадає з виродженим процесом $X_n^*(t)$ без стрибків

$$X_n^*(t) = X_n^*(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t b_n(s, X_n^*(s))ds + \int_{\tau_k}^t \sigma_n(s, X_n^*(s))dW(s). \qquad (3)$$

(а) *База індукції.* База індукції забезбечується тим, що на проміжку $[0, \tau_1 \wedge T)$ з теореми 2 випливає рівномірна збіжність за ймовірністю процесів X_n^*, що на даному проміжку збігаються з процесами X_n.

(б) *Припущення індукції.* Припустимо, що $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t),\ n \to \infty$ на $[0, \tau_k \wedge T)$. Зауважимо, що якщо $\tau_k > T$, то інтервал $[0, \tau_k \wedge T) \equiv [0, \tau_{k+1} \wedge T)$ й індуктивний крок виконується автоматично. Тому надалі припускаємо, що $\tau_k < T$ майже напевне.

(в) *Індуктивний крок.*

Можна записати таку рівність для деякого $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{0\le t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon) =$$

$$= P(\sup_{0\le t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon, \tau_k \le T) +$$

$$+ P(\sup_{0\le t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon, \tau_k > T).$$

Останній доданок за припущенням індукції прямує до нуля при $n \longrightarrow \infty$, тому зосередимось на першому доданку.

Нехай $\tau_k \leq T$. З припущення індукції випливає, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X_n(\tau_k-) - X_0(\tau_k-)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Легко бачити, що в момент стрибка τ_k процес X_n набуває нового значення

$$X_n(\tau_k) = X_n(\tau_k-) + f_n(\tau_k, X_n(\tau_k-), \theta_k).$$

Таким чином, можна записати таку нерівність

$$|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| \leq$$

$$\leq |X_n(\tau_k-) - X_0(\tau_k-)| + |f_n(\tau_k, X_n(\tau_k-), \theta_k) - f_0(\tau_k, X_0(\tau_k-), \theta_k)|\,.$$

З рівномірної збіжності за імовірністю $X_n(\tau_k-)$ до $X_0(\tau_k-)$, неперервності коефіцієнтів f_n та збіжності $(U3_n)$ випливає, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Додавши до попереднього результату нерівність $\sup_{n\geq 0, t\in[0,T]} E\,|X_n(t)|^{2p} < \infty$, $p > 1$, що є наслідком леми (2), отримаємо збіжність

$$E[|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)|] \to 0,\ n \to \infty$$

та оцінку $\sup_{n\geq 0} E[|X_n(\tau_k)|^{2p}] < \infty$ для всіх $p > 1$. Застосувавши теорему 2 на проміжку $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$ отримаємо, що $X_n^*(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0^*(t),\ n \to \infty$ на $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$, а разом з припущенням індукції отримуємо збіжність $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t),\ n \to \infty$ на $[0, \tau_{k+1} \wedge T)$.

Це завершує доведення теореми. □

4. Збіжність моментів виходу для рівнянь зі стрибками

Одержимо аналогічні результати для випадків, коли процеси X_n є розв'язками системи диференціальних рівнянь (СДР) з пуассонівською мірою та неліпшіцевою дифузією.

Означення 1. Введемо, як і раніше, такі *моменти виходу*:

$$\tau_{X_n,T}^{[l,r]} = \inf\{t \geq 0 : X_n(t) \notin [l, r]\} \wedge T,\ n \geq 0.$$

Означення 2. Під *моментами виходу зі смуги* $[l, r] : l,\ r \in \mathbb{R},\ l < r$ процесів $X_n(t)$ та $X_0(t)$ будемо розуміти такі моменти виходу

$$\tau_{X_n}^{[l,r]} = \inf\{t \in [0, \infty) : X_n(t) \notin [l, r]\},\ n \geq 0.$$

Встановимо результат щодо збіжності моментів виходу доданичних процесів зі смуги до моменту виходу граничного процесу з цієї самої смуги. Доведемо спочатку допоміжну лему.

Лема 3. *Для довільних моментів, визначених у означенні 1, справедлива збіжність*

$$\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \delta \to 0+ \ \textit{за ймовірністю.}$$

Якщо додатково $\forall t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}$ *виконано*

$$\nu(h_{t,x}^{-1}(\{l\},\{r\})) = 0,$$

де $h_{t,x}(y) = x + f(t,x,y)$, *то справедлива рівність*

$$\tau_{X_0,T}^{[l+\delta,r-\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \delta \to 0+ \ \textit{за ймовірністю.}$$

Доведення. Доведемо першу збіжність.

Спочатку доведемо, що

$$\mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \to 0,\ \delta \to \infty.$$

Позначимо

$$A_{k,\delta} = \{X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} =$$
$$= \{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), \xi_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\}.$$

Оскільки ξ_k не залежить від

$$F_{\tau_k-} = \sigma\{\{X_t \in B\} \cap \{\tau_k < t\},\ B \in B(\mathbf{R}),\ t \geqslant 0\},$$

а $X_0(\tau_k-)$ та τ_k вимірні відносно $\mathcal{F}_{\tau_k-}$, то

$$\mathbf{P}(A_{k,\delta}) = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_{k,\delta}}|F_{\tau_k-}]] =$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}\{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} F_\xi(dy)\right].$$

Очевидно,

$$\{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} \downarrow \varnothing,\ \delta \to 0+,$$

і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо $\mathbf{P}(A_{k,\delta}) \to 0,\ \delta \to 0+$. Тоді для будь-якого $m \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\exists k = 1,2,...,m:\ X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) + \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(A_{k,\delta}) + \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T).$$

Отже,

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}}\ \mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \leqslant \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T).$$

Спрямовуючи $m \to \infty$, одержуємо бажану збіжність.

Позначимо

$$A_\delta = \{\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta) \cup (r,r+\delta]\} = \bigcup_{k \geqslant 1} A_{k,\delta}.$$

Доведемо за індукцією, що

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_k) \to 0,\ \delta \to 0+. \qquad (4)$$

Для $k = 1$ маємо з леми 3, що

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_1) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

Здійснимо індуктивний перехід від $k-1$ до k. Маємо

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_{k-1}) \to 0,\ \delta \to 0+. \tag{5}$$

Потрібно довести, що

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} \in [\tau_{k-1}, \tau_k]) \to 0,\ \delta \to 0+. \tag{6}$$

На події $\bar{A}_\delta \cap \{\tau_{X_0,T}^{[l,r]} \in [\tau_{k-1}, \tau_k]\}$ виконано або

$$\tau_{X_0,T}^{[l,r]} = \tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} = \tau_{k-1},$$

або

$$\tau_{k-1} < \tau_{X_0,T}^{[l,r]} \leqslant \tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} \in [\tau_{k-1}, \tau_k]) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]} = \tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}) + \\ + \mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)).\end{aligned}$$

Перший доданок в правій частині останньої нерівності дорівнює нулю. Для другого доданку за тоеремою 3 маємо

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

Отже, ми довели (4).

Тепер запишемо для довільного $k > 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\ \tau_{X_0,T}^{l,r} < \tau_k) + \\ + \mathbf{P}(A_\delta) + \mathbf{P}(\tau_k \leqslant T).\end{aligned}$$

Тоді

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}}\ \mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\tau_k \leqslant T).$$

Спрямовуючи $k \to \infty$, одержуємо потрібне твердження.

Для другої збіжності єдиною відмінністю в доведенні є те, що при $\delta \to 0+$,

$$\begin{aligned}\{X(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in [l, l+\delta) \cup (r-\delta, r]\} \to \\ \to \{X(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in \{l\}, \{r\}\} = \\ = \{h_{\tau_k, X(\tau_k-)}(\xi_k) \in \{l\}, \{r\}\} \neq \varnothing.\end{aligned}$$

Запишемо

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(h_{\tau_k, X(\tau_k-)}(\xi_k) \in \{l\}, \{r\}) = \\ = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{1}\{h_{\tau_k, X(\tau_k-)}(\xi_k) \in \{l\}, \{r\}\} | F_{\tau_k-})) = \\ = \mathbf{E}(\int_{\mathbf{R}} h_{\tau_k, X(\tau_k-)}(y)\nu(dy)) = 0\end{aligned}$$

за умовою. □

Доведемо основну теорему про збіжність моментів виходу зі смуги.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* (Y1$_n$)–(Y8$_n$) *та* (U1$_n$)–(U3$_n$).
Тоді для довільного $T > 0$ *мають місце такі твердження:*
(а) для моментів виходу $\tau^{[l,r]}_{X_n,T}, n \geq 0$ *має місце збіжність*

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \tag{7}$$

(б) для моментів виходу $\tau^{[-\infty,r]}_{X_n,T}, n \geq 0$ *має місце збіжність*

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\tau^{[-\infty,r]}_{X_n,T} - \tau^{[-\infty,r]}_{X_0,T}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \tag{8}$$

Доведення. Доведемо пункт (а). Пункт (б) доводиться аналогічно.
Нехай $\delta \in (0, \frac{r-l}{2})$.
Позначимо

$$A_{\varepsilon,\delta} = \{|\tau^{[l-\delta,r+\delta]}_{X_0,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\} \cap \{|\tau^{[l+\delta,r-\delta]}_{X_0,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\},$$

$$B_{n,\delta} = \{\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| \leqslant \delta\}.$$

На події $B_{n,\delta}$ виконується

$$\tau^{[l+\delta,r-\delta]}_{X_0,T} \leqslant \tau^{[l,r]}_{X_n,T} \leqslant \tau^{[l-\delta,r+\delta]}_{X_0,T}.$$

Тоді, очевидно

$$B_{n,\delta} \cap A_{\varepsilon,\delta} \subset \{|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\}.$$

Отже,

$$\mathbf{P}(|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\bar{B}_{n,\delta}) + \mathbf{P}(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

За теоремою 1 маємо

$$\mathbf{P}(\bar{B}_{n,\delta}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

Спрямовуючи $\delta \to 0+$ та використовуючи лему 3, одержимо бажане твердження. □

Висновки

Нами одержано такі результати:

1) рівномірна збіжність за ймовірністю розвязків СДР зі стрибками за умов збіжності коефіцієнтів;

2) збіжність розвязків СДР зі стрибками у середньому будь-якого порядку $\gamma > 0$ за умов збіжності коефіцієнтів;

3) неперервність моментів виходу зі смуги розв'язків СДР зі стрибками;

4) збіжність моментів виходу зі смуги.

Література

1. Мішура Ю. С., Посашкова С.В., Шевченко Г.М. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неоднорідними коефіцієнтами та неліпшіцевою дифузією. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2008. — Т. 79. — С. 105–113.
2. Мішура Ю.С., Томашик В.В. Збіжність моментів виходу дифузійних процесів зі смуги. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2013. — Т. 88. — С. 95–105.
3. Зубченко В.П. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами, неліпшицевою дифузією та з пуассонівськими мірами. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2010. — Т. 82. — С. 30–42.
4. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения // Наукова думка, Киев. — 1968.
5. Kiyosi I., McKean H. P. Diffusion Processes and Their Sample Paths // Springer. — 1965.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения // Наукова думка, Киев. — 1982.
7. Novikov A. S. On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments. // An International journal of Probability and Stochastic processes. — 2007. — Т. 79. — С. 393–406.
8. Мороз А. Г., Шевченко Г.М. Задача оптимальної зупинки для процесів із незалежними приростами. // Український математичний вісник. — 2009. — Т. 6. — С. 126–134.
9. Li C. W. Almost sure convergence of stochastic differential equations of jump-diffusion type. // Progress in Probability. — 1995. — Т. 36. — С. 187–197.
10. Gal'chuk L. I. Strong uniqueness of solution of stochastic integral equations for semimartingale components. // Math Notes. — 1984. — Т. 35. — С. 157–161.
11. Protter P. Ctochastic Integration and Differential Equations // Springer-Verlag. — 1990.
12. Oksendal B., Sulem A. Applied stochastic control of jump diffusions // Springer-Verlag. — 2005.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 13.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.2:519.6

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ СПЕКТРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ДЕЯКИХ ПРОСТОРАХ ОРЛІЧА

А. О. Пашко

Резюме. В роботі розглянуто оцінки точності і надійності моделювання гауссових випадкових процесів, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів, у нормах деяких просторів Орліча. Моделі процесів зображуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів.

Вступ

В роботі досліджуються моделі гауссових випадкови процесів, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів. Використовується модифікація загальновідомого означення стохастичного інтеграла по випадковій мірі та приклади зображень випадкових процесів у вигляді цих інтегралів. Побудова таких інтегралів і дослідження умов збіжності в просторах Орліча розглядалась в роботі [1], в просторі неперервних функцій — в роботах [2]–[3].

При реальному моделюванні, зважаючи на точність представлення чисел, похибку методів побудови послідовності випадкових чисел із заданим законом розподілу, отримуються субгауссові випадкові процеси, або строго субгауссові випадкові процеси. Дослідження властивостей субгауссових випадкових величин та процесів представлені в роботі [4].

При моделюванні випадкових процесів для оцінки точності моделювання, як правило, використовуються оцінки моментів різниці між процесом та моделлю, або слабка збіжність розподілів моделі. Дослідження в цьому напрямі представлені в роботах [5]–[9]. В роботі [9] представлена широка бібліографія в даному напрямку.

В даній роботі досліджуються моделі, що наближають випадкові процеси з заданими точністю і надійністю в нормах просторів Орліча. Для побудови моделей використовуються спектральні зображення випадкових процесів [10]. Отримані результати узагальнюють результати [11]–[15], а в деяких випадках і покращують. Оцінка точності і надійності моделювання гауссових процесів та полів, що використовують спектральні зображення, систематизовані в роботі [16]. Всі результати отримані в припущенні, що випадкові процеси є строго субгауссовими. Це не впливає на загальний результат, оскільки гауссові випадкові процеси також є сторого субгауссовими процесами.

1. Оцінки швидкості збіжності випадкових інтегралів в нормах просторів Орлича

Нехай (T,ρ) — деякий метричний простір, $X=\{X(t),\, t\in T\}$ — випадковий процесс, який можна зобразити у вигляді

$$X(t)=\sum_{r=1}^{N}\int_0^{\infty} f_r(t,u)\,d\xi_r(u), \tag{1}$$

де випадкові процеси $\xi_r(u), r=1,...,N$ належать класу I_a^b для будь-яких $0\le a<b<+\infty$ [1]. Інтеграли $\int_0^{\infty} f_r(t,u)d\xi_r(u)$ розглядаються як границя за ймовірністю інтегралів $\int_0^b f_r(t,u)d\xi_r(u)$, коли $b\to\infty$. Інтеграли $\int_a^b \phi(u)d\xi(u)$ визначені так:

$$\int_a^b \phi(u)d\xi(u)=\phi(u)\xi(u)\mid_a^b-\int_a^b \xi(u)d\phi(u),$$

де $\phi(u)$ — неперервна функція обмеженої варіації на $[a,b]$, $\xi(u)$ — випадковий процес на $[a,b]$, $\int_a^b \xi(u)d\phi(u)$ — інтеграл Лебега по узагальненій мірі, що породжена функцією $\phi(u)$. Властивості таких інтегралів вивчались в роботах [1]–[3]. Введемо такі позначення:

$$X_\Lambda(t)=\sum_{r=1}^{N}\int_{\Lambda}^{\infty} f_r(t,u)\,d\xi_r(u),\qquad \Lambda>0, \tag{2}$$

$$X_a^b(t)=\sum_{r=1}^{N}\int_a^b f_r(t,u)d\xi_r(u),\qquad 0\le a<b, \tag{3}$$

$$R_a^b(t,\alpha)=\sum_{r=1}^{N}\int_a^b \alpha(u)f_r(t,u)d\xi_r(u), \tag{4}$$

де $\alpha=\{\alpha(u),u\ge 0\}$ деяка неперервна зліва монотонно неспадна функція така, що $\alpha(u)\to\infty$ при $u\to\infty$.

Означення 1. Нехай $\xi_r=\{\xi_r(u),u\ge 0\}$, $r=1,\dots,N$, сумісно строго субгауссові випадкові процеси, $E|\xi_r(t)\xi_r(s)|<\infty$, $t,s\in T$, $r=1,\dots,N$, а функції $f_r=\{f_r(t,u),\ t\in T,\ u\ge 0\}$ такі, що $f_r(t,u)$ неперервна по t та неперервно диференційована по $u\ge 0$. Такий процес X називається регулярним строго субгауссовим процесом.

Випадкові процеси $X(t)$, $X_\Lambda(t)$, $X_a^b(t)$, $t\in T$ є строго субгауссовими процесами.

Нехай $(T,\mathfrak{A},\mu)$ — вимірний простір, де $\mathfrak{A}$ — борелєвська σ — алгебра на (T,ρ). $L_U(T)$ — простір Орлича, що породжується C — функцією $U=\{U(x),x\in R^1\}$.

Означення 2. Сім'я функцій $g=\{g(t,u),t\in T,u>0\}$ належить класу $D_U(c)$, якщо всі функції $g_u=\{g(t,u),t\in T\}$, $u>0$, належать простору

Орлича $L_U(T)$ та існує монотонно неспадна функція $c(u) > 0$, $u \geq 0$, що для функції $g(u,\cdot)$ виконується нерівність

$$\|g(u,\cdot)\|_{L_U} \leq c(u)\|g(u,\cdot)\|_{L_2}.$$

Означення 3. Регулярний строго субгауссовий процес належить класу $D_U(c)$, якщо з ймовірністю одиниця сім'я випадкових процесів $R_a^u(t,\alpha)$, $0 \leq a < u$, належить класу $D_U(c)$ для будь-якої функції $\alpha(u)$.

Лема 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ регулярний строго субгауссовий випадковий процес з класу $D_U(c)$. Тоді для будь-яких $0 \leq a < b < \infty$, $0 \leq s < 1$, має місце нерівність*

$$P\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b)^2}\right\}, \tag{5}$$

де

$$V_a^b = \frac{\left(E\left\|R_a^b(t,\alpha)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} c(b)}{\alpha(b)} + \int_a^b c(u)\left(E\left\|R_a^u(t,\alpha)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right).$$

Доведення. Із означення інтеграла для деякого $0 < d \leq a$ має місце рівність

$$\int_a^b f_r(t,u)\,d\xi_r(u) = \frac{1}{\alpha(b)}\int_d^b f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v) - \frac{1}{\alpha(a)}\int_d^a f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v) +$$
$$+ \int_a^b \left(\int_d^u f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v)\right) d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right).$$

З цієї рівності зразу ж випливає рівність

$$X_a^b(t) = \frac{R_d^b(t,\alpha)}{\alpha(b)} - \frac{R_d(t,\alpha)}{\alpha(a)} + \int_a^b R_d^u(t,\alpha)\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right)$$

та такі співвідношення

$$\|X_a^b(t)\|_{L_U} = \frac{1}{\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_U} + \frac{1}{\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_U} +$$
$$+ \int_a^b \|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_U}\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) \leq$$
$$\leq \frac{c(b)}{\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2} + \frac{c(a)}{\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2} + \int_a^b c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right).$$

Виберемо деякі числа $W(a,b) > 0$, $\delta(b) > 0$, $\delta(a) > 0$, $\delta(a,b) > 0$, $\delta(b) + \delta(a) + \delta(a,b) = 1$, які точно будуть визначені далі.

Тоді з нерівності Гельдера та останньої нерівності отримаємо співвідношення

$$E\exp\left\{\frac{\left\|X_a^b(t)\right\|_{L_U}^2}{W^2(a,b)}\right\} \leq E\exp\left\{\frac{1}{W^2(a,b)}\left(\frac{\delta(b)c(b)}{\delta(b)\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2} + \right.\right. \tag{6}$$
$$\left.\left. + \frac{\delta(a)c(a)}{\delta(a)\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2} + \frac{\delta(a,b)}{\delta(a,b)}\int_a^b c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right)\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq\left(E\exp\left\{\left(\frac{c(b)\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(b)\alpha(b)W(a,b)}\right)^2\right\}\right)^{\delta(b)}\cdot\left(E\exp\left\{\left(\frac{c(a)\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a)\alpha(a)W(a,b)}\right)^2\right\}\right)^{\delta(a)}\times$$

$$\times\left(E\exp\left\{\left(\int_a^b\frac{c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\right)^2\right\}\right)^{\delta(a,b)}.$$

Нехай $p(u)>0$ така функція, що

$$\int_a^b p(u)\,d\big(-\frac{1}{\alpha(u)}\big)=1.$$

Позначимо $k(u)=\frac{c(u)}{\delta(a,b)W(a,b)}$. Тоді з нерівності Коші випливає, що

$$E\exp\left\{\left(\int_a^b k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\right)^2\right\}\leq$$

$$\leq\exp\left\{\int_a^b\ln\left(E\exp\left\{\left(\frac{k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{p(u)}\right)^2\right\}\right)p(u)\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\right\}.$$

Покладемо для $0<s<1$

$$\delta(a,b)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}W(a,b)}\int_a^b c(u)\big(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big),$$

$$p(u)=\frac{\sqrt{2}c(u)\big(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\delta(a,b)W(a,b)}.$$

При цьому $\int_a^b p(u)\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)=1$.

Отже, при такому виборі $\delta(a,b)$ та $p(u)$ маємо

$$E\exp\left\{\left(\frac{k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{p(u)}\right)^2\right\}=E\exp\left\{\frac{s\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2}{2E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2}\right\}\leq\frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

та

$$E\exp\left\{\left(\int_a^b\frac{c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\,d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\right)^2\right\}\leq\frac{1}{\sqrt{1-s}}.\tag{7}$$

Виберемо числа таким чином

$$\delta(a)=\frac{\sqrt{2}c(a)\big(E\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\alpha(a)W(a,b)},$$

$$\delta(b)=\frac{\sqrt{2}c(b)\big(E\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\alpha(b)W(a,b)},$$

$$W(a,b)=\sqrt{\frac{2}{s}}V_a^b(d).$$

Тоді має місце нерівність

$$E\exp\left\{\left(\frac{c(b)\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(b)\alpha(b)W(a,b)}\right)^2\right\}=E\exp\left\{\frac{s\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2}{2E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2}\right\}\leq\frac{1}{\sqrt{1-s}}.\tag{8}$$

Аналогічно отримуємо оцінку

$$E\exp\left\{\left(\frac{c(u)\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a)\alpha(a)W(a,b)}\right)^2\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}. \tag{9}$$

З нерівності Чебишева маємо

$$P\big\{\|X_a^b(t)\|_{L_U}>\varepsilon\big\}\le E\exp\left\{\frac{s\|X_a^b(t)\|_{L_U}^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\}.$$

Покладемо $d=a$ і з (6), (7), (8) та (9) отримуємо отримаємо оцінку (5). □

Теорема 1. *Нехай $X=\{X(t),t\in t\}$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес з класу $D_U(c)$. Якщо для деякої функції $\alpha=\{\alpha(u),u>0\}$ такої, що $\alpha(u)>0$, при $u\ge 0$, $\alpha(u)$ монотонно не спадає, $\alpha(u)\to\infty$ при $u\to\infty$ та існує таке $a\ge 0$, що виконуються умови:*

$$\int_a^\infty c(u)\big(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac12}\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right)<\infty, \tag{10}$$

$$\frac{c(b)\big(E\|R_a^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac12}}{\alpha(b)}\to 0\quad при\quad b\to\infty, \tag{11}$$

тоді випадковий процес X з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\varepsilon>V_a$ має місце нерівність

$$P\big\{\|X_a(t)\|_{L_U}>\varepsilon\big\}\le\exp\left\{\frac12\right\}\frac{\varepsilon}{V_a}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2V_a^2}\right\}, \tag{12}$$

де

$$V_a=\int_a^\infty c(u)\big(E\|R_a^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac12}\,d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right).$$

Доведення. Якщо виконуються умови (10) та (11), то при $a\to\infty$, $b\to\infty$ маємо $V_a^b\to 0$. Отже, з леми 1 випливає, що при цьому $\|X_a(t)\|_{L_U}\to 0$ за ймовірністю. Оскільки тоді існують підпослідовності $a_n<b_n$, що $\|X_{a_n}^{b_n}(t)\|_{L_U}\to 0$ при $a_n\to\infty$ з ймовірністю одиниця, то X з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$. З нерівності (5) та леми Фату випливає нерівність

$$P\big\{\|X_a(t)\|_{L_U}>\varepsilon\big\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a)^2}\right\}. \tag{13}$$

Нерівність (12) випливає з (13), якщо праву частину (13) мінімізувати по s. □

2. Точність та надійність моделювання випадкових процесів з класу $D_U(c)$

Нехай $X=\{X(t),t\in T\}$ — регулярний строго субгауссовий процес, що має зображення (1), де ξ_r, $r=1,\dots,N$, сумісно строго субгауссові випадкові процеси.

Надалі роглядаємо випадкові процеси з класу $D_U(c)$. Для таких процесів розроблено алгоритм побудови моделі, що наближає процес із заданими точністю та надійністю.

Означення 4. Нехай $\Lambda > 0$, D_Λ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, $D_\Lambda\colon 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < u_n = \Lambda$. Випадковий процес $X_{n,\Lambda} = \{X_n(t,\Lambda), t \in T\}$, де

$$X_n(t,\Lambda) = \sum_{r=1}^{N}\sum_{i=0}^{n-1} f_r(t,u_i)(\xi_r(u_{i+1}) - \xi_r(u_i))$$

називається *апроксимаційною моделлю процесу* X (*A-моделлю*).

Отже, A-модель процесу X можна отримати змоделювавши суму

$$\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=0}^{n-1} f_r(t,u_i)\zeta_{r,i},$$

де $\zeta_{r,i}$, $r = 1,2,\ldots,N$, $i = 0,\ldots,n-1$, — сім'я строго субгауссових випадкових величин з відомими коваріаціями $E\zeta_{r,i}\zeta_{r_1,i_1}$.

Нехай функції $f_r = \{f_r(t,u), t \in T, u \geq 0\}$ — це такі функції, що $f_r(z,u)$, як функції комплексної змінної z, є цілими функціями експоненціального типу $\Delta(u) > 0$, обмеженими на дійсній осі. Тоді функції $R_a^b(t,\alpha)$ є такі, що функції $R_a^b(z,\alpha)$, як функції комплексної змінної z, при всіх $a \leq b$ з ймовірністю одиниця є функціями експоненціального типу $\Delta(b)$, обмеженими на дійсній осі. Якщо C — функція Орліча $U(x)$ така, що функція $\sqrt{U(x)}$ — опукла, то має місце нерівність [1]

$$\|R_a^b(t,\alpha)\|_{L_U} \leq c(u)\|R_a^b(t,\alpha)\|_{L_2},$$

де

$$c(u) = \inf_{h>0}\left\{h^{-\frac{1}{2}}\left(U^{(-1)}\left(\frac{1}{h}\right)\right)^{-1}(1 + h\Delta(u))\right\}. \tag{14}$$

Це означає, що випадковий процес X належить класу $D_U(c)$ з $c(u)$, визначеною в (14).

Теорема 2. *Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ — регулярний субгауссовий випадковий процес із класу $D_U(c)$, для якого виконуються умови (10) та (11) для будь-якого $a > 0$. Тоді випадковий процес $X_{n,\Lambda}$ є A-моделлю, що наближає випадковий процес X з надійністю α, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\delta > 0$ у $L_U(T)$, якщо для деякого γ, такого, що $0 < \gamma < 1$ та при $V_\Lambda < \delta(1-\gamma)$ виконується нерівність*

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \gamma\delta\} + \tag{15}$$

$$+ \exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta(1-\gamma)}{V_\Lambda}\exp\left\{-\frac{\delta^2(1-\gamma)^2}{2V_\Lambda^2}\right\} \leq \alpha,$$

де

$$V_\Lambda = \int_\Lambda^\infty c(u)(E\|R_\Lambda^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2)^{\frac{1}{2}}d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right),$$

Доведення. Оскільки $X(t) = X_0^\Lambda(t) + X_\Lambda(t)$, $X_\Lambda(t)$ визначений у (2), то

$$\|X(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} \le \|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} + \|X_\Lambda(t)\|_{L_U},$$

та для будь-яких $\delta > 0$ та $0 < \gamma < 1$ має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le$$

$$\le P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\gamma\} + P\{\|X_\Lambda(t)\|_{L_U} > \delta(1-\gamma)\}.$$

Тепер твердження теореми випливає з теореми 1, якщо в нерівності (12) покласти $a = \Lambda$ та мінімізувати по s. □

A-модель $X_{n,\Lambda}$ також буде шуканою моделлю, якщо у (15) замість $P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\}$ підставити будь-які оцінки зверху для цієї ймовірності.

Має місце

Лема 2. *Нехай для будь-яких Λ та n*

$$\| X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda) \|_{L_U} \le c(\Lambda) \| X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda) \|_{L_2},$$

тоді для $\delta > c(\Lambda)(B_{n,\Lambda})^{\frac{1}{2}}$ має місце оцінка

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{c(\Lambda)(B_{n,\Lambda})^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ - \frac{\delta^2}{2B_{n,\Lambda}c^2(\Lambda)}\right\},$$

де

$$B_{n,\Lambda} = \int_T E\big(X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\big)^2 d\mu(t).$$

Доведення. Твердження лема випливає з нерівності [1]

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le P\left\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_2} > \frac{\delta}{c(\Lambda)}\right\}.$$

□

3. Точність та надійність моделювання стаціонарних випадкових процесів з класу $D_U(c)$

Нехай $X = \{X(t), t \in R\}$ стаціонарний центрований процес, $EX(t+\tau)X(t) = B(\tau) = \int_0^\infty \cos u\tau \, dF(u)$, де $F(u)$ — спектральна функція процесу. Випадковий процес X має зображення.

$$X(t) = \int_0^\infty \cos(tu)\, d\xi_1(u) + \int_0^\infty \sin(tu)\, d\xi_2(u),$$

де $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для довільних $0 \le u_1 < u_2$

$$E(\xi_1(u_2) - \xi_1(u_1))^2 = E(\xi_2(u_2) - \xi_2(u_1))^2 = F(u_2) - F(u_1).$$

Якщо $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ сумісно строго субгауссові вимірні випадкові процеси, то $X(t)$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес.

Тоді A-модель такого процесу має вигляд

$$X_n(t,\Lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}\big(\cos(tu_i)\xi_{1i}+\sin(tu_i)\xi_{2i}\big), \tag{16}$$

де $\xi_{1i},\xi_{2i}, i=0,1,...,n-1,$ — некорельовані або незалежні строго субгауссові величини такі, що $E\xi_{1i}^2=E\xi_{2i}^2=F(u_{i+1})-F(u_i)$.

Розглянемо випадкові процеси X_v^r, $v>0, r>\frac{1}{2}$, вигляду

$$X_v^r=\Big\{X(t)\Big(\frac{sin(vt)}{vt}\Big)^r,\ t\in R\Big\}.$$

Позначимо

$$X_{v,\Lambda}^r=\Big\{X_\Lambda(t)\Big(\frac{sin(vt)}{vt}\Big)^r,\ t\in R\Big\},$$

де

$$X_\Lambda(t)=\int_\Lambda^\infty cos(ut)d\xi_1(u)+\int_\Lambda^\infty sin(ut)d\xi_2(u).$$

Теорема 3. *Нехай $L_U(R)$ — це простір Орліча, що породжується C-функцією $U(x)$ такою, що функція $\sqrt{U(x)}$ опукла, покладемо*

$$c(u)=\inf_{h>0}\Big\{h^{-\frac{1}{2}}\Big(U^{(-1)}\big(\frac{1}{h}\big)\Big)^{-1}(1+h(u+rv))\Big\}. \tag{17}$$

Нехай існує функція $\alpha=\{\alpha(u), u\ge 0\}$, що $\alpha(u)>0, u\ge 0, \alpha(u)$ — монотонно не спадає та $\alpha(u)\to\infty$ при $u\to\infty$, для якої збігається інтеграл

$$\int_0 c(u)\Big(\int_0^u\alpha^2(v)dF(v)\Big)^{\frac{1}{2}}d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)<\infty. \tag{18}$$

Тоді випадковий процес X_v^r з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(R)$ та для будь-якого $\Lambda>0$ при $\epsilon>V_\Lambda$ має місце нерівність

$$P\big\{\|X_{v,\Lambda}^r(t)\|_{L_U(R)}>\epsilon\big\}\le\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\frac{\epsilon}{V_\Lambda}\exp\Big\{-\frac{\epsilon^2}{2V_\Lambda^2}\Big\}, \tag{19}$$

де

$$V_\Lambda=\int_\Lambda^\infty c(u)\Big(\int_\Lambda^u\alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}}d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\big(v^{-1}I_r\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_r=\int_{-\infty}^\infty\Big|\frac{sin(t)}{t}\Big|^{2r}dt.$$

Доведення. Доведення випливає з теореми 1. Дійсно, випадковий процес X_v^r — це регулярний строго субгауссовий процес, що належить класу $D_U(c)$, де $c(u)$ визначається формулою (17). У цьому разі, згідно з теоремою 1

$$R_a^u(t,\alpha)=\int_a^u\alpha(u)a_v(t)cos(ut)d\xi_1(u)+\int_a^u\alpha(u)a_v(t)sin(ut)d\xi_2(u),$$

де $a_v(t)=\big(\frac{sin(tv)}{tv}\big)^r$.

Отже,

$$E(R_a^u(t,\alpha))^2 = (a_v(t))^2 \int_a^u \alpha^2(u)dF(u),$$

$$E\|R_a^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(a_v(t))^2 dt \int_a^u \alpha^2(u)dF(u) = v^{-1}I_r \int_a^u \alpha^2(u)dF(u).$$

Умова (10) теореми 1 має вигляд

$$\int_a^{\infty} c(u)\Big(\int_a^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) < \infty \tag{20}$$

а вона виконується для будь-якого $a \geq 0$, коли виконується умова (18). Умова (11) виконується, коли

$$\frac{c(b)}{\alpha(b)}\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \tag{21}$$

при $b \to \infty$.

Тоді мають місце співвідношення

$$\frac{c(b)}{\alpha(b)}\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} = c(b)\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} \int_b^{\infty} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \leq$$

$$\leq \int_b^{\infty} c(u)\Big(\int_a^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big). \tag{22}$$

З (20) випливає, що останій інтеграл у (22) прямує до нуля при $b \to \infty$, тобто (21) виконується. Нерівність (17) тепер випливає з нерівності (12) при $a = \Lambda$ та мінімізації по s. □

Розглянемо випадок, коли $T = [0,T]$, $T > 0$, $L_U(T)$ — простір Орліча, що породжується на T C — функцією U. Покладемо $v = \frac{1}{T}$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\Lambda > 0$, $r > \frac{1}{2}$ при $\epsilon > \frac{V_{\Lambda,T}}{(sin(1))^r}$ має місце нерівність*

$$P\big\{\|X_\Lambda(t)\|_{L_U(T)} > \epsilon\big\} \leq \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\frac{\epsilon(sin(1))^r}{V_{\Lambda,T}}\exp\Big\{-\frac{\epsilon^2(sin(1))^{2r}}{2V_{\Lambda,T}^2}\Big\}, \tag{23}$$

де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}}I_r^{\frac{1}{2}}\int_{\Lambda}^{\infty} c_T(u)\Big(\int_{\Lambda}^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big),$$

$c_T(u)$ дорівнює $c(u)$, що визначено в (17), при $v = T^{-1}$.

Доведення. Оскільки при $|vt| \leq 1$ має місце нерівність $\big|\frac{sin(vt)}{vt}\big|^r \geq (sin(1))^r$, то при $0 \leq t \leq T$

$$|X_\Lambda(t)| \leq (sin(1))^{-r}|X^r_{\frac{1}{T},\Lambda}(t)|.$$

Тепер легко довести, що

$$\|X_\Lambda(t)\|_{L_U(T)} \leq (sin(1))^{-r}\|X^r_{\Lambda,\frac{1}{T}}(t)\|_{L_U(R)}.$$

Тоді нерівність (23) випливає з нерівності (19). □

Умова (18) при $v = T^{-1}$ виконується, коли існує функція $\alpha = \{\alpha(u), u \geq 0\}$ така, що $\alpha(u) > 0, \alpha(u)$ — монотонно не спадає при $u > 0$, $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ і збігається інтеграл

$$\int_0^\infty c_T(u) d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) = \int_0^\infty c_T(u) \frac{d\alpha(u)}{\alpha^2(u)} < \infty,$$

для якої

$$\int_0^\infty \alpha^2(u) dF(u) < \infty.$$

Тоді має місце нерівність (23), де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}} I_r^{\frac{1}{2}} \int_\Lambda^\infty c_T(u) d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \Big(\int_\Lambda^\infty \alpha^2(u) dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 5. *Нехай $L_U(T)$ — це простір Орліча, що породжується на $T = [0, T]$ C — функцією $U(x)$ такою, що функція $\sqrt{U(x)}$ опукла, $c_T(u)$ задано в (17) при $v = T^{-1}$. Нехай для випадкового процесу X виконується умова*

$$\int_0^\infty c_T(u) \frac{dF(u)}{(F(\infty) - F(u))^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

Тоді з ймовірністю одиниця випадковий процес X належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\Lambda > 0$, $r > \frac{1}{2}$ при $\epsilon > \frac{V_{\Lambda,T}}{(sin(1))^r}$ має місце нерівність (23), де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}} I_r^{\frac{1}{2}} \int_\Lambda^\infty c_T(u) \Big(\frac{1}{F(\infty) - F(u)} - \frac{1}{F(\infty) - F(\Lambda)}\Big)^{\frac{1}{2}} dF(u). \qquad (24)$$

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 4. Покладемо $\alpha(u) = \frac{F(\infty)}{F(\infty) - F(u)}$, тоді

$$\int_\Lambda^u \alpha^2(u) dF(u) = \int_\Lambda^u \frac{F^2(\infty)}{(F(\infty) - F(u))^2} dF(u) =$$

$$= F^2(\infty) \Big(\frac{1}{F(\infty) - F(u)} - \frac{1}{F(\infty) - F(\Lambda)}\Big),$$

а

$$d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) = \frac{dF(u)}{F(\infty)}.$$

Отже, $V_{\Lambda,T}$ визначається за формулою (24). Оскільки при таких $\alpha(u)$

$$\int_0^\infty c_T(u) \Big(\int_0^u \alpha^2(u) dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty c_T(u) \frac{dF(u)}{(F(\infty) - F(u))^{\frac{1}{2}}} < \infty,$$

то виконується умова (18). □

Умові опуклості $\sqrt{U(x)}$ задовільняють наступні C — функції

$$U(x) = A|x|^p, \quad x \in R, \quad A > 0, \quad p > 2,$$

$$U(x) = A(\exp(|x|^p) - 1), \quad x \in R, \quad A > 0, \quad p \geq 2,$$

$$U(x) = A|x|^p \ln(|x| + 1), \quad x \in R, \quad A \geq 1, \quad p \geq 2.$$

На основі отриманих результатів визначаються параметри A-моделі. Для заданих $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < 1$ та $\delta > 0$ на основі теореми 2 та леми 2 визначаємо параметри $\Lambda > 0$ та розбиття D_Λ. Використання параметра γ дозволяє знаходити баланс між Λ та n. Перевагу потрібно віддавати тим значенням, де менше n. У випадку, коли процес стаціонарний, для визначення параметра Λ використовуються результати теорем 3–5, в залежності від області визначення випадкового процесу.

Література

1. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1989. — 40. — С. 37–44.
2. Пашко А. А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов. // Теория вероятн. и мат. статистика.— 1992. – 46. — С. 124–132.
3. Пашко А. А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, Вып. 4. — С. 793–798.
4. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К:ТВиМС, 1998. – 289 с.
5. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — М: Наука, 1982. – 296 с.
6. Prigarin S. M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht:VSP, 2001. – 195p.
7. Prigarin S. M., Martin F., Winkler G. Numerical models of binary random fields on the basis of thresholds of Gaussian functions. // СибЖВМ. — 2004. — Т. 5, №2. — С. 57—67.
8. Prigarin S. M., Winkler G. Numerical solution of boundary value problems for stochastic differential equations on the basis of the Gibbs sampler. // Proc. ICCM-2002, Novosibirsk: ICMMG Publish. — 2002. — Pt. 1. — P. 254–258.
9. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск, 2005. — 259с.
10. Ядренко М. Й. Спектральная теория случайных полей. — К.: Вища школа, 1980. — 208с.
11. Пашко А. О. Чисельне моделювання гауссових однорідних випадкових полів. // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, №1. — С. 116–120.
12. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів I. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 61. — С. 61–74.
13. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів II. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 62. — С. 61–74.
14. Пашко А. О. Чисельне моделювання субгауссових випадкових полів. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. —2006. — Вип. №1. — С. 35–39.

15. Пашко А. О. Спектральні моделі гауссових випадкових процесів. // VI міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". Матеріали конференції. 5–6 вересня 2013. Київ. — 2013. — С. 177–180.
16. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових полів. — К.: Задруга, 2007. – 232 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.10.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №4(114)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.91

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Г. Руткас, М. С. Филипковская

Резюме. Для математических моделей двух нелинейных радиотехнических фильтров устанавливаются условия гладкой детерминированной эволюции состояний на бесконечном интервале времени. Выводы опираются на доказанную авторами теорему существования и единственности глобального решения дифференциально-алгебраического уравнения, в котором нелинейная функция может не удовлетворять глобальному условию Липшица. Указанная теорема и проверка ее условий в двух задачах настоящей статьи используют метод продолжения решений с помощью дифференциальных неравенств с функциями Ляпунова и Ла-Салля.

Введение

В предыдущей статье авторов [1] доказана глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения, основанная на спектральном анализе характеристического пучка матриц линейной части уравнения и методе продолжения решения обыкновенного дифференциального уравнения с помощью дифференциальных неравенств с функциями Ляпунова и Ла-Салля.

Дифференциально-алгебраические уравнения (см. (4)), не разрешенные относительно производных, возникают в теории электрических цепей, радиотехнике и электронике, математической экономике, робототехнике, дескрипторных системах управления [2, 3, 4, 5, 6].

В настоящей статье мы проверяем выполнения условий указанной глобальной теоремы для вырожденных систем дифференциально-алгебраических уравнений двух нелинейных радиотехнических фильтров, характеризуя, с одной стороны, динамику этих физических устройств, с другой стороны — демонстрируя эффективность применения абстрактной теоремы из [1].

1. Модель импедансного нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим импедансную задачу для четырехполюсного нелинейного радиотехнического фильтра с нелинейными сопротивлениями φ_1 и φ_2, проводимостями h_1 и h_2, линейными сопротивлениями r_1 и r_2, проводимостью

g и инерционными элементами — индуктивностью L и емкостью C (см. рис. 1). Параметры L, C, r_1, r_2, g являются положительными и вещественными, токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ заданы и непрерывны при $t \geq 0$.

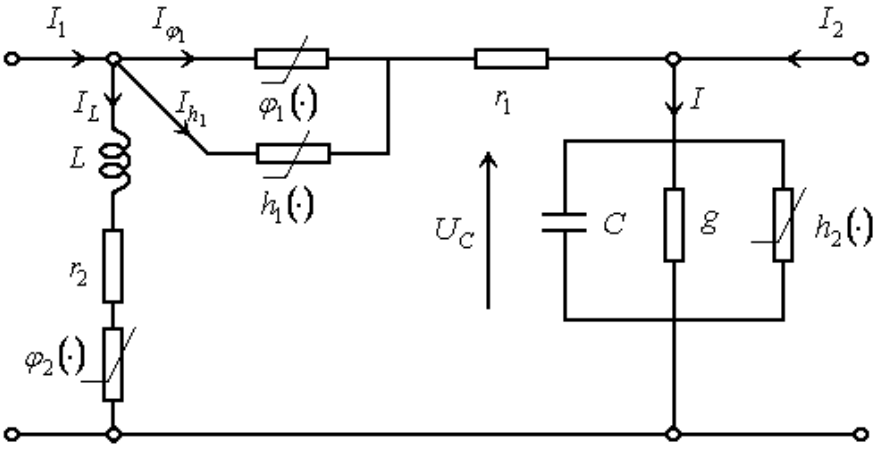

Рис. 1. Схема электрической цепи четырехполюсника

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$I_1 = I_{\varphi_1} + I_{h_1} + I_L, \quad I_L = I_{r_2} = I_{\varphi_2}, \quad I_{r_1} = I_{\varphi_1} + I_{h_1},$$

$$I = I_2 + I_{r_1}, \quad I = I_C + I_g + I_{h_2},$$

$$U_{\varphi_1} = U_{h_1}, \quad U_C = U_g = U_{h_2}, \quad U_{\varphi_2} + U_{r_2} + U_L - U_{\varphi_1} - U_{r_1} = U_C.$$

Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом:

$$U_{r_k} = r_k I_{r_k}, \quad U_{\varphi_k} = \varphi_k\left(I_{\varphi_k}\right), \quad I_{h_k} = h_k\left(U_{h_k}\right),\ k = 1,\ 2; \quad I_g = g u_g,$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C\frac{dU_C}{dt}.$$

С помощью элементарных преобразований из приведенных уравнений легко исключаются все переменные, кроме $x_1 = I_{\varphi_1}$, $x_2 = I_L$, $x_3 = U_C$ и заданных токов I_1, I_2. Эти переменные удовлетворяют системе из трех уравнений:

$$L\frac{d}{dt}x_2 - r_1\, x_1 + r_2\, x_2 - x_3 = \varphi_1\left(x_1\right) + r_1\,\gamma\left(x_1\right) - \varphi_2\left(x_2\right), \tag{1}$$

$$C\frac{d}{dt}x_3 - x_1 + g\, x_3 = I_2(t) + \gamma\left(x_1\right) - h_2\left(x_3\right), \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma\left(x_1\right), \tag{3}$$

где $\gamma(x_1) = h_1\left(\varphi_1(x_1)\right)$.

Векторная форма системы имеет вид вырожденного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t, x), \tag{4}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $h_2(x_3)$, $\gamma(x_1) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда $f(t,x) \in C\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^3$. Характеристический пучок $\lambda A + B$ является регулярным, поскольку

$$\det(\lambda A + B) = (\lambda C + g)(\lambda L + r_2 + r_1) + 1 \not\equiv 0$$

и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= (\lambda A + B)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\det(\lambda A + B)} \begin{pmatrix} -(\lambda C + g) & -1 & (\lambda C + g)(\lambda L + r_2) \\ \lambda C + g & 1 & r_1(\lambda C + g) + 1 \\ -1 & \lambda L + r_2 + r_1 & \lambda L + r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ограничена при больших $|\lambda|$.

Вычислим используемые в [1] спектральные проекторы P_k, Q_k, $k = 1, 2$ [7], операторы $G = AP_1 + BP_2$ [8], G^{-1} и проекции $P_k x$ вектора x на спектральные подпространства $X_k = P_k\mathbb{R}^3$ $(k = 1, 2)$, которые в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ представимы в виде:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; G^{-1} = \begin{pmatrix} -L^{-1} & 0 & 1 - r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix},$$

$$z = P_1 x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \; u = P_2 x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$Q_1 f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) + r_1 I_1(t) \\ -h_2(x_3) + I_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q_2 f(t,x) = \begin{pmatrix} r_1(\gamma(x_1) - I_1(t)) \\ \gamma(x_1) - I_1(t) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 = \begin{pmatrix} r_1(\gamma'(x_1) + 1) & r_1(\gamma'(x_1) + 1) & 0 \\ \gamma'(x_1) + 1 & \gamma'(x_1) + 1 & 0 \\ -\gamma'(x_1) - 1 & -\gamma'(x_1) - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma'(x_1) = \dfrac{d\gamma(x_1)}{dx_1}$.

Проверим выполнение условий теоремы 1 из статьи [1].

Уравнение $BP_2x = Q_2 f(t,x)$ эквивалентно полученному выше уравнению (3), которое можно записать в виде

$$u_1 = I_1(t) - \gamma(z_1 + u_1). \tag{5}$$

Согласно условию (13) из [1] необходимо, чтобы $\forall t \geq 0\ \forall z \in X_1\ \exists u \in X_2$ такое, что выполнено (5) или, что равносильно, $\forall t \geq 0\ \forall z_1 \in \mathbb{R}\ \exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (5).

В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_2 f(t, z+u)\right) - B\right] P_2 = \left(\gamma'(z_1+u_1)+1\right)\begin{pmatrix} r_1 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Найдем ограничения, при которых для любых $u = v,\ u = w \in X_2$, удовлетворяющих (5), сужение функции (6) на X_2 является *базисно обратимым оператором* (см. определение 3 из [1]) на выпуклой оболочке $conv\{v,w\} \subset X_2$. Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2\mathbb{R}^3$ является единицей в Y_2, *аддитивным разложением единицы в* Y_2 (см. определение 2 из [1]) будет сужение Θ_1 проектора Q_2 на одномерное подпространство его образов. Сужение Λ оператора $\hat{\Lambda} = Q_2\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \hat{\Phi}(\tilde{u})$, где $\tilde{u} \in conv\{v,w\}$ и $u = v,\ u = w \in X_2$ удовлетворяют (5), на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2, если $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1,\ z_1 \in \mathbb{R}$. Действительно, при выполнении последнего условия из равенства $\hat{\Lambda}u = 0,\ u \in X_2$, следует $u = 0$. Тогда Λ является базисно обратимым оператором на $conv\{v,w\} \subset X_2$.

Представим $Q_1 f(t,x)$ в виде (15) из [1]:

$$Q_1 f(t,x) = S_1(t)\, P_1 x + \psi(t,x) + \Pi(x)\, e(t),$$

где $S_1(t)$ — нулевая матрица, $\Pi(x)$ — единичная матрица (для которой условие ограниченности (16) из [1] выполняется автоматически),

$$e(t) = \begin{pmatrix} r_1 I_1(t) \\ I_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \psi(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ -h_2(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $G^{-1}\psi(t,x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}\left[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)\right] \\ L^{-1}\left[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)\right] \\ -C^{-1}h_2(x_3) \end{pmatrix}$.

Выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H = H^* > 0$, $HP_1x = \begin{pmatrix} -Lx_2 \\ Lx_2 \\ Cx_3 \end{pmatrix}$, $\left(HP_1x,\, G^{-1}\psi(t,x)\right) = 2\left[\varphi_1(x_1)\, x_2 - \varphi_2(x_2)\, x_2\right] - h_2(x_3)\, x_3$.

Далее найдем ограничения на функции $\varphi_k,\ h_j$, при которых для любого конечного интервала $0 \leq t \leq T$ найдется $R = R_T > 0$ такое, что если $\|P_1x\| = \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$ и выполнено (3), то $\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) \leq 0$. В этом случае выполняется условие (17) теоремы 1 из [1].

Пусть $M = \max\limits_{t\in[0,T]} I_1(t)$, тогда, учитывая (3), получим

$$\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) = 2\left[\varphi_1(x_1)\left(I_1(t) - \gamma(x_1) - x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3 \le$$

$$\le 2\left|M\varphi_1(x_1)\right| - 2\left[\varphi_1(x_1)\left(\gamma(x_1) + x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3.$$

Искомое условие на функции φ_k, h_j таково: для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$\begin{gathered} 2\left|M\varphi_1(x_1)\right| - 2\left[\varphi_1(x_1)\left(\gamma(x_1) + x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3 \le 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T. \end{gathered} \tag{7}$$

Итак, пусть функции нелинейных сопротивлений и проводимостей $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $h_2(x_3)$, $\gamma(x_1) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и внешние токи $I_1(t)$, $I_2(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ удовлетворяют следующим условиям: $\forall t \ge 0\ \forall z_1 \in \mathbb{R}\ \exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (5); $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \ne -1$ $(z_1 \in \mathbb{R})$ при любом $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$ и любых v, $w \in X_2$, удовлетворяющих (5) при $u = v$, $u = w$; для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что справедливо (7). Тогда по теореме 1 из [1] для всякой начальной точки $\left(t_0, x^0\right) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (3), существует единственное решение $x(t)$ уравнения (4) на полуоси $t_0 \le t < \infty$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3,\ \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3,\ h_2(y) = \alpha_3 y^3,\ \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9, \tag{8}$$

$\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$. Заметим, что кубические зависимости в нелинейных сопротивлениях и проводимостях часто встречаются в реальных радиотехнических системах. Очевидно, $\forall t \ge 0\ \forall z_1 \in \mathbb{R}\ \exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $z_1 = I_1(t) - \alpha_4 (z_1 + u_1)^9$; $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \ne -1$ $(z_1 \in \mathbb{R})$ при любом $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$ и любых v, $w \in X_2$, удовлетворяющих (5) при $u = v$, $u = w$. Проверим, что $\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) \le 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\|P_1x\| = \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T$ и $x_1 + x_2 = I_1(t) - \alpha_4 x_1^9$. Если $M = \max\limits_{t\in[0,T]} I_1(t)$, то для любого $T > 0$ существует R_T такое, что $\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) \le$ $\le 2\alpha_1\left|Mx_1^3\right| - 2\alpha_1\,\alpha_4\,x_1^{12} - 2\alpha_1\,x_1^4 - 2\alpha_2\,x_2^4 - \alpha_3\,x_3^4 \le 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T$. Значит, выполнено условие (7).

Следовательно, если нелинейные сопротивления и проводимости имеют вид (8), то по теореме 1 из [1] для любой начальной точки $\left(t_0, x^0\right) \in$ $\in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ $\left(x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^t\right)$, удовлетворяющей условию согласования $x_1^0 + x_2^0 = I_1(t_0) - \alpha_4\left(x_1^0\right)^9$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (4) на полуоси $t_0 \le t < \infty$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Условия теоремы 1 из [1] также выполнены в более общем случае для функций вида $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2m-1}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2 y^{2n-1}$, $h_2(y) = \alpha_3 y^{2r-1}$, $\gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^{(2s-1)(2m-1)}$, m, n, r, $s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Аналогичное утверждение верно и для нелинейных функций $\varphi_1(y) = \alpha_1\, y^{\frac{1}{2m+1}}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2\, y^{\frac{1}{2n+1}}$, $h_2(y) = \alpha_3\, y^{\frac{1}{2r+1}}$, $\gamma(y) = h_1\left(\varphi_1(y)\right) = \alpha_4\, y^{\frac{1}{2m+1}}$, $m,\ n,\ r \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Можно построить еще более общий класс допустимых функции φ_k, h_j, $k = \overline{1,2}$, налагая ограничения на скорости роста одних функций относительно других.

2. Модель гибридного нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим гибридную задачу для четырехполюсного нелинейного радиотехнического фильтра с нелинейными сопротивлениями φ_1, φ_3, φ_4, проводимостью h, линейными сопротивлениями r_1, r_2, r_3, проводимостью g и инерционными элементами — индуктивностью L и емкостью C (см. рис. 2). Параметры L, C, r_1, r_2, r_3, g являются положительными и вещественными, ток $I_1(t)$ и напряжение $U_1(t)$ заданы и непрерывны при $t \geq 0$.

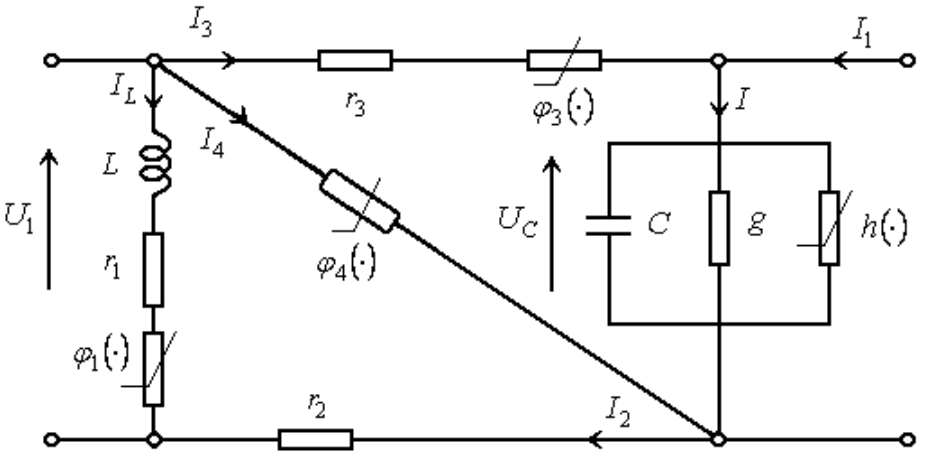

Рис. 2. Схема электрической цепи четырехполюсника

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$I_3 + I_4 = I_2, \quad I = I_3 + I_1,\ I = I_C + I_g + I_h, \quad U_1 = U_L + U_{r_1} + U_{\varphi_1},$$

$$U_C = U_g = U_h, \quad U_1 = U_{\varphi_4} + U_{r_2}, \quad U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_C = U_{\varphi_4}.$$

Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом:

$$U_{r_k} = r_k I_k,\ k = 2,\ 3; \quad U_{\varphi_k} = \varphi_k\left(I_k\right),\ k = 3,\ 4; \quad U_{r_1} = r_1 I_L,$$

$$U_{\varphi_1} = \varphi_1\left(I_L\right), \quad U_L = L\frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C\frac{dU_C}{dt}, \quad I_h = h\left(U_h\right), \quad I_g = gU_g.$$

Используя элементарные преобразования, исключаем из приведенных уравнений все переменные, кроме $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_3$, $x_4 = I_4$,

а также заданных тока I_1 и напряжения U_1, получаем систему четырех уравнений:

$$L\frac{d}{dt}x_1 + r_1\,x_1 = U_1(t) - \varphi_1(x_1)\,, \tag{9}$$

$$C\frac{d}{dt}x_2 + g\,x_2 - x_3 = I_1(t) - h(x_2)\,, \tag{10}$$

$$-x_2 - r_3\,x_3 = \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)\,, \tag{11}$$

$$r_2(x_3 + x_4) = U_1(t) - \varphi_4(x_4)\,. \tag{12}$$

Векторная форма системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t,x)\,, \tag{13}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & r_2 \end{pmatrix}$,

$f(t,x) = \begin{pmatrix} U_1(t) - \varphi_1(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4) \\ U_1(t) - \varphi_4(x_4) \end{pmatrix}$.

Пусть $h(x_2)\,,\ \varphi_1(x_1)\,,\ \varphi_3(x_3)\,,\ \varphi_4(x_4) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тогда $f(t,x) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^4$. Характеристический пучок $\lambda A + B$ уравнения (13) является регулярным, поскольку

$$\det(\lambda A + B) = -r_2\,(\lambda L + r_1)\,[(\lambda C + g)\,r_3 + 1] \not\equiv 0$$

и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты

$$R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda L + r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r_3}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & -\dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & -\dfrac{\lambda C + g}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & \dfrac{\lambda C + g}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & \dfrac{1}{r_2} \end{pmatrix}$$

ограничена при больших $|\lambda|$.

Как и в п. 1 вычислим спектральные проекторы $P_k,\ Q_k,\ k = 1,\,2$, оператор G^{-1} и проекции $P_1 x$, $P_2 x$, которые в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ представимы в виде

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & -(r_3C)^{-1} & 0 \\ 0 & -(r_3C)^{-1} & -r_3^{-1} + r_3^{-2}C^{-1} & 0 \\ 0 & (r_3C)^{-1} & r_3^{-1} - r_3^{-2}C^{-1} & r_2^{-1} \end{pmatrix},$$

$$z = P_1 x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -r_3^{-1}x_2 \\ r_3^{-1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 + r_3^{-1}x_2 \\ x_4 - r_3^{-1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Найдем } Q_1 f(t,x) = \begin{pmatrix} U_1(t) - \varphi_1(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) - r_3^{-1}[\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_3^{-1}[\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)] \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4) \\ U_1(t) - \varphi_4(x_4) \end{pmatrix}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1}\left(r_3^{-1}[\varphi_3'(x_3) + \varphi_4'(x_4)] + 1\right) & r_3^{-1}(\varphi_3'(x_3) + r_3) & -r_3^{-1}\varphi_4'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1}[\varphi_3'(x_3) + \varphi_4'(x_4)] + 1 & \varphi_3'(x_3) + r_3 & -\varphi_4'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_4'(x_4) & -r_2 & -\varphi_4'(x_4) - r_2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что условия теоремы 1 из статьи [1] выполнены.

Уравнение $BP_2x = Q_2 f(t,x)$ эквивалентно системе уравнений (11), (12), которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -r_3\, u_3 = \varphi_3\left(u_3 - r_3^{-1}\, z_2\right) - \varphi_4\left(u_4 + r_3^{-1}\, z_2\right), \\ r_2\,(u_3 + u_4) = U_1(t) - \varphi_4\left(u_4 + r_3^{-1}\, z_2\right). \end{cases} \tag{14}$$

Согласно условию (13) из [1] необходимо, чтобы $\forall t \geq 0\ \forall z \in X_1\ \exists u \in X_2$ такое, что выполнено (14), либо $\forall t \geq 0\ \forall z_2 \in \mathbb{R}\ \exists u_3,\ u_4 \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (14).

В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(u) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_4'(u_4 + \xi)}{r_3^2} + \dfrac{1}{r_3} & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1}\varphi_4'(u_4 + \xi) \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_4'(u_4 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi_3'(u_3 - \xi) + r_3 & -\varphi_4'(u_4 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_4'(u_4 + \xi) & -r_2 & -\varphi_4'(u_4 + \xi) - r_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\xi = r_3^{-1} z_2 \in \mathbb{R}$. Найдем ограничения, при которых для любых $v,\ w \in X_2$, удовлетворяющих (14) при $u = v,\ u = w$, сужение функции (15) на X_2 является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v, w\} \subset \subset X_2$. В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ рассмотрим проекторы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Theta_1 + \Theta_2 = Q_2).$$

Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 2$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2\mathbb{R}^4$ является единицей в Y_2, аддитивным разложением единицы в Y_2 будут сужения проекторов $\Theta_1,\ \Theta_2$ на двумерное подпространство Y_2. Оператор $\hat{\Lambda} = \Theta_1\hat{\Phi}\left(\tilde{u}^1\right) + \Theta_2\hat{\Phi}\left(\tilde{u}^2\right)$ в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3^2} + \dfrac{1}{r_3} & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 & -\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) & -r_2 & -\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) - r_2 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{u}^k \in conv\{v, w\},\ k = 1,\ 2,\ \xi = r_3^{-1} z_2 \in \mathbb{R}$.

Найдем условия, при которых оператор $\Lambda = \hat{\Lambda}|_{X_2} : X_2 \to Y_2$ обратим, т. е. из равенства $\hat{\Lambda}u = 0$, $u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 + r_3^{-1} x_2 \\ x_4 - r_3^{-1} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in X_2$, следует, что $u = 0$. Из вида вектора u вытекает, что $u_1 = u_2 = 0$. Обозначим $u_3 = \alpha$, $u_4 = \beta$. Из равенства

$$\hat{\Lambda}u = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[r_3^{-1}\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + 1\right]\ \alpha - r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\beta \\ \left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right]\ \alpha - \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\beta \\ -r_2\alpha - \left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right]\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

получается система трех уравнений. Поскольку в $\hat{\Lambda}u$ 2-я и 3-я строки линейно зависимы, то остается система из двух уравнений:

$$\alpha\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right] - \beta\,\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) = 0\,, \tag{16}$$

$$-\alpha\, r_2 - \beta\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right] = 0\,. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $\alpha = -\beta\left[r_2^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + 1\right]$. Подставляя α в (16) и умножая полученное выражение на $-r_2$, получаем

$$\beta\left\{\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right]\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right] + r_2\,\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\right\} = 0\,.$$

Значит $\beta = 0$, а, следовательно, и $\alpha = 0$, если

$$\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right]\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right] + r_2\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{18}$$

Тогда $\hat{\Phi}(u)|_{X_2}$ является базисно обратимым оператором на $conv\{v, w\} \subset X_2$, где $v,\ w \in X_2$ удовлетворяют (14) при $u = v,\ u = w$.

Как и в п. 1 запишем $Q_1 f(t,x) = S_1(t)\, P_1 x + \psi(t,x) + \Pi(x)\, e(t)$, где $S_1(t)$ — нулевая матрица, $\Pi(x)$ — единичная матрица,

$$e(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ I_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(t,x) = \begin{pmatrix} -\varphi_1(x_1) \\ -h(x_2) - r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $G^{-1}\psi(t,x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}\varphi_1(x_1) \\ -C^{-1}\left[h(x_2) + r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)\right)\right] \\ (r_3 C)^{-1}\left[h(x_2) + r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)\right)\right] \\ -(r_3 C)^{-1}\left[h(x_2) + r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)\right)\right] \end{pmatrix}$ и выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3^2 C \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H = H^* > 0$, $HP_1 x = \begin{pmatrix} Lx_1 \\ Cx_2 \\ -r_3 C x_2 \\ r_3 C x_2 \end{pmatrix}$, $\left(HP_1 x, G^{-1}\psi(t,x)\right) = -x_1\varphi_1(x_1) - 3x_2 h(x_2) - 3r_3^{-1}x_2(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4))$ и, учитывая (11), $\left(HP_1 x,\, G^{-1}\psi(t,x)\right) = -x_1\,\varphi_1(x_1) - 3x_2\,h(x_2) + 3r_3^{-1}\,x_2^2 + 3x_2\,x_3$.

Предположим, что для функций $\varphi_1,\ h$ выполнено следующее ограничение: для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$-x_1\,\varphi_1(x_1) - 3x_2\,h(x_2) + 3r_3^{-1}\,x_2^2 + 3x_2\,x_3 \leq 0, \tag{19}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2\left(1 + 2r_3^{-2}\right)} \geq R_T$, удовлетворяющего (12), $0 \leq t \leq T$. Тогда выполнено условие (17) из [1].

Итак, пусть нелинейные сопротивления и проводимости непрерывно дифференцируемы, то есть $h(x_2),\ \varphi_1(x_1),\ \varphi_3(x_3),\ \varphi_4(x_4) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\forall t \geq 0\ \forall z_2 \in \mathbb{R}\ \exists u_3,\ u_4 \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (14); для любых $u = v,\ u = w \in X_2$, удовлетворяющих (14), выполнено (18) при любых $\tilde{u}^k \in conv\{v, w\}$, $k = 1, 2$; для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что выполнено (19) для любого $x \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (12) $(0 \leq t \leq T)$ и такого, что $\sqrt{x_1^2 + x_2^2\left(1 + 2r_3^{-2}\right)} \geq R_T$. Тогда по теореме 1 из [1] для всякой начальной точки $\left(t_0, x^0\right) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей алгебраическим уравнениям (11), (12), существует единственное решение $x(t)$ уравнения (13) на полуоси $t_0 \leq t < \infty$ с начальным условием $x\left(t_0\right) = x^0$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть

$$\varphi_1(y)=\alpha_1 y^3,\ h(y)=\alpha_2 y^3,\ \varphi_3(y)=\alpha_3 y^3,\ \varphi_4(y)=\alpha_4 y^3,\ \alpha_k>0,\quad k=\overline{1,4},\quad y\in\mathbb{R}. \tag{20}$$

Очевидно, $\forall t\geq 0\ \forall z_2\in\mathbb{R}\ \exists u_3,\ u_4\in\mathbb{R}$ такие, что выполнено (14). Условие (18) принимает вид

$$\left[3\alpha_4(\tilde{u}_4^2+\xi)^2+r_2\right]\left[3\alpha_3(\tilde{u}_3^1-\xi)^2+r_3\right]+3\alpha_4 r_2(\tilde{u}_4^1+\xi)^2\neq 0,\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

где $r_2,\ r_3,\ \alpha_3,\ \alpha_4>0$. Очевидно, для любых $v,\ w\in X_2$, удовлетворяющих (14) при $u=v,\ u=w$, выполнено (21) для любых $\tilde{u}^k\in conv\{v,w\}$, $k=1,\,2$. Далее необходимо проверить, что $(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x))=-\alpha_1 x_1^4-3\alpha_2 x_2^4+$ $+3r_3^{-1}x_2^2+3x_2x_3\leq 0$ при $x\in\mathbb{R}^4$ таком, что $\|P_1x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\geq R_T$ и $r_2(x_3+x_4)=U_1(t)-\alpha_4 x_4^3,\ 0\leq t\leq T$. Очевидно, для любого $T>0$ можно выбрать R_T такое, что $-\alpha_1 x_1^4-3\alpha_2 x_2^4+3r_3^{-1}x_2^2+3x_2x_3\leq 0$ при $x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{R}$ таких, что $\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\geq R_T$. Значит, выполнено условие (17) из [1].

Таким образом, если нелинейные сопротивления и проводимости радиотехнического фильтра (рис. 2) имеют вид (20), то по теореме 1 из [1] для любой начальной точки $\left(t_0,x^0\right)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^4\left(x^0=\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0\right)^t\right)$, удовлетворяющей условию согласования $\begin{cases}-x_2^0-r_3x_3^0=\alpha_3\left(x_3^0\right)^3-\alpha_4\left(x_4^0\right)^3\\ r_2\left(x_3^0+x_4^0\right)=U_1(t)-\alpha_4\left(x_4^0\right)^3\end{cases}$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (13) на полуоси $t_0\leq t<\infty$ с начальным условием $x(t_0)=x^0$.

Условия теоремы 1 из [1] также выполнены в более общем случае для функций вида $\varphi_1(y)=\alpha_1 y^{2m+1},\ h(y)=\alpha_2 y^{2s+1},\ \varphi_3(y)=\alpha_3 y^{2n-1},\ \varphi_4(y)=$ $=\alpha_4 y^{2r-1},\ m,\ n,\ r,\ s\in\mathbb{N},\ \alpha_k>0,\ k=\overline{1,4},\ y\in\mathbb{R}$.

Аналогичное утверждение верно для следующих функций: $\varphi_3(y)=a\,y^{\frac{1}{2n+1}},\ \varphi_4(y)=b\,y^{\frac{1}{2r+1}},\ n,\ r\in\mathbb{N},\ a,\ b>0,\ y\in\mathbb{R}$; функции $\varphi_1(y),\ h(y)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ удовлетворяют требованию: для любого $T>0$ существует $R_T>0$ такое, что выполнено (21) для любого $x\in\mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (13) $(0\leq t\leq T)$ и такого, что $\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\geq R_T$.

3. Заключение

Анализ двух рассмотренных задачах показывает, что практическая проверка условий теоремы 1 из [1] является достаточно эффективной и эти условия могут выполняться для нелинейной функции $f(t,x)$ в уравнении (4), не удовлетворяющей глобальному условию Липшица. Установлено, что теорема 1 [1] гарантирует существование глобальных решений уравнений динамики определенных классов нелинейных радиотехнических систем.

В дальнейшем планируется модификация общей теоремы существования и единственности глобального решения дифференциально-алгебраических

уравнений вида (4), а также получение аналогичной теоремы в случае сингулярного характеристического пучка матриц линейной части уравнения.

Литература

1. Руткас А. Г., Филипковская М. С. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 1 (111). — С. 135–145.
2. Campbell S. L. Singular systems of differential equations. — San Francisco, CA: Pitman, 1980. — 177 p.
3. Rutkas A. G., Vlasenko L. A. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operador equations. // Nonlinear Oscillations. — 2001. — V. 4, № 2. — P. 252–263.
4. Rutkas A. G., Vlasenko L. A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. // Nonlinear Analysis. TMA. — 2003. — V. 55, № 1-2. — P. 125–139.
5. Власенко Л. А., Лысенко Ю. Г., Руткас А. Г. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. // Экономическая кибернетика. — 2011. — № 1-3 (67-69). — С. 4–9.
6. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 273 с.
7. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.
8. Vlasenko L. Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2000. — 23. — P. 937–948.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
10. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
11. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике. // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". — 2012. — № 1015, Вип. 19. — С. 306–319.
12. Канторович Л. В., Акилов. Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
14. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972. — 822 с.

Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина.

Поступила 01.10.2013

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2013 **МАТЕМАТИКИ** 4(114)

Заснований в 1965 році

ЗМІСТ

Серія "Оптимізація"

В. Я. Бартіш, Н. П. Огородник
Трикроковий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ для розв'язування задач мінімізації 3

Н. В. Задоянчук, О. П. Купенко
Про розв'язність одного класу задач оптимального керування для вироджених еліптичних варіаційних нерівностей 10

В. Е. Капустян, И. А. Пышограев
Приближённое оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества 24

М. П. Коцур
Наближений метод оптимального керування в задачах нестаціонарного термоелектричного охолодження 37

В. А. Рудык
Анализ сходимости алгоритма оптимизации муравьиными колониями для решения задачи предсказания структуры протеина . 48

В. В. Рутицька
Оптимальне управління динамікою інвестиційного портфеля 55

В. В. Семенов
Сильно збіжний декомпозиційний алгоритм для операторного включення з сумою двох максимальних монотонних операторів 60

Серія "Прикладна математика"

С. А. Алдашев
Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором .. 68

О. Ю. Грищенко, Д. А. Клюшин, В. В. Оноцький, Л. І. Потапенко, Г. М. Стешенко
Моделювання розповсюдження радіоактивного тритія (tritium 3h) та нерадіоактивного гелія-3 77

Е. В. Івохін
Про застосування спеціальних множин простих чисел для визначення міри належності нечітких множин 87

Д. А. Клюшин, М. В. Присяжная
Многомерное ранжирование с помощью эллипсов Петунина 95

В. І. Кудін
Аналіз лінійної системи методом псевдобазисних матриць 102

А. Г. Мороз, В. В. Томашик
Збіжність розв'язків та моментів виходу розв'язків зі смуги у дифузійних моделях зі стрибками 108
А. О. Пашко
Точність та надійність моделювання гауссових випадкових процесів в деяких просторах Орліча 119
А. Г. Рутkас, М. С. Филипковская
Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений нелинейных электрических цепей 131