Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2013 **МАТЕМАТИКИ** 2(112)

Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський, І. М. Ляшенко, В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. М. Парасюк, І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар), Д. Я. Хусаінов, А. О. Чикрій

Серія "Прикладна математика"

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарєв, Д. А. Клюшин, В. В. Козоріз, О. М. Новіков, Т. Є. Романова

Серія "Оптимізація"

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада), Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія), Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США), Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

К. О. Пришляк, І. П. Сіренко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjournal@gmail.com html://www.opmj.univ.kiev.ua

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики
18 листопада 2013 року, протокол №3

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013
©"ТВіМС", 2013

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Підписано до друку 18.11.2013

Для публікації в журналі приймаються не опубліковані раніше наукові праці з провідних методів дослідження та розв'язування задач оптимізації, обчислювальної математики, математичної фізики, теорії фільтрації, теорії пружності, математичної кібернетики, теорії управління та інших напрямків.

У журналі публікуються статті українською, російською й англійською мовами.

Стаття у друкованому вигляді з підписами авторів подається особисто або електронною поштою з подальшим дублюванням на папері в одному примірнику.

До статті додається анкета автора (-ів): ПІБ автора(-ів) українською, російською й англійською мовами, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреса проживання й організації, телефон, факс, електронна пошта тощо та додаткова інформація: назва статті, резюме та ключові слова українською, російською й англійською мовами на електронному носії особисто або електронною поштою (див."Анкета автора" на сайті журналу www.opmj.univ.kiev.ua).

Обсяг статті не має перевищувати 12 сторінок, включаючи резюме (обсягом до 500 друкованих знаків, яке містить коротку характеристику досліджуваної проблеми, мету роботи й конкретну інформацію про отримані результати), рисунки, таблиці, графіки, список літератури та індекс УДК. Текст статті повинен відповідати структурній схемі: короткий літературний огляд проблеми, що розглядається; мета дослідження; постановка задачі та її актуальність; методи її вирішення й отримані результати; висновки про наукову новизну та практичне значення результатів. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком її згадування в тексті (посилання у тексті — арабськими цифрами у квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до ГОСТу 7.1:2006 (ознайомитися можна на сайті). Стаття має бути підготовлена за допомогою редактора LaTeX.

Редактор LaTeX може бути наданий або надісланий на електронному носії поштою на прохання автора. Додаткову інформацію, шаблони статті та анкету автора можна знайти на сайті журналу.

Місцезнаходження редакції: Україна, 01601, м. Київ, просп. Глушкова 4д, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, к. 218, редакція журналу "Журнал обчислювальної та прикладної математики", e-mail: opmjournal@gmail.com.

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.83

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАБИЛЬНЫХ РАЗМЕЩЕНИЙ

С. И. Доценко

Резюме. В статье дан краткий обзор математических результатов, которые легли в основу нобелевской премии по экономике за 2012 год. Рассматривается понятие некоммерческого рынка, на котором устанавливаются устойчивые паросочетания. Рассмотрен алгоритм Гейла-Шепли построения устойчивых паросочетаний и его применение в таких сферах, как принятие абитуриентов в учебные заведения и трансплантация органов.

1. Введение

В 2012 году Нобелевская премия по экономике была присуждена американским ученым Алвину Роту и Лойду Шепли за "Теорию стабильных размещений и практику формирования рынков". Необычность данной работы заключается в том, что она исследует так называемые некоммерческие рынки, на которых участвующие в них агенты борются за собственные интересы, но при этом на рассматриваемых рынках отсутствуют деньги. Математическим аппаратом данной работы являются такие разделы прикладной математики, как исследование операций и теория игр.

Классические задачи исследования операций, например, такие как задача о назначениях, задача о p-медиане, задача о ранце, задача коммивояжера, транспортные и сетевые задачи имеют своей целью максимизацию прибыли либо минимизацию расходов, т.е. в той или иной степени оперируют деньгами.

Однако, некоторые задачи распределения имеют некоммерческую природу. Такими задачами являются, например:
— романтические знакомства и браки;
— поступление учеников в учебные заведения (школы, вузы);
— трансплантация органов.

Исследования некоммерческих рынков начались в 1962 году и первый результат, впоследствии получивший название алгоритма Гейла-Шепли нахождения устойчивых паросочетаний, был опубликован в [1].

Пусть есть две группы агентов (например, мужчины и женщины) и каждый агент хочет найти себе пару из другой группы.

Для каждого агента задается строгий список предпочтения (список агентов в порядке убывания, с кем бы он хотел образовать пару больше, чем

оставаться один). Список агентов противоположной группы может быть неполным.

Назовем паросочетанием (matching) двудольный граф, заданный на множестве агентов. Каждая вершина имеет степень 0 или 1 (разрешены только моногамные связи) либо можно быть ни с кем не связанным.

Пример 1. Пусть есть четверо мужчин: Коля, Петя, Вася, Миша и четыре женщины: Ира, Аня, Яна, Ева. Список предпочтений на данных множествах задается следующей таблицей:

Коля — (Ира, Аня, Яна)	Ира — (Вася, Коля)
Петя — (Яна, Ева)	Аня — (Коля, Петя, Миша)
Вася — (Яна, Ира)	Яна — (Коля, Миша, Петя, Вася)
Миша — (Аня, Ева, Яна)	Ева — (Петя, Миша)

Определение 1. Пара $(m(i)\, w(j))$ называется блокирующей, если оба агента предпочитают данный союз своим текущим связям.

Например, рассмотрим паросочетание Коля-Яна, Миша-Аня, Петя-Ева, Вася-Ира.

Пара Коля-Аня блокирующая, поскольку Коля может бросить Яну, а Аня — Мишу и образовать пару Коля-Аня. В результате оба улучшают свое положение.

Паросочетание называется устойчивым, если:

1) никто не связан с агентом, не входящим в свой список предпочтений;
2) множество связей не содержит блокирующих пар.

В [1] было доказано, что для любого набора списков предпочтения существует устойчивое паросочетание.

Устойчивых паросочетаний может быть одно или несколько, и одно из них гарантированно находится алгоритмом Шепли (deferred acceptance algorithm).

Суть алгоритма состоит в следующем.

1) Каждый мужчина делает предложение женщине, стоящей во главе его списка.
2) Если женщине было сделано одно предложение, она соглашается, если этот мужчина есть в ее списке (возможно, соглашается временно, т.е. говорит "может быть"). Если женщине было сделано несколько предложений, то она выбирает наиболее предпочтительного мужчину ("может быть"), остальных отвергает ("нет").
3) В следующем туре отвергнутые мужчины вычеркивают отвергнувших их женщин из своих списков и делают предложение следующей кандидатуре. Мужчины, помолвленные в предыдущем туре, делают предложение той же женщине. Женщины, получившие несколько предложений, вновь выбирают наилучшее и отвергают остальные.

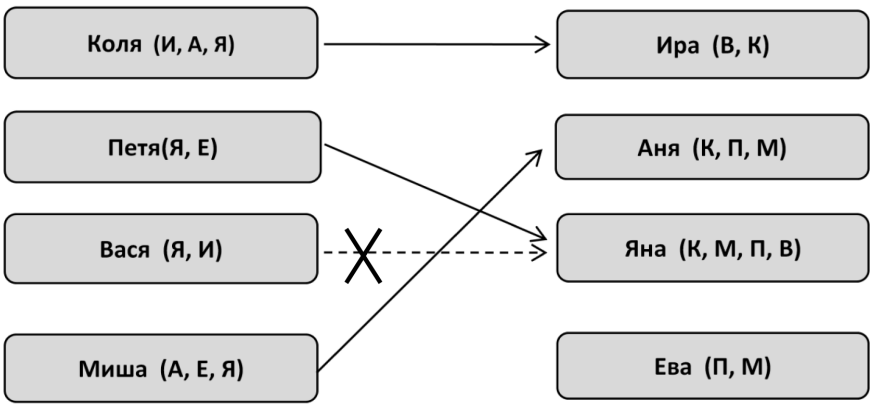
4) И т.д. до тех пор, пока все мужчины либо не будут иметь стабильные помолвки, либо не дойдут до конца списка.

Очевидно, что данный алгоритм всегда конечен. Действительно, на каждом шаге происходит продвижение по крайней мере одного из агентов по списку предпочтения. Отсутствие продвижения всех агентов означает достижение конца алгоритма. На каждом шаге каждому мужчине приписывается не более одной женщины и каждой женщине приписывается не более одного мужчины (из их списков предпочтения), т.е. имеет место некоторое допустимое паросочетание. Таким образом, за конечное число шагов будет найдено некоторое паросочетание. Покажем, что оно является стабильным. Доказательство проведем от противного.

Для данного паросочетания обозначим партнеров мужчин через $\mu(m)$, а партнеров женщин через $\mu(w)$. Предположим, что существует блокирующая пара (m, w), так что $w \succ_m \mu(m)$ и $m \succ_w \mu(w)$. Но по построению, если w более предпочтительна, чем $\mu(m)$, то w должна быть приписана m раньше, чем $\mu(m)$. Поскольку $\mu(m) \neq w$, то это означает, что m был отвергнут женщиной w, причем $\mu(w)$ был для нее более предпочтительным, чем m, $\mu(w) \succ_w (m)$. Поскольку отношения предпочтения ацикличны и транзитивны, то (m, w) не является блокирующей парой.

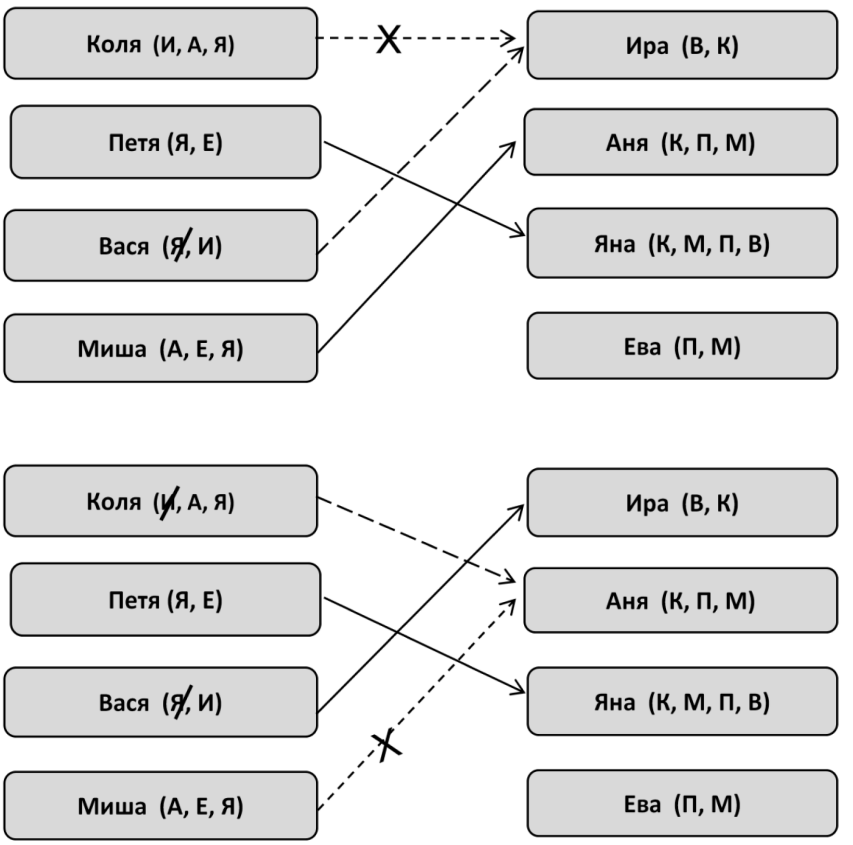
Рассмотрим применение алгоритма Гейла-Шепли к примеру 1.

В первом туре Ира принимает Колю, Аня принимает Мишу, Яна принимает Петю и отвергает Васю. Вася вычеркивает Яну из списка.

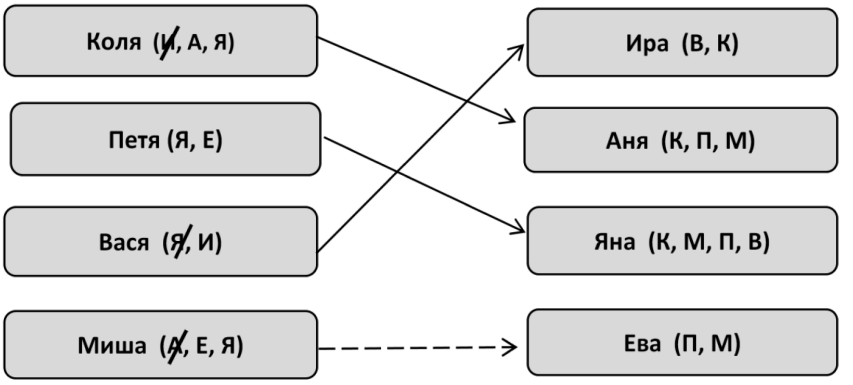


Во втором туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Вася делает предложение Ире, она соглашается и отвергает Колю. Коля вычеркивает Иру из списка.

В третьем туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Коля делает предложение Ане, она соглашается и отвергает Мишу. Миша вычеркивает Аню из списка.



В четвертом туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Миша делает предложение Еве, она соглашается. В результате достигнуты устойчивые связи.



Результатом применения алгоритма Гейла-Шепли для примера 1 является паросочетание Коля-Аня, Петя-Яна, Вася-Ира, Миша-Ева. В данном паросочетании нет блокирующих пар.

Свойства устойчивых паросочетаний описываются следующими тремя теоремами:

Теорема 1. *Порядок предложений не влияет на нахождение стабильного паросочетания.*

Теорема 2. *Построенное паросочетание из всех возможных стабильных паросочетаний является наилучшим для каждого мужчины и наихудшим для каждой женщины.*

Описанный алгоритм и полученное в результате его применения паросочетание называется Man-optimal (Мужской).

Теорема 3. *Во всех стабильных паросочетаниях множество одиноких агентов не меняется.*

Проиллюстрируем теорему 2. Для списка предпочтений примера 1 применим "Женский" алгоритм (т.е. женщины делают предложение первыми). В результате получим другое паросочетание Коля-Аня, Петя-Ева, Вася-Ира, Миша-Яна (тоже стабильное).

Сравнительная таблица рангов партнеров агентов для Man-optimal и Woman-optimal алгоритмов имеет вид:

Man-optimal		**Woman-optimal**	
Коля –2	Ира –1	Коля –3	Ира –1
Петя –1	Аня –1	Петя –2	Аня –1
Вася –2	Яна –3	Вася –2	Яна –2
Миша –3	Ева –2	Миша –3	Ева –1

Объектом дальнейших исследований данной модели была возможность манипулирования путем сообщения неправдивых сведений о своих предпочтениях ([2], [3]).

Может быть, в отдельных случаях выгодно обманывать остальных (т.е. заявлять список предпочтения, отличный от истинного?) Ответ — Да, иногда выгодно. Обман может быть двух типов — перестановка кандидатов в списке предпочтения или вычеркивание из списка.

Покажем, как работает механизм обмана на первом примере. Пусть реализуется мужской алгоритм, а Яна вычеркнула из своего списка предпочтения Петю и Васю.

Man–optimal, правда		**Man–optimal, Яна соврала**	
Коля –2	Ира –1	Коля –3	Ира –1
Петя –1	Аня –1	Петя –2	Аня –1
Вася –2	Яна –3	Вася –2	Яна –1
Миша –3	Ева –2	Миша –3	Ева –3

Таким образом, Яна, соврав, улучшила свой выбор (при этом ухудшив выбор Евы, Пети и Коли).

Рассмотрим пример обмана путем перестановки кандидатов в списке. Пусть для пяти мужчин и четырех женщин изначально заявлены такие списки предпочтений:

Коля — (Ира, Аня, Яна, Ева)	Ира — (Петя, Вася, Коля, Миша, Саша)
Петя — (Ева, Аня, Яна, Ира)	Аня — (Вася, Коля, Петя, Миша, Саша)
Вася — (Ева, Яна, Ира, Аня)	Яна — (Саша, Миша, Коля, Петя, Вася)
Миша — (Ира, Ева, Яна, Аня)	Ева — (Коля, Миша, Саша, Петя, Вася)
Саша — (Ира, Аня, Ева)	

и пусть реализуется мужской алгоритм.

Рассмотрим два случая. Пусть в первом случае все подали правдивые списки предпочтения. Пусть во втором случае Ира соврала, переставила кандидатов в списке, и представила список (Петя, Вася, Миша, Саша, Коля), а все остальные представили правдивые списки.

Сравнительные результаты применения мужского варианта алгоритма Гейла-Шепли и ранги агентов для обоих случаев приведены в следующей таблице.

Правдивые списки		**Ира соврала**	
Коля (И, А, Я, Е) — Ира (П, В ,К, М, С)		Коля (И, А, Я, Е) — Аня (В, К, П, М, С)	
Петя (Е, А, Я, И) — Аня (В, К, П, М, С)		Петя (Е, А, Я, И) — Яна (М, К, П, В)	
Вася (Е, Я, И, А) — Яна (М, К, П, В)		Вася (Е, Я, И, А) — Ира (П, В ,К, М, С)	
Миша (И, Е, Я, А) — Ева (К, М,С, П, В)		Миша (И, Е, Я, А) — Ева (К, М,С, П, В)	
Саша (И, А, Е)			
Ранг агентов			
Коля — 1	Ира — 3	Коля — 2	Ира — 2
Петя — 2	Аня — 3	Петя — 3	Аня — 2
Вася — 2	Яна — 4	Вася — 3	Яна — 4
Миша — 2	Ева — 2	Миша — 2	Ева — 2
Саша — 3		Саша — 3	

Таким образом, Ира, соврав, получила партнера более предпочтительного, чем в случае, если бы она сказала правду.

В [3], [4] были сформулированы и доказаны теоремы "о механизмах вранья":

1) В общем случае не существует алгоритма нахождения устойчивого паросочетания, для которого правдивое составление списков является доминирующей стратегией.
2) Если списки предпочтений строгие и на множестве предпочтений устойчивое паросочетание неединственно, то по крайней мере одному агенту выгодно соврать, при условии, что остальные будут правдивыми.
3) Если реализуется "Man-optimal" алгоритм, то для мужчин говорить правду является доминирующей стратегией.

2.Обобщение задачи двустороннего выбора

Оказывается, что требование двудольности графа (или, другими словами, гетеросексуальности агентов) является принципиальным, иначе может не существовать устойчивого паросочетания

В [5] были приведены контрпримеры, показывающие, что если предпочтения задаются на одном либо на трех множествах агентов, то устойчивых размещений (при которых отсутствуют блокирующие пары) может не существовать.

Отсутствие устойчивого распределения для одного множества агентов иллюстрируется следующим простым примером — расселение по комнатам. Пусть 4 человека надо поселить по 2 в комнату, учитывая их предпочтения.

Коля (Петя, Вася, Миша)
Петя (Вася, Коля, Миша)
Вася (Коля, Петя, Миша)
Миша (Коля, Петя, Вася)

При расселении Коля-Петя, Вася-Миша возражают Петя и Вася
При расселении Коля-Вася, Петя-Миша возражают Коля и Петя
При расселении Коля-Миша, Петя-Вася возражают Коля и Вася.

Рассмотрим пример отсутствия устойчивого сочетания для трех множеств агентов (так называемых 3-сочетания). Пусть имеется три множества людей: мужчины N_m, женщины N_w и дети N_c, причем $|N_m| = |N_w| = |N_c|$. 3-сочетанием называется разбиение множества всех людей на группы по три человека, причем в каждую группу входит мужчина, женщина и ребенок. Каждый человек может иметь предпочтения относительно пар, которые могут входить в 3-сочетания, т.е. мужчины имеют предпочтения на множестве $N_w \times N_c$, женщины — на $N_m \times N_c$, а дети — на $N_m \times N_w$. Говорят, что тройка m, w, c блокирует 3-сочетание ν, если m предпочитает (w, c) паре $\nu(m)$, w предпочитает (m, c) паре $\nu(w)$, а с предпочитает (m, w) паре $\nu(c)$, т.е. $9w, c) \succ_m \nu(m), (m, c) \succ_w \nu(w), (m, c) \succ_c \nu(c)$.

Рассмотрим множества, состоящие из трех мужчин, трех женщин и трех детей, имеющих следующие предпочтения:
$P(m_1) : (w_1, c_3), (w_2, c_3), (w_1, c_1); P(m_2) : (w_2, c_3), (w_2, c_2), (w_3, c_3);$
$P(m_3) : (w_3, c_3); P(w_1) : (m_1, c_1); P(w_2) : (m_2, c_2);$
$P(w_3) : (m_2, c_3), (m_2, c_3); P(c_1) : (m_1, w_1); P(c_2) : (m_2, w_2);$
$P(c_3) : (m_1, w_3), (m_2, w_3), (m_1, w_2), (m_3, w_3).$

Здесь нет ни одного устойчивого 3-сочетания. Покажем это. Все 3-сочетания, которые дают m_1 (соответственно m_2 и m_3 "семью", более предпочтительную, чем (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) неустойчивы. Действительно, любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_1, c_3) или (m_2, w_2, c_3) блокируется тройкой (m_3, w_3, c_3), а любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_2, c_3) — тройкой (m_2, w_3, c_3).

Любое 3-сочетание, которое не содержит (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) блокируется либо (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)), либо неустойчиво, как показано выше. Наконец, (m_1, w_2, c_3) блокирует любое 3-сочетание, которое содержит (m_1, w_1, c_1) или (m_2, w_2, c_2).

Таким образом, все возможные 3-сочетания неустойчивы.

Оказывается. что в то время как требование бинарности сочетаний является принципиальным (выше были контрпримеры, демонстрирующие возможную неустойчивость 1- и 3-сочетаний), требование моногамности принципиальным не является.

В дальнейших исследованиях рассматривались задачи, в которых одна из групп может быть полигамной (студенты-ВУЗы). Каждый студент учится в одном ВУЗе, в каждом ВУЗе учится много студентов. При этом алгоритм Гейла-Шепли модифицируется, но принципиально не меняется ([6]–[9]).

В настоящее время модифицированный алгоритм Гейла-Шепли применяется при наборе учеников в школы и ВУЗы в Нью-Йорке, Бостоне, Будапеште, Сингапуре, а также при распределении выпускников мед. вузов в больницы в США. При этом процедура зачисления абитуриентов осуществляется следующим образом. И организации, и абитуриенты составляют списки предпочтения. Их централизованно обрабатывают организации (Clearinghouses). Эти организации подчинены национальной программе распределения абитуриентов — National Residence Matching Program (NRMP). При зачислении абитуриентов ранее реализовывался Man-optimal алгоритм.

Организации выступали в роли (полигамных) мужчин, а абитуриенты — в роли женщин.

Впоследствии возникли возражения, что алгоритм действует в интересах организаций, за счет интересов абитуриентов. Эти возражения были учтены, и стали внедряться алгоритмы, в большей степени учитывающие интересы абитуриентов.

Для школ раньше (до 2005 г.) действовал "Бостонский алгоритм" — принять как можно больше абитуриентов так, чтобы было удовлетворено их первое пожелание (из списка предпочтения), затем — второе и т.д ([10], [11]).

При таком алгоритме абитуриенты могут манипулировать списками предпочтения. Более слабым абитуриентам нужно высказывать не истинные, а "реалистичные" пожелания.

В настоящее время реализуется модифицированный Man-optimal алгоритм, где абитуриенты выступают в роли мужчин, но действуют дополнительные оговорки в пользу организаций, а в ряде случаев реализуется классический Man-optimal алгоритм для абитуриентов.

Частным случаем теории паросочетаний являются так называемые задачи одностороннего выбора и обмена. Такие задачи рассматриваются в случаях, когда одна из групп является неодушевленными предметами и им все равно, кто ими будет владеть. Например, таковыми являются отношения жители-дома, коллекционеры-картины, больные-трансплантаты.

Шепли и Скарф в 1974 году в [12] предложили housing market model.

В данной работе были исследованы рынки распределения и обмена, на которых нет денег.

Пусть имеется n человек и n домов и каждый человек владеет одним домом. Он составляет строгий список предпочтения всех n домов, включая

свой собственный. Каждый человек хочет выменять другой дом, стоящий как можно выше в списке предпочтения.

Критерий стабильного распределения имеет вид: никакое подмножество людей не может образовать блокирующую коалицию.

В [12], [13] был рассмотрен алгоритм обмена домами, получивший название Top Trading Cycles algorithm — TTC. Суть алгоритма очень простая — вначале строится граф обмена домами, затем для построенного графа выполняется такая последовательность действий:

1) Каждый агент указывает на агента, чей дом ему нравится больше всех. В построенном ориентированном графе обязательно есть цикл или петля.
2) Производим обмен домами в найденном цикле (или петле).
3) Удаляем из рассмотрения агентов и дома, которые участвовали в циклическом обмене и переходим к п. 1.

Если у агентов нет прав на дом (например, комнаты общежития, n людей, n комнат), то в этом случае применяется Random Serial Dictatorship (RSD) алгоритм. Этот алгоритм также очень простой.

Вначале агенты случайным образом упорядочиваются (согласно равномерного дискретного распределения, т.е. все $n!$ возможных перестановок равновероятны). Затем первый агент получает свой наиболее желанный дом, второй — наиболее желанный из оставшихся и т.д.

Альтернативным алгоритмом является так называемый Core from Random Endowments (CRE) алгоритм. В данном алгоритме вначале случайным образом приписываются дома агентам (из равновероятного распределения), а затем применяется алгоритм TTC.

В [14] было показано, что для любой задачи распределения домов без прав агентов алгоритмы RSD и CRE порождают одну и ту же лотерею и, следовательно, являются эквивалентными.

В случае, если у одних агентов есть права на дом, а у других — нет, то применяется так называемый YRMH-IGYT алгоритм (you request my house, I get your turn).

Агенты случайным образом упорядочиваются (равномерное распределение).

Сначала на рынке только свободные дома.

1) Если есть владельцы домов, у которых свой дом стоит первым в списке, то такие владельцы и дома удаляются из рассмотрения.
2) Первый человек в очереди называет свою лучшую альтернативу.

Если этот дом доступный на рынке, то он выбирает этот дом. При этом, если у него был свой дом, но он выбрал другой, то его дом становится ”свободным”.

Если этот дом занят, то агенты переупорядочиваются так, что владелец занятого дома становится вперед (и делает запрос).

В результате образуется цикл, аналогичный алгоритму TTC.

Эти алгоритмы нашли применение в трансплантологии почек в США. Поскольку закон США о трансплантации от 1984 г. запрещает куплю, продажу и другие коммерческие операции с донорскими почками, то существует всего два источника, из которых больные могут получить необходимые им органы: изъятие у умерших на операционном столе либо пожертвование родственниками больных.

Количество почек, полученных из первого источника, в несколько раз меньше, чем число нуждающихся в них. В то же время почка, которую готовы пожертвовать родственники, может не подходить больному вследствие несовместимости по группе крови или другим медицинским показателям. Оказывается, что рассмотренные выше алгоритмы обмена идеально подходят для частичного сглаживания возникающих проблем. В [15]–[18] был разработан модифицированный алгоритм обмена, аналогичный ТТС, использующий список ожидания.

По данному алгоритму донор может пожертвовать почку, если она подходит кому-либо из списка ожидания, в обмен на то, что их родственник получает приоритет в списке ожидания, и ему в первую очередь будет предоставлена почка, полученная из первого или второго источника.

В настоящее время данный алгоритм успешно применяется на практике в клиниках США.

Литература

1. Gale D. College admissions and the stability of marriage / D. Gale, L. S. Shapley // American Mathematical Monthly. — 1962. — V. 69. — P. 9–15.
2. Gärdenfors P. Match making: assignments based on bilateral preferences / P. Gärdenfors // Behavioral Science. — 1975. — V. 20. — P. 166–173.
3. The economics of matching: Stability and incentives / A. E. Roth, // Mathematics of Operations Research. — 1982 — V. 7. — P. 617–628.
4. Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis / A. E. Roth // Sotomayor M..Econometric Society Monograph Series. — Cambridge: Cambridge University Press. — 1990.
5. Алексеев Ф. Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Алексеев, Э. Хабина, Д. Шварц. — Москва: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2006. — 300 с.
6. Abdulkadiro A. School choice: A mechanism design approach. / A. Abdulkadiro, T. Sönmez // American Economic Review. — 2003. — V. 93. — P. 729–747.
7. Abdulkadiroglu A. The New York City high school match. / A. Abdulkadiroglu, P. A. Pathak, A. E. Roth // American Economic Review — 2005. — V. 95. — P. 364–367.
8. Balinski M. A tale of two mechanisms: student placement / M. Balinski, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 1999.- V. 84. — P. 73–94.
9. Chen Y. School choice: An experimental study / Y. Chen, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 2006. — V. 127. — P. 2002–2031.
10. Abdulkadiroglu A. The Boston public school match / A. Abdulkadiroglu, P. A. Pathak, A. E. Roth, T. Sönmez // American Economic Review. — 2005, — V. 95. — P. 368–371.

11. Ergin H. Games of school choice under the Boston mechanism / H. Ergin, T. Sönmez.// Journal of Public Economics. — 2006. — V. 90. — P. 215–237.
12. Shapley L. On cores and indivisibility / L. Shapley, S. Herbert // Journal of Mathematical Economics. — 1974, — V. 1(1). — P. 23–37.
13. Roth A. E. Incentive compatibility in a market with indivisibilities / A. E. Roth // Economics Letters. — 1982. — V. 9. — P. 127–132.
14. Abdulkadiroglu A. House allocation with existing tenants / A. Abdulkadiroglu, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 1999. — V. 88. — P. 233–260.
15. Roth A. E. Kidney exchange / A. E. Roth, T. Sönmez , M. U. Ünver // Quarterly Journal of Economics. — 2004. — V. 119 . — P. 457–488.
16. Roth, A.E. A kidney exchange clearinghouse in New England / A. E. Roth, T. Sönmez, M. U. Ünver // American Economic Review- 2005. — V. 95. — P. 376–380.
17. Roth, A.E. Pairwise kidney exchange / A. E. Roth, , T. Sönmez, M.U. Ünver // Journal of Economic Theory — 2005. — V. 125. — P. 151–88.
18. Roth A. E. Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in markets with compatibility-based preferences / A. E. Roth, T. Sönmez, M. U. Ünver // American Economic Review. — 2007. — V. 97. — P. 828–851.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 15.02.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2012, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.977.58

ОДНОФАЗНА ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ТОЧКОВОГО КЕРУВАННЯ АДРЕСНОЮ ДОСТАВКОЮ ЛІКІВ ДО ЗЛОЯКІСНИХ ПУХЛИН

Л. Д. Карабін, Д. А. Клюшин, Н. І. Ляшко

Резюме. В роботі досліджується задача оптимального керування переносом ліків з точкових джерел у злоякісній пухлині з вільною межею. Здійснено модифікацію моделі Чакрабарті-Хансона, побудовано варіаційний метод та обчислювальний алгоритм для моделювання процесу лікування та визначення розмірів пухлини. Враховано можливість обрання терміну лікування та кількості введених ліків.

Вступ

Адресна доставка ліків (англ. targeted drug delivery) — спрямований транспорт лікарської речовини до заданої області організму, органу або клітини. Для адекватного моделювання та керування процесом адресної доставки ліків до пухлини необхідно створювати нові та удосконалювати існуючі моделі. Ці задачі досліджувалися, наприклад, в роботах Jan [1], Jang et al. [2], Baxter і Jain [3–6], Lankelma et al. [7], Ward і King [8], Tzafriri et al. [9], Kaowumpai et al. [10], Chakrabarty і Hanson [11], а також Клюшина та ін. [12–15]. Зокрема, в роботі [15] досліджено модель точкового оптимального керування доставкою ліків до злоякісних пухлин, що є модифікацією моделі Чакрабарті–Хансена і побудовано обчислювальний алгоритм для моделювання впливу введних мікрогранул на пухлину. Втім, ця модель не враховує те, що пухлина постійно змінює свій розмір, зростаючи за рахунок проліферації та зменшуючись під впливом ліків. Це вимагає нового уточнення моделі введенням вільної межі та її дослідження. Серед робіт, виконаних у цьому напрямку, слід назвати роботи Bazaliy і Friedman [16–19].

1. Однофазна задача Стефана

Задачі з вільною межею виникають при описі багатьох фізичних явищ. Наприклад, розглянемо тонку пластинку льоду на інтервалі $a \le x < \infty$ і припустимо, що температура льоду всюди дорівнює 0, а в точці підтримується на рівні $T > 0$. Тоді лід почне танути і у кожен інтервал часу вода займатиме проміжок $a \le x < s(t)$, тобто отримаємо класичний варіант

задачі Стефана:

$$\begin{gathered}\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0,\ x \in [a, s(t)],\ t > 0,\\ u(a,t) = T,\ t > 0,\\ u(s(t),t) = 0,\ t > 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Тут α — певна константа, відмінна від 0, а $s(t)$ — вільна межа, що раніше не задавалася. Тим не менше задається додаткова умова на кривій $x = s(t)$, а саме: закон збереження енергії, що має вигляд

$$\frac{ds(t)}{dt} = -k u_x(s(t),t),\ t > 0, \tag{2}$$

де k — певна додатня константа. Задача (1), (2) називається однофазною задачею Стефана [20]. Ми використовуватимемо її для побудови моделі Чакрабарті-Хансона із вільною межею.

2. Модифікована математична модель Чакрабарті-Хансона

Нехай $Y = (Y_1(x,t), Y_2(x,t), Y_3(x,t))^T$ — вектор стану системи, де x визначена в області $\Omega(t)$ з невідомою вільною межею $\Gamma(t)$, $t \in [0,T]$. Компоненти вектора стану: $Y_1(x,t)$ — відносна густина ракових клітин; $Y_2(x,t)$ — відносна густина здорових клітин; $Y_3(x,t)$ — концентрація ліків.

Відносна густина ракових клітин $Y_1(x,t)$ задовольняє дифузійному рівнянню, що враховує змагання за ресурси із здоровими клітинами

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + a_1 g_1(Y_1) Y_1 - (b_{1,2} Y_2 + b_{1,3} Y_3) Y_1, \tag{3}$$

де $a_1 g_1(Y_1)$ — темп зростання хворих клітин; $g_1(Y_1)Y_1$ зростає експоненціально, тобто $g_1(Y_1) = 1$; a_1 — внутрішній темп зростання хворих клітин; k_1 — максимальний об'єм хворих клітин; $b_{1,2}$ — темп смерті хворих клітин через змагання за ресурси із нормальними клітинами; $b_{1,3}Y_3$ — темп смерті хворих клітин через дію ліків; D_1 — коефіцієнт дифузії ракових клітин.

Конкуруюче рівняння для густини здорових клітин $Y_2(x,t)$ є подібним з аналогічними коефіцієнтами

$$\frac{\partial Y_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} + a_2 g_2(Y_2) Y_2 - (b_{2,1} Y_1 + b_{2,3} Y_3) Y_2, \tag{4}$$

де $a_2 g_2(Y_2)$ — темп зростання здорових клітин; $g_2(Y_2)Y_2$ зростає експоненціально, тобто $g_2(Y_2) = 1$; a_2 — внутрішній темп зростання здорових клітин; k_2 — максимальний об'єм здорових клітин; $b_{2,1}$ — темп смерті здорових клітин через змагання за ресурси із хворими клітинами; $b_{2,3}Y_3$ – темп смерті здорових клітин через дію ліків; D_2 — коефіцієнт дифузії для здорових клітин.

Концентрація ліків також має дифузійну поведінку, проте враховує ще реабсорбацію, за яку відповідає коефіцієнт a_3. Нехай $u = u(x,t)$ позначатиме кількість ліків, введених у пухлину, і буде функцією точкового

керування. Тоді

$$u = \sum_{i=1}^{NC} C_i \delta(x - x_i), \tag{5}$$

де x_i — точки, в які введено ліки; NC — кількість цих точок; C_i — відповідна інтенсивність ліків у точках x_i.

Рівняння для концентрації ліків Y_3 має вигляд

$$\frac{\partial Y_3}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} + a_3 g_3(Y_3) Y_3 + u, \tag{6}$$

де D_3 — коефіцієнт дифузії ліків; $g_3(Y_3) = -1$ — темп реабсорбації.

Початкові умови для вектора стану задамо як

$$Y \mid_{t=0} = Y_0(x),\ x \in \Omega(t). \tag{7}$$

Крайові умови розглянемо у вигляді однорідних умов Неймана

$$-D \frac{\partial Y}{\partial x} \mid_{x \in \Gamma} = 0,\ t \in [0, T], \tag{8}$$

де D — матриця коефіцієнтів дифузії.

Незважаючи на те, що межа $\Gamma(t)$ невідома, потрібно задати на ній закон збереження енергії [20]

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = k \frac{\partial Y_1}{\partial x},\ t \in [0, T], \tag{9}$$

де $k > 0$ — невід'ємний коефіцієнт.

Задамо початкові умови на вільну межу

$$\Gamma(0) = \{l_1(0); l_2(0)\} = \{a; b\}. \tag{10}$$

Функціонал якості обираємо як квадратичну форму поточних та кінцевих витрат

$$J(Y, U) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} (r_1 Y_1^2 + s_3 (u - u_0)^2) dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega(T)} (q_1 Y_1^2 \mid_{t=T} + q_3 Y_3^2 \mid_{t=T}) dx, \tag{11}$$

де $r_1 > 0$ — коефіцієнт накладних витрат, пов'язаних з пухлиною; $s_3 > 0$ — коефіцієнт витрат на доставку ліків; u_0 — обмеження на керування, яке зберігає певні фізичні обмеження на кількість ліків, що може бути введена; $q_1 > 0, q_3 > 0$ — відповідні кінцеві витрати.

Задача полягає у мінімізації функціонала якості, враховуючи функцію керування u та шукаючи на кожному кроці вільну межу $\Gamma(t)$.

Запишемо побудовану модель у векторній формі

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + (A(Y) + B(Y)) Y + U, \tag{12}$$

де $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, $A(Y) = \begin{pmatrix} a_1 g_1(Y_1) & 0 & 0 \\ 0 & a_2 g_2(Y_2) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 g_3(Y_3) \end{pmatrix}$,

$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(x,t) \end{pmatrix}$, $B(Y) = \begin{pmatrix} -(b_{1,2}Y_2 + b_{1,3}Y_3) & 0 & 0 \\ 0 & -(b_{2,1}Y_1 + b_{2,3}Y_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Функціонал якості у векторній формі має вигляд

$$J(Y,U) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega(t)} (Y^T R Y + (U-U_0)^T S (U-U_0) dx dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{\Omega(T)} ((Y^T Q Y)\mid_{t=T}) dx, \quad (13)$$

де

$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

Умови на вільну межу (9) запишемо як

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = K\frac{\partial Y}{\partial x},\ t \in [0,T], \quad (14)$$

де $K = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Початкові (7), (10) та крайові умови (8) залишаємо без змін.

3. Варіаційний метод

Введемо вектори множників Лагранжа, $\phi = (\xi, \eta, \chi, \lambda)$, де $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$, $\chi = \chi(x)$, $\lambda = \lambda(t)$, щоб включити до функціоналу рівняння стану, крайові умови, початкові умови та умову на вільну межу. Запишемо функціонал Лагранжа

$$L(Y,U,\Omega,\Phi) = J(Y,U) + \Phi^T F(Y,U) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega(t)} (Y^T R Y + (U-U_0)^T \times \\ \times S(U-U_0)) dx dt + \frac{1}{2}\int_{\Omega(T)} (Y^T Q Y)\mid_{t=T} dx + \\ + \int_0^T \int_{\Omega(t)} \xi^T \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - D\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - (A(Y)+B(Y))Y - U\right) dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \eta^T \left(-D\frac{\partial Y}{\partial x}\mid_{x\in\Gamma(t)}\right) d\Gamma dt + \int_{\Omega(t)} \chi^T (Y - Y_0)\mid_{t=0} dx + \\ + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \lambda^T \left(\Gamma dt - K\frac{\partial Y}{\partial x}\mid_{x\in\Gamma(t)}\right) d\Gamma dt.$$

Спрямовуючи перші варіації ξ, η, χ, λ до нуля та враховуючи довільність $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\chi}$, $\tilde{\lambda}$, отримаємо рівняння стану (12), початкові (7) та крайові умови (8) й умови на вільну межу (14).

Спрямуємо першу варіацію L відносно Y до 0. Враховуючи симетричність матриці R та скалярного добутку $Y^T\tilde{Y}$, діагональність матриць $A(Y), B(Y)$, користуючись формулою Тейлора та теоремою Гріна, враховуючи елементарні перетворення та довільність $\tilde{Y}$, отримаємо допоміжні рівняння

$$\int_\Omega (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi)dx = \int_\Gamma (\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n})d\Gamma, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} RY = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 D\xi}{\partial^2 x} + (A(Y) + B(Y))\xi + \\ + tr(\nabla_Y[A(Y)] * \xi(Y)^T) + tr(\nabla_Y[B(Y)] * \xi(Y)^T), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\xi + QY = 0,\ t = T, \tag{17}$$

$$\frac{\partial D\xi}{\partial x} = 0, x \in \Gamma,\ t \in [0, T]. \tag{18}$$

Рівняння для η, χ, λ нас не цікавлять, оскільки для знаходження керування потрібно лише ξ. Для отримання оптимальних умов на керування використовуємо аналогічні міркування. У першій варіації спрямовуємо U до 0. Оскільки $\tilde{U}$ довільне, то отримуємо

$$U = U_0 + S^{-1}\xi. \tag{19}$$

4. Обчислювальний метод

Для розв'язку векторних рівнянь використаємо метод розчеплення, тобто значення Y_1^{j+1} шукатимемо за Y_2^j та Y_3^j ($Y_1^{j+1} = f(Y_2^j, Y_3^j)$). Відповідно знайшовши Y_1^{j+1} для пошуку Y_2^{j+1} використовуємо закономірність $Y_2^{j+1} = f(Y_1^{j+1}, Y_3^j)$, аналогічно $Y_3^{j+1} = f(Y_1^{j+1}, Y_2^{j+1})$, де j — номер шару по часу різницевої сітки. У допоміжному рівнянні нас цікавитиме лише третя координата ξ_3 вектора ξ, тому що тільки вона використовується для знаходження інтенсивностей керування C_i.

Зважаючи на сферичну симетрію пухлини, розглядатимемо одновимірну задачу, тому вільну межу подамо у вигляді: $\Gamma = l_1(t); l_2(t)$. Таким чином, отримуємо чотири крайових задачі для знаходження Y_1, Y_2, Y_3, ξ_3, рівняння для інтенсивностей точкового керування та умови на вільну межу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial Y_1}{\partial t} = D_1\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + (a_1 - b_{1,2}Y_2 - b_{1,3}Y_3)Y_1, \\ D_1\frac{\partial Y_1}{\partial x}\mid_{x=l_1(t)} = 0, -D_1\frac{\partial Y_1}{\partial x}\mid_{x=l_2(t)} = 0,\ t \in [0, T], \\ Y_1\mid_{t=0} = Y_1^0(x),\ x \in \Omega(t); \end{gathered} \tag{20}$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} + (a_2 - b_{2,1} Y_1 - b_{2,3} Y_3) Y_2,$$
$$D_2 \frac{\partial Y_2}{\partial x} \mid_{x=l_1(t)} = 0, -D_2 \frac{\partial Y_2}{\partial x} \mid_{x=l_2(t)} = 0,\ t \in [0, T], \tag{21}$$
$$Y_2 \mid_{t=0} = Y_2^0(x),\ x \in \Omega(t);$$

$$\frac{\partial Y_3}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} - a_3 Y_3 + u,$$
$$D_3 \frac{\partial Y_3}{\partial x} \mid_{x=l_1(t)} = 0, -D_3 \frac{\partial Y_3}{\partial x} \mid_{x=l_2(t)} = 0,\ t \in [0, T], \tag{22}$$
$$Y_3 \mid_{t=0} = Y_3^0(x),\ x \in \Omega(t);$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial t} = -D_3 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + a_3 \xi_3,$$
$$-D_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \mid_{x=l_1(t)} = 0, D_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \mid_{x=l_2(t)} = 0,\ t \in [0, T], \tag{23}$$
$$Y_3 \mid_{t=T} = -q_3 Y_3 \mid_{t=T},\ x \in \Omega(t);$$

$$u = \sum_{i=1}^{NC} C_i \delta(x - x_i) = u_0 + \frac{\xi_3}{s_3}. \tag{24}$$

Введемо рівномірну сітку $\bar{w}_{h\tau} = \bar{w}_h \times \bar{w}_\tau$ з кроком по простору h та по часу τ, $x \in [l_1(t), l_2(t)]$, $t \in [0, T]$,

$$\bar{w}_h = \{x : x = x_i = l_1(t) + ih, i = \overline{0, N}, Nh + l_1(t) = l_2(t)\},$$

$$\bar{w}_\tau = \{t : t = x_j = j\tau, j = \overline{0, M}, N\tau = T\}.$$

Для кожної із чотирьох задач (–) побудуємо різницеву схему інтегро-інтерполяційним методом. Розглядатимемо схему з ваговим коефіцієнтом $\sigma \in [0, 1]$. Інтегруючи кожне рівняння по проміжках $[t_j, t_{j+1}], [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, а для різницевих еквівалентів крайових умов на лівому та правому кінцях відрізку по проміжках $[t_j, t_{j+1}], [l_1(t), l_1(t) + \frac{h}{2}]$ та $[t_j, t_{j+1}], [l_2(t) - \frac{h}{2}, l_2(t)]$, знаходимо різницеві схеми, а потім і системи лінійних алгебраїчних рівнянь для кожної із задач.

Важливим є те що різницева схема для ξ_3 розв'язується за кроком по часу назад, тобто за $(j+1)$-м шаром шукаємо j-й. Також, якщо в i-й комірці потрібно знайти інтенсивність C, то шукатимемо її за формулою

$$C^{j+1} = u_{0,i} + \frac{p_i^{j+1}}{s_3}. \tag{25}$$

Зупинимося на знаходженні схеми для знаходження вільної межі $\Gamma(t)$, що складається з точок $l_1(t), l_2(t)$. Проінтегруємо (9) по проміжках $[t_j, t_{j+1}]$, $[l_1(t), l_1(t) + h]$ та $[l_2(t) - h, l_2(t)]$. Отримаємо

$$\frac{1}{h\tau}\int_{l_2(t)-\frac{h}{2}}^{l_2(t)}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dl_2(t)}{dt}dxdt=-\frac{k}{h\tau}\int_{l_2(t)-\frac{h}{2}}^{l_2(t)}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial Y_1}{\partial x}dxdt,$$

$$\frac{1}{h}\int_{l_2(t)-\frac{h}{2}}^{l_2(t)}\frac{l_2(t_{j+1})-l_2(t_{j+1})}{\tau}dx=-\frac{k}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(Y_1(l_2(t))-Y_1(l_2(t)-\frac{h}{2}))dt,$$

$$l_{2,t}^j=-\frac{k}{h}(Y_{1,N}-Y_{1,N-1}). \tag{26}$$

Аналогічно, отримаємо

$$l_{1,t}^j=\frac{k}{h}(Y_{1,1}-Y_{1,0}). \tag{27}$$

Відповідно рівняння для знаходження вільної межі на кожному наступному кроці знаходимо згідно (26), (27) формули

$$l_1^{j+1}=l_1^j+\frac{k}{h\tau}(Y_{1,1}^j-Y_{1,0}^j), \tag{28}$$

$$l_2^{j+1}=l_2^j+\frac{k}{h\tau}(Y_{1,N-1}^j-Y_{1,N}^j). \tag{29}$$

5. Результати обчислювального експерименту

Для побудови чисельного експерименту надамо значення усім невідомим параметрам та функціям [11]. Діагональна матриця дифузії має вигляд $D=[4,2\times10^{-3},1\times10^{-15},0,22]cm^2$ на добу; коефіцієнти витрат: $r_1=$ $=q_1=q_3=0,1,s_3=0,2$; коефіцієнти, що відповідають за темпи росту: $a=[1,2\times10^{-2},6\times10^{-7},11,3]$ на добу; коефіцієнти взаємовпливу між клітинами та ліками: $b_{1,2}=b_{2,1}=b_{2,3}=1,0\times10^{-4},b_{1,3}=0,5$. Ваговий коефіент σ у різницевій схемі оберемо як $\sigma=\frac{1}{2}$ (отримаємо схему Кранка-Ніколсона із точністю апроксимації $o(h^2+\tau^2)$). Коефіцієнт k, що фігурує в умовах, накладених на вільну межу, дорівнює 6000.

Початковим станам надаємо таких значень: $Y_1(x,0)=Y_1^0(x)=$ $=w\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, де $w=0,001,m=0,0,\sigma^2=0,02$, тобто $Y_1\sim N(0;0,02)$; $Y_2(x,0)=Y_2^0(x)=const\frac{1}{b-a}$, де, наприклад, $const=0,02$, тобто Y_2 рівномірно розподілений; $Y_3(x,0)=Y_3^0(x)=0$; $u_0(x)=w_1\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $w_1=0,001,m=0,0,\sigma_1^2=0,02$, тобто $u_0\sim N(0;0,02)$; $l_1(0)=0,l_2(0)=1$ — початкові значення вільної межі злоякісної пухлини. Результати обчислюваного експерименту представимо у вигляді табл. 1, де T — час, вимірюваний у добах, NC — кількість рівномірно розподілених гранул з ліками, $Y_{1,max}(0)$ — максимальне значення відносної густини хворих клітин на відрізку $x\in\Omega(0)$ при $t=0$, $Y_{1,max}(T)$ — максимальне значення відносної густини хворих клітин на відрізку $x\in\Omega(T)$ при $t=T$, $\Omega(0)$ — межа пухлини при $t=0$; $\Omega(T)$ — межа пухлини при $t=T$.

Аналізуючи результати табл. 1, бачимо, що лікування протягом двох днів із щоденною дозою у 4 гранули дає практичне знешкодження пухлини: її розміри зменшуються у 10 раз, а відносної густини у 500. Лікування ж у перший день дає практично непомітне зменшення розмірів пухлини, зате більшою кількістю введених ліків можна отримати значне зменшення щільності злоякісних клітин, проте при цьому більше постраждають здорові клітини.

Таблиця 1. Результати обчислювального експерименту.

№	T	NC	$Y_1(max, 0)$	$Y_1(max, T)$	$\Omega(0)$	$\Omega(T)$
1	1	1	0,00282	0,00165	[0; 1]	[0,00509; 0,99492]
2	1	4	0,00282	0,00160	[0; 1]	[0,00496; 0,99530]
3	1	40	0,00282	0,00082	[0; 1]	[0,00387; 0,99801]
4	2	1	0,00282	0,00104	[0; 1]	[0,278; 0,721]
5	2	4	0,00282	0,000005	[0; 1]	[0,45; 0,54]

6. Висновки

В роботі сформулювано однофазну задачу Стефана для модифікованої моделі Чакрабарті-Хансона доставки ліків до злоякісних пухлин із точковим керуванням. Варіаційним методом знайдено рівняння стану, допоміжні рівняння, оптимальні умови на керування та невідому рухому межу, побудовано обчислюваний метод розв'язку поставленої задачі. Змодельовано процес дії цитостатиків на злоякісну пухлину, експериментально визначено оптимальний термін та кількість ліків, необхідних для лікування.

Література

1. Jan R. K. Transport of molecules, particles and cells in solid tumors / R. K. Jan // Annual Review of Biomedical Engineering. — 1999. — V. 1. — P. 241–263.
2. Jang S. H. Drug delivery and transport in solid tumors / S. H. Jang, M. G. Lu, D. Wientjes, J. L. S. Au // Pharmaceutical Research. — 2003. — V. 20. — P. 1337–1350.
3. Baxter L. T. Transport of fluid and macrocolecules in tumours. I. Role of interstitial pressure and convection / L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1989. — V. 37. — P. 77–104.
4. Baxter L. T. Transport of fluid and macrocolecules in tumours. II. Role of heterogeneous perfusion and lymphatics / L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1990. — V. 40. — P. 246–263.
5. Baxter L. T. Transport of fluid and macrocolecules in tumours. III. Role of binding and metabolism /L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1991 — V. 41. — P. 5—23.
6. Baxter L. T. Transport of fluid and macrocolecules in tumours. IV. A macroscopic model of a perivascular distribution / L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1991. — V. 41. — P. 252–272.

7. Lankelma J. A mathematical model of drug transport in human breast cancer / J. Lankelma, R. F. Luque, H. Dekker et al. // Macrovascular research. — 1999. — V. 59. — P. 149–161.
8. Ward J. P. Mathematical modelling of drug transport in tumor multicell spheroids and monolayer cultures / J. P. Ward, J. R. King // Mathematical Biosciences. — 2003. — № 2. — P. 177–207.
9. Tzafriri A. R. Mathematical modeling and optimization of drug delivery from intratumorally injected microspheres / A. R. Tzafriri, E. I. Lerner, M. Flashner-Barak et al. // Clinical Cancer Research. — 2005. — V. 11. — P. 826–834.
10. Kaowumpai W. Development of a mathematical model for doxorubicin controlled release system using Pluronic gel for breast cancer [Text] /W. Kaowumpai, W. Koolpiruck, K. Viravaidya // Biomedical Engineerings: Abstracts of the 2nd International Symposium. — Bangkok, 2006. — P. 65–70.
11. Chakrabarty S. P. Optimal controle of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model / S.P. Chakrabarty, F.B. Hanson // Proceedings of American Control Conference. — 2005. — P. 973–978.
12. Ляшко Н. И. Математическое моделирование и оптимизация внутриопухолевого распределения лекарств / Н. И. Ляшко, Д. А., Клюшин, Ю. Н. Онопчук // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — P. 147–154.
13. Ляшко С. І. Математичне моделювання конвективного переносу цитостатиків усередині ракової пухлини / С. І. Ляшко, Н. І. Ляшко, Д. А. Клюшин // Доповіді НАН України. — 2008. — №2. — P. 30–35.
14. Клюшин Д.А. Варіаційний підхід до моделювання і оптимізації розподілу ліків і раковій пухлині / Д. А. Клюшин, Н. І. Ляшко, С. І. Ляшко та ін. // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 1. — С. 1–6.
15. Карабін Л.Д. Оптимальне точкове керування переносом цитостатиків у злоякісній пухлині / Л. Д. Карабін, Д. А. Клюшин // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2. — С. 10—23.
16. Bazaliy B.V. A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: an application to a model of tumor growth / B.V. Bazaliy, A. Friedman // Communication PDE. — 2003. — 28. — № 3–4. — P. 627–675.
17. Bazaliy B.V. The Hele-Shaw problem with surface tension in a half plane: A model problem / B.V. Bazaliy, A. Friedman // Journal of Differential Equations. — 2005. — V. 216. — P. 387–438.
18. Bazaliy B. V. Global existence and asymptotic stability for an elliptic-parabolic free boundary problem: an application to a model of tumor growth / B. V. Bazaliy, A. Friedman // Indiana Univ. Math. J. — 2003. — 5. — № 5. — P. 1265–1304.
19. Friedman A. Free boundary problems arising in tumor models // Rend. Mat. Acc. Lincei — 2004. — S. 9. — V. 15. — P. 161–168.
20. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М.: Мир, 1968. — 428 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 11.07.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ В КОНТЕЙНЕРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С КРУГОВЫМИ СТЕЛЛАЖАМИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПОВЕДЕНИЯ

А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова

Резюме. Рассматривается задача оптимальной упаковки цилиндров и параллелепипедов в параболический контейнер с круговыми стеллажами с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость). Строится математическая модель с использованием метода phi-функций Стояна. Предлагается алгоритм решения задачи. Приводится тестовый пример.

Введение

Оптимизационные 3D-задачи размещения [1] имеют широкий спектр применения при исследовании актуальных проблем биологии, медицины, материаловедения, в нанотехнологиях, робототехнике, энергетике, машиностроении и т.д. Особый интерес представляют задачи упаковки, возникающие при проектировании кораблей, экранированных машин, платформ с буровой установкой, космических кораблей и спутников.

Этот класс задач относится к NP-сложным. Поэтому для решения задач используются как правило эвристические методы. В основе предлагаемых алгоритмов: теоретический анализ, тестовая задача с оптимальными решениями, инженерное применение. Однако алгоритм теоретического анализа является достаточно трудоемким, алгоритм инженерного применения — еще более сложный для ряда случаев, поэтому чаще всего проводят оценку при помощи тестовой задачи. Речь идет о максимизации коэффициента заполнения цилиндрического контейнера конгруэнтными цилиндрами равной высоты. В одной из последних монографий [2] предложены современные подходы к решению задач упаковки в космической технике "space engineering". В основе — MILP-алгоритмы, для применения которых используется аппроксимация размещаемых 3D-объектов ориентированными параллелепипедами. В этой книге приводится также постановка задачи размещения неориентированных объектов в параболический контейнер. Приводится математическая модель задачи с использованием phi-функций Стояна [3]. Phi-функции позволяют описывать математические модели задач упаковки в виде задач нелинейной оптимизации с целью применения для их решения методов локальной и глобальной оптимизации. В современных

публикациях, посвященных 3D-задачам упаковки с использованием phi-функций, рассматриваются эффективные методы решения задач размещения цилиндров, параллелепипедов, шаров и сфероцилиндров в цилиндре и параллелепипеде минимальной высоты [4] .

В данной работе предлагается математическая модель и метод решения 3D-задачи оптимальной упаковки цилиндров и параллелепипедов в параболический контейнер с круговыми стеллажами (pallet cradle) с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу размещения в следующей постановке. Пусть Ω — контейнер (например, модульный отсек ракеты), заданный в системе координат $OXYZ$ следующим образом: $\Omega = Q \cap G$, где $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 + y^2 - a \le 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z \le 0\}$. Контейнер Ω разделен круговыми слеллажами $S_k, k = 1, 2, ..., m$ на отсеки: Ω^1, Ω^2,. . . ., Ω^m, при этом S_1 — основание контейнера Ω. Для простоты изложения, полагаем $m = 3$. Расстояние между S_1 и S_2 определяется как t_1, а между S_2 и S_3 — t_2. Следовательно, S_1, S_2 и S_3 — это круги радиусами $r_1 = \sqrt{a}$, $r_1 = \sqrt{a - t_1}$ и $r_1 = \sqrt{a - t_1 - t_2}$, соответственно. Обозначим $a - t_1 - t_2$ через t_3 (рис.1а).

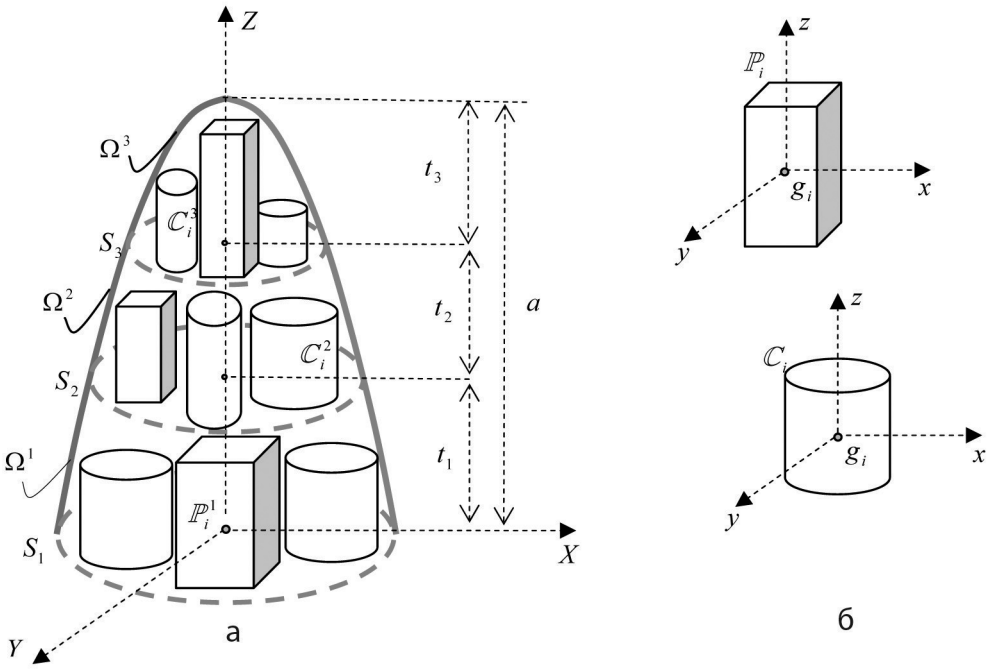


Рис. 1. а) Система Ω_M, б) элементы множества M: $\mathbb{C}_i$ и $\mathbb{P}_i$

Имеется множество M элементов (например, модулей), состоящее из цилиндров $\mathbb{C}_i$, $i \in I_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$ с метрическими характеристиками (r_i, h_i) и параллелепипедов $\mathbb{P}_i$, $i \in I_2 = \{n_1 + 1, ..., n_1 + n_2 = n\}$ с

метрическими характеристиками (w_i, l_i, h_i) (рис. 1б), при этом $h^k \le t^k$, $h^k = \max\{h_i^k, i \in I^k\}$. Каждый элемент $\mathbb{C}_i$ задан в собственной системе координат $O'x'y'z'$, а каждый элемент $\mathbb{P}_i$ — в $O''x''y''z''$.

Контейнер Ω с упакованными в нем элементами множества M — механическая система, в дальнейшем, — система Ω_M.

Осуществим разбиение элементов множества M на группы $M^k = \{\mathbb{C}_i, i \in I_1^k, \mathbb{P}_i, i \in I_2^k\}$, где

$I_1^1 = \{1, 2, ..., n_1^1\}$, $I_2^1 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_2^1\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_1,

$I_1^2 = \{n_1^1 + 1, n_1^1 + 2, ..., n_1^2\}$, $I_2^2 = \{n_2^1 + 1, n_2^1 + 2, ..., n_2^2\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_2,

$I_1^3 = \{n_1^2 + 1, n_1^2 + 2, ..., n_1^3\}$, $I_2^3 = \{n_2^2 + 1, n_2^2 + 2, ..., n_2^3\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_3, $n_1^3 = n_1$, $n_2^3 = n$.

Заданы минимально допустимые расстояния σ_{ij} и σ_i между каждой парой элементов $M_i^k \in M^k$ и $M_j^k \in M^k$, $i, j \in I^k = \{I_1^k \bigcup I_2^k\}$, $i \ne j$, а также между каждым элементом $M_i^k \in M^k$, $i \in I^k$ и боковой поверхностью отсека Ω^k, соответственно.

Расположение цилиндров $\mathbb{C}_i$ на полках Sk внутри отсеков Ω^k определяется параметрами размещения $u_i = (v_i, h_i)$, $i \in I_1^1$, $u_i = (v_i, t_1 + h_i)$, $i \in I_1^2$, и $u_i = (v_i, t_1 + t_2 + h_i)$, $i \in I_1^3$, где $v_i = (x_i, y_i)$. По аналогии, определим параметры размещения $\mathbb{P}_i$ следующим образом: $u_i = (v_i, \alpha_i, h_i)$, $i \in I_2^1$, $u_i = (v_i, \alpha_i, t_1 + h_i)$, $i \in I_2^2$, и $u_i = (v_i, \alpha_i, t_1 + t_2 + h_i)$, $i \in I_2^3$, где $v_i = (x_i, y_i)$, α_i — угол поворота $\mathbb{P}_i$ вокруг оси $O_i''z$.

Таким образом, вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^{3n_1+4n_2}$ определяет в $\mathbb{R}^3$ однозначно размещение элементов множества M. Поскольку z_i, является константой для каждого элемента $M_i^k \in M^k$, $i \in I^k$, то вектор переменных $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^\xi$, $\xi = 2n_1 + 3n_2$.

Каждый элемент множества M представляет собой однородое тело массой m_i, $i \in I_n$. Центр масс g_i элемента $\mathbb{C}_i$ ($\mathbb{P}_i$) совпадает с центром его симметрии в точке O_i' (O_i'') , т.е. $g_i = (0, 0, 0)$ (Рис. 1б).

Пусть $s{=}(x_s, y_s, z_s){\in}\Omega$ центр масс контейнера Ω, а $g{=}(x_g, y_g, z_g){\in}\Omega_M$ центр масс множества M, координаты которого находятся по формулам

$$x_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ y_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

$$z_g = \frac{\sum_{i=1}^{n_1^1} m_i h_i/2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i h_i/2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i (t_1 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \tag{1}$$
$$+ \frac{\sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i (t_1 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i (t_1 + t_2 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} +$$
$$+ \frac{\sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i (t_1 + t_2 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Задача. Разместить элементы множества M на полках $S_k, k = 1, 2, 3$ внутри отсеков $\Omega^k, k = 1, 2, 3$, с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения системы Ω_M так, чтобы расстояние d между центром тяжести g множества M и заданным центром тяжести $s \in \Omega$ достигало своего минимального значения.

2. Математическая модель и метод решения задачи

Математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$F(v^*) = \min_{v \in W \in R^\xi} F(v)\ , \tag{2}$$

$$F(v) = (x_g - x_s)^2 + (y_g - y_s)^2 + (z_g - z_s)^2, \tag{3}$$

$$W = \{v \in R^\xi : \Upsilon(v) \geq 0, G_1(v) \geq 0, G_2(v) \geq 0\}, \tag{4}$$

где x_g, y_g, z_g определены соотношениями (1),

$\Upsilon(u) \geq 0$ — ограничение на размещение элементов множества Mв контейнере Ω:

$$\Upsilon(v) = \min\{\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}} - \sigma_{ij}, i < j \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}} - \sigma_{ij}, i < j \in I_2^k,$$
$$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}} - \sigma_{ij}, i \in I_1^k, j \in I_2^k, \widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{C}} - \sigma_i, i \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{P}} - \sigma_i, i \in I_2^k, k = 1, 2, 3\}, \tag{5}$$

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}}$ — нормализованная *phi*-функция для цилиндров $\mathbb{C}_i$ и $\mathbb{C}_j$,

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}}$ — нормализованная *phi*-функция для параллелепипедов $\mathbb{P}_i$ и $\mathbb{P}_j$,

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}}$ — нормализованная *phi*-функция для цилиндра $\mathbb{C}_i$ и параллелепипеда $\mathbb{P}_j$,

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{C}}$ — нормализованная *phi* -функция для цилиндра $\mathbb{C}_i$ и Ω^*,

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{P}}$ — нормализованная *phi*-функция для параллелепипеда $\mathbb{P}_i$ и Ω^*;

$G_1(v) \geq 0, G_2(v) \geq 0$ — ограничения поведения системы Ω_M [5], где

$$G_1(v) = \min\{g_{11}(v), g_{12}(v), g_{13}(v)\}, \tag{6}$$

$$G_2(v) = \min\{g_{21}(v), g_{22}(v), g_{23}(v)\}, \tag{7}$$

$g_{11}(v), g_{12}(v), g_{13}(v)$ — ограничения моментов инерции системы Ω_M,

$$g_{11}(v) = -|J_x| + \Delta J_x, g_{12}(v) = -|J_y| + \Delta J_y, g_{13}(v) = -|J_z| + \Delta J_z, \tag{8}$$

$g_{21}(v), g_{22}(v), g_{23}(v)$ — ограничения равновесия системы Ω_M,

$$g_{21}(v) = -|\varphi_x| + \Delta\varphi_x, g_{22}(v) = -|\varphi_y| + \Delta\varphi_y, g_{23}(v) = -|\varphi_z| + \Delta\varphi_z, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
J_x = &\sum_{i=1}^{n_1} J'_{x_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} (J''_{x_i}\cos^2\alpha_i + J''_{y_i}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) - (y_g^2 + z_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_y = &\sum_{i=1}^{n_1} J'_{y_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} (J''_{x_i}\cos^2\alpha_i + J''_{y_i}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
&+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) - (x_g^2 + z_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{z_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{z_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) - (x_g^2 + y_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;$$

J'_{x_i},J'_{y_i},J'_{z_i} — моменты инерции элементов $\mathbb{C}_i$ в системе координат $O'x'y'z'$:

$$J'_{x_i} = J'_{y_i} = \frac{1}{12}m_i(3r_i^2 + h_i), J'_{z_i} = \frac{1}{2}m_i r_i^2, \tag{11}$$

J''_{x_i}, J''_{y_i}, J''_{z_i} — моменты инерции элементов $\mathbb{P}_i$ в собственной системе координат $O''x''y''z''$:

$$J''_{x_i} = \frac{1}{12}m_i(w_i^2 + h_i^2), J''_{y_i} = \frac{1}{12}m_i(l_i^2 + h_i^2), J''_{z_i} = \frac{1}{12}m_i(l_i^2 + w_i^2); \tag{12}$$

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z — углы между главной центральной осью механической системы и осями системы координат $OXYZ$:

$$\phi_x = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right), \varphi_y = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{xz}}{J_z - J_x}\right), \\ \varphi_z = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}\right), \tag{13}$$

$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$ — допустимые отклонения $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$;

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — центробежные моменты инерции системы по отношению к основной системе координат $OXYZ$, которые определяются следующими соотношениями:

$$J_{xy} = \frac{J_U - J_V}{2}\sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - x_g y_g \sum_{i=1}^{n} m_i;$$

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i x_i h_i/2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i x_i h_i/2 + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i x_i (t_1 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i x_i (t_1 + h_i/2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i x_i (t_1 + t_2 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i x_i (t_1 + t_2 + h_i/2) - x_g z_g \sum_{i=1}^{n} m_i; \tag{14}$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i y_i h_i/2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i y_i h_i/2 + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i y_i (t_1 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i y_i (t_1 + h_i/2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i y_i (t_1 + t_2 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i y_i (t_1 + t_2 + h_i/2) - y_g z_g \sum_{i=1}^{n} m_i;$$

J_U, J_V — моменты инерции относительно главных осей U и V инерции системы, соответственно,

$$
\begin{aligned}
J_U = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{x_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{x_i} + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2); \\
J_V = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{y_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{y_i} + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Учитывая особенности рассматриваемой задачи, нормализованные *phi*-функции, приведенные в (5), могут быть заменены нормализованными *phi*-функциями для 2D-объектов следующим способом:

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{CC}$ $\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{RR}, \widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{CR}, i, j \in I_k, i \neq k$, где $\widetilde{\Phi}_{ij}^{CC}$ — нормализованная *phi*-функция для двух кругов C_i и C_j , $\widetilde{\Phi}_{ij}^{RR}$ — нормализованная *phi*-функция для двух вращающихся прямоугольников R_i и R_j, $\widetilde{\Phi}_{ij}^{CR}$– нормализованная *phi*-функция для круга C_i и вращающегося прямоугольника R_j. Метрические характеристики C_i и R_i определяются как (r_i) и (w_i, l_i) соответственно.

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{C}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$, $i \in I_1^k$, где $\widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$ — нормализованная *phi*-функция для C_i и $S_{ki}^* = R^2 \backslash int S_{ki}$,

S_{ki}, $k = 1, 2, 3$, — круги радиуса $r_{1i} = \sqrt{a - h_i}$, $r_{2i} = \sqrt{a - t_1 - h_i}$, $r_{3i} = \sqrt{a - t_1 - t_2 - h_i}$.

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{P}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$, $i \in I_2^k$, где $\widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* R}$ — нормализованная *phi*-функция для вращающегося прямоугольника R_i и S_{ki}^*.

Таким образом, ограничения на размещение объектов в контейнере Ω преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered}\Upsilon(u) = \min\{\widetilde{\Phi}_{ij}^{CC} - \sigma_{ij}, i < j \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_{ij}^{RR} - \sigma_{ij}, i < j \in I_2^k, \widetilde{\Phi}_{ij}^{CR} - \sigma_{ij}, \\ i \in I_1^k, j \in I_2^k, \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C} - \sigma_i, i \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* R} - \sigma_i, i \in I_2^k, k = 1,2,3\}.\end{gathered} \tag{16}$$

В терминах псевдонормализованных *phi*-функций [3] область допустимых решений, описанная (16), может быть определена так:

$$\begin{gathered}\Upsilon(u) = \min\{\widehat{\Phi}_{ij}^{CC}, i < j \in I_1^k, \widehat{\Phi}_{ij}^{RR}, i < j \in I_2^k, \\ \widehat{\Phi}_{ij}^{CR}, i \in I_1^k, j \in I_2^k, \widehat{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}, i \in I_1^k, \widehat{\Phi}_i^{S_{ki}^* R}, i \in I_2^k, k = 1,2,3\},\end{gathered} \tag{17}$$

где $\widehat{\Phi}$ — псевдонормализованная *phi*-функция.

В силу особенностей области допустимых решений [6]

$$W = W_1 \bigcup ... \bigcup W_k \bigcup ... \bigcup W_\eta. \tag{18}$$

С учетом выражений (17) и (18) задача (2)–(15) может быть сведена к задаче

$$\begin{gathered}F(v^*) = \min\{F(v^{k*}), k = 1,2,...,\eta\}, \\ F(v^{k*}) = \min_{u \in W_k \subset R^\xi} F(v).\end{gathered} \tag{19}$$

Предлагаемый метод решения задачи (19) реализует ускоренный перебор систем неравенств, соответствующих вершинам дерева решений. С целью отсечения бесперспективных вершин дерева решений используется набор правил, основанных на учете верхней оценки значения функции цели, симметрии W и несовместности систем при решении последовательности задач нелинейной оптимизации.

3. Тестовый пример

Проиллюстрируем результаты численных экспериментов на тестовом примере.

Пусть $a = 16$, $t_1 = 4$, $t_2 = 2$, $s = (0,0,0)$; $M = \{\mathbb{C}_i,\ i = 1,...,7, \mathbb{P}_i,\ i = 8,...,12\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1.1$, $r_3 = 1.2$, $r_4 = 1$, $r_5 = 1.1$, $r_6 = 1$, $r_7 = 1$, $(w_i, l_i) = (1.33, 0.75)$, $i = 8,...,12$, $h_i = 0.88$, $i = 1,...,12$; $m_1 = 3.142$, $m_2 = 3.8013$, $m_3 = 4.524$, $m_4 = 3.142$, $m_5 = 3.801$, $m_6 = 3.142$, $m_7 = 3.142$, $m_i = 4$, $i = 8,...,12$; σ_i=0.2,$i = 1,2\ldots,12$, σ_{ij}=0.2, $i \neq j \in \{1,...,12\}$, $M^1 = \{\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{P}_8, \mathbb{P}_9\}$, $M^2 = \{\mathbb{C}_4, \mathbb{C}_5, \mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{11}\}$, $M^3 = \{\mathbb{C}_6, \mathbb{C}_7, \mathbb{P}_{12}\}$. Не теряя общности, полагаем $(x_s, y_s, z_s) = (0,0,0)$.

Вектор переменных $v = (v_1, v_2, ..., v_{12}) \in \mathbb{R}^{29}$.

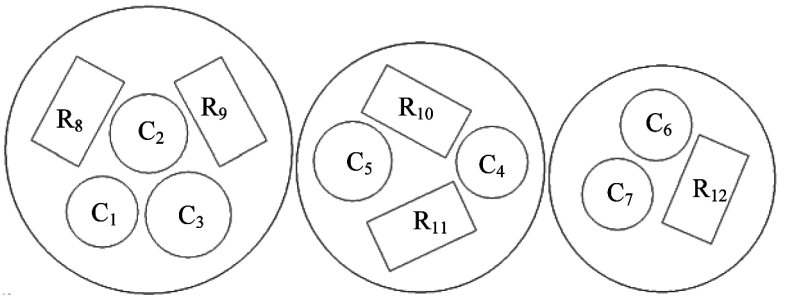


Рис. 2. Оптимальное размещение объектов на стеллажах в соответствии с точкой v^* (проекция)

На рисунке 2 приведено оптимальное размещение 2D-объектов $\{C_i, i = 1, ..., 7,\ R_i, i = 8, ..., 12\}$, соответствующее точке

$$v^* = (x_1^*, y_1^*, ..., x_7^*, y_7^*, x_8^*, y_8^*, \theta_8^*, ..., x_{12}^*, y_{12}^*, \theta_{12}^*),$$

где

$$(x_1^*, y_1^*) = (-1.29956, -1.71262), (x_2^*, y_2^*) = (0.00122, 0.45696),$$
$$(x_3^*, y_3^*) = (1.09994, -1.78878), (x_4^*, y_4^*) = (1.99438, 0.14595),$$
$$(x_5^*, y_5^*) = (-1.88631, 0.17553), (x_6^*, y_6^*) = (-0.16247, 1.49016),$$
$$(x_7^*, y_7^*) = (-1.24515, -0.42938), (x_8^*, y_8^*, \theta_8^*) = (-1.98972, 1.08949, 5.21332),$$
$$(x_9^*, y_9^*, \theta_9^*) = (1.995774, 1.078259, 1.075465),$$
$$(x_{10}^*, y_{10}^*, \theta_{10}^*) = (-0.124421, 1.553304, 0.498449),$$
$$(x_{11}^*, y_{11}^*, \theta_{11}^*) = (0.023846, -1.616274, 2.700283),$$
$$(x_{12}^*, y_{12}^*, \theta_{12}^*) = (1.201675, -0.285530, 1.973668).$$

Заметим, что данное размещение соответствует оптимальному размещению 3D-объектов $\{\mathbb{C}_i, i = 1, ..., 7,\ \mathbb{P}_i, i = 8, ..., 12\}$ в точке u^*.

В данном примере число η в (19) равно 4947802324992. Для поиска глобального минимума использовалось η^*=723. Время на поиск локального минимума составляет меньше секунды.

Выводы

Результаты исследований, предложенные в данной работе могут быть использованы при создании современных компьютерных технологий для решения широкого класса прикладных 3D-задач компоновки, возникающих в ракетостроении. Предложенный подход к моделированию и решению задачи размещения 3D-объектов в параболическом контейнере с учетом ограничений поведения может быть распространен на случай иных пространственных форм контейнера с круговыми стеллажами, в частности, цилиндра или усеченного конуса.

Работа выполнена при поддержке Научно Технологического Центра в Украине и НАН Украины (проект №5710).

Литература

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems/ G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // European Journal of Operational Research, — 2007. — V. 183, Iss. 3, 16, — P. 1109–1130.
2. Fasano G. Modeling and Optimization in Space Engineering Springer Optimization and Its Applications / G. Fasano, J. Pinter — Publisher Springer StateplaceNew York, —2012. — V. 73, — 404 p.
3. Chernov N. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research, — 2012. — V. 2012, Article ID 346358, — 31 p., doi:10.1155/2012/346358.
4. Stoyan Y. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them / Y. Stoyan, A. Chugay // European J. Oper. Res., — 2008. — 197, — P. 446–455.
5. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem /N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova. // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2010. — V. 43, №5 , — P. 535–553.
6. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами/ Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — Т. 48, №3. — С. 12–17.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Дм. Пожарского, 2/10, Харьков, Украина.

Поступила 09.01.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.61, 517.928

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧАХ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О. Г. Павлюченко

Резюме. В статье рассматривается задача построения оптимального управления в виде обратной связи от состояния линейной динамической системы, которое минимизирует интегрально-квадратичный функционал при наиболее неблагоприятных возмущениях, действующих на систему. Получено однопараметрическое семейство минимаксных регуляторов, при которых заданный критерий не превышает некоторого порогового значения. Оптимальное минимаксное управление находится путем поиска минимально допустимого порогового значения функционала с помощью численных итерационных методов.

Большинство реальных систем или объектов управления функционирует в условиях неопределенности, связанной с недостаточной информацией об объекте управления, неточностью его математической модели, исходных данных и т.д. Поэтому задачи управления объектами, функционирующими в условиях неопределенности, уделялось и продолжает уделяться большое внимание [1–5]. В данной работе рассматривается и предлагается решение задачи построения гарантированного управления линейной системой, находящейся под воздействием возмущений неизвестной природы, но принадлежащих заданной ограниченной области в виде заданного еллипсоида.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которые описывают динамику состояния $(x(t))$ при управлении $(u(t))$ и внешних возмущениях $(f_0, f(t))$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f(t), & 0 < t \le T, \\ x(0) = Lf_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R^m$ — вектор управления, $f(t) \in R^r$ — неизвестный вектор внешних возмущений, действующих на систему, $f_0 \in R^l$ — также неизвестный вектор, возмущающий систему (1) в начальный момент времени, $A(t) \in R^{n\times n}$, $B(t) \in R^{n\times m}$, $K(t) \in R^{n\times r}$, $L \in R^{n\times l}$ — заданные матрицы.

Предполагается, что область допустимых возмущений задается в виде эллипсоида

$$S_f = \left\{ f : f = (f_0, f(\cdot)),\ (F_0 f_0, f_0) + \int_0^T (F(t)f(t), f(t))\, dt \le 1 \right\}, \tag{2}$$

где $F_0 = F_0^T > 0$, $F(t) = F^T(t) > 0$ — известные весовые матрицы.

Введем интегрально-квадратический критерий оптимальности

$$I(u,f)=(Hx(T),x(T))+\int_0^T\left((G(t)x(t),x(t))+(D(t)u(t),u(t))\right)dt, \quad (3)$$

где $H=H^T\geq 0$, $G(t)=G^T(t)\geq 0$, $D(t)=D^T(t)>0$ — заданные матрицы и рассмотрим следующую задачу минимаксного управления.

Найти оптимальное управление u^*, удовлетворяющее условию

$$J(u^*)=\inf_{u\in U}\left\{\sup_{f\in S_f} I(u,f)\right\}, \quad (4)$$

где $I(u,f)$ — функционал вида (3).

Управление u^* будем называть минимаксным.

Отметим, что в этой постановке задачи в отличии, например, от работ [2, 3, 5], операция supremum вынесена из-под интеграла и берется от всего интегрально-квадратичного критерия.

Для решения этой задачи преобразуем сначала множество допустимых возмущений S_f.

Для этого напомним [6], что любая симметричная положительно определенная матрица F допускает факторизацию вида $F=\Phi\Lambda\Phi^T$, где Φ — ортогональная матрица ($\Phi^{-1}=\Phi^T$), состоящая из ортонормированных собственных вектор-столбцов матрицы F, $\Lambda=diag\,(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r)$ — диагональная матрица собственных значений $\lambda_i>0$ матрицы F. Если обозначить $\Lambda^{1/2}=diag\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},...,\sqrt{\lambda_r}\right)$, то матрицу F можно представить в виде $F=F^{1/2}\cdot F^{1/2}$, где $F^{1/2}=\Phi\Lambda^{1/2}\Phi^T$ $\left(F^{1/2}=\left(F^{1/2}\right)^T\right)$.

Введем теперь множество $\Omega_{n,m}$ вида

$$\Omega_{n,m}=\left\{\begin{pmatrix} a_0\\ a(t)\end{pmatrix}:\ \ a_0\in R^n,\ a(t)\in L_2^m(0,T);\right.$$
$$\left. a_0^Ta_0+\int_0^T a^T(t)a(t)dt<\infty\right\},$$

где

$$L_2^n(0,T)=\Big\{a:\ a=a(t)=(a_1(t),a_2(t),...,a_n(t))^T,$$
$$a_i(t)\in L_2(0,T),\ i=1,2,...,n\Big\}$$

и определим на нем скалярное произведение и норму

$$\langle a,b\rangle_{\Omega_{n,m}}=a_0^Tb_0+\int_0^T a^T(t)b(t)dt,\ \|a\|^2_{\Omega_{n,m}}=$$
$$=\langle a,a\rangle_{\Omega_{n,m}}=a_0^Ta_0+\int_0^T a^T(t)a(t)dt,$$

где $a=\begin{pmatrix} a_0\\ a(t)\end{pmatrix}\in\Omega_{n,m}$, $b=\begin{pmatrix} b_0\\ b(t)\end{pmatrix}\in\Omega_{n,m}$.

Если ввести обозначения

$$w_0=F_0^{1/2}f_0,\quad w(t)=F^{1/2}(t)f(t), \quad (5)$$

то левую часть неравенства, задающего ограничения (2), можно преобразовать так

$$(F_0 f_0,\, f_0) + \int_0^T (F(t)f(t), \quad f(t))\, dt = (w_0,\, w_0) + \\ + \int_0^T (w(t), w(t))\, dt = \langle w, \quad w\rangle_{\Omega_{l,r}} = \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\,, \tag{6}$$

где $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w(t) \end{pmatrix} \in \Omega_{l,r}$.

Таким образом, множество S_f эквивалентно преобразовали к множеству S_w ($S_f \leftrightarrow S_w$) вида

$$S_w = \left\{ w :\ w = (w_0, w(t))\,,\ \|w\|_{\Omega_{l,r}} \le 1 \right\}. \tag{7}$$

Преобразуем теперь систему (1) и критерий (3). Если ввести обозначения

$$v(t) = D^{1/2}(t)u(t), \quad B_v(t) = B(t)D^{-1/2}(t), \\ K_w(t) = K(t)F^{-1/2}(t), \quad L_w = LF_0^{-1/2}, \tag{8}$$

то система (1) запишется так

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t), & 0 < t \le T, \\ x(0) = L_w w_0, \end{cases} \tag{9}$$

а функционал (3) примет вид

$$I(u,f) = (Hx(T), x(T)) + \int_0^T ((G(t)x(t), x(t)) + \\ + (D(t)u(t), u(t)))\, dt = \left(H^{1/2}x(T), H^{1/2}x(T)\right) + \\ + \int_0^T \left(\left(G^{1/2}(t)x(t), G^{1/2}(t)x(t)\right) + (v(t), v(t))\right) dt = I(v,w). \tag{10}$$

Очевидно, что функционал $I(v,w)$ можно представить в виде

$$I(v,w) = \langle z, z\rangle_{\Omega_{n,n+m}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}}\,, \tag{11}$$

где $z = \begin{pmatrix} H^{1/2}x(T) \\ G^{1/2}(t)x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ — вектор контролируемых переменных (параметров).

Поскольку система (9) линейна, то существует линейный передаточный оператор R_v, который зависит от выбранной стратегии управления v, отображающий вектор входных воздействий w в вектор контролируемых переменных z, т.е.

$$z = R_v(w), \quad w \in \Omega_{l,r}, \quad z \in \Omega_{n,n+m}. \tag{12}$$

Таким образом, функционал (11) может быть записан в виде

$$I(u,f) = I(v,w) = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} \tag{13}$$

и тогда, учитывая известные свойства норм линейных ограниченных операторов [7], получаем

$$\sup_{f\in S_f} I(u,f) = \sup_{w\in S_w} \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \sup_{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\le 1} \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \\ = \sup_{w\in\Omega_{l,r}, w\neq 0} \frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} = \|R_v\|^2_{\Omega}\,, \tag{14}$$

где $\|R_v\|_{\Omega}$ — норма передаточного оператора R_v, порожденная нормами пространств $\Omega_{n,m}$.

В итоге исходная оптимизационная задача (4) сводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида

$$J(v) = \sup_{w\in S_w} I(v,w) = \|R_v\|^2 \to \inf_{v\in V}. \tag{15}$$

Для ее решения найдем сначала субоптимальное управление v, удовлетворяющее условию

$$\|R_v\|^2 \le \gamma^2, \tag{16}$$

где γ — некоторое заданное пороговое значение.

Учитывая, что

$$\sup_{w\in\Omega_{l,r}, w\neq 0} \frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} = \|R_v\|^2 \le \gamma^2,$$

приходим к эквивалентному неравенству

$$\frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} \le \gamma^2$$

или $\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} \le 0$ для всех $w \in \Omega_{l,r}$.

Введем обозначение

$$J_\gamma(v,w) = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\,. \tag{17}$$

Поскольку неравенство $J_\gamma(v,w) \le 0$ должно выполняться для всех $w \in \Omega_{l,r}$, то должно быть справедливым и неравенство

$$\sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) \le 0. \tag{18}$$

Таким образом, если управление v удовлетворяет неравенству (16), то оно удовлетворяет и неравенству (18) и наоборот. Учитывая вид функционала $J_\gamma(v,w)$, управление v будем находить из условия

$$\inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) \le 0. \tag{19}$$

Управление v, которое является решением последней оптимизационной задачи будем называть субоптимальным управлением, параметризованым по параметру γ. Учитывая эквивалентность неравенств (16) и (18), приходим к выводу, что субоптимальное управление последней оптимизационной задачи будет также обеспечивать выполнение неравенства (16).

Для решения задачи (19) используем теорию динамических (дифференциальных) игр двоих лиц с нулевой суммой и с ценой игры, определяемой функционалом

$$J_\gamma(v,w) = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}. \qquad (20)$$

В качестве 1-го игрока (v-игрок) выступает конструктор, который с помощью соответствующего выбора стратегии управления v пытается минимизировать свой проигрыш. Конструктор использует функционал $J_\gamma(v,w)$ как меру "стоимости", связанной с выбором стратегии управления. Целью этого игрока является построение регулятора v в форме (8), который минимизирует критерий $J_\gamma(v,w)$ при наиболее неблагоприятных входных воздействиях w. Это ведет к гарантированному качеству выполнения верхнего значения динамической игры

$$r(\gamma) = \inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w). \qquad (21)$$

Далее, если обозначить $r(\gamma^*) = \inf\limits_{\gamma>0} r(\gamma)$ или $\gamma^* = \arg\inf\limits_{\gamma>0} r(\gamma)$, то аналогично [8] можно доказать, что $(\gamma^*)^2 = \inf\limits_{v\in V} \|R_v\|^2$ или $\gamma^* = \inf\limits_{v\in V} \|R_v\|$, где $(\gamma^*)^2$ — минимальное значение критерия (20) при наиболее неблагоприятных возмущениях $w \in \Omega_{l,r}$.

Учитывая (12), преобразуем функционал $J_\gamma(v,w)$

$$\begin{aligned} J_\gamma(v,w) &= \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \\ &= (Hx(T),x(T)) + \int_0^T \left((G(t)x(t),x(t)) + (v(t),v(t))\right) dt - \\ &\quad -\gamma^2 \left((w_0,w_0) + \int_0^T (w(t),w(t))\, dt\right). \end{aligned} \qquad (22)$$

Перед решением задачи $\inf\limits_{v\in L_2^m(0,T)} \sup\limits_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w)$ заметим, что

$$\inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) = \sup_{w_0\in R^l} \left\{ \inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v,w) \right\} \qquad (23)$$

и для решения минимаксной задачи $\inf\limits_{v\in L_2^m(0,T)} \sup\limits_{w\in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v,w)$ используем минимаксный принцип Понтрягина, в соответствии с которым построим функцию Гамильтона вида

$$\begin{aligned} H(x,v,w,\lambda) &= (G(t)x(t),x(t)) + (v(t),v(t)) - \gamma^2 (w(t),w(t)) + \\ &\quad +\lambda^T(t)\left(A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t)\right), \end{aligned}$$

где x и λ удовлетворяют следующей системе сопряженных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \nabla_\lambda H(x,v,w,\lambda) = A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t), \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} = -\nabla_x H(x,v,w,\lambda) = -A^T(t)\lambda(t) - 2G(t)x(t) \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = L_w w_0, \;\; \lambda(T) = \nabla_{x(T)} \left[(Hx(T),\, x(T)) \right] = 2Hx(T).$$

Оптимальное значение v (w) будем находить из условия минимизации (максимизации) функции $H(x, v, w, \lambda)$ по v (w), т.е из условий

$$\nabla_v H(x, v, w, \lambda) = 2v(t) + B_v^T(t)\lambda(t) = 0,$$
$$\nabla_w H(x, v, w, \lambda) = -2\gamma^2 w(t) + K_w^T(t)\lambda(t) = 0,$$

откуда

$$v(t) = -\frac{1}{2} B_v^T(t)\lambda(t), \quad w(t) = \frac{1}{2\gamma^2} K_w^T(t)\lambda(t). \tag{24}$$

Учитывая (24), сопряженную систему преобразуем так

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) - \frac{1}{2} B_v(t) B_v^T(t)\lambda(t) + \frac{1}{2\gamma^2} K_w(t) K_w^T(t)\lambda(t), \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} = -A^T(t)\lambda(t) - 2G(t)x(t), \end{cases} \tag{25}$$

$$x(0) = L_w w_0, \quad \lambda(T) = 2Hx(T). \tag{26}$$

Несложно показать, что сопряженную функцию $\lambda(t)$ этой двухточечной краевой задачи можно представить в виде

$$\lambda(t) = 2P(t)x(t), \tag{27}$$

где $P(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t) \left(B_v(t) B_v^T(t) - \frac{1}{\gamma^2} K_w(t) K_w^T(t) \right) \times \\ \times P(t) - G(t), \\ P(T) = H. \end{cases} \tag{28}$$

Учитывая соотношения (24) и (27), окончательно получим оптимальные значения $v^*(t)$ и $w^*(t)$ соответственно для функций $v(t)$ и $w(t)$

$$v^*(t) = -B_v^T(t)P(t)x(t), \quad w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} K_w^T(t)P(t)x(t). \tag{29}$$

Несложно показать, что значение функционала $J_\gamma(v^*, w^*)$ при этом равно $J_\gamma(v^*, w^*) = w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0$, где E — единичная матрица.

Таким образом, учитывая соотношение (23), получаем

$$\begin{gathered} \inf_{v \in L_2^m(0,T)} \sup_{w \in \Omega_{l,r}} J_\gamma(v, w) = \sup_{w_0 \in R^l} \left\{ \inf_{v \in L_2^m(0,T)} \sup_{w \in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v, w) \right\} = \\ \sup_{w_0 \in R^l} \left\{ J_\gamma(v^*, w^*) \right\} = \quad = \sup_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\}. \end{gathered} \tag{30}$$

Поскольку искомое управление должно удовлетворять условию

$$\inf_{v \in L_2^m(0,T)} \sup_{w \in \Omega_{l,r}} J_\gamma(v, w) \le 0, \tag{31}$$

то из (30) имеем $\sup\limits_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} \leq 0$. Это неравенство справедливо только при выполнении условия

$$L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \leq 0, \tag{32}$$

т.е. матрица $L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E$ должна быть неположительно определенной. В противном случае, как несложно показать

$$\sup_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} = \infty,$$

что противоречит условию (18). Отметим также, что при выполнении условия (32) $\sup\limits_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} = 0$ и достигается при $w_0^* = 0$.

Замечание 1. Используя результаты работы [8], можно показать, что найденные функции $v^*(t)$, $w^*(t)$ являются седловой точкой функционала стоимости $J_\gamma(v, w)$, т.е.

$$\inf_{v \in L_2^m(0,T)} \sup_{w \in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v, w) = \sup_{w \in L_2^r(0,T)} \inf_{v \in L_2^m(0,T)} J_\gamma(v, w) = J_\gamma(v^*, w^*).$$

Замечание 2. Минимаксный принцип Понтрягина дает необходимое условие экстремума решения задачи минимаксного управления. Однако можно показать, что найденная седловая точка $(v^*, w^*) = (v^*(t), w^*(t), w_0^*)$ динамической игры с функционалом стоимости $J_\gamma(v, w)$ удовлетворяет и достаточному условию минимакса.

Учитывая, что $w_0 = F_0^{1/2} f_0$, $w(t) = F^{1/2}(t) f(t)$, $v(t) = D^{1/2}(t) u(t)$, $B_v(t) = B(t) D^{-1/2}(t)$, $K_w(t) = K(t) F^{-1/2}(t)$, $L_w = L F_0^{-1/2}$, окончательно можно сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Оптимальное минимаксное управление системой (1) с неопределенными возмущениями из области (2) и удовлетворяющее условию (4), определяется по формуле*

$$u^*(t) = -D^{-1}(t) B^T(t) P(t) x(t),$$

где $P(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -A^T(t) P(t) - P(t) A(t) + P(t) \times \\ \times \left(B(t) D^{-1}(t) B^T(t) - \frac{1}{(\gamma^*)^2} K(t) F^{-1}(t) K^T(t) \right) P(t) - G(t), \\ P(T) = H. \end{cases} \tag{33}$$

При этом минимальное значение критерия (4) на оптимальном минимаксном управлении

$$J(u^*) = \inf_{u \in U} \left\{ \sup_{f \in S_f} I(u, f) \right\} = (\gamma^*)^2,$$

где γ^* — минимальное положительное число, при котором уравнение имеет ограниченное решение и выполняется условие $\lambda_{\max}(L^T P(0) L - \gamma^2 F_0) \leq 0$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение матрицы).

Замечание 3. Наиболее неблагоприятные возмущения, принадлежащие области допустимых возмущений (2) и действующие на систему (1) определяются соотношениями $f^*(t) = (\gamma^*)^{-2}F^{-1}(t)K^T(t)P(t)x(t)$, $f_0^* = 0$.

Если система (1) стационарна и рассматривается на бесконечном временном интервале

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Kf(t), & 0 < t < \infty, \\ x(0) = Lf_0 \end{cases} \tag{34}$$

с ограничениями на возмущения

$$f \in S_f = \left\{ f : f = (f_0, f(\cdot)),\ (F_0 f_0, f_0) + \int_0^\infty (Ff(t), f(t))\, dt \le 1 \right\} \tag{35}$$

и с критерием

$$I(u, f) = \int_0^\infty ((Gx(t), x(t)) + (Du(t), u(t)))\, dt, \tag{36}$$

то аналогично можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Решение задачи оптимального минимаксного управления для системы (34) с областью допустимых возмущений (35) и с критерием качества (36) имеет вид* $u^*(t) = -D^{-1}B^T Px(t)$, *где* $P = P^T$ *— решение матричного алгебраического уравнения*

$$-A^T P - PA + P\left(BD^{-1}B^T - \frac{1}{(\gamma^*)^2}KF^{-1}K^T\right)P - G = 0, \tag{37}$$

в котором γ^* *удовлетворяет условию* $\gamma^* = \inf\limits_{\gamma} \{\gamma :\ \lambda_{\max}(L^T PL - \gamma^2 F_0) \le$ ≤ 0 *и уравнение (37) имеет ограниченное решение* $\}$.

При этом минимаксное значение критерия (36) равно

$$\inf_{u \in U} \left\{ \sup_{f \in S_f} I(u, f) \right\} = I(u^*, f^*) = (\gamma^*)^2,$$

а наиболее неблагоприятные возмущения определяются соотношениями $f^*(t) = \gamma^{-2}F^{-1}K^T Px(t), \quad f_0^* = 0$.

Замечание 4. Величину γ^*, определяющую оптимальное минимаксное управление, можно найти с помощью численных итерационных методов, например, методом бисекции.

Выводы.

В работе дается решение задачи минимаксного управления для линейных динамических систем, функционирующих в условиях неопределенности с адитивными возмущениями, принадлежащими заданной области в виде еллипсоида. Решение представлено в виде регулятора от состояния системы, матрица усиления обратной связи которого зависит от матрицы, являющейся решением параметризованного матричного уравнения типа Риккати. Минимально допустимое значение скалярного параметра, определяющее оптимальное минимаксное управление, может быть найдено итерационными численными методами.

Литература

1. Наконечный А. Г. К теории минимаксного управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Наконечный // В кн. : Оптимальное управление в механических системах. Тезисы III Всесоюзной конференции (Киев, 1979 г.) — Киев, 1979. — Т. II. — С. 95.
2. Наконечный А. Г. О построении минимаксных регуляторов для линейных стохастических систем / А. Г. Наконечный // Кибернетика — 1979. — № 5. — С. 143–145.
3. Кириченко Н. Ф. Аналитическое конструирование минимаксных регуляторов в линейных системах /Н. Ф. Кириченко // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 7. — С. 591–594.
4. Кириченко Н. Ф. Введение в теорию стабилизации движения / Н. Ф. Кириченко. — Киев: Вища школа, 1978. — 182 с.
5. Кириченко Н. Ф. Минимаксное управление и оценивание в динамических системах / Н. Ф. Кириченко // Автоматика — 1982. — № 1. — С. 32–39.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц /Р. Беллман. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. Учебник / В. А. Треногин. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
8. Filar J. A. Advances in Dynamic Games and Applications / J. A. Filar. — Boston: Birkhäuser, 2000. — 461 p.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 12.06.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, № 2 (112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЯВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. В. Семенов[1]

Резюме. В работе для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложен алгоритм расщепления без вычисления резольвент. Доказана теорема о слабой эргодической сходимости алгоритма. Указаны ситуации, когда имеет место сильная сходимость.

Ключевые слова: вариационные неравенства, максимальный монотонный оператор, алгоритм расщепления, среднее по Чезаро, сходимость.

1. Введение

Многие задачи ряда прикладных математических дисциплин могут быть записаны в форме вариационных неравенств, численное решение которых является ареной интенсивных исследований [1, 2, 3, 4]. При решении сложных задач важное значение имеют различные схемы расщепления, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры.

Популярные сейчас алгоритмы расщепления для вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C: \ \exists u \in \sum_i A_i x \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

или более общих задач поиска нулей суммы монотонных операторов

$$\text{найти } x \in H: \ 0 \in \sum_i T_i x,$$

используют на каждом шаге резольвенты многозначных операторов [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Явный шаг в алгоритмах цитируемых работ используется только для однозначных операторов-слагаемых. Благодаря неявному характеру эти методы обладают изрядным запасом устойчивости, однако вычисление резольвенты часто требует высоких вычислительных затрат.

[1]Исследование выполнено при финансовой помощи ГФФИ Украины (проект GP/F49/061) и Верховной Рады Украины (Именная стипендия ВР Украины для молодых ученых в 2013 году).

В алгоритмике выпуклой оптимизации для задач вида

$$f_1 + f_2 + ... + f_n \to \min_C$$

в последнее время появилась серия субградиентых алгоритмов расщепления явного характера [13, 14]. Эти схемы интересно перенести на случай вариационных неравенств, поскольку инструкция

$$y := P_C\left(x - \lambda u\right), \;\; u \in Ax, \;\; \lambda > 0,$$

как правило намного проще вычисления значения y резольвенты оператора $\lambda A_i + N_C$ в точке x, то есть решения вариационного неравенства:

$$\text{найти } y \in C: \;\; \exists u \in A_i y \;\; \text{и} \;\; \lambda\left(u, z - y\right) + \left(y - x, z - y\right) \geq 0 \quad \forall z \in C.$$

Отталкиваясь от [14] и опираясь на технику [15, 16, 17, 18, 19, 20], в данной работе мы предлагаем и обосновываем алгоритм расщепления без вычисления резольвент для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Заметим, что наше сообщение носит пока весьма предварительный характер.

2. Вариационное неравенство и вспомогательные факты

Введем обозначения и сформулируем задачу. Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим символом P_K оператор метрической проекции пространства H на замкнутое выпуклое множество $K \subseteq H$.

Напомним некоторые понятия [1, 2]. Пусть $A : H \to 2^H$ — оператор с графиком $\mathrm{gr}(A) = \{(x, u) : \; y \in Ax\}$.

Определение 1. Оператор $A : H \to 2^H$ называют монотонным, если для любых (x, u), $(y, v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq 0.$$

Определение 2. Оператор $A : H \to 2^H$ называют сильно монотонным с константой $\mu > 0$, если для любых (x, u), $(y, v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq \mu \left\|x - y\right\|^2.$$

Определение 3. Оператор $A : H \to 2^H$ называют максимальным монотонным, если для любого монотонного оператора $B : H \to 2^H$ из соотношения $\mathrm{gr}(A) \subseteq \mathrm{gr}(B)$ следует $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$.

Пусть:

- $A_i : H \to 2^H$ — монотонный оператор, $i = \overline{1, p}$;
- $A = \sum_{i=1}^{p} A_i$ — максимальный монотонный оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{dom}(A_i)$ — замкнутое выпуклое множество.

Вариационное неравенство с оператором A на множестве C формулируется следующим образом:

$$\text{найти } x \in C: \;\; \exists u \in Ax \;\; \text{и} \;\; (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим $VI(A,C)$. Важным фактом о структуре множества решений вариационного неравенства является следующая

Лемма 1. *Если оператор $A : H \to 2^H$ — максимальный монотонный, то*

$$VI(A,C) = \{x \in C : (v, y-x) \geq 0 \ \forall y \in C \ \forall v \in Ay\}.$$

В частности, множество $VI(A,C)$ выпуклое и замкнутое.

Цель данной работы состоит в построении и исследовании явного алгоритма расщепления для решения вариационного неравенства (1). Под явным мы понимаем алгоритм не содержащий операций вычисления резольвент операторов $A_i + N_C$, где N_C — нормальный конус множества C в точке-аргументе, то есть

$$N_C x = \begin{cases} \{w \in H : (w, y-x) \leq 0\}, & x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 2 ([2])**.** *Пусть неотрицательные последовательности (a_n), (b_n) таковы, что $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.*

Лемма 3 (G.B. Passty, [17])**.** *Пусть H — гильбертово пространство; $F \subseteq H$ — непустое множество; (x_n) — последовательность элементов H и $z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, где (λ_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности (z_{n_k}) лежит в F; 2) для произвольного $y \in F$ существует $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $z \in F$.*

3. Явный алгоритм расщепления

Опишем явный алгоритм расщепления для вариационного неравенства (1).

Зафиксируем последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяющую условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \tag{2}$$

Алгоритм 1.

1) *Задаем $x_1 \in C$; $n := 1$.*
2) *Для x_n находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \ u_{(n,i)} \in A_i x_n, \ i = \overline{1,p}.$$

3) *Если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то СТОП. Иначе переходим на шаг 4.*

4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}y_{n,1} + \frac{1}{p}y_{n,2} + ... + \frac{1}{p}y_{n,p},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Покажем, что если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то $x_n \in VI(A,C)$. Действительно, пусть $x_n = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right)$ для всех $i = \overline{1,p}$. Тогда,

$$\left(x_n - \left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right), y - x_n\right) = \lambda_n \left(u_{(n,i)}, y - x_n\right) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$(u_n, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{(n,i)} \in \sum_{i=1}^{p} A_i x_n = Ax_n.$$

То есть, $x_n \in VI(A,C)$.

Далее рассматриваем ситуацию, когда алгоритм 1 порождает бесконечную последовательность. Даже в случае $p = 1$, когда алгоритм 1 совпадает с классическим «субградиентным методом», на таком уровне общности не приходиться ожидать сходимости последовательности (x_n). Нашей основной целью является доказательство слабой сходимости в H последовательности чезаровских средних

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$

Результаты такого типа традиционно называют теоремами эргодической сходимости [17].

Сделаем относительно операторов A_i следующее предположение:

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i x_n \text{ равномерно ограничены.} \tag{3}$$

Замечание 1. Предположение (3) — аналог использованного в [13, 14] «subgradient boundedness assumption».

Замечание 2. Более близком к алгоритмам [14] является следующий процесс.

1) *Задаем* $x_1 \in C$; $n := 1$.
2) *Начиная с* $y_{(n,0)} = x_n$ *последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \;\; u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \;\; i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{n,p},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Для этого алгоритма справедливы утверждения о сходимости такого же характера, что и для подробно рассматриваемого алгоритма 1.

4. Основные неравенства

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства двух важных неравенств для последовательностй (x_n) и (z_n).

Лемма 4. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и элемента $y \in C$ выполняется неравенство*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - \frac{2\lambda_n}{p} (v, x_n - y), \qquad (4)$$

где $v \in Ay$.

Доказательство. Для $y \in C$ и $y_{(n,i)}$ имеем

$$\left\|y_{(n,i)} - y\right\|^2 = \left\|P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right) - y\right\|^2 \le \left\|x_n - \lambda_n u_{(n,i)} - y\right\|^2 =$$
$$= \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - 2\lambda_n \left(u_{(n,i)}, x_n - y\right).$$

Возьмем $v_i \in A_i y$. Благодаря монотонности оператора A_i, получаем

$$\left(u_{(n,i)}, x_n - y\right) \ge (v_i, x_n - y).$$

Следовательно,

$$\left\|y_{(n,i)} - y\right\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - 2\lambda_n (v_i, x_n - y). \qquad (5)$$

Складывая умноженные на $\frac{1}{p}$ неравенства (5) и учитывая, что

$$\|x_{n+1} - y\|^2 = \left\|\frac{y_{(n,1)} - y}{p} + \ldots + \frac{y_{(n,p)} - y}{p}\right\|^2 \le$$
$$\le \frac{1}{p}\left\|y_{(n,p)} - y\right\|^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left\|y_{(n,p)} - y\right\|^2,$$

получаем

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - \frac{2\lambda_n}{p} (v, x_n - y),$$

где $v = \sum_{i=1}^{p} v_i \in \sum_{i=1}^{p} A_i y = Ay$. □

Лемма 5. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n), последовательности средних (z_n) и элемента $x \in C$ выполняется неравенство*

$$\frac{\|x_{n+1} - y\|^2 - \|x_1 - y\|^2}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \le \frac{2}{p} (v, y - z_n) + \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(k,i)}\right\|^2}{p \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}, \qquad (6)$$

где $v \in Ay$.

Доказательство. Запишем неравенство леммы 4 в виде

$$\|x_{k+1}-y\|^2-\|x_k-y\|^2\le\frac{2}{p}\,(v,\lambda_k y-\lambda_k x_k)+\frac{\lambda_k^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(k,i)}\right\|^2. \qquad (7)$$

Суммируя (7) по k от 1 до $n\in\mathbb{N}$ получаем

$$\|x_{n+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2\le\frac{2}{p}\left(v,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)+ \\ +\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(k,i)}\right\|^2. \qquad (8)$$

Поделив (8) на $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$, приходим к неравенству (6). □

5. Теорема об эргодической сходимости

Предположим, что $VI(A,C)\neq\emptyset$. Имеет место

Лемма 6. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Тогда для произвольного элемента $y\in VI(A,C)$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|$. В частности, последовательность (x_n) ограничена.*

Доказательство. Воспользуемся леммами 2 и 4. В неравенстве (4) предположим, что $y\in VI(A,C)$. Получим

$$\|x_{n+1}-y\|^2\le\|x_n-y\|^2+\frac{\lambda_n^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2, \qquad (9)$$

поскольку $(v,x_n-y)\ge 0$, $v\in Ay$. Из неравенства (9), предположения (3) и условия $(\lambda_n)\in\ell_2$ следует существование $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|\in\mathbb{R}$. □

Ограниченность последовательности (x_n) влечет ограниченность последовательности средних (z_n). А из леммы 5 следует

Лемма 7. *Все слабые частичные пределы последовательности средних (z_n) принадлежат множеству $VI(A,C)$.*

Доказательство. Рассмотрим слабо сходящуюся подпоследовательность (z_{n_l}) последовательности (z_n). Пусть $z\in H$ — слабый предел (z_{n_l}). Ясно, что z принадлежит множеству C. Записав неравенство (6) для элементов z_{n_l}, после предельного перехода при $l\to\infty$, получим

$$(v,y-z)\ge 0\quad\forall y\in C\ \forall v\in Ay,$$

что в силу леммы 1 равносильно включению $z\in VI(A,C)$. □

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если $VI(A,C)\neq\emptyset$, то последовательность средних по Чезаро (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x\in VI(A,C)$;*

2) *если* $VI(A,C)=\emptyset$, *то* $\|z_n\|\to+\infty$.

Доказательство. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае $VI(A,C)\neq\emptyset$ для сгенерированной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и для множества $F=VI(A,C)$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x\in VI(A,C)$.

Предположим, что $VI(A,C)=\emptyset$. Тогда $\|z_n\|\to+\infty$. Действительно, иначе последовательность (z_n) имеет слабую предельную точку z, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $VI(A,C)$. □

6. Сильная сходимость

При некоторых дополнительных условиях имеет место сильная сходимость последовательности (x_n).

Теорема 2. *Пусть один из операторов A_i сильно монотонный. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению (1).*

Доказательство. Пусть $z\in C$ — решение (1), A_d ($d\in\{1,...,p\}$) — сильно монотонный оператор с константой $\mu>0$. При $i\neq d$ имеем

$$\left\|y_{(n,i)}-y\right\|^2\le\|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-2\lambda_n\left(v_i,x_n-y\right),\ \ y\in C,\ \ v_i\in A_iy.$$

Возьмем $v_d\in A_dy$. Благодаря сильной монотонности оператора A_d получаем

$$\left(u_{(n,d)},x_n-y\right)\ge\left(v_d,x_n-y\right)+\mu\|x_n-y\|^2.$$

Следовательно,

$$\left\|y_{(n,d)}-y\right\|^2\le\|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,d)}\right\|^2-$$
$$-2\lambda_n\left(v_d,x_n-y\right)-2\mu\lambda_n\|x_n-y\|^2.$$

Таким образом, имеем

$$\|x_{n+1}-y\|^2\le\|x_n-y\|^2+\frac{\lambda_n^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-$$
$$-\frac{2\lambda_n}{p}\left(v,x_n-y\right)-\frac{2\mu\lambda_n}{p}\|x_n-y\|^2,\quad(10)$$

где $v=\sum_{i=1}^{p}v_i\in\sum_{i=1}^{p}A_iy=Ay$. Рассмотрев в (10) вариант $y=z$, приходим к неравенству

$$\frac{2\mu\lambda_n}{p}\|x_n-z\|^2\le\|x_n-z\|^2-\|x_{n+1}-z\|^2+\frac{\lambda_n^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2.\qquad(11)$$

Просуммировав (11) по n от 1 до N, получим

$$\frac{2\mu}{p}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\|x_n-z\|^2\le\|x_1-z\|^2-\|x_{N+1}-z\|^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2.$$

Откуда следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n - z\|^2 < +\infty.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$, то имеем $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0$. □

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{int}VI(A,C) \neq \emptyset$. *Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность* (x_n) *сильно сходится к решению (1).*

Доказательство. Возьмем элемент $y \in \mathrm{int}VI(A,C)$. Тогда существует шар $B(y,r) \subseteq VI(A,C)$, $r > 0$. Запишем для $y_n = y - r\frac{x_{n+1}-x_n}{\|x_{n+1}-x_n\|} \in B(y,r)$ неравенство (9):

$$\|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \|x_n - y_n\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2.$$

Этому неравенству можно придать такой вид

$$2r\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2.$$

Для произвольных $m > n$ имеем

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{\|x_n - y\|^2 - \|x_m - y\|^2}{2r} + \\ + \frac{1}{2rp} \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(k,i)}\right\|^2.$$

Из предположения (3), $(\lambda_n) \in \ell_2$ и леммы 6 следует фундаментальнсть последовательности (x_n). Пусть $z \in H$ — сильный предел (x_n). Тогда последовательность средних (z_n) сильно сходится к z. Включение $z \in VI(A,C)$ следует из леммы 7. □

7. Заключительные замечания

Включая операцию усреднения в схему вычислений, получаем следующий явный алгоритм расщепления.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Для* x_n *находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \;\; u_{(n,i)} \in A_i x_n, \;\; i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*

4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}y_{n,1} + \frac{1}{p}y_{n,2} + ... + \frac{1}{p}y_{n,p},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Имеет место

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $VI(A, C) \neq \emptyset$, *то последовательность* (z_n) *слабо сходится к некоторому элементу* $x \in VI(A, C)$;
2) *если* $VI(A, C) = \emptyset$, *то* $\|z_n\| \to +\infty$.

Аналогичный теореме 4 результат справедлив для следующего явного последовательного алгоритма расщепления.

Алгоритм 3.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Полагаем* $y_{(n,0)} = x_n$ *и последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \;\; u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \;\; i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A, C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{n,p},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Только вместо (3) для обоснования сходимости алгоритма 3 следует сделать такое предположение.

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i y_{(n,i-1)} \text{ равномерно ограничены.} \tag{12}$$

Интересной задачей является построение и обоснование схем расщепления для вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in \bigcap_k C_k : \;\; \exists u \in \sum_i A_i x \;\; \text{и} \;\; (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \bigcap_k C_k, \tag{13}$$

где C_k — замкнутые выпуклые множества. В случае $A_i \equiv 0$ задача (13) переходит в классическую задачу поиска элемента множества $\bigcap_k C_k$ (convex feasibility problem), имеющую богатую алгоритмику [21, 22, 23, 24]. Кроме

того, актуальным вопросом является построение схем расщепления в случае, когда множества C_k в (13) являются множествами неподвижных точек для (квази)нерастягивающих операторов.

Литература

1. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + XVI p.
2. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
3. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.
4. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — xxxiii + 666 p.
5. Lions P.L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. — 1979, V. 16, № 6. — P. 964–979.
6. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
7. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
8. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 40–48.
9. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — 151. — P. 525–540.
10. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 4 (110). — С. 100–111.
11. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
12. Raguet H., Fadili J., Peyre G. A Generalized Forward-Backward Splitting // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2013. — V. 6(3). — P. 1199–1226.
13. Nedic A., Bertsekas D.P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12, № 1. — P. 109–138.
14. Bertsekas D.P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization // Math. Program., Ser. B. — 2011. — 129. — P. 163–195.
15. Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — 61. — P. 159–164.
16. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Чезаровская сходимость градиентного метода аппроксимации седловых точек выпукло-вогнутых функций // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 239, вып. 5. — 1056–1059.
17. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — 72. — P. 383–390.

18. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
19. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — № 1 (111). — С. 46–56.
20. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — № 2 (112). — С. 155–160.
21. Bauschke H. H., Borwein J. M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Review. — 1996. — 38(3). — P. 367–426.
22. Combettes P. L. Hilbertian convex feasibility problem: Convergence of projection methods // Applied Mathematics and Optimization. — 1997. — V. 35, № 3. — P. 311–330.
23. Bauschke H. H. Projection algorithms: results and open problems // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Haifa 2000); ed. D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich. — Elsevier, 2001. — P. 11–22.
24. Bauschke H. H., Luke D. R., Phan H. M., Wang X. Restricted normal cones and the method of alternating projections: theory // Set-Valued and Variational Analysis. — 2013. — 21. — P. 431–473.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Поступила 17.05.2013

УДК 519.854

АЛГОРИТМ СЛУЧАЙНОГО ПОВТОРНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ МИНИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

В. П. Шило

Резюме. В статье рассмотрена задача о покрытии минимальной мощности (MCSCP), которая является *NP*-трудной и имеет многочисленные практические приложения. MCSCP — наиболее сложный подкласс задач о покрытии. Рассмотрены лучшие известные алгоритмы для решения этой задачи. Предложен и исследован новый случайный алгоритм повторного локального поиска, который использует адаптивную настройку повторности. Приведены результаты обширного вычислительного эксперимента, которые показали преимущества предложенного алгоритма над известными лучшими алгоритмами. В ходе вычислительного эксперимента предложенным алгоритмом были найдены два новых рекордных решения.

1. Введение

Задача о покрытии (SCP) является одной из старейших и исследованных задач дискретной оптимизации. Пусть задано множество $M, m = |M|$ — мощность множества M, и n его подмножеств $S_j \subseteq M, j \in N = \{1, ..., n\}$. Семейство F подмножеств S_j будем называть допустимым, если каждый элемент множества M принадлежит хотя бы одному подмножеству S_j, входящему в семейство F: $\forall i \in M\ \exists S_j : S_j \subset F, i \in S_j$. Будем считать, что каждому подмножеству S_j приписан неотрицательный вес $w_j \geq 0, j = 1, ..., n$, а вес любого семейства равен сумме весов входящих в него подмножеств. Задача о покрытии заключается в отыскании допустимого семейства подмножеств F с минимальным весом.

Математическая модель поставленной задачи SCP описывается следующей задачей булева линейного программирования:

минимизировать

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1,\ i = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$x_j = 0 \vee 1, j = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Переменная x_j равняется 1, если подмножество S_j входит в семейство F, и нулю — в противном случае. В матрице покрытия A коэффициент a_{ij} равен 1, если элемент i принадлежит подмножеству S_j и равен нулю в противном случае. Как видно, i-я строка матрицы A связана с элементом i множества M, а j-й столбец — с подмножеством S_j. Если все веса подмножеств одинаковые, то задача SCP называется задачей о покрытии минимальной мощности (задача MCSCP) и считается, что $w_j = 1, j = 1, ..., n$. Она является наиболее трудной для решения. Именно эту задачу мы будем рассматривать в данной статье.

Задача о покрытии минимальной мощности имеет множество важных практических приложений. К ним относятся задачи планирования, тестирования, построения оптимальных логических схем, поиска компьютерных вирусов, балансировки сборочной линии, поиска информации и многие другие. Кроме того, во многих практических приложениях (планирование летных экипажей, политических округов, охраны природы и т.д.) относительные изменения соответствующих весов могут быть достаточно малы, чтобы оправдать использование рассматриваемой модели. И, наконец, очень часто алгоритмы для задачи о покрытии минимальной мощности входят в состав алгоритмического обеспечения современных компьютерных технологий.

SCP является *NP*-трудной задачей, поэтому разработка приближенных алгоритмов для ее решения представляет особый интерес. В работах [1–5] предложены и рассмотрены различные приближенные алгоритмы для этой задачи.

В работе [1] проведен сравнительный анализ 9-ти разных алгоритмов, включая различные варианты жадного алгоритма, алгоритм случайного округления и алгоритм нейронных сетей. Из них наилучшие результаты показал вероятностный жадный алгоритм, однако он имеет плохое качество решений. В работе [2] предложены и исследованы разные варианты алгоритмов GRASP. Все они имеют среднее качество решений и требуют большого объема вычислений. Алгоритм, основанный на использовании метода табу, предложен в работе [3]. Качество решений, получаемых этим алгоритмом, выше среднего, но он требует большого объема вычислений. Случайный повторный жадный алгоритм предложен в [4], он превосходит предыдущие алгоритмы. Алгоритм локального поиска [5] использует приемы метода табу для избегания циклов и является лучшим среди перечисленных алгоритмов по качеству решений и быстродействию.

2. Алгоритм случайного локального поиска

Для разработки нового алгоритма нами был взят за основу алгоритм, предложенный в работе [4]. Это объясняется, с одной стороны, его высокой эффективностью и, с другой, определенными сомнениями в целесообразности и продуманности некоторых его составляющих. Предложена следующая схема алгоритма случайного локального поиска.

```
 1: RandomLocalSearch (F)
 2: Calc(n_control,n_cover,F)
 3: while (F не является покрытием) do
 4:    Формирование множества Max_cover
 5:    S_j ←RandomSelectElement(Max_cover)
 6:    F = F ∪ S_j
 7:    Calc(n_control,n_cover,F)
 8:    Формирование множества Redundant
 9:    while (Redundant не пусто) do
10:       S_j ← RandomSelectElement(Redundant)
11:       F = F\S_j
12:       Calc(n_control,n_cover,F)
13:       Формирование множества Redundant
14:    end while
15:    Формирование множества Cand_Redundant
16:    if ( Cand_Redundant не пусто ) then
17:       S_j ←RandomSelectElement(Cand_Redundant)
18:       goto line 6
19:    end if
20: end while
21: end
```

В строках 2, 7, 12 вызывается процедура Calc. В ней для подмножеств $S_j \in F$ рассчитываются величины $n_control_j$, а для подмножеств $S_j \notin F$ — величины n_cover_j. Величина $n_control_j$ равна количеству покрытых элементов из M, покрываемых только подмножеством S_j, а величина n_cover_j — числу непокрытых элементов из M, покрываемых подмножеством S_j. В строке 4 формируется множество *Max_cover*, состоящее из подмножеств S_j с максимальным значением n_cover_j. Подмножество S_j из множества *Max_cover* с одинаковой вероятностью случайно выбирается в строке 5. В строках 8 и 13 формируется множество *Redundant*, состоящее из подмножеств $S_j \in F$, для которых $n_control_j$=0. В строке 15 формируется множество *Cand_Redundant,* состоящее из подмножеств $S_j \notin F$ таких, что n_cover_j>0 и введение S_j в F приведет к появлению непустого множества *Redundant.* Если множество *Cand_Redundant* не пусто, то из него с одинаковой вероятностью случайно выбирается подмножество S_j (строка 17) и осуществляется переход на строку 6.

Рассмотрим отличия предложенного нами алгоритма RandomLocalSearch (RLS) от алгоритма EG [4]. Во-первых, не используются оценочные функции при формировании множеств *Redundant* и *Cand_Redundant.* Их применение всегда увеличивает объем вычислений и не всегда приводит к повышению качества решений. Более того, возможное уменьшение мощности этих множеств может привести к снижению качества решений. Во-вторых, не используется процедура optimize(F), объем вычислений которой порядка $O(mn)$. Вместо этого введен блок (строки 15–19), позволяющий выбирать вместо жадного хода ход, после выполнения которого возникает непустое множество *Redundant.*

3. Алгоритм случайного повторного локального поиска

Ниже приведена схема предлагаемого случайного повторного алгоритма локального поиска IteratedRandomLocalSearch (IRLS).

```
 1: IteratedRandomLocalSearch (F)
 2: n_delete=initn_delete; BestF = {1, 2, ..., n}
 3: for  nat=1 to maxnat do
 4:    F = ∅
 5:    RandomLocalSearch(F)
 6:    MinF=F; nbad=0
 7:    for  niter=1 to maxniter do
 8:       F= MinF
 9:       Случайное удаление n_delete подмножеств из F
10:       RandomLocalSearch(F)
11:       if  (|F| ≤ |MinF|)  then
12:          MinF=F
13:          if (|F| < |BestF|) then BestF=F
14:       end if
15:       else nbad=nbad+1
16:       if  (niter кратна величине ntune) then
17:          if (nbad>ubad) then n_delete= n_delete-1
18:          if (nbad<lbad) then n_delete= n_delete+1
19:          nbad=0
20:       end if
21:    end for
22: end for
23: end
```

Блок (строки 16–20) служит для настройки параметра n_delete. Каждые ntune итераций величина nbad, равная количеству итераций, на которых найдено решение *F,* худшее, чем *MinF,* используется для коррекции значения n_delete. Отметим, что нами выбрана схема повторности, отличная от предложенной в [4]. Там каждое подмножество удаляется с одинаковой вероятностью, поэтому количество удаленных подмножеств является случайной величиной. К тому же, в IteratedRandomLocalSearch осуществлена адаптивная настройка n_delete, что, по нашему мнению, является преимуществом.

4. Результаты вычислительного эксперимента

Для сравнительного исследования эффективности разработанного и существующих алгоритмов были проведены экспериментальные расчёты по решению 70 случайно сгенерированных тестовых задач 4—6, A—E и NRE—NRH большой размерности. Все эти задачи доступны в OR-library по адресу (http://people.brunel.ac.uk/ mastjjb/jeb/orlib/scpinfo.html). Параметры алгоритма IRLS указаны в табл. 1. Заметим, что в отличие от алгоритмов [4, 5], которые использовали настройку на задачи, все параметры IRLS не изменялись при проведении вычислительных экспериментов.

Таблица 1. Параметры алгоритма IteratedRandomLocalSearch

Параметр	maxnat	maxniter	initn_delete	ntune	lbad	ubad
Значение	100	3000	8	27	18	24

В табл. 2, 3 содержатся сводные результаты по решению тестовых задач.

Таблица 2. Сводные результататы решения задач 4–6, A—B.

Задача	Best[1]	Best[2]	Best[3]	Best[4]	Best[5]	BKS	Our best	nbest	ncalc	mintime
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
scp41	41	38	38	38	38	38	38	100	401356	0,00
scp42	38	37	37	37	37	37	37	100	41356	0,00
scp43	40	38	38	38	38	38	38	100	83460	0,00
scp44	41	39	38	39	38	38	38	88	13004676	0,03
scp45	40	38	38	38	38	38	38	100	338228	0,00
scp46	40	38	37	37	37	37	37	100	3698068	0,05
scp47	41	38	38	38	38	38	38	100	1505461	0,00
scp48	40	38	38	37	37	37	37	100	3979361	0,05
scp49	40	38	38	38	38	38	38	100	419429	0,00
scp410	41	38	38	38	38	38	38	100	1763259	0,06
scp51	35	35	35	34	34	34	34	99	4531224	0,02
scp52	35	34	35	34	34	34	34	100	977696	0,05
scp53	36	35	34	34	34	34	34	100	337507	0,01
scp54	36	34	34	34	34	34	34	100	414099	0,02
scp55	36	34	34	34	34	34	34	100	499814	0,01
scp56	36	34	34	34	34	34	34	100	973126	0,03
scp57	35	34	34	34	34	34	34	100	182193	0,00
scp58	37	35	34	34	34	34	34	100	2863216	0,05
scp59	36	36	35	35	35	35	35	100	290155	0,00
scp510	36	35	34	34	34	34	34	100	3068748	0,14
scp61	21	21	21	21	21	21	21	100	45580	0,00
scp62	21	20	21	20	20	20	20	100	599835	0,00
scp63	21	21	21	21	21	21	21	100	24441	0,00
scp64	22	21	21	21	20	20	20	97	8185640	0,00
scp65	22	21	21	21	21	21	21	100	104370	0,00
scpa1	40	39	39	39	39	39	39	100	420737	0,02
scpa2	41	39	39	39	39	39	**38**	9	37472276	6,64
scpa3	40	39	39	39	39	39	39	100	374466	0,02
scpa4	40	38	38	38	37	37	37	37	30717609	1,33
scpa5	40	39	38	38	38	38	38	100	2244857	0,14
scpb1	23	22	22	22	22	22	22	100	121484	0,02
scpb2	22	22	22	22	22	22	22	100	57673	0,00
scpb3	22	22	22	22	22	22	22	100	156793	0,00
scpb4	23	22	22	22	22	22	22	100	439091	0,06
scpb5	23	22	22	22	22	22	22	100	219039	0,02

Каждая тестовая задача решалась 100 раз. Во второй — шестой колонках таблиц приведены рекорды соответственно из работ [1–5]. В седьмой колонке содержатся известные рекорды. В восьмой приведены рекорды, полученные предложенным алгоритмом

IteratedRandomLocalSearch, в девятой колонке — количество найденных этим алгоритмом рекордов (из 100).

Таблица 3. Сводные результататы решения задач C—E, NRE—NRH.

Задача	Best[1]	Best[2]	Best[3]	Best[4]	Best[5]	BFS	Our best	nbest	ncalc	mintime
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
scpc1	45	44	43	43	43	43	43	100	2531955	0,11
scpc2	45	44	44	43	43	43	43	100	2663363	0,25
scpc3	45	44	43	43	43	43	43	100	3704540	0,61
scpc4	46	44	43	43	43	43	43	100	2358900	0,20
scpc5	45	44	44	43	43	43	43	99	6258633	0,95
scpd1	26	25	25	25	25	25	**24**	98	8956646	0,69
scpd2	25	25	25	25	25	25	25	100	120212	0,01
scpd3	25	25	25	25	24	24	24	4	35591521	156,78
scpd4	26	25	25	25	25	25	25	100	341016	0,00
scpd5	26	25	25	25	25	25	25	100	364259	0,01
scpe1	5	5	5	5	5	5	5	100	186	0,00
scpe2	5	5	5	5	5	5	5	100	133	0,00
scpe3	5	5	5	5	5	5	5	100	100	0,00
scpe4	5	5	5	5	5	5	5	100	181	0,00
scpe5	5	5	5	5	5	5	5	100	100	0,00
scpnre1	17	17	18	17	17	17	17	100	90243	0,00
scpnre2	17	17	18	17	17	17	17	100	53808	0,00
scpnre3	17	17	18	17	17	17	17	100	75672	0,00
scpnre4	17	17	17	17	17	17	17	100	50345	0,00
scpnre5	17	17	17	17	17	17	17	100	95983	0,00
scpnrf1	10	10	11	10	10	10	10	100	5519	0,00
scpnrf2	11	10	11	10	10	10	10	100	94740	0,02
scpnrf3	11	10	11	10	10	10	10	100	77209	0,02
scpnrf4	11	10	11	10	10	10	10	100	73939	0,02
scpnrf5	11	10	10	10	10	10	10	100	104399	0,02
scpnrg1			63	62	61	61	61	59	26018437	5,42
scpnrg2			61	62	62	61	61	71	23908902	13,52
scpnrg3			62	62	62	62	62	100	2258028	0,56
scpnrg4			63	62	62	62	62	100	2889478	0,76
scpnrg5			63	62	62	62	62	100	2958199	0,89
scpnrh1			35	34	34	34	34	100	990892	0,42
scpnrh2			36	34	34	34	34	100	756843	0,27
scpnrh3			36	34	34	34	34	100	694191	0,81
scpnrh4			35	34	34	34	34	100	775551	0,53
scpnrh5			36	34	34	34	34	100	751407	0,00

В десятой колонке содержится количество вызовов RLS за 100 решений алгоритмом IteratedRandomLocalSearch соответствующей задачи. В последней колонке приводится наименьшее время (в сек.) поиска решения одной из 100 задач предложенным алгоритмом. Алгоритм IteratedRandomLocalSearch реализован на языке C++, все вычислительные эксперименты проводились с использованием PC Intel®Core QUAD CPU Q9550 2.83GHz и 8.0GB оперативной памяти.

5. Заключение

Для двух задач scpa2 и scpd1 найдены новые рекорды. Для всех остальных задач повторены прежние рекорды с меньшими затратами времени. Все это говорит о высокой робастности, потенции алгоритма IteratedRandomLocalSearch к получению решений рекордного качества. О скорости работы алгоритма можно судить по последней колонке табл. 4, 5. Как отмечалось в работе [6], в связи с развитием многопроцессорных комплексов при многократном решении задачи следует обращать внимание не на средние показатели алгоритма, а на минимальное время решения задачи и частоту нахождения лучших решений. Данные, приведенные в колонках 9, 11 табл. 4, 5 говорят о том, что разработанный алгоритм удовлетворяет современным требованиям. Все тестовые задачи он бы решил на 100-процессорном комплексе за 196,95 секунд, используя распараллеливание копий алгоритма.

Литература

1. Grossman T. Computational experience with approximation algorithms for the set covering problem / T. Grossman, A. Wool // European Journal of Operational Research. — 1997. — 101. — № 1. — P. 81–92.
2. Bautista J. A GRASP algorithm to solve the unicost set covering problem / J. Bautista, J. Pereira // Computers & Operations Research. — 2007. — 34. — P. 3162–3173.
3. Kinney G. W. A Reactive Tabu Search algorithm with variable clustering for the Unicost Set Covering Problem / G. W. Kinney, J. W. Barnes, B. W. Colletti // International Journal of Operational Research. — 2007. — 2. — № 2. — P. 156–172.
4. Marchiori E. An iterated heuristic algorithm for the set covering problem / E. Marchiori, A. G. Steenbeek // In proceeding of: Algorithm Engineering, 2nd International Workshop (WAE'98, Saarbrucken, Germany, August 20–22, 1998). — 1998. — P. 155–166.
5. Musliu N. Local search algorithm for unicost set covering problem / N. Musliu // In Advances in Applied Artificial Intelligence: Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin, Heidelberg: Springer. — 2006. — 4031. — P. 302–311.
6. Шило В. П. Решение задачи булева квадратичного программирования без ограничений методом глобального равновесного поиска / В. П. Шило, О. В. Шило // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 68–78.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, проспект Академика Глушкова, 40, Киев–187, ГСП, 03680, Украина.

Поступила 21.05.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

РАЗМЕЩЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА РАВНЫХ КРУГОВ В КРУГЕ

Г. Н. Яськов

Резюме. В статье рассматривается задача размещения максимального числа равных кругов заданного радиуса в круге заданного радиуса. Построена математическая модель задачи и исследованы ее свойства. Решение задачи сводится к решению последовательности подзадач с переменными радиусами. Предложен новый подход к построению начальных точек. Полученные результаты сравниваются с известными тестовыми примерами.

Введение

Задача размещения кругов возникает в различных отраслях промышленности [1].

К. Ф. Гаусс доказал, что среди всех регулярных (решетчатых) упаковок кругов максимальную плотность имеет гексагональная решетка, когда каждый круг касается шести других кругов. Плотность такого размещения $\pi/\sqrt{12} \approx 0.91$.

В 1940 году венгерский математик L. F. Toth [2] доказал, что гексагональная решетка является самой плотной среди всех возможных упаковок, как негулярных, так и нерегулярных.

Результаты решения тестовых примеров приведены на сайте в таблицах E. Specht: http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/cci.html. Задача нахождения максимального диаметра вплоть до 36 равных кругов внутри единичного квадрата представлена в [3]. В работах [4, 5] используются нелинейные задачи математического программирования. В работах [6, 7] предлагаются эвристические жадные алгоритмы для построения нерегулярных упаковок максимального числа равных кругов. Эти алгоритмы позволяют быстро получить приемлемые по качеству решения. В [8] задача раскроя кругов и многоугольников из прямоугольников минимальной площади рассматривается как задача нелинейного невыпуклого программирования. В исследовании [9] упаковка равных кругов в квадрате рассматриваются в качестве модельного примера.

В этой статье предлагается метод упаковки большого числа равных кругов на основе математической модели, в которой радиусы всех кругов являются переменными.

1. Математическая модель

Пусть имеются круги C_i, $i \in I_N = \{1, 2, ..., N\}$, радиуса $r_i = r$ и круг C радиуса $\rho > r$: $C = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - \rho^2 = 0\right\}$. Размещение круга C_i в пространстве R^2 полностью определяется координатами его центра $u_i = (x_i, y_i)$, $i \in I_N$. Следовательно, размещение всех заданных кругов C_i, $i \in I_N$, в пространстве R^n определяется вектором $u^N = (u_1, u_2, ..., u_N) \in R^{2N}$.

Задача. Определить максимальное число кругов $\lambda^* \leq N$ из набора C_i, $i \in I_N$, которые размещаются в круге C без взаимных наложений.

Мы полагаем, что радиусы кругов C_i, $i \in I_N$, являются переменными. Тогда решение задачи сводится к решению последовательности задач с линейными функциями цели:

$$F_\lambda(X^{\lambda *}) = \max_{X^\lambda \in M_\lambda} F_\lambda(X^\lambda), \lambda \in I_\gamma = \{1, 2, ..., \gamma \leq N\} \subseteq I_N, \tag{1}$$

где

$$F_\lambda(X^\lambda) = \sum_{i=1}^{\lambda} r_i, X^\lambda = (v^\lambda, u^\lambda), v^\lambda = (r_1, ..., r_\lambda), u^\lambda = (u_1, ..., u_\lambda), \tag{2}$$

$$M_\lambda = \Big\{X^\lambda \in R^{3\lambda} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0,\ i, j \in I_\lambda = \{1, 2, ...\lambda\}, i < j, \tag{3}$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) \geq 0, i \in I_\lambda, r - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I_\lambda\Big\},$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2, \tag{4}$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = (\rho - r_i)^2 - (x_i^2 + y_i^2). \tag{5}$$

Неравенства $\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0$ обеспечивают непересечение кругов, а неравенства $\Phi_i(r_i, u_i) \geq 0$ — их размещение в круге C.

Нетрудно увидеть, что если $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda + 1)r$ и $F_\lambda(X^{\lambda *}) = \lambda^* r$, где $X^{(\lambda+1)*}$ и $X^{\lambda *}$ — точки глобальних максимумов следующих задач:

$$F_\lambda(X^{\lambda *}) = \max_{X^\lambda \in M_\lambda} F_\lambda(X^\lambda), \tag{6}$$

$$F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) = \max_{X^{\lambda+1} \in M_{\lambda+1}} F_{\lambda+1}(X^{\lambda+1}), \tag{7}$$

$$M_{\lambda+1} = \Big\{X^{\lambda+1} \in R^{(n+1)(\lambda+1)} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0,$$

$$i, j \in I_{\lambda+1} = \{1, 2, ..., \lambda + 1\}, i < j, \Phi_i(r_i, u_i) \geq 0,$$

$$i \in I_{\lambda+1}, r - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I_{\lambda+1}\Big\}$$

соответственно, то решение задачи λ из последовательности (1)–(5) определяет размещение λ^* кругов. Действительно, вследствие ограничений

$r - r_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., \lambda^*$, имеем $F_\lambda(X^\lambda) \leq \lambda^* r$. Очевидно, что если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda^* r$, то $r_i = r$, $i = 1, 2, ..., \lambda^*$.

Отметим некоторые свойства задачи (6).

1. Область допустимых решений M_λ определяется линейными и квадратичными неравенствами.

2. Вследствие линейности функции цели $F_\lambda(X^\lambda)$ локальные максимумы задачи (6) достигаются в крайних точках области M_λ.

3. Задача (6) является *NP*-трудной [10].

Исходя из отмеченных особенностей, для решения задачи предлагается следующий подход.

1. Выбираем начальное значение $\lambda < N$.
2. Строим начальные точки либо случайным образом, либо используя гексагональную решетку. Способ построения начальных точек зависит от числа кругов.
3. Вычисляем локальный максимум задачи (6) в каждой начальной точке.
4. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то достигнут глобальный максимум задачи (6). Если $\lambda = N$, то поставленная задача решена. В противном случае, увеличиваем λ на 1 и решаем задачу (7). Начальные точки формируются специальным образом.
5. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$, то решаем задачу (6) для новых начальных точек до тех пор, пока все начальные точки не будут исчерпаны.
6. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$ и все начальные точки исчерпаны, то уменьшаем λ на 1 и снова решаем задачу (6).
7. Если $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda + 1)r$ и $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$, то в качестве приближения к глобальному максимуму поставленной задачи берем локальный максимум $X^{\lambda*}$, соответствующий значению $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$.

Рассмотрим этапы подробнее.

2. Построение начальных точек

Вычислительный эксперименты показали, что если $\frac{\rho}{r} < 10$, то начальные точки целесообразно выбирать случайно. Для удобства выберем полярную систему координат.

Выбор начальных точек $\tilde{X}^j = (\tilde{r}_1^j, \tilde{r}_2^j, ..., \tilde{r}_\lambda^j, \tilde{u}_1^j, \tilde{u}_2^j, ..., \tilde{u}_\lambda^j) \in M_\lambda$, $j \in J_\xi = \{1, 2, ..., \xi \leq 100\}$, осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Выберем начальные значения радиусов кругов $r_1 = r_2 = ... = r_\lambda = r$.
2. Выберем случайно значения $\mu_1 \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_1 \in [-\pi, \pi]$ и координаты центра круга C_1:

$$x_i = \mu_i \cdot \cos\varphi_1, \; y_i = \mu_i \cdot \sin\varphi_1. \tag{8}$$

3. Зададим $t = 0$, $r_2 = 0.9^t r$.
4. Выберем случайно значения $\mu_2 \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_2 \in [-\pi, \pi]$ и вычислим координаты центра круга C_2 в соответствии с (8).

5. Если $\Phi_{12}(r, r_2, u_1, u_2) \geq 0$, перейдем к пункту 6. В противном случае, увеличим t на 1, возьмем $r_2 = 0.9^t r$ и возвратимся к пункту 4.
6. Пусть $i = 3$.
7. Зададим $t = 0$, $r_i = 0.9^t r$.
8. Обнулим счетчик попыток $c = 0$.
9. Выберем случайно значения $\mu_i \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$ и вычислим координаты центра круга C_i в соответствии с (8).
10. Если $\Phi_{li}(r_l, r_i, u_l, u_i) \geq 0$ для всех $l = 1, 2, ..., i-1$, то перейдем к пункту 13.
11. Увеличим c на 1.
12. Если $c = 10000$, то увеличим t на 1, выберем $r_i = 0.9^t r$ и возвратимся к пункту (8). В противном случае, возвратимся к пункту 9.
13. Если $i = \lambda$, то все круги упакованы (критерий останова). В противном случае, увеличим i на 1 и возвращаемся к пункту 7.

Если $\frac{\rho}{r} \geq 10$, то начальные точки выбираются в соответствии с гексагональной решетчатой упаковкой кругов.

Формируется множество векторов $(x_s^0, y_k^0) \in R^2$, $x_s^0 = \frac{sr}{\eta}$, $y_k^0 = \frac{kr}{\eta}$, $s, k \in J = \{0, 1, ..., \eta\}$. Мы берем $\eta \leq 100$. Для удобства переиндексируем векторы (x_s^0, y_k^0), $s, k \in J$, следующим образом (x_p^0, y_p^0), $p \in P = \{0, 1, ..., \alpha\}$, где $\alpha \leq (\eta + 1)^2 - 1 = 10200$. Векторы (x_p^0, y_p^0), $p \in P$, дают трансляции гексагональных решеток.

Центры координат кругов $C_i \subset C$, $i \in I_\lambda$, радиуса r, являющиеся узлами гексагональной решетки L_r^p, вычисляются по формулам:

$$(\tilde{x}_{1l}^p, \tilde{x}_{2m}^p) = (\pm(l-1)r + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)r + y_p^0),$$

если ряд нечетный;

$$(\tilde{x}_{1l}^p, \tilde{x}_{2m}^p) = (\pm(l-1)r + r + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)r + y_p^0),$$

если ряд четный;

$$l, m = 1, 2, ... , (\tilde{x}_{1l}^p)^2 + (\tilde{x}_{2m}^p)^2 \leq (\rho - r)^2, p \in P$$

.

Согласно этим формулам осуществляется размещение кругов $C_1, C_2, ...,$ $C_{\lambda-\gamma}$, $\gamma \in \{1, 2, ...10\}$, радиуса r в круг C. Координаты и радиусы оставшихся γ кругов $C_{\lambda-\gamma+1}$, $C_{\lambda-\gamma+2}$,...,C_λ определяются в результате решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} (x_l^0 - x_{\lambda-\gamma+q})^2 + (y_l^0 - y_{\lambda-\gamma+q})^2 - (r + r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0 \\ (x_k^0 - x_{\lambda-\gamma+q})^2 + (y_k^0 - y_{\lambda-\gamma+q})^2 - (r + r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0 \\ x_{\lambda-\gamma+q}^2 + y_{\lambda-\gamma+q}^2 - (R - r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0, \ l > k = 1, ..., \lambda - \gamma, \ q = 1, ..., \gamma. \end{cases}$$

При этом значения $r_{\lambda-\gamma+1}, r_{\lambda-\gamma+2}, ..., r_\lambda$ выбираются в порядке убывания значений, полученных для различных сочетаний l и k в

системах уравнений и обеспечивающих выполнение неравенств $\Phi_{i,(\lambda-\gamma+q)}(r_i^0, r_{\lambda-\gamma+q}, u_i^0, u_{\lambda-\gamma+q}) \geq 0$, $q = 1, 2, ..., \gamma$, $i = 1, 2, ..., \lambda - \gamma + q - 1$. Построенные таким образом точки

$$X^{p_j} = (r, r, ..., r, r_{\lambda-\gamma+1}^{p_j}, r_{\lambda-\gamma+2}^{p_j}, ..., r_\lambda^{p_j}, u_1^{p_j}, u_2^{p_j}, ..., u_\lambda^{p_j}) \in M_\lambda, j \in J_\xi,$$

выбираются для построения начальных точек для задачи (6).

3. Метод решения

Для решения задачи (6) используются модификация метода возможных направлений Зонтендейка [11,12] и концепция ε-активных неравенств [13].

Данная модификация реализуется с помощью классической итерационной формулы

$$X^{q+1} = X^q + t^q Z^q, q = 0, 1, ...$$

где X^0 — начальная точка $X^{p_j} (j \in J_\xi)$; вектор Z^q — вектор спуска.

Процесс локальной оптимизации завершается, если для некоторого q выполняются неравенства $r - r_i^q < 10^{-5}$, $i \in I_\lambda$, или $F_\lambda(X^q) - F_\lambda(X^{q-1}) < < 10^{-4}$.

Таким образом, взяв в качестве начальной точку $X^{p_j} (j \in J_\xi)$, вычисляем локальный максимум X^{λ^*} задачи (6).

Очевидно, что если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то получен глобальный максимум задачи (6). Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$, то точка $X^{\lambda*}$ может быть либо локальным, либо глобальным максимумом задачи (6). В этом случае задача (6) решается для новой начальной точки, пока не будут перебраны все начальные точки.

Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$ для всех начальных точек, то λ уменьшается на 1 и снова решается задача (6). Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то λ увеличивается на 1 и снова решается задача (7). Таким образом, задача (6) решается до тех пор, пока не выполнится условие $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*}) < (\lambda + 1)r$.

Глобальный максимум $X^{\lambda*}$ задачи (6), соответствующий $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$ максимальному полученному значению λ, выбирается в качестве приближения к глобальному максимуму поставленной задачи.

При увеличении λ на 1 начальная точка выбирается с учетом точки локального максимума $X^{\lambda*}$, полученной при решении предыдущей задачи. Для этого выбираем случайно $\mu_{\lambda+1} \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_{\lambda+1} \in [-\pi, \pi]$. Затем вычисляем координаты центра круга $u_{\lambda+1}^0$ согласно (8) и радиус $r_{\lambda+1}^0$ круга $C_{\lambda+1}$, гарантирующие $\Phi_{i,(\lambda+1)}(r_i^*, r_{\lambda+1}^0, u_i^*, u_{\lambda+1}^0) \geq 0$, $i \in I_\lambda$. В результате получаем начальную точку $X^{\lambda+1}$=($\mathrm{v}_\lambda^*, r_{\lambda+1}^0, u_\lambda^*, u_{\lambda+1}^0$).

4. Численные примеры

Все примеры посчитаны, используя процессор AMD Athlon 64 X2 6000+ (3.1Ghz). Программные коды написаны на Delphi. Для решения задач линейного программирования используется двойственный метод высокого порядка (HOPDM, version 2.13) разработанный Gondzio [14].

Во всех пример выбирается $r = 1$.

Полученные результаты сравниваются с тестовыми примерами, приведенными в [6,7] и таблицах E. Specht.

В таблице 1 содержатся результаты счета и сравнение для различных значений радиуса круга C (от $\rho = 25$ до $\rho = 70$). В первом столбце приводятся значения радиуса ρ. Максимальное число кругов λ^*, упакованных с помощью предлагаемого подхода, приведены во втором столбце. А наилучшие известные значения λ^*_{best} [6,7] — в третьем столбце.

В таблице 2 содержатся решения следующей задачи: найти минимальный радиус круга C, если дано число кругов N, которые необходимо упаковать. Эти решения сравниваются с решениями, полученными в таблицах E. Specht.

В первом столбце таблицы 2 приведено число кругов N. В следующем столбце — радиус круга ρ, который получается с помощью модификации предложенного подхода. Наилучшие известные значения ρ_{best} (E. Specht) приведены в третьем столбце. Прочерки в третьем столбце означают, что соответствующие задачи не представлены в таблицах E. Specht.

Таблица 1. Результаты упаковки максимального количества кругов

ρ	λ^*	λ^*_{best}
25	535	527
26	581	569
27	624	615
28	672	661
29	725	714
30	777	763
31	832	821
32	885	877
33	943	931
34	1002	990
35	1064	1053
36	1127	1113
37	1188	1176
38	1260	1247
39	1324	1314
40	1394	1381
45	1771	1761
50	2194	2176
55	2664	2651
60	3172	3161
65	3715	3703
70	4338	4321

Таблица 2. Результаты размещения кругов в круге минимального радиуса

N	ρ	ρ_{best}
1077	35.200	35.204
1078	35.210	35.215
1079	35.220	35.227
1080	35.240	35.241
1090	35.400	35.404
1091	35.409	35.410
1092	35.420	35.421
1093	35.455	35.460
1094	35.475	35.478
1095	35.510	35.512
1096	35.525	35.527
1099	35.580	35.582
1100	35.600	35.616
1200	37.120	37.126
1400	40.100	40.071
1500	41.430	41.430
2000	47.780	-
3000	58.290	-
4000	67.210	-
5000	75.105	-

5. Выводы

Предложенная математическая модель, в которой радиусы всех кругов являются переменными одновременно, и новый подход к построению начальных точек позволяют значительно улучшить качество получаемых решений. Разработанные методы можно использовать также и для упаковки кругов различных радиусов. Рассмотренный подход дает возможность использовать многопроцессорные компьютеры. Использование метода решения задач линейного программирования и пакета программ HOPDM [14] позволяет решать задачи большой размерности. Результаты исследования могут быть использованы при изучении структуры белка и клетки в биологии, гранулированных сред, жидкостей в химии и физике, рациональном размещении кабелей.

Литература

1. 1. Conway J. H. Sphere Packings, Lattices, and Groups / Conway J. H., Sloane N. J. A. — New York: Springer-Verlag, 2010. — 703 p.
2. Toth L. F. Uber einem geometrischen Satz / L. F. Toth // Mathematische Zeitschrift. — 1940. — V. 46. — P. 83–85.
3. Maranas C. D. New results in the packing of equal circles in a square / C. D. Maranas, C. A. Floudas, P. M. Pardalos // Discrete Mathematics. — 1995. — V. 142, № 1–3. — P. 287–293.

4. Birgin E. G. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems / E. G. Birgin, F. N. C. Sobral // Computers & Operations Research. — 2008. — V. 35. — P. 2357–2375.
5. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container / A. Grosso, J. U. Jamali, M. Locatelli [та ін.] // Journal of Global Optimization. — 2010. — V. 47(1) — P. 63–81.
6. Akeb H. Basic heuristics for packing a large number of equal circles. [Електронний ресурс]: Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne / H. Akeb, Y. Li // Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne — 2005. — 19 p. — Режим доступу до журн.: http://home.mis.u-picardie.fr/ cli/Publis/circle.pdf . — Назва з екрану.
7. Akeb H. A basic heuristic for packing equal circles into a circular container. [Електронний ресурс]: Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne / H. Akeb, Y. Li // Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne. — 2005. — 19 p. — Режим доступу до журн.: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.108.8530&rep=rep1 &type=pdf . — Назва з екрану.
8. Kallrath J. Cutting circles and polygons from area-minimizing rectangles / J. Kallrath // Journal of Global Optimization. — 2009. — V. 43. — P. 299–328.
9. Hurlimann, T. Modeling Languages in Optimization. A New Paradigm / T. Hurlimann // Christodoulos A. Floudas, Panos M. Pardalos (Eds.) Encyclopedia of Optimization, Second Edition, Springer. — 2009. — P. 2297–2304.
10. Lenstra J. K. Complexity of packing, covering, and partitioning problems / J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy // Packing and Covering in Combinatorics; [ed. by Schrijver A, Amsterdam: Mathematisch Centrum]. — 1979. — P. 275–291.
11. Stoyan Yu. Packing identical spheres into a cylinder / Yu. Stoyan, G. Yaskov // Intl. Trans. in Op. Res. — 2010. — V. 17, № 1. — P. 51–70.
12. Zoutendijk G. Nonlinear programming, computational methods, / G. Zoutendijk // Integer and Nonlinear Programming; [Ed. by J. Abadie, North Holland Publishing Co, Amsterdam]. — 1970. — P. 37–86.
13. Stoyan Y. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region / Y. Stoyan, A. Chugay // European Journal of Operational Research. — 2009. — V. 197. — P. 446–455.
14. Gondzio J. HOPDM (version 2.12) — A Fast LP Solver Based on a Primal-Dual Interior Point Method / J. Gondzio // European Journal of Operational Research. — 1995. — V. 85, № 1. — P. 221–225.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина.

Поступила 20.10.2012

УДК 517.948

КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЖОРСТКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ АПРОКСИМАЦІЙНОГО МЕТОДУ В. К. ДЗЯДИКА

В. І. Біленко, А. І. Дерієнко, Н. Г. Кирилаха

Резюме. Актуальність теми роботи обумовлена зростаючими вимогами до точності обчислювальних методів та алгоритмів. Такі вимоги виникають, зокрема при дослідженні широкого кола задач сучасної обчислювальної та прикладної математики. Цим вимогам в значній мірі відповідає апроксимаційний метод В.К. Дзядика, що відображено в багатьох його роботах. З метою обґрунтування запропонованого алгоритму доведена теорема в термінах теорії наближення функцій про відхилення кусково-поліноміальних наближень від точного розв'язку задачі в рівномірній та квадратичній метриках. Обчислювальні експерименти ілюструють високу ефективність запропонованого алгоритму та теоретичні результати.

Вступ

В роботі розглядається питання побудови, обґрунтування та комп'ютерної реалізації алгоритму кусково-поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Коші для жорстких систем диференціальних рівнянь вигляду:

$$A(x,y)y' = f(x,y), y(0) = y_0, x \in [0,H] \tag{1}$$

де $y(x)$ — вектор невідомих функцій. Припускається, що компоненти матриці A та вектора f є алгебраїчними многочленами двох змінних.

Цей алгоритм ґрунтується на апроксимаційному методі В. К. Дзядика, представленому в роботах [1–3]. Важливими властивостями та перевагами над іншими методами та алгоритмами [4–8] є його оптимальність в сенсі найкращих наближень та ненасиченість (алгоритм без насичення точності [4] або алгоритм інтелектуального моделювання в термінах [9]). Це особливо важливо при необхідності уникнення явища "вибуху похибок" для жорстких задач [5–11].

Актуальність таких питань обумовлена зростанням вимог до точності та надійності математичного та комп'ютерного моделювання екстремальних динамічних процесів, систем і технологій, пов'язаних з ризиком для життя людей [9].

Зокрема, жорсткі рівняння являють собою математичні моделі різних явищ і процесів в аерокосмонавтиці (оптимальне управління та безпека літальних апаратів), в ядерній фізиці, супрамолекулярних структурах, наноелектроних і надпровідних системах, хімічній кінетиці, теорії еволюційних

процесів та ін. [8–14]. Значну роль у розширенні можливостей апроксимаційних методів В. К. Дзядика відіграли відомі відкриття Нобелівських лауреатів в галузі нанофізики зі створення скануючого тунельного та скануючого атомно-силового мікроскопів.

Алгоритм

Ідею алгоритму розглянемо, використовуючи результати роботи [16] на прикладі одного рівняння вигляду (1) при

$$A(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k, \qquad f(x,y) = \sum_{l=0}^{S} \sum_{j=0}^{J} b_{lj} x^l y^j(x) \tag{2}$$

де a_k і b_{lj} — постійні коефіцієнти, $r, s, J \in \mathbb{N}$.

Зведемо аналогічно [1-3, 16] задачу (1)–(2) до еквівалентного інтегрального рівняння типу Вольтерра третього роду

$$A(x) \cdot y(x) = y_0 + \int_0^x F(t, y(t))dt, \tag{3}$$

де

$$F(t, y(t)) = f(t, y(t)) + y(t) \cdot \sum_{k=1}^{r} k a_k t^{k-1}, \tag{4}$$

Розіб'ємо, як звичайно [6-8], відрізок $[0,\ H]$ на відрізки $[x_i, x_{i+1}]$, де $i \in 0, .., m$, $x_0 = 0$, $x_m = H$, що обумовлено наявністю "швидких" та "повільних" складових в розв'язку рівняння (3).

Рівнянню (3) поставимо у відповідність на кожному відрізку $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ наближене інтегро-функціональне рівняння

$$A(x) \cdot y_{n,i}(x) = y_{n,i-1}(x_i) + \int_{x_i}^{x} F(t, y_{n,i}(t))dt + \varepsilon_{N,i}(x). \tag{5}$$

де $y_{n,i}(x)$ — розв'язок рівняння, що є алгебраїчним многочленом степені не вище за n на відрізку I_i, одного з наступних виглядів:

$$y_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ki} x^k, \quad y_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{ki} T_k\left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i \tag{6}$$

з невідомими коефіцієнтами α_{ki} (або β_{ki}). $\varepsilon_{N,i}(x)$ — нев'язка-многочлен степені $N = \max(r+n,\ S+J\cdot n+1)$, що залежить від степенів многочленів $A(x)$, $y_{n,i}$ та F [16,19]:

$$\varepsilon_{N,i}(x) = \sum_{k=n+1}^{N} \tau_{ki} T_k\left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right), \tag{7}$$

$T_k(z) = \cos(k \arccos z)$ - многочлен Чебишева першого роду, τ_{ki} — невідомі допоміжні параметри.

Зокрема, на відрізку $I_0 : [x_0, x_1]$ рівняння (5) набуде вигляду:

$$A(x) \cdot y_{n,0}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{n,0}(t))dt + \varepsilon_{N,0}(x), \tag{8}$$

де приймаємо, що при $i = 0$ $y_{n,-1}(x_0) = y_0$.

Для знаходження коефіцієнтів α_{ki} (або β_{ki}) і τ_{ki} може бути використана ітераційна схема:

$$A(x)y_{n,i,\nu}(x) = y_{n,i-1}(x_i) + \int_{x_i}^{x} F(t, y_{n,i,\nu-1}(t))dt + \varepsilon_{N,i,\nu}(x), \tag{9}$$

де $\nu = 1, 2, ...$ — номер кроку ітераційного процесу; $y_{n,i,v}(x)$ і $\varepsilon_{N,i,v}(x)$ — многочлени відповідного вигляду (6) і (7) з коефіцієнтами $\alpha_{k,i,v}$ (або $\beta_{k,i,v}$) і $\tau_{k,i,v}$ на ν–му кроці ітерацій.

Прирівнюючи в (9) при кожному $\nu = 1, 2, ...$ згідно (2), (4) і (5) коефіцієнти з однаковими степенями , одержуємо для α_{kv} і τ_{kv} деяку систему з $(N + 1)$–го лінійного алгебраїчного рівняння.

Теоретичне обґрунтування та аналіз похибки алгоритму

Перед тим як перейти до вивчення питання обґрунтування запропонованого алгоритму, зокрема, питання про відхилення наближеного кусково-поліноміального розв'язку виду $\hat{y}_n(x) = \{y_{n,i}(x)\ ,\ \ i = 0, ..., m$ від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (1), введемо необхідні нам позначення.

Через $C\,[I_i]$ і $L_p^2\,[I_i]$ будемо позначати відповідно простір неперервних і сумовних з квадратом при чебишевскій вазі

$$p_i(x) = 1/\sqrt{1 - \left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right)^2} \tag{10}$$

на відрізку I_i функцій з загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{C[I_i]}$, $\|\cdot\|_{L_p^2[I_i]}$. При дослідженні похибок розв'язування рівнянь припустимо, що

$$\min_{x\in[0,H]} A(x) \geq a_* > 0 \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай числа $H > 0$, і $n = 1, 2, 3...$ такі, що в кулі $\sigma(\rho) := \left\{\psi \in C_{[0,H]} : \|\psi\|_{C_{[0,H]}} \leq \rho\right\}$ існує єдиний розв'язок $y(x)$ рівняння (1)і єдині розв'язки $y_{n,i}(x)$ рівнянь (6)на проміжках $[x_i; x_{i+1}]$, такі, що $\|y_{n,i}\|_Y \leq \rho$, тоді для кожного $i = 0, ..., m$ виконуються нерівності*

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \leq \frac{M_1 m}{a_*} \max_{0\leq i\leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{Y[I_i]}\,, \tag{12}$$

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{L_p^2[0,H]} \leq \frac{m}{a_*}(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2) \max_{0\leq i\leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{L_p^2[I_i]}\,, \tag{13}$$

При виконанні нерівності

$$\theta_n(H,\rho) = \frac{1}{a_*}\left(1 - \frac{\pi h\sqrt{N}}{2(n+1)}M_1\right) > 0, \tag{14}$$

справедлива оцінка

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \le \frac{\lambda_N(Y_{[0,H]})}{a_*\theta_n(H,\rho)}\left(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right)\max_{0\le i\le m}(E_n(y)_{Y[I_i]}), \tag{15}$$

де $h = \max\limits_i h_i$, *величини* $M_1 = M_1(H,\rho,Y)$, $M_2 = M_2(H,\rho,Y)$ — *деякі константи, що не залежать від* n. *Простір* $Y[\cdot]$ *є простором* $C[\cdot]$ *або* $L_p^2[\cdot]$, $E_n(y)_{Y[I_i]}$ — *величина найкращого наближення многочленами функції* $y(x)$ *в* $Y[\cdot]$, $\lambda_N(Y[\cdot]) = 1$ *для простору* $L_p^2[\cdot]$ *і* $\lambda_N(Y[\cdot]) = \sqrt{2N}$ *для простору* $C[\cdot]$.

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на роботах [3,16]. Тому з метою скорочення викладок зупинимося детально на доведенні нерівностей (12) і (13).

Розглянемо спочатку похибку на інтервалі $I_0 : [x_0, x_1]$. В силу (11) розділимо обидві частини рівнянь (3) і (5)на $A(x)$ і отримаємо:

$$y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{1}{A(x)}\int\limits_{x_0}^{x} F(t,y(t)) - F(t,y_{n,0}(t))dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}. \tag{16}$$

З виразу (16), в силу (2),(4) маємо:

$$\begin{aligned} y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{1}{A(x)}\int\limits_{x_0}^{x}(\sum_{l=0}^{S}\sum_{j=0}^{J} b_{lj}t^l\mu_{j,n,0}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{r} ka_kt^{k-1})(y(x) - y_{n,0}(x))dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\mu_{j,n,0}(t) = \sum_{p=0}^{j-1} y_{n,0}^p(t)y^{j-p-1}(t). \tag{18}$$

В силу лінійності рівняння (18)відносно різниці $y(x) - y_{n,0}(x)$ має місце рівність

$$y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} + \int\limits_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t)\frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}dt, \tag{19}$$

де $R_{n,0}(x,t)$ — резольвента ядра

$$G_{n,0}(x,t)=\frac{1}{A(x)}(\sum_{l=0}^{S}\sum_{j=0}^{J}b_{lj}t^{l}\mu_{j,n,0}(t)+\sum_{k=1}^{r}ka_{k}t^{k-1}) \tag{20}$$

рівняння (17).

Звідси, на основі нерівності Гронуолла-Белмана, згідно (11)та (17)і з урахуванням того, що $y,\hat{y}_n\in\sigma(\rho)$, отримуємо оцінку (12)для $Y\,[I_0]=![I_0]$.

Якщо застосувати рівність (19)та нерівність Буняковського для оцінки резольвенти $R_{n,0}(x,t)$ згідно (20), то можна пересвідчитися в справедливості оцінки (12)при $Y[I_0]=L^2_{p_0}[I_0]$. Отримаємо, що

$$\|y(x)-y_{n,0}(x)\|_{L^2_p}\le\left\|\frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_{p0}}+\left\|\int\limits_{x_0}^{x}R_{n,0}(x,t)(\frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)})dt\right\|_{L^2_{p0}}\le$$

$$\begin{aligned}&\le\left\|\tfrac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_p}\times\left[1+\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{x_0}^{x}R^2_{n,0}(x,t)\sqrt{\frac{1-\left(2\frac{t-x_0}{h_0}-1\right)^2}{1-\left(2\frac{x-x_0}{h_0}-1\right)^2}}dtdx\right)^{\frac12}\right]\le\\&\le\left\|\tfrac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_p}\times\left[1+\tfrac{H\cdot\pi}{2a_*}M_{1,0}(h_0,\rho)\exp\left(H\cdot M_{1,0}(H,\rho)/a_*\right)\right]\end{aligned} \tag{21}$$

Таким чином для інтервалу I_0 в просторі $L^2_p[I_0]$ нерівність (12)доведена.

Далі, для простору $L^2_p[I_0]$ в силу теореми про диференційованість за параметром, вимоги якої задовольняються, проводимо заміну $z=\arccos(2\frac{t-x_0}{h_0}-1)$ і інтегруємо частинами інтеграл, що стоїть в правій частині (17). Із врахуванням (5)отримаємо

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{x_0}^{x}R_{n,0}(x,t)\tfrac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}dt\right|=\\&=\left|\int\limits_{x_0}^{x}R_{n,0}(x,t)\sum_{k=n+1}^{N}\tau_{k0}T_k\left(2\tfrac{t-x_0}{h_0}-1\right)\tfrac{1}{A(t)}dt\right|=\\&=h_0\left|\sum_{k=n+1}^{N}\tfrac{\tau_{k0}}{n+k}\left[\left.\tfrac{R_{n,0}(x,h_0\cos z)\sin z\sin(n+k)z}{A(h_0\cos z)}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(2\frac{t-x_0}{h_0}-1)}-\right.\right.\\&\left.\left.-\int\limits_{\pi/2}^{\arccos(x)}\sin(n+k)z\tfrac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{R_{n,0}(x,h_0\cos z)\sin z}{A(h_0\cos z)}\right)dz\right]\right|\le\\&\le h_0c_0(h_0,\rho)\sum_{k=n+1}^{N}\tfrac{|\tau_{k0}|}{n+k}\le\tfrac{h_0\|\tau_0\|\sqrt{N}}{n+1}c_0(h_0,\rho),\end{aligned} \tag{22}$$

де

$$\|\tau_0\|=\left(\sum_{l=1}^{N}\tau^2_{l0}\right)^{\frac12}; \tag{23}$$

$A_0(h_0, \rho)$ — деяка стала, що не залежить від n.

Якщо скористатися тепер тим, що в силу ортогональності поліномів Чебишева $T_k(2\frac{t-x_0}{h_0} - 1)$ на $[x_0, x_1]$ із вагою p_0 мають місце, аналогічно [2] нерівності

$$\|\tau_0\| = \left[\frac{2}{\pi h_0}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon^2_{N,0}(x)dx}{\sqrt{1-\left(2\frac{t-x_0}{h_0}-1\right)^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|A(x)\|_C \left\|\frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_p} \tag{24}$$

із (19)в силу (20)отримаємо нерівність (13).

Далі, в силу лінійності та проекційності поліноміальних операторів Фур'є-Чебишева, при виконанні умови (14), отримаємо, аналогічно [3, 16] оцінку

$$\|\tau_0\| \leq E_n(y)_{L^2_{p_i}}/\theta_n(h_0, \rho).$$

Звідси, якщо врахувати попередню оцінку та нерівність (21), маємо (15).

Теорема для відрізку $I_0 : [x_0, x_1]$ доведена.

На відрізку $I_1 : [x_1, x_2]$ вираз (16)прийме вигляд:

$$\begin{gathered} y(x) - y_{n,1}(x) = \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)} + \tfrac{1}{A(x)}\int\limits_{x_1}^{x} F(t, y(t)) - \\ -F(t, y_{n,1}(t))dt + \tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)}, \end{gathered} \tag{25}$$

Використовуючи міркування, аналогічні попереднім, з використанням резольвенти, отримаємо для I_1:

$$\begin{gathered} y(x) - y_{n,1}(x) = \tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)} + \\ + \int\limits_{x_1}^{x} R_{n,1}(x,t)(\tfrac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(t)})dt, \end{gathered} \tag{26}$$

де $R_{n,1}(x,t)$ — резольвента відповідного ядра $G_{n,1}$ виду, подібного (20).

Оцінка (12)для даного інтервалу матиме вигляд:

$$\begin{gathered} \|y(x) - y_{n,1}(x)\|_{L^2_p} \leq \left\|\tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)}\right\|_{L^2_p} + \\ + \left\|\int\limits_{x_1}^{x} R_{n,1}(x,t)(\tfrac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(t)})dt\right\|_{L^2_p} \leq \\ \leq \frac{\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p} + \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p}}{a_*}\left[1 + \tfrac{h_1 \cdot \pi}{2a_*} M_{1,1}(h_1, \rho)\exp\left(H \cdot M_{1,1}(h_1, \rho)/a_*\right)\right] \end{gathered}$$

Оцінки (13), (15)для інтервалу I_1 одержимо у вигляді

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \leq \frac{2}{a_*}\max_{0\leq i\leq m}\left(\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{Y[I_0]}, \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{Y[I_1]}\right),$$

$$\begin{gathered} \|y(x) - y_{n,1}(x)\|_{L^2_p[0,H]} \leq \tfrac{2}{a_*}(1 + \tfrac{h_1\sqrt{N}}{n+1}M_{2,1})\max(\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p[I_1]}, \\ \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p[I_1]}), \end{gathered}$$

$$\|y(x)-y_{n,1}(x)\|_{Y[0,H]} \le \frac{\lambda_N(Y_{[0,H]})}{a_*\theta_n(h_1,\rho)}\left(1+\frac{h_1\sqrt{N}}{n+1}M_{2,1}\right)\max(E_n(y)_{Y[I_0]}, E_n(y)_{Y[I_1]}).$$

Звідси методом індукції легко переконатись в справедливості нерівностей (12), (13), (15)для $i=1,...,m$, якщо покласти, що $M_1=\max\limits_{0\le i\le m} M_{1,i}$; $M_2=\max\limits_{0\le i\le m} M_{2,i}$. Таким чином, теорема доведена. □

З цієї теореми і теорем Бернштейна [3,17] для оцінки рівномірного наближення многочленами функцій, аналітичних в еліпсах Жуковського $E_{r_i}(r_i>1)$, та цілих функцій $y(z)$ з класу H^σ, $\sigma>0$, $z\in\mathbb{C}$, отримаємо наступні два наслідки.

Наслідок 1. *Нехай функції $A(x)$, $f(x,y)$ і число $H>0$ такі, що існує єдина аналітична на еліпсі Жуковського для інтервалу $[0,H]$ функція $y(x)$, що є розв'язком рівняння (1).*

Тоді в умовах і термінах теореми виконується нерівність

$$\|y(x)-y_{n_i}(x)\|_C \le \left[1+\frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right]\frac{2\sqrt{2N}}{a_*\theta_n(h,\rho)}\left(\frac{\|y\|_{C(E_{r_i})}}{(r-1)\cdot r^n}\right),$$

де $\|y\|_{C(\mathrm{E}_r)}=\max\limits_{z\in E_r}|y(z)|$, $r=\min\limits_{0\le i\le m} r_i$ для кожного $i=0,...,m$, E_{r_i} — еліпси Жуковського для інтервалів для інтервалів $[x_i,x_{i+1}]$, де $r_i>1$.

Наслідок 2. *Якщо $y(z)$, розв'язок рівняння (1)— ціла функція і $y(z)\in H_\sigma$, така, що $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0$, $y(z)<\exp\{\sigma\cdot(|b|+\varepsilon|z|)\}$, для $\forall z=a+bi$ і $|z|>\delta_\varepsilon$, та $\sigma\cdot\varepsilon=A^{\sigma/2}$, то має місце нерівність*

$$|y(x)-\hat{y}(x)| \le \left[1+\frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right]\frac{2\sqrt{2N}}{a_*\theta_n(h,\rho)}\exp\left\{-\frac{n}{2}\cdot c^{3/2}\right\},$$

де $A-$ константа, для кожного $n>N(c)$ на інтервалі $[-n/\sigma\cdot(1-c),n/\sigma\cdot(1-c)]$.

Таким чином, для аналітичних і цілих функцій запропонований алгоритм має експоненціальну збіжність [4].

Обчислювальний експеримент

Для реалізації запропонованого алгоритму було обрано жорстку систему звичайних диференційних рівнянь з робіт [6,8]:

$$\begin{cases} x'=998x+1998y, & x(0)=1,\\ y'=-999x-1999y & y(0)=0. \end{cases} \tag{27}$$

з точним розв'язком $x(t)=2e^{-t}-e^{-1000t}$ і $y(t)=-e^{-t}+e^{-1000t}$.

Наявність "повільної" та "швидкої" складової в кожному розв'язку цієї задачі не дозволяє ефективно наблизити їх на відрізку $[0;1000]$ єдиним многочленом.

Ефективність запропонованого алгоритму ілюструється навіть у найпростішому випадку наближення розв'язку (27) кусково-лінійними многочленами. Так, наприклад, для досягнення точності 0,05 відрізок $[0;1000]$, на

основі апріорних та апостеріорних оцінок даної роботи та робіт [10,14] було автоматично розбито на 6 проміжків, на кожному з яких розв'язок було наближено лінійним многочленом, а саме:

$[0; 0,001]$: $x(t) = 638,001t + 1,04$, $y(t) = -639t - 0,04$;
$[0,001; 0,003]$: $x(t) = 161,506t + 1,509$, $y(t) = -162,504t - 0,509$;
$[0,003; 0,7]$: $x(t) = -1,445t + 1,954$, $y(t) = 0,7214t - 0,977$;
$[0,7; 1,7]$: $x(t) = -0,636t + 1,398$, $y(t) = 0,3178t - 0,699$;
$[1,7; 3,7]$: $x(t) = -0,1624t + 0,601$, $y(t) = 0,0812t - 0,3004$;
$[3,7; 1000]$: $x(t) = 0$, $y(t) = 0$.

При наближенні квадратичними многочленами для досягнення тієї ж точності відрізок $[0; 1000]$ автоматично розбивається лише на 3 проміжки. Зі зростанням n на одиницю точність збільшується на порядок, що добре ілюструє наслідок теореми.

На основі міркувань при доведенні в [10] на відрізку $[-1, 1]$ нерівності $|y_n(x) - e^x| \le (1 + 7/n^2)E_n(e^x)$ можна переконатись в справедливості нерівностей:

$$\left\|\hat{x}_n - (2e^{-t} - e^{-1000t})\right\|_{![0,1000]} \le (1 + \delta_{1n}(x)) \cdot \max_{0\le i\le 5}(E_n(2e^{-t} - e^{-1000t})_{C_{[I_i]}}),$$

$$\left\|\hat{y}_n - (-e^{-t} + e^{-1000t})\right\|_{C_{[0,1000]}} \le (1 + \delta_{2n}(y)) \cdot \max_{0\le i\le 5}(E_n(-e^{-t} + e^{-1000t})_{C_{[I_i]}})$$

де $\delta_{1n}, \delta_{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, $E_n(\cdot)_{C_{[I_i]}}$ — величини найкращих рівномірних наближень функцій $x(t)$ та $y(t)$ на відрізках $[x_i, x_{i+1}]$.

Питання щодо стійкості (A-стійкості, L-стійкості, в сенсі Далквіста та ін.[6,7]) та інформаційної складності автори планують розглянути в наступних публікаціях.

Зауваження 1. Запропонований алгоритм залишається в силі на випадок диференціальних рівнянь вигляду (1)в скінченній однозв'язній області G комплексної площини $\mathbb{C}$ зі спрямлюваною границею и однозв'язним доповненням. Але в цьому випадку замість многочленів Чебишева варто розглядати ортогональні многочлени. Зокрема, в ряді випадків наприклад, коли G є зіркою Міттаг-Леффлера [3] такими ортогональними многочленами можуть служити многочлени Фабера.

Зауваження 1. Питання узагальнення запропонованого алгоритму та теореми для класичних ортогональних многочленів [18] (Лежандра, Чебишева-Єрмита, Чебишева-Лаггера, та загальних многочленів Якобі) не є принципово відмінним. Але таке узагальнення є важливими в обчислювальній та прикладній математиці, математичній фізиці, квантовій механіці та новітніх застосуваннях в технічних задачах математичного та комп'ютерного моделювання.

Зазначимо, що результати даної статті були анонсовані в [19, 20].

Висновки

Таким чином, результати теоретичного обґрунтування запропонованого алгоритму та обчислювального експерименту дають підстави зробити висновок , що алгоритм може добре доповнювати існуючі методи розв'язання жорстких задач в сенсі точності та швидкодії. Це обумовлено тим, що

розв'язок має аналітичний вигляд, який дає найкращі наближення в рівномірній метриці на відрізках розбиття, тобто даний алгоритм є алгоритмом без насичення точності.

Література

1. Дзядик В. К. Про ефективну побудову многочленів, які здійснюють близьке до найкращого наближення функцій e^x, $\sin x$ та інші / В. К. Дзядик // Укр. мат. журн., — 1973. — Т. 25, № 4. — С. 435– 453.
2. Дзядык В. К. Апроксимационный метод приближения линейных дифференциальных уравнений / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР сер. матем. — 1974. — Т. 38, № 4. — С. 938–967.
3. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. — Киев: Наукова думка, 1988. — 387 с.
4. Гаврилюк И. П. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности / И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2004. — 500 с.
5. Кутнів М. В. Компактні різницеві схеми високого порядку точності / М. В. Кутнів, В. Л. Макаров // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 36–47.
6. Gear C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations / C. W. Gear. — New Jersey: Prentice-Hall, 1971. — 256 p.
7. Ракитский Ю. В., Численные методы решения жестких задач / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. — М.: Наука, 1979. — 210 с.
8. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие / В. В. Иванов. — Киев: Наукова думка, 1986. — 584 с.
9. Чуа Л. О. Машинный анализ электронных схем / Л. О. Чуа, Пен-Мин Лин. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
10. Гладкий С. Л. Интеллектуальное моделирование физических проблем / С. Л. Гладкий, Н. А. Степанов, Л. Н. Ясницкий; Под ред. Л. Н. Ясницкого. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. — 200 с.
11. Захаров А. Ю. Информация о работах по жестким системам дифференциальных уравнений / А. Ю. Захаров, Н. Н. Калиткин // Минск: Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 10. — С. 1831–1832.
12. Кальянова Н. Л. LSODA — пакет программ для численного решения жестких и нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим выбором метода интегрирования / Н. Л. Кальянова, А. Ю. Захаров Ю. Е. Маркачев. — М.: Наука, АН СССР, Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша. — 1988. — 30 с.
13. Еленин Г. Г. Нанотехнологии и вычислительная математика / Г. Г. Еленин // В кн. Мат. мод. в нанотехнологиях и структурах. Тр науч. сем. — М.: МИФИ, 2001. — 116 с.
14. Кирилаха Н. Г. Математична модель еволюційного процесу зі змінними параметрами / Н. Г. Кирилаха // Вісник Черкаського університету. Сер. Прикладна математика. Інформатика. — 2010. — Вип. 172. — С. 39–45.
15. Физико-химия наноматериалов и супрамолекулярных структур в 2 т. / Под ред. А. П. Шпака, П. П. Горбик. — К.: Наук. Думка, 2007. — Т. 2 — 440 с.

16. Биленко В. И. Аппроксимационный метод для решения интегральных уравнений типа Вольтерра-Урысона с полиномиальными нелинейностями / В. И. Биленко // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1989. — Т. 29, № 10. — С. 1577–1581.
17. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. / С. Н. Бернштейн. — Л.-М.: ГРОТЛ, 1937. — 205 с.
18. Суетин П. К. Классические ортогональне многочлены / П. К. Суетин. — Mocitem ква: Наука, 1976. — 328 с.
19. Bilenko V. I. Integro-approximation method for the solution of stiff systems of ODE-s with algebraic nonlinearities / V. I. Bilenko, I. D. Dobra // Abstracts 5th conference of numerical methods. — Miskolc, 1990. — P. 8–9.
20. Біленко В. І. Чисельно-аналітичний метод без насичення точності для наближення розв'язків жорстких задач / В. І. Біленко, А. І. Дерієнко // Міжнародна конференція "Обчислювана та прикладна математика", присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Матеріали конференції. — К., 2012. — С. 32.

Кременчуцький Університет Економіки, Інформаційних Технологій і Управління, 39630 м. Кременчук, вул. Пролетарська, 24/37 Україна.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 39630 м.Кременчук, вул.Першотравнева 20, Україна.

Надійшла 4.06.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРОГРАММНАЯ НАДЕЖНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Ю. Гончаренко

Резюме. Исследование надежности вычислительных систем, представимых конечными графами, включает в себя как классические задачи теории вероятностей (наработка на отказ, среднее время восстановления и т.д.), так и применение алгоритмов и программ, обеспечивающих работоспособность системы в случае отказов. В работе представлена математическая модель отказов. Исследованы условия, при которых реальная задача на частично отказавшем оборудовании приводит к решению, "близкому" к истинному.

Введение

Доступность вычислительных кластеров ставит вопрос о надежности аппаратных и программных средств и достоверности получаемых результатов. Рассмотрим модельный пример.

Решить систему линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сведем задачу к поиску неподвижной точки отображения

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = (I - A)\overline{x} + \bar{b}.$$

Для отыскания неподвижной точки организуем итерационный процесс

$$\overline{x}(n) = (I - A)\overline{x}(n-1) + \bar{b}, n \in N \tag{1}$$

с начальным приближением $\overline{x}(0) = \bar{b} = (1; 1)$.

Собственными числами матрицы $(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ будут $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Отображение $F(\overline{x}) = (I - A)\overline{x} + \bar{b}$ является сжимающим, а итерационный процесс сходится [1].

Для реализации процесса (1) рассмотрим вычислительную систему, состоящую из двух процессоров P_1 и P_2, связанных дуплексным каналом связи.

$$\mathbf{P_1} \quad x_1(n) = -\frac{1}{4}x_2(n-1) + 1, \quad \mathbf{P_2} \quad x_2(n) = x_1(n-1) + x_2(n-1) + 1,$$

где $x_1(n)$, $x_2(n)$ — первая и вторая координаты n-й итерации, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ — начальные приближения.

При этом каждая из вычислительных машин системы прекращает свою работу, если расстояние между соседними итерациями составляет 0,01. Что соответствует критерию остановки итерационного процесса в норме $\|\bar{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. В векторной форме $||\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}|| = ||(I-A)^n\bar{b}||$, процесс останавливается при $\|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| < 0.01$. Одиннадцатая итерация дает $\bar{x}_{11} - \bar{x}_{10} = (\frac{31}{4096}; \frac{68}{4096})^T$, т.е. $|x_1(11) - x_1(10)| = 0,00756... < 0,01$, а $|x_2(11) - x_2(10)| = 0,0166... > 0,01$.

Распределенный критерий завершения работы на 11-й итерации остановит работу первой машины и продолжает работу второй. Обозначим $\bar{x}(11) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, тогда вторая координата, вычисляемая второй машиной при фиксированной первой координате, будет $x_2(n) = (n-11)(a-1) + b$. Что приводит к расходящейся последовательности.

Аналогичная ситуация складывается, если первая машина выйдет из строя. Тогда вторая будет продолжать итерировать вторую координату, приводя к расходящейся последовательности. Попытка использовать для критерия завершения нормы типа $\|\bar{x}\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ требует опроса всех процессоров для их вычисления, а значит, линейного роста времени обмена по отношению к размерности решаемой задачи, что в силу закона Амдала [2] быстро нивелирует приращение производительности.

Вероятностным задачам повышения надежности вычислительных систем, представимых конечными графами за счет резервирования, будет посвящена отдельная работа. Ниже рассматривается задача о "правдоподобии" полуаемых результатов в случае выхода из строя одного из процессоров, либо "досрочной" остановки вычислительного процесса в случае достижения необходимой точности по некоторым координатам.

Постановка задачи

Пусть $p \subset \{1, 2, 3, ..., n\}$ — некоторое подмножество номеров координат (интерпретируемое, как множество работоспособных машин). Рассмотрим оператор ортогонального проектирования P на подпространство с координатами, номера которых принадлежат множеству p, действующий по правилу

$$P\bar{x} = \begin{cases} x_i & \text{при } x \in p, \\ 0 & \text{при } x \notin p. \end{cases} \tag{2}$$

Матрицей линейного оператора P будет диагональная квадратная матрица с единицами на тех местах главной диагонали, номера которых попадают в множество I, и нулевыми остальными элементами ($a_{ii} = 1$, если $i \in p$ и $a_{ij} = 0$, если $i \notin p$ или $i \neq j$). Обозначим через $Q = I - P$ оператор ортогонального проектирования на дополнительное подпространство (указывает на множество отказавших машин).

Пусть $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Спрашивается: каким условием должно удовлетворять исходное отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, чтобы для любого вектора $\bar{b}$ и каждого проектора P вида (2) отображение

$$P(F(P\bar{x} + Q\bar{b})) + Q\bar{b} \tag{3}$$

было сжимающим? В частности, если $p = \{1, 2, 3, ..., n\}$, то $P = I$ и отображение F должно быть сжимающим. Рассмотрим менее тривиальный случай, когда p является собственным подмножеством множества $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^n_+$ — конус в $\mathbb{R}^n$ векторов с неотрицательными координатами. Зададим в нем отношение частичного упорядочивания следующим образом: $\bar{x}$, $\bar{y} \in R^+_n$ сравнимы, если для всех $i = \overline{1,n} \quad x_i \geq y_i$, обозначается $\bar{x} \geq \bar{y}$, либо $x_i \leq y_i$, обозначается $\bar{x} \leq \bar{y}$. Пусть отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n_+$ каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие вектор $|\bar{x}|$, составленный из абсолютных величин координат вектора $\bar{x}$,

$$|\bar{x}| = \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Такое отображение называется векторной нормой, а значение отображения на векторе $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ — векторной нормой вектора $\bar{x}$.

По отношению к частичному упорядочиванию в $\mathbb{R}^n$ векторная норма обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\ |\bar{x}| \geq \bar{0} \text{ и } |\bar{x}| = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{0}, \\ &2)\ |\alpha\bar{x}| = |\alpha\,\|\,\bar{x}| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in R^1, \\ &3)\ |\bar{x} + y| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично, на множестве квадратных матриц M_n можно выделить конус M^+_n неотрицательных матриц, т.е. матриц с неотрицательными элементами и ввести на нем отношение частичного упорядочивания, говоря, что матрицы A, $B \in M^+_n$ находятся в отношении $A \leq B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$ или в отношении $A \geq B$, если $a_{ij} \geq b_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$.

Отображение, ставящее каждой матрице A в соответствие матрицу $|A| = \|\,|a_{ij}|\,\|^m_{ij=1}$, составленную из абсолютных величин ее элементов, также удовлетворяет свойствам, аналогичным (4)[3,4].

Непосредственно проверяется, что если:

$$\begin{aligned} &1)\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad |\bar{x}| > |\bar{y}|, \quad \text{то} \quad |A|\,|\bar{x}| \geq |A|\,|\bar{y}|, \\ &2)\ A, B \in M_n \quad \text{и} \quad |A| > |B|, \quad \text{то} \quad |A|\,|\bar{x}| \geq |B|\,|\bar{x}|. \end{aligned} \tag{5}$$

Центральным результатом в этой области является теорема Перрона, обобщенная Г. Фробениусом.

Теорема 1. *(Теорема Перрона). Положительная квадратная матрица A имеет вещественное и положительное собственное значение λ, алгебраической кратности 1, которое превосходит модули всех других собственных значений матрицы A. Собственный вектор, соответствующий λ, может быть выбран положительным* [5].

Далее также будет использована следующая теорема.

Теорема 2. *О непрерывной зависимости спектрального радиуса. Спектральный радиус линейного оператора A, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$, непрерывно зависит от коэффициентов его матрицы $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$.*

Доказательство. Это утверждение можно доказать в следствии того, что $\rho(A) = \inf\limits_{||\cdot||} ||A||$ и непрерывной зависимости нормы оператора от коэффициентов его матрицы [6]. Более естественное, но значительно более громоздкое доказательство опирается на непрерывную зависимость корней многочлена от его коэффициентов [7] и того факта, что коэффициенты характеристического многочлена являются целыми функциями от коэффициентов матрицы оператора [6]. □

Лемма 1. *Пусть $A \in M_n^+$ — неотрицательная квадратная матрица. $\rho(A) < 1$ тогда и только тогда, когда существуют такие положительный вектор $\bar{\nu} \in \mathbb{R}_+^n$, $\bar{\nu} > 0$ и скаляр $\omega \in [0, 1)$, что*

$$A\bar{\nu} \le \omega\bar{\nu}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть ω и $\bar{\nu}$ существуют. Зададим по вектору $\bar{\nu}$ норму в $\mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}\|_\nu \equiv \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{|x_i|}{\nu_i} \mid \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,\ \bar{\nu} = \{\nu_i\}_{i=1}^n \right\}. \tag{7}$$

Вычислим $\|A\|_\nu$. Так как

$$\|A\|_\nu \equiv \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \|A\bar{x}\|_\nu = \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\left| \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|}{\nu_i} \right\} \right\} \le$$

$$\le \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} |x_j|}{\nu_i} \right\} \right\} = \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} \nu_j \frac{|x_i|}{\nu_j}}{\nu_i} \right\} \right\} \le$$

$$\le \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} \nu_j}{\nu_i} \right\} \right\} \le \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\omega\nu_i}{\nu_i} \right\} \right\} = \omega,$$

то $\rho(A) \le \|A\|_\nu \le \omega$ [8].

Необходимость. Пусть $\rho(A) < 1$, $t > 0$, A_t — матрица, полученная из A в результате замены всех нулевых элементов матрицы A числом t. Тогда $A \le A_t$. Как следует из свойств (5), $A|\bar{x}| \le A_t|x|$. С другой стороны, по теореме о непрерывной зависимости спектрального радиуса, $\rho(A_t)$ является непрерывной функцией t. Поскольку $A_t \to A$ при $t \to 0$, а $\rho(A) < 1$, то существует такое $t > 0$, что $\rho(A_t) < 1$. Выберем $\omega = \rho(A_t)$. Поскольку $A_t > 0$, то в соответствии с теоремой Перрона существует такой

положительный вектор $\bar{\nu} > \bar{0}$, соответствующий собственному значению ω, что $A_t\bar{\nu} = \omega\bar{\nu}$ и, следовательно, с учетом свойств (5), $A\bar{\nu} \leq A_t\bar{\nu} = \omega\bar{\nu}$. □

Основной результат

Отображение $F : D \to \mathbb{R}^n$ назовем липшицевым с линейной мажорантой A, если существует такая неотрицательная матрица $A \in M_n^+$, что $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in D$ выполняется неравенство

$$|Fx + Fy| \leq A\,|\bar{x} - \bar{y}|. \tag{8}$$

Если к тому же $\rho(A) < 1$, то F называется сжимающим отображением с линейной мажорантой A или A-сжатием [4].

Теорема 3. *Для того, чтобы для любого оператора ортогонального проектирования P и каждого вектора $\bar{b}$ отображение*

$$PF(P\overline{x} + Q\bar{b}) + Q\bar{b}$$

было сжимающим, достаточно, чтобы отображение F было A-сжатием.

Доказательство. Рассмотрим цепочку неравенств:

$$|PF(P\overline{x}+Q\bar{b})+Q\bar{b}-PF(P\overline{x}+Q\bar{b})-Q\bar{b}| = |P(F(P\overline{x}+Q\bar{b})-F(P\overline{y}+Q\bar{b}))| \leq$$

$$\leq A|P\overline{x}+Q\bar{b}-P\overline{y}-Qb| \leq A|P\overline{x}-P\bar{b}| \leq A|\overline{x}-\overline{y}|.$$

Тогда, согласно лемме 1, по оператору A найдется такая норма вида (7), что $\|A\|_\nu < 1$. Норма вида $\|.\|_\nu$ зависит от абсолютных величин координат векторов, а значит, является монотонной в том смысле, что для всех $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ из неравенства $|x| < |y|$ следует неравенство $\|\overline{x}\|_\nu < \|\overline{y}\|_\nu$ [6].

Таким образом,

$$\|PF(P\overline{x} + Q\bar{b}) + Q\bar{b} - PF(P\overline{x} + Q\bar{b}) - Q\bar{b}\|_\nu \leq \omega\|\overline{x} - \overline{y}\|_\nu,$$

где $\omega < 1$. Следовательно отображение сжимающее. □

Выводы

С формальной точки зрения отказ оборудования и досрочное завершение процесса эквивалентны для вычислительного процесса. Для сохранения надежности функционирования систем по отношению к отказам ее элементов или неравномерному прекращению обновления координат вектора итераций следует использовать отображения, являющиеся A-сжатиями.

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1. / Н.С. Бахвалов. — М: Наука, 1975. — 632 с.
2. Amdahl, G. The validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities./ G. Amdahl // AFIPS Spring Joint Computer Conference, April 1967 / Atlantic City, USA. — 1967. — P. 483–485.
3. Приближенное решение операторных уравнений. / [М.А. Красносельский и др.]; под ред. Г.А. Безсметных. — М: Наука, 1969. — 456 с.

4. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. — М: Мир, 1975. — 558 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. — М: Наука, 1967. — 576 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. / П. Ланкастер. — М: Наука, 1978. — 280 с.
7. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. / А.М. Островский. — М: Издательство иностранной литературы, 1963. — 219 с.
8. Baudet G.M. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors. / G.M. Baudet // J. ACM. — 1978. — 25. — P. 226–244.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 05.03.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6:531:537

ГРУППА ЛИ КАК КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ ПРОСТОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. С. Зуб

Резюме. В статье дано введение в теоретико-групповые методы для гамильтоновой динамики магнитно взаимодействующих тел. Конфигурационные и фазовые пространства для гамильтоновой динамики магнитно взаимодейтвующих твердых тел тесно связаны с группами Ли $SO(3)$ и $SE(3)$. В некоторых случаях группа Ли непосредственно является конфигурационным пространством простой механической системы, описывающей движение магнитного тела. При этом не все преобразования группы являются симметриями динамической системы. Поэтому соответствующая пуассонова структура не является структурой Ли-Пуассона, которой посвящены большинство работ по применению групп Ли в механике. В данной работе рассматривается применение аппарата дифференциальной геометрии для описания структур гамильтоновой динамики на фазовом пространстве группы Ли.

Введение

Как показано в работах [1, 2, 3, 4], гамильтонов формализм является удобным инструментом для исследования динамики магнитно взаимодействующих твердых тел.

Необходимо отметить, что исследование устойчивости в гамильтоновых системах сталкивается с рядом специфических трудностей [5, 6]. Для гамильтоновых систем с симметриями применение теоретико-групповых методов позволяет преодолеть указанные трудности в ряде интересных случаев. В частности, это позволило обнаружить возможность устойчивых орбитальных движений в магнитных системах [2, 3, 4].

Так как имеются аргументы математического характера (теорема Ирншоу [7], проблема «$1/r^3$» [8], которые ставят под сомнения саму возможность существования устойчивых статических и динамических равновесий в магнитных системах, то возникает необходимость строгого аналитического доказательства устойчивости.

Конфигурационные и фазовые пространства для гамильтоновой динамики магнитно взаимодействующих твердых тел тесно связаны с группами Ли $SO(3)$ и $SE(3)$. В некоторых случаях группа Ли непосредственно является конфигурационным пространством простой механической системы [9], [10, с. 341], [6, с. 45], описывающей движение магнитного тела.

Потенциальная энергия магнитного взаимодействия, как правило, не является инвариантной относительно всех преобразований группы, которая является конфигурационным пространством системы. Поэтому фазовое пространство системы не допускает редукции к структуре Ли-Пуассона, которой посвящена большая часть исследований по применению групп Ли в механике.

Прежде чем исследовать конкретные группы Ли, связанные с динамикой твердых тел, имеет смысл рассмотреть общую дифференциально-геометрическую технику для описания структур гамильтоновой динамики на фазовом пространстве группы Ли.

1. Математические обозначения

Обозначения дифференциально-геометрической техники в основном соответствуют обозначениям книги [11, с. 119–142].

Если Q — дифференцируемое многообразие, то $T(Q)$ — его касательное расслоение; если $\varphi : P \to Q$ — дифференцируемое отображение многообразия P в многообразие Q, то $T_\varphi : T(P) \to T(Q)$ — его производное (касательное) отображение, а $T^*\varphi$ — сопряженное к нему отображение, т.е. для $\xi \in T_a(P)$ и $\beta \in T^*_a(Q)$ выполняется $\langle T^*_a\varphi \cdot \beta, \xi_a\rangle = \langle \beta, T_a\varphi \cdot \xi\rangle$; $T_*\varphi$ — *Cotangent Lift* диффеоморфизма φ: $T_{*a}\varphi = (T^*_a\varphi)^{-1}$.

Пусть

$p(t) \in P$ — кривая на многообразии P, а $q(t) = \varphi \circ p(t) \in Q$ — ее образ на многообразии Q, тогда $\frac{dq}{dt} = T_\varphi \cdot \frac{dp}{dt}$;

в общем случае символ «$\cdot$» (contraction) будет употребляться для обозначения действия линейного оператора A на вектор ξ, т.е. $A\xi = A[\xi] = A \cdot \xi$ и как свертка ковектора с вектором: $\langle \alpha, \xi\rangle = \alpha \cdot \xi = \alpha[\xi]$ — спаривание векторов и ковекторов ($\xi \in T_a(Q), \alpha \in T^*_a(Q)$);

G — связная группа Ли, (a, b, g, h — ее элементы);

$T(G) \xrightarrow{\tau_G} G$ — касательное расслоение группы G;

$T^*(G) \xrightarrow{\pi_G} G$ — кокасательное расслоение группы G;

$\boldsymbol{g} = T_e(G)$ — алгебра Ли группы G (ξ, η, ζ — ее элементы);

$\boldsymbol{g}^* = T^*_e(G)$ — пространство, дуальное к $\boldsymbol{g}$ (μ, α — его элементы);

ξ^L — левоинвариантное векторное поле на G такое, что $\xi^L(e) = \xi \in \boldsymbol{g}$;

ξ^R — правоинвариантное векторное поле на G такое, что $\xi^R(e) = \xi \in \boldsymbol{g}$;

$\tilde{\xi}^L$ — *Cotangent Lift* левоинвариантного векторного поля ξ^L;

$\tilde{\xi}^R$ — *Cotangent Lift* правоинвариантного векторного поля ξ^R;

α_L — левоинвариантная 1-форма на G такая, что $\alpha_L(e) = \alpha \in \boldsymbol{g}^*$;

$\{e_i\}$ — выбранный базис в $\boldsymbol{g}$ ($e_i \in \boldsymbol{g}$);

$\{e^i\}$ — соответствующий кобазис в $\boldsymbol{g}^*$ ($e^i \in \boldsymbol{g}^*$, $\langle e^i, e_k\rangle = \delta^i_k$);

$\boldsymbol{\epsilon} = e_i e^i_L$ — векторозначная 1-форма Маурера-Картана на группе G ($T(G) \xrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{g}$);

$\boldsymbol{J}_R$ — отображение момента, соответствующее действию группы G на себе правыми сдвигами ($T^*(G) \xrightarrow{\boldsymbol{J}_R} \boldsymbol{g}^*$);

$\boldsymbol{J}_L$ — отображение момента, соответствующее действию группы G на себе левыми сдвигами ($T^*(G) \xrightarrow{\boldsymbol{J}_L} \boldsymbol{g}^*$).

2. Левая тривиализация для расслоений над группой Ли

По определению (см. [12, (1), с. 91]) *локально* каждое расслоение тривиализуется, т.е. некоторая «цилиндрическая» окрестность любой точки представляется в виде *прямого произведения* проекции этой окрестности на базу расслоения и стандартного слоя расслоения.

Но касательное и кокасательное расслоение произвольной группы Ли допускают не только локальные, но и *глобальные* тривиализации, карты (см. [12, (1), с. 91]) которых назовем λ_t и λ_{ct} соответственно.

Пусть $e_i \in \boldsymbol{g}$ — базис в алгебре Ли группы G, а $e^i \in \boldsymbol{g}^*$ — соответствующий кобазис.

Обозначим $\boldsymbol{\epsilon} = e_i e^i_L$ — (векторозначную) 1-форму Маурера-Картана, тогда левая тривиализация касательного (λ_t) и кокасательного (λ_{ct}) расслоений определяется следующими отображениями:

$$\begin{cases} \lambda_t = \tau_G \times \boldsymbol{\epsilon} : T(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}, \\ \lambda_{ct} = \pi_G \times \boldsymbol{J}_R : T^*(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}^*, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J}_R$ соответствует действию группы G на себе правыми сдвигами;

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R : T^*(G) \mapsto \boldsymbol{g}^*, \quad \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) = T^*_e L_a \cdot \alpha_a, \\ \boldsymbol{J}_L : T^*(G) \mapsto \boldsymbol{g}^*, \quad \boldsymbol{J}_L(\alpha_a) = T^*_e R_a \cdot \alpha_a \end{cases} \tag{2}$$

при этом

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) = \mu \longleftrightarrow \alpha_a = \mu_L(a), \\ \boldsymbol{J}_L(\alpha_a) = \mu \longleftrightarrow \alpha_a = \mu_R(a). \end{cases} \tag{2a}$$

В определениях 1-формы Маурера-Картана $\boldsymbol{\epsilon}$ и отображения момента $\boldsymbol{J}_R$ наблюдается высокая степень симметрии:

$$\begin{cases} \langle \mu, \boldsymbol{\epsilon}(\xi_a) \rangle = \langle \mu_L(a), \xi_a \rangle, \\ \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle. \end{cases} \tag{3}$$

2-е из выражений (3) можно интерпретировать так: компоненты момента $\boldsymbol{J}_R(\alpha_a)_i = \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) \cdot e_i$ есть компоненты ковектора α_a в кобазисе e^i_L 1-форм Маурера-Картана.

Пусть вектор $\xi \in T(T^*(G))$, тогда в представлении левой тривиализации с учетом (1) можно условиться записывать $\xi \in T(G) \times \boldsymbol{g}^* \times \boldsymbol{g}^*$ и даже $\xi \in G \times \boldsymbol{g}^* \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g}^*$ без явного указания изоморфизмов соответствующих пространств. В последнем представлении первые 2 сомножителя представляют фазовое пространство (кокасательное расслоение), т.е. точку закрепления вектора, а последние 2 сомножителя представляют компоненты вектора.

Итак, точка закрепления вектора — это пара $(a, \alpha) \in G \times \boldsymbol{g}^*$, а компоненты вектора — это пара $(\xi_{(h)}, \xi^{(v)}) \in \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g}^*$.

Иначе говоря, если $\xi \in T_{\alpha_a}(T^*(G))$, то

$$\begin{cases} \xi_{(h)} = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi) \in \boldsymbol{g}, \\ \xi^{(v)} = T\boldsymbol{J}_R \cdot \xi \in \boldsymbol{g}^*. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим некоторую кривую $\alpha(t)$ на $T^*(G)$. Ее проекцией на G будет $a(t) = \pi_G(\alpha(t))$. Если кривая $\alpha(t)$ полностью расположена в одном слое $T^*(G)$, т.е. $a(t) = a = const$, то 1-я строка (4) дает $\xi_{(h)} = 0$. Если же $\boldsymbol{J}_R(\alpha(t)) = \mu = const$, то $\alpha(t) = \mu_L(a(t))$, т.е. кривая $\alpha(t)$ полностью определяется своей проекцией $a(t)$ на G. В этом случае $\xi^{(v)} = 0$.

Из (4) также имеем (где, как и ранее, $\pi_G(\alpha) = a$)

$$\xi_{(h)}(\alpha) = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi_\alpha) = e_i \pi_G^* e_L^i(\xi_\alpha) = e_i e_L^i(T\pi_G[\xi_\alpha]) =$$

$$= e_i e_L^i((TL_a \circ TL_{a^{-1}}) \cdot T\pi_G[\xi_\alpha]) = e_i e_L^i(TL_a \cdot (TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha]) =$$

$$= e_i e^i((TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha]) = (TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha],$$

т.е.

$$\xi_{(h)}(\alpha) = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi_\alpha) = TL_{a^{-1}} \cdot T\pi_G[\xi_\alpha]. \tag{5}$$

Введем координатные функции

$$\mu_i(\alpha_a) = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), e_i \rangle. \tag{6}$$

Тогда

$$d\mu_i(\xi) = \xi_i^{(v)}. \tag{7}$$

Дифференциал функции на $T^*(G)$ следует разложить в соответствии с разложением вектора, касательного к $T^*(G)$ расслоения.

В соответствии с разложением (4) запишем

$$\partial_\xi F = dF \cdot \xi = \delta_g F \cdot \xi_{(h)} + \delta_\mu F \cdot \xi^{(v)}, \quad \xi \in T_{\alpha_a}(T^*(G)). \tag{8}$$

Соотношение (8), фактически, является определением «дифференциалов» δ_g и δ_μ, причем последний является настоящим частным дифференциалом.

Из (8) также следует, что

$$\delta_g F \in \boldsymbol{g}^*; \quad \delta_\mu F \in \boldsymbol{g}. \tag{9}$$

Разберем 2 частных случая.

1. Рассмотрим функции вида $F \circ \pi_G$.

Из (5) выводим

$$d(F \circ \pi_G)[\xi_\alpha] = dF \cdot T\pi_G[\xi_\alpha] =$$

$$= d(F \circ L_a)[(TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G) \cdot \xi_\alpha] = d(F \circ L_a)[\xi_{(h)}(\alpha)] = \delta_g F \cdot \xi_{(h)}(\alpha),$$

т.е.

$$d(F \circ \pi_G)[\xi_\alpha] = \delta_g(F \circ \pi_G) \cdot \xi_{(h)}(\alpha) \longrightarrow \delta_\mu(F \circ \pi_G) = 0. \tag{10}$$

Заметим, что дифференциал функции $F \circ \pi_G$, являясь линейной формой на касательных к G векторах, тем самым является элементом $T^*(G)$, т.е. $d_{|\alpha}(F \circ \pi_G) \in T^*_{|\alpha}(G)$. Тогда

$$\delta_g F \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = dF \cdot T_e L_a[\xi_{(h)}(\alpha)] = T_e^* L_a[dF_{|a}] \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = \boldsymbol{J}_R(dF_{|a}) \cdot \xi_{(h)}(\alpha),$$

т.е.

$$\begin{cases} \delta_\mu(F \circ \pi_G) = 0, \\ \delta_g(F \circ \pi_G)_{|\alpha} = \boldsymbol{J}_R(dF_{|a}). \end{cases} \tag{11}$$

2. Рассмотрим функции, зависящие в представлении левой тривиализации только от переменных μ на $\boldsymbol{g}^*$. Множество таких функций, очевидно, совпадает с множеством левоинвариантных функций. Тогда из (7), (8) получаем

$$dF_L \cdot \xi = \frac{\partial F_L}{\partial \mu_i} d\mu_i(\xi), \tag{12}$$

$$\begin{cases} \delta_g F_L = 0, \\ \delta_\mu F_L = \frac{\partial F_L}{\partial \mu_i} e_i. \end{cases} \tag{12a}$$

Заметим, что при теоретико-групповом описании механики твердого тела представление левой тривиализации соответствует системе координат, связанной с телом см. [10, 11], тогда как представление правой тривиализации соответствует инерциальной системе координат.

Представление правой тривиализации может быть рассмотрено совершенно аналогично левой тривиализации. При этом можно пользоваться следующей простой связью этих представлений:

$$\begin{cases} \varrho_t \circ \lambda_t^{-1}(a, \xi) = (a, Ad_a[\xi]), \\ \varrho_{ct} \circ \lambda_{ct}^{-1}(a, \mu) = (a, Ad^*_{a^{-1}}[\mu]). \end{cases} \tag{13}$$

3. Левое и правое действие в представлении левой тривиализации

Группа Ли действует на себе, как на конфигурационном пространстве, левыми и правыми сдвигами. Эти преобразования расширяются (поднимаются) на касательное и кокасательное расслоения следующим образом:

Tangent Lift определяется при левой тривиализации следующими формулами:

$$\begin{cases} TL_b \mapsto L_b \times id_{\boldsymbol{g}}, \\ TR_b \mapsto R_b \times Ad_{b^{-1}}, \end{cases} \tag{14}$$

Cotangent Lift — следующими формулами:

$$\begin{cases} T_*L_b \mapsto L_b \times id^*_{\boldsymbol{g}}, \\ T_*R_{b^{-1}} \mapsto R_{b^{-1}} \times Ad^*_{b^{-1}}. \end{cases} \tag{15}$$

Представляет интерес найти в этом представлении выражения для лево- и правоинвариантных полей.

Для левоинвариантных полей получаем

$$\begin{cases} \zeta'^L_{|(a,\xi)} = (\zeta, -ad_\zeta \xi), \\ \tilde{\zeta}^L_{|(a,\mu)} = (\zeta, ad^*_\zeta \mu). \end{cases} \tag{16}$$

Для правоинвариантных полей получаем

$$\begin{cases} \zeta'^{R}_{|(a,\xi)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0), \\ \tilde{\zeta}^{R}_{|(a,\mu)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0), \end{cases} \tag{17}$$

здесь ζ' — продолжение (Tangent Lift) лево-/правоинвариантного поля с группы G на $T(G)$, а $\tilde{\zeta}$ — продолжение (Cotangent Lift) лево-/правоинвариантного поля с группы G на $T^*(G)$.

Левоинвариантные поля являются генераторами **правых** сдвигов на $T^*(G)$, тогда как **право**инвариантные поля являются генераторами **левых** сдвигов на $T^*(G)$.

Тогда, если F_L — левоинвариантная функция, то $\partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0$ и, следовательно, как и в (12a)

$$\partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0 \longrightarrow \delta_g F \cdot Ad_{a^{-1}}[\xi] = 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{g} \longrightarrow \delta_g F = 0. \tag{18}$$

Для правоинвариантных функций

$$\partial_{\tilde{\xi}^L} F_R = 0 \longrightarrow \delta_g F_R \cdot \xi + \langle ad^*_{\xi}[\mu], \delta_\mu F_R \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{g} \tag{19}$$

$$\longrightarrow \delta_g F = ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu].$$

4. Отображение момента для действия группы на себе

Если группа действует на многообразие, то это действие, как было описано выше, продолжается (Cotangent Lift) на кокасательное расслоение к этому многообразию.

На каждом кокасательном расслоении существует каноническая 1-форма Θ (форма Лиувилля), внешний дифференциал которой определяет каноническую симплектическую структуру $\Omega = -d\Theta$ на кокасательном расслоении (см. [11, п.3, с. 377], а также формулы (11.3.1-4) там же).

При помощи формы Лиувилля определяется выражение для *отображения момента* на кокасательном расслоении многообразия:

$$\langle \boldsymbol{J}(z), \xi \rangle = (i_{\xi_P}\Theta)(z) = \Theta(\xi_P(z)). \tag{20}$$

В карте левой тривиализации λ_{ct} имеем для действия группы на себе левыми сдвигами такие генераторы (которые являются правоинвариантными полями):

$$\xi_{P|(a,\mu)} = (\xi^R(a), 0) \tag{21}$$

соответственно

$$\begin{cases} \xi_{P(h)} = \boldsymbol{\epsilon}(\xi^R(a)) = Ad_{a^{-1}}[\xi], \\ \xi^{(v)}_P = T\boldsymbol{J}_R \cdot \xi = 0. \end{cases} \tag{21a}$$

Используя выражение для формы Лиувилля в карте λ_{ct} (см. следующий раздел), получим

$$\langle \boldsymbol{J}_L(z), \xi \rangle = \Theta_{|(a,\mu)}(\xi_P) = \langle \mu, Ad_{a^{-1}}[\xi] \rangle = \langle Ad^*_{a^{-1}}\mu, \xi \rangle,$$

т.е.

$$\boldsymbol{J}_L(a,\mu) = Ad^*_{a^{-1}}\mu. \tag{22}$$

В карте левой тривиализации λ_{ct} для действия группы на себе *правыми* сдвигами генераторами будут левовоинвариантные поля:

$$\xi_{P|(a,\mu)} = (\xi^L_a, ad^*_\xi \mu) \tag{23}$$

соответственно

$$\begin{cases} \xi_{P(h)} = \boldsymbol{\epsilon}(\xi^L(a)) = \xi, \\ \xi^{(v)}_P = ad^*_\xi \mu. \end{cases} \tag{23a}$$

Поэтому

$$\langle \boldsymbol{J}_R(z), \xi \rangle = \Theta_{|(a,\mu)}(\xi_P) = \langle \mu, \xi \rangle,$$

т.е.

$$\boldsymbol{J}_R(a,\mu) = \mu. \tag{24}$$

Итак, для *отображения момента*, соответствующих левым и правым сдвигам, получаем выражения

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R(a,\mu) = \mu, \\ \boldsymbol{J}_L(a,\mu) = Ad^*_{a^{-1}}[\mu]. \end{cases} \tag{25}$$

5. Симплектическая структура на $T^*(G)$

На $P = T^*(G)$ существует каноническая симплектическая структура, основанная на форме Лиувилля Θ. Рассмотрим ее в представлении левой тривиализации кокасательного к G расслоения.

$$\Omega = -d\Theta. \tag{26}$$

Для любой 1-формы β на G обозначим

$$\bar{\beta} = \pi^*_G \beta. \tag{27}$$

Тогда в карте λ_{ct} имеем

$$\Theta_{|(a,\mu)} = \mu_i \pi^*_G e^i_{L|a} = \pi^*_G \mu_L(a) = \bar{\mu}_L(a), \quad a \in G, \mu \in \boldsymbol{g}^*, \tag{28}$$

1-формы Маурера-Картана e^i_L удовлетворяют структурным уравнениям [12, (4), с. 134]

$$de^i_L = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk} e^j_L \wedge e^k_L \longrightarrow d\bar{e}^i_L = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk} \bar{e}^j_L \wedge \bar{e}^k_L, \tag{29}$$

поэтому

$$\Omega = -d\Theta = \bar{e}^i_L \wedge d\mu_i + \frac{1}{2} \mu_i c^i{}_{jk} \bar{e}^j_L \wedge \bar{e}^k_L. \tag{30}$$

Имеет место соотношение

$$ad^*_\xi \mu = \mu_i c^i{}_{jk} \xi^j e^k. \tag{31}$$

Т.о.

$$i_\xi \Omega = \xi^i_{(h)} d\mu_i - \xi^{(v)}_i \bar{e}^i_L + (ad^*_{\xi_{(h)}} \mu)_L \tag{32}$$

или

$$i_\xi \Omega = \xi^i_{(h)} d\mu_i - \xi^{(v)}_L + (ad^*_{\xi_{(h)}} \mu)_L. \tag{32a}$$

Отсюда

$$\Omega(\xi, \eta) = \langle \eta^{(v)}, \xi_{(h)} \rangle - \langle \xi^{(v)}, \eta_{(h)} \rangle + \langle \mu, [\xi_{(h)}, \eta_{(h)}] \rangle, \tag{33}$$

$$\Omega(\xi,\eta)=\eta^{(v)}[\xi_{(h)}]-\xi^{(v)}[\eta_{(h)}]+\mu([\xi_{(h)},\eta_{(h)}]), \tag{33a}$$

$$\Omega(\xi,\eta)=\eta^{(v)}\cdot\xi_{(h)}-\xi^{(v)}\cdot\eta_{(h)}+\mu\cdot[\xi_{(h)},\eta_{(h)}]. \tag{33b}$$

Этот результат с точностью до обозначений совпадает с п. (ii) предложения [10, п. 4.4.2, с. 316].

6. Скобки Пуассона в представлении левой тривиализации

По определению гамильтонова поля $\xi=\xi_H$, соответствующего гамильтониану H (см. [11, (5.4.1), с. 153])

$$i_{\xi_H}\Omega=dH\longrightarrow\Omega(\xi_H,\eta)=dH\cdot\eta=\partial_\eta H. \tag{34}$$

Тогда скобки Пуассона (СП) определяется так (см. [11, (5.5.1), с. 156])

$$\{F,H\}(z)=\Omega(\xi_F(z),\xi_H(z)) \tag{35}$$

и выполняются соотношения (см. [11, (5.5.5), с. 158])

$$\{F,H\}=dF\cdot\xi_H=\partial_{\xi_H}F. \tag{36}$$

В соответствии с разложением (4) §3 запишем

$$\partial_\xi F=dF\cdot\xi=\delta_g F\cdot\xi_{(h)}+\delta_\mu F\cdot\xi^{(v)},\quad\forall\xi\in T(T^*(G)) \tag{37}$$

$$\longrightarrow\delta_g F\in\boldsymbol{g}^*,\delta_\mu F\in\boldsymbol{g}.$$

Уравнения (34) имеют вид (см. (33b))

$$\eta^{(v)}\cdot\xi_{(h)}-\xi^{(v)}\cdot\eta_{(h)}+\mu\cdot[\xi_{(h)},\eta_{(h)}]=\delta_g H\cdot\eta_{(h)}+\delta_\mu H\cdot\eta^{(v)},\quad\forall\eta\in T(T^*(G)). \tag{38}$$

Рассмотрим вначале такие η, что $\eta_{(h)}=0$, а затем η такие, что $\eta_{(v)}=0$.

В результате получим

$$\begin{cases}\xi_{(h)}=\delta_\mu H,\\ \xi^{(v)}=-\delta_g H+ad^*_{\xi_{(h)}}[\mu].\end{cases} \tag{39}$$

Подставляя (39) в (36), находим

$$\{F,H\}=\delta_g F\cdot\delta_\mu H-\delta_g H\cdot\delta_\mu F-\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle. \tag{40}$$

Выведенная с помощью развитой здесь техники (40) с точностью до обозначений совпадает с малоизвестным выражением [13, (1.13), с. 22].

7. Вывод скобок Ли-Пуассона

Как согласуется выведенная выше скобка Пуассона на группе G с широко известными результатами, в частности, со скобкой Ли-Пуассона на пространстве $\boldsymbol{g}^*$, дуальном к алгебре Ли $\boldsymbol{g}$ группы G [11, (13.1.1), с. 426]?

Итак, для СП на группе G получено выражение

$$\{F,H\}_{|(a,\mu)}=(\delta_g F\cdot\delta_\mu H-\delta_g H\cdot\delta_\mu F-\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle)_{|(a,\mu)}, \tag{41}$$

а формула для скобок Ли-Пуассона имеет вид [11, (13.1.1), с. 426]

$$\{F,H\}_\pm(\mu)=\pm\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle. \tag{42}$$

Знак «+» относится к правоинвариантным функциям, а «−» — к левоинвариантным [11, (13.1.8–9), с. 427].

Придерживаемся прежних обозначений:

$\tilde{\xi}^L$ — *Cotangent Lift* **лево**инвариантного поля ξ^L на группе G, генератор **правых** сдвигов на $T^*(G)$;

$\tilde{\xi}^R$ — *Cotangent Lift* **право**инвариантного поля ξ^R на группе G, генератор **левых** сдвигов на $T^*(G)$.

Как следует из формул (16)–(17)

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}^L_{|(a,\mu)} = (\zeta, ad^*_\xi \mu), \\ \tilde{\zeta}^R_{|(a,\mu)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0). \end{cases} \tag{43}$$

Из формул (18)-(19) следует

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0 \longrightarrow \delta_g F = 0, \\ \partial_{\tilde{\xi}^L} F_R = 0 \longrightarrow \delta_g F = ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu]. \end{cases} \tag{44}$$

Тогда из (41) и 1-й строки (44) сразу следует

$$\{F_L, H_L\}_{|\mu} = -\langle \mu, [\delta_\mu F, \delta_\mu H] \rangle, \tag{45}$$

что, фактически, совпадает с [11, (13.1.8), с. 427].

Для правоинвариантных функций

$$\{F_R, H_R\}_{|\mu} = \langle ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu], \delta_\mu H_R \rangle - \langle ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu], \delta_\mu H_R \rangle + \tag{46}$$
$$+ \langle \mu, [\delta_\mu F_R, \delta_\mu H_R] \rangle = \langle \mu, [\delta_\mu F_R, \delta_\mu H_R] \rangle,$$

что, фактически, совпадает с [11, (13.1.9), с. 427].

Рассмотрим СП [11, (12.1.18), с. 395].

В нашем случае следует для начала ограничиться левоинвариантными полями, тогда по определению **momentum function** на [11, с. 391] имеем

$$\Pi(\xi^L)(\alpha_a) = \langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle, \tag{47}$$

а из (3) имеем

$$\langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \mu, \xi \rangle. \tag{47a}$$

Т.о.

$$\Pi(\xi^L)(\alpha_a) = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \mu, \xi \rangle \longrightarrow \delta_\mu \Pi(\xi^L) = \xi. \tag{48}$$

Рассмотрим теперь функции вида $F \circ \pi_G$. Для них из (11) имеем

$$\begin{cases} \delta_\mu (F \circ \pi_G) = 0, \\ \delta_g (F \circ \pi_G)_{|\alpha} = T^*_e L_a [dF_{|a}] \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = \boldsymbol{J}_R(dF_{|a}). \end{cases} \tag{49}$$

Тогда из (41) следует, что

$$\{F \circ \pi_G, H \circ \pi_G\} = 0, \tag{50}$$

$$\{F \circ \pi_G, \Pi(\xi^L)\}_{|(a,\mu)} = \delta_g (F \circ \pi_G)_{|(a,\mu)} \cdot \xi = \tag{51}$$
$$= d(F \circ L_a) \cdot \xi = dF \cdot \xi^L(a) = (\partial_{\xi^L} F)_{|a} = (\partial_{\xi^L} F)_{|\pi_G(a,\mu)}.$$

Т.о., получаем, фактически, соотношения [11, (12.1.18), с. 395]

$$\begin{cases} \{F \circ \pi_G, H \circ \pi_G\} = 0, \\ \{\Pi(\xi^L_1), \Pi(\xi^L_2)\} = -\Pi([\xi^L_1, \xi^L_2]), \\ \{F \circ \pi_G, \Pi(\xi^L)\} = (\partial_{\zeta^L} F) \circ \pi_G. \end{cases} \tag{52}$$

Литература

1. Zub S. S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies / S. S. Zub // PoS. — 2008. — V. ACAT08. — P. 116–121.
2. Zub S. S. Research into orbital motion stability in system of two magnetically interacting bodies / S. S. Zub // IntellectualArchive. — 2012. — V. 1, — № 2. — P. 14–24.
3. Grygor'yeva L. Fields institute: Focus program on geometry, mechanics and dynamics / L. Grygor'yeva, J.-P. Ortega, S. Zub. — Toronto, Canada: 2012.
4. Зуб С. С. Орбитрон: Устойчивость орбитального движения магнитного диполя / С. С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — Т. 111, № 1. — С. 113–128.
5. Парс Л. А. Аналитическая динамика / Л. А. Парс. — М.: Наука, 1971. — 636 с.
6. Marsden J. E. Lectures On Mechanics / J. E. Marsden. London Mathematical Society Lecture. — 2nd ed. — London: Cambridge University Press, 1997. — 233 p.
7. Earnshaw S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether / S. Earnshaw // Trans. Camb. Phil. Soc. — 1842. — V. 7. — P. 97–112.
8. Гинзбург В. Л. Теория мезона и ядерные силы / В. Л. Гинзбург // Усп. физ. наук. — 1947. — Т. 31, № 2. — С. 174–209.
9. Smale S. Topology and mechanics / S. Smale // Inv. Math. — 1970. — V. I, № 10. — P. 305–331.
10. Abraham R. Foundations of mechanics / R. Abraham, J. E. Marsden. — Addison Wesley, 1978. — 838 p.
11. Marsden J. E. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. — Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1994. — 616 p.
12. Зуланке Р. Дифференциальная геометрия и расслоения / Р. Зуланке, П. Винтген. — М.: Мир, 1975. — 348 с.
13. Карасев М. В. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование / М. В. Карасев, В. П. Маслов. — М.: Наука, 1991. — 365 с.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 22.01.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.86; 339.13.012.432

ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ОЛІГОПОЛІЇ КУРНО-ПУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЇЇ ТОЧКИ РІВНОВАГИ

Н. Л. Іващук, Б. В. Гнатів, І. І. Кавалець

Резюме. У статті розглянуто одну з основних моделей, яка описує поведінку учасників олігополістичного ринку. Побудовано економічну модель олігополії — узагальнену модель Курно-Пу. Введено поняття точки рівноваги Курно. Описано процес дослідження стійкості точки рівноваги побудованої моделі.

Вступ

Олігополія (*oligopoly*) — це структура ринку, при якій в одній галузі домінує невелика кількість конкуруючих фірм, при цьому хоча б одна або дві з них виробляють значну частку продукції даної галузі, а поява нових продавців ускладнена чи неможлива. Як правило, на олігополістичних ринках є від двох до десяти фірм, на які припадає половина чи більше загального обсягу продажів продукту. На таких ринках декілька або й усі фірми у довгостроковому часовому проміжку одержують значні прибутки, оскільки вхідні бар'єри ускладнюють або унеможливлюють вхід фірм-новачків на ринок. Товар на олігополістичному ринку може бути однорідний і неоднорідний. Якщо продається однорідний товар (тобто покупці не мають вибору), то маємо справу з гомогенною олігополією, а якщо різноманітний товар (тобто покупці можуть вибирати згідно зі своїми уподобаннями), то маємо справу з гетерогенною олігополією.

Олігополія є переважаючою формою ринкової структури. До олігополістичних галузей належать автомобільна, сталеплавильна, нафтохімічна, електротехнічна, енергетична, комп'ютерна індустрії та ін. На олігополістичних ринках деякі фірми можуть впливати на формування цін, оскільки охоплюють значну частку продукції у загальній кількості виробленого товару. Продавці на олігополістичному ринку свідомі того, що зміни цін чи обсягів випуску продукції одного з учасників ринку можуть впливати на фінансові результати (в тому числі й на прибутки) усіх без винятку фірм із цієї галузі. Іншими словами, продавці усвідомлюють свою взаємозалежність на даному ринку. Передбачається, що кожна фірма у галузі визнає, що зміна її ціни чи випуску викликає реакцію з боку інших фірм. Реакція, якої очікує одна із фірм-олігополістів від фірм-конкурентів у відповідь на зміни встановленою нею ціни, обсягу випуску чи змін у маркетинговій стратегії, є основним чинником, що визначає його рішення. Така реакція може впливати на рівновагу олігополістичних ринків.

Сьогодні відома достатньо велика кількість моделей, які описують поведінку фірм на олігополістичному ринку.

Олігополістичні ринки розрізняють за тією ознакою, чи діють їхні учасники — олігополісти цілком незалежно один від одного, на свій страх і ризик, чи, навпаки, вступають в змову, яка може бути явною, відкритою або таємною, закритою. В першому випадку, зазвичай, говорять про некооперативну олігополію (*noncooperative oligopoly*), а в другому — про кооперативну (*cooperative oligopoly*), однією із форм якої є картель [1].

Очевидно, що при аналізі поведінки олігополістів, які діють цілком незалежно один від одного, тобто у випадку некооперативної олігополії, вирішальне значення мають відмінності в припущеннях відносно реакції суперників. В залежності від того, що саме вибирає олігополіст керуючою змінною — величину випуску чи ціну — розрізняють олігополію підприємств, які встановлюють величину випуску, або просто кількісну олігополію і олігополію підприємств, які встановлюють ціну, або цінову олігополію.

Існують моделі кількісної олігополії Курно (*Antoine-Augustin Cournot, 1838 р.*) і Чемберлена (*Edward Hastings Chamberlin*), а також модель Штакельберга (*Heinrich von Stackelberg*), яка пропонує асиметричну поведінку олігополістів та моделі цінової олігополії Бертрана (*Joseph Louis Francois Bertrand*), Еджуорта (*Francis Ysidro Edgeworth, 1925 р.*) і Свізі (*Paul Sweezy*) [2]. Серед моделей олігополії, в яких підприємства співпрацюють з метою максимізації прибутків (кооперативна олігополія) виділяють картелі (*kartel*) та моделі цінового лідерства. Розрізняють картелі двох типів: картелі, які максимізують спільний прибуток (централізований) та картелі, які ділять між собою ринок. Серед моделей цінового лідерства виділяють модель домінуючої фірми та модель з низькими витратами.

В моделі олігополії Курно кожне підприємство вважає обсяг продукції інших підприємств за заданий. Натомість ціну визначає ринок. В моделі олігополії Бертрана усі підприємства за задані вважають ціни, встановлені конкурентами. Отже, ціну визначає продавець. Спільним є те, що в обох моделях маємо справу із грою. Результатом гри є так звана рівновага Неша — збір стратегій (тобто, обсягів продукції у випадку олігополії Курно або цін, встановлених окремими фірмами у випадку моделі Бертрана) з такою властивістю, що жодному з гравців (тобто фірм на ринку) невигідно змінювати своєї стратегії.

Зупинимося на моделях, в яких стратегіями гравців є маніпулювання обсягами виробництва. Розглянемо модель Курно, з якої починалася сучасна теорія олігополії. Її базова модель була запропонована у 1838 році французьким математиком та економістом Антуаном Огюстеном Курно (*Augustin Cournot, Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des richesses, 1838*), який у своїй роботі поставив проблему олігополістичної взаємозалежності і необхідності кожній фірмі при визначенні своєї ринкової стратегії приймати до уваги поведінку конкурентів [3]. Курно розглядав дуополію, тобто ситуацію, коли на ринку є лише дві фірми. У цій моделі припускається, що обидві фірми виробляють стандартизований продукт (з

такими самими параметрами) і знають криву ринкового попиту. На основі цього кожна фірма визначає свої обсяги виробництва, беручи до уваги, що її конкурент також прийматиме рішення щодо власних обсягів випуску аналогічного продукту. Причому кінцева ціна продукту залежатиме від загального обсягу виробництва продукції (обох фірм разом), яка потрапить на ринок. Тобто, запрацює механізм встановлення ринкової рівноваги, який залежить від ринкового попиту та загальної пропозиції товару на даному ринку.

Суть моделі Курно полягає у тому, що: кожна фірма приймає обсяг виробництва свого конкурента постійним; виходячи з цих даних та інформації про ринковий попит на даний продукт, приймає власне рішення щодо встановлення таких обсягів його виробництва, які б забезпечували максимальний прибуток (на основі дотримання правила рівності граничного доходу і граничних витрат). Отже, основна задача даної моделі — визначити, при якому обсягу випуску продукції обидві фірми досягають рівноваги.

Як уже згадувалося, модель Курно — це модель одночасної кількісної конкуренції. Її можна проаналізувати за допомогою одноразової гри при недосконалій інформації. У цій грі фірми встановлюють обсяг (кількість) продукції, а ринок встановлює спільну ціну на такому рівні, який врівноважує попит з пропозицією. Доступними для кожної фірми стратегіями є різні кількості товару, який вона може виробляти (і продавати). В момент встановлення обсягу продукції фірма не має інформації про рішення іншої фірми щодо обсягів випуску даного продукту.

У даній моделі олігополії припускається, що процес регулювання випуску Курно повинен бути хаотичним, оскільки функції реакції є немонотонними. Цей результат був виключно математичним, без істотного економічного підґрунтя, доки Пу (*Tonu Puu*) [4] не передбачив один тип економічних умов — ізоеластичний попит з різними постійними граничними витратами, під якими були розвинуті багатозначні функції реакції. Відтоді багатьма економістами були розроблені різні їх модифікації. Зокрема, Россер (*B. Rosser*) у статті [5] зробив аналітичний огляд теоретичного розвитку складної динаміки олігополії.

Найбільш вивченою для моделі Курно-Пу (*Cournot-Puu model*) є ситуація дуополії (*duopoly*), коли на ринку є лише дві фірми. Значну увагу приділено саме дослідженню керування хаосом, який виникає з даної моделі. Деякі методи, такі як DFC-метод [6], OGY-метод контролю хаосу, метод розміщення полюса [7] були застосовані до моделі Курно-Пу. Але дослідження олігополістичного ринку лише на випадок дуополії є досить обмеженим, а тому природньо постає питання побудови узагальненої моделі, що і зроблено в даній роботі. Деякі аспекти нелінійної моделі олігополії на випадок N фірм розглянуто в роботі [8].

В даній роботі розглянуто узагальнену модель олігополії Курно-Пу і введено поняття рівноваги Курно. Вагомим результатом тут є встановлення умов, за яких точка рівноваги є стійкою.

1. Узагальнена модель Курно-Пу

Для побудови моделі потрібно чітко описати поведінку учасників ринку: мотиви їхньої поведінки, умови перебування на ринку та обмеження, з якими вони стикаються.

Позначимо фірми-олігополісти через F_1,F_2,. . . ,F_n, обсяги випуску продукції кожної складають $q_1, q_2, \ldots, q_n$ відповідно. Введемо припущення Курно та Пу, щоб отримати вигляд функцій реакції.

Узагальнене припущення Курно полягає у тому, що кожна i-та (i=1,2,. . . , n) фірма очікує від свого j-го конкурента (j=1,2,. . . ,n, $j \neq i$) пропозиції такого обсягу продажу продукту в поточний період, як і в попередньому періоді.

Згідно з цим припущенням, загальні функції реакції кожної з фірм будуть такими:

$$\begin{aligned}
&q_1(t+1) = f_1(q_2(t),\ q_3(t), \ldots ,\ q_n(t))\ ,\\
&q_2(t+1) = f_2(q_1(t),\ q_3(t), \ldots ,\ q_n(t)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_n(t+1) = f_n(q_1(t),\ q_2(t), \ldots ,\ q_{n-1}(t)).
\end{aligned}$$

Функція реакції — це крива, яка показує обсяг продукції виробленої одним виробником при кожному заданому обсязі виробництва іншого виробника. Сукупність точок на кривій реакції показує, якою буде реакція однієї із фірм (при виборі обсягу власного випуску) на рішення інших фірм відносно величини їхнього випуску. Отже, кожна із функцій $q_i(t+1)$ — це крива реакції i-ого олігополіста на обсяги випуску, запропоновані іншими олігополістами.

Узагальнені припущення Пу полягають у тому, що

1. Ринковий попит є ізоеластичним, тобто ціна p відповідає повному попиту q, тобто $p = 1/q$.

2. Товари є взаємозамінними так, що попит дорівнює постачанню (пропозиції), тобто $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

3. Конкуренти мають сталі, але різні граничні витрати. Позначимо їх через c_i , $i = 1,\ \ldots,\ n$.

Базуючись на даних припущеннях, дохід фірми F_i (i=1,2,. . . ,n) можна подати у такому вигляді

$$U_i\,(t+1) = \frac{q_i\,(t+1)}{q_i\,(t+1) + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} q_j\,(t)} - c_i q_i\,(t+1)\,.$$

Кожна із фірм бажає досягти такого обсягу випуску, який би максимізував її дохід:

$$\frac{\partial U_i\,(t+1)}{\partial q_i\,(t+1)} = \frac{q_i\,(t+1) + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} q_j\,(t) - \left(1 + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{\partial q_j\,(t)}{\partial q_i\,(t+1)}\right) q_i\,(t+1)}{\left(q_i\,(t+1) + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} q_j\,(t)\right)^2} -$$

$$-c_i = 0.$$

Звідси, враховуючи припущення Курно про те, що

$$\frac{\partial q_j\,(t)}{\partial q_i\,(t+1)} = 0, \quad i \neq j,$$

отримаємо

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j\,(t) - c_i \left[q_i\,(t+1) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j\,(t)\right]^2 = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Розв'язки системи рівнянь (1) — це функції реакції для фірм F_1,F_2,...,F_n. Тобто матимемо систему таких рівнянь:

$$q_i\,(t+1) = \sqrt{\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{q_j\,(t)}{c_i}} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j\,(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Щоб знайти точки рівноваги, потрібно розв'язати систему (2). Ми отримаємо дві рівноважні точки: тривіальну $(\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$ і нетривіальну $(q_1^*,\ldots,q_n^*)$. Всі дослідження стосуватимуться надалі лише нетривіальної точки, яку називають точкою рівноваги Курно (*Cournot equilibrium*) або точкою рівноваги Неша (*Nash equilibrium*).

Рівновага Курно — це точка перетину функцій реакції кожної із фірм F_i (i=1,2,...,n) на дії конкурентів. Ця точка також визначає таку кількість продукції, яку невигідно змінювати жодній із фірм.

Знайдемо значення точки рівноваги.

Оскільки загальний обсяг виробництва можна описати у вигляді

$$q = q_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j,$$

а із системи (2) за умов стаціонарності отримуємо

$$q_i^* + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j^* = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} q_j^*}{c_i}},$$

тоді маємо

$$q^* = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} q_j^*}{c_i}}$$

або

$$q^{*2} c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j^*.$$

Отже,

$$q_i^* = q^* - q^{*2} c_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Просумувавши всі q_i^*, отримаємо

$$q^* = nq^* - q^{*2} \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Звідси отримаємо нетривіальний розв'язок

$$q^* = \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}.$$

Підставивши отримане значення q^* у вираз (3), отримаємо значення $q_i^*, \quad i = \overline{1, n}$,

$$q_i^* = \frac{n-1}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} - c_i \left(\frac{n-1}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} \right)^2 = (n-1) \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j - (n-1)\, c_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \right)^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$q_i^* = (n-1) \frac{-(n-2)\, c_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} c_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \right)^2}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

2. Методика оцінки стійкості точки рівноваги Курно

Дослідимо стійкість точки рівноваги $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$. Для цього лінеаризуємо систему (2) в околі рівноважної точки. Введемо позначення:

$$\delta q_i(t) = q_i(t) - q_i^*\,, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

і перейдемо до відхилень:

$$\begin{aligned}\delta q_i\,(t+1)+q_i^*=\sqrt{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{q_j^*}{c_i}}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j^*+\\ +\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial q_i\,(t+1)}{\partial q_j\,(t)}\right]_{(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_n^*)}\cdot\delta q_j\,(t)\,,\quad i=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{5}$$

Лінеаризувавши систему (5), отримаємо

$$\delta q_i\,(t+1)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\frac{1}{2\sqrt{c_i\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\,(t)}}-1\right]_{(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_n^*)}\cdot\delta q_j\,(t)\,,\quad i=\overline{1,n}.$$

Підставимо значення рівноважної точки (4):

$$\delta q_i\,(t+1)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\frac{1}{2\sqrt{c_i\dfrac{(n-1)^2\,c_i}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^2}}}-1\right]\cdot\delta q_j\,(t)\,,\quad i=\overline{1,n},$$

тобто

$$\delta q_i\,(t+1)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n-2\,(n-1)\,c_i}{2\,(n-1)\,c_i}\cdot\delta q_j\,(t)\,,\quad i=\overline{1,n}.$$

Запишемо отриману систему в матричному вигляді:

$$\delta q\,(t+1)=J\cdot\delta q\,(t)\,,\tag{6}$$

де

$$\delta q\,(t+1)=(\delta q_1\,(t+1)\,,\delta q_2\,(t+1)\,,\ldots,\delta q_n\,(t+1))^T\,,$$

$$\delta q\,(t)=(\delta q_1\,(t)\,,\delta q_2\,(t)\,,\ldots,\delta q_n\,(t))^T\,.$$

J — матриця Якобі лінеаризованої системи:

$$J=\begin{bmatrix}0 & p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_1\\ p_2 & 0 & p_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_i & \ldots & \ldots & p_i & \underbrace{0}_{i\text{–та позиція}} & p_i & \ldots & p_i\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_n & 0\end{bmatrix},$$

елементи p_i якої мають вигляд

$$p_i = \frac{c_1 + c_2 + ... + (3-2n)\, c_i + ... + c_n}{2\,(n-1)\, c_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Стійкість системи (6) обумовлюється характеристичним рівнянням

$$\det\,(J - \lambda I) = 0$$

або

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{7}$$

Як відомо [9], побудова аналітичного вигляду коефіцієнтів характеристичного полінома може бути здійснена за допомогою головних мінорів матриці Якобі J.

Коефіцієнт при λ^{n-1} дорівнює сліду матриці, взятого зі знаком мінус. Оскільки в нашому випадку всі діагональні елементи дорівнюють нулю, то

$$a_1 = -trJ = 0.$$

Вільний член a_n характеристичного многочлена (7) матриці Якобі J дорівнює визначнику цієї матриці, помноженому на $(-1)^n$, де n — порядок матриці. Отже,

$$a_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & p_1 & ... & p_1 \\ p_2 & 0 & ... & p_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ p_n & p_n & ... & 0 \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти $a_i,\ i = \overline{2, n-1}$, при $\lambda^m,\ m = \overline{n-2,\ 1}$, будуємо за формулою

$$a_i = (-1)^{n-m} \sum_{j=1}^{k} \Delta_j, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad m = n - i, \quad k = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!},$$

де $\Delta_j,\ j = \overline{1, k}$ — мінори матриці Якобі J порядку $n - m$, утворені шляхом викреслювання m рядків з номерами $i_1, i_2, ..., i_m$ та m стовпців з цими ж номерами.

За відомою теоремою фон Неймана точка рівноваги $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ є асимптотично стійкою, якщо для всіх власних значень λ матриці Якобі J виконується умова

$$|\lambda| < 1. \tag{8}$$

Розглянемо простір A всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння порядку n. Умова (8) визначає у цьому просторі геометричну область асимптотичної стійкості. Аналітичний опис цієї області стійкості може бути побудований за допомогою класичної процедури Рауса-Гурвіца (*classical Routh-Hurwitz procedure*) у вигляді нелінійних нерівностей. Ця процедура може бути описана таким чином [9].

Спершу побудуємо параметри

$b_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$, де $a_0 = 1$,
$b_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \left(n - 2i\right)$,

$\ldots$,

$b_r = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-i}{r-k} \binom{i}{k}$, де $\binom{i}{k} = \begin{cases} \frac{i!}{k!(i-k)!}, & i \geq k,\ k \geq 0, \\ 0, & i < k, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$

$\ldots$,
$b_n = 1 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$.

Далі будуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & ... & ... & ... \\ b_0 & b_2 & b_4 & ... & ... & ... \\ 0 & b_1 & b_3 & ... & ... & ... \\ 0 & b_0 & b_2 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

і її головні мінори Δ_r, $r = \overline{1, n}$, порядку r, що побудовані із перших r стовпців та перших r рядків верхнього лівого кутка даної матриці, тобто,

$$\Delta_1 = b_1,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix},$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$
...,
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & ... \\ b_0 & b_2 & b_4 & ... \\ 0 & b_1 & b_3 & ... \\ 0 & b_0 & b_2 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}.$$

Умовами асимптотичної стійкості є

$$b_0 > 0, \quad \Delta_r > 0, \quad r = 1, 2, ..., n,$$

і межі області стійкості в просторі A визначаються за допомогою описаної вище процедури Рауса-Гурвіца у вигляді нелінійних рівностей

$$b_0 = 0, \quad \Delta_r = 0, \quad r = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

На межах (9) абсолютні значення деяких власних значень матриці Якобі дорівнюють 1, а також є безліч різних біфуркаційних явищ [9].

Детальний опис процедури Рауса-Гурвіца для дво- та тривимірного випадку, а також геометрична побудова області стійкості розглянуто у роботах М. Соніса (*M. Sonis*) [9, 10].

Висновки

Управління фінансовими ринками та економічними процесами є одним із найважливіших завдань, що стоять перед менеджерами фірм, економістами та творцями економічної політики в уряді сьогодні.

У даній роботі модель дуополії Курно-Пу узагальнено на випадок присутності на олігополістичному ринку N фірм. Вважається, що кожна з фірм-олігополістів виробляє таку саму, стандартну продукцію, яку змушена продавати по тій самій ціні (встановленій на основі розмірів загальної продукції у галузі). На цьому ринку кожна окрема фірма може (за таких умов) через своє рішення щодо обсягів власного випуску впливати на загальний обсяг продукції і, тим самим, на її ринкову ціну. Окрім того, кожна із фірм характеризується функцією оптимальної реакції. Дана функція описує оптимальний обсяг продукції (такий, що максимізує прибуток) однієї фірми в залежності від рішення щодо обсягу продукції інших фірм.

Побудована модель є системою нелінійних рівнянь, яка має як тривіальну, так і нетривіальну точки рівноваги. Нетривіальна точка рівноваги — це рівновага Курно (Неша). В умовах такого типу рівноваги кожне підприємство приймає таке рішення (реалізує стратегію), яке дає змогу максимізувати його прибуток, передбачаючи таку саму поведінку конкурента. В умовах олігополії рівновага наступає при нижчій ціні, більшій продукції і меншому загальному прибутку у порівнянні з чистою монополією. Зважаючи на два перші параметри (нижчу ціну і більшу продукцію), олігополію можна вважати кращим варіантом для ринкової економіки ніж монополія.

Процес дослідження стійкості точки рівноваги Курно у випадку олігополії є достатньо трудомісткою задачею і потребує потужного пакету математичних програм. А це і є альтернативою подальших досліджень.

Література

1. Мицель И. И. Модели олигополии / И. И. Мицель, С. В. Козлов // Известия Томского политехнического университета. — 2007. — Т. 311. — № 6. — С. 4–8.
2. Гальперин В. М. Микроэкономика. Т. 2. / В. М. Гальперин. — С.Пб.: Экономическая школа, 1999. — 843 с.
3. Puu T. Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics / T. Puu. — New-York: Springer, 2000.
4. Puu T. Chaos in duopoly pricing / T. Puu // Chaos, Solitons and Fractals. — 1991. — V. 6. – № 1. – P. 573–581.
5. Rosser B. The development of complex oligopoly dynamic theory / B. Rosser. — Режим доступу: http://www.belairsky.com/coolbit/econophys/complexoligopy.pdf.
6. Chen L. Controlling chaos in an economic model / L. Chen, G. Chen // Physica A. — 2007. — № 374. — P. 349–358.

7. Matsumoto A. Controlling the Cournot–Nash chaos / A. Matsumoto // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2006. — № 128. — P. 379–392.
8. Matsumoto A. Stability, Bifurcation, and Chaos in N-Firm Nonlinear Cournot Games / A. Matsumoto, F. Szidarovszky // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2011.
9. Sonis M. Linear Bifurcation Analysis with Applications to Relative Socio-Spatial Dynamics / M. Sonis // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 1997. — V. 1. — P. 45–56.
10. Sonis M. Critical Bifurcation Surfaces of 3D Discrete Dynamics / M. Sonis // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2000. — V. 4. — P. 333–343.

Кафедра прикладної математики, Інститут прикладної математики та фундаментальних наук, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.

Надійшла 05.09.2012

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕЧІТКИХ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ

Е. В. Івохін

Резюме. Проведено аналіз та розробка нових конструктивних підходів для якісного аналізу розв'язків різницевих нечітких систем, вирішено ряд задач обробки нечітких даних спеціального вигляду, розроблено методи та алгоритми для роботи з нечіткою інформацією. Результати можуть бути використані для створення та супроводження систем підтримки прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності.

Нечіткі системи як об'єкт дослідження

Швидкий розвиток математичної теорії керування останнім часом активно впливає на процеси застосування загальних підходів теорії управління для розробки математичних моделей соціальних і економічних систем. Специфіка останніх полягає в тому, що при виборі керуючих впливів необхідно передбачати можливі реакції керованих суб'єктів і використовувати такі механізми прийняття управлінських рішень, які б дозволяли максимально точно враховувати і узгоджувати інтереси керуючого органу і керованих суб'єктів. Іншою особливістю соціальних і економічних систем є неавтономність їх станів та керувань, що приводить до необхідності детального аналізу та дослідження поведінки систем.

Для проведення дослідження дуже важливо правильно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження, застосовуючи, наприклад, підходи математичного моделювання. Одним з таких підходів, що дозволяє описати динаміку систем, є визначення еволюції станів системи шляхом задання початкових значень станів системи і рівнянь, що формалізують зміну координат з часом. Якщо досліджується поведінка складних нелінійних систем, що містять набір підсистем, то, як правило, використовують "приблизний" опис цих підсистем для спрощення математичного моделювання поведінки всієї системи. Розрахунок координат, які визначають стан складної нелінійної системи, принципово має неточності внаслідок приблизності обчислень, нестійкості системи і неможливості достатньо точного задання початкових даних і еволюційних рівнянь.

Для опису неточності математичної моделі найбільш розповсюдженим є стохастичний підхід. При цьому, для адекватного застосування стохастичних принципів при моделюванні систем необхідно, щоб величини, що спостерігаються, були результатом усереднення незалежних випадкових величин. Для практичних задач такий підхід є не зовсім природнім. Тому пропонується використовувати нечіткий підхід, при якому неточність функціонування моделі описується в термінах теорії нечітких множин Л. А. Заде [1].

У відповідності до ідеї Заде, нечітка підмножина заданої множини X розглядається як підмножина $\{(x, \mu(x)) : x \in X\}$ прямого добутку $X \times [0, 1]$ з деякою функцією $\mu : X \to [0, 1]$, що визначає ступінь належності елементів $x \in X$ до нечіткої підмножини.

Розглянемо динамічну систему, що описується набором фазових координат $x(t) \in R^n, t \in [0, T]$, де R^n — евклідів простір, T — деяке наперед задане додатне число, для якої задано еволюційне рівняння [2]:

$$\dot{x}(t) = F(x, t),\ t \in (0, T] \tag{1}$$

з початковим станом $x(0) = x_0$. Якщо F містить нечіткі параметри, то природно вважати і розв'язок $x(t)$ нечітким елементом R^n при фіксованому t. Таким чином, в заданний момент часу t нечіткий процес можна розглядати як множину, що залежить від параметра t, нечітких елементів $\{R, \mu(\cdot, t)\}$, де R — множина значень координати $x(t)$, а $\mu(z, t),\ z \in R^n$, — можливість рівності $x(t) = z$ в момент часу t. Однак множина всіх нечітких елементів ще не визначає процес як функцію часу, для цього потрібно ще описати можливість існування пар $x(t_1) = z_1$, $x(t_2) = z_2$ для будь-яких двох моментів часу t_1 і t_2; можливість існування трьох рівностей для трьох моментів часу t_1, t_2, t_3 і т.д. Нечіткий процес визначений, якщо задані нечіткі елементи

$$\{R, \mu(\cdot, t_1)\}, t_1 \in [0, T];$$

$$\{R \circ R, \mu(\cdot, t_1, \cdot, t_2)\}, t_1, t_2 \in [0, T]; \quad \ldots$$

$$\{R \circ R \circ ... \circ R, \mu(\cdot, t_1, \cdot, t_2, ..., \cdot, t_n)\}, t_1, t_2, ..., t_n \in [0, T];$$

де $t_1, t_2, ...$ — розглядаються як параметри, $\circ$ — операція композиції. Вважається, якщо $\mu(x, t) = \mu_0$, то імовірність того, що координата $x \in R^n$, дорівнює μ_0. Функція $\mu(x, t)$ задається розподілом значень нечіткого вектора $x(t)$, що визначає стани системи в моменти часу $t \in [0, T]$.

Нехай задано моменти часу $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le t_{n+1}$. Тоді розподіл $\mu(x_{n+1}, t_{n+1}|x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$ нечіткого елемента $x(t)$ в момент часу t_{n+1} за умови, що система в моменти часу $t_1, ..., t_n$ знаходилась в станах $x_1, ..., x_n$ відповідно, можна визначити у вигляді рівняння, яке задовольняє умові

$$\min(\mu(x_{n+1}, t_{n+1}|x_1, t_1, ..., x_n, t_n), \mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)) = \tag{2}$$

$$= \mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n, x_{n+1}, t_{n+1})$$

Розв'язок рівняння (2), взагалі кажучи, може бути знайдений неоднозначно, однак будь-який розв'язок дозволяє за відомим розподілом $\mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$ обчислити значення величини розподілу у момент часу t_{n+1}.

Більшість реальних процесів можуть бути формалізовані у вигляді диференціальних рівнянь того або іншого виду, але застосування нових типів диференціальних рівнянь для вирішення конкретних задач потребує створення теоретичної основи для їх вивчення. В монографії Меренкова Ю. Н. [3] наведено результати досліджень стійкоподібних властивостей для диференціальних включень, нечітких і стохастичних диференціальних рівнянь. В якості основних властивостей розглядається стійкість за Ляпуновим й асимптотична стійкість інваріантних замкнених множин, а модель динамічної системи, що досліджується, подається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{3}$$

Зрозуміло, що права частина рівняння (3) у кожній точці (t, x) може мати множину $F(t, x)$ можливих значень. Тому задача формулюється як пошук розв'язків $x(t)$ диференціального включення:

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{4}$$

Велика увага до диференціальних включень зв'язана, зокрема, з їх вдалим застосуванням у теорії керування і у дослідженні нечітких диференціальних рівнянь. В [3] узагальнено теореми про властивості розв'язків диференціальних включень з неперервною правою частиною. Деякі результати по дослідженню диференціальних включень наведено, наприклад, в [4–6].

Нехай $F(t, x) = \{f(t, x, b) : b \in B\}$, де B — непорожня множина значень параметра b, а підмножина B_α — більш вузька множина значень параметра b, яку можна отримати при накладанні додаткових вимог, що визначаються параметром $\alpha \in (0, 1]$ для уточнення об'єкта управління і для корегування його траєкторії. Природно вважати, що $A_\alpha \subset A_\beta$ при $\alpha > \beta$, тобто при збільшені витрат — невизначеність в траєкторії руху може тільки зменшуватись. Таким чином, можна говорити про появу нечіткої множини у рівнянні (4) — параметра b з носієм B і з рівнями значимості $B_\alpha,\ \alpha \in (0, 1]$. У цьому випадку, рівняння (4) зводиться до нечіткого диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{5}$$

яке також можна розглядати як сімейство диференціальних включень

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x),\ \alpha \in (0, 1], \tag{6}$$

де $F_\alpha(t, x) = \{f(t, x, b) | b \in B_a\}$. Значення величини α (рівня значимості) при цьому можуть вибиратися за конкретними (реальними) критеріями. Зручність введення нечіткої множини: всі можливі невизначеності в умовах руху об'єкта поглинаються змістом рівняння (5) і можна відокремити задачу по уточненню цих невизначеностей від розв'язку конкретного рівняння (6).

Використання нечітких динамічних моделей

Стійкість є однією з найбільш важливих властивостей динамічних систем. У класичному випадку під стійкістю розуміють спроможність системи повертатися до положення рівноваги після закінчення дії сил, що вивели систему з цього положення. Оцінка стійкості розв'язків у класичному розумінні має бінарний характер: система має стійкі розв'язкі, або нестійкі, як правило, без визначення запасу стійкості. Для дослідження динаміки систем з невизначеністю характерними можуть бути оцінки стійкості типу "слабо стійка", "більш або менш стійка", "сильно стійка" і т.і.

Створення конструктивних підходів для моделювання динаміки та якісного аналізу поведінки нечітких систем можливе на основі множин Л. А. Заде [1,7,8]. Запропонована Л. А. Заде методика базується на використанні функцій належності. Ці функції дають суб'єктивне уявлення дослідника про особливість події, що досліджується, про характер обмежень і цілей дослідження. Використовуючи значення функції належності, можно формулювати принципи, що дозволяють аналізувати поведінку розв'язків систем. Таким чином, основна ідея цієї схеми дослідження полягає у створенні системи гіпотез, які записуються в термінах "суб'єктивної" належності і у подальшому формалізуються у вигляді функції належності деякій нечіткій множині.

Якщо система, що досліджується, представляється у вигляді сукупності підсистем, то аналіз поведінки системи можна провести по частинах. Розбиття часто необхідне, оскільки неможливо достатньо точно і компактно математично описати і дослідити всі різноманітні властивості повної системи. Правила розбиття визначаються конкретними цілями дослідження. Використання такого підходу приводить до необхідності врахування додаткового елементу системи — границь переходу між підсистемами. Крім цього, при аналізі кожної виділеної підсистеми потрібно враховувати її зв'язки з іншими частинами системи. У загальному випадку не існує засобів, щоб точно описати всі зв'язки підсистем. Але важливим є те, що інформація про границі переходів підсистем може бути виражена у поняттях, що мають нечіткий зміст.

У подальшому викладенні матеріалу дослідження нечіткі підмножини заданої множини X будемо називати "нечіткими множинами", а саму множину X — "універсальною множиною". Для позначення звичайних множин будемо використовувати великі літери, а нечітких множин — великі літери з хвилею.

Означення 1. ([1]) Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in X$, де $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ — відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткої множини A.

Значення функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для елемента $x \in X$ називається ступенем належності нечіткій множині. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає

поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною A. Для порівняння, в класичній теорії множин належність елемента x деякій множині A можна записати в формалізованому вигляді: $x \in A$ або $x \notin A$.

Основною проблемою, що виникає при роботі з нечіткими множинами, є побудова функції належності для визначення нечіткої множини, яка полягає в тому, що "функція належності повинна бути задана поза самою теорією й, отже, її адекватність не може бути перевірена безпосередньо засобами теорії" [9].

Конкретний вид функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про властивості цих функцій з урахуванням специфіки задачі та характеристики наявної невизначеності. У багатьох практичних ситуаціях функція належності може бути оціненою, виходячи із часткової інформації про неї, тобто, значень, які вона приймає на скінченній множині "опорних" значень $x_1, ..., x_n$. У цьому випадку говорять, що вона є частково визначеною.

Ягер Р. Р. [10] для оцінки функцій належності використовує поняття множини рівня. Цей метод дозволяє визначити ступінь належності елементів до нечіткої підмножини A з урахуванням відомих сукупностей елементів множини X для фіксованих α — рівнів.

Серед групи методів побудови функції належності можна виділити прямі й непрямі [9, 11, 12]. У прямих методах явно задаються правила визначення функції належності (формулою, таблицею, прикладом). У непрямих методах функція належності вибирається так, щоб задовольняти деяким заздалегідь сформульованим умовам. Для кожної групи методів можлива побудова та уточнення функції належності на основі експертної інформації. При цьому експерти використовують формальні критерії, вибір яких, як правило, є суб'єктивним.

Незважаючи на існуючі проблеми, використання теорії нечітких множин дало ряд якісних практичних результатів. Серед них слід відзначити застосування нечіткої логіки як засобу формалізації процесів побудови висновків, що впроваджені в автоматизованих засобах підтримки прийняття рішень.

Базуючись на понятті нечіткої множини розроблена теорія, яка має назву "теорія можливостей" і яку розглядають як альтернативу класичній теорії імовірностей та математичної статистики. В монографії Пит'єва Ю. П. [13] показано, що теоретико-можливісні моделі дозволяють розв'язувати задачі аналізу й інтерпретації експерименту такі, наприклад, як задача оптимального оцінювання, прогнозування й т.і., не менш якісно, ніж істотно більш детальні, теоретико-імовірнісні моделі.

Багато робіт присвячено нечітким диференційним рівнянням та системам, визначено способи їх досліджень [4, 14, 15]. Для якісного аналізу розв'язків таких систем формулюються нові означення стійкості, критерії дослідження, що ґрунтуються на використанні спеціальних функцій Ляпунова або фундаментальних розв'язків системи. Однак слід відмітити, що усі запропоновані підходи мають один загальний недолік — якісний аналіз

проводиться не напряму, а зводиться до дослідження стійкості класичних ("чітких") систем.

Нечіткі множини. Основні поняття та визначення

Розглянемо основні операції над нечіткими множинами. Традиційні операції доповнення, перетину та об'єднання множин у випадку нечітких множин визначаються таким чином:

– доповненням нечіткої множини $\tilde{A}$, що позначимо через $\tilde{A}^c$, є нечітка множина, для якої $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x),\ \forall x \in X$.

– перетином двох нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),\ \forall x \in X$.

– об'єднанням нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),\ \forall x \in X$.

– нечітку множину $\tilde{A}$ називають порожньою, якщо $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0,\ \forall x \in X$.

Множинами α –рівня (α –зрізи), $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини $\tilde{A}$ називають звичайні множини $A_\alpha = \left\{x \in X :\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\right\},\ \alpha \in [0,1]$.

Множину $\left\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\right\}$ називають носієм нечіткої множини $\tilde{A}$ і позначають через supp $\tilde{A}$.

Для довільної нечіткої множини $\tilde{A}$ величина $h(\tilde{A}) = \max\limits_{x\in X} \mu(x),\ h(\tilde{A}) \geq 0$, називається висотою нечіткої множини.

Для практичного використання множини рівня вважають компактними і, якщо універсальна множина X є лінійним простором, опуклими. Фактично, опуклість множини рівня нечіткої множини A_0 еквівалентна опуклості нечіткої множини.

Означення 2. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається опуклою, якщо

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)) \tag{7}$$

для всіх $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$.

Розглянемо у якості універсальної множини X скінченновимірний простір над полем дійсних чисел R^m, тобто $X = R^m$.

Нехай A та B – дві підмножини X і $\lambda \in R^1$. Додавання елементів множин A та B, а також множення на число λ визначаються у розумінні Мінковського:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Припустимо, що x – деяка точка з X і A – непорожня множина. Відстань $d(x, A)$ від елемента x до A визначається у вигляді:

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\},$$
$$d(x, A) \geq 0,$$
$$d(x, A) = 0,\ \forall x \in A,$$

де під $\|\cdot\|$ розуміється евклідова норма.

Відстань між непорожніми множинами A і B задається у вигляді [16]:

$$d_H(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}. \tag{8}$$

Тоді, використовуючи (8), відстань між двома нечіткими множинами $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ універсальної множини X можна визначити у вигляді

$$d_H(\tilde{A},\tilde{B}) = \sup_{0\le\alpha\le 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha). \tag{9}$$

Відомо, що для довільних нечітких множин $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ справедливі співвідношення [3]:

1) $d_H(\tilde{A}+\tilde{C},\tilde{B}+\tilde{C}) = d_H(\tilde{A},\tilde{B})$;
2) $d_H(\tilde{A},\tilde{B}) = d_H(\tilde{B},\tilde{A})$;
3) $d_H(\lambda\tilde{A},\lambda\tilde{B}) = \lambda d_H(\tilde{A},\tilde{B}),\ \lambda\in R^1$;
4) $d_H(\tilde{A},\tilde{B}) \le d_H(\tilde{A},\tilde{C}) + d_H(\tilde{C},\tilde{B})$.

Позначимо через E^n простір всіх нечітких множин в X. Визначення відстані (9) між нечіткими множинами задає в просторі E^n метрику, яка відома як метрика Хаусдорфа [16]. При цьому (E^n, d_H) є повним метричним простором.

Для нечіткої множини $\tilde{A}$ з E^n справедливі властивості [3]:

1) $\mu_{\tilde{A}}(x)\in[0,1],\ \forall x\in X$;
2) A_0 обмежена множина в X;
3) $A_\alpha,\ \alpha\in[0,1]$ – компактні множини в X;
4) $\tilde{A}$ – опукла множина в розумінні (7).

Зауважимо також, що, якщо $\tilde{A}$ – опукла множина і $x,y\in A_\alpha$ для деякого $\alpha\in(0,1]$, то $\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha$, $\mu_{\tilde{A}}(y)\ge\alpha$, і, як наслідок, $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge$ $\ge \min(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{A}}(y))\ge\alpha$ для довільного $\alpha\in[0,1]$. Це означає, що точка $\lambda x+(1-\lambda)y\in A_\alpha$ і A_α є опуклою підмножиною універсальної множини X, $\alpha\in[0,1]$.

Для довільної нечіткої множини $\tilde{A}$ має місце представлення через множини рівня [17]:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \tilde{A}_\alpha, \tag{10}$$

де $\tilde{A}_\alpha$ – нечітка множина з функцією належності $\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x)=\alpha$, $x\in X$.

Означення 3. Нечітку множину $\tilde{A}^H$ назвемо нормованою по відношенню до нечіткої множини $\tilde{A}$, якщо для $\forall\, x\in X:\ \mu_{\tilde{A}^H}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)\Big/h(\tilde{A})$.

Очевидно, що частковим випадком нормованої нечіткої множини буде нечітка множина, для якої $h(\ \tilde{A}\ )$=1.

Означення 4. Нечітким відображенням $\tilde{R}$ з X у довільний скінченновимірний простір Y називається нечітка множина $\tilde{R}$ в $X\times Y$ з функцією належності

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y):\ X\times Y\to[0,1],\ x\in X, y\in Y. \tag{11}$$

Подальшим розвитком нечітких множин є невизначені нечіткі множини. Як було зазначено в роботі Орловського С. А. [18], рівні представлення нечіткості (неточності, невизначеності) можуть бути узагальнені за допомогою нечітких множин довільного степеня ієрархії.

Поняття невизначених нечітких множин, запропоноване Ю. П. Пит'євим [13], базується на неможливості точної оцінки рівня належності елементів $x \in X$ до множини $\tilde{A}$.

Означення 5. Невизначеною нечіткою множиною (ННМ) $\tilde{\tilde{A}}$ в X будемо називати множину $\left\{\left(x, \mu(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x))\right)\right\}$, в якій для кожного $x \in X$ значення функції $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) \in [0,1]$ визначає рівень достовірності того, що величина $\mu(x) \in [0,1]$ задає ступінь включення x до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Наприклад, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) = 1$, то "цілком достовірно", що $\mu(x)$ задає ступінь належності елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{A}$. Якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) = 0,5$, тоді "невідомо", чи можна вважати, що $\mu(x)$ – рівень належності x до $\tilde{A}$, і, нарешті, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) = 0$, "неправдоподібно", що $\mu(x)$ задає ступінь включення x до $\tilde{A}$.

Означення 6. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається верхньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X,\ \mu(x) \in [0,1], \left(x, \mu(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}^*}(x, \mu(x))\right) \in \tilde{\tilde{A}}$ виконується

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}^*}(x, \mu) = \sup_{\alpha \geq \mu} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \alpha). \tag{12}$$

Означення 7. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається нижньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X,\ \mu(x) \in [0,1], \left(x, \mu(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}_*}(x, \mu(x))\right) \in \tilde{\tilde{A}}$ виконується

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}_*}(x, \mu) = \sup_{\alpha \leq \mu} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \alpha). \tag{13}$$

Припустимо, що для невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$ виконується умова: $\neg\exists x : \left\{\left(x, \mu(x); \tau^1_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x))\right)\right\} \in \tilde{\tilde{A}}$, $\left\{\left(x, \mu(x); \tau^2_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x))\right)\right\} \in \tilde{\tilde{A}}$.

Тоді, виходячи з наведених вище визначень, нескладно зрозуміти, що для будь-якої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$ можна отримати нечітку множину $\tilde{A}$ заданого рівня достовірності $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) = \beta$. Будемо позначати такі множини $\bar{\tilde{A}}_\beta$:

$$\bar{\tilde{A}}_\beta = \left\{\left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right)\right\} \in E^n : \tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \geq \beta\right\}. \tag{14}$$

За таких умов невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}$ представляється у вигляді:

$$\tilde{\tilde{A}} = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \tilde{\tilde{A}}_\beta, \tag{15}$$

де $\tilde{\tilde{A}}_\beta$ — невизначена нечітка множина з рівнем достовірності $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) = \beta$, $x \in X$, $\mu(x) \in [0,1]$, $(x, \mu(x)) \in E^n$.

Означення 8. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати β – регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо регулярною буде множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$.

Означення 9. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати нормовано β–регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо нормовано регулярною буде множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$.

Означення 10. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати регулярною, якщо для $\forall \beta \in [0,1]$ нечітка множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$ буде нормовано регулярною, або, іншими словами, для $\forall \beta \in [0,1]$ множина $\tilde{\tilde{V}}$ є нормовано β–регулярною.

Іншим узагальненням поняття нечітких множин є складені нечіткі множини. Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1$, ..., $\tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних множинах $X_1, \ldots, X_m$. Для простоти будемо вважати, що $X_i \subseteq R^1,\ i = \overline{1,m}$.

Розглянемо універсальну множину X у вигляді декартового добутку $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$. Сформуємо множину $\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$, де $x^i \in X_i,\ i = \overline{1,m}$.

Означення 11. Множину $\tilde{A}^m$ назвемо складеною нечіткою множиною в універсальній множині $\overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$.

Скінченний набір складених нечітких множин $\tilde{A}^m$ в множині $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m)$, $|K(\tilde{A}^m)| = k$. По аналогії з нечіткими множинами введемо означення.

Означення 12. Множину $L_0^m = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) > 0, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) > 0, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) > 0\}$, $L_0^m \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, будемо називати носієм складеної нечіткої множини $\tilde{A}^m$.

Означення 13. Множину $L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\}$ назвемо множиною рівня $\alpha \in (0,1]$ складеної нечіткої множини $\tilde{A}^m$.

Тоді множини $L_{0_i} = \left\{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) > 0\right\}$, $i = \overline{1,m}$, будуть носіями відповідних нечітких множин $\tilde{A}_1$, ... , $\tilde{A}_m$, множини $L_i(\alpha) = \left\{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha\right\}$, $i = \overline{1,m}$, — множинами рівня $\alpha \in (0,1]$ нечітких множин $\tilde{A}_i,\ i = \overline{1,m}$, і справедливі такі рівності:

$$L_0^m = L_{0_1} \times L_{0_2} \times ... \times L_{0_m},$$
$$L^m(\alpha) = L_1(\alpha) \times L_2(\alpha) \times ... \times L_m(\alpha).$$

Розглянемо дві довільні складені нечіткі множини

$$\tilde{U}^m = \{(x^1, \mu^U_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu^U_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu^U_{\tilde{A}_m}(x^m))\},$$

$$\tilde{V}^m = \{(y^1, \mu^V_{\tilde{A}_1}(y^1)), (y^2, \mu^V_{\tilde{A}_2}(y^2)), ..., (y^m, \mu^V_{\tilde{A}_m}(y^m))\}.$$

Обчислимо величину $\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \min\left\{\mu^U_{\tilde{A}_i}(x^i), \mu^V_{\tilde{A}_i}(y^i)\right\}$, яка є мінімальним значенням серед значень мір належності окремих елементів обох множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$. Це значення дозволяє побудувати дві множини рівня γ у вигляді звичайних множин $L^m_{\tilde{U}}(\gamma), L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$, що визначають точки універсальної множини $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \left\|L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma)\right\|$.

Означення 14. Нечітка множина точок за Уонгом $\tilde{D}(\tilde{A}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\|L^m_{\tilde{A}}(\gamma)\right\|, \gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_{\tilde{A}_i}(x^i) \in (0, 1]\}$, де $\|\cdot\|$ - евклідова норма простору R^m, визначає метрику на множині $K(\tilde{A}^m)$.

Таким чином, кожна складена нечітка множина $\tilde{A}^m$ «вимірюється» за допомогою нечіткої величини $\tilde{D}(\tilde{A}^m)$, а для знаходження нечіткої відстані $\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m)$ між довільними складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ буде використовуватися нечітка величина

$$\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\|L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma)\right\|, \tag{16}$$

$$\gamma = \min_{Z\in\{U,V\}, i=\overline{1,m}} \mu^Z_{\tilde{A}_i}(x^i)\},$$

де $L^m_{\tilde{U}}(\gamma)$, $L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$ — множини рівня $\gamma \in (0, 1]$ складених нечітких множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ відповідно.

Порівняння відстаней між двома довільними парами складених нечітких множин проводиться за допомогою нечіткого відношення переваги [18, 19]. Розширемо цей підхід на випадок складених нечітких множин.

Нехай $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1), \tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2)$ — нечіткі відстані між складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1$ та $\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2$ відповідно. Визначимо ту нечітку відстань з двох заданих, яка є меншою у розумінні нечіткого відношення переваги "$<$" $g(a, b)$ [18], за яким для довільних нечітких елементів $a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}$ за умови $\mu_g(a, b) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b), \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(a, b)\} > 0$ задається співвідношення $a < b$ із ступенем $g(a, b) = \mu_g(a, b)$.

За його допомогою можна порівняти відстані $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1)$ та $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2)$: вираз $g(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ визначає ступінь того, наскільки $\tilde{\rho}_1$ «менше», ніж $\tilde{\rho}_2$. Це також надає можливість визначити "найближчий" до заданої складеної нечіткої множини $\tilde{Z}^0$ елемент $\tilde{Z}^*$, де $\tilde{Z}^*$ — складена нечітка множина, значення функцій належності якої для кожного $x^i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$, визначаються з співвідношень

$$\mu^{Z^*}_{\tilde{A}_i}(x_i) = \min_{x\in X_i}(1 - \mu_T(x_i, x)) = 1 - \max_{x\in X_i} \mu_T(x_i, x),\ i = \overline{1, m}, \tag{17}$$

де через T позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає $g(a,b)$, $a,b \in X_i$, $i = \overline{1,m}$,

$$\mu_T(a,b) = \begin{cases} 0, & \mu_g(a,b) < \mu_g(b,a)\ , \\ \mu_g(a,b) - \mu_g(b,a), & \text{інакше.} \end{cases} \tag{18}$$

Деякі задачі дослідження динаміки нечітких систем

Розглянемо задачу моделювання динаміки нечітких різницевих динамічних систем. Задамо множину $T = \{0,1,2,...\}$, що визначає дискретні моменти часу, покладемо $X = R^n$.

Припустимо, що загальна модель нечіткої різницевої системи має вигляд

$$\tilde{X}_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ \tilde{X}_k, k = 0,1,2,..., \tag{19}$$

де $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \in E^n$ — компактна множина початкових станів, $\tilde{X}(t_k) = \tilde{X}_k$, — нечіткі множини в $X = R^n$ можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, що визначають розв'язки системи, $\mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}_k$ — відображення з X в X, що визначають переходи системи, $k = 0,1,2,...$, "$\circ$" — операція композиції.

Означення 15. Траєкторією системи (19) назвемо послідовність $\{x(t_k) = x_k \in X_k = \mathrm{supp}\tilde{X}_k \subset X\}, k = 0,1,2,...$, для елементів якої справедливі співвідношення

$$x_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ x_k, k = 0,1,2,... \ . \tag{20}$$

Нескладно помітити, що будь-який розв'язок системи (19) складається з множини траєкторій.

Означення 16. Траєкторію системи (19) $\{\bar{x}_k\}, k = 0,1,2,...$ будемо називати регулярною (РТС), якщо для її елементів справедлива умова

$$\mu_k = \mu(\bar{x}_k) = 1, k = 0,1,2,... \ . \tag{21}$$

Отримано висновок, що нечітка різницева система (19) за умов неперервності операторів $\mathrm{R}_k, k = 0,1,2,...$ завжди має розв'язок, який, взагалі кажучи, може бути неєдиним для початкових даних $\tilde{X}_0$.

Як частковий випадок розглянуто динаміку нечіткої різницевої системи (19) з n станами. Перепишемо систему у вигляді моделі динаміки змін функцій належності:

$$\mu_{k+1}(x) = \mathrm{A}_k \circ \mu_k(x), k = 0,1,2,..., \tag{22}$$

де $\mathrm{A}_k, k = 0,1,2,...$ — оператори, що визначають зміну значень функцій належності, $\mu_k(x) = (\mu_k(x_1),...,\mu_k(x_n))^T = \mu_{\tilde{X}_k}(x)$,
$\mu_{k+1}(x) = (\mu_{k+1}(x_1),...,\mu_{k+1}(x_n))^T = \mu_{\tilde{X}_{k+1}}(x)$ — вектор-функції належності нечітких множин $\tilde{X}(t)$ в моменти часу t_k, t_{k+1} відповідно.

У співвідношеннях (22) оператори $\mathrm{A}_k, k = 0,1,2,...$, вважаються однорідними адитивними операторами з матрицями $A_k, k = 0,1,2,...$, для яких

$$\mathrm{A}_k \circ (\lambda\mu_k) = \lambda \mathrm{A}_k \circ \mu_k, k = 0,1,2,..., \tag{23}$$

де $\lambda > 0$ — довільне число, що обирається з урахуванням обмеження $\lambda\mu_k(x) \leq 1$, $x \in X, k = 0, 1, 2, ...$, а для визначення результату операції композиції "$\circ$" використовуються спеціальні алгоритми.

Для нечіткої різницевої системи виду $\tilde{X}_{k+1} = \tilde{X}_k + f(\tilde{X}_k), k = 0, 1, 2, ...$, де $f(\cdot)$ є неперервним на X, апріорі невідомим оператором, який визначає нечіткість переходів в різницевій системі, сформульовані і доведені твердження "неперервності" розв'язків нечітких систем.

Твердження 1. *Припустимо, що для* $\forall k = 0, 1, 2, ...$

$$d_H(f(\tilde{X}_k^1), f(\tilde{X}_k^2)) \leq g(d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2)), \tag{24}$$

де $g(\cdot)$ *— неперервна додатна функція на* R_+^1.

Позначимо через $r_k(w_0), k = 0, 1, 2, ...$ *— максимальний розв'язок скалярного різницевого рівняння* $w_{k+1} = w_k + g(w_k), w_0 \geq 0, k = 0, 1, 2, ...$.

Тоді для кожного $k = 0, 1, 2, ...$ *справедливі нерівності*

$$d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \leq r_k(w_0), \quad d_H(\tilde{X}_0^1, \tilde{X}_0^2) \leq w_0.$$

Встановлено, що для системи (22) неперервність розв'язків дискретних систем визначається відповідними властивостями функції належності $\mu(x)$, що, в свою чергу, гарантується неперервністю операторів $\mathrm{A}_k, k = 0, 1, 2, ...$.

Для реалізації операції композиції в нечіткій дискретній системі (22) запропоновано три схеми на основі дій з матрицями $A_k, k = 0, 1, 2, ...$ ([20]).

Наступним питанням дослідження є уточнення моделей нечітких різницевих систем з урахуванням експертної інформації. Формалізуємо процес зміни функції належності нечітких множин у вигляді рівняння

$$\mu_{k+1}(x) = A_k \circ \mu_k(x) - B_k \circ (l - \tau_k(x)), \tag{25}$$

де $\tau_k(x), k = 0, 1, 2, ...$ — вектори показників достовірності того, що x належить $\tilde{X}_k$ з мірою належності $\mu_k(x)$, $\tau_k = (\tau_{kj})_{j=\overline{1,n}}$, $0 \leq \tau_{kj} \leq 1$, B_k, $k = 0, 1, 2, ...$, — матриці розміру $n \times n$, $x \in \operatorname{supp} \tilde{X}_k = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $l = (1, 1, ..., 1)^T$ — вектор розміру n.

Обчислення величин управляючих впливів $\tau_k, k = 0, 1, 2, ...$ в (25) здійснюються на основі рекурентної процедури розрахунку коефіцієнтів компетентності:

$$g_i^{kp} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \tau_{kj}^{p-1}\ , i = \overline{1,n}, \quad \lambda_k^p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k g_i^{kp},\ p = 1, 2, ...m, \tag{26}$$

$$\tau_{kj}^p = \frac{1}{\lambda_k^p} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k g_i^{kp},\ j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} \tau_{kj}^p = 1,$$

де a_{ij}^k — елементи матриць A_k, $k = 0, 1, 2, ...$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, τ_{kj}^p — рівні компетентності експертів, $k = 0, 1, 2, ...$, $j = \overline{1,n}$, g_i^{kp} — групові оцінки i-того стану, $k = 0, 1, 2, ...$, $i = \overline{1,n}$, λ_k^p — додаткові величини, p — номер ітерації.

Для дослідження стійкоподібних властивостей нечітких систем проведений якісній аналіз (див.[20]) загальної нечіткої різницевої моделі(19). Розглянуто різні випадки нечітких станів $\tilde{X}_k, k = 0, 1, 2, \ldots$.

1) Модель (19) має регулярну траєкторію $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $\bar{x}_k \in \text{supp } \tilde{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Означення 17. РТС (19) $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$, $\gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$ такі, що для довільної траєкторії $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, системи (19), початкові умови якої задовольняють нерівності

$$||\bar{x}_0 - x_0|| < \delta, \quad |\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{27}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$||\bar{x}_k - x_k|| < \varepsilon, \quad |\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Означення 18. РТС (19) $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називається асимптотично стійкою, якщо вона є стійкою і для будь-якої траєкторії $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{k\to\infty}||x_k - \bar{x}_k|| = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \ \lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Означення 19. РТС (19) $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ таке, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, системи (19), початкові умови якої задовольняють нерівності

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{30}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta, \ k = 0, 1, 2, \ldots \ (\lim_{k\to\infty}\mu(x_k) = 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Теорема 1. *Якщо система (19) має регулярну траєкторію* $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *та існують функції* $V : X \to [0, 1]$ *та* $G : [0, 1] \to [0, 1]$ *такі, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, *виконуються наступні нерівності:*

$$V_k = V(x_k) \geq 0, \ \ V(\bar{x}_k) = 0, \ \ \Delta V_k = V_{k+1} - V_k \leq 0, \tag{32}$$

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0, \ \ G(\bar{\mu}(x_k)) = G(1) = 0, \ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<) 0,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, *то РТС є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.*

Теорема 2. *Якщо система (19) має регулярну траєкторію* $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *та існує функція* $G : [0, 1] \to [0, 1]$ *така, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, *виконуються наступні нерівності:*

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0, \ \ G(\bar{\mu}(x_k)) = G(1) = 0, \ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<) 0, \tag{33}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, *то РТС є стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності.*

2) Припустимо, що система (19) не має регулярної траєкторії. Це означає, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}, x_k \in \text{supp } \tilde{X}_k,\ k = 0, 1, 2, ...$, системи (19) існує момент часу $t_m \in T$, що виконується нерівність $\mu(x_m) < 1$. За таких умов розглянемо два випадки.

а) Нехай множина $Y_0 \subseteq X_0 = \text{supp } \tilde{X}_0 \in X$ містить множину початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу $t_k \in T$, що $\mu(x_k) = 1$.

Означення 20. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y, \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\},\ k = 0, 1, 2, ...$, $x_0 \notin Y_0$, системи (19) $\forall \bar{T} > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0,\ \gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$, початкові умови якої задовольняють нерівностям

$$d(x_0, Y_0) < \delta, \quad |\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{34}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$d(x_k, Y_0) < \varepsilon,\ |\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{35}$$

де $d(\cdot, \cdot)$ — відстань від точки до множини.

Означення 21. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y, \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається асимптотично стійкою за Ляпуновим, якщо вона є стійкою за Ляпуновим і для довільної траєкторії $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, ...$, системи (19) справедливі умови

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, Y_0) = 0,\ k = 0, 1, 2, ...,\ \lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = 1,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{36}$$

Означення 22. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y, \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\},\ k = 0, 1, 2, ...,\ x_0 \notin Y_0$, системи (19) $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \eta > 0,\ \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$, початкові умови якої задовольняють нерівності

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{37}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі співвідношення

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, ...,\ (\lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = 1,\ k = 0, 1, 2, ...). \tag{38}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 3. *Якщо система (19) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини початкових станів траєкторій $\tilde{Y}_0$ існують функції $V : X \to [0, 1]$ та $G : [0, 1] \to [0, 1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (19) $\{x_k\},\ k = 0, 1, 2, ...,\ x_0 \notin Y_0 = supp\ \tilde{Y}_0$, виконуються нерівності*

$$\begin{array}{l} V(x_k) = 0, x_k \in \partial Y,\ \ V_k = V(x_k) \geq 0,\ \ \Delta V_k = V_{k+1} - V_k \leq 0, \\ G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0,\ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\, 0, \end{array} \tag{39}$$

$k = 0, 1, 2, ...$, то нечітка множина $\tilde{Y}_0$ є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.

Теорема 4. *Якщо система (19) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини $\tilde{Y}_0$ початкових станів траєкторій існує функція G :*

$[0,1] \to [0,1]$ *така, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}$, $k = 0,1,2,...,\ x_0 \notin Y_0 = supp\ \tilde{Y}_0$ *виконуються нерівності*

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0,\ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k < 0, \tag{40}$$

$k = 0,1,2,...,$ *то* $\tilde{Y}_0$ *— стійка (асимптотично стійка) за степенем належності нечітка множина.*

б) Припустимо, що неможливо виділити множину Y_0. В цьому випадку аналізують стійкість нечіткої початкової множини за рівнем належності.

Позначимо через $\tilde{X}_k^0 = \{(x, \mu_k^0(x)) : x \in X\}, k = 0,1,2,...$ розв'язок системи (19) з початковими умовами $\tilde{X}^0 = \{(x, \mu_0(x)) : x \in X\}$, де $\mu_0^0(x) = \mu_0(x),\ x \in X$.

Означення 23. Нечітка множина $\tilde{X}^0 = \{(x, \mu_0(x)) : x \in X\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \eta > 0,\ \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ для довільного розв'язку $\tilde{X}_k^1 = \{(x, \mu_k^1(x)) : x \in X\}$, $k = 0,1,2,...,$ системи (19), початкове значення якого задовольняє умові

$$\max_{x \in X} |\mu_0^0(x) - \mu_0^1(x)| < \gamma \tag{41}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі співвідношення

$$\max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| < \eta,\ k = 0,1,2,..., \tag{42}$$

$$(\lim_{k \to \infty} \max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| = 0,\ k = 0,1,2,...).$$

Теорема 5. *Якщо для нечіткої множини* $\tilde{X}^0$ *початкових станів нечіткої дискретної системи (19) існує функція* $G : [0,1] \to [0,1]$, $G(\mu_k(x)) = \max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k(x)|,\ k = 0,1,2,...$ *така, що для будь-якого розв'язку системи (19)* $\tilde{X}_k^1,\ k = 0,1,2,...,\ \mu_0^1(x) \neq \mu_0^0(x),\ x \in X$ *виконуються нерівності*

$$G_k = G(\mu_k^1(x)) \geq 0,\ x \in X,\ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\ 0, \tag{43}$$

$k = 0,1,2,...,$ *то нечітка множина* $\tilde{X}_0$ *— стійка (асимптотично стійка) за степенем належності.*

Вирішено задачу спостереження початкового стану в невизначених нечітких динамічних системах [21]. Вважається, що об'єкт спостереження описується різницевою невизначеною нечіткою системою

$$\tilde{\tilde{X}}_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ \tilde{\tilde{X}}_k,\ k = 0,1,2,..., \tag{44}$$

де $\tilde{\tilde{X}}(t_o) = \tilde{\tilde{X}}_0$ — невизначена нечітка множина початкових станів; $\tilde{\tilde{X}}(t_k) = \tilde{\tilde{X}}_k,\ k = 0,1,2,...,$ — невизначені нечіткі множини можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T,\ \ \mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}_k,\ k = 0,1,2,...$ — деякі невизначені нечіткі відображення, що визначають переходи системи.

Нехай для заданого рівня достовірності $\beta \in [0,1]$ множини $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k = 0,1,2,...,$ є нормовано регулярними нечіткими множинами.

Означення 24. Під траєкторією, що реалізується на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$, будемо розуміти послідовність нечітких множин $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k = 0,1,2,...$, для елементів яких

$$x_k^\beta \in \text{supp}\bar{\tilde{X}}_k^\beta,\ k = 0,1,2,..., \quad \beta \in [0,1],$$

$\forall k = 0,1,2,... \ \exists$ єдиний елемент $\bar{x}_k^\beta : \mu(\bar{x}_k^\beta) = 1,\ k = 0,1,2,...$.

Інформація про реалізовані стани системи (44) задається у вигляді послідовності невизначених нечітких множин $\tilde{\bar{Y}}_k,\ k = 0,1,2,...$, які будемо представляти за рівнями достовірності у вигляді

$$\tilde{\bar{Y}}_k = \bigcup_{\beta\in[0,1]} \bar{\tilde{Y}}_k^\beta,\ k = 0,1,2,..., \tag{45}$$

де $\bar{\tilde{Y}}_k^\beta$, $k = 0,1,2,...$, — нечіткі множини з рівнем достовірності $\tau(x,\mu(x)) = \beta,\ \beta \in [0,1]$.

Нехай нечіткі множини $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k = 0,1,2,...,\ \beta \in [0,1]$ задають деякий вихід, що реалізувався. Розв'язком задачі спостереження на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$ будемо називати нечітку множину $\bar{\tilde{X}}_0^{\beta*},\ \beta \in [0,1]$ початкових станів, сумісних із заданим виходом, у яких множини можливих виходів "близькі" до $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k = 0,1,2,...,\ \beta \in [0,1]$ в деякому розумінні.

Позначимо

$$S_k^{\beta*} = \{\bar{\tilde{X}}_k^\beta \in E^n : \mu_{\tilde{C}_k}\ (x_k^\beta, y_k^{\beta*}) > 0, x_k^\beta \in \text{supp}\ \bar{\tilde{X}}_k^\beta,$$

$$y_k^{\beta*} \in \text{supp}\ \bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}\},\ k = 0,1,2,...,\beta \in [0,1],$$

де $\tilde{C}_k, k = 0,1,2,...$ — задані нечіткі відображення.

Скорегованою траєкторію системи на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$ називають нечіткі множини $\tilde{Z}_0^\beta = \bar{\tilde{X}}_0^\beta,\ \tilde{Z}_k^\beta = \bar{\tilde{X}}_k^\beta \cap S_k^{\beta*},\ k = 1,2,...$.

Початковий стан $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$ на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$ сумісний із заданим виходом $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k = 0,1,2,...$, якщо $\tilde{Z}_k^\beta \neq \emptyset,\ k = 0,1,2,...$. Множину всіх початкових станів на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$, сумісних з $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}$, $k = 0,1,2,...,\ \beta \in [0,1]$, позначимо як $E_{\beta S}^n$. Якщо для заданого початкового стану $\bar{\tilde{X}}_0^\beta,\ \beta \in [0,1]$, сумісного із заданим виходом $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k = 0,1,2,...,$ $\beta \in [0,1]$, скореговані множини $\tilde{Z}_k^\beta, k = 0,1,2,...,$ є нормовано регулярними нечіткими множинами, то множину таких початкових станів позначимо $E_{\beta R}^n$.

Лема 1. *Для $\forall \beta \in [0,1]$ кожний нормовано регулярний нечіткий початковий стан системи (44) сумісний з заданим виходом*

$$E_{\beta R}^n \subseteq E_{\beta S}^n. \tag{46}$$

Лема 2. *Якщо $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$ — нормовано регулярний нечіткий початковий стан $\forall \beta \in [0,1]$, то $\mu_{\tilde{C}_k}(\bar{\tilde{X}}_k^\beta, \bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}) > 0$ для всіх $k = 0,1,2,...,\ \beta \in [0,1]$, $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k = 0,1,2,...$ — траєкторія системи (44), що реалізується на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$ з початковим станом $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$.*

Твердження 2. *Для довільного виходу* $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k = 0,1,2,...,\ \beta \in [0,1]$ *з рівнем достовірності* $\beta \in [0,1]$*, для якого*

$$y_k^\beta \in supp\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ \bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*} = \tilde{C}_{k-1} \circ \bar{\tilde{Y}}_{k-1}^{\beta*},\ k = 1,2,...,\ \beta = [0,1],$$

існує відповідного рівня достовірності траєкторія системи (44) з нормовано регулярним початковим станом, яка сумісна із заданим виходом.

Запропоновано методику якісного аналізу динаміки нечітких систем великої розмірності [22].

Розглянемо нечітку динамічну систему S, множина станів якої описується сукупністю нечітких множин $\tilde{A}_S = \{(x, \mu_S(x)),\ x \in X\}$. Припустимо, що в системі виділено дві підсистеми $S_1,\ S_2$, стани яких також мають бути представлені у вигляді нечітких множин $\tilde{A}_{S_1} = \{(x^1, \mu_{S_1}(x^1)),\ x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{A}_{S_2} = \{(x^2, \mu_{S_2}(x^2)),\ x^2 \in X_2\}$ універсальних множин X_1, X_2 відповідно, $X_1 \cup X_2 = X$.

Для визначення функцій належності $\mu_{S_1}(x^1) : X_1 \to [0,1]$ та $\mu_{S_2}(x^2) : X_2 \to [0,1]$ нечітких множин $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$ будемо ототожнювати $\mu_{S_1}(x^1)$, $\mu_{S_2}(x^2)$ з корисністю підсистем $S_1,\ S_2$. Представимо величини міри належності $\mu_S(x)$ у вигляді

$$\mu_S(x^1) = [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha,\ x^1 \in X_1,\ \mu_S(x^2) = [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta,\ x^2 \in X_2,\ \alpha, \beta \geq 0. \quad (47)$$

Знаходження величин $\alpha,\ \beta$ проводиться на основі методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв.

Процедура декомпозиції нечітких систем дозволила розглянути задачу якісного аналізу динаміки багатовимірних нечітких систем вигляду (19).

Припустимо, що система складається з двох підсистем. При цьому система (19) буде мати вигляд

$$\tilde{X}_{k+1}^{(1)} = R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} + F_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(2)}, \quad (48)$$

$$\tilde{X}_{k+1}^{(2)} = R_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(2)} + F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)},$$

де $R_k^{(1)},\ R_k^{(2)}$ — нечіткі відображення з X_i в $X_i,\ i = 1,2$, відповідно, що визначають переходи станів підсистем, $k = 0,1,2,...,$ а величини $F_k^{(1)} \circ \circ \tilde{X}_k^{(2)} = f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)}),\ F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} = f_k^{(2)}(\tilde{X}_k^{(1)}),\ k = 0,1,2,...,$ — визначають взаємний вплив підсистем.

Нехай ізольовані підсистеми є стійкими (асимптотично стійкими) за степенем належності. Це означає, що нечіткі множини $\bar{\tilde{X}}_k^{(1)} = \{(x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$ та $\bar{\tilde{X}}_k^{(2)} = \{(x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$, $k = 0,1,2,...,$ визначають стійкі (асимптотично стійкі) розв'язки підсистем

$$\bar{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} = R_k^{(1)} \circ \bar{\tilde{X}}_k^{(1)}, \bar{\tilde{X}}_{k+1}^{(2)} = R_k^{(2)} \circ \bar{\tilde{X}}_k^{(2)} \quad (49)$$

з початковими значеннями $\bar{\tilde{X}}_0^{(1)} = \{(x^1, \mu_0^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$, $\bar{\tilde{X}}_0^{(2)} = \{(x^2, \mu_0^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$.

Твердження 3. *Припустимо, що* $\forall k = 0, 1, 2, ...,$

$$d_H(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) \le g^{(i)}(d_H(\tilde{\tilde{X}}_k^{(i)}, \tilde{X}_k^{(i)})), \tag{50}$$

де $g^{(i)}(w_k^{(i)})$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, ...,$ *– неперервні додатні функції на* R_+^1.

Позначимо через $r_k^{(i)}(w_0^{(i)})$, $k = 0, 1, 2, ...,$ $i = 1, 2$, *— максимальні розв'язки скалярних різницевих рівнянь*

$$w_{k+1}^{(i)} = \lambda_k^{(i)} w_k^{(i)} + g^{(i)}(w_k^{(i)}),\ w_0^{(i)} \ge 0,\ 0 < \lambda_k^{(i)} \le 1,\ k = 0, 1, 2, ...,\ i = 1, 2. \tag{51}$$

Тоді для кожного $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, ...,$ *маємо*

$$d_H(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) \le r_k^{(i)}(w_0^{(i)}), \quad d_H(\tilde{\tilde{X}}_1^{(i)}, f_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)})) \le w_0^{(i)}. \tag{52}$$

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності

Сучасні інформаційні системи досить часто є сховищами неточних (нечітких) даних, обробка яких потребує спеціальних підходів. Для накопичення та представлення таких даних активно розвивається технологія нечітких баз даних та нечітких запитів до сховищ даних, яка будується на використанні нечітких множин і нечітких відношень з підтримкою формул нечіткої логіки [23].

Обробка неточно заданої інформації з метою отримання конкретного результату або висновку вимагає вирішення багатьох задач, однією з яких є кластеризація (об'єднання даних у відносно однорідні групи-кластери). Більшість з існуючих підходів для кластеризації є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку нечіткої інформації суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості.

Розробка конструктивного алгоритму проведення кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких множин з $K(\tilde{A}^m)$, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини та реалізацію процедури групування нечітких даних в межах заданої кількості кластерів з використанням нечіткого відношення переваги для порівняння відповідних відстаней (див.[24]).

В задачах прийняття рішень реальні дані часто мають неточний, нечіткий характер, що потребує розробки спеціальних математичних моделей, які дозволять адекватно відображати ситуацію, та методів для обробки даних. Тому, важливими з практичної точки зору є задачі використання математичних методів та алгоритмів для підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності. Методику вибору рішень за умов представлення вихідних даних у вигляді сукупності складених нечітких множин наведено в [25].

Обслуговування інформаційних потреб базується на широкому застосуванні баз даних (БД). Запити до БД формулюються у вигляді чітких вимог

до необхідних даних. Чіткі вимоги дозволяють отримувати конкретні результати пошуку в БД. Однак в запитах, що формулює користувач, часто присутні неточності та невизначеності.

Запропоновано розширення та узагальнення поняття нечітких баз даних. Для довільної чіткої бази даних може бути побудоване нечітке представлення (нечітка БД, НБД), в якому інформація про характеристики (поля) об'єктів проблемної області подаються сукупністю пар атрибутів: в першому — конкретні значення атритута з таблиці чіткої бази даних, в другому — значення відповідності даних першого стовпця деякому правилу (нечіткому поняттю). Детальний опис створення нечітких баз даних на основі складених нечітких множин наведено в [26].

Таким чином, в рамках дослідження проведено аналіз та розробка нових конструктивних підходів для якісного аналізу розв'язків різницевих нечітких систем, вирішено ряд задач обробки нечітких даних спеціального вигляду, розроблено методи та алгоритми для роботи з нечіткою інформацією, що може бути використано у процесах створення та супроводження систем підтримки прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності.

Література

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh. // Information and Control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.
2. Согласованное управление активными системами / А. А. Ашимов, В. Н. Бурков, Б. А. Джапаров, В. В. Кондратьев — М.: Наука, 1986. — 284 с.
3. Меренков Ю. Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений / Ю. Н. Меренков. — М.: Ун-т Дружбы народов, 2000. — 123 с.
4. Lakshmikantham V. Theory of fuzzy differential equations and inclusions / V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra — London, New York: Taylor & Francis, 2003. — 178 p.
5. Lakshmikantham V. Uncertain and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2000. — Т. 6. — Вып. 2(12). — С. 29–46.
6. Пушков С. Т. Об общей теории нечетких систем: глобальное состояние и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы/ С. Т. Пушков //Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2001. — №5. — С. 105–109.
7. Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решения / Л. А. Заде. // Математика сегодня. — М.: Знание, 1974. — С. 4–49.
8. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде — М.: Мир, 1976. – 175 с.
9. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта: [зб. наук. праць / наук. ред. Д. А. Поспелов]. — М.: Наука, 1986. — 254 с.
10. Ягер Р. Р. Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств/ Р. Р. Ягер. // Нечеткие множества и теория возможностей: сб. науч. работ. — М: Радио и связь, 1986. — С. 71–78.

11. Норвич А. М. Построение функций принадлежности/ А. М. Норвич, И. Б. Турксен // Нечеткие множества и теория возможностей: сб. науч. работ. — М: Радио и связь, 1986. — С. 64–71.
12. Борисов А. Н. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной/ А. Н. Борисов и др. — Рига: Зинатне, 1982. — 256 с.
13. Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения / Ю. П. Пытьев — М.: Эдаториал УРСС, 2000. — 128 с.
14. Le Van Huen. A note on the asymptotic stability of fuzzy differential equations/ Le Van Huen. // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — V. 57. — № 7. — P. 904–911.
15. Jeong J. U. Stability of periodic solution for fuzzy differential equations/ J. U. Jeong. // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2003. — V. 13. — № 1–2. — P. 217–222.
16. Hausdorff F. Set Theory / F. Haesdorff. — New York: Chelsea, 1957. — 154 p.
17. Кудинов Ю. Н. Нечеткие системы управления / Ю. Н. Кудинов. //Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1990. — № 5. — С. 196–206.
18. Орловский С. А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский — М.: Наука, 1981. — 206 с.
19. Астровский А. И., Корженевич С. К. Применение теории нечётких множеств для исследования задач апостериорного оценивания в линейных дискретных системах / А. И. Астровский, С. К. Корженевич // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 6. — С. 1678–1682.
20. Івохін Є. В. Якісне дослідження динаміки нечітких дискретних систем / Є. В. Івохін, С. О. Волчков // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 4. — С. 94–105.
21. Івохін Є. В. Про стійкоподібні властивості розв'язків нечітких різницевих систем / Є. В. Івохін // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2006. — № 7. — С. 23–31.
22. Івохін Є. В. Дослідження стійкості лінійних різницевих систем великої розмірності / Є. В. Івохін, Д. О. Вадньов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2009. — № 2. — С. 28–34.
23. Круглов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика / В. В. Круглов, В. В. Борисов. — М.: Горячая линия-Телеком, 2001. — 382 с.
24. Івохін Є. В. Один метод кластеризації складених нечітких множин / Є. В. Івохін, К. О. Косинський // Журнал обчислювальної та прикл. математики. — 2007. — № 2. — С. 54–58.
25. Івохін Є. В. Один алгоритм прийняття рішень в ситуації з нечіткими вихідними даними / Є. В. Івохін, Л. Т. Аджубей, С. О. Бабанін // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — Вип. 1. — С. 102–105.
26. Івохін Є. В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних / Є. В. Івохін, К. О. Косинський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2008. — Вип. 2. — С. 83–87.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 10.02.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2012, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

PROXIMITY MEASURE BASED ON INCLUSION STATISTICS AND ITS APPLICATION

D. A. Klyushin, V. V. Alexeenko, N. V. Boroday

Abstract. The paper is devoted to investigation of malignancy associated changes in buccal epithelium in fibroadenoma, fibroadenomatosis and cancer of mammary gland. Quantitative estimation verifying the existence of the malignancy associated changes in the buccal epithelium in oncological patients using new inclusion statistics are obtained. It was shown that integral optical density of DNA content in nuclei of epitheliocytes of buccal epithelium may be used for carrying out differential diagnosis between benign and malignant processes, and also as a marker of the presence of the malignant tumor in the organism.

Introduction

The paper is devoted to investigation of malignancy associated changes in buccal epithelium in fibroadenoma, fibroadenomatosis and cancer of mammary gland. Quantitative estimation verifying the existence of the malignancy associated changes in the buccal epithelium in oncological patients using new inclusion statistics are obtained. It was shown that integral optical density of DNA content in nuclei of epitheliocytes of buccal epithelium may be used for carrying out differential diagnosis between benign and malignant processes, and also as a marker of the presence of the malignant tumor in the organism.

It is known that in the presence of malignant tumor in an organism of man the malignancy associated changes of the buccal epithelium occur (see Susnik et al. [1], Andrushkiw et al. [2], Redon et al. [3]). Till now the oncomorphologists studied qualitative changes characterizing the influence of a tumor on various organs and tissues of the organism distant from the tumor. We have tried to make quantitative estimations of these changes to discover significant statistical connections between cytospectrophotometric indices of the cells of mammary gland and epitheliocytes of the buccal epithelium in the presence of pretumor processes and cancers of the mammary gland. The aim of our investigation is to investigate new inclusion statistics and to compare the integral density of chromatin of the cells of the focus with the integral density of the cells of the buccal epithelium using the inclusion statistics.

1. Materials and Methods

For our investigations we considered women patients suffering from fibroadenoma, fibroadenomatosis, infiltrative lobular cancer, infiltrative ductal cancer,

infiltrative ductal-lobular carcinoma, and scirrhus. The number of the patients and the number of the cells taken from the mammary gland and from the buccal epithelium are represented in the Table 1. Smears from various depth of the spinous layer were obtained (conventionally they were denoted as median and deep), after gargling and removing the superficial cell layer of the buccal mucous. The smears were dried out under room temperature and fixed for 30 min in Nikiforov's mixture. Then, a Feulgen reaction was made with cold hydrolysis in 5 n. HCl for 15 min, under temperature t = 21–22°C. Optical density of the nuclei was registered by a cytospectrophotometer, using the scanning method with wave length 575 nm and probe 0.05 mcm. We investigated from 10 to 20 nuclei in each preparation. The DNA-fuchsine content in the nuclei of the epitheliocytes was defined as a product of the density on area (in terms of conventional units).

Table 1. Number of patients and cells

Diagnosis	Buccal epithelium		Focus	
	Cells	Patients	Cells	Patients
Norm	205	10	60	3
Fibroadenoma	120	6	130	6
Fibroadnomatosis	220	11	220	11
Infiltrative ductal cancer	260	13	260	13
Infiltrative lobular cancer	180	9	180	9
Infiltrative ductal-lobular cancer	180	9	180	9
Scirrhus	80	4	88	4

2. Inclusion statistics

Let $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$ be a variational series of a sample $x_1, x_2, ..., x_n$ and $y_{(1)} < y_{(2)} < ... < y_{(m)}$ be a variational series of a sample $y_1, y_2, ..., y_m$. According to the Hills's assumption [4]

$$P\left(x_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})\right) = \frac{j-i}{n+1}.$$

Let us introduce the following notations:

$$I_0 = \left(-\infty; x_{(1)}\right), I_n = \left(x_{(n)}, \infty\right),$$
$$I_j = \left(x_{(j)}, x_{(j+1)}\right), j = \overline{1, n-1}.$$

Then $p = P\left(x_k \in I_i\right)) = \frac{1}{n+1}$. Let l_i be the number of elements y_j such that $y_j \in I_j$, and $f_i = \frac{l_i}{m}$ be the frequency of elements y_j in the intervals I_i,

$$\overline{b} = \begin{cases} \left[\frac{m}{n+1}\right] + 1, \frac{m}{n+1} > \left[\frac{m}{n+1}\right], \\ \frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1} = \left[\frac{m}{n+1}\right]. \end{cases}$$

Let $\overline{h}$ be the number of i such that $l_i \geq \overline{b}$, $\overline{w} = \sum\limits_{l_i \geq \overline{b}} l_i - \overline{b}$, $\delta_+ = \overline{b} - \frac{m}{n+1}$, $\underline{b} = \overline{b} - 1$, $\underline{h}$ be the number of i such that $l_i \leq \underline{b}$, $\underline{w} = \sum\limits_{l_i \leq \underline{b}} \underline{b} - l_i$, $\delta_- = \frac{m}{n+1} - \underline{b}$.

Лема 1. *The values* $\underline{h}$, $\underline{w}$, δ_- *may be defined by the values* $\overline{h}$, $\overline{w}$, δ_+.

Доведення. Let $\underline{h} = n - \overline{h}$, where n is the size of $\bar{l}$. Then

$$\begin{aligned} l\underline{w} &= \sum_{l_i \le \underline{b}} \underline{b} - l_i = \sum_{l_i \le \underline{b}} \underline{b} - \sum_{l_i \le \underline{b}} l_i = \\ &= \underline{hb} - \left(m - \sum_{l_i \ge \bar{b}} l_i \right) = \\ &= (n - \overline{h})(\bar{b} - 1) - \left(m + \sum_{l_i \ge \bar{b}} (\bar{b} - l_i) - \sum_{l_i \ge \bar{b}} \bar{b} \right) = \\ &= n\bar{b} - n - \overline{hb} + \overline{h} - (m + \overline{w} - \overline{hb}) = \\ &= n\bar{b} + \overline{h} - n - m - \overline{w}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\delta_- = \frac{m}{n+1} - \underline{b} = \frac{m}{n+1} - \bar{b} + 1 = 1 - \delta_+.$$

□

Let us introduce the inclusion statistics

$$\eta = \sum_{i=0}^{n} |p - f_i| .$$

Лема 2. *The pair* $\left(\overline{h}, \overline{w}\right)$ *uniquely defines the statistics* η *given* m *and* n.

Доведення.

$$\begin{aligned} \eta = \sum_{i=0}^{n} |p - f_i| &= \sum_{l_i \ge \bar{b}} \frac{\left| \frac{m}{n+1} - l_i \right|}{m} + \sum_{l_i \le \underline{b}} \frac{\left| \frac{m}{n+1} - l_i \right|}{m}) = \\ &= \frac{\sum\limits_{l_i \ge \bar{b}} (l_i - \frac{m}{n+1}) + \sum\limits_{l_i \le \underline{b}} (\frac{m}{n+1} - l_i)}{m} \\ &= \frac{\sum\limits_{l_i \ge \bar{b}} (l_i - \bar{b} + \delta_+) + \sum\limits_{l_i \le \underline{b}} (\underline{b} - l_i + \delta_-)}{m} = \\ &= \frac{\overline{w} + \overline{h}\delta_+ + \underline{w} + \underline{h}\delta_-}{m}. \end{aligned}$$

□

By Lemma 1

$$l\eta = \frac{\overline{w} + \overline{h}\delta_+ + n\bar{b} + \overline{h} - n - m - \overline{w} + (n - \overline{h})\delta_-}{m} = \eta(\overline{h}, \overline{w}).$$

The lemma is true since $\bar{b}$, δ_+ i δ_- are calculated via m and n. Suppose that the hypothesis H_0 that $F(u) = G(u)$ is true. Consider a joined sample $z_1, z_2, ..., z_{m+n} = x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ...y_m$ and corresponding variational series $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(m+n)}$. Since the sample y_j belongs to the general population G,

every possible position of y_j in the variational series is equiprobable, i.e. any m elements of the sample $z_1, z_2, ..., z_{m+n}$ may belong to the test sample. The positions of the elements of the test sample in the variational series uniquely defines the vector $\bar{l}$ consisting of the frequencies f_j. There are C^m_{m+n} variants of vectors $\bar{l}$. This is the number of ways to select m positions of y_j in the variational series. Denote by $S(n,k,l)$ the number of the ways to arrange k balls in n urns so that in every urn there are no more than l. This value may be calculated using recurrent formulas:

$$S(0,k,l) = 0, S(n,0,l) = 1,$$
$$S(n,1,l) = n, S(1,k,l) = 1, k \le l,$$
$$S(n,k,l) = S(n-1,k,l) + S(n-1,k-1,l) + ...$$
$$+S(n-1,k-l,l).$$

Теорема 1. *At given $(\overline{h},\overline{w})$ the number of different vectors $\bar{l}$ for which h and w may be equal to these values is*

$$N(\overline{h},\overline{w}) = C^{\overline{h}}_{n+1} C^{\overline{w}}_{\overline{h}+\overline{w}-1} S(n+1-\overline{h}, m-\overline{bh}-\overline{w}, \overline{b}-1).$$

Доведення. The number of ways to select $\overline{h}$ positions in $n+1$ positions is equal to $C^{\overline{h}}_{n+1}$. Remember that $\overline{h}$ is the number of possible vectors $\bar{l}$ where the sample values are greater or equal to $\overline{b}$, $\overline{w}$ is the difference between the sum of elements in these positions and $\overline{b}$. The number of possible vectors where there are $\overline{h}$ numbers that are greater or equal to $\overline{b}$, such that $\sum\limits_i (l_i - \overline{b}) = \overline{w}$, is equal to the number of the ways to arrange $\overline{b}$ balls in $\overline{h}$ urns and then to add $\overline{w}$ ball to these urns. The number of such ways is equal to $C^{\overline{w}}_{\overline{h}+\overline{w}-1}$. Other $n+1-\overline{h}$ positions are filled out by $m-\overline{bh}-\overline{w}$ elements, and the number of values in every interval does not exceed $\overline{b}-1$. This means that the number of variants equals to $S(n+1-\overline{h}, m-\overline{bh}-\overline{w}, \overline{b}-1)$. Thus, total number of the vectors is equal to $C^{\overline{h}}_{n+1} C^{\overline{w}}_{\overline{h}+\overline{w}-1} S(n+1-\overline{h}, m-\overline{bh}-\overline{w}, \overline{b}-1)$.

Hence, at given m and n the probability that the pair $(\overline{h},\overline{w})$ is corresponding to the distribution of the vectors $\bar{l}$ equals to

$$p(\overline{h},\overline{w}) = \frac{C^{\overline{h}}_{n+1} C^{\overline{w}}_{\overline{h}+\overline{w}-1} S(n+1-\overline{h}, m-\overline{bh}-\overline{w}, \overline{b}-1)}{C^m_{m+n}}.$$

□

Thus, we propose the following test for hypothesis H_0.

1. At given m and n (sizes of test and reference sample) compute the probabilities for all possible pairs (h,w). These probabilities may be computed in advance, but they are dependent only on m and n.
2. Determine the pair (h_0, w_0) for given test and reference sample and the corresponding probability $p(h_0, w_0)$

3. Compute α that is the sum of probabilities of pairs (h, w) that are less probable then (h_0, w_0). In fact, we may consider α as the minimal significance level wherein the hypothesis H_0 is rejected for such characteristics.
4. At desirable significance level α_0 the hypothesis H_0 is accepted if $\alpha > \alpha_0$.

Let us consider the classification problem for k classes represented by reference samples $x^{(i)}$, $i = 1, ..., k$, and a test sample y.. It is required to detect a class which the test sample belongs to. Let us test the hypothesis H_0 for every reference sample and test sample. If H_0 is accepted for only one reference sample we consider that the test sample is recognized and it belongs to the class which the reference sample belongs to; otherwise we consider that classification is failed. The value $1-\alpha$ may be used as a proximity measure between two samples. If it is required to select one of the class we propose an alternative test: the test sample belongs to the class for which the value $1-\alpha$ is minimal. This prevents the uncertainty.

3. Investigation of nuclei of cells of primary focus and buccal epithelium

We compare integral optical density of the nuclei of the cells from the primary focus and normal mammary gland and also the cells from the buccal epithelium taken from patients with malignant and bening tumors and healthy women. The results represented in the Tables 2 and 3 show that in epitheliocytes of the buccal epithelium there exists the significant difference between the patients suffering from various pathological processes. In this connection we observe the significant difference between samples of the integral density of cell in focus and buccal epithelium for the benign and malignant processes, and norm, so that the values of the inclusion statistics for the samples corresponding to the norm (1) and to the benign processes (fibroadenoma (2) and fibroadenomatosis (3)) are less than the values of the inclusion statistics for the samples corresponding to the norm and to the malignant processes (infiltrative ductal cancer (4), infiltrative lobular cancer (5), infiltrative ductal-lobular cancer (6), scirrhus (7)).

Table 2. Comparing integral density in primary focus

N	1	2	3	4	5	6	7
1	–	1,75E-34	8,6E-34	3,9E-64	0	6,8E-49	0
2	4,3E-36	–	8,4E-04	1,7E-40	3,6E-55	1,6E-31	3,0E-54
3	3,1E-37	7,4E-04	–	1,1E-65	2,4E-78	2,7E-41	1,0E-64
4	1,8E-64	7,0E-45	6,9E-70	–	4,3E-12	5,5E-06	2,0E-25
5	0	1,2E-57	3,7E-80	1,6E-12	–	2,4E-07	6,4E-10
6	3,0E-50	1,7E-31	2,1E-38	3,2E-05	2,4E-07	–	1,3E-25
7	0	1,8E-57	1,9E-66	1,4E-27	1,5E-08	1,4E-22	–

Table 3. Comparing integral density in buccal epithelium

N	1	2	3	4	5	6	7
1	–	1,8E-82	1,9E-120	1,3E-79	3,1E-91	2,4E-76	1,7E-55
2	6,1E-86	–	1,5E-06	1,4E-88	1,6E-60	5,2E-74	6,5E-46
3	3,3E-116	3,6E-10	–	1,5E-128	1,5E-82	1,0E-95	3,1E-62
4	4,0E-82	3,6E-85	9,0E-125	–	2,3E-22	8,4E-24	1,1E-13
5	8,3E-92	2,5E-61	6,2E-85	8,5E-22	–	3,0E-33	1,7E-07
6	1,4E-73	7,6E-71	1,6E-98	1,3E-24	1,7E-34	–	4,3E-26
7	2,8E-57	5,4E-49	2,9E-65	5,9E-15	2,0E-10	9,7E-20	–

By comparing the data of the Tables 2 and 3 we see that the values of the inclusion statistics for the samples of the cells obtained from the focus and buccal epithelium in the cases of the norm are (almost always) less than the corresponding values of the inclusion statistics for the samples of the cells taken from the focus and buccal epithelium at the presence of pathologic processes. This corresponds to the intuitive chain "norm-benign process-cancer".

4. Conclusions

The results corresponds to natural expectations on differences between control, breast cancer and benign diseases. Also, it is proved that the proximity measure based in the inclusion statistics is sensitive and specific enough.

Reference

1. Susnik, B. Malignancy-associated changes in the breast: changes in chromatin distribution in epithelial cells in normal-appearing tissue adjacent to carcinoma / B. Susnik, A. Worth, J. LeRiche, B. Palcic // Analytical and Quantitative Cytology and Histology. — 1995. — 17(1). — P. 62–68.
2. Andrushkiw, R.I. Computer-aided cytogenetic method of cancer diagnosis / R.I. Andrushkiw, N. V. Boroday, D. A. Klyushin, Yu. I. Petunin — New York: Nova Science Publishers, 2007. — 300 p.
3. Redon, C. E. Tumors induce complex DNA damage in distant proliferative tissues in vivo / C. E. Redon et al. // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2010. — V. 107. — № 42. — P. 17992–17997.
4. Hill B. M. Posteriori distribution of percentiles: Bayes' theorem for sampling from a population / B. M. Hill // J. Amer. Statist. Assoc. — 1968. — V. 63. — P. 677–691.

Department of Cybernetics, Kiev National Schevchenko University, Volodymirska str. 64, Kiev, 01601, Ukraine.

Instutite of experimental pathology oncology and radiobiology, Vasilkivska 45, Kiev, 03022, Ukraine.

Received on 30.05.13

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ ДОПУСТИМИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

В. І. Кудін

Резюме. Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод допустимих базисних матриць (МДБМ). Метод (зокрема, розв'язання задачі лінійного програмування) грунтується на концепції базисних матриць. В роботі наведено всі необхідні теоретичні обгрунтування для побудови алгоритмічних схем. Встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків. Метод призначений для розв'язання задач великої розмірності, ідентифікації пасивних обмежень моделі в ході ітераційного процесу.

Вступ

Загальна теорія двоїстості Дж. Неймана [1] знайшла своє підтвердження в сімплекс-методах, що були розроблені рядом авторів [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задач. Для подальших застосувань стало важливим не лише "здатність" методу знаходити оптимальні розв'язки, але й проводити аналіз властивостей системи на різних стадіях обчислень. В даній роботі розглядається метод допустимих базисних матриць (МДБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, задач лінійного програмування.

В основі методу лежить ідея базисної матриці. В базисну матрицю, в ході ітераційного процесу, вводяться і виводяться нормалі обмежень моделі. Цей метод поєднує в собі переваги симплекс-методів, аналізує властивості компонент моделі на стадії дооптимізації, оптимізації та постоптимізації, може бути поширеним для аналізу лінійних моделей з нелінійними компонентами — слабонелінійних. Запропонований МДБМ не лише знаходить оптимальний розв'язок, але й дозволяє ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження моделі (лінійні нерівності) в ході ітераційного аналізу, встановлювати існування, єдиність та неєдиність оптимальних розв'язків.

Основні положення методу допустимих базисних матриць

Основою запропонованого методу є ідея порядкової базисної матриці. Базисні матриці в ході ітерацій послідовно змінюються вводом-виводом із неї рядків-нормалей обмежень. Збіжність до оптимального розв'язку "іде" за допустимими базисними вершинами багатогранної множини.

Розглянемо задачу лінійного програмування вигляду

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$A^T u \le C^T, \tag{2}$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $C = (c_1, c_2, .., c_n)$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$,
$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})$, $j = \overline{1,n}$ — рядки матриці A^T, T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків задачі обмежена. Модель (1)–(2) досліджується в просторі E^m.

Означення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних рядків, будемо називати допустимою базисною, а розв'язок u_0 системи рівнянь $A_б u = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T \subset C^T -$ (підвектор), що задовольняє (2), допустимим базисним.

Базисний розв'язок u_0 будемо вважати виродженим, якщо він є розв'язком перевизначеної системи лінійних рівнянь (перетин більш ніж m гіперплощин у вершині u_0).

Означення 2. Дві базисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, k-й рядок, будемо називати суміжними.

Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$;
$u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ — базисний розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u_0 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектору-градієнту цільової функції (1) за рядками базисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; J_b, J_H ($J = J_b \bigcup J_H$) — множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка a_k на a_l, що не входить в базисну матрицю $A_б$, будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 1. *Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (2), цільової функції (1) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (2), значеннями цільової функції в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{3}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{e_{lk}}\alpha_{li},\ r = \overline{1,m};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{4}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ j = \overline{1,m}; \tag{5}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ r = \overline{1,n};\ r \ne k; \tag{6}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{7}$$

причому умовою опорності базисної матриці при вводі вектору нормалі a_l обмеження $a_l u \le c_l$ k-м рядком базисної матриці $A_б$ є виконання умови $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку є — $\alpha_{lk} < 0$,

зростання цільової функції — $\alpha_{0k} < 0$, *спадання цільової функції* — $\alpha_{0k} > 0$ *та незмінності значень цільової функції* — $\alpha_{0k} = 0$.

Доведення наведено в [3].

Нехай u_0 — допустимий базисний розв'язок задачі, тобто існує базисна матриця $A_б$ така, що $A_б u_0 = c^0$ і $\Delta_r \le 0$, $r = \overline{1,m}$.

Теорема 2. *Для того, щоб* $B\overline{u}_0 > Bu_0$ *і новий розв'язок* $\overline{u}_0$ *зберігався допустимим базисним для задачі (1), (2), необхідно і достатньо, щоб існували такі номери* k *та* l, *для яких* $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{lk} < 0$ *і* $\frac{\Delta_r}{\Delta_l} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}$, $r = \overline{1,n}$.

Означення 3. Допустимий базисний розв'язок u_0 оптимальний, якщо $Bu_0 \ge Bu$ для всіх u, що задовольняють (2).

Наслідок 1. *Для того, щоб* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а новий розв'язок* $\overline{u}_0$ *зберігався допустимим базисним для задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб існували такі номери* k *та* l, *для яких*
$\alpha_{0k} > 0$, $\alpha_{lk} < 0$, $\frac{\Delta_r}{\Delta_l} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}$, $r = \overline{1,n}$.

Теорема 3. *Для оптимальності базисного розв'язку* u_0 *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{ok} \ge 0$ *для* $k = \overline{1,m}$.

Наслідок 2. *Для оптимальності базисного розв'язку* u_0 *та базисної матриці* $A_б$ *для задачі* $\max(-Bu)$, $u \in U$ *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{0k} \le 0, k = \overline{1,m}$.

Теорема 4. *Якщо* $\exists$ *індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\alpha_{rk} \ge 0$, *для* $r \notin J_б$, *то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Теорема 5. *Якщо* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r, \\ \alpha_{rk}<0}} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, *то* $B\overline{u}_0 \ge Bu_0$ *і* $\overline{u}_0$ — *допустимий базисний розв'язок.*

Доведення теорем 2—5 є в [4].

Дослідження пасивності та неактивності обмежень моделі

Розглянемо застосування МДБМ для аналізу (1)—(2), зокрема, для виявлення пасивних обмежень.

Нехай $U = \{u / a_j u \le c_j,\ j \in J\}$, $U_r = \{u / a_j u \le c_j,\ j \in J,\ J \ne r\}$, $U^0 = \{u_0 / Bu_0 = \max\limits_{u \in U} Bu,\ u \in U\}$, $U_r^0 = \{u_0 / Bu_0 = \max\limits_{u \in U_r} Bu,\ u \in U_r\}$.

Означення 4. Обмеження $a_r u \le c_r$ пасивне (несуттєве, надлишкове), якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \le c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Означимо через $A^0_{б(k)}$ матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$, заміною k-го рядка вектором B.

Означення 6. Матрицю B_k^0 будемо називати оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A^0_{б(k)})^{-1}$, $A^0_{б(k)} \cdot u_0 = d_0$, де
$d_0 = (c_1^0, ..., c_{k-1}, -Bu_0, c_{k+1}^0, ..., c_m^0)^T$.

Теорема 6. *Для того, щоб обмеження $a_r u \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \ge 0$ для $k = \overline{1,m}$.*

Теорема 7. *Для того щоб $a_r u \le c_r$ обмеження було неактивним для (2) необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A^0_{б(k)}$, $k = \overline{1,m}$, відносно якої $\alpha_{ri} \ge 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 3. *Для несумісності множини U, утвореної перетином $U_r = \{u/a_j u \le c_j,\ j \in J,\ j \ne r\}$ та $П_r^{(+)} = \{u/a_r u\ lec_r,\ r \in J\}$, тобто $U = U_r \cap П_r^{(+)} = \varnothing$, необхідно і достатньо існування базисної матриці $A_б$, опорної вершини u_0, що виконується при $\alpha_{ri} \le 0,\quad i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$.*

Доведення теорем 6,7 наведено в [4].

Властивості структурних елементів моделі (1)–(2).

Нехай існує базисна матриця $A_б$, ранг якої m та індекс k, тобто $\alpha_{rk} = 0,\ r \notin J_б$, тоді довільна симплексна ітерація по вводу на k-у позицію базисної матриці вектора нормалі a_l обмеження $a_l u \le c_l\ \forall_l \notin J_б$ утворює нову матрицю, ранг якої $m-1$, що визначає одновимірну необмежену грань з направляючим вектором e_k, де e_k — вектор-стовпець k матриці $A_б^{-1}$, який позначимо $(A_б^{-1})_k$.

Наслідок 4. *Для точок одновимірної необмеженої грані з направляючим вектором e_k виконуються умови:*
при $\alpha_{0k} < 0$ — необмежене зростання цільової функції,
якщо $\alpha_{0k} > 0$ — необмежене спадання цільової функції,
якщо $\alpha_{0k} = 0$, то цільова функція незмінна,
$\overline{\Delta}_k$ — оцінка обмеження, нормаль якого виводиться з базисної матриці, необмежено спадає, решта $\Delta_r, r \notin J_б$ — незмінні і при цьому від'ємні.

Наслідок 5. *Якщо $\alpha_{0k} = 0$ і $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r,\, r \notin J_б \\ \alpha_{rk} < 0}} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, то: $B\overline{u}_0 = Bu_0$, $\overline{u}_0 \ne u_0$, $\overline{u}_0$ — допустимий базисний розв'язок, направляючий вектор $\overline{e}_k$ ребра, що з'єднує u_0 та $\overline{u}_0$ — ортогональний вектору нормалі цільової функції B.*

Наслідок 6. *Для ортогональності направляючого вектора ребра, що з'єднує u_0 та $\overline{u}_0$ та вектора нормалі B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 0$.*

Наслідок 7. *Для коленіарності направляючого вектора ребра, що поєднує u_0 та $\overline{u}_0$ та вектора B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 1$.*

Наслідок 8. *Якщо $\alpha_0 = (\alpha_0^{(-)}, \alpha_0^{(0)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(+)})$, де*

$$\alpha_0^{(-)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} < 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(+)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} > 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(0)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} = 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(1)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} = 1\ \},$$

тоді якщо $\alpha_0^{(-)} \neq \varnothing$, *то переходи в сімплексній схемі, пов'язані з* $\alpha_{oi} < 0$, *ведуть до росту цільової функції;*
якщо $\alpha_0^{(0)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі задовольняють умові ортогональності ребра та вектора B;*
якщо $\alpha_0^{(1)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі задовольняють умові колінарності ребра* e_i *та вектора B;*
якщо $\alpha_0^{(+)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі, пов'язані з* $\alpha_{0i} > 0$, *ведуть до спаду значень цільової функції;*
за умови виконання умов теорем 1, 2, 5.

Наслідок 9. *Якщо існує індекс k такий, що* $\alpha_{0k} = 0$ *і* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних r , то область U, що визначає (1), (2) має необмежене ребро з направляючим вектором* e_k, *причому значення цільової функції* $B\overline{u}_0 = Bu_0$, $\overline{u}_0 \neq u_0$, *а* e_k *та B є ортогональними.*

Наслідок 10. *Якщо існує індекс k такий, що* $\alpha_{0k} = 1$ *та* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних r, то область U, що визначає (1), (2) має необмежене ребро з направляючим вектором* e_k, *причому значення цільової функції спадатиме* $B\overline{u}_0 = Bu_0 - \lambda$, *а* e_k *та B коленіарні.*

Наслідок 11. *Якщо існує індекс k такий, що* $\alpha_{0k} > 0$ *та* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних r, то цільова функція задачі необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.*

Наслідок 12. *Якщо* $\alpha_{0k} > 0$ *і* $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r \in J_b,\, \alpha_{rk} < 0} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, *то* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а* $\overline{u}_0$ — *допустимий базисний розв'язок.*

Справедливість наслідків 3–12 безпосередньо випливає з формул (3)–(7) теореми 1 та теореми 3.

Виродженість базисного розв'язку задачі лінійного програмування.

Розглянемо таку ε-задачу:

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} b_i u_i, \tag{8}$$

де U визначається системою нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} u_i \leq c_j + \varepsilon^{V_{j(0)}} \cdot \varepsilon^{n+1-j} = c_j(\varepsilon), \tag{9}$$

$v_{(0)} = (v_{1(0)}, v_{2(0)}, ..., v_{j(0)}, ..., v_{n(0)})$ — n–вимірний вектор, компоненти якого визначаються співвідношеннями

$$V_{j(0)} = \begin{cases} 0, & j \in J_б, \\ j_0, & j_0 < j - m - 1, \quad j \notin J_б \end{cases}, \varepsilon \geq 0, j \in J. \tag{10}$$

Задачу (1), (2) будемо називати породжуючою, а (8)–(10) — "збуреною".

Теорема 8. *Якщо* u_0 *базисний розв'язок задачі (1),(2), то існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *відповідний базисний розв'язок задачі (8)–(10) буде невиродженим.*

Теорема 9. *Існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для інтервалу $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ε-задача буде невиродженою.*

Теорема 10. *Довільний опорний базисний розв'язок ε-задачі буде опорним базисним розв'язком (1),(2), тобто породжуючої задачі. Оптимальному базисному розв'язку останньої задачі відповідає оптимальний базисний розв'язок "збуреної" задачі при $\varepsilon = 0$.*

Теореми 8–10 обгрунтовані в [4].

Положення теорем 8—10 вказують на існування малих збурень для виродженої задачі (1)—(2) у вигляді (8)—(10) — невиродженої задачі.

Умови єдиності та необмеженості множини оптимальних розв'язків.

Наслідок 13. *Необхідною і достатньою умовою єдиності оптимального опорного, допустимого розв'язку u_0 є виконання умови $\alpha_{0i} > 0,\ i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 14. *Допустимий, опорний, базисний розв'язок u_0 задачі неєдиний тоді і тільки тоді, коли існує k таке, що $\alpha_{0k} = 0$.*

Наслідок 15. *Розв'язки задачі (1),(2) утворюють необмежену замкнену множину тоді і тільки тоді, коли серед $k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ існують такі, що виконуються умови $\alpha_{0k} = 0,\ \alpha_{jk}0,\ j \notin J_б$.*

Наслідок 16. *Розмірність множини оптимальних розв'язків визначається k_0, де k_0 — потужність множини $k_0 = \left\{k/\alpha_{0k} = 0,\ k = \overline{1,m}\right\}$.*

Наслідки 13–16 випливають з теореми 1 (формула (7)) та теореми 3.

Приведені положення теорем охоплюють всі випадки для організації розширеного аналізу лінійної системи на основі методу базисних матриць:

1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальний, причому при $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$ — розв'язок єдиний, якщо $\exists\, i_0$ таке, що $\alpha_{0i_0} = 0$ — розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує k таке, що $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх $r \in J_H$, то цільова функція задачі необмежена зверху, а при $\alpha_{0k} > 0$ та $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх $r \in J_H$ — необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такий, що $\alpha_{rk} \leq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r > 0$, то система нерозв'язна за несумісністю обмежень.

4. Якщо існує k таке, що $\alpha_{rk} < 0$, то з допомогою перетворень (3)–(7) можна перейти до нової базисної матриці та розв'язку з більшим значенням цільової функції при $\alpha_{0k} < 0$, зменшенням цільової функції при $\alpha_{0k} > 0$ та незмінності значень при $\alpha_{0k} = 0$.

5. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такі, що $\alpha_{rk} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ пасивне.

6. Якщо існує на деякій ітерації оптимально-базисна матриця $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ неактивне.

Висновок

На основі наведених вище положень теорем можна побудувати різноманітні алгоритмічні схеми аналізу моделі лінійного програмування методом базисних матриць. Запропоновані вище положення методу (теореми та наслідки) можуть бути застосовані, зокрема, для побудови процедур аналізу моделі на стадії дооптимізації: уточнення меж змінних та оптимального розв'язку (1), (2), ідентифікації пасивних обмежень, локалізації області оптімума, знаходження наближеного розв'язку, побудови агрегуючих множин для U, "виділення" фундаментальної системи обмежень, тобто обмежень (2) утворюючих U.

Результати обчислювального експерименту за методом базисних матриць наведено в роботах [6–8].

Література

1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. / А. Схрейвер // Т. 1 — М., 1991. — 380 с.
2. Черников С.Н. Линейные неравенства. / С.Н. Черников // М. — 1968. — 488 с.
3. Кудин В.И. Анализ свойств линейной систетемы методом искусственных базисних матриц. / В.И. Кудин, С.И. Ляшко, Н.М. Хритоненко, Ю.П. Яценко // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4 — С.119–127.
4. Волкович В.Л. Релаксационная схема строчного симплекс метода / В.Л. Волкович, В.М. Войналович, В.И. Кудин// Автоматика. — 1987.— № 4 — С. 79–86.
5. Кудін В.І. Метод штучних базисних матриць / В.І. Кудін, С.І. Ляшко, Н.М. Хритоненко, Ю.П. Яценко // Доповіді НАН України. — 2007. — № 9. — С. 29–33.
6. Богаенко В.А. О вычислительной эффективности схем метода базисных матриц / В.А. Богаенко, В.В. Скопецкий, В.И. Кудин // Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV), Кацивелі 24–29 вересня 2009 р. — Т. 1. — Київ, 2009. — С. 68–72.
7. Богаенко В.А. Анализ компьютерных схем метода базисных матриц. / В.А. Богаенко, В.В. Скопецкий, В.И. Кудин // Компьютерная математика — 2009. — № 2. — С. 3–13.
8. Богаенко В.А. О свойствах параллельных вычислительных схем метода базисных матриц / В.А.Богаенко, В.И. Кудин // Математичне та комп'ютерне моделювання. — Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип.2. — С. 3–14.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 11.09.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 004

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GPU В ГЕТЕРОГЕННЫХ КЛАСТЕРАХ И В ГРИД-СЕТИ

А. Н. Лавренюк, Н. С. Лавренюк

Резюме. Рассмотрен вопрос оптимального выбора GPU вычислителей для выполнения ядер-программ на OpenCL при их запуске на GPU в кластерах гетерогенного типа и в грид-сети, грид-узлами которой являются кластеры на GPU. Предложен метод оптимального выбора GPU вычислителей для минимизации времени выполнения программ с использованием GPU. В предложенном подходе учитываются определенные отличия работы GPU разных производителей и различной архитектуры. Предложенный метод будет эффективным также при использовании его на персональных компьютерах или ноутбуках с несколькими GPU.

Введение

Продолжается широкое использование ускорителей, особенно графических (GPU), не только при построении больших и малых кластеров, но уже и персональных компьютеров. Много таких кластеров доступны в грид-сети как грид-узлы [1], [2]. В последнее время кластеры с GPU стали доступными и для отечественных пользователей через традиционный доступ либо как узлы Украинского Национального грида [3]. Очевидно, что при решении конкретной задачи для получения оптимальной производительности необходимо задействовать одновременно несколько GPU, доступных на одном кластере либо грид-узле [4]. Но не всегда такой подход может дать положительный результат. Особенно, когда на одном грид-узле или кластере используются GPU различной архитектуры, разных поколений и производителей [5]. Для получения максимальной производительности необходимо решать задачу оптимального выбора GPU из доступных, для того, чтобы программа выполнялась за минимальное время. При этом, если выбраны GPU различной архитектуры, то следует решить еще сопутствующую задачу по универсализации программ-ядер на OpenCL для GPU различной архитектуры.

GPU состоит из унифицированных процессоров. Традиционно в процессорах существует два типа математики: векторная и скалярная. В случае векторной математики данные (операнды) представляются в виде n-мерных векторов, при этом над большим массивом данных выполняется всего одна операция. В скалярной математике операции выполняются над

парой чисел. Очевидно, что векторная обработка увеличивает скорость вычислений за счет того, что обработка целого набора (вектора) данных выполняется за один такт.

На сегодняшний день определились лидеры по производству GPU: NVIDIA и AMD. У этих производителей есть определенные отличия в архитектуре GPU. Так, например, в GPU NVIDIA уже практически не поддерживаются векторные операции, а в AMD — наоборот поддерживаются. При этом на GPU различных поколений скорость вычислений будет разной для разной длины векторов определенных типов данных.

Программа, которая использует GPU, состоит из двух частей: основной или хостовой программы, которая выполняется на CPU, и из программ-ядер (одной или нескольких), которые выполняются на GPU и написаны на специальных языках, например, OpenCL [6].

OpenCL (Open Computing Language) — открытый, нетребующий лицензионных отчислений, стандарт для универсального параллельного программирования разных типов процессоров. Стандарт предоставляет программистам переносимый и эффективный доступ ко всей мощности гетерогенных вычислительных платформ.

Программа-ядро, написанная на языке программирования OpenCL, выполняется за разное время на разных GPU [4]. Даже GPU одного производителя различных поколений имеют разную производительность при почти одинаковых параметрах. И не всегда GPU из нового модельного ряда будет превосходить GPU из предыдущего модельного ряда по скорости обработки данных, хотя, может превосходить, например, по объему памяти. Это подтверждается проведенными экспериментами. Если программа выполняется за очень малый промежуток времени (секунды), то проблема оптимального выбора GPU может не стоять так остро. Но, если для решения определенной задачи, программа работает много часов, как, например, при решении задач быстрого синтеза 2D по 2D модели или 3D сейсмограмм по 2.5D модели [7]. В таком случае при неоптимальном выборе доступных GPU на кластере или в грид-сети для выполнения программ-ядер OpenCL время работы всей программы может существенно увеличиваться. Здесь временные потери могут измеряться несколькими часами. Для таких задач предложенный метод очень актуален.

1. ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА GPU ИЗ МНОЖЕСТВА ДОСТУПНЫХ GPU ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОГРАММ-ЯДЕР НА OPENCL

Одним из подходов для выбора GPU компания производитель GPU NVIDIA предложила следующий механизм выбора GPU в виде функции C++ для хостовой программы, которая запускает программы-ядра на определенных GPU:

```
cl_device_id oclGetMaxFlopsDev(cl_context cxGPUContext)
{...
    // CL_DEVICE_MAX_COMPUTE_UNITS
    cl_uint compute_units;
```

```
    clGetDeviceInfo(cdDevices[current_device],
    CL_DEVICE_MAX_COMPUTE_UNITS, sizeof(compute_units),
    &compute_units, NULL);
    // CL_DEVICE_MAX_CLOCK_FREQUENCY
    cl_uint clock_frequency;
    clGetDeviceInfo(cdDevices[current_device],
    CL_DEVICE_MAX_CLOCK_FREQUENCY, sizeof(clock_frequency),
    &clock_frequency, NULL);
     max_flops = compute_units * clock_frequency;
...}
```

Так, максимальная производительность GPU равна произведению количества параллельных вычислительных ядер на максимальную тактовую частоту устройства, формула (1).

$$max_flops = compute_units * clock_frequency. \quad (1)$$

где $compute_units$ — количество параллельных ядер, $clock_frequency$ — максимальная тактовая частота. Ниже в таблице приведены основные параметры GPU разных производителей и разных поколений, полученные программно.

Табл. 1. Основные параметры GPU

Параметр	Значение				
CL_DEVICE_NAME	Tesla M2050	GeForce GTX 480	GeForce GTX 260	Cayman	ATI RV770
CL_DEVICE_MAX _COMPUTE_UNITS	14	15	27	24	10
CL_DEVICE_MAX_ CLOCK_FREQUENCY	1147 MHz	1401 MHz	1242 MHz	830 MHz	0 MHz

Как видно из таблицы, значения $clock_frequency$ для ATI RV770 равно 0. Согласно формуле (1) max_flops=0, что не соответствует действительности. Заметим, что параллельные ядра состоят из разного количества унифицированных процессоров в зависимости от поколения GPU (чем новее GPU, тем больше унифицированных процессоров может быть в одном параллельном ядре). Как показано на рис. 1–2, более новый GPU от NVIDIA Tesla M2050 работает быстрее, чем GPU раннего выпуска GeForce GTX 260, особенно с большими объемами данных.

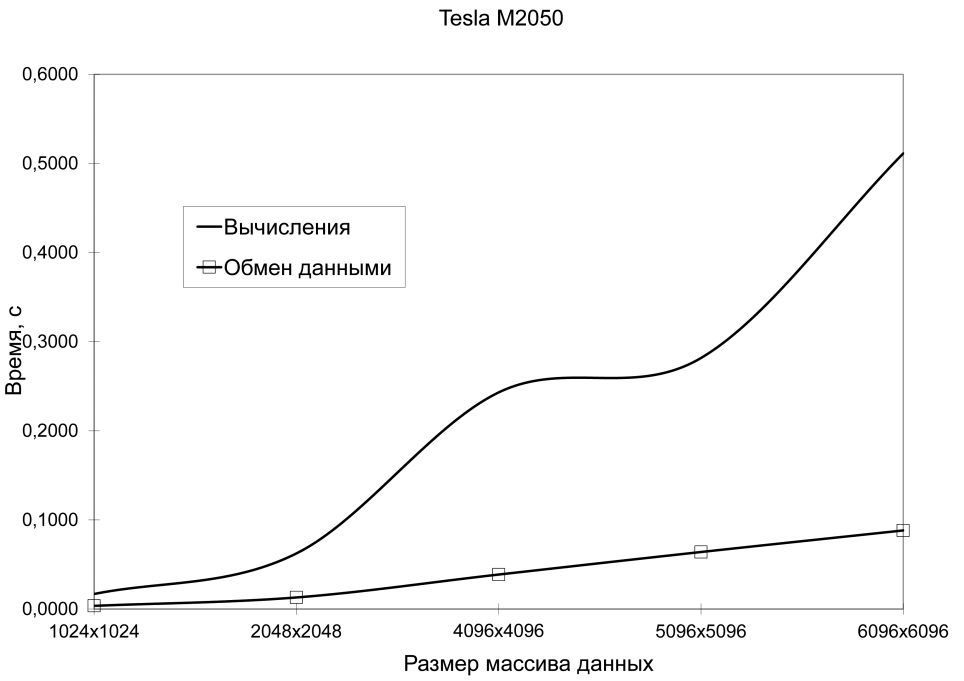


Рис. 1. Зависимость времени вычислений и времени обмена данными от объема данных для GPU NVIDIA Tesla M2050

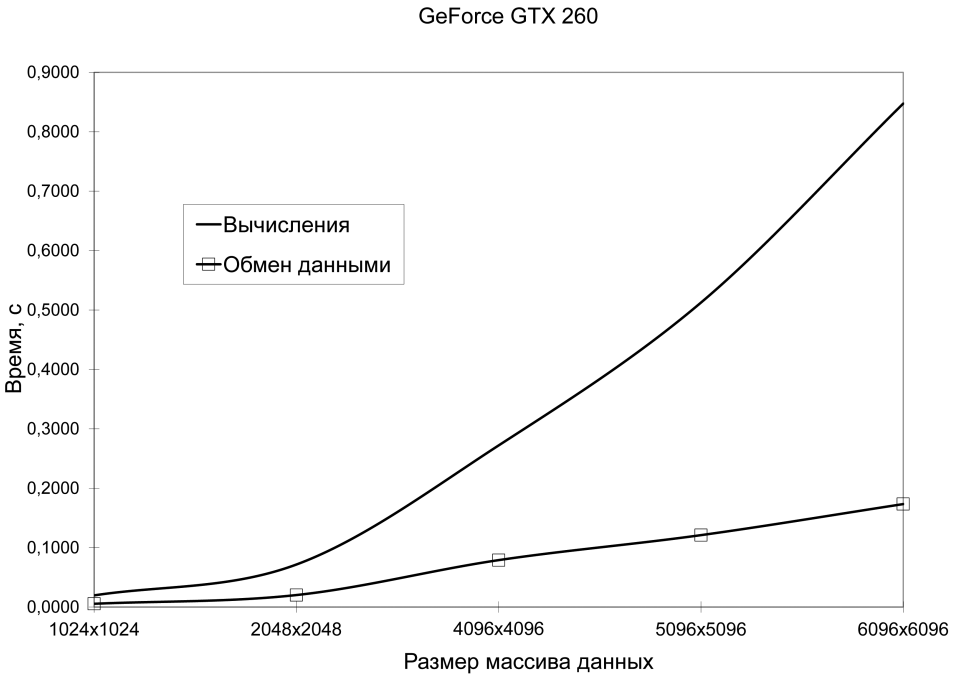


Рис. 2. Зависимость времени вычислений и времени обмена данными от объема данных для GPU NVIDIA GeForce 260

Но, по данным таблицы, $compute_units$ для Tesla M2050 меньше, чем для GeForce GTX 260 и $clock_frequency$ для Tesla M2050 тоже меньше, чем для GeForce GTX 260. Это противоречит результатам экспериментов, приведенных на рис. 1–2. Похожая ситуация и с GPU Cayman, что входит в состав графической карты последнего поколения AMD Radeon HD 6990. Формула (1) при решении задач на кластере с GPU даст не оптимальный результат при выборе GPU.

При одновременном использовании GPU различных архитектур возникает еще одна проблема — использование особенностей "векторных" и "скалярных" GPU для получения оптимальных вычислений. На рис. 3 показано, что при запуске программы OpenCL на CPU время выполнения программы при увеличении длинны вектора данных уменьшается.

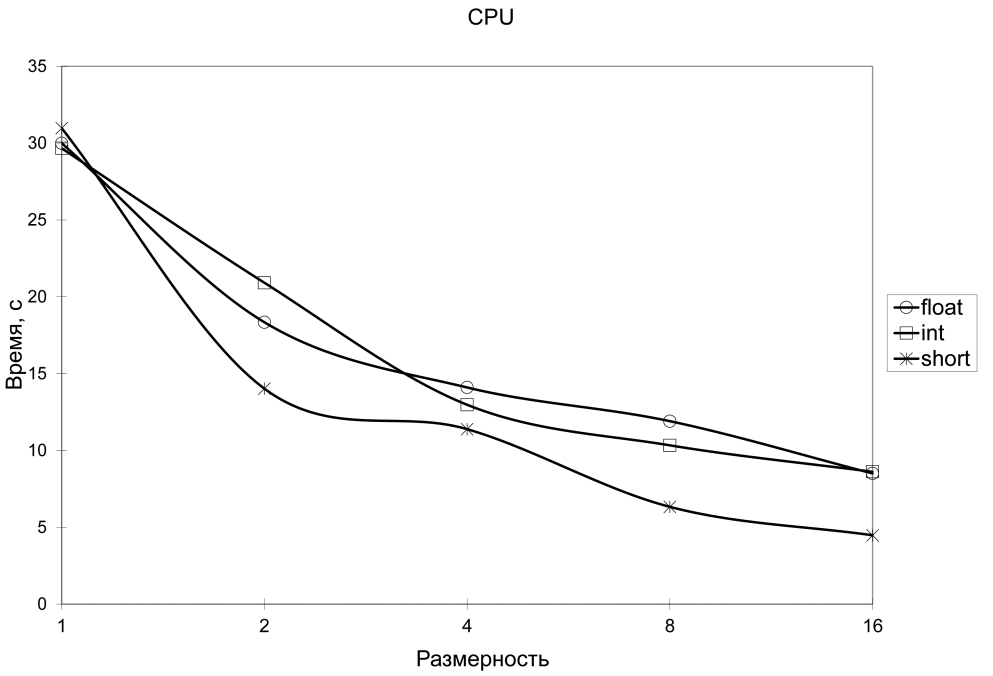


Рис. 3. Зависимость времени вычислений от типа данных и длинны вектора данных на CPU

На рис. 4–6 показано, что для GPU наилучший результат работы программы достигается для определенных длин векторов. При этом зависимость времени работы программы от длинны вектора данных нелинейная.

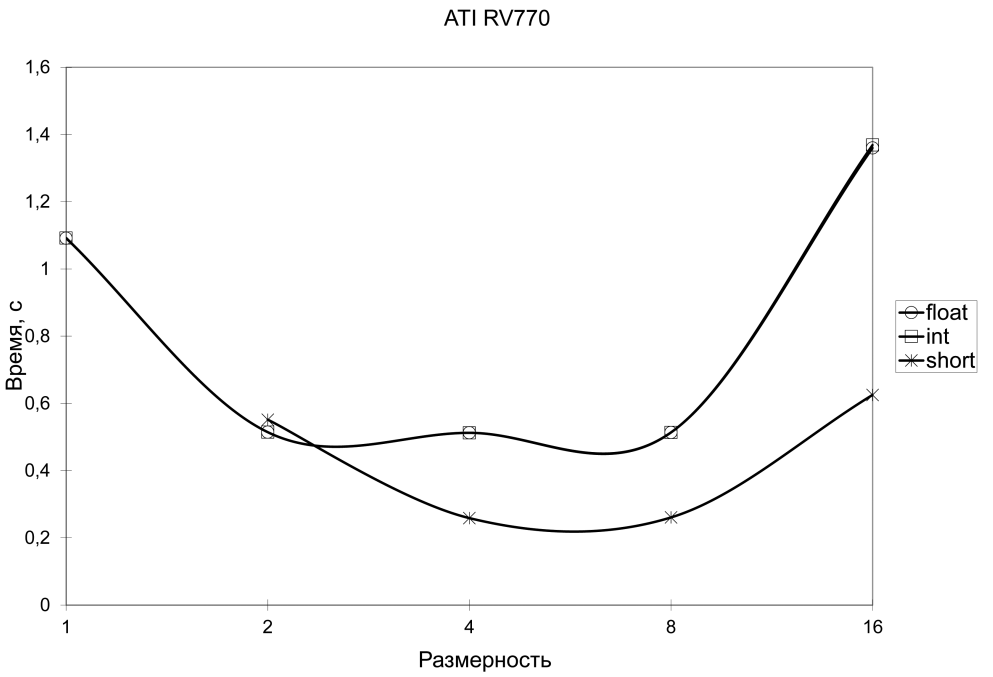


Рис. 4. Зависимость времени вычислений от типа данных и длинны вектора данных на ATI RV770

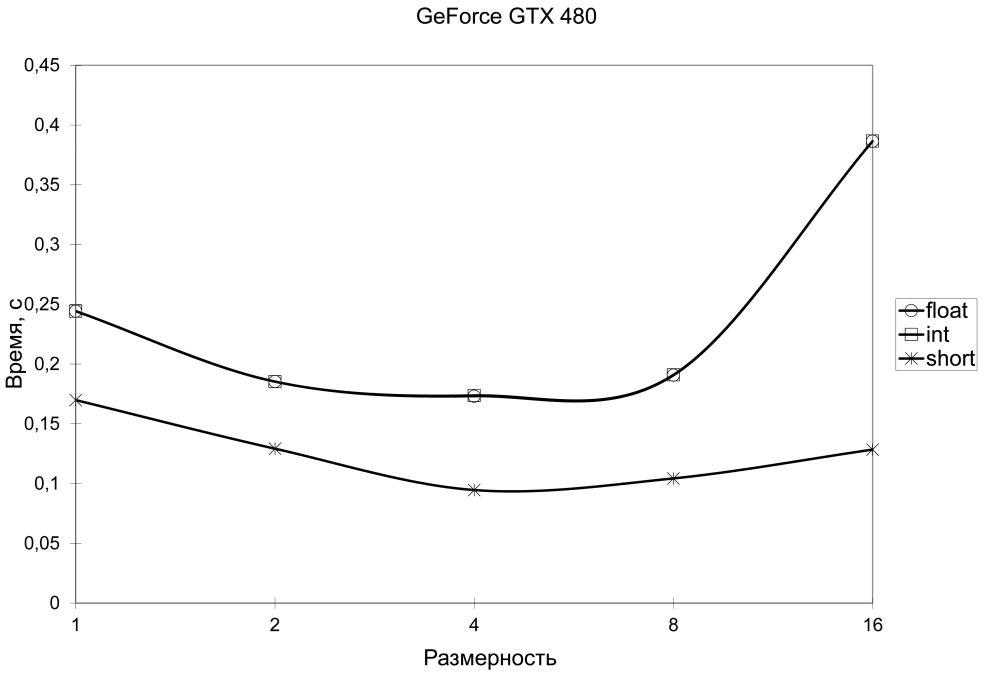


Рис. 5. Зависимость времени вычислений от типа данных и длинны вектора данных на GeForce 480

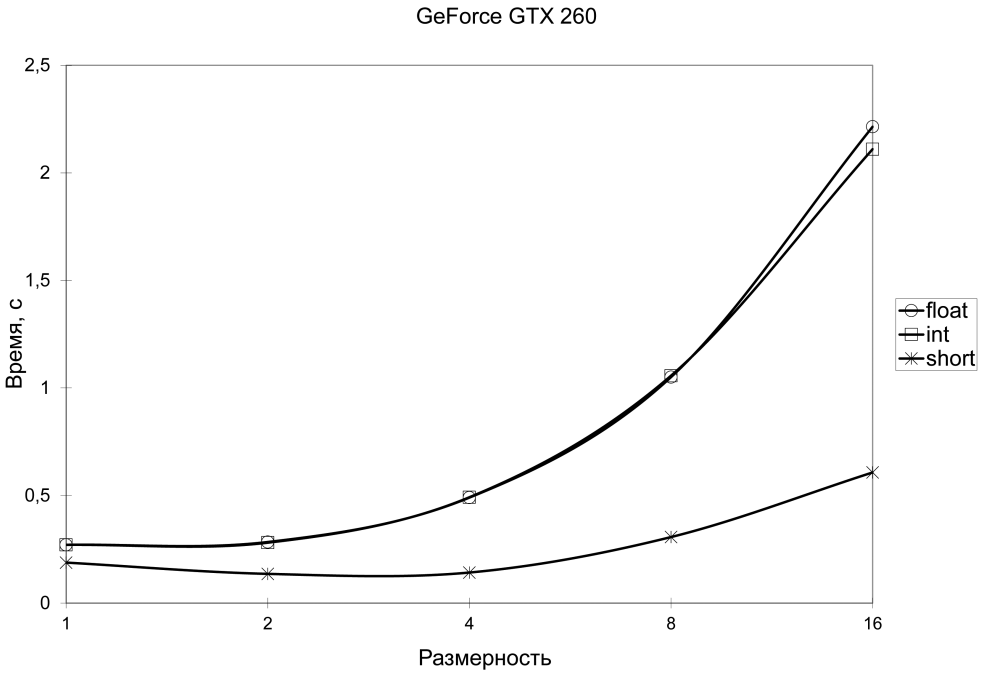


Рис. 6. Зависимость времени вычислений от типа данных и длинны вектора данных на GeForce 260

Соответственно программа на OpenCL без поддержки векторных операций может дать не оптимальное время вычислений на тех GPU, которые поддерживают векторные операции. Если программа на OpenCL рассчитана на поддержку векторных операций, то на некоторых GPU (рис. 4) при определенных длинах векторов можем потерять в производительности (получим неоптимальные вычисления). Разрабатывать и поддерживать несколько вариантов программ-ядер на OpenCL возможно лишь в том случае, когда программа небольшая. В больших программах это очень трудоемкая задача. Для решения этой проблемы авторами было предложено использование шаблонов функций C++ для универсального использования языка программирования OpenCL для "векторных" и "скалярных" GPU. Суть метода получения универсальности программы OpenCL на "векторных" и "скалярных" GPU [8] состоит в следующем:

- определить типы данных, которые поддерживает GPU;
- определить длинну вектора данных, для которого время вычислений будет минимальным;
- программно (автоматически) настройка программы-ядра OpenCL на работу с оптимальной длинной вектора для конкретного GPU;
- вызвать нужную шаблонную функцию для хостовой программы.

2. Алгоритм оптимизации запуска программ-ядер OpenCL на нескольких GPU

Для оптимального выбора GPU предложен алгоритм, который представлен на рис. 7.

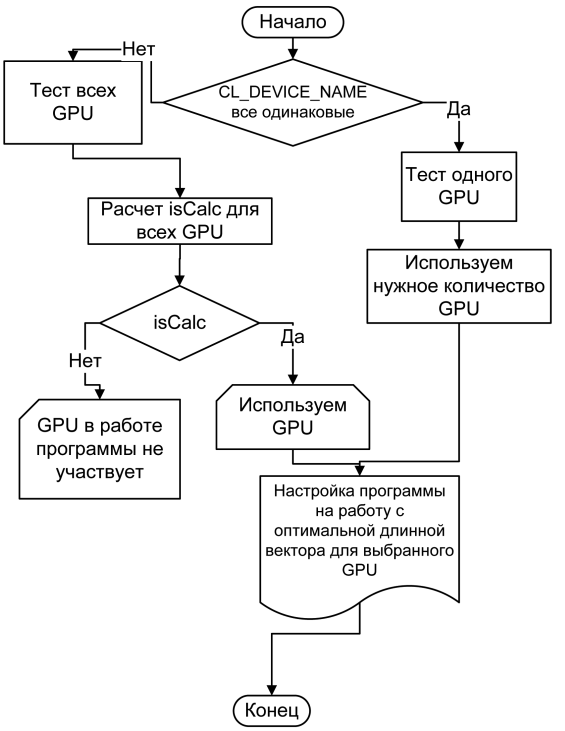


Рис. 7. Алгоритм выбора GPU для программ-ядер на OpenCL и универсализация программ-ядер для работы с векторными и скалярными GPU

Основой алгоритма является набор вычислительных тестов различной сложности, которые необходимо выполнить на GPU. Тесты содержат основные операции, используемые в программе. Время работы теста должно быть существенно меньше времени работы всей программы. Например, тест, который выполняет основные операции с двумя массивами и сохраняет результат в третьем, в случае размерности массивов 4096×4096 выполняется на GPU GeForce GTX 480 0.0157 с, а на GPU GeForce GTX 260 — 0.0369 с. В задачах моделирования сейсмограмм таких операций выполняется десятки тысяч. Поэтому, когда программа-ядро будет выполняться на GPU GeForce GTX 260, а не на GeForce GTX 480, проигрыш во времени будет значительным. Также целесообразно выполнить тест передачи данных определенного объема на GPU, так как это время существенно выше, чем при работе с оперативной памятью компьютера. Для GeForce GTX 260 время загрузки тестового массива 4096×4096 — 0.034229 с, а для GTX 480 — 0.022935 с. Это время является незначительным, если таких операций мало — перед началом вычислений данные загружаются на GPU, а после

окончания всех длительных вычислений результаты с GPU загружаются в оперативную память хоста. Но, если на протяжении длительной работы программы через несколько итераций вычислений происходит обмен данными между GPU и хостом, то суммарное время обмена данными будет существенным и его необходимо учитывать при разработке и проведении тестов.

По предложенной формуле (2) определяется целесообразность использования конкретного GPU из всего набора доступных GPU для запуска на нем программы-ядра на OpenCL и решения части или всей задачи.

$$isCalc = \begin{cases} true, & \text{если } P_i <= c * max(P_{1..n}); \\ false, & \text{если } P_i > c * max(P_{1..n}). \end{cases} . \tag{2}$$

где P_i — общее время выполнения теста на i-м GPU, c-коэффициент порога $0, ..., 1$, зависит от сложности задачи, $i = 1, ..., n$, n — количество доступных GPU на кластере или грид-узле.

Время P_i — можно представить в виде суммы времени работы программы-ядра и времени операций обмена данными между хостовой программой и программой-ядром, формула (3).

$$P_i = k_1 * T_i + k_2 * T_i'. \tag{3}$$

где T_i — время выполнения одной итерации теста на i-м GPU, k_1 — количество итераций в одном тесте, T_i' — время обмена данными с i-м GPU, k_2 — количество операций обмена данными между хостом и программой-ядром в одном тесте.

3. Выводы

При запуске задач на гетерогенном GPU кластере, архитектура которого заранее не известна, как это зачастую бывает в случае с вычислениями в грид-среде, предложенный метод дает возможность:

- провести быстрое тестирование производительности работы GPU, при этом учесть особенности работы GPU разной архитектуры и разных поколений, применительно к особенностям решаемой задачи;
- оптимально выбрать GPU, исключив из набора менее производительные GPU для конкретной задачи;
- использовать преимущества векторных операций на GPU, поддерживающих векторные операции;
- минимизировать проблемы, которые могут возникнуть, при запуске "векторной" программы на GPU, которые не поддерживают векторные операции;
- и, как результат, выполнить программу за минимально возможное время для конкретного кластера или грид-узла.

Литература

1. Unstructured grid applications on GPU: performance analysis and improvement / [Lizandro Solano-Quinde, Zhi Jian Wang, Brett Bode, Arun K. Somani] — In Proceedings of the Fourth Workshop on General Purpose Processing on Graphics Processing Units (GPGPU-4), ACM, New York, NY, USA, Article 13, 8 pages.
2. Corrigan A. Running Unstructured Grid Based CFD Solvers on Modern Graphics Hardware / Corrigan A., Camelli F., Rainald L. — 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, Jun, 2009.
3. Український національний грід / [Електронний ресурс] : http://ung.in.ua
4. Chris Jang. OpenCL™ Optimization Case Study: GATLAS — Designing Kernels with Auto-Tuning [Електронний ресурс] : http://golem5.org/gatlas/CaseStudyGATLAS.htm / Chris Jang.
5. Marcus Hinders. GPU Computations in Heterogeneous Grid Environments, Joint Research Report [Електронний ресурс] : http://www.techila.fi/technology/technology-docs / Marcus Hinders.
6. OpenCL — The open standard for parallel programming of heterogeneous systems [Електронний ресурс] : http://www.khronos.org/opencl/.
7. Применение CUDA для быстрого синтеза 3D-сейсмограмм по 2.5D-модели /[Мармалевский Н. Я., Мерщий В. В., Роганов Ю. В., Тульчинский В. Г., Ющенко Р. А.] // Вычисления в геологии. — 2011. — № 3. — С. 8–12.
8. Лавренюк А. М. Оптимізація обчислень за допомогою універсального використання програми OPENCL з "векторними" та "скалярними" GPU / А. М. Лавренюк, С. І. Лавренюк // Компьютерная математика. — 2012. — Вып. 1. — С. 102–110.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.
Физико-технический институт, Национальный технический университет Украины "КПИ", пр. Победы, 37, Киев, 03056, Украина.

Поступила 01.02.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, № 2 (112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ ТА ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ШРЬОДІНГЕРА

О. О. Покутний

Резюме. Отримано необхідну та достатню умови існування обмежених на всій осі розв'язків слабконелінійного рівняння Шрьодінгера в припущенні, що однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях. Використовуючи узагальнено-обернений оператор Гріна побудовано обмежені розв'язки.

Вступ

Багато робіт присвячено дослідженню взаємозв'язків між поняттям експоненціальної дихотомії на всій осі та обмеженими розв'язками відповідного диференціального рівняння як в скінченно- так і нескінченновимірних просторах. Це питання має свою історію, якій вже понад 50 років. Серед рівнянь, що мають таку властивість, останнім часом все більш актуальними стають диференціальні рівняння, що є експоненціально-дихотомічними на півосях. Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь, що є експоненціально-дихотомічними на півосях в просторах Банаха з обмеженим оператором в лінійній частині розглядалися в [1]. Для лінійних й слабконелінійних диференціальних рівнянь в просторах Банаха з необмеженим оператором в лінійній частині така теорія побудована в [2]. Дана робота присвячена отриманню необхідних та достатніх умов існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійного й слабконелінійного рівняння Шрьодінгера в просторі Гільберта за умов, коли відповідне однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях.

1. Лінійний випадок. Постановка задачі

Розглянемо таке диференціальне рівняння Шрьодінгера [3]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{1}$$

в просторі Гільберта H, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0^*$ необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset H$; відображення $t \to V(t)$ — сильно неперервне. Визначимо як в [3] операторнозначну функцію

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0}V(t)e^{-itH_0}.$$

В цьому випадку для $\tilde{V}(t)$ справедливе представлення Дайсона [3, с.311] і можна визначити пропагатор $\tilde{U}(t,s)$. Якщо $U(t,s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}$, то $\psi_s(t) = U(t,s)\psi$ — слабкий розв'язок (1) з умовою $\psi_s(s) = \psi$ в тому сенсі, що для довільного $\eta \in D(H_0)$ функція $(\eta, \psi_s(t))$ є диференційовною й

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t)) = -i(H_0\eta, \psi_s(t)) - i(V(t)\eta, \psi_s(t)),\ t \in J.$$

Дана частина присвячена отриманню необхідних й достатніх умов існування слабких обмежених розв'язків неоднорідного рівняння (1) з

$f \in BC(J,H) = \{f : J \to H$; функція f неперервна та обмежена$\}$. Тут обмеженість розуміється в тому сенсі, що $|||f||| = sup_{t\in J}||f(t)|| < \infty$. Для простоти викладення будемо припускати, що D щільна в H. Оператор $U(t,s)$ лінійний обмежений оператор для фіксованих t, s й через те що множина D щільна в H, то його можна розширити на весь простір H за неперервністю, що й припускається в подальшому. Розширення еволюційного оператора на весь простір позначатиметься таким же чином.

1.2. Обмежені розв'язки.

В подальшому ми будемо використовувати поняття експоненціальної дихотомії в сенсі [4]. Окремий інтерес представляє аналіз експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_s^- = (-\infty, s]$ та $\mathbb{R}_s^+ = [s; \infty)$. В цьому випадку проекторнозначні функції визначені на півосях будуть позначатися $P_-(t)$, для всіх $t \geq s$, та $P_+(t)$, для всіх $t < s$, з константами M_1, α_1 та M_2, α_2, відповідно (α_1, α_2 — коефіцієнти ентропії чи Ляпунова на півосях). Більшість тверджень, представлених нижче, можна отримати таким же чином як в [2]. Основний результат цієї частини можна подати у наступному вигляді.

Лема 1. *Нехай $\{U(t,s), t \geq s \in \mathbb{R}\}$ родина сильно неперервних еволюційних операторів асоційованих з рівнянням (1). Припустимо, що виконано умови :*

1. Оператор $U(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$, відповідно.

2. Оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ має псевдооборнений оператор за Муром-Пенроузом.

Тоді справедливі такі твердження.

1. Існують слабкі розв'язки рівняння (1) обмежені на всій осі тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, H)$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{2}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)U(0,t)$.

2. При виконанні умови (2), слабкі розв'язки (1) обмежені на всій осі мають вигляд

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0)\forall c \in H, \tag{3}$$

де

$$(G[f])(t,s)=\begin{cases}\int_s^t U(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau-\int_t^{+\infty}U(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+\\ +U(t,s)P_+(s)D^+[\int_s^{\infty}U(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+\\ +\int_{-\infty}^s U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau],\ \ t\geq s,\\ \int_{-\infty}^t U(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau-\int_t^s U(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau+\\ +U(t,s)(I-P_-(s))D^+[\int_s^{\infty}U(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+\\ +\int_{-\infty}^s U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau],\ \ s\geq t\end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі відшукання обмежених на всій осі розв'язків

$$(G[f])(0+,0)-(G[f])(0-,0)=-\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0)=f(t),\quad t\in\mathbb{R}$$

та

$$(\mathcal{L}x)(t)=\frac{dx}{dt}-iH(t)x(t),$$

D^+ *— псевдооберенений за Муром-Пенроузом оператор до оператора* D*;* $\mathcal{P}_{N(D)}=I-D^+D$ *та* $\mathcal{P}_{N(D^*)}=I-DD^+$ *проектори* [5] *на ядро та ко-ядро оператора* D*.*

Зауваження 1. *Аналогічна теорема буде справджуватись у тому випадку, коли еволюційні оператори* $U(t,s)$ *допускають експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_s^+$ *та* $\mathbb{R}_s^-$*.*

Далі ми покажемо, що умову 2 теореми 1 можна прибрати й рівняння (1) буде завжди розв'язним в певному сенсі. З доведення теореми 1 (див. теорему 1 з [2]) випливає, що рівняння (1) має обмежені розв'язки тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$D\xi=g, \tag{4}$$

$$g=\int_{-\infty}^0 U(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^{+\infty}U(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau$$

є розв'язним та їх кількість залежить від розмірності $N(D)$.

Будемо виділяти три типи розв'язків.

1)Класичні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор D нормально-розв'язний, тобто $R(D)=\overline{R(D)}$. Тоді [5], як відомо $g\in R(D)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(D^*)}g=0$. В цьому випадку існує псевдооберенений за Муром-Пенроузом оператор D^+ та множина розв'язків рівняння (4) може бути представлена у вигляді [5]

$\xi=D^+g+\mathcal{P}_{N(D)}c,\forall c\in H.$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(D)\neq\overline{R(D)}$. Покажемо, що оператор D може бути розширеним до оператора $\overline{D}$ (що діє вже у віповідному розширеному просторі) таким чином, що $R(\overline{D})$ замкнена.

Через те що оператор D обмежений, то справедливі такі розклади H в ортогональні суми

$$H = N(D) \oplus X, \quad H = \overline{R(D)} \oplus Y$$

з $X = N(D)^{\perp}$ та $Y = \overline{R(D)}^{\perp}$. Нехай $E = H/N(D)$ фактор простір простору H за ядром $N(D)$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(D)}}$ — ортопроектор, що проектує весь простір на $\overline{R(D)}$. Тоді оператор

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_{\overline{R(D)}} D j^{-1} p : X \to R(D) \subset \overline{R(D)}$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним (тут $p : X \to E$ неперервна бієкція, а проекція $j : H \to E$ є такою, що трійка (H, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)}H$). У цьому випадку [6, с.26,29] ми можемо визначити сильний узагальнений розв'язок рівняння

$$\mathcal{D}\xi = g, \xi \in X.$$

Поповнимо простір X за нормою $||\xi||_{\overline{X}} = ||\mathcal{D}\xi||_F$, де $F = \overline{R(D)}$ [6]. Тоді розширений оператор

$$\overline{\mathcal{D}} : \overline{X} \to \overline{R(D)}, X \subset \overline{X}$$

буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(D)}$, а оператор $\overline{D} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H} \to H$ буде нормально-розв'язним (тут $\overline{H} = N(D) \oplus \overline{X}, R(\overline{D}) = \overline{R(D)}$). В силу конструкції сильного узагальненого розв'язку [6] рівняння

$$\overline{D}\ \overline{\xi} = g$$

має єдиний розв'язок, який позначатимемо $\overline{D}^{+} g$ й називатимемо сильним узагальненим розв'язком (4). Тоді множина всіх розв'язків рівняння (4) матиме вигляд

$$\xi = \overline{D}^{+} g + \mathcal{P}_{N(D)} c, \forall c \in H.$$

3) Узагальнені псевдорозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $g \notin \overline{R(D)}$. Ця умова для елемента g рівносильна умові $\mathcal{P}_{N(D^*)} g \neq 0$. У цьому випадку існують елементи з $\overline{H}$, що мінімізують норму $||\overline{D}\xi - g||_{\overline{H}}$ для $\xi \in \overline{H}$,

$$\xi = \overline{D}^{+} g + \mathcal{P}_{N(D)} c, \forall c \in H.$$

Ці елементи будемо називати узагальненими псевдорозв'язками рівняння (4).

Зауваження 2. *Слід підкреслити, що в кожному з розглянутих випадків вигляд обмежених розв'язків (4) не змінюється. Якщо позначити через* $\overline{(G[f])(t,0)}$ *відповідне розширення узагальненого оператора Гріна* $(G[f])(t,0)$*, то в лемі 1 розв'язки рівняння (1) будуть існувати завжди в одному з сенсів 1)–3) й при цьому матимуть вигляд*

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{(G[f])(t,0)} \quad \forall c \in H$$

для кожного з випадків.

Зауваження 3. *Поєднання результатів теореми 1 та конструкцій 1)–3) говорить про те, що з умов експоненціальної дихотомії на півосях випливає існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (1).*

2. Основний результат (нелінійний випадок).

2.1. Постановка задачі та основний результат.

В просторі Гільберта H, розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon Z(\varphi, t, \varepsilon) + f(t). \tag{5}$$

Ми шукаємо обмежений розв'язок $\varphi(t, \varepsilon)$ рівняння (5), що обертається в один з розв'язків породжуючого рівняння (1) при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови на оператор-функцію $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ будемо накладати обмеження за сукупністю змінних в околі породжуючого розв'язку $\varphi_0(t)$

$$Z(\cdot, \cdot, \cdot) \in C[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times BC(\mathbb{R}, H) \times C[0, \varepsilon_0],$$

де q — деяка додатня стала.

Покажемо, що ця проблема може бути розв'язана з використанням операторного рівняння для породжуючих констант

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(\varphi_0(t, c), t, 0)dt = 0. \tag{6}$$

Теорема 2 *(необхідна умова). Припустимо, що рівняння (1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно, а нелінійне рівняння (5) має обмежений розв'язок $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, який обертається в один із розв'язків породжуючого рівняння (1) з константою $c = c^0$, $\varphi(t, 0) = \varphi_0(t, c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді ця константа повинна задовольняти рівняння для породжуючих констант (6).*

Доведення цієї теореми проводиться так як в [2, Теорема 1].

Для знаходження достатньої умови існування обмежених розв'язків (1) будемо додатково припускати, що оператор-функція $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ строго диференційовна в околі породжуючого розв'язку ($Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \le q]$).

Ця проблема може бути розв'язана з використанням оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t, 0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : H \to H,$$

де $A_1(t) = Z^1(v, t, \varepsilon)|_{v=\varphi_0, \varepsilon=0}$ (похідна в сенсі Фреше).

Теорема 3 *(достатня умова). Нехай рівняння (1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$, відповідно. Припустимо, що оператор B_0 задовольняє умови :*

1. *B_0 – має псевдооберенний оператор за Муром-Пенроузом*;
2. $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді, для довільного елемента $c = c^0 \in H$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (6), існує обмежений на всій осі розв'язок. Цей розв'язок може бути знайдений за допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0 + y_k, \tau, \varepsilon))](t,0),$$

$$c_k = -B_0^+ \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)y_k(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \qquad \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,0,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,\varepsilon).$$

2.2. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами.

Спочатку сформулюємо таке твердження.

Наслідок. *Нехай функціонал $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта H, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (6). Якщо $F^1(c)$ має обмежений обернений оператор, то рівняння (5) має єдиний обмежений розв'язок на всій осі для кожного c^0.*

Зауваження 4. *Якщо припущення наслідка виконуються, то оператори B_0 та $F^{(1)}(c^0)$ будуть збігатися. Через те що оператор $F^{(1)}(c)$ оборотний, то умова 1 теореми 3 для оператора B_0 виконується автоматично. В цьому випадку, рівняння (5) має єдиний обмежений розв'язок для кожного $c^0 \in H$. Отже, умова оборотності для оператора $F^1(c)$ пов'язує необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c^0 рівняння для породжуючих амплітуд* [5].

Таким чином ми отримали модифікацію метода Ляпунова-Шмідта. Слід також підкреслити, що теореми 2 та 3 дають нам умови наявності можливої складної поведінки (5) [7].

Зауваження 5. *Застосовуючи розвинену вищу теорію для еволюційних рівнянь, що мають властивість експоненціальної дихотомії на півосях, можна вивчати крайові задачі.*

Сформулюємо відповідну постановку задачі. В просторі Гільберта H розглядається така крайова задача

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon Z(\varphi,t,\varepsilon) + f(t), \tag{7}$$

$$Q\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(t),t,\varepsilon). \tag{8}$$

Для рівняння (7) умови, які накладаються на вектор-функцію $f(t)$ та оператор-функцію $Z(\varphi(t),t,\varepsilon)$ такі ж самі, як і для рівняння (5). Оператор Q є

лінійним та обмеженим, що діє з простору Гільберта H в простір Гільберта H_1, α — довільний елемент простору H_1, оператор-функція $J(\varphi(t), t, \varepsilon)$ задовльняє аналогічним умовам, що й $Z(\varphi(t), t, \varepsilon)$. Для такої задачі можна отримати необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків, що є аналогічними до встановлених вище.

Література

1. Boichuk A.A., Pokutnyi O.A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line. — Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12–15 June 2012, Athens Greece. — P. 81–89.
2. Pokutnyi A.A. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in a Banach space with unbounded operator in the linear part. Differential equations (in Russian) — 2012 — V. 48, № 6 — P. 803–813.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики : в 4 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978. — 395 с.
4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
5. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. — VSP, Utrecht-Boston, 2004. — 317 p.
6. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Петунин Ю.И., Семенов В.В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.
7. Chueshov I.D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. Acta, 2002. — 416 p.
8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
9. Функциональный анализ. СМБ / под ред. С.Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
10. B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi. Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory. Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 928587, 12 pages, http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/.
11. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

Лабораторія крайових задач теорії диференціальних рівнянь, Інститут математики, вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01601, Україна.

Надійшла 29.09.2012

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, № 2 (112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. В. Семенов[1]

Резюме. Предложен параллельный алгоритм резольвентной декомпозиции для решения операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Доказана теорема о слабой в среднем сходимости алгоритма.

Ключевые слова: операторное влючение, максимальный монотонный оператор, резольвента, декомпозиция, среднее по Чезаро, слабая сходимость.

При решении сложных задач моделирования и оптимизации важное значение имеют различные декомпозиционные подходы, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры [1, 2, 3]. Одной из актуальных проблем, связанных с необходимостью привлечения идей декомпозиции, является эффективное решение сетевых задач выделения ресурсов (Network Resource Allocation) [4].

В работе предложена и изучена параллельная схема декомпозиции операторного включения с оператором, представимым в виде конечной суммы "простых" операторов. Предложенный ниже алгоритм 1 — результат наивного "распараллеливания" метода из [5]. Работа непосредственно примыкает к ранее опубликованным статьям [6, 7, 8]. Все необходимые сведения из нелинейного анализа приведены в [9, 10].

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим операторное включение

$$0 \in A_1x + A_2x + \ldots + A_mx, \tag{1}$$

где $A_i : H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор.

Для оператора $A : H \to 2^H$ будем использовать следующие обозначения: $D(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$, $R(A) = \{y \in H : \exists x \in D(A)\ y \in Ax\}$, $A^{-1}0 = \{x \in H : 0 \in Ax\}$ $(0 \in R(A) \Leftrightarrow A^{-1}0 \neq \emptyset)$.

Напомним, что резольвентой оператора $A : H \to 2^H$ называют оператор $J_A = (I+A)^{-1} : H \to 2^H$. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора A резольвента J_A является однозначным, всюду заданным

[1]Исследование выполнено при финансовой помощи ГФФИ Украины (проект GP/F49/061) и Верховной Рады Украины (Именная стипендия ВР Украины для молодых ученых в 2013 году).

и твердо нерастягивающим (firmly nonexpansive) оператором, а множество $A^{-1}0$ — замкнутым и выпуклым (возможно пустым) [10].

Для решения включения (1) используем декомпозиционную схему следующего вида.

Алгоритм 1.

1) *Задаем* $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$, $x_1 \in H$; $n := 1$.
2) *Находим элементы:*

$$x_{i,n} = J_{\lambda_n A_i} x_n, \;\; i = \overline{1,m}.$$

3) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{m} x_{1,n} + \frac{1}{m} x_{2,n} + ... + \frac{1}{m} x_{m,n},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Замечание 1. В работе [5] была изучена сходимость последовательной схемы $x_{n+1} = (J_{\lambda_n A_1} \circ J_{\lambda_n A_2} \circ ... \circ J_{\lambda_n A_m})\, x_n$.

Замечание 2. Варианты алгоритма 1 изучены в работах [1, 4, 6, 7, 8, 11].

Замечание 3. Для задачи выпуклого программирования

$$f(x) \to \min, \;\; x \in \bigcap_{i=1}^{m-1} C_i,$$

алгоритм 1 приобретает вид

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{m} \operatorname{prox}_{\lambda_n f} + \frac{1}{m} P_{C_1} + ... + \frac{1}{m} P_{C_{m-1}} \right) x_n,$$

где prox_g — проксимальный оператор Моро, ассоциированный с полунепрерывной снизу собственной выпуклой функцией g, P_C — оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество C.

При доказательстве основного результата будем использовать следующие известные утверждения.

Лемма 1 ([9])**.** *Пусть* $A : H \to 2^H$ *— максимальный монотонный оператор,* x, $u \in H$. *Тогда*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \;\; \forall y \in D(A) \; \forall v \in Ay \;\; \Rightarrow \;\; x \in D(A), \; u \in Ax.$$

Лемма 2. *Пусть неотрицательные последовательности* (a_n), (b_n), *таковы, что* $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. *Тогда существует* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Лемма 3 ([5])**.** *Пусть* H *— гильбертово пространство;* $F \subseteq H$ *— непустое замкнутое выпуклое множество;* (x_n) *— последовательность элементов* H *и* $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, *где* (λ_n) *— последовательность положительных чисел, такая, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. *Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности* $(\bar{x}_{n_k})$ *лежит в* F; *2) для произвольного* $y \in F$ *существует* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. *Тогда последовательность* $(\bar{x}_n)$ *слабо сходится к некоторому элементу* $\bar{x} \in F$.

Асимптотическое поведение последовательности элементов

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k},$$

где (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность, описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $A_i : H \to 2^H$ — максимальные монотонные операторы, $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$ — максимальный монотонный оператор. Предположим, что последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяет условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty\,.$$

Тогда справедливы утверждения:

1) *если $0 \in R\,(A_1 + \ldots + A_m)$, то последовательность средних по Чезаро $(\bar{x}_n)$ слабо сходится к решению включения (1);*
2) *если $0 \notin R\,(A_1 + \ldots + A_m)$, то $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку $x_{i,n} = J_{\lambda_n A_i} x_n$, то $\frac{x_n - x_{i,n}}{\lambda_n} = u_{i,n} \in A_i x_{i,n}$. Для произвольного элемента $x \in D\,(A)$ и $u_i \in A_i x$ благодаря монотонности оператора A_i имеем

$$\left(\frac{x_n - x_{i,n}}{\lambda_n} - u_i, x_{i,n} - x\right) = (u_{i,n} - u_i, x_{i,n} - x) \geq 0, \ \ 1 \leq i \leq m\,.$$

Откуда

$$(x_n - x_{i,n}, x_{i,n} - x) \geq \lambda_n\,(u_i, x_{i,n} - x)\,, \ \ 1 \leq i \leq m\,.$$

Учитывая элементарное алгебраическое тождество

$$2\,(x_n - x_{i,n}, x_{i,n} - x) = \|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 - \|x_n - x_{i,n}\|^2$$

последние неравенства можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 &\geq \|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n\,(u_i, x_{i,n} - x) = \\ &= \|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n\,(u_i, x_{i,n} - x_n) + 2\lambda_n\,(u_i, x_n - x)\,, \ \ 1 \leq i \leq m\,. \quad (2)\end{aligned}$$

Из (2) следует

$$\|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 \geq -\lambda_n^2\,\|u_i\|^2 + 2\lambda_n\,(u_i, x_n - x)\,, \ \ 1 \leq i \leq m\,. \quad (3)$$

Здесь мы использовали оценки

$$\|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n\,(u_i, x_{i,n} - x_n) \geq -\lambda_n^2\,\|u_i\|^2\,, \ \ 1 \leq i \leq m\,.$$

Складывая умноженные на $\frac{1}{m}$ неравенства (3) и учитывая, что

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x\|^2 = \left\|\frac{x_{1,n} - x}{m} + \ldots + \frac{x_{m,n} - x}{m}\right\|^2 \leq \\ \leq \frac{1}{m}\,\|x_{1,n} - x\|^2 + \ldots + \frac{1}{m}\,\|x_{m,n} - x\|^2\,,\end{aligned}$$

получим

$$\|x_n - x\|^2 - \|x_{n+1} - x\|^2 \geq -\frac{\lambda_n^2}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 + \frac{2}{m} (u, \lambda_n x_n - \lambda_n x), \qquad (4)$$

где $u = \sum_{i=1}^{m} u_i \in \sum_{i=1}^{m} A_i x = Ax$. Суммируя (4) по n от 1 до $N \in \mathbb{N}$ получим

$$\|x_1 - x\|^2 - \|x_{N+1} - x\|^2 \geq -\frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 \right) + \\ + \frac{2}{m} \left(u, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x \right). \qquad (5)$$

Поделив (5) на сумму $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n$, приходим к неравенству

$$\frac{\|x_1 - x\|^2 - \|x_{N+1} - x\|^2}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n} \geq -\frac{1}{m} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n} \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 \right) + \\ + \frac{2}{m} (u, \bar{x}_N - x). \qquad (6)$$

Предположим, что последовательность $(\bar{x}_N)$ имеет слабо сходящуюся к некоторому элементу $\bar{x} \in H$ подпоследовательность $(\bar{x}_{N_k})$. Записав (6) для $\bar{x}_{N_k}$ и совершив предельный переход при $k \to \infty$, получим

$$(u, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in D(A) \; \forall u \in Ax,$$

что, в силу максимальной монотонности оператора A, равносильно включению $0 \in A\bar{x}$, то есть, $\bar{x} \in A^{-1}0$.

Предположим, что $0 \in R(A)$. Положим в неравенстве (4) $x = \hat{x} \in A^{-1}0$ и $u = \sum_{i=1}^{m} u_i = 0$, $u_i \in A_i \hat{x}$. Получим

$$\|x_{n+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_n - \hat{x}\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2. \qquad (7)$$

Из неравенства (7), условия суммируемости $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$ и леммы 2 следует существование $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{x}\| \in \mathbb{R}$.

Таким образом, в случае $0 \in R(A)$ для сгенерированной алгоритмом последовательности (x_n) и для множества $F = A^{-1}0$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность $(\bar{x}_n)$ слабо сходится к некоторому элементу $\bar{x} \in A^{-1}0$.

Предположим, что $0 \notin R(A)$. Тогда $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$. Действительно, иначе последовательность $(\bar{x}_n)$ имеет слабую предельную точку $\bar{x} \in H$, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $A^{-1}0$. □

В завершение сформулируем вопрос, навеяный недавними работами [12, 13, 14, 15, 16]. Пусть A_1, A_2 — два максимальных монотонных оператора действующих из пространства H в 2^H, причем оператор $A_1 + A_2$ также

максимальный монотонный. Предположим, что $A^{-1}0 \neq \emptyset$ и рассмотрим задачу поиска элементов $x \in H$ таких, что

$$0 \in N_{A_1^{-1}0}x + A_2x, \tag{8}$$

где N_Cx — нормальный конус к выпуклому множеству $C \subseteq H$ в точке $x \in H$, т. е.

$$N_Cx = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y-x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{если } x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 4. В [13, 14, 15] при определенных условиях доказана сходимость итерационных схем вида $x_{n+1} = J_{(A_1+\alpha_nA_2)}x_n$, $\alpha_n > 0$.

Для решения задачи (8) предлагается декомпозиционная схема с параллельной организацией вычисления резольвент.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$, $\alpha_n \searrow 0$, $x_1 \in H$; $n := 1$.
2) *Находим элементы:*

$$y_n = J_{\lambda_nA_1}x_n, \ \ z_n = J_{\alpha_n\lambda_nA_2}x_n.$$

3) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Замечание 5. Для 2-уровневой задачи выпуклого программирования [15, 16]

$$f_2(x) \to \min, \ \ x \in \operatorname{argmin} f_1,$$

алгоритм 2 приобретает вид

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\operatorname{prox}_{\lambda_nf_1} + \frac{1}{2}\operatorname{prox}_{\alpha_n\lambda_nf_2}\right)x_n.$$

Вопрос: каков характер сходимости алгоритма 2?

Литература

1. Бенсусан А. Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения / А. Бенсусан, Ж.-Л. Лионс, Р. Темам // Методы вычислительной математики. — Новосибирск: Наука, 1975. — С. 144–274.
2. Ермольев Ю. М. О некоторых подходах к развитию параллельных методов оптимизации / Ю. М. Ермольев, В. С. Михалевич, Н. Д. Чепурной // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 3–10.
3. Марчук Г. И. Методы расщепления / Г. И. Марчук. — Москва: Наука, 1988. — 264 с.
4. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation / H. Iiduka // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — 151. — P. 525–540.

5. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces / G. B. Passty // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — 72. — P. 383–390.
6. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization / V. V. Semenov // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
7. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша / С. В. Денисов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 40–48.
8. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
9. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — Москва: Мир, 1988. — 510 с.
10. Bauschke H. H. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces / H. H. Bauschke, P. L. Combettes. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
11. Войтова Т. А. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач / Т. А. Войтова, Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)" — Київ: Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 30–31.
12. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 1 (100). — С. 121–129.
13. Войтова Т. А. Метод решения двухэтапных операторных включений / Т. А. Войтова, В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
14. Денисов С. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність / С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 3 (106). — С. 27-32.
15. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 4 (110). — С. 100–111.
16. Войтова Т. А. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 22.03.2013

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.17

РАСПОЗНАВАНИЕ КОНЕЧНЫХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ КОЛЛЕКТИВОМ АГЕНТОВ

А. В. Стёпкин

Резюме. В работе рассматривается проблема распознавания конечных неориентированных графов тремя агентами. Построен алгоритм распознавания линейной (от числа вершин графа) временной сложности, квадратичной емкостной сложности и коммуникационной сложности равной $O\left(n^2 \cdot log(n)\right)$. Для распознавания два, передвигающиеся по графу, агента используют по две различные краски (всего три краски). Алгоритм основан на методе обхода графа в глубину.

Введение

В настоящее время одним из центральных направлений кибернетики является распознавание неизвестной среды, заданной графом [1, 2, 3]. Данная работа посвящена решению проблемы распознавания несколькими агентами среды, заданной конечным неориентированным графом [4]. Предыдущие попытки решения нашей задачи [5, 6] позволили получить алгоритмы кубической (от числа вершин графа) и квадратической временных сложностей, соответственно, при неизменной квадратической емкостной сложности.

Рассмотрим решение нашей проблемы в случае, когда два агента-исследователя (АИ) A и B одновременно передвигаются по неизвестной среде, заданной конечным неориентированным графом без петель и кратных ребер, и обмениваются необходимой информацией с агентом-экспериментатором (АЭ), который постепенно восстанавливает исследуемый граф. В работе предложен алгоритм построения маршрутов АИ по графу, позволяющих АЭ точно восстановить граф среды. Каждому АИ для работы требуется две краски: у A это r и b, у B — y и b. Алгоритм основан на методе обхода графа в глубину [7], имеет линейную (от числа вершин графа) временную сложность, что на порядок меньше, чем в ранее рассмотренном алгоритме [6], и квадратичную емкостную сложность, которая не изменилась в сравнении с [6]. В работе [6] легко увидеть, что коммуникационная сложность алгоритма равна $O(n^2)$, а в предлагаемом алгоритме эта сложность в $log(n)$ раз больше и равна $O\left(n^2 \cdot log(n)\right)$. То есть, за счет увеличения коммуникационной сложности в $log(n)$ раз, достигнуто снижение временной сложности в n раз. При описании алгоритма используются результаты и обозначения из [5, 6].

1. Основные определения.

Понятия, которые не рассмотрены ниже, общеизвестны и с ними можно ознакомиться, например, в [7, 8].

Пусть $G = (V, E)$ — граф, где V — множество вершин, E — множество ребер (двухэлементных подмножеств (v, u), где $v, u \in V$). Тройку $((v, u), u)$ будем называть инцидентором ребра (v, u) и вершины u. Множество таких троек обозначим I. Множество $L = V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G. Функцией раскраски графа G назовем сюръективное отображение $\mu : L \to \{w, r, y, ry, b\}$, где w интерпретируется как белый цвет, r — красный, y — желтый, ry — красно-желтый, b — черный. Пара (G, μ) называется раскрашенным графом. Последовательность $u_1, u_2, ..., u_k$ попарно смежных вершин называется путем в графе G, а k — длинной пути. При условии $u_1 = u_k$ путь называется циклом. Окрестностью $Q(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v, всех вершин u смежных с v, всех ребер (v, u) и всех инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$. Мощность множеств вершин V и ребер E обозначим через n и m соответственно. Ясно что $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Изоморфизмом графа G и графа H назовем такую биекцию $\varphi : V_G \to V_H$, что $(v, u) \in E_G$ точно тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(u)) \in E_H$. Таким образом, изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов. Мобильные агенты A и B имеют конечную на каждом шаге, но растущую память. В начале работы АИ помещаются в произвольные несовпадающие вершины графа G, которые сразу добавляются АЭ в множество вершин V_H. Агенты передвигаются по графу из вершины v в вершину u по ребру (v, u), могут изменять окраску вершин v, u, ребер (v, u), инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$, а так же записывают в вершинах номера, используя двоичный код. Находясь в вершине v, АИ воспринимает метки всех элементов окрестности $Q(v)$ и номера смежных вершин, на основании этой информации определяет, по какому ребру будет дальше перемещаться, и как будет окрашивать элементы графа. АЭ передает, принимает и идентифицирует сообщения, полученные от АИ, обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования АИ на каждом шаге и, кроме того, строится представление графа G, вначале неизвестного агентам, списками ребер и вершин.

2. Стратегия решения.

Принцип работы рассматриваемого алгоритма основан на методе поиска в глубину и заключается в том, что АИ идут «в глубину», пока это возможно, возвращаются назад, ищут другой путь с еще не посещенными вершинами и не пройденными ребрами.

Рассмотрим подробно режимы работы АИ. При описании режимов, в скобках указываются сообщения, которые отправят агенты-исследователи агенту-экспериментатору, попав в рассматриваемую ситуацию («СООБЩЕНИЕ_АИ_А»; «СООБЩЕНИЕ_АИ_В»).

1. *Обычный режим работы* (ОРР). АИ движется вперед по белым вершинам, окрашивая вершины, соединяющие их ребра и дальние инциденторы в «свой» цвет, записывает в вершины номера, получаемые на каждом шаге от АЭ в двоичном коде («ВПЕРЕД_А»; «ВПЕРЕД_В»). Если нет возможных путей перемещения, то АИ A отправляет АЭ сообщение «ПРИСВ_Amr», на что затрачивает один ход, далее возвращается назад, окрашивая пройденные вершины, ребра и ближние инциденторы в черный цвет («НАЗАД_А»). АИ B не обнаружив возможных путей перемещения сразу начинает движение назад, окрашивая пройденные вершины, ребра и ближние инциденторы в черный цвет («НАЗАД_В»).

Вернувшись в начальную вершину, АИ завершает работу («СТОП_А»; «СТОП_В»).

2. *Режим распознавания обратных ребер* (РРОР). Обратное ребро — это белое ребро, дальняя вершина которого окрашена в «свой» цвет. Если при движении вперед было обнаружено обратное ребро, то АИ сканирует окрестность вершины, в которой находится, считывает номера всех смежных вершин, инцидентных обратным ребрам, и отправляет список номеров АЭ («ОБР_А($x_1, x_2, ..., x_l$)»; «ОБР_В($k_1, k_2, ..., k_l$)», где x_i, k_i — номера, записанные агентами A и B соответственно, в вершинах своего пути).

3. *Режим распознавания перешейков* (РРП). Перешеек — это ребро, соединяющее вершины, принадлежащие областям работы разных агентов. Этот режим немного отличается для каждого из АИ. Если агент A обнаружил в вершине перешейки, и ни в одной из дальних вершин этих перешейков нет агента B (или агент B находится в одной из этих вершин, но уже распознал все, ранее обнаруженные ним, перешейки в эту вершину, или же B выполняет возврат назад по своему пути), то агент A отправляет все номера дальних вершин перешейков АЭ («ПЕР_А($x_1, x_2, ..., x_l$)», где x_i — номера, записанные агентом B, в вершинах своего пути). Если же агент B находится в одной из дальних вершин перешейков и ещё не распознавал инцидентные ей перешейки или не возвращается назад по своему пути, то агент A отправляет АЭ номера всех дальних вершин, обнаруженных перешейков, кроме номера вершины, в которой находится агент B.

Если перешейки обнаружил агент B и ни в одной из дальних вершин этих перешейков нет агента A (или же A находится в одной из этих вершин, но выполняет возврат назад по своему пути), то B передает АЭ номера всех дальних вершин обнаруженных перешейков («ПЕР_В($k_1, k_2, ..., k_l$)», где k_i — номера, записанные агентом A, в вершинах своего пути). Если же агент A находится в одной из дальних вершин перешейков и не выполняет возврат назад по своему пути, то B не выполняет никаких действий до ухода A из окрестности вершины, в которой находится B.

4. *Одновременное попадание двух АИ в одну белую вершину.* При одновременном попадании двух АИ в одну белую вершину, каждый АИ окрашивает вершину наполовину, и она становится красно-желтой. Агент B на следующем шаге отступает назад по своему пути, удаляя метки, оставленные на предыдущем шаге (удаляется краска с ребра и ближнего инцидентора), и переключается в обычный режим работы. Агент A видит разноцветную

вершину как свою, но при распознавании окрашивает в черный цвет обе половинки.

Если АИ попадает в ситуацию, когда в вершине возможен выбор сразу нескольких режимов работы, то первым будет выбран РРП, за ним РРОР и наконец ОРР. Режим работы при попадании двух АИ в одну белую вершину в этом списке не рассматривается потому, что такая ситуация приведет к изменениям в работе только агента B и, в этот момент, другие режимы работы для него будут недоступны.

Выполняя обход графа, агенты A и B создают соответственно красный и желтый пути. Рассмотрим принцип построения агентами пути «своего» цвета. При движении в белую вершину красный (желтый) путь удлиняется, при движении назад по своему пути — укорачивается. Вершина, из которой возможно лишь движение назад по своему пути, либо вовсе отсутствуют варианты перемещения, окрашивается в черный цвет. Алгоритм заканчивает работу, когда красный и желтый пути становятся пустыми, а все вершины черными.

Выполняя обход графа G, агенты создают нумерацию посещенных вершин. Первый раз посетив вершину агент A окрашивает её в красный цвет (агент B — в желтый цвет), записывает в память вершины соответствующий номер (полученный от АЭ), равный значению переменной $Сч_A$ ($Сч_B$ для агента B). Восстановление графа G происходит на основе созданной агентами-исследователями нумерации, путем построения графа H изоморфного G.

Рассмотрим алгоритм работы агента-экспериментатора:

Вход: списки сообщений M и N от АИ.

Выход: список вершин V_H и ребер E_H графа H, изоморфного графу G.

Данные: V_H, E_H списки вершин и ребер графа H, изоморфного графу G. $Сч_A$, $Сч_B$ — счетчики числа посещенных вершин графа G агентами A и B соответственно. M, N — списки сообщений от агентов A и B соответственно. $STOP_A, STOP_B$ — переменные, используемые агентами A и B соответственно, для сигнализации АЭ о завершении распознавания своей области. mr_A — переменная, которая принимает значения «1» или «0». Значение «1» позволяет агенту A распознавать перешейки, в том числе и те, во второй вершине которых стоит агент B (на предыдущем шаге агентом B были распознаны все, обнаруженные ним перешейки, либо же агент B двигается назад по своему пути и не проверяет наличие перешейков). Значение «0» позволяет агенту A распознавать только те перешейки (если они существуют), во второй вершине которых нет агента B. mr_B — переменная, которая принимает значения «1» или «0». Значение «1» позволяет агенту B распознавать перешейки, даже при наличии в дальней вершине одного из перешейков агента A (агент A двигается назад по своему пути и не проверяет наличие перешейков). Значение «0» запрещает агенту B распознавание перешейков если в дальней вершине одного из перешейков находится агент A. $r(1), r(2), ..., r(t)$ — список номеров вершин красного пути, где t — длинна этого списка. $y(1), y(2), ..., y(p)$ — список номеров вершин желтого пути, где p — длинна этого списка. Mes — текущее

сообщение.
1. $Сч_A$:= 1;
2. $Сч_B$:= 1;
3. $M := \varnothing, N := \varnothing, E_H := \varnothing, STOP_A := 0, STOP_B := 0, mr_A := 0,$ $mr_B := 0$;
4. $t := 1$;
5. $p := 1$;
6. $r(t) := Сч_A$; (номера вершин красного пути)
7. $y(p) := Сч_B$; (номера вершин желтого пути)
8. $V_H := \{A[1], B[1]\}$;
9. *while* $(STOP_A = 0)$ *or* $(STOP_B = 0)$ *do*
10. *if* $M \neq \varnothing$ *then do*
11. прочитать в Mes сообщение и удалить его из очереди M;
12. $ОБР_СП_A()$;
13. *end do*;
14. *if* $N \neq \varnothing$ *then do*
15. прочитать в Mes сообщение и удалить его из очереди N;
16. $ОБР_СП_B()$;
17. *end do*;
18. *end do*;
19. печать V_H, E_H.

$ОБР_СП_A()$:
1. *if* $Mes =$ «ПЕР_А$(x_1, x_2, ..., x_l)$» *then* ПЕР_А$(x_1, x_2, ..., x_l)$;
2. *if* $Mes =$ «ОБР_А$(x_1, x_2, ..., x_l)$» *then* ОБР_А$(x_1, x_2, ..., x_l)$;
3. *if* $Mes =$ «ВПЕРЕД_А» *then* ВПЕРЕД_А();
4. *if* $Mes =$ «ПРИСВ_Amr» *then* ПРИСВ_Amr();
5. *if* $Mes =$ «НАЗАД_А» *then* НАЗАД_А();
6. *if* $Mes =$ «СТОП_А» *then* СТОП_А().

$ПЕР_A(x_1, x_2, ..., x_l)$: выполняется операция:
$E_H := E_H \cup \{(A[r(t)], B[x_1]); (A[r(t)], B[x_2]); ...; (A[r(t)], B[x_l])\}$.
$ОБР_A(x_1, x_2, ..., x_l)$: выполняется операция:
$E_H := E_H \cup \{(A[r(t)], A[x_1]); (A[r(t)], A[x_2]); ...; (A[r(t)], A[x_l])\}$.
$ВПЕРЕД_A()$: выполняются операции: $Сч_A$:=$Сч_A$+1; $t := t + 1$.
$r(t) := Сч_A$; $V_H := V_H \cup \{A[Сч_A]\}$; $E_H := E_H \cup \{(A[r(t-1)], A[r(t)])\}$;
$mr_B := 0$.
$ПРИСВ_Amr()$: $mr_B := 1$.
$НАЗАД_A()$: из списка $r(1), ..., r(t)$ удаляется элемент $r(t)$; $t := t - 1$.
$СТОП_A()$: $STOP_A := 1$.

Процедуры работы со списком сообщений от агента B, которые не рассмотрены ниже, аналогичны процедурам работы со списком сообщений от агента A.

$ОБР_СП_B()$:
1. *if* $Mes =$ «ВОЗВРАТ_В» *then* ВОЗВРАТ_В();
2. *if* $Mes =$ «ПЕР_В$(k_1, k_2, ..., k_l)$» *then* ПЕР_В$(k_1, k_2, ..., k_l)$;
3. *if* $Mes =$ «ОБР_В$(k_1, k_2, ..., k_l)$» *then* ОБР_В$(k_1, k_2, ..., k_l)$;
4. *if* $Mes =$ «ВПЕРЕД_В» *then* ВПЕРЕД_В();

5. *if* $Mes =$ «НАЗАД_В» *then* НАЗАД_В();
6. *if* $Mes =$ «СТОП_В» *then* СТОП_В().

ВОЗВРАТ_В(): $E_H := E_H \backslash \{(y(p-1), y(p))\}$; $V_H := V_H \backslash \{B[Сч_B]\}$;
$Сч_B := Сч_B - 1$; $p := p - 1$; $y(p) := Сч_B$.

ПЕР_В$(k_1, k_2, ..., k_l)$: выполняются операции:
$E_H := E_H \cup \{(B[y(p)], A[k_1]); (B[y(p)], A[k_2]); ...; (B[y(p)], A[k_l])\}$;
$mr_A := 1$.

ВПЕРЕД_В(): выполняются операции: $Сч_B := Сч_B + 1$; $p := p + 1$;
$y(p) := Сч_B$; $V_H := V_H \cup \{B[Сч_B]\}$; $E_H := E_H \cup \{(B[y(p-1)], B[y(p)])\}$;
$mr_A := 0$.

НАЗАД_В(): из списка $y(1), ..., y(p)$ удаляется элемент $y(p)$; $p := p - 1$;
$mr_A := 1$.

3. Свойства алгоритма распознавания.

В начале работы алгоритма распознавания, при $n \geq 3$, как минимум, по одному разу выполняются процедуры ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В(). Эти процедуры выполняются агентом-экспериментатором, после посещения агентами-исследователями белых вершин исследуемого графа G. Процедурами АЭ ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В() создается по одной новой вершине (для каждой из процедур) графа H.

При одновременном попадании агентов A и B в одну белую вершину процедурами ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В() будет создано две новые вершины графа H. Для того, чтобы вершина созданная агентом B не дублировала вершину, созданную агентом A, на следующем шаге она будет удалена процедурой ВОЗВРАТ_В(). Таким образом, процесс выполнения описанного алгоритма индуцирует отображение $\varphi : V_G \to V_H$. Причем $\varphi(v) = t$ (когда вершина v окрашена в красный цвет и $t = Сч_A$) и $\varphi(s) = p$ (когда вершина s окрашена в желтый цвет и $p = Сч_B$). Указанное отображение φ является биекцией, поскольку в связном графе G все вершины достижимы из начальных вершин. Поэтому все вершины посещаются агентами, то есть окрашиваются в красный и желтый цвета.

При выполнении процедуры ВПЕРЕД_А() или ВПЕРЕД_В() АЭ распознает древесное ребро (v, u) и так нумерует вершину u, что ребру (v, u) однозначно соответствует ребро $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *ОБР_А*() или *ОБР_В*() АЭ распознает обратные ребра (v, u) графа G и ставит им в однозначное соответствие ребра $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *ПЕР_А*() или *ПЕР_В*() АЭ распознает перешейки (v, u) графа G и ставит им в однозначное соответствие ребра $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. Следовательно, φ является изоморфизмом графа G на граф H.

Теорема 1. *Три агента, выполнив алгоритм распознавания на графе G, распознают рассматриваемый граф с точностью до изоморфизма.*

Подсчитаем временную, емкостную и коммуникационную сложности алгоритма в равномерной шкале [9]. Рассмотрим подробнее свойства красного и желтого путей. Из описания алгоритма следует, что на каждом шаге

алгоритма красный (желтый) путь — это простой путь, соединяющий начальную вершину v (s — в случае агента B) с номером $\varphi(v) = 1\,(\varphi(s) = 1)$ с вершиной u (z) с номером $\varphi(u) = Сч_A$ ($\varphi(z) = Сч_B$). Следовательно, общая длина красного и желтого пути не превосходит n.

При однократном выполнении процедур из ОРР АИ проходит одно ребро, либо же, не выполняя передвижений, отправляет одно сообщение, на что уходит один ход. При однократном выполнении процедур из РРОР АИ распознают не более $n-2$ обратных ребер, на что затрачивают один ход. При однократном выполнении процедуры из РРП АИ распознают не более $n-2$ перешейка, на что так же уходит один ход. При одновременном попадании двух АИ в одну белую вершину, агент A не меняет режим работы, а агент B затрачивает один ход на возврат в свою область работы. При подсчете временной сложности алгоритма будем считать, что инициализация алгоритма, анализ окрестности $Q\,(v)$ рабочей вершины и выбор одной из возможных процедур занимают некоторое постоянное число единиц времени. Так же будем считать, что выбор ребер, проход по ним АИ и обработка сообщений АЭ полученных на данном этапе от АИ осуществляется за 1 единицу времени. Тогда временная сложность алгоритма определяется следующими соотношениями:

1. Процедуры из ОРР выполняются не более чем $3 \cdot (n-2) + 2$ раз, общее время их выполнения оценивается как $O\,(n)$.
2. Процедуры из РРОР выполняются не более чем $n-2$ раз, то есть общее время их выполнения оценивается как $O\,(n)$.
3. Процедуры из РРП выполняются не более чем $n-2$ раз, то есть общее время их выполнения оценивается как $O\,(n)$.
4. Время, затрачиваемое агентом B, на возврат в свою область работы после попадания двух АИ в одну вершину, оценивается как $O\,(n)$.
5. Время простоя агентов в ожидании оценивается как $O\,(n)$.

Следовательно, суммарная временная сложность $T(n)$ алгоритма удовлетворяет соотношению: $T\,(n) = O\,(n)$.

Емкостная сложность $S(n)$ алгоритма определяется сложностью списков $V_H, E_H, r(1)...r(t), y(1)...y(p)$, сложность которых соответственно определяется величинами $O\,(n \cdot log(n))\,, O\left(n^2\right), O\,(n \cdot log(n))\,, O\,(n \cdot log(n))$. Следовательно: $S\,(n) = O\left(n^2\right)$.

Коммуникационная сложность $K(n)$ алгоритма определяется объемом информации, которой необходимо обменяться агентам, для распознавания графа. При работе агентов в ОРР, объем передаваемой АИ информации оценивается как $O\,(n)$. АЭ при этом передаст объем информации, оцениваемой как $O\,(n \cdot log(n))$. При работе агентов в РРОР и в РРП объем переданной информации оценивается как $2 \times O\left(n^2 \cdot log(n)\right)$. Следовательно, суммарная коммуникационная сложность $K(n)$ алгоритма удовлетворяет соотношению $K\,(n) = O\left(n^2 \cdot log(n)\right)$.

Теорема 2. *Временная сложность алгоритма распознавания равна $O\,(n)$, емкостная — $O\left(n^2\right)$, а коммуникационная — $O\left(n^2 \cdot log(n)\right)$. При этом алгоритм использует 3 краски.*

4. Заключение.

В работе предложен новый алгоритм распознавания графа среды временной сложности $O(n)$, емкостной сложности $O(n^2)$ и коммуникационной сложности $O(n^2 \cdot log(n))$. АИ имеют конечную на каждом шаге, но растущую память, и используют по две краски каждый (всего три краски).

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю к.ф.-м.н., с.н.с ИПММ НАНУ Грунскому И. С. за оказанную помощь в работе.

Литература

1. Albers S. Exploring unknown environments. / S. Albers, M. R. Henzinger // SIAM Journal on Computing. — 2000. — 29(4). — P. 1164–1188.
2. Das S. Distributed exploration of an unknown graph. / S. Das, P. Flocchini, A. Nayak, N. Santoro // In Proc. of 12th Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO). — 2005. — P. 99–114.
3. Deng X. Exploring an unknown graph. / X. Deng, C. H. Papadimitriou // Journal of Graph Theory. — 1999. — 32(3). — P. 265–297.
4. Грунский И. С. Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом. / И. С. Грунский, Е. А. Татаринов // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 492–497.
5. Грунский И. С. Распознавание конечного графа коллективом агентов. / И. С. Грунский, А. В. Стёпкин // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — Т. 19. — С. 43–52.
6. Стёпкин А.В. Возможность и сложность распознавания графов тремя агентами. / А. В. Стёпкин // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №1 (20). — С. 88–98.
7. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р Ривест. — М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.
8. Касьянов В. Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. — СПБ.: БХВ — Петербург, 2003. — 1104 с.
9. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1979. — 536 с.

Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины, ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина.

Поступила 01.11.2012

Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №2(112)** Journal of Computational & Applied Mathematics

UDC 531.929

ON CLASSICAL SOLVABILITY FOR A LINEAR 1D HEAT EQUATION WITH CONSTANT DELAY

D. Ya. Khusainov, M. Pokojovy, E. I. Azizbayov

Abstract. In this paper, we consider a linear heat equation with constant coefficients and a single constant delay. Such equations are commonly used to model and study various problems arising in ecology and population biology when describing the temporal evolution of human or animal populations accounting for migration, interaction with the environment and certain aftereffects caused by diseases or enviromental polution, etc. (see [5, 16] and references therein). Whereas dynamical systems with lumped parameters have been addressed in numerous investigations (cf. [9, 10]), there are still a lot of open questions for the case of systems with distributed parameters (see, e.g., [13, 14]), especially when the delay effects are incorporated (cp. [3, 4]).

The present paper is an elaboration of authors' results in [2]. Here, we consider a general non-homogeneous one-dimensional heat equation with delay in both higher and lower order terms subject to non-homogeneous initial and boundary conditions. For this, we prove the unique existence of a classical solution as well as its continuous dependence on the data.

Keywords: heat equation with constant coefficients, classical solutions, well-posedness, constant delay.

1. Linear Heat Equation Without Delay

We consider an initial boundary value problem for a one-dimensional heat equation without delay

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + bv_x(x,t) + cv(x,t) + g(x,t) \text{ for } x \in (0,l), t > 0 \quad (1.1)$$

subject to non-homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$v(0,t) = \theta_1(t), \quad v(l,t) = \theta_2(t) \text{ for } t > 0 \quad (1.2)$$

as well as initial conditions

$$v(x,0) = \psi(x) \text{ for } x \in (0,l). \quad (1.3)$$

Since we are interested in classical solutions, compatibility conditions on the initial and boundary data are additionally posed

$$\psi(0) = \theta_1(0), \quad \psi(l) = \theta_2(0)$$

allowing for the continuity of the solution at the boundary of the space-time cylinder.

Definition 1. Under a classical solution of the problem (1.1)–(1.3) on a finite time interval $[0,T]$ we understand a function $v \in \mathcal{C}^0\big([0,l]\times[0,T]\big)$ which satisfies $v_t, v_{xx} \in \mathcal{C}^0\big([0,l]\times[0,T]\big)$ and, being plugged into Equations (1.1)–(1.3), turns them into identity.

The uniqueness of solutions can be deduced from the weak maximum principle (cf. [17, p. 117]). Here, we decided for a proof based on the energy method (cp. [6, Bd. 2, Kap. 23]) from which we can also conclude the continuous dependence of the solution on the data.

Theorem 2. For each $T>0$, classical solutions on $[0,T]$ are unique.

Proof. We assume that there exist two classical solution v_1, v_2 to the initial boundary value problem (1.1)–(1.3). Then their difference $w := v_1 - v_2$ is a classical solution to the homogeneous initial boundary value problem

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= a^2 w_{xx}(x,t) + b w_x(x,t) + c w(x,t) \text{ for } (x,t)\in(0,l)\times(0,T),\\ w(0,t) &= w(l,t) = 0 \text{ for } t\in(0,T),\\ w(x,0) &= 0 \text{ for } x\in(0,l). \end{aligned}$$

Multiplying the equation with w, integrating over $x\in(0,l)$ and applying Green's formula, we obtain using the theorem on differentiation under the integral sign

$$\frac{1}{2}\partial_t\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x = -a^2\int_0^l w_x^2(x,t)\mathrm{d}x + b\int_0^l w_x(x,t)w(x,t)\mathrm{d}x + \\ + c\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

Exploiting Young's inequality

$$|\xi\eta| \le \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\eta^2$$

for $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, we can further estimate

$$\frac{1}{2}\partial_t\int_0^l w^2(x,t) \le -\Big(a^2 - \varepsilon\frac{|b|}{2}\Big)\int_0^l w_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \Big(c + \frac{|b|}{2\varepsilon}\Big)\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

Letting now ε be sufficiently small such that $\varepsilon\frac{|b|}{2} < a^2$, we obtain

$$\partial_t\int_0^l w^2(x,t) \le C\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x$$

with $C := 2\big(c+\frac{|b|}{2\varepsilon}\big)$. As an immediate consequence of Gronwall's inequality, we get then

$$\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x \le e^{Ct}\int_0^l w^2(x,0)\mathrm{d}x = 0 \text{ for a.e. } t\in[0,T].$$

Taking into account the continuity of w, we finally get $w\equiv 0$ and therefore $v_1\equiv v_2$. □

After a slight modification of the proof, we easily obtain the continuous dependence of the solution on the data. See [1] for the definition of corresponding Sobolev spaces.

Corollary 3. The norm of the solution v in $L^2\big((0,T),L^2\big((0,l)\big)\big)$ depends continuously on the $L^2\big((0,T),L^2\big((0,l)\big)\big)\times L^2\big((0,l)\big)\times\big(W^{1,2}\big((0,T)\big)\big)^2$-norm of $(g,\psi,\theta_1,\theta_2)$.

Remark 4. For the sake of consistency with the traditional convention used for the spaces of Banach-valued functions, here and in the sequel we interchange the x and t variables when dealing with functions in Sobolev or Lebesgue spaces. Thus, we write $u=u(t,x)\in H^1\big((0,T),L^2\big((0,l)\big)\big)$, but $v=v(x,t)\in\mathcal{C}^0\big([0,l]\times[0,T]\big)$.

Now we want to establish the existence of classical solutions and give their explicit representation. First, we substitute

$$v(x,t) := e^{\mu x+\gamma t}u(x,t),\quad \mu := -\frac{b}{2a^2},\quad \gamma := c-\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2$$

and find an equivalent system for the function u given by

$$u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t) \text{ for } x\in(0,l), t>0 \tag{1.4}$$

with $f(x,t) := e^{-\mu x-\gamma t}g(x,t)$ subject to the initial and boundary conditions

$$u(x,0)=\varphi(x) \text{ for } x\in(0,l),\quad \varphi(x) := e^{-\mu x}\psi(x), \tag{1.5}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t) := e^{-\gamma t}\theta_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t) := e^{-\mu l-\gamma t}\theta_2(t) \text{ for } t>0. \tag{1.6}$$

Thus, the problem (1.1)–(1.3) is reduced to the problem (1.4)–(1.6). We look for the classical solution u to (1.4)–(1.6) in the form

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t),$$

where

– u_1 is the solution to the homogeneous parabolic equation

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

with zero boundary conditions $u_1(0,t) = 0$, $u_1(l,t) = 0$, $t > 0$, and non-zero initial conditions $u_1(x,0) = \Phi(x)$, $x \in (0,l)$, where

$$\Phi(x) := \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right] \text{ for } x \in [0,l]. \tag{1.8}$$

– u_2 is the solution to the non-homogeneous parabolic equation

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1.9}$$

with the right-hand side

$$\begin{aligned} F(x,t) :=& f(x,t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right\} + \\ &+ c\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

for $x \in [0,l]$, $t \geq 0$, subject to zero boundary conditions $u_2(0,t) = 0$, $u_2(l,t) = 0$, $t > 0$ and zero initial conditions $u_2(x,0) = 0$, $0 < x < l$.

– u_3 is the solution to the family of elliptic equations

$$a^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

subject to non-zero boundary conditions $u_3(0,t) = \mu_1(t)$, $u_3(l,t) = \mu_2(t)$, $t > 0$. Thus, $u_3(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$.

1.1. **Homogeneous Equation.** We first study the homogeneous Equation (1.7) with the initial conditions given in Equation (1.8). Using Fourier's separation method, the solution is to be determined in the form

$$u_1(x,t) = X(x)T(t).$$

Plugging this ansatz into (1.7), we arrive at

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Collecting corresponding terms, we get

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t).$$

After separating the variables

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

the equation decomposes into two equations

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{1.11}$$

$$T'(t) = -a^2 T(t). \tag{1.12}$$

Using the boundary conditions for u_1, we obtain zero boundary conditions for X

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Nontrivial solutions of Equation (1.11) exist only for the eigenvalues

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

with corresponding eigenfunctions

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

being solutions of the Sturm & Liouville problem for the negative Dirichlet-Laplacian in $(0, l)$ (cp. also Definition 5 below). Note that $(X_n)_{n\in N}$ build an orthogonal basis of $L^2\big((0, l)\big)$.

Plugging the values of λ_n, $n \in \mathbb{N}$, obtained above into Equation (1.12), we get a countable system of decoupled ordinary differential equations

$$T'(t) = -\Big(\frac{\pi n}{l} a\Big)^2 T(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

which is uniquely solved by the sequence of analytic functions

$$T_n(t) = T(0) e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Since $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ build an orthogonal basis of $L^2\big((0, l)\big)$ (cf. [17, Theorem 9.22]), the function Φ can be expanded into a Fourier series with respect to the eigenfunction from Equation (1.13), viz.,

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n \sin \frac{\pi n}{l} x \text{ for a.e. } x \in [0, l]$$

with

$$\Phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ \varphi(\xi) - \left[\mu_1(0) + \frac{\xi}{l} \left[\mu_2(0) - \mu_1(0) \right] \right] \right\} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi.$$

Definition 5. Consider the elliptic operator $\mathcal{A} := -a^2 \partial_x^2$ on $L^2\big((0, l)\big)$ subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions. Since $\mathcal{A}$ is continuoulsy invertible, $0 \in \rho(\mathcal{A})$. For $m \in \mathbb{N}$, we define the space

$$X_m := D(\mathcal{A}^m) = \Big\{ u \in H^{2m}\big((0, l)\big) \,\Big|\, \partial_x^{2k} u \in H_0^1\big((0, l)\big), k = 0, \ldots, m-1 \Big\}$$

equipped with the standard graph norm of $D(\mathcal{A}^m)$.

Remark 6. By the virtue of elliptic theory (cf. [17]), X_m is well-defined and the norm of X_m is equivalent with the standard norm of $H^{2m}\big((0, l)\big)$.

Lemma 7. For any $m \in \mathbb{N}$ and any $w \in X_m$, there exists a constant $C > 0$ such that the Fourier coefficients w_n, $n \in \mathbb{N}$, of w with respect to the functions basis $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ given in Equation (1.13) satisfy

$$|w_n| \leq \frac{C}{n^{2m+1/2}} \text{ for } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Again, from the elliptic theory, we know that $w \in X_m$ is equivalent with

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2\right)^{2m} |w_n|^2 < \infty,$$

where w_n denotes the n-th Fourier coefficient of w with respect to $(X_n)_n$. Thus, there exists a constant $C > 0$ such that $n^{4m}|w_n|^2 \leq \frac{C^2}{n}$ and therefore $|w_n| \leq \frac{C}{n^{2m+1/2}}$. □

The Fourier series converges in $L^2\big((0,l)\big)$ if $\Phi \in L^2\big((0,l)\big)$. For $\Phi \in \mathcal{C}^0\big([0,l]\big)$ with $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$, the convergence is pointwise (cf. [6, Bd. 1, Kap. 9]). Under a stronger condition, e.g., $\Phi \in X_1 \hookrightarrow W^{1,\infty}\big((0,l)\big)$, the convergence is even uniform. See [1] for the definition of corresponding Sobolev spaces.

Then, the solution to the initial boundary value problem (1.7)–(1.8) is formally given by

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{1.15}$$

Assuming $\Phi \in X_2$, we easily conclude from Lemma 7 that u_1 given Equation (1.15) as well as $\partial_t u_1$, $\partial_{xx} u_1$ converge absolutely and uniformly on $[0,l] \times [0,T]$. Thus, u_1 is a classical solution of (1.7)–(1.8).

1.2. **Non-Homogeneous Equation.** Next, we consider the non-homogeneous equation (1.9)

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t)$$

subject to zero boundary conditions $u_2(0,t) = 0$, $u_2(l,t) = 0$, $t > 0$, and zero initial conditions $u_2(x,0) = 0$, $0 < x < l$. Using Duhamel's principle, the solution will be determined as a Fourier series with time-dependent coefficients with respect to the eigenfunctions $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Note that $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined in the previous subsection can be extended to an orthogonal basis of $L^2\big((0,T), L^2\big((0,l)\big)\big)$. Thus, if the right-hand side of Equation (1.10) satisfies $F \in L^2\big((0,T), L^2\big((0,l)\big)\big)$, it can be expanded into a Fourier series with respect to this function basis. We represent the function F in the form of the series

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi,$$

where $F_n \in L^2\big((0,T)\big)$, $n \in \mathbb{N}$. With $u_{2,n} \in H^1\big((0,T)\big)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2,n}(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (t-s)} F_n(s)\mathrm{d}s$$

representing the unique solution to the ordinary differential equation

$$\dot{u}_{2,n}(t) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_{2n}(t) + F_n(t)$$

subject to zero initial condition $u_{2,n}(t) = 0$, the solution u_2 to Equation (1.9)–(1.10) is formally given by

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (t-s)} F_n(s)\mathrm{d}s \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{1.17}$$

From Lemma 7, we infer that both the series u_2 given in Equation (1.17) and its partial derivatives $\partial_t u_2$, $\partial_{xx} u_2$ converge absolutely and uniformly if, e.g., $F \in \mathcal{C}^1\big([0,T], X_1\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,T], X_2\big)$. Thus, u_2 is a classical solution of the corresponding problem.

1.3. **Elliptic Equation.** Trivially, we observe that $u_3 \in \mathcal{C}^2\big([0,T], \mathcal{C}^\infty\big([0,l]\big)\big)$ if $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^2\big([0,T]\big)$. Summarizing the relations obtained above, we arrive at

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (t-s)} F_n(s)\mathrm{d}s \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right] \end{aligned} \tag{1.18}$$

with

$$\Phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ \varphi(\xi) - \left[\mu_1(0) + \frac{\xi}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right] \right] \right\} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi,$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi,$$

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right] \right\}.$$

Theorem 8. Assume

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{C}^1\big([0,T], H^2\big((0,l)\big)\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,T], H^4\big((0,l)\big)\big), \\ \mu_1, \mu_2 &\in \mathcal{C}^2\big([0,T]\big), \quad \varphi \in H^4\big((0,l)\big) \end{aligned}$$

as well as the compatibility conditions

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0)$$

and

$$f(0,t) = \dot{\mu}_1(t),\ f(l,t) = \dot{\mu}_2(t),\ f_{xx}(0,t) = 0,\ f_{xx}(l,t) = 0 \text{ for } t \in [0,T].$$

Then the function u given in Equation (1.18) is a unique classical solution to (1.1)–(1.3).

2. Linear Heat Equation with Delay

In this section, we consider a linear one-dimensional heat equation with constant coefficients and a single constant delay

$$\begin{aligned} v_t(x,t) = a_1^2 v_{xx}(x,t) + a_2^2 v_{xx}(x,t-\tau) + b_1 v_x(x,t) + b_2 v_x(x,t-\tau) + \\ + d_1 v(x,t) + d_2 v(x,t-\tau) + g(x,t) \text{ for } x \in (0,l), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

with $a_1, a_2 \neq 0$. Equation (2.1) is complemented by non-homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$v(0,t) = \theta_1(t), \quad u(l,t) = \theta_2(t) \text{ for } t > -\tau \tag{2.2}$$

and initial conditions

$$v(x,t) = \psi(x,t) \text{ for } x \in (0,l), \quad t \in (-\tau, 0). \tag{2.3}$$

Since we are again interested in classical solutions, the following compatibility conditions are going to be essential to assure the continuity of the solution on the boundary of the space-time cylinder

$$\psi(0,t) = \theta_1(t), \quad \psi(l,t) = \theta_2(t) \text{ for } t \in [-\tau, 0].$$

Definition 9. A function $v \in \mathcal{C}^0\big([0,l] \times [-\tau,T]\big)$ satisfying $\partial_t v \in \mathcal{C}^0\big([0,l] \times [0,T]\big)$, $\partial_{xx} v \in \mathcal{C}^0\big([0,l] \times [0,T]\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,l] \times [-\tau,0]\big)$ is called a classical solution to the problem (2.1)–(2.3) on a finite time interval $[0,T]$ if it, being plugged into Equations (2.1)–(2.3), turns them into identity.

Theorem 10. For any $T > 0$, classical solutions of the problem (2.1)–(2.3) on $[0,T]$ are unique.

Proof. We assume that there exist two classical solution v_1, v_2 to the initial boundary value problem with delay (2.1)–(2.3). Then their difference $w := v_1 - v_2$ is a classical solution to the homogeneous problem

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= a_1^2 w_{xx}(x,t) + a_2^2 w_{xx}(x,t-\tau) + b_1 w_x(x,t) + b_2 w_x(x,t-\tau) + \\ &\quad + d_1 w(x,t) + d_2 w(x,t-\tau) \text{ for } (x,t) \in (0,l) \times (0,T), \\ w(0,t) &= w(l,t) = 0 \text{ for } t \in (-\tau, T), \\ w(x,t) &= 0 \text{ for } (x,t) \in (0,l) \times (-\tau, 0). \end{aligned}$$

Multiplying the equation with w, integrating over $x \in (0,l)$ and applying Green's formula, we obtain using the theorem on differentiation under the integral sign

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^l \left(-a_1^2 w_x^2(x,t) + b_1 w_x(x,t)w(x,t) + d_1 w^2(x,t)\right)\mathrm{d}x - \\ - a_2^2 \int_0^l w_x(x,t-\tau)w_x(x,t)\mathrm{d}x + \\ + \int_0^l \left(b_2 w_x(x,t-\tau) + d_2 w(x,t-\tau)\right) w(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Following the standard approach for delay differential equations (see, e.g., [15]), we define the history variable

$$z(x,t,s) := w(x,t-\tau s) \text{ for } (x,t,s) \in [0,l]\times[0,T]\times[0,1].$$

Exploiting the trivial equation

$$z_t(x,t,s) + \tau z_s(x,t,s) = 0 \text{ for } (x,t,s) \in (0,l)\times(0,T)\times(0,1),$$

we arrive at the following distributional identity

$$z_{txx}(x,t,s) + \tau z_{sxx}(x,t,s) = 0 \text{ for } (x,t,s) \in (0,l)\times(0,T)\times(0,1).$$

Multiplying this identity with $z(x,t,s)$, integrating over $(s,x) \in (0,1)\times(0,l)$ and carrying out a partial integration yields

$$\int_0^1 \int_0^l \partial_t z_x^2(x,t,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \tau \int_0^1 \partial_s z_x^2(x,t,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0 \text{ for } t \in (0,T).$$

Thus,

$$\partial_t \int_0^1 \int_0^l z_x^2(x,t,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \tau \int_0^l z_x^2(x,t,s)\Big|_{s=0}^{s=1}\mathrm{d}x \text{ for } t \in (0,T),$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^1 \int_0^l z_x^2(x,t,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \tau \int_0^1 w_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \\ - \tau \int_0^1 w_x^2(x,t-\tau)\mathrm{d}x \text{ for } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Multiplying Equation (2.5) with a constant $\omega > 0$ and adding the result to Equation (2.4), we can estimate

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x + \omega\partial_t \int_0^1 \int_0^l w_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq \\ \leq -\left(2a_1^2 - |b_1|\varepsilon - a_2^2\varepsilon\right)\int_0^l w_x^2(x,t)\mathrm{d}x \\ -\left(\omega\tau - \frac{a_2^2}{\varepsilon} - |b_2|\right)\int_0^1\int_0^l w_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \\ +\left(2d_1 + |b_2| + |d_2| + \frac{|b_1|}{\varepsilon}\right)\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Selecting now $\varepsilon > 0$ sufficiently small and $\omega > 0$ sufficiently large, we have shown

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x + \omega\int_0^1\int_0^l w_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right) \leq \\ \leq C\left(\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x + \omega\int_0^1\int_0^l w_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

for the constant $C := 2d_1 + |b_2| + |d_2| + \frac{|b_1|}{\varepsilon}$. From Gronwall's inequality we can thus conclude

$$\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x + \omega\int_0^1\int_0^l w_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq 0.$$

Therefore, $w \equiv 0$ implying $v_1 \equiv v_2$. □

Corollary 11. The solution v depends continuously on the data $(g, \psi, \theta_1, \theta_2)$ in the sense of the existence of a constant $C > 0$ such that

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^l\left(v^2(x,t) + \int_0^1 v_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C\Bigg[\int_0^T\left(\int_0^l g^2(x,t)\mathrm{d}x + \right. \\ \left. +\dot\theta_1^2(t) + \dot\theta_2^2(t)\right)\mathrm{d}t + \int_0^l \psi^2(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^1\int_0^l \psi_x^2(x,t-\tau s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Bigg]\end{aligned}$$

for $g \in L^2\big((0,T), L^2\big((0,l)\big)\big)$, $\psi \in L^2\big((-\tau,0), H^1\big((0,l)\big)\big)$ with $\varphi(0,\cdot) \in L^2\big((0,l)\big)$, $\theta_1, \theta_2 \in H^1\big((0,T)\big)$.

In the following, we assume the coefficients b_1, b_2 at the first order derivatives to satisfy the following proportionality conditions

$$-\frac{b_1}{2a_1^2} = -\frac{b_2}{2a_2^2} = \mu$$

for a certain $\mu \in \mathbb{R}$. We substitute

$$v(x,t) := e^{\mu x}u(x,t)$$

and obtain from equations (2.1)–(2.3) an initial boundary value problem for the unknown function u

$$u_t(x,t) = a_1^2 u_{xx}(x,t) + a_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t) + f(x,t) \quad (2.6)$$

with

$$c_1 := d_1 - \left(\frac{b_1}{2a_1}\right)^2, \quad c_2 := d_2 - \left(\frac{b_2}{2a_2}\right)^2, \quad f(x,t) := e^{-\mu x} g(x,t)$$

subject to the initial conditions

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \text{ for } x \in (0,l), t \in (-\tau, 0) \quad (2.7)$$

with $\varphi(x,t) := e^{-\mu x}\psi(x,t)$, $x \in [0,l]$, $t \in [-\tau, 0]$, and boundary conditions

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t) \text{ for } t > -\tau \quad (2.8)$$

with $\mu_1(t) := \theta_1(t)$, $\mu(t) := e^{-\mu l}\theta_2(t)$, $t \geq -\tau$.

Thus, there remains to establish the existence of a classical solution to (2.6)–(2.8) which will be determined in the form

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$$

with the functions u_1, u_2, and u_3 given in what follows.

– u_1 is the solution of the homogeneous equation

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + \\ + c_1 u_1(x,t) + c_2 u_1(x,t-\tau) \quad (2.9)$$

subject to zero boundary conditions $u_1(0,t) = u_1(l,t) = 0$, $t > -\tau$, and non-zero initial conditions

$$u_1(x,t) = \Phi(x,t) \text{ for } x \in (0,l), t \in (-\tau, 0)$$

with

$$\Phi(x,t) := \varphi(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right] \quad (2.10)$$

for $x \in [0,l]$, $t \in [-\tau, 0]$.

– $u_2(x,t)$ is the solution of the non-homogeneous equation

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + \\ + c_1 u_2(x,t) + c_2 u_2(x,t-\tau) + F(x,t) \quad (2.11)$$

with the right-hand side

$$\begin{aligned} F(x,t) := f(x,t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right\} + \\ + c_1\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right\} + \\ + c_2\left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

subject to zero boundary conditions $u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0$, $t > -\tau$, and zero initial conditions $u_2(x,t) = 0$, $x \in (0,l)$, $t \in (-\tau, 0)$.

– u_3 is the solution to the family of homogeneous elliptic equations

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

subject to non-zero boundary conditions $u_3(0,t) = \mu_1(t)$, $u_3(l,t) = \mu_2(t)$, $t > 0$. Thus, $u_3(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$.

2.1. **Homogeneous Equation with Delay.** First, we consider homogeneous equation (2.11) with zero boundary and non-zero initial conditions. The solution will be determined using Fourier's separation method. Assuming

$$u_1(x,t) = X(x)T(t)$$

and plugging the ansatz into Equation (2.11), we get

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) = a_1^2 X''(x)T(t) + a_2^2 X''(x)T(t-\tau) + \\ + c_1 X(x)T(t) + c_2 X(x)T(t-\tau). \end{aligned}$$

Collecting corresponding terms, we obtain

$$[T'(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t-\tau)]X(x) = [a_1^2 T(t) + a_2^2 T(t-\tau)]X'(x).$$

After separating the variables

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t-\tau)}{a_1^2 T(t) + a_2^2 T(t-\tau)} = -\lambda^2,$$

the equation decomposes into two equations

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{2.13}$$

$$T'(t) - (c_1 - \lambda^2 a_1^2)T(t) + (c_2 - \lambda^2 a_2^2)T(t-\tau) = 0. \tag{2.14}$$

Taking into account the boundary conditions for u_1, we get zero boundary conditions for X:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Thus, nontrivial solutions of Equation (2.13) exist only for

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

The latter are eigenvalues corresponding to the eigenfunctions

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

being solutions of the Sturm & Liouville problem for the negative Dirichlet-Laplacian in $(0, l)$. Plugging the values of λ_n, $n \in \mathbb{N}$, obtained in Equation (2.15) into Equation (2.14), we obtain a countable system of decoupled ordinary delay differential equations

$$\dot{T}_n(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_1^2\right] T_n(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_2^2\right] T_n(t-\tau), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Similar to Section 1.1, we consider the trivial extension of $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to an orthogonal basis of $L^2\big((-\tau, 0), L^2\big((0, l)\big)\big)$. Thus, if $\Phi \in L^2\big((-\tau, 0), L^2\big((0, l)\big)\big)$, we obtain for a.e. $(x, t) \in [0, l] \times [-\tau, 0]$

$$\Phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \text{ with } \Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi.$$

Taking into account Equation (2.10), we obtain initial conditions for the countably many ordinary delay differential equations (2.14) in the form

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in (-\tau, 0),$$

where

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{\varphi(\xi, t) - \left[\mu_1(t) + \frac{\xi}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right]\right\} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi.$$

These equations can be solved explicitly using well-known results on scalar linear ordinary delay differential equations (see, e.g., [11], [12]). In the following, we briefly outline this theory studying ordinary delay differential equations of the form

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau) \text{ for } t \geq 0, \quad x(t) = \beta(t) \text{ for } t \in [-\tau, 0] \tag{2.17}$$

where $\beta \in \mathcal{C}^1([-\tau, 0])$ is an arbitrary function representing the initial condition.

Definition 12. For $b \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, the function $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp_\tau\{b, t\}$ given by

$$\exp_\tau\{b,t\} := \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t < 0, \\ 1 + b\frac{t}{1!}, & 0 \leq t < \tau, \\ 1 + b\frac{t}{1!} + b^2\frac{(t-\tau)^2}{2!}, & \tau \leq t < 2\tau, \\ \dots, & \dots \\ 1 + b\frac{t}{1!} + \dots + b^k\frac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

is called the delayed exponential function.

In [11], it has been proved that the delayed exponential function $\exp_\tau\{b,\cdot\}$ is the unique solution of the linear homogeneous equation with pure delay

$$\dot{x}(t) = bx(t-\tau) \text{ for } t \geq 0$$

satisfying the identity initial condition $x(t) \equiv 1$ for $t \in [-\tau, 0]$.

It has further been shown that the solution to the general Cauchy problems for ordinary delay differential equations also admit solutions of similar type. Namely, the following statements have been proved.

Lemma 13. The function

$$x_0(t) = e^{at}\exp_\tau\{b_1, t\}, t \geq 0,$$

with $b_1 := e^{-a\tau}b$ is the unique solution of Equation (2.17) satisfying the initial condition

$$x_0(t) = e^{at} \text{ for } t \in [-\tau, 0].$$

Theorem 14. Equation (2.17) subject to general initial conditions $x(t) = \beta(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, with $\beta \in \mathcal{C}^1\big([-\tau, 0]\big)$ is uniquely solved by a function $u \in \mathcal{C}^0\big([-\tau,\infty)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([-\tau, 0]\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty)\big)$ given via

$$\begin{aligned} x(t) = {} & e^{a(t+\tau)}\exp_\tau\{b_1, t\}\beta(-\tau)+ \\ & + \int_{-\tau}^{0} e^{a(t-s)}\exp_\tau\{b_1, t-\tau-s\}\left[\beta'(s) - a\beta(s)\right]\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Remark 15. Using standard approximation arguments, the previous theorem can be easily generalized to the case $\beta \in W^{1,p}\big((-\tau, 0)\big)$, $p \in [1,\infty)$. The solution $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big((-\tau,\infty)\big)$ satisfies then the equation (2.17) in distributional sense. The initial conditions can be interpreted in the sense of the continuous embedding $W^{1,p}\big((-\tau,\tau)\big) \hookrightarrow \mathcal{C}^0_b\big([-\tau,\tau]\big)$.

We return now to Equation (2.16) with corresponding initial conditions. Introducing the notation

$$D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}, \quad L_n = c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 \tag{2.19}$$

and using Equation (2.18), the solution to the problem (2.16) is given by

$$\begin{aligned} T_n(t) = {} & e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n, t\}\Phi_n(-\tau)+ \\ & + \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s) - L_n\Phi_n(s)\right]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Thus, the solution to the initial boundary value problem (2.9) formally reads as

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ e^{L_n(t+\tau)} \exp_\tau \{D_n, t\} \Phi_n(-\tau) + \\ + \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)} \exp\{D_n, t-\tau-s\} [\Phi'(s) - L_n \Phi(s)] ds \Big\} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{2.20}$$

with

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ \varphi(\xi, t) - \left[\mu_1(t) + \frac{\xi}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \right] \right\} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi. \tag{2.21}$$

Conditions assuring the convergence of this Fourier series and the regularity of the limit function will be discussed later in this section.

2.2. **Non-Homogeneous Equation with Delay.** Next, we consider Equation (2.11), viz.,

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + \\ + c_1 u_2(x,t) + c_2 u_2(x,t-\tau) + F(x,t)$$

subject to zero boundary conditions $u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0$, $t > -\tau$, and zero initial conditions $u_2(x,t) = 0$, $x \in (0,l)$, $t \in (-\tau, 0)$. The solution will be obtained as a Fourier series with respect to the orthogonal eigenfunction basis of $L^2\big((-\tau,T), L^2\big((0,l)\big)\big)$, $T > 0$ arbitrary, but fixed (cp. Section 1.2), i.e.,

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Assuming $F \in L^2\big((0,T), L^2\big((0,l)\big)\big)$, the Fourier expansion of F reads as

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin \frac{\pi n}{l} x \text{ with } F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s,t) e^{-\frac{1}{2}\alpha \xi} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \mathrm{d}\xi,$$

where F is given in Equation (2.12) via

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \right\} + \\ + c_1 \left\{ \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \right\} + \\ + c_2 \left\{ \mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l} [\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)] \right\}.$$

Then each of the functions u_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, is the mild solution of the ordinary delay differential equation

$$\dot{u}_{2n}(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] u_{2n}(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] u_{2n}(t-\tau) + F_n(t).$$

Using the notation from Equation (2.19), the latter can be rewritten as

$$\dot{u}_{2n}(t) = L_n u_{2n}(t) + D_n e^{L_n \tau} u_{2n}(t-\tau) + F_n(t) \tag{2.23}$$

subject to zero initial conditions $u_{2n}(t) = 0$, $t \in (-\tau, 0)$.

Again, we present some auxiliary results from [11], [12] for non-homogeneous ordinary delay differential equation of the form

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau) + \rho(t) \text{ for } t > 0 \tag{2.24}$$

with zero initial conditions $x(t) = 0$, $t \in (-\tau, 0)$.

Theorem 16. Let $g \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty)\big)$. The unique solution $\overline{x} \in \mathcal{C}^0\big([-\tau,\infty)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([-\tau,0]\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty)\big)$ of Equation (2.24) subject to zero initial conditions is given by

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\tau, 0), \\ \int\limits_0^t e^{a(t-s)} \exp_\tau\{b_1, t-\tau-s\}\rho(s)\mathrm{d}s, & t > 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

where $b_1 := e^{-a\tau} b$.

Remark 17. By exploiting standard approximation results, the previous theorem yields a unique mild solution $\overline{x} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big((-\tau,\infty)\big)$, $p \in [1,\infty)$, for $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty)\big)$.

Using Equation (2.25), the solution to the ordinary delay differential equation (2.23) subject to zero initial conditions can be written as

$$u_{2n}(t) = \int\limits_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}F_n(s)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Hence, the solution to the non-homogeneous heat equation with delay (2.12) with zero boundary and initial conditions reads as

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}F_n(s)ds\right] \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.26}$$

At the moment, Equation (2.26) gives only a formal representation formula. Strict convergence conditions will though be given in the sequel.

Combing all relations from this section, we obtain the solution to Equations (2.1)–(2.3) in the form

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ & e^{L_n(t+\tau)} \exp_\tau\{D_n, t\}\Phi_n(-\tau) + \\
& + \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}[\Phi_n'(s) - L_n\Phi_n(s)]\mathrm{d}s \Big\} \sin\frac{\pi n}{l}x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\} F_n(s)\mathrm{d}s \right] \sin\frac{\pi n}{l}x + \\
& + \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right],
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

where

$$
\begin{aligned}
D_n &= \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}, \quad L_n = c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2, \\
\Phi_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l \left\{ \varphi(\xi,t) - \left[\mu_1(t) + \frac{\xi}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\right] \right\} \sin\frac{\pi n}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \\
F_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l F(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\mathrm{d}\xi \text{ with}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x,t) = f(x,t) &- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)\right] + \\
&+ \left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\right\} + c_2\left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)]\right\}.
\end{aligned}
$$

2.3. **Convergence of the Fourier Series.** Next, we discuss assumptions which assure the convergence of the Fourier series given in Equation (2.27) to the classical solution of the problem (2.1)–(2.3). We start with the following theorem giving rather technical conditions which will later be interpreted in terms of Sobolev differentiability order.

Theorem 18. Let $T > 0$ be fixed, $\delta > 0$ be arbitrary and let $m := \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$. Further, let the functions F and Φ defined from the data f, φ, μ_1, μ_2 be such that that

$$
F, F_t \in \mathcal{C}^0\big([0,l]\times[0,T]\big), \quad \Phi, \Phi_t, \Phi_{tt}, \Phi_{xx} \in \mathcal{C}^0\big([0,l]\times[-\tau,0]\big)
$$

and their Fourier coefficients F_n, Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, given in Equations (2.21), (2.28) satisfy the conditions

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^{2m+1+\delta} \max_{s\in[-\tau,0]} \left[|\Phi_n''(s)| + n^2|\Phi_n'(s)| + n^4|\Phi_n(s)|\right] = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le m} n^{2(m-k)+1+\delta} \max_{(k-1)\tau\le s\le k\tau} \left[|F_n'(s)| + n^2|F_n(s)|\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Then the Fourier series given in Equation (2.27) converges absolutely and uniformly with respect to $(x,t) \in [0,l]\times[0,T]$ to the classical solution u of the problem (2.1)–(2.3). Moreover, the Fourier series obtained by applying ∂_t, ∂_x or ∂_{xx} operators converge absolutely and unformly to u_t, u_x or u_{xx}, respectively.

Proof. We write the series from Equation (2.27) in the form

$$u(x,t) = S_1(x,t) + S_2(x,t) + S_3(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right],$$

where

$$\begin{aligned} S_1(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad S_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \\ S_3(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad A_n(t) = e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau), \\ B_n(t) &= \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}[\Phi_n'(s) - L_n\Phi_n(s)]\mathrm{d}s, \\ C_n(t) &= \int_{0}^{t} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}F_n(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

1. First, we consider the series S_1. For any fixed time $t^* \in [0,T]$ with $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, $k \le m$, we get

$$\begin{aligned} A_n(t^*) &= e^{L_n(t^*+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t^*\}\Phi_n(-\tau) = \\ &= e^{L_n(t^*+\tau)}\left\{1 + D_n\frac{t^*}{1!} + D_n^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!} + \cdots + D_n^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\Phi_n(-\tau). \end{aligned}$$

Therefore, the series reads as

$$S_1(x,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{L_n(t^*+\tau)}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x +$$

$$+\frac{t^*}{1!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{L_n(t^*+\tau)}D_n\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\frac{[t-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{L_n(t^*+\tau)}D_n^{k-1}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\frac{[t-(k-1)\tau]^{k}}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{L_n(t^*+\tau)}D_n^{k}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Plugging L_n and D_n from Equation (2.19) yields

$$S_1(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\frac{t^*}{1!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]t^*}\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\Phi_n(-\tau)\frac{\pi n}{l}x+\dots$$
$$\dots+\frac{[t^*-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][t^*-(k-2)\tau]}\times$$
$$\times\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x+\frac{[t^*-(k-1)\tau]^{k}}{k!}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][t^*-(k-1)\tau]}\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

On the strength of condition $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$, for sufficiently large n, for which

$$c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2<0$$

holds true, the argument of the exponential function in the series becomes negative. Consider first k terms. Since $t^*-j\tau>0$, $j=-1,\dots,k-2$, these k series converge absolutely and uniformly.

Consider now the $(k+1)$-st term. The latter is given as a series of the following form

$$S_1^{k+1}(x,t^*)=\frac{[t^*-(k-1)\tau]^{k}}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][t^*-(k-1)\tau]}\times$$
$$\times\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k}\Phi_n(-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

For $t^*\to(k-1)\tau$, the argument of the exponential function approaches zero. Therefore, the series converges, but in general not

uniformly with respect to $t^* \to (k-1)\tau$. The latter is though maintained by our theorem assumptions since the Fourier coefficients $\Phi_n(-\tau)$ are assumed to be decaying sufficiently rapidly for $n \to \infty$, viz.,

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k+3+\delta}|\Phi_n(-\tau)| \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} n^{2m+1+\delta} \max_{s\in[-\tau,0]} \left[|\Phi_n''(s)| + n^2|\Phi_n'(s)| + n^4|\Phi_n(s)|\right] = 0.$$

Moreover, we can similarly conclude that the same holds for $\partial_t S_1$ and $\partial_{xx} S_1$ since $\exp_\tau\{b,\cdot\}$ is continuously differentiable for $t \geq 0$ and the application of ∂_t and ∂_{xx} operators corresponds, roughly speaking, to a term-wise multiplication with n^2.

2. Next, we consider the second series S_2. For an arbitrary $t^* \in [0,T]$ with $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$, $k \leq s$, we substitute $\xi := t^* - \tau - s$ and decompose the integral into two parts

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n,\xi\} \left[\Phi_n'(t-\tau-\xi) - L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right] \mathrm{d}\xi +$$
$$+ \int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n,\xi\} \left[\Phi_n'(t-\tau-\xi) - L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right] \mathrm{d}\xi.$$

Exploiting the explicit form of the delayed exponential function on each of the time subintervals, we arrive at

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} [\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)] \times$$
$$\times \left\{1 + D_n\frac{\xi}{1!} + D_n^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \cdots + D_n^{k-1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \mathrm{d}\xi +$$
$$+ \int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)} \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right] \times$$
$$\times \left\{1 + D_n\frac{\xi}{1!} + D_n^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \cdots + D_n^{k}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^{k}}{k!}\right\} \mathrm{d}\xi.$$

Plugging L_n and D_n from (1.16), we get

$$
\begin{aligned}
B_n(t^*) = \int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} & e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\,[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)- \\
& - \left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)]\times \\
& \times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\right. \\
& + \left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots \\
& + \left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\times \\
& \left.\times\,\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}\mathrm{d}\xi+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\times \\
& \times\left\{\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\times\right. \\
& \times e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]}\times \\
& \times\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\times \\
& \left.\times e^{-k\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Straightforward computations lead then to

$$
\begin{aligned}
B_n(t^*) = \int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} & \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times \\
& \times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\times\right. \\
& \times e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1}\times \\
& \left.\times\, e^{\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}\mathrm{d}\xi+
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$
$$\times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\times\right.$$
$$\times e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\times$$
$$\left.\times\ e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\mathrm{d}\xi.$$

Thus, the $S_2(x,t^*)$ can be written in the form

$$S_2(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\cdot[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\right.$$
$$\left.-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n}{l}x+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\times\right.$$
$$\times\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1}\times\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\times\right.$$
$$\left.\times\ \Phi_n(t^*-\tau-\xi)]\,\mathrm{d}\xi\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{(k-1)\varsigma}^{t^*}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\times\right.$$

$$\times \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\Bigg\} \times$$

$$\times \sin\frac{\pi n}{l}x + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]} \times$$

$$\times \frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} \times$$

$$\times \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\Bigg\} \times$$

$$\times \sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\times$$

$$\times \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) -\right.$$

$$\left. - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\Bigg\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

On the strength of condition $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, we have for sufficiently large n

$$c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 < 0,$$

which guarantees the arguments of the exponential function to be negative. Hence, all but the last series converge absolutely and uniformly. We consider thus the last series

$$S_2^{k+1}(x,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\times$$

$$\times \frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k \times$$

$$\times \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\Bigg\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Exploiting the assumption that the Fourier coefficients $\Phi_n(t^*)$, $\Phi_n'(t^*)$ are rapidly decreasing for $n \to \infty$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m+1+\delta}\max_{s\in[-\tau,0]}\left[|\Phi_n''(s)| + n^2|\Phi_n'(s)| + n^4|\Phi_n(s)|\right] = 0$$

for some $\delta > 0$ and taking into account the smoothness of $\exp_\tau\{b, \cdot\}$ function, we conclude like in the previous case that the whole series S_2 as well as $\partial_t S_2$, $\partial_{xx} S_2$ converge absolutely and uniformly.

3. Finally, we consider the third series S_3. For an arbitrary t^* with $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, $k \le s$, we substitute $\xi := t^* - \tau - s$ and rewrite the integral as a Fourier series with the following integral coefficients

$$
\begin{aligned}
C_n(t^*) = &\int_{-\tau}^{t^*-\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n, \xi\} F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi + \\
&\quad + \int_{0}^{\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[1 + D_n \frac{\xi}{1!}\right] F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi + \dots \\
&\quad \dots + \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[1 + D_n \frac{\xi}{1!} + D_n^2 \frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + D_n^{k-1} \frac{(\xi - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Hence, S_3 reads as

$$
\begin{aligned}
S_3(x, t^*) = &\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{0}^{\tau} \left[e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] \times \right.\right. \\
&\left.\left. \times e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\xi} \frac{\xi}{1!}\right] F_n(t^* - \tau - \xi)\mathrm{d}\xi \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x + \dots \\
&\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} \left[e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] \times \right.\right. \\
&\left.\left. \times e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\xi} \frac{\xi}{1!} + \dots + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^{k-1} \times \right.\right.
\end{aligned}
$$

$$\times \frac{[t^*-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]}\Bigg] \times F_n(t^*-\tau-\xi)\mathrm{d}\xi\Bigg\} \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Similarly to the previous cases, for sufficiently large n we have

$$c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2<0,$$

which yields the convergence of all but the last subseries in each of the series due to the negativity of the argument of the exponential function. We consider a typical term where the convergence is not maintained by the exponential function

$$S_3^k(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau}\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]^{k-1}\frac{[t^*-(k-2)\tau]}{(k-1)!}\times$$
$$\times\, e^{\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right](\xi-(k-2))}F_n(t^*-\tau-\xi)\mathrm{d}\xi\Bigg\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Exploiting the assumption

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le m} n^{2(m-k)+1+\delta}\max_{(k-1)\tau\le s\le k\tau}\left[|F_n'(s)|+n^2|F_n(s)|\right]=0 \tag{2.30}$$

as well as the fact that $\exp_\tau\{b,\cdot\}$ is Lipschitz-continuous on $[-\tau,\infty)$, we similarly conclude the absolute and uniform converge of S_3, $\partial_t S_3$, and $\partial_{xx}S_3$.

This ends the proof. □

Finally, we give a Sobolev space interpretation of the conditions of Theorem 18. As a direct consequence of Lemma 7, we know that the conditions of Theorem 18 are fulfilled if the functions F and Φ from Equations (2.10) and (2.12) satisfy

$$\Phi\in\mathcal{C}^2\big([-\tau,0],X_{m+1}\big)\cap\mathcal{C}^1\big([-\tau,0],X_{m+2}\big)\cap\mathcal{C}^0\big([-\tau,0],X_{m+3}\big),$$
$$F\in\mathcal{C}^1\big([0,T],X_m\big)\cap\mathcal{C}^0([0,T],X_{m+1}\big).$$

Taking into account Definition 5 and Equations (2.10) and (2.12) and using the explicit characterization X_m, the latter holds under the assumptions of the following Corollary.

Corollary 19. The decay conditions on the Fourier coefficients in the previous theorem are satisfied if the following regularity

$$\varphi\in\bigcap_{k=0}^{2}\mathcal{C}^k\big([-\tau,0],H^{2m+2(3-k)}\big((0,l)\big)\big),$$
$$\mu_1,\mu_2\in\mathcal{C}^3([0,T]),$$
$$f\in\mathcal{C}^1\big([0,T],H^{2m}\big((0,l)\big)\big)\cap\mathcal{C}^0\big([0,T],H^{2m+2}\big((0,l)\big)\big)$$

and compatibility conditions

$$\varphi(0,t)=\mu_1(t),\quad \varphi(l,t)=\mu_2(t),$$
$$\partial_x^{2j}\partial_t^k\varphi(0,t)=0,\quad \partial_x^{2j}\partial_t^k\varphi(l,t)=0,\quad k=0,1,2,\ j=1,\dots,m+2-k$$

for $t\in[-\tau,0]$ and

$$\begin{aligned}
f(0,t)-\dot\mu_1(t)+c_1\mu_1(t)+c_2\mu_1(t-\tau)&=0,\\
f(l,t)-\dot\mu_2(t)+c_1\mu_2(t)+c_2\mu_2(t-\tau)&=0,\\
f_t(0,t)-\ddot\mu_1(t)+c_1\dot\mu_1(t)+c_2\dot\mu_1(t-\tau)&=0,\\
f_t(l,t)-\ddot\mu_2(t)+c_1\dot\mu_2(t)+c_2\dot\mu_2(t-\tau)&=0,\\
\partial_x^{2j}f(0,t)=0,\quad \partial_x^{2j}f(l,t)&=0,\quad j=0,\dots,m,\\
\partial_x^{2j}\partial_t f(0,t)=0,\quad \partial_x^{2j}\partial_t f(l,t)&=0,\quad j=0,\dots,m-1
\end{aligned}$$

for $T\in[0,T]$ are satisfied.

BIBLIOGRAPHY

1. Adams R. A. Sobolev spaces. — Second Ed. / R. A. Adams, J. J. F. Fournier // Pure and Applied Mathematics. — Springer, New York, 2003. — V. 140. — P. 1–305.
2. Azizbayov E. I. The solution of an Equation with Delay / E. I. Azizbayov, D. Ya. Khusainov // Bulletin of the National Taras Shevchenko University of Kyiv, Series: Cybernetics. — 2013. — № 12. — P. 4–14. (in Russian)
3. Bátkai A. Semigroups for Delay Equations / A. Bátkai, S. Piazzera // Research Notes in Mathematic. — A. K. Peters: Wellesley MA, 2005. — V. 10. — P. 1–259.
4. Bátkai A. Asymptotic Behaviour of Parabolic Problems with Delays in the Highest Order Derivatives / A. Bátkai, R. Schnaubelt // Semigroup Forum. — 2004. — V. 60. — № 3. — P. 369–399.
5. Bazykin A. D. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. — World Scientific Publ. Co. Inc., River Edge, NJ, 1998. — P. 1–193.
6. Denk R. Kompendium der Analysis / R. Denk, R. Racke — Vieweg+Teubner Verlag, 2011. — V. 1 & 2.
7. Eck Ch. Mathematische Modellierung / Ch. Eck, H. Garcke, P. Knabber — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — P. 1–503.
8. Els'gol'ts L. E. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments / L. E. Els'gol'ts, S. B. Norkin // Mathematics in Science and Engenieering. — Academic Press, 1973. — V. 105. — P. 1–357.
9. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics // Mathematics and Its Applications. – Kluwer Academic Publishers, 1992. — V. 74. — P. 1–501.
10. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations // Applied Mathematical Sciences Series. — 1977. — V. 3. — P. 1–365.
11. Khusainov D. Ya. On Relative Controllability in Pure Delay Systems / D. Ya. Khusainov, G. V. Shuklin // Applied Mechanics. — 2005. — V. 41. — № 2. — P. 118–130.

12. Kukharenko A. A. Control of the Solution of a Parabolic Type Linear Equation / A. A. Kukharenko, D. Ya. Khusainov // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2011. — V. 8. — № 2. — P. 1–20. (in Russian)
13. Lasiecka I. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories / I. Lasiecka, R. Triggiani // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — 2010. — V. 74. — P. 1–644.
14. Lasiecka I. Abstract Hyperbolic-Like Systems over a Finite Time Horizon / I. Lasiecka, R. Triggiani // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — 2011. — V. 74. — P. 1–423.
15. Nicaise S. Stabilization of the Wave Equation with Boundary or Internal Distributed Delay / S. Nicaise, Ch. Pignotti // Differential Integral Equations. — V. 21. — № 9–10. — P. 935–958.
16. Okubo A. Diffusion and Ecological Problems. Modern Perspectives / A. Okubo, S. A. Levin // Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001. — P. 1–467.
17. Renardy M. An Introduction to Partial Differential Equations. — Second Ed. / M. Renardy, R. Rogers // Series: Texts in Applied Mathematics. — 2004. — V. 13. — P. 1–434.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 03680, Ukraine.

University of Konstanz, Konstanz, 78457, Germany.

Baku State University, Baku, AZ 1148, Azerbaijan.

Received on 27.06.2013

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Журнал обчислювальної та прикладної

2013 **МАТЕМАТИКИ** 2(112)

Заснований в 1965 році

ЗМІСТ

Серія "Оптимізація"

С. И. Доценко
Математические модели стабильных размещений 3
Л. Д. Карабін, Д. А. Клюшин, Н. І. Ляшко
Однофазна задача Стефана для оптимального точкового керування адресною доставкою ліків до злоякісних пухлин 14
А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова
Размещение объектов в контейнере параболической формы с круговыми стеллажами с учетом ограничений поведения 23
О. Г. Павлюченко
Использование теоретико-игрового подхода в задачах минимаксного управления 33
В. В. Семенов
Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами 42
В. П. Шило
Алгоритм случайного повторного локального поиска решения задачи о покрытии минимальной мощности 53
Г. Н. Яськов
Размещение максимального числа равных кругов в круге 60

Серія "Прикладна математика"

В. І. Біленко, А. І. Дерієнко, Н. Г. Кирилаха
Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика 68
В. Ю. Гончаренко
Программная надежность распределенных вычислительных систем .78
С. С. Зуб
Группа Ли как конфигурационное пространство для простой механической системы 84
Н. Л. Іващук, Б. В. Гнатів, І. І. Кавалець
Побудова узагальненої моделі олігополії Курно-Пу та дослідження стійкості її точки рівноваги 94
Е. В. Івохін
Задачі дослідження динаміки нечітких різницевих систем 105
D. A. Klyushin, V. V. Alexeenko, N. V. Boroday
Proximity measure based on inclusion statistics and its application 125

В. І. Кудін
Аналіз лінійної системи методом допустимих базисних матриць 131
А. Н. Лавренюк, Н. С. Лавренюк
Метод оптимизации вычислений с использованием GPU в гетерогенных кластерах и в грид-сети 138
О. О. Покутний
Експоненціальна дихотомія та обмежені розв'язки рівняння Шрьодінгера 148
В. В. Семенов
Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами 155
А. В. Стёпкин
Распознавание конечных неориентированных графов коллективом агентов 161
D. Ya. Khusainov, M. Pokojovy, E. I. Azizbayov
On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay 169

PDMU-2014
XXIII International Conference
PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES
May 12 - 16, 2014
Mukachevo (Polyana), Ukraine

ORGANIZED BY

Taras Shevchenko National University of Kyiv (Faculty of Cybernetics)
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv Polytechnic National University

IN COOPERATION WITH

International Institute for Applied Systems Analysis (Austria)
Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
System Analysis Committee of Presidium National Academy of Sciences of Ukraine
Academy of Sciences "Vysha Skola" of Ukraine

TOPICS:

1. Statistical decisions, inference and applications.
2. Dynamics systems and decision making under uncertainties.
3. Decision making, prediction in medicine, economics, business, financing, insurance.
4. Decision making in fuzzy environment.
5. Decision making, prediction in environmental problems.
6. Decision making in demography problems.
7. Support systems for decision making in different fields.
8. Risk theory and applications.

DEADLINES: April 1, 2014 — Preregistration, submission of abstracts notification of acceptance, payment of fee.

POST-ADDRESS*:* Organizing Committee PDMU-2013
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv
64, Volodymyrs'ka St., MSP 01601, Kyiv, Ukraine.
Tel. +380 44 259 0534 or 259 0520.
Fax +380 44 259 0439.
Web-site: http://www.PDMU.univ.kiev.ua E-mail: pdmu@univ.kiev.ua