

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Журнал обчислювальної та прикладної
2013 МАТЕМАТИКИ 1(111)
Заснований в 1965 році

Головний редактор С. І. Ляшко

Редакційна колегія

Ф. Г. Гаращенко, О. Ю. Грищенко, О. К. Закусило, М. З. Згуровський,
І. М. Ляшенко, В. Л. Макаров, О. Г. Наконечний, І. М. Парасюк,
І. В. Сергієнко, О. Б. Стеля (відп. секретар), Д. Я. Хусаїнов, А. О. Чикрій

Серія “Прикладна математика”

Головний редактор серії О. Ю. Грищенко

Редакційна колегія серії

В. М. Булавацький, О. Я. Григоренко, В. Ф. Губарєв, Д. А. Ключин,
В. В. Козоріз, О. М. Новіков, Т. Є. Романова

Серія “Оптимізація”

Головний редактор серії С. І. Ляшко

Редакційна колегія серії

Ю. М. Данілін, В. В. Семенов

Міжнародна редакційна рада

Л. Берковиць (США), І. Гаврилюк (Німеччина), Ю. Гальперін (Канада),
Б. Голденгорін (Голландія), Ю. Єрмольєв (Австрія), Ф. Імаго (Японія),
Я. Кравчак (Н. Зеландія), Б. Мордухович (США), П. Пардалос (США),
Н. Хритоненко (США), Ю. Яценко (США)

Редакційний відділ

К.О. Пришляк, І.П. Сіренко

Адреса редколегії:

Кафедра обчислювальної математики, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ, МСП 01601, Україна.

E-mail: opmjourn@gmail.com [html://www.opmj.univ.kiev.ua](http://www.opmj.univ.kiev.ua)

Затверджено Вченою радою факультету кібернетики
17 вересня 2012 року, протокол №2

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013
©“ТВіМС”, 2013

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ 4246 від 26.05.2000
Підписано до друку 17.09.2012

Для публікації в журналі приймаються не опубліковані раніше наукові праці з провідних методів дослідження та розв'язування задач оптимізації, обчислювальної математики, математичної фізики, теорії фільтрації, теорії пружності, математичної кібернетики, теорії управління та інших напрямків.

У журналі публікуються статті українською, російською й англійською мовами.

Стаття у друкованому вигляді з підписами авторів подається особисто або електронною поштою з подальшим дублюванням на папері в одному примірнику.

До статті додається анкета автора (-ів): ПІБ автора(-ів) українською, російською й англійською мовами, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреса проживання й організації, телефон, факс, електронна пошта тощо та додаткова інформація: назва статті, резюме та ключові слова українською, російською й англійською мовами на електронному носії особисто або електронною поштою (див. "Анкета автора" на сайті журналу www.ormj.univ.kiev.ua).

Обсяг статті не має перевищувати 12 сторінок, включаючи резюме (обсягом до 500 друкованих знаків, яке містить коротку характеристику досліджуваної проблеми, мету роботи й конкретну інформацію про отримані результати), рисунки, таблиці, графіки, список літератури та індекс УДК. Текст статті повинен відповідати структурній схемі: короткий літературний огляд проблеми, що розглядається; мета дослідження; постановка задачі та її актуальність; методи її вирішення й отримані результати; висновки про наукову новизну та практичне значення результатів. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком її згадування в тексті (посилання у тексті — арабськими цифрами у квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до ГОСТу 7.1:2006 (ознайомитися можна на сайті). Стаття має бути підготовлена за допомогою редактора LaTeX.

Редактор LaTeX може бути наданий або надісланий на електронному носії поштою на прохання автора. Додаткову інформацію, шаблони статті та анкету автора можна знайти на сайті журналу.

Місцезнаходження редакції: Україна, 01601, м. Київ, просп. Глушкова 4д, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, к. 218, редакція журналу "Журнал обчислювальної та прикладної математики", e-mail: ormjournal@gmail.com.

**90 РОКІВ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АКАДЕМІКА ІВАНА
ІВАНОВИЧА ЛЯШКА, ГОЛОВНОГО РЕДАКТОРА
ЖУРНАЛУ (1969–2008)**



9 вересня 2012 виповнилося 90 років від дня народження академіка НАН України Івана Івановича Ляшка, відомого українського математика, першого декана і засновника факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, організатора потужної наукової школи, який майже 40 років очолював редколегію нашого журналу.

Іван Іванович відомий науковій громадськості своїми роботами у галузі чисельних методів розв'язання задач математичної фізики. Він одержав принципово нові результати із розвитку та застосування методу сумарних зображень, що дало можливість будувати розв'язки скінченнорізницевих задач у замкненому вигляді і записувати їх у вигляді формул сумарних зображень. Іваном Івановичем було отримано розв'язок цікавої як з теоретичної, так і з практичної точок зору та досить складної задачі фільтрації під багатошпунтовою греблею при довільному криволінійному водопідпорі. Для цього було доведено низку варіаційних теорем, які органічно увійшли до теорії узагальнених аналітичних функцій. Одержані результати великою мірою сприяли обґрунтуванню та розвитку розробленого на кафедрі математичної фізики методу мажорантних областей і руху граничних точок.

Результатом проведених досліджень стала монографія "Розв'язання фільтраційних задач методом сумарних зображень", в якій багато уваги приділено питанням використання теоретичних результатів для розв'язання практичних задач, досліджено випадки неоднорідних ґрунтів при горизонтальних і вертикальних лініях розділення однорідності. Розглянуто також багато інших задач, які мають безпосереднє практичне значення, що принесло визнання цієї праці не лише серед математиків, а й у фахівців із гідротехнічного будівництва.

Результати подальших досліджень опубліковано в монографіях "Чисельно-аналітичне розв'язання задач теорії фільтрації" та "Метод мажорантних областей в теорії фільтрації", що вийшли відповідно у 1973 та 1974 роках у видавництві "Наукова думка".

І. І. Ляшко запропонував ідею створення автоматизованої системи розв'язання певних класів задач математичної фізики методом сумарних зображень, яку було успішно реалізовано і описано у виданій в 1977 році монографії "Питання автоматизації розв'язання задач фільтрації на ЕОМ".

У подальшому І. І. Ляшко одержав ряд важливих результатів, які дозволили розв'язувати широкі класи задач фільтрації ґрунтових вод, прогнозування запасів води, вологосолеперенесення при бічних промивках та промивках на рисових системах, просочування крізь земляні споруди.

Цікаві результати одержано І. І. Ляшком, В. П. Діденком та О. Є. Цитрицьким при вивченні фільтрації шумів. Автори вперше у світовій практиці розробили стійкі методи і алгоритми розв'язання даного класу задач з використанням ідей регуляризації у поєднанні з технікою оснащених гільбертових просторів, що мало значний практичний інтерес для багатьох галузей народного господарства. Отримані результати відображено у монографіях "Фільтрація шумів", "Обробка вимірювань при дослідженнях складних систем" та "Математичні моделі при вимірюваннях".

У 1990-х роках І. І. Ляшко з учнями розробили ефективну методику чисельного розрахунку тепломасоперенесення в неоднорідних поруватих середовищах, що ґрунтується на оригінальних різницевих схемах для розв'язання крайових задач для лінійних і квазілінійних еліптичних, параболічних, псевдопараболічних та псевдогіперболічних рівнянь, які охоплюють широке коло класичних і неklasичних задач математичної фізики.

Під керівництвом І. І. Ляшка було розроблено комп'ютерну систему прийняття рішень для захисту підземних вод від забруднень, яка пройшла успішну адаптацію на реальних об'єктах, небезпечних для довкілля — на майданчику захоронення радіоактивних відходів і на ставку-охолоджувачу Чорнобильської АЕС.

Докладніше про наукову діяльність Івана Іванович викладено в наступній статті цього номера журналу.

Очоливши колектив своїх учнів та колег, І. І. Ляшко в 1968 р. створив одну з найпотужніших у Радянському Союзі школу фільтрації. В 1991 році Сергій Іванович Ляшко, член-кореспондент Національної академії наук України, завідувач кафедри обчислювальної математики, заснував на базі

існуючої наукової школи нову школу "Моделювання та оптимізація інформаційних систем", яка отримала світове визнання.

В 1969 р. Іван Іванович став головним редактором міжвідомчого наукового збірника "Вычислительная и прикладная математика", який у 2000 році здобув державну реєстрацію як "Журнал обчислювальної та прикладної математики". В журналі публікуються наукові результати отримані в науковій школі, а також цікаві статті українських та зарубіжних вчених.

Крім великих здібностей науковця і педагога, у Івана Івановича Ляшка був талант організатора наукового та навчального процесів. У 1964 році він очолює кафедру математичної фізики, а згодом стає деканом механіко-математичного факультету.

У 1969 році Іван Іванович очолив кафедру обчислювальної математики. І саме ця кафедра згодом стала базовою першого в СРСР факультету кібернетики, який він разом з Віктором Михайловичем Глушковым створив у Київському державному університеті і став першим його деканом. Під керівництвом І. І. Ляшка факультет кібернетики став одним з найсильніших і перспективних факультетів університету.

Автор і співавтор 40 наукових статей, понад 45 монографій, підручників, навчальних посібників, довідників, 6 авторських свідоцтв на винаходи. Наукові здобутки і громадську діяльність високо оцінено державою і науковим загалом. Івана Івановича Ляшка у 1969 році обрано член кореспондентом АН УРСР, а у 1973 — академіком АН УРСР. За бойові та трудові заслуги він у різні часи нагороджений орденами "Вітчизняної війни" другого ступеня, "Трудового Червоного Прапора" (1981), "За заслуги" III-го ступеня (1997), медалями "Ушакова", "За оборону Севастополя" та більш ніж 15-ю медалями СРСР і України, Почесною Грамотою Верховної Ради України, Дипломами пошани Виставки досягнень народного господарства СРСР та УРСР. У 1972 р йому присвоєно Почесне звання "Заслужений діяч науки УРСР", а у 1981, 1989 роках він стає Лауреатом Державної премії УРСР, премії ім. М.М. Крилова АН УРСР (1975), згодом — премії ім. Ярослава Мудрого (АПН України).

Іван Іванович Ляшко помер 29 березня 2008 року, але пам'ять про нього назавжди збережеться в серцях близьких та рідних людей, тих, які з ним працювали, були його учнями і продовжують його справу.

УДК 517.929

НАУКОВИЙ СПАДОК АКАДЕМІКА І. І. ЛЯШКА

О. Ю. Грищенко, Д. А. Ключин

РЕЗЮМЕ. В огляді висвітлені основні етапи і результати наукової діяльності видатного українського вченого академіка Національної академії наук України Івана Івановича Ляшка. Стисло викладені основні досягнення І.І.Ляшка в галузі обчислювальної та прикладної математики, зокрема, чисельно-аналітичних методів теорії фільтрації, чисельних методів розв'язання класичних і неklasичних задач математичної фізики, математичного забезпечення складних обчислювальних експериментів і оптимального керування системами з розподіленими параметрами.

9 вересня 2012 року наукова спільнота відзначає 90 років з дня народження засновника факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, голови загальновідомої наукової школи академіка НАН України Івана Івановича Ляшка.

В середині ХХ-го сторіччя, коли застосування ЕОМ ще не набуло широкого розвитку, дуже актуальним був пошук економних і стійких до накопичення похибок обчислювальних методів. Це привело до появи чисельно-аналітичних методів розв'язання задач математичної фізики, в яких розв'язок виражався у вигляді аналітичних формул із невідомими параметрами, які, у свою чергу, знаходилися за допомогою чисельних методів. Перші наукові роботи І. І. Ляшка були присвячені дослідженням в галузі чисельно-аналітичних методів розв'язування задач теорії фільтрації. В цих статтях був встановлений ряд аналітичних залежностей, які дозволяли визначити основні фільтраційні характеристики потоків ґрунтових вод під гідроспороудою. Зокрема, в кандидатській дисертації "Розв'язання задачі фільтрації від багатошпунтовою греблею при довільному криволінійному водопорі" [1] І. І. Ляшку вдалося побудувати залежності вихідних швидкостей фільтрації від форми підземного водопору, отримати формули для розрахунку витрат рідини, розподілу протитиску на флютбеті, визначити точні верхні та нижні оцінки основних фільтраційних характеристик.

Протягом 1960–1968 рр. І. І. Ляшко удосконалив метод сумарних зображень, запропонований проф. Г. М. Положієм для розв'язання багатовимірних задач математичної фізики, пов'язаних із лінійними рівняннями з частинними похідними, і розповсюдив його на теорію фільтрації.

Метод сумарних зображень є дискретним аналогом метода інтегральних зображень для розв'язання крайових задач математичної фізики, сформульованих у дискретному вигляді. Особливістю цього методу є можливість

подання розв'язків у вигляді формул, що містять відносно невелику кількість невідомих параметрів, які знаходяться шляхом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Така властивість є дуже важливою з обчислювальної точки зору, оскільки більшість невідомих, що входять до скінченно-різницевої задачі, не впливають на процес розрахунку. Це дозволяє зменшити обсяг обчислювальної роботи і запобігти накопиченню обчислювальної похибки. Завдяки цьому метод сумарних зображень став широко використовуватися для розв'язання фільтраційних задач. І. І. Ляшко узагальнив формули методу сумарних зображень для смуги і напівсмуги, а також установив формули сумарних зображень для крайових задач, що описують фільтраційний потік в області, яка складається з двох середовищ, розділених горизонтальною або вертикальною лінією розділу. На основі цих формул І. І. Ляшко розв'язав задачі напірної фільтрації під флютбетами, зокрема, розглянув випадки багатошпунтових незаглиблених і заглиблених, дренажних і розрізних флютбетів, випадок кількох флютбетів із шпунтами, фільтрацію із багатоступінчастими перепадами і флютбетами на різних позначках дна вернього і нижнього б'єфів, а також приток води до котлованів в одно- та двохшаровому середовищі. Крім того, І. І. Ляшко вдалося побудувати залежності вихідних швидкостей фільтрації від форми підземного водопору, отримати формули для розрахунку витрат рідини, розподілу протитиску на флютбеті, визначити точні верхні та нижні оцінки основних фільтраційних характеристик. В класичній постановці стаціонарна задача фільтрації ґрунтових вод в однорідному середовищі зводиться до крайової задачі

$$Lu = 0 \quad \text{в області фільтрації}$$

та

$$lu = \alpha \quad \text{на межі цієї області.}$$

Тут L — оператор Лапласа, а l — оператор граничних умов. Складність задачі полягає в тому, що область, в якій шукається розв'язок задачі (область фільтрації), як правило, має надзвичайно складну форму, а крайові умови на частині її межі лише позначаються своїм типом, наприклад лінії рівних потенціалів чи лінії току, але числові значення цих потенціалів невідомі і підлягають подальшому визначенню. Крім того, на одній частині межі може бути задано функцію току, а на іншій — потенціальну функцію. Зв'язок між цими функціями відомий, але реалізувати його чисельно складно.

Для побудови розв'язку такого типу задач І. І. Ляшко використав загальну формулу сумарних зображень

$$\vec{U}(i) = P\{\mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - h^2 \sum_{k=1}^m G(i, k) P^* \rho \vec{f}(k)\}$$

де P — фундаментальна матриця для трьохдіагональної матриці, що відповідає системі різницевих рівнянь з оператором Лапласа, P^* — транспонована до неї, вектори $\vec{A}$ та $\vec{B}$ визначаються із відомих крайових умов задачі, μ^i , ν^i та $G(i, k)$ — діагональні матриці, цілком визначені умовою

задачі та методом. В цій формулі він поклав, що права частина рівняння є відмінною від нуля лише в точках, де крайові умови явно не визначені. Отже, відповідні значення правої частини теж підлягають визначенню. Для знаходження відповідних значень вектор-функції $\vec{f}$ були використані закони збереження, зокрема збереження витрат рідини через заданий переріз потоку між двома лініями току. Такий підхід виявився ефективним. Побудована система алгебраїчних рівнянь мала невисокий порядок, її матриця була добре обумовлена. Після визначення невідомих параметрів, значення шуканого розв'язку задачі можна було обчислити у довільній точці області, не обчислюючи в інших. Паралельно з цим І. І. Ляшко одержав ряд результатів пов'язаних з удосконаленням та розвитком методу сумарних зображень. Були одержані формули для необмежених областей: півсмуги, смуги, півплощини тощо. Результати цих робіт стали основою для докторської дисертації і монографії "Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений" [2].

Період з 1969 по 1975 рр. характеризується подальшим розвитком чисельно-аналітичних методів та розширенням спектру задач математичної фізики, що цікавили І. І. Ляшка. Роботи, написані у цей період, містять фундаментальні теоретичні результати з розв'язування багатовимірних задач математичної фізики у дискретній постановці. Крім того, ці результати отримують широке застосування при розрахунку Дніпровських наливних гребель, при розрахунку фільтраційних характеристик гребель Київської та Канівської ГЕС і багатьох інших гідротехнічних об'єктів.

Використовуючи метод мажорантних областей, І. І. Ляшко із співавторами одержали розрахункові алгоритми з мажорантною оцінкою для низки фільтраційних задач з суттєво непрямолінійними межами, коли область фільтрації обмежена потенціальними лініями або лініями току, або їх комбінаціями, а також для випадку криволінійного водопору. Ці результати викладені у монографіях "Численно-аналитическое решение задач теории фильтрации" [3] і "Метод мажорантных областей в теории фильтрации" [4].

У 1975 році цикл робіт з чисельно-аналітичних методів розв'язування крайових задач математичної фізики був відзначений премією ім. М. М. Крилова АН УРСР. Період з 1976 по 1991 рр. став етапом подальшого розвитку теоретичних досліджень в галузі теорії фільтрації, автоматизації чисельних розрахунків та математичного забезпечення складного експерименту. Результати розробок наукового колективу, очолюваного І. І. Ляшком, були викладені у монографіях "Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ" [5], "Расчет фильтрации в зоне гидросооружений" [6] і "Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем" [7]. У 1981 році за цикл робіт з методів розв'язування крайових задач математичної фізики та їх застосування в теорії фільтрації колектив вчених під керівництвом І. І. Ляшка був удостоєний Державної премії УРСР.

В той же час І. І. Ляшко отримав значні результати області дослідження динамічних систем. У циклі робіт, написаних у співавторстві із професором В. П. Діденком, зокрема у монографіях "Динамические системы с разрывными коэффициентами" [8] і "Фильтрация шумов" [9] автори розробили

нові стійкі методи і алгоритми розв'язування задач фільтрації випадкових процесів за допомогою регуляризації та оснащених гільбертових просторів.

Ідеї І. І. Ляшка та В. П. Діденка були розвинені в подальшому в монографії "Математическое обеспечение сложного эксперимента" [10–14]. У цій монографії розглянуті питання розробки та обґрунтування стійких алгоритмів оцінювання адекватності математичних моделей, розвинені математичні моделі, що використовуються в радіотехніці і вивчені питання відновлення апріорних характеристик динамічних систем в задачах оцінювання.

Зокрема, у першому томі цієї фундаментальної монографії формулюються й обговорюються основні математичні проблеми, що виникають у зв'язку з розвитком вимірювально-обчислювальних комплексів, що знаходять застосування в різних областях науки і техніки; розглядаються питання розробки і математичного обґрунтування стійких алгоритмів оцінювання (фільтрації) і адекватності математичних моделей реальним об'єктам. У другому томі розглядаються математичні моделі, що описують функціонування складного вимірювально-обчислювального комплексу і деякі методи визначення параметрів руху об'єкта, що летить, за траєкторними вимірами. Ці моделі призначені як для математичного відображення основних процесів у радіотехнічних пристроях, використовуваних у вимірювально-обчислювальних комплексах так і для прогнозування руху літальних об'єктів при різних режимах зовнішнього впливу на нього. У третьому томі розглядаються деякі напрямки теорії математичного моделювання складних систем, засновані на використанні обчислювального експерименту. Методи, що викладаються, призначені для застосування при проектуванні, дослідженні і використанні радіотехнічних систем і вимірювально-обчислювальних комплексів. Розглядаються загальні питання методології математичних моделей і роботи з ними, розв'язання задачі автоматизації побудови моделюючих комплексів програм. Описуються методи побудови математичних моделей зовнішнього середовища, керування структурою вимірювально-обчислювальних комплексів і прогнозу стану динамічних систем в умовах невизначеності, а також елементи теорії векторної оптимізації в нескінченно-вимірних просторах і її застосування. У четвертому томі освітлені питання, пов'язані з дискретизацією задач, що ставляться при дослідженні складних систем. Викладено чисельні методи розв'язання інтегральних і звичайних диференціальних рівнянь, методи відновлення функцій-сигналів по кінцевій множині даних, розглянуті питання, пов'язані з математичною декомпозицією задач. У п'ятому томі обговорюються проблеми, що виникають у зв'язку з розвитком вимірювально-обчислювальних комплексів, що знаходять застосування в різних областях науки і техніки. Розглядаються питання розробки й обґрунтування методів аналізу даних і алгоритмів, що входять до складу спеціального математичного забезпечення вимірювально-обчислювального комплексу, а також ергономічний аналіз діяльності оператора автоматизованих систем. Приводиться комплекс програм статистичної обробки результатів якісних вимірів.

У 1991 році І. І. Ляшко підсумував результати досліджень з теорії фільтрації у монографії "Численное решение задач тепло- и массопереноса в

пористых средах” [15]. Починаючи з 1992 року, І. І. Ляшко розпочав розробку чисельних методів узагальненого оптимального керування системами з розподіленими параметрами. До таких систем зводяться, зокрема, деякі задачі теорії фільтрації, такі як вологоперенос на фоні горизонтального дренажу або зрошення із точкових та лінійних джерел у тріщинуватому ґрунті [16–18]. У цьому напрямку І. І. Ляшко та його учні досягли значних успіхів. Зокрема, була побудована теорія чисельних методів імпульсного і точкового керування неklasичними системами із розподіленими параметрами — псевдопараболічними та псевдогіперболічними.

Напрямки, визначені І. І. Ляшком, стали орієнтирами для роботи його численних послідовників. Під керівництвом І. І. Ляшка захистили кандидатські та докторські дисертації більше 40 його учнів. Список його робіт містить понад 400 публікацій [19]. Традиції школи І. І. Ляшка продовжують його учні і сьогодні, досліджуючи такі фундаментальні проблеми, як розробка теорії існування і єдиності узагальнених розв’язків класичних та неklasичних крайових задач з гладкими та розривними коефіцієнтами і сингулярними правими частинами; теорія розв’язності задач неопуклої оптимізації досліджуваних систем з функціоналами якості та керуваннями загального вигляду; дослідження необхідних і достатніх умов точної та асимптотичної керованості розподілених систем; дослідження необхідних умов оптимальності керування розподіленими системами; розробка і дослідження чисельних методів розв’язання задач неопуклої оптимізації неklasичних розподілених систем; розробка і дослідження ефективних чисельних методів розв’язання крайових задач математичної фізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшко И. И. Решение задачи о фильтрации под многоточечной плотинкой при произвольном криволинейном подземном водоупоре: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук / И. И. Ляшко. — Киев, 1955. — 7 с.
2. Ляшко И. И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений / И. И. Ляшко. — Киев: Издательство Киевского университета, 1963. — 175 с.
3. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации : монография / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко; Ин-т математики АН УССР. — Киев: Наукова думка, 1973. — 264 с.
4. Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий; АН УССР. Ин-т математики. — Киев: Наук. думка, 1974. — 200 с.
5. Ляшко И. И. Расчет фильтрации в зоне гидросооружений / И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий, А. Я. Олейник. — Киев: Будівельник, 1977. — 152 с.
6. Ляшко И. И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. — Киев: Наукова думка, 1977. — 295 с.

7. Ляшко И. И. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем / А. В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. — Киев: Вища школа, 1981. — 287 с.
8. Ляшко И. И. Динамические системы с разрывными коэффициентами / И. И. Ляшко, В. П. Диденко. — Киев: Наукова думка, 1977. — 82 с.
9. Ляшко И. И. Фильтрация шумов / И. И. Ляшко, В. П. Диденко, О. Е. Цитрицкий. — Киев: Наукова думка, 1979. — 232 с.
10. Математическое обеспечение сложного эксперимента: В 5-ти т. / Ю. А. Белов, В. П. Диденко, Н. Н. Козлов и др. ; под общ. ред. И. И. Ляшко. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1982. — 304 с.
11. Математическое обеспечение сложного эксперимента: В 5-ти т. / Ю. А. Белов, В. П. Диденко, Н. Н. Козлов и др.; под общ. ред. И. И. Ляшко. Т. 2. Математические модели при измерениях. — Киев: Наукова думка, 1983. — 264 с.
12. Математическое обеспечение сложного эксперимента : В 5-ти т. / Ю. А. Белов, Н. Н. Козлов, И. И. Ляшко и др.; под общ. ред. И. И. Ляшко. Т. 3. Основы теории математического моделирования сложных радиотехнических систем — Киев: Наукова думка, 1985. — 272 с.
13. Математическое обеспечение сложного эксперимента: В 5 т. / Ю. А. Белов, Н. Н. Козлов, И. И. Ляшко и др.; под общ. ред. И. И. Ляшко. Т. 4. Приближенные методы решения задач математического моделирования сложных радиотехнических систем. — Киев: Наукова думка, 1986. — 264 с.
14. Математическое обеспечение сложного эксперимента : В 5 т. / Ю. А. Белов, Н. Н. Козлов, И. И. Ляшко и др.; под общ. ред. И. И. Ляшко. Т. 5. Проблемы построения математического и программного обеспечения измерительно-вычислительных комплексов. — Киев: Наукова думка, 1990. — 368 с.
15. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — Киев: Наукова думка, 1991. — 261 с.
16. Иван Иванович Ляшко. Библиография ученых Украинской ССР / [сост. Крашенинникова О. Е., Мистецкий Г. Е.] — Киев: Наукова думка, 1982. — 56 с.
17. Ляшко И. И. Численное решение псевдопараболических уравнений / И. И. Ляшко, С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. Ю. Спивак // Доповіді НАН України. — 1998. — № 5. — с.29 – 34.
18. Ляшко И. И. Управление псевдогиперболическими системами с помощью сосредоточенных воздействий / И. И. Ляшко, С. И. Ляшко, В. В. Семенов // Проблемы управления и информатики. — 2000. — №5. — С. 30 – 45.
19. Видатні постаті Київського університету: Ляшко Іван Іванович / [упоряд.: І. М. Александрович, Ю. З. Прохур, В. М. Склеповий]. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. — 103 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64/13, МСП, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 4.01.2012

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА
П. Я. ПОЛУБАРИНОВОЙ-КОЧИНОЙ В ТЕОРИИ
ФИЛЬТРАЦИИ**

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

РЕЗЮМЕ. Работа посвящена точному аналитическому методу решения плоской задачи теории установившейся фильтрации П. Я. Полубариновой-Кочиной.

К числу точных аналитических методов решения плоской задачи теории установившейся фильтрации [1–7] относится метод, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [8]. Последний был разработан и применен к решению весьма сложных задач фильтрации П. Я. Полубариновой-Кочиной [9–27], которая тем самым блестяще реализовала оригинальную идею, предложенную в свое время Н. Е. Кочиным. Серьезное теоретическое обоснование, простота и наглядность метода предупредили широкое его признание, обычно под названием метода П. Я. Полубариновой-Кочиной [1, 3, 4].

Упомянутый метод состоит в следующем.

Обозначим через $\omega(\zeta)$ и $z(\zeta)$ функции, дающие конформное отображение областей комплексного потенциала ω и фильтрации z на верхнюю полуплоскость ζ , и введем функции

$$\Omega = \frac{d\omega}{d\zeta}, \quad Z = \frac{dz}{d\zeta}. \quad (1)$$

При отыскании зависимости комплексного потенциала течения ω от комплексной координаты z точек области движения дело, как известно, сводится к конформному отображению на верхнюю полуплоскость кругового многоугольника. Пусть односвязный круговой многоугольник плоскости w имеет границу, состоящую из конечного числа n — круговых дуг и прямолинейных отрезков. Предположим, что вершины многоугольника с внутренними углами $\pi\nu_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) переходят в точки a_k вещественной оси плоскости ζ . Пусть угол при вершине, приходящей в бесконечно удаленную точку ∞ , будет $\pi(\nu'_n - \nu''_n)$.

Тогда комплексная скорость $w = d\omega/dz = \Omega/Z$ может быть представлена в виде отношения линейных комбинаций двух решений следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с n регулярными особыми точками [8, 28]:

$$y'' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \nu_k}{\zeta - a_k} y' + \frac{\nu'_n \nu''_n \zeta^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} \lambda_i \zeta^i}{4 \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)} y = 0, \quad (2)$$

где λ_i — некоторые вещественные постоянные. Эти $n-3$ величины в уравнении (2) представляют так называемые дополнительные (акцессорные) параметры, которые, наряду с точками a_k , заранее неизвестны.

Если найти два линейных независимых интеграла уравнения (2) $y_1(\zeta)$ и $y_2(\zeta)$, то искомые величины могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\Omega &= G(\zeta)(C_1 y_1 + C_2 y_2), \\ Z &= G(\zeta)(C_1 y_1 + C_2 y_2),\end{aligned}$$

где постоянные C_i определяются по координатам вершин рассматриваемого многоугольника. Что касается функции $G(\zeta)$, то она имеет лишь регулярные особенности в точках a_k и может быть представлена в виде

$$G(\zeta) = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\rho_k},$$

причем характеристические показатели ρ_k , согласно методу П. Я. Полубариновой-Кочиной, определяются из рассмотрения граничных условий на прилегающих к соответствующим вершинам участках контура и принятой схемы течения вблизи этих вершин [2, 9–11, 20, 21]. Геометрический способ нахождения показателей ρ_k разработан Б. К. Ризенкампом [29] и С. Н. Нумеровым [30]. Наряду с этим предложен также способ получения показателей в тригонометрической форме [31, 32].

Таким образом, задача определения неизвестных функций Ω и Z тесно связана с конформным отображением соответствующего кругового многоугольника области комплексной скорости и сводится, по сути дела, к исследованию уравнения (2) и построению его интегралов y_1 и y_2 . Если последние определены, то, интегрируя выражения (1), найдем решение рассматриваемой фильтрационной задачи в параметрическом виде.

Наиболее простым и в то же время весьма важным является случай, когда число особых точек, содержащихся в уравнении (2), меньше четырех: тогда акцессорные параметры λ_i не входят в уравнение. Например, в случае трех особых точек получается хорошо изученное гипергеометрическое уравнение Гаусса [33], коэффициенты которого и интегралы вполне определяются величинами a_k и характеристическими показателями ρ_k [8].

Использование разработанного математического аппарата для такого уравнения позволило П. Я. Полубариновой-Кочиной получить эффективные решения для целого ряда задач, интересных в теоретическом отношении и важных для гидротехники и мелиорации. Они нашли широкое применение при исследовании следующих практических важных задач: в земляной перемычке с низовым клином и земляной плотине, расположенных на горизонтальном водоупоре и снабженных горизонтальным фильтром; в земляной плотине треугольного профиля при сухом нижнем бьефе, расположенной на горизонтальном водоупоре; в бесконечно высокой земляной плотине трапецеидального профиля, расположенной на наклонном или горизонтальном водоупоре.

Наиболее значительные результаты получены П. Я. Полубариновой-Кочиной при решении задачи фильтрации через прямоугольную перемычку [2, 7, 18, 20]. С помощью оригинальных и изящных приемов решение доводится до простых результатов, позволяющих проводить обширные численные расчеты. Несмотря на то, что ранее этот случай был рассмотрен методом комплексной скорости Б. Б. Девисоном [34] и Г. Гамелем [35], численные расчеты по этому решению оказались громоздкими, в связи с чем было просчитано лишь ограниченное число примеров [36, 37].

Дальнейший важный шаг сделан П. Я. Полубариновой-Кочиной при рассмотрении некоторых случаев фильтрации в неоднородной среде [12, 16, 17, 19]: в основании плоского флютбета и вокруг водонепроницаемого шпунта в предположении, что водопроницаемое основание сложено из двух горизонтальных слоев (одинаковой мощности с любым коэффициентом фильтрации), подстилаемых водоупором с горизонтальной кровлей; в основании плоского симметричного разрезного флютбета, а также вокруг двух точечных шпунтов при условии, что водопроницаемое основание имеет конечную мощность и состоит из двух слоев с вертикальной линией раздела, расположенной посередине между частями флютбета или шпунтами. Полученные решения затем преобразуются к весьма упрощенным зависимостям, содержащим элементарные функции. Таким образом, и здесь свои фундаментальные результаты П. Я. Полубаринова-Кочина сумела связать с потребностями инженерной практики. Дальнейшие исследования некоторых задач в двуслойной среде, связанные с применением обратного приема, который в свое время был предложен Н.К. Калинин [38], содержатся в работе [39].

Под влиянием работ П. Я. Полубариновой-Кочиной в дальнейшем появился ряд исследований, посвященных разнообразным случаям фильтрации, в которых число особых точек сводится к трем¹: Б. К. Ризенкамф [29], С. В. Фалькович [21, 40], Г. К. Михайлов [41–43], В. А. Васильев [44], В. А. Васильев и Д. Ф. Шульгин [45], В. А. Васильев и И. С. Теплицкий [46], В. А. Барон [47], В. Н. Эмих [48–50], Ю. И. Капранов [51], А. Р. Цицкишвили [52], Э. Н. Береславский и Л. А. Панасенко [53], Э. Н. Береславский [54–57].

До сих пор рассматривались задачи, для решения которых можно использовать уравнения гипергеометрического типа. Однако в практике все большее прикладное значение приобретают исследования, связанные с постановкой и решением значительно более сложных задач — как по причине осложненных условий фильтрации, так и вследствие геометрических очертаний областей фильтрации. Именно такими являются задачи с четырьмя, пятью и т. д. особыми точками.

¹Здесь и ниже рассматриваются только те работы, в которых используется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной, и вопрос о целесообразности его применения не затрагивается.

Как оказалось, при большем числе особых точек $n > 3$ применение метода П. Я. Полубариновой-Кочиной сопряжено с трудностями принципиального характера. Дело в том, что помимо традиционной трудности, которая возникает в случае прямолинейных многоугольников при применении формулы Кристоффеля–Шварца и связана с нахождением неизвестных постоянных a_k , для круговых многоугольников задача еще более усложняется. В коэффициентах уравнения (2) начинают появляться акцессорные параметры λ_i , причем с прибавлением каждой новой стороны многоугольника число неизвестных параметров увеличивается сразу на два. Дифференциальное уравнение (2) в таких случаях не только не удается решить в общем виде, но и интегрирование его для каждого конкретного многоугольника оказывается весьма трудной задачей.

Положение осложняется еще и тем обстоятельством, что связь параметров с геометрическими характеристиками заданного многоугольника также заранее неизвестна. В этом направлении наиболее значительные результаты получены также П. Я. Полубариновой-Кочиной [11, 20]. Ею впервые установлен вид уравнений, связывающих неизвестные постоянные с коэффициентами вспомогательных подстановок для интегралов уравнения (2) в случае произвольных кругового четырехугольника и пятиугольника, один из углов которого равен 2π . Для вершин таких разрезов построены алгебраические уравнения, связывающие между собой неизвестные параметры. Однако, несмотря на полученные общие результаты удобного метода нахождения неизвестных констант конформного отображения не существует до сих пор.

В силу указанных причин эффективных решений для задач фильтрации с числом неустранимых особых точек, большим трех, получено немного. Условно эти задачи можно разделить на две группы.

К первой группе задач относится случай фильтрации через трапециевидальную перемычку с наклонными откосами, расположенную на водопоре [52, 58]. Он рассмотрен с помощью метода, предложенного А. Р. Цицкишвили, и опирается на теорию сопряжения для нескольких неизвестных функций и теорию И. А. Лаппо–Данилевского [59–71]. Следует признать, что метод, которым пользуется А. Р. Цицкишвили, дает общие результаты и в теоретическом плане удалось в определенной степени преодолеть трудности, возникающие при интегрировании уравнения (2).

К подобным результатам приводят также и исследования Л. И. Чибриковой [72–75]. Ею предложен оригинальный подход, основанный на применении интегралов по кривым на римановых поверхностях и решении задачи Римана, что позволило получить ряд интересных результатов в разработке опять же теоретических методов решения фуксовых уравнений.

Работы А. Р. Цицкишвили и Л. И. Чибриковой, ориентированные главным образом на исследования общего характера, являются важным вкладом, как в теорию конформных отображений круговых многоугольников, так и в методы интегрирования уравнений класса Фукса. Во всяком случае, они наглядно демонстрируют новые возможности теории линейного

сопряжения. Представляя несомненный интерес для теоретических исследований, эти возможности, к сожалению, оказываются до сих пор нереализованными для количественного анализа изучаемых явлений. Упомянутое выше решение задачи о фильтрации через земляную трапецеидальную перемычку — это пока единственное решение подобного рода. Других алгоритмов числовых расчетов для тех случаев, когда $n \geq 4$, еще нет вообще.

К другой группе задач относятся случаи, для которых оказывается возможным применить некоторые искусственные приемы, связанные либо с подходящей заменой переменных в уравнении (2), либо с удачным выбором вспомогательной области изменения параметрической переменной. Таким способом П. Я. Полубариновой-Кочиной [22], С. В. Фальковичу [21, 40], Н. К. Калинину [76], В. А. Васильеву [77], А. Я. Чилапу [78], В. Н. Эмиху [24, 48], Ю. И. Капранову [51, 79] удалось получить решения задач в замкнутом виде. Разумеется, что выгоды в выборе соответствующих замен переменных и вспомогательных областей, которыми пользуются авторы, целиком связаны с частными особенностями задач.

При всей значимости перечисленных выше работ, ориентированных либо на исследования общего характера, либо на использование различных искусственных приемов, изыскания в указанном направлении пока разобщены и не в полной мере отражают специфику фильтрационных течений со свободными границами. Учет одновременно влияния различных физических факторов, существенно влияющих на фильтрационные процессы, а также характерных особенностей последних пока еще не стал широким достоянием точных аналитических решений. По-прежнему актуальной остается разработка методов, приспособленных к тем или иным классам задач, которые бы учитывали их специфику и были бы, кроме того, простыми и удобными для приложений.

Дело в том, что фильтрационные течения со свободными границами относятся к движениям со сложной кинематической структурой, характеризующимися наличием граничных критических точек, в которых напор или расход принимают экстремальные значения, а скорость обращается в нуль, т. е. состоят из нескольких составляющих их потоков. Кроме того, в любой гидродинамической задаче, в которой приходится иметь дело со свободными границами (депрессионной кривой или линией раздела между пресными и солеными водами) наличествуют точки перегиба на этих границах. Наконец, при постановке задачи должна быть отражена и в определенной степени учтена при исследовании и особенность потока, сопутствующая возможным инфильтрации или испарению со свободной поверхности.

Эти и ряд других обстоятельств и приводят к тому, что весьма распространенным и типичным для областей комплексной скорости подобных фильтрационных задач является обилие прямых углов и разрезов. Как казалось, несмотря на различную конфигурацию и структуру эти области принадлежат одному и тому же классу — круговым многоугольникам в полярных сетках [28]. Последние, как известно, состояются дугами концентрических окружностей с центром в начале координат и проходящими через него отрезками прямых. Подобные многоугольники, несмотря на их

частный вид, имеют весьма широкое распространение и достаточно общий характер в задачах фильтрации [27, 80, 81]. В частности, анализ показал, что все те области, которые имеют место в задачах второй группы, о которых говорилось выше, принадлежат именно классу круговых многоугольников в полярных сетках. Поэтому разработка специальных методов конформного отображения применительно к подобного рода областям имеет большое практическое значение.

В отличие от традиционного подхода [28], основанного на сведении задачи с помощью логарифмической функции к прямолинейным прямоугольникам, при котором увеличивается число неизвестных параметров в формуле Кристоффеля–Шварца, оказывается более выгодным воспользоваться общей теорией построения отображающих функций на основе решения соответствующих уравнений класса Фукса. Разработанная методика [82–87] опирается на идею нахождения частных решений уравнений фуксового типа в виде линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных частных решений некоторых более простых гипергеометрических уравнений с тремя особыми точками. При этом неизвестные параметры конформного отображения определяются в ходе построения частных решений, поэтому в дальнейшем проблемы аксессуарных параметров не возникает. Учет характерных особенностей рассматриваемых областей позволил представить решения непосредственно в замкнутой форме через специальные, а в ряде случаев — элементарные функции, что делает их использование наиболее простым и удобным при последующих практических целях.

На этом пути с помощью разработанной методики метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной был использован при исследовании фильтрационных течений пресных вод над покоящимися солеными в образованиях типа линз [88, 89] и кайм [90, 91], в зоне действия кротовых оросителей [92] и водоемов [93], при обтекании шпунта Жуковского [94–97], а также в различных случаях фильтрации из каналов в почвогрунтах, подстилаемых сильнопроницаемым напорным водоносным горизонтом высокой проницаемости или водоупором [98–102].

В развитие этого подхода отметим возможность получения решений задач фильтрации, при исследовании которых возникают неоднолистные или двусвязные области комплексной скорости [93, 91, 98].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. — М.: Гостехиздат, 1953. — 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М.: Гостехиздат, 1952. — 676 с.; 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1967. — 545 с.

4. Михайлов Г. К. Движение жидкостей и газов в пористых средах / Г. К. Михайлов, В. Н. Николаевский // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1970. — Т. 2. — С. 585–648.
5. Ляшко И. И. Расчет фильтрации в зоне гидросооружений / И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий, А. Я. Олейник. — Киев: Будивельник, 1977. — 118 с.
6. Ляшко И. И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. — Киев: Наукова думка, 1977. — 287 с.
7. Кочина П. Я. Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации / П. Я. Кочина. — М.: Наука, 1991. — 351 с.
8. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. — М., Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1938. — № 3. — С. 371–398.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1939. — № 3. — С. 329–350.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1939. — № 5–6. — С. 579–602.
12. Полубаринова-Кочина П. Я. Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 6. — С. 75–88.
13. Полубаринова-Кочина П. Я. Пример движения грунтовых вод через земляную плотину при наличии испарения / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 7. — С. 45–52.
14. Полубаринова-Кочина П. Я. О непрерывности изменения годографа скорости в плоском установившемся движении грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24. — № 4. — С. 327–330.
15. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1940. — № 6. — С. 73–80.
16. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о фильтрации в двуслойной среде / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 26. № 4. — С. 339–341.
17. Полубаринова-Кочина П. Я. О простейших случаях фильтрации в двуслойной среде / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1940. Т. 26. — № 8. — С. 746–749.
18. Полубаринова-Кочина П. Я. Расчет фильтрации через земляную перемычку / П. Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. — 1940. — Т. 4. — Вып. 1. — С. 53–64.
19. Полубаринова-Кочина П. Я. О фильтрации в неоднородном (двуслойном) грунте / П. Я. Полубаринова-Кочина // Инс. сб. — 1941. — Т. 1. — Вып. 2. — С. 313–320.

20. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. — 143 с.
21. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах / П. Я. Полубаринова-Кочина, С. В. Фалькович // ПММ. — 1947. — Т. 11. — Вып. 6. — С. 629–674.
22. Полубаринова-Кочина П. Я. О линзе пресной воды над соленой водой / П. Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. — 1956. — Т. 20. — Вып. 3. — С. 418–420.
23. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые методы теории функций комплексного переменного в применении к теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: Изд-во СОАА СССР. — 1961. — С. 212–218.
24. Полубаринова-Кочина П. Я. Математические методы в вопросах орошения / П. Я. Полубаринова-Кочина, В. Г. Пряжинская, В. Н. Эмих. — М.: Наука, 1969. — 414 с.
25. Полубаринова-Кочина П. Я. О круговых многоугольниках в теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука. — 1983. С. 166–177.
26. Полубаринова-Кочина П. Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений в теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Математика и проблемы водного хозяйства. — Киев: Наукова думка. — 1986. — С. 19–36.
27. Полубаринова-Кочина П. Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики / П. Я. Полубаринова-Кочина, Э. Н. Береславский, Н. Н. Кочина. — Ч. 1. — Препринт №567. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. — 122 с.
28. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. — М.: Изд-во Иностран. лит., 1963. — 406 с.
29. Ризенкамф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ч. 3 / Б.К. Ризенкамф // Уч. записки Саратовск. ун-та. — Сер. гидравлики. — 1940. — Т. 15. — Вып. 5. — С. 3–93.
30. Нумеров С. Н. Методы исследования плоской установившейся фильтрации (тяжелой несжимаемой жидкости) в однородной среде: Дисс. ... д-ра техн. наук / С. Н. Нумеров. — Л., 1954. — 210 с.
31. Kravchenko V. Sur les singularites des ecoulements plans et permanents des nappes souterraines pesants / V. Kravchenko, G. Saurage de Saint-Mare, M. Boreli // Houille blanche. — 1955. — V. 10. — № 1. — P. 47–62.
32. Kravchenko V., Saurage de Saint-Mare G., Boreli M. Sur les singularites des ecoulements plans et permanents des nappes souterraines pesants / V. Kravchenko, G. Saurage de Saint-Mare, M. Boreli // Houille blanche. — 1955. — V. 10. — № 4. — P. 533–542.
33. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
34. Девисон Б. Б. Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины (гидромеханический метод решения задачи) / Б. Б. Девисон // Уч. записки ГГИ. — Л. — 1932. — № 6. — С. 11–19.
35. Hamel G. Über Grundwasserströmung / G. Hamel // ZAMM. — 1934. — Bd. 14. — H 3. — S. 129–157.

36. Hamel G. Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung / G. Hamel, E. Genter // ZAMM. — 1935. — Ed. 15. — H 5. — S. 255–265.
37. Muskat M. The seepage of water through dams with vertical faces / M. Muskat // Physics. — 1935. — V. 6. — № 12. — P. 402–415.
38. Калинин Н. К. Сведение некоторых задач о фильтрации в двуслойной среде к задачам о фильтрации в однородном грунте / Н. К. Калинин // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 40. — № 5. — С. 204–207.
39. Береславский Э. Н. О некоторых случаях фильтрации в плотинах с вертикальным верховым откосом, дренированных в основании / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 6. — С. 59–63.
40. Фалькович С. В. Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / С. В. Фалькович. — Саратов, 1943. — 106 с.
41. Михайлов Г. К. К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецеидального профиля на горизонтальном водопоре / Г. К. Михайлов // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 4. — С. 553–556.
42. Михайлов Г. К. О фильтрации в трапецеидальных плотинах с вертикальным верховым откосом / Г. К. Михайлов // ППМ. — 1953. — Т. 17. — Вып. 2. — С. 189–199.
43. Михайлов Г. К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью / Г. К. Михайлов // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 110. — № 6. — С. 945–948.
44. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод при частичной инфильтрации на его поверхность / В. А. Васильев // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 11. — С. 177–181.
45. Васильев В. А. Приток инфильтрационной воды в симметрично расположенные водоприемники / В. А. Васильев, Д. Ф. Шульгин // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 10. — С. 46–50.
46. Васильев В. А. Фильтрация пресной воды из канала с малой глубиной воды на соленые воды / В. А. Васильев, И. С. Теплицкий // Тр. Ташкентск. ун-та. — 1961. — Вып. 189. — С. 131–138.
47. Барон В. А. Фильтрация из канала с малой глубиной воды при наличии хорошо проницаемого слоя жидкости на конечной глубине и с учетом инфильтрации / В. А. Барон // ПМТФ. — 1961. — № 1. — С. 101–105.
48. Эмих В. Н. Фильтрация с полосы при наличии соленых подпорных вод / В. Н. Эмих // ПМТФ. — 1962. — № 2. — С. 145–149.
49. Эмих В. Н. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из канала / В. Н. Эмих // Тр. Ташкентск. ун-та. — 1964. — Вып. 265. — С. 32–38.
50. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала / В. Н. Эмих // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 2. — С. 115–119.
51. Капранов Ю. И. О форме линзы пресных вод при линейном законе испарения / Ю. И. Капранов // ПММ. — 1973. — Т. 37. — Вып. 3. — С. 497–504.
52. Цицкишвили А. Р. Эффективные методы решения задач конформного отображения и теории фильтрации: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук / А. Р. Цицкишвили. — М., 1981. — 29 с.
53. Береславский Э. Н. Об определении зоны насыщения при фильтрации из канала с малой глубиной воды / Э. Н. Береславский, Л. А. Панасенко // ПМТФ. — 1981. — № 5. — С. 92–64.

54. Береславский Э. Н. К задаче о фильтрации из оросителя ирригационной системы / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 2. — С. 105–109.
55. Береславский Э. Н. О расчете фильтрации грунтовых вод в прибрежных напорных пластах / Э. Н. Береславский // Изв. РАН. МЖГ. — 2004. — № 3. — С. 101–110.
56. Береславский Э. Н. О влиянии наклона морского дна на интрузию в прибрежные пресноводные пласты / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2006. Т. 408. — № 1. — С. 44–48.
57. Береславский Э. Н. Расчет интрузии соленых вод в прибрежных зонах морского дна / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2007. — Т. 413. — № 2. — С. 184–187.
58. Цицкишвили А. Р. О фильтрации в плотинах с наклонными откосами / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССР. — 1976. — Т. 52. — С. 94–104.
59. Цицкишвили А. Р. Эффективное решение задач сопряжения для нескольких неизвестных функций в случае кусочно-постоянной матрицы / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССР. — 1969. — Т. 35. — С. 67–103.
60. Цицкишвили А. Р. Об эффективном решении задачи сопряжения / А. Р. Цицкишвили // Сообщ. АН ГрССР. — 1970. — Т. 58. — С. 17–20.
61. Цицкишвили А. Р. Об эффективном решении задачи линейного сопряжения в случае кусочно-постоянной матрицы // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССРю 1971. Т. 39. С. 61–65.
62. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211. — № 2. — С. 300–303.
63. Цицкишвили А. Р. О решении некоторых задач теории фильтрации / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 215. — № 6. — С. 1325–1328.
64. Цицкишвили А. Р. Применение метода И.А. Лаппо–Данилевского к отысканию функций, конформно отображающих полуплоскость на круговые многоугольники / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 3. — С. 458–469.
65. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники / А. Р. Цицкишвили // Сообщ. АН ГрССР. — 1976. — Т. 84. — № 3. — С. 553–556.
66. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые пятиугольники с разрезом / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 11. — С. 2044–2051.
67. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — № 4. — С. 563–566.
68. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники // Тр. Тб. ун-та, 1977. Т. 185. С. 65–89.
69. Цицкишвили А. Р. О решении уравнения Шварца в точках, где разность корней определяющего уравнения равна целому числу // Сообщ. АН ГрССР. 1980. Т. 97. № 1. С. 37–40.
70. Цицкишвили А. Р. О построении аналитических функций, конформно отображающих полуплоскость на круговые многоугольник / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 4. — С. 646–656.

71. Цицкишвили А. Р. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к решению некоторых плоских задач теории фильтрации / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. ун-та. — 1985. — Т. 259. — С. 295–329.
72. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций / Л. И. Чибрикова. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. — 302 с.
73. Чибрикова Л. И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях / Л. И. Чибрикова // Математический анализ. — М.: ВИНТИ. — 1980. — Т. 18. — С. 3–66.
74. Чибрикова Л. И. О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса / Л. И. Чибрикова // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. — Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та. — 1983. — С. 160–172.
75. Чибрикова Л. И. О кусочно-голоморфных решениях уравнений класса Фукса / Л. И. Чибрикова // Краевые задачи и их приложения. — Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та. — 1986. — С. 136–148.
76. Калинин Н. К. К вопросу о фильтрации в многослойном грунте: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Н. К. Калинин. — Саратов, 1943. — 78 с.
77. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод между двумя дренами на водоупоре при наличии инфильтрации / В. А. Васильев // ПММ. — 1955. — Т. 19. — Вып. 1. — С. 106–108.
78. Чилап А. Я. К задаче о прорыве законтурной воды к галерее скважин / А. Я. Чилап // Изв. Вузов. Математика. — 1960. — № 3. — С. 241–255.
79. Капранов Ю. И. О кайме пресных вод в случае периодической системы горизонтальных трубчатых дренах / Ю. И. Капранов // Краевые задачи подземной гидродинамики. — Киев: Изд-во ин-та матем. АН УССР. — 1975. С. 67–84.
80. Береславский Э. Н. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике / Э. Н. Береславский, П. Я. Кочина // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 3–7.
81. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский, П. Я. Кочина // Изв. РАН. МЖГ. — 1997. — № 5. — С. 9–17.
82. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник / Э. Н. Береславский // Изв. Вузов. Математика. — 1980. — № 5. — С. 3–7.
83. Береславский Э. Н. К вопросу о конформном отображении двусвязных областей / Э. Н. Береславский // Вычисл. и прикл. матем. — Киев: Изд-во Киевск. ун-та. — 1986. — Вып. 58. — С. 71–75.
84. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложения / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 6. — С. 1048–1050.
85. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33. — № 3. — С. 296–301.
86. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 4. — С. 459–466.

87. Береславский Э. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48. — № 4. — С. 590–594.
88. Береславский Э. Н., Панасенко Л. А. О линзах пресных вод при фильтрации из оросителей / Э. Н. Береславский, Л. А. Панасенко // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 4. — С. 102–106.
89. Береславский Э. Н. Об одном случае отжима соленых вод пресными инфильтрационными водами в однородно-анизотропной пористой среде / Э. Н. Береславский, С. Н. Нумеров // Водн. ресурсы. — 1990. — № 5. — С. 64–68.
90. Береславский Э. Н. Задача о фильтрации из системы каналов в кайме пресных вод над солеными с испарением / Э. Н. Береславский, В. Н. Эмих // ПММ. — 1983. — Т. 47. — Вып. 3. — С. 446–454.
91. Береславский Э. Н., Матвеев В. В. Анализ систематического дренажа орошаемых земель при наличии соленых подпорных вод / Э. Н. Береславский, В. В. Матвеев // Изв. РАН. МЖГ. — 1993. — № 2. — С. 68–73.
92. Береславский Э. Н. Отжим пресной водой соленой воды при фильтрации из кротового оросителя / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1989. — Т. 53. — Вып. 3. — С. 455–461.
93. Береславский Э. Н. Забор пресной очищенной воды при фильтрации из водоема / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1990. — Т. 54. — Вып. 5. — С. 867–871.
94. Береславский Э. Н. Гидродинамическая модель отжима пресными фильтрационными водами покоящихся соленых при обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ДАН. — 1998. — Т. 363. — № 4. — С. 479–482.
95. Береславский Э. Н. К задаче об обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1999. — Т. 63. — Вып. 4. — С. 603–610.
96. Береславский Э. Н. О режиме грунтовых вод при обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ПММ. — 2011. — Т. 75. — Вып. 2. — С. 303–313.
97. Береславский Э. Н. Моделирование обтекания шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2011. — Т. 440. — № 1. — С. 47–51.
98. Береславский Э. Н. О влиянии непроницаемого включения в орошаемом почвенном слое на фильтрацию из канала / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 71–76.
99. Береславский Э. Н., Матвеев В. В. Фильтрация в почвогрунтах, подстилаемых сильнопроницаемым напорным горизонтом / Э. Н. Береславский, В. В. Матвеев // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 2. — С. 98–104.
100. Береславский Э. Н. Об учете инфильтрации или испарения со свободной поверхности методом круговых многоугольников // ПММ. 2010. Т. 74. № 2. С. 239–251.
101. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов / Э. Н. Береславский // ПММ. — 2011. — Т. 754. — Вып. 4. — С. 563–571.
102. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2010. — Т. 343. — № 4. — С. 472–475.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ, г. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, пр. ЛИТЕЙНЫЙ, д. 48/50, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.

Поступила 14.04.2012

УДК 517.958

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ $x^k y^l$ -АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ

І. М. АЛЕКСАНДРОВИЧ, М. В. СИДОРОВ

РЕЗЮМЕ. У статті виведені формули обернення інтегрального зображення p -аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k y^l$ ($k, l = \text{const} > 0$). P -аналітичні функції з такою характеристикою тісно пов'язані з біосесиметричним рівнянням потенціалу та з узагальненим біосесиметричним рівнянням потенціалу, що принципово використано при отриманні інтегрального зображення $x^k y^l$ -аналітичних функцій через довільні аналітичні функції та їх формул обернення. Вивчені умови, при яких інтегральне зображення $x^k y^l$ -аналітичних функцій є інтегральним рівнянням Вольтерра 1-го роду або інтегральним рівнянням типу згортки. Наявність прямої та оберненої формул інтегрального зображення $x^k y^l$ -аналітичної функції дають можливість розглядати їх як інтегральні рівняння та їх розв'язки, а тим самим створити математичні моделі крайових задач для рівнянь і систем з частинними похідними. Отримані результати використовуватимуться для розв'язання крайових задач математичної фізики, зокрема для розв'язання задач плоскої контактної теорії пружності, теорії повзучості, електродинаміки тощо.

P -аналітичні функції з такими характеристиками тісно пов'язані з біосесиметричним рівнянням потенціалу та з узагальненим біосесиметричним рівнянням потенціалу, інтегральним зображенням розв'язків яких присвячено роботу [2].

Наявність прямої та оберненої формул інтегрального зображення $x^k y^l$ -аналітичної функції дають можливість розглядати їх як інтегральні рівняння та їх розв'язки, а тим самим створити математичні моделі крайових задач в цьому класі функцій.

1°.

Нехай G — область в першій чверті площини $z = x + iy$, обмежена відрізками l_1 і l_2 дійсної і відповідно уявної осі та деякими кривими, монотонними по x та y . Прямолінійні відрізки, проведені з будь-якої точки області ортогонально осям x та y , належать області G . Зокрема, область G може співпадати з першою чвертю площини або півсмугою.

Теорема 1. Якщо $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}_1(x, y) + i\tilde{\varphi}_2(x, y)$ — x^k -аналітична функція [3] в області G і така, що

$$\tilde{\varphi}_2(x, y)|_{l_1} = 0,$$

то функція

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_0^y (y^{1-l}\tilde{\varphi}_1(x, \tau) + i\tau\tilde{\varphi}_2(x, \tau)) (y^2 - \tau^2)^{\frac{l}{2}-1} d\tau\end{aligned}\quad (1)$$

буде $x^k y^l$ -аналітичною функцією в області G , неперервною аж до відрізка l_1 і

$$\tilde{v}(x, y)|_{l_1} = 0, \quad k, l - \text{const} > 0.$$

Доведення. Твердження теореми встановлюється безпосередньою перевіркою $x^k y^l$ -аналітичності функції $\tilde{f}(z)$, а також виконанням умови $\tilde{v}(x, 0) = 0$. $\square$

Теорема 2. Нехай $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — $x^k y^l$ -аналітична функція в області G і нехай виконується умова

$$\tilde{v}(x, y)|_{l_1} = 0.$$

Тоді $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}_1(x, y) + i\tilde{\varphi}_2(x, y)$ є x^k -аналітичною функцією, яка визначається рівністю

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(z) &= \tilde{\varphi}_1(x, y) + i\tilde{\varphi}_2(x, y) = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(m-\frac{l}{2}+1)} \left\{ \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{d^m(\tau^{l-1}\tilde{u}(x, \tau))}{(d\tau^2)^m} \frac{\tau d\tau}{(y^2 - \tau^2)^{\frac{l}{2}-m}} + \right. \\ \left. + i \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{d^m \tilde{v}(x, \tau)}{(d\tau^2)^m} \frac{\tau d\tau}{(y^2 - \tau^2)^{\frac{l}{2}-m}} \right\}, & l \neq 2n, \quad m = \left[\frac{l}{2} \right], \\ \frac{2}{(n-1)!} \left\{ y \frac{d^n}{(dy^2)^n} (y^{l-1}\tilde{u}(x, y)) + i \frac{d^n \tilde{v}(x, y)}{(dy^2)^n} \right\}, & l = 2n \end{cases}\end{aligned}\quad (2)$$

і задовольняє умові

$$\tilde{\varphi}_2(x, y)|_{l_1} = 0.$$

Доведення. Теорема доводиться безпосередньо, встановивши, що $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}_1(x, y) + i\tilde{\varphi}_2(x, y)$ є x^k -аналітичною функцією. Покажемо, що $\tilde{\varphi}_2(x, 0) = 0$.

1. $l = 2n$.

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}(y^{l-1}\tilde{u}(x, y))}{(dy^2)^{n-1}} &= \frac{d^{n-1}}{(dy^2)^{n-1}} \left[y^{l-1} \cdot y^{1-l} \int_0^y \tilde{\varphi}_1(x, \tau) (y^2 - \tau^2)^{n-1} d\tau \right] = \\ &= (n-1)! \int_0^y \tilde{\varphi}_1(x, \tau) d\tau, \\ \tilde{\varphi}_2(x, y) &= \frac{2}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{(dy^2)^{n-1}} \left[\frac{1}{2y} \frac{\partial \tilde{v}(x, y)}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{(dy^2)^{n-1}} \left[x^k y^{l-1} \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial x} \right].\end{aligned}$$

Враховуючи на основі встановленої вище формули, що

$$\frac{d^{n-1}}{(dy^2)^{n-1}} \left[y^{l-1} \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial x} \right] = (n-1)! \int_0^y \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(x, \tau)}{\partial x} d\tau,$$

маємо

$$\tilde{\varphi}_2(x, y) = x^k \int_0^y \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(x, \tau)}{\partial x} d\tau.$$

Звідси

$$\tilde{\varphi}_2(x, 0) = 0.$$

2. $l \neq 2n$. У цьому випадку, з урахуванням того, що

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m-1}}{(dy^2)^{m-1}} (y^{l-1} \tilde{u}_1(x, y)) = \\ & = \left(\frac{l}{2} - 1\right) \left(\frac{l}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{l}{2} - m + 1\right) \int_0^y \tilde{\varphi}_1(x, \tau) (y^2 - \tau^2)^{\frac{l}{2}-m} d\tau, \end{aligned}$$

функцію $\tilde{\varphi}_2(x, y)$ можемо перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(x, y) &= \frac{x^k \left(\frac{l}{2}-1\right) \left(\frac{l}{2}-2\right) \dots \left(\frac{l}{2}-m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(m-\frac{l}{2}+1\right)} \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \int_0^y \tau (y^2 - \tau^2)^{m-\frac{l}{2}} d\tau \otimes \\ &\otimes \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(x, \xi)}{\partial \xi} (\tau^2 - \xi^2)^{\frac{l}{2}-m} d\xi. \end{aligned}$$

Покладаючи $\xi = yt\eta$, $\tau = yt$, матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(x, y) &= \frac{3x^k \left(\frac{l}{2}-1\right) \left(\frac{l}{2}-2\right) \dots \left(\frac{l}{2}-m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(m-\frac{l}{2}+1\right)} y \int_0^1 (1-t^2)^{m-\frac{l}{2}} t^{l-2m+2} dt \otimes \\ &\otimes \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(x, yt\eta)}{\partial x} (1-\eta^2)^{\frac{l}{2}-m} d\eta + \frac{\left(\frac{l}{2}-1\right) \left(\frac{l}{2}-2\right) \dots \left(\frac{l}{2}-m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(m-\frac{l}{2}+1\right)} \otimes \\ &\otimes y^2 \int_0^1 (1-t^2)^{m-\frac{l}{2}} t^{l-2m+3} dt \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(x, yt\eta)}{\partial x} (1-\eta^2)^{\frac{l}{2}-m} d\eta + \\ &+ \frac{\left(\frac{l}{2}-1\right) \left(\frac{l}{2}-2\right) \dots \left(\frac{l}{2}-m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(m-\frac{l}{2}+1\right)} y^2 \int_0^1 (1-t^2)^{m-\frac{l}{2}} t^{l-2m+3} dt \otimes \\ &\otimes \int_0^1 \frac{d}{dy} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(x, yt\eta)}{\partial (yt\eta)} (1-\eta^2)^{\frac{l}{2}-m} \eta d\eta. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо $\tilde{\varphi}_2(x, y)|_{l_1} = 0$.

□

Аналогічно теоремам 1 та 2 мають місце твердження для областей з нескінченно віддаленою точкою.

Зауваження 1. Рівність (1) можемо розглядати як інтегральні рівняння, а рівність (2) — як розв'язки цих інтегральних рівнянь.

2°.

Теорема 3. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналітична в області G і задовольняє умову

$$v(x, y)|_{l_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

то функція

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_0^y (y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-1} d\eta \int_0^x (x^{1-k} y^{1-l} u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta) \xi \eta) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

є $x^k y^l$ -аналітичною в області G , а на l_1 і l_2 має неперервні похідні по x та y відповідно і задовольняє умову

$$\tilde{v}|_{l_1} = 0, \quad \tilde{v}|_{l_2} = 0.$$

Доведення. У справедливості теореми переконуємось, скориставшись означенням аналітичної функції та $x^k y^l$ -аналітичної функції. $\square$

Інтегральним зображенням (3) встановлюється взаємно-однозначна відповідність між $x^k y^l$ -аналітичними функціями і аналітичними функціями в області G , уявні частини яких на l_i дорівнюють нулеві.

Щоб отримати формули обернення $x^k y^l$ -аналітичних функцій, розглянемо інтегральне рівняння

$$\int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) [\omega(x) - \omega(\xi)]^\alpha [\gamma(y) - \gamma(\eta)]^\beta d\xi d\eta = \psi(x, y), \quad (4)$$

де $a, b \in \mathbb{R}$; x, y — незалежні змінні; α, β — сталі > -1 ; $\omega(x), \gamma(y)$ — задані функції з властивостями:

при

$$\begin{aligned} a < x, \quad \omega(x) > \omega(\xi), \quad \xi \in (a, x), \\ a > x, \quad \omega(x) < \omega(\xi), \quad \xi \in (x, a), \\ b < y, \quad \gamma(y) > \gamma(\eta), \quad \eta \in (b, y), \\ b > y, \quad \gamma(y) < \gamma(\eta), \quad \eta \in (y, b), \end{aligned}$$

$\psi(x, y)$ — задана достатнє число раз неперервно диференційована функція, $\varphi(x, y)$ — шукана функція.

Лема 1. Розв'язок інтегрального рівняння (4) можна записати у вигляді:

1) якщо α, β — цілі ($\alpha \equiv m, \beta \equiv n$), то

$$\varphi(x, y) = \frac{\omega'(x)\gamma'(y)}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2}\psi(x, y)}{(\partial\omega(x))^{m+1}(\partial\gamma(y))^{n+1}}; \quad (5)$$

2) якщо $\alpha \equiv m, \beta$ — не ціле, то, ввівши позначення $l \equiv [\beta + 1]$, одержимо

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\omega'(x)}{m!\Gamma(1+\beta)\Gamma(l-\beta)} \otimes \\ &\otimes \frac{\partial}{\partial y} \int_b^y \frac{\partial^{m+n+1}\psi(x, \tau)}{(\partial\omega(x))^{m+1}(\partial\gamma(\tau))^n} \frac{\gamma'(\tau)d\tau}{(\gamma(y)-\gamma(\tau))^{\beta+1-l}}; \end{aligned} \quad (6)$$

3) якщо α — не ціле, $\beta \equiv n$, то, ввівши позначення $k \equiv [\alpha + 1]$, маємо

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\gamma'(y)}{n!\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k-\alpha)} \otimes \\ &\otimes \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{\partial^{k+n+1}\psi(t, y)}{(\partial\omega(t))^k(\partial\gamma(y))^{n+1}} \frac{\omega'(t)dt}{(\omega(x)-\omega(t))^{\alpha+1-k}}; \end{aligned} \quad (7)$$

4) якщо α, β — не цілі, то, взявши $k \equiv [\alpha + 1]$, $l \equiv [\beta + 1]$, матимемо

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(k-\alpha)\Gamma(l-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^{k+l} \psi(t, \tau)}{(\partial \omega(t))^k (\partial \gamma(\tau))^l} \otimes \otimes \frac{\omega'(t) \gamma'(\tau) dt d\tau}{(\omega(x) - \omega(t))^{\alpha+1-k} (\gamma(y) - \gamma(\tau))^{\beta+1-l}}. \quad (8)$$

Доведення. 1) При $\alpha \equiv m$, $\beta \equiv n$ рівність (5) очевидна. 4) У випадку, коли α, β — не цілі, візьмемо $k \equiv [\alpha + 1]$, $l \equiv [\beta + 1]$, $\mu = k - \alpha$, $\nu = l - \beta$. Тут $0 < \mu < 1$, $0 < \nu < 1$. Диференціюймо обидві частини рівняння (4) k разів по $\omega(x)$ і l разів по $\gamma(y)$. Одержимо

$$\frac{\partial^{k+l} \psi(x, y)}{(\partial \omega(x))^k (\partial \gamma(y))^l} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(\beta-l+1)} \int_a^x \int_b^y \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\omega(x) - \omega(\xi))^\mu (\gamma(y) - \gamma(\eta))^\nu}.$$

Замінімо в останній рівності x на t , y на τ , домножимо обидві сторони на $\frac{\omega'(t) \gamma'(\tau) dt d\tau}{(\omega(x) - \omega(t))^{1-\mu} (\gamma(y) - \gamma(\tau))^{1-\nu}}$ та проінтегруємо по $t \div a, x$ і по $\tau \div b, y$. Маємо

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_b^y \left\{ \int_a^t \int_b^\tau \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\omega(x) - \omega(\xi))^\mu (\gamma(y) - \gamma(\eta))^\nu} \right\} \frac{\omega'(t) \gamma'(\tau) dt d\tau}{(\omega(x) - \omega(t))^{1-\mu} (\gamma(y) - \gamma(\tau))^{1-\nu}} = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(\beta-l+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^{k+l} \psi(t, \tau)}{(\partial \omega(t))^k (\partial \gamma(\tau))^l} \frac{\omega'(t) \gamma'(\tau) dt d\tau}{(\omega(x) - \omega(t))^{1-\mu} (\gamma(y) - \gamma(\tau))^{1-\nu}}. \end{aligned}$$

Перетворимо ліву сторону рівності

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_\xi^x \frac{\omega'(t) dt}{(\omega(t) - \omega(\xi))^\mu (\omega(x) - \omega(t))^{1-\mu}} \int_\eta^y \frac{\gamma'(\tau) d\tau}{(\gamma(\tau) - \gamma(\eta))^\nu (\gamma(y) - \gamma(\tau))^{1-\nu}} = \\ & = \left| r = \frac{\omega(t) - \omega(\xi)}{\omega(x) - \omega(\xi)}, s = \frac{\gamma(\tau) - \gamma(\eta)}{\gamma(y) - \gamma(\eta)} \right| = \int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_0^1 \frac{dr}{r^\mu (1-r)^{1-\mu}} \int_0^1 \frac{ds}{s^\nu (1-s)^{1-\nu}} = \\ & = \Gamma(1+\alpha-k)\Gamma(k-\alpha)\Gamma(1+\beta-l)\Gamma(l-\beta) \int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отже, отримуємо формулу (8). Формули (6) і (7) встановлюються як поєднання випадку 1) та 4). $\square$

Теорема 4. Інтегральне зображення (4) $x^k y^l$ -аналітичної функції становить інтегральні рівняння типу згортки, розв'язок яких має вигляд:

$$1) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 \equiv n$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= \frac{4xy}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2} (x^{k-1} y^{l-1} \tilde{u}(x, y))}{(\partial(x^2))^{m+1} (\partial(y^2))^{n+1}} + \\ &+ i \frac{4}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2} \tilde{v}(x, y)}{(\partial(x^2))^{m+1} (\partial(y^2))^{n+1}}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$2) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 - \text{не ціле} \left(\left[\frac{l}{2} \right] \equiv n \right)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= \frac{2}{m! \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(n+1-\frac{l}{2})} \otimes \\ &\otimes \left\{ 2x \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial^{m+n+1} (x^{k-1} \eta^{l-1} \tilde{u}(x, \eta))}{(\partial(x^2))^{m+1} (\partial \eta^2)^n} \frac{\eta d\eta}{(y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \right. \\ &\left. + i \frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial^{m+n+1} \tilde{v}(x, \eta)}{(\partial(x^2))^{m+1} (\partial \eta^2)^n} \frac{\eta d\eta}{(y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-n}} \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

3) $\frac{k}{2} - 1$ — не ціле ($[\frac{k}{2}] \equiv m$), $\frac{l}{2} - 1 \equiv n$

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) = & \frac{2}{n! \Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(m+1-\frac{k}{2})} \otimes \\ & \otimes \left\{ 2y \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\partial^{m+n+1} (\xi^{k-1} y^{l-1} \tilde{u}(\xi, y))}{(\partial \xi^2)^m (\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}} + \right. \\ & \left. + i \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\partial^{m+n+1} \tilde{v}(\xi, y)}{(\partial \xi^2)^m (\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}} \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

4) $\frac{k}{2} - 1 \neq m$, $\frac{l}{2} - 1 \neq n$ ($[\frac{k}{2}] \equiv m$, $[\frac{l}{2}] \equiv n$)

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) = & \frac{4}{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(m+1-\frac{k}{2}) \Gamma(n+1-\frac{l}{2})} \otimes \\ & \otimes \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n} (\xi^{k-1} \eta^{l-1} \tilde{u}(\xi, \eta))}{(\partial \xi^2)^m (\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m} (y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \right. \\ & \left. + \frac{i}{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n} \tilde{v}(\xi, \eta)}{(\partial \xi^2)^m (\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m} (y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-n}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Доведення. Справедливість формул (9)–(12) встановлюється за лемою. $\square$

За теоремами про єдиність аналітичних та p -аналітичних функцій [3] між інтегральним зображенням (3) та формулами (10)–(12), які свідчать про однозначну розв'язуваність рівняння (3), встановлюється взаємно однозначна відповідність між $x^k y^l$ -аналітичними функціями та аналітичними функціями в області G .

Нехай G_1 — область в першій чверті площини $z = x + iy$, обмежена відрізком l_2 уявної осі і деякою кривою Γ_2 , монотонною по x . Нескінченно віддалена точка належить l_2 і Γ_2 . Будь-які прямолінійні відрізки з будь-якої точки області G_1 в нескінченність перпендикулярно OY і OX , належать області G_1 .

Теорема 5. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в області G_1 і задовольняє умовам

$$v|_{l_2} = 0, \quad f(z) = o(|z|^{-l-\varepsilon}), \quad z \rightarrow \infty \quad (\varepsilon = \text{const} > 0),$$

то функція

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \int_0^y \int_0^x \left\{ x^{1-k} y^{1-l} \operatorname{Re} \left[f(\zeta) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] + \right. \\ & \left. + i\xi \eta \operatorname{Im} \left[f(\zeta) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] \right\} (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} (\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-1} d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta) \end{aligned} \quad (13)$$

$x^k y^l$ -аналітична в області G_1 , а на l_2 має неперервну частинну похідну по y і задовольняє умову $\tilde{v}|_{l_2} = 0$.

Доведення. Твердження теореми встановлюється безпосередньою перевіркою. $\square$

Теорема 6. Інтегральне рівняння (13) становить інтегральне рівняння типу згортки, розв'язок якого у відповідних випадках має вигляд:

$$1) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 \equiv n$$

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{4xy}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2}(x^{k-1}y^{l-1}\tilde{u}(x, y))}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial y^2)^{n+1}} + \\ + i \frac{4}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2}\tilde{v}(x, y)}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial y^2)^{n+1}}; \quad (14)$$

$$2) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 - \text{не ціле} \left(\left[\frac{l}{2} \right] \equiv n \right)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] + i \operatorname{Im} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] = \\ = \frac{(-1)^n 2x}{m! \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(n - \frac{l}{2} + 1)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial^{m+n+1}(x^{k-1}\eta^{l-1}\tilde{u}(x, \eta))}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial \eta^2)^n} \frac{2\eta d\eta}{(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \\ + i \frac{(-1)^n}{m! \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(n - \frac{l}{2} + 1)} \frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial^{m+n+1}\tilde{v}(x, \eta)}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial \eta^2)^n} \frac{2\eta d\eta}{(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}}; \quad (15)$$

$$3) \frac{k}{2} - 1 - \text{не ціле} \left(\left[\frac{k}{2} \right] \equiv m \right), \frac{l}{2} - 1 \equiv n$$

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{2}{n! \Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(m+1 - \frac{k}{2})} \otimes \\ \otimes \left\{ 2y \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\partial^{m+n+1}(\xi^{k-1}y^{l-1}\tilde{u}(\xi, y))}{(\partial \xi^2)^m(\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}} + \right. \\ \left. + i \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\partial^{m+n+1}\tilde{v}(\xi, y)}{(\partial \xi^2)^m(\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}} \right\}; \quad (16)$$

$$4) \frac{k}{2} - 1 \text{ не ціле} \left(\left[\frac{k}{2} \right] \equiv m \right), \frac{l}{2} - 1 \neq n \text{ не ціле} \left(\left[\frac{l}{2} \right] \equiv n \right)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] + i \operatorname{Im} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{l}{2}-1)} \right] = \\ = \frac{(-1)^n 4}{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(m - \frac{k}{2} + 1) \Gamma(n - \frac{l}{2} + 1)} \otimes \\ \otimes \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n}(\xi^{k-1}\eta^{l-1}\tilde{u}(\xi, \eta))}{(\partial \xi^2)^m(\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \right. \\ \left. + \frac{i}{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n}\tilde{v}(\xi, \eta)}{(\partial \xi^2)^m(\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} \right\}. \quad (17)$$

Доведення. Справедливість формул (14)–(17) встановлюється за лемою. $\square$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (13) існує і єдиний. Інтегральне зображення (13) встановлює взаємно-однозначну відповідність між $x^k y^l$ -аналітичними функціями $\tilde{f}(z)$ і аналітичними функціями $f(z)$ в області G_1 .

Аналогічні теореми мають місце в області G_2 , яка розміщена в першій чверті площини $z = x + iy$, обмежена відрізком l_1 дійсної осі і деякою кривою Γ_1 , монотонною по y . Нескінченно віддалена точка належить l_1 і Γ_1 . Будь-які перпендикулярні відрізки, що виходять з будь-якої точки області G_2 , і ортогональні до OX або до OY і йдуть в нескінченність, належать G_2 .

Нехай G_3 — область така, що будь-які прямі, які виходять з будь-якої точки паралельно осі OX і OY і йдуть в нескінченність, належать G_3 .

Теорема 7. Якщо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в G_3 і $f(z) = o(|z|^{-\max(k, l) - \varepsilon})$ при $z \rightarrow \infty$, то функція

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_y^y \int_x^x \left\{ x^{1-k} y^{1-l} \operatorname{Re} \left[f(\zeta) e^{i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] + \right. \\ \left. + i\xi\eta \operatorname{Im} \left[f(\zeta) e^{i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] \right\} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} (\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-1} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (18)$$

є $x^k y^l$ -аналітичною в G_3 .

Доведення. Достатньо перевірити, що функції $\tilde{u}(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$, задані формулою (18), задовольняють систему

$$\begin{aligned} x^k y^l \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \\ x^k y^l \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}. \end{aligned}$$

□

Інтегральне зображення (18) встановлює взаємно однозначну відповідність між $x^k y^l$ -аналітичними функціями $\tilde{f}(z)$ та аналітичними функціями $f(z)$ в області G_3 .

Теорема 8. Інтегральне рівняння (18) є інтегральним рівнянням типу згортки, розв'язок якого у відповідних випадках має вигляд:

$$1) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 \equiv n$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) = \frac{4xy}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2}(x^{k-1}y^{l-1}\tilde{u}(x, y))}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial y^2)^{n+1}} + \\ + i \frac{4}{m!n!} \frac{\partial^{m+n+2}\tilde{v}(x, y)}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial y^2)^{n+1}}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$2) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 \equiv n \text{ не ціле } \left(\left[\frac{l}{2} \right] \equiv n \right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[f(z) e^{i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] + i \operatorname{Im} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] = \\ = \frac{(-1)^{n+m} 2x}{m! \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(n - \frac{l}{2} + 1)} \frac{\partial}{\partial y} \int_y^y \frac{\partial^{m+n+1}(x^{k-1}\eta^{l-1}\tilde{u}(x, \eta))}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial \eta^2)^n} \frac{2\eta d\eta}{(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \\ + i \frac{(-1)^{n+m}}{m! \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(n - \frac{l}{2} + 1)} \frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial y} \int_y^y \frac{\partial^{m+n+1}\tilde{v}(x, \eta)}{(\partial x^2)^{m+1}(\partial \eta^2)^n} \frac{2\eta d\eta}{(\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$3) \frac{k}{2} - 1 \equiv m, \frac{l}{2} - 1 \equiv n \text{ не ціле } \left(\left[\frac{k}{2} \right] \equiv m \right), \frac{l}{2} - 1 \equiv n$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[f(z) e^{i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] + i \operatorname{Im} \left[f(z) e^{-i\pi(\frac{k+l}{2}-2)} \right] = \\ = \frac{(-1)^{n+m} 2}{n! \Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(m - \frac{k}{2} + 1)} \left\{ 2y \frac{\partial}{\partial x} \int_x^x \frac{\partial^{m+n+1}(\xi^{k-1}y^{l-1}\tilde{u}(\xi, y))}{(\partial \xi^2)^m(\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}} + \right. \\ \left. + i \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^x \frac{\partial^{m+n+1}\tilde{v}(\xi, y)}{(\partial \xi^2)^m(\partial y^2)^{n+1}} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}} \right\}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 & 4) \frac{k}{2} - 1 \text{ не ціле } \left(\left[\frac{k}{2} \right] \equiv m \right), \frac{l}{2} - 1 \neq n \text{ не ціле } \left(\left[\frac{l}{2} \right] \equiv n \right) \\
 & \operatorname{Re} \left[f(z) e^{i\pi \left(\frac{k+l}{2} - 2 \right)} \right] + i \operatorname{Im} \left[f(z) e^{-i\pi \left(\frac{k+l}{2} - 2 \right)} \right] = \\
 & = \frac{(-1)^{n+m} 4}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{k}{2} + 1\right) \Gamma\left(n - \frac{l}{2} + 1\right)} \otimes \\
 & \otimes \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{\partial^{m+n} (\xi^{k-1} \eta^{l-1} \tilde{u}(\xi, y))}{(\partial \xi^2)^m (\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m} (\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} + \right. \\
 & \left. + \frac{i}{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{\partial^{m+n} \tilde{v}(\xi, \eta)}{(\partial \xi^2)^m (\partial \eta^2)^n} \frac{\xi \eta d\xi d\eta}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m} (\eta^2 - y^2)^{\frac{l}{2}-n}} \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Доведення. Формули (19)–(22) встановлюються за лемою. $\square$

Зауваження 2. Нехай G_4 — деяка горизонтальна півсмуга $\{0 < x < \infty, 0 < y < y_0\}$ або перша чверть площини. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в G_4 і задовольняє умови

- а) $v|_{x=0, 0 < y < y_0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0,$
- б) $f(z) = o(|z|^{-k-\varepsilon})$ при $z \rightarrow \infty,$

то інтегральне зображення (3) і інтегральне зображення

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x \left\{ x^{1-k} y^{1-l} \operatorname{Re} \left[f(\zeta) e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \right] + \right. \\
 & \left. + i\xi \eta \operatorname{Im} \left[f(\zeta) e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \right] \right\} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} (y^2 - \eta^2)^{\frac{l}{2}-1} d\xi d\eta \quad (23)
 \end{aligned}$$

визначають одну й ту ж $x^k y^l$ -аналітичну функцію в G_4 .

Справедливість цього твердження отримуємо скориставшись тим, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \left(x^{1-k} y^{1-l} + \xi \eta \right) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi = 0.$$

Зауваження 3. Нехай G_5 — вертикальна півсмуга $\{0 < x < x_0, 0 < y < \infty\}$ або перша чверть площини. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в G_5 і задовольняє умови:

- а) $v|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0, 0 < x < x_0} = 0,$
- б) $f(z) = o(|z|^{-l-\varepsilon})$ при $z \rightarrow \infty,$

то інтегральні зображення (3) і (13) визначають одну й ту ж $x^k y^l$ -аналітичну функцію в G_5 .

Зауваження 4. Нехай G_6 — перша чверть площини. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в G_6 і задовольняє умови:

- а) $v|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0,$
- б) $f(z) = o(|z|^{-\max(k, l)-\varepsilon})$ при $z \rightarrow \infty,$

то інтегральні зображення (3) і (18) визначають одну й ту ж $x^k y^l$ -аналітичну функцію в G_6 .

Задача. Нехай G — права верхня чверть площини $\{x > 0, y > 0\}$. Треба знайти функцію $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ xy -аналітичну в G , неперервну на

границі G , за винятком може точки $(0, 0)$ і таку, що задовольняє крайовим умовам

$$\tilde{u}|_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (24)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty, \quad (25)$$

а при $z \rightarrow \infty$ — додатковій умові

$$\tilde{f}(z) = o(|z|), \quad z \in G. \quad (26)$$

У відповідності з (3) розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\tilde{f}(z) = \int_0^y \int_0^x (u(\xi, \eta) + i\xi\eta v(\xi, \eta)) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{x^2 - \xi^2} \sqrt{y^2 - \eta^2}}, \quad (27)$$

де $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функція аналітична в G , $v|_{x=0} = 0$.

Задовольняючи умову (24), одержимо

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_0^x \int_0^1 u(\xi, 0) \frac{d\xi d\tau}{\sqrt{x^2 - \xi^2} \sqrt{1 - \tau^2}}$$

або

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^x u(\xi, 0) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}.$$

За формулою обернення

$$u(x, 0) = \frac{4}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_0^x \tilde{\Phi}(\xi) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} = \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — відома величина.

Покладаючи $u(-x, 0) = u(x, 0)$ і вважаючи, що $u(x, 0)$ на всій осі x правильно неперервна і в околі нескінченно віддаленої точки задовольняє умову Гельдера, за формулою Шварца одержуємо

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0) - a}{t - z} dt + a, \quad (28)$$

де $a = u(\infty, 0)$, $v(0, \infty) = 0$.

Підставляючи (28) в (27) і враховуючи, що $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ y > 0}} f(z) = a$, переконуємося,

що функція $\tilde{f}(z)$, визначена рівністю (27), задовольняє умову (26).

Отже, розв'язок задачі запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \int_0^y \int_0^x \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0) - a}{t - \zeta} dt + \right. \\ & \left. + i\xi\eta \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0) - a}{t - \zeta} dt \right) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{x^2 - \xi^2} \sqrt{y^2 - \eta^2}} + a \frac{\pi^2}{4}, \\ & \zeta = \xi + i\eta. \end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вірченко Н. О. Про основне інтегральне зображення p -аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k y^l$ / Н. О. Вірченко // Доповіді АН УРСР. — 1974. — № 7. — С. 582–585.
2. Маричев О. И. Интегральное представление решений обобщенного двусимметричного уравнения Гельмгольца и формулы его обращения / О. И. Маричев // Диф. уравнения. — 1978. — Т. 24. — № 10. — С. 1824–1821.
3. Положий Г. Н. Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций / Г. Н. Положий — Киев: Наук. думка, 1973. — 424 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 14.07.2012

УДК 519.63.001.57

СИНТЕЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

А. Я. БОМБА, О. М. ГЛАДКА

РЕЗЮМЕ. На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних шаруватих криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Створений алгоритм автоматично вирішує проблему вибору вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомих ліній розділу шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної витрати та розрахунку поля величини швидкості. Ефективність запропонованої методики продемонстровано на прикладі розрахунку характерних параметрів фільтрації у сланцевому пласті.

ВСТУП

У роботі [1] запропоновано конструктивний підхід до моделювання ідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень. Поєднання цих методів дає можливість в комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних вузлів, котрі в свою чергу "підправляються" (на наступному ітераційному кроці) за допомогою так званих умов ортогональності (які є наслідками умов Коші-Рімана) і, отже, пришвидшити досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Розроблений в [1] підхід нами поширений і на нелінійні задачі для многозв'язних криволінійних областей – математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини (наприклад, теорії фільтрації, електродинаміки тощо) у шаруватих середовищах [4], провідність яких задається кусково-сталими функціями, залежними від шуканого квазіпотенціалу. Створена нами відповідна обчислювальна технологія базується на поєднанні числових методів квазіконформних ("кусково-конформних") відображень [5] і сумарних зображень з ідеєю альтернуючого методу Шварца [6].

Числово-аналітичні методи сумарних зображень, розроблені Г. М. Положієм і іншими вченими, є добре адаптованими до комп'ютерної реалізації, дозволяють уникати накопичення обчислювальних похибок [7–8]. Зокрема,

в роботах І. І. Ляшка, А. А. Глуценка, О. Ю. Гриценка, А. П. Кузьменка, О. Б. Стелі та ін. (див., напр., [8–11]) розглянуті випадки шарувато-неоднорідних середовищ і виведені формули сумарних зображень, що є розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами для однієї (чи двох) ліній розділу. Обмеження застосування методу сумарних зображень для криволінійних областей, границі яких складаються із ліній течії та еквіпотенціалей, у наших роботах "зняте" шляхом переходу від прямих задач на знаходження комплексного потенціалу поля до обернених (на знаходження характеристичної функції течії) [2], оскільки в даному випадку відповідні області комплексних потенціалів є об'єднанням прямокутників з горизонтальними та вертикальними ділянками меж. Декомпозиція області на "підобласті з накладками" (кожна підобласть містить по два прошарки сталості коефіцієнта провідності середовища; кожен прошарок, окрім крайніх, є частиною двох сусідніх підобластей) [12, 13] за альтернуючим методом Шварца дає можливість ефективно "склеювати розв'язок" у випадку наявності великої кількості ліній розриву параметра задачі (коефіцієнта провідності), а також розпаралелювати обчислювальний процес. Використання цього методу для декомпозиції області дозволяє також вирішити проблему значних співвідношень у розмірах області (оскільки алгоритм розв'язання вихідної задачі зводиться до розв'язання послідовності задач для більш "зручних" підобластей).

У даній роботі розроблена методика викладена на прикладі розв'язання нелінійної крайової задачі для двозв'язної обмеженої еквіпотенціальними лініями області, шаруватого середовища, з кусково-сталим коефіцієнтом провідності та невідомими лініями розділу шарів, що зводиться до обернення квазіконформного ("кусково-конформного") відображення даної області із умовним розрізом вздовж деякої лінії течії (яка знаходиться в процесі розв'язання задачі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, що складається із суміжних прямокутників з невідомою висотою (повною витратою). В результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема вибору вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомих ліній розділу шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної витрати та розрахунку поля величини швидкості.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо модельну задачу про знаходження кусково-гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (квазіпотенціалу) у двозв'язній криволінійній області $G_z = \bigcup_{l=1}^s G_z^{(l)} \cup \bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)}$ ($z=x+iy$), обмеженій двома гладкими замкненими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ — внутрішній і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ — зовнішній, $G_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}\}$, $L_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(l)}\}$, що у кожній із підобластей $G_z^{(l)}$ задовольняє рівняння $\operatorname{div}(\kappa(\varphi) \operatorname{grad} \varphi) = 0$ і крайові умови: $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$. Функція $\kappa(\varphi(x, y))$, що характеризує провідність середовища і його схильність до

деформації, має вигляд

$$\kappa(\varphi(x, y)) = \begin{cases} \kappa_1, & \varphi^{(0)} = \varphi_* < \varphi \leq \varphi^{(1)}, \\ \kappa_2, & \varphi^{(1)} < \varphi \leq \varphi^{(2)}, \\ \vdots & \vdots \\ \kappa_l, & \varphi^{(l-1)} < \varphi \leq \varphi^{(l)}, \\ \vdots & \vdots \\ \kappa_s, & \varphi^{(s-1)} < \varphi \leq \varphi^{(s)} = \varphi^*, \end{cases}$$

де κ_l — дійсні додатні числа, $l = \overline{1, s}$. Умови спряження вздовж шуканих ліній розриву $L_z^{(l)}$ функції $\kappa(\varphi(x, y))$ мають вигляд

$$[\varphi] \Big|_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] \Big|_{L_z^{(l)}} = 0,$$

де n — зовнішня нормаль до відповідної кривої, $[f]$ — стрибок функції f при переході через відповідну лінію (по нормалі). Ввівши, аналогічно [2, 3], функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, зафіксувавши на внутрішньому контурі L_* деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії, переходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$? утвореної при цьому однозв'язної області $G_z = G_z/\Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \bigcup_{l=1}^s G_\omega^{(l)} \cup \bigcup_{l=1}^s L_\omega^{(l)}$, $G_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}, 0 < \psi < Q\}$, $L_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(l)}\}$ з невідомим параметром (повною витратою) $Q = \oint_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, & (x, y) \in G_z; \\ [\varphi] \Big|_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] \Big|_{L_z^{(l)}} = 0, \\ \kappa(\varphi(x, y)) = \kappa_l, & (x, y) \in G_z^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \end{cases} \quad (1)$$

Тут через AD і BC позначено відповідно верхній і нижній береги розрізу Γ (див. рис. 1 а).

Обернена до неї крайова задача на квазіконформне ("кусково-конформне") відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомій витраті Q та природному розрізі Γ , що має вигляд [14]:

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi}, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ [(x, y)]|_{\varphi=\varphi^{(l)}} = 0, \quad \left[\frac{\kappa}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \right] \Big|_{\varphi=\varphi^{(l)}} = 0, & l = \overline{1, s}, \\ J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* \end{cases} \quad (2)$$

зводиться до розв'язування в $G_\omega^{(l)}$ рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$, $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$ при заданих крайових умовах, умовах склеювання вздовж

ліній $\varphi = \varphi^{(l)}$, $l = \overline{1, s}$ та умовах ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області [3]:

$$\begin{cases} \text{grad}\psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad}f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \\ \text{grad}\psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad}f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ

Визначимо рівномірну сіткову область $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^s G_\omega^{\gamma(l)}$, де $G_\omega^{\gamma(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi^{(l-1)} + \Delta_\varphi \cdot (i - i_l), i = \overline{i_{l-1}, i_l}, i_0 = 0, i_s = m + 1; \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; m, n \in N, \Delta_\varphi = \frac{\varphi^{(l)} - \varphi^{(l-1)}}{i_l - i_{l-1}}, \Delta_\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi}\}$, $\Delta_\varphi, \Delta_\psi$ — кроки відповідно по φ та ψ , γ — квазіконформний інваріант.

Рівняння Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0, \Delta y(\varphi, \psi) = 0$ у внутрішніх вузлах цієї сіткової області апроксимуємо з використанням п'ятиточкового шаблону типу "хрест" [15]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^2)x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^2(x_{i,j+1}^{(l)} + x_{i,j-1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^2)y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^2(y_{i,j+1}^{(l)} + y_{i,j-1}^{(l)}) = 0, \\ i = \overline{i_l + 1, i_{l+1} - 1}, j = \overline{1, n}, l = \overline{0, s}, \end{cases} \quad (4)$$

а на розрізі Γ за дев'ятиточковим шаблоном типу "ящик" [15] з урахуванням умов періодичності:

$$\begin{cases} x_{i,0}^{(l)} = \alpha(x_{i+1,0}^{(l)} + x_{i-1,0}^{(l)}) + \beta(x_{i,1}^{(l)} + x_{i,n}^{(l)}) + \\ \quad + \frac{(x_{i-1,n}^{(l)} + x_{i+1,n}^{(l)} + x_{i-1,1}^{(l)} + x_{i+1,1}^{(l)})}{20}, \\ y_{i,0}^{(l)} = \alpha(y_{i+1,0}^{(l)} + y_{i-1,0}^{(l)}) + \beta(y_{i,1}^{(l)} + y_{i,n}^{(l)}) + \\ \quad + \frac{(y_{i-1,n}^{(l)} + y_{i+1,n}^{(l)} + y_{i-1,1}^{(l)} + y_{i+1,1}^{(l)})}{20}, \\ x_{i,n+1}^{(l)} = x_{i,0}^{(l)}, y_{i,n+1}^{(l)} = y_{i,0}^{(l)}, i = \overline{i_l + 1, i_{l+1} - 1}, l = \overline{0, s}, \\ \alpha = \frac{3\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4}{5(\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4 + \Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2)} - \frac{1}{10}, \beta = \frac{3\Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2}{5(\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4 + \Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2)} - \frac{1}{10}. \end{cases} \quad (5)$$

У формулах (4)–(10) $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(l)}$, $l = \overline{0, s}$.

Різницеві аналоги крайових умов та умов ортогональності матимуть вигляд

$$f_* \left(x_{i_0,j}^{(0)}, y_{i_0,j}^{(0)} \right) = 0, \quad f^* \left(x_{i_{s+1},j}^{(s)}, y_{i_{s+1},j}^{(s)} \right) = 0, \quad j = \overline{0, n+1} \quad ; \quad (6)$$

$$\begin{cases} \left(4x_{i_0+1,j}^{(0)} - 3x_{i_0,j}^{(0)} - x_{i_0+2,j}^{(0)} \right) \left(x_{i_0,j+1}^{(0)} - x_{i_0,j-1}^{(0)} \right) + \\ + \left(4y_{i_0+1,j}^{(0)} - 3y_{i_0,j}^{(0)} - y_{i_0+2,j}^{(0)} \right) \left(y_{i_0,j+1}^{(0)} - y_{i_0,j-1}^{(0)} \right) = 0, \\ \left(3x_{i_s,j}^{(s)} + x_{i_s-2,j}^{(s)} - 4x_{i_s-1,j}^{(s)} \right) \left(x_{i_s,j+1}^{(s)} - x_{i_s,j-1}^{(s)} \right) + \\ + \left(3y_{i_s,j}^{(s)} + y_{i_s-2,j}^{(s)} - 4y_{i_s-1,j}^{(s)} \right) \left(y_{i_s,j+1}^{(s)} - y_{i_s,j-1}^{(s)} \right) = 0, \\ j = \overline{0, n+1}. \end{cases} \quad (7)$$

Умови спряження вздовж ліній розриву $L_z^{(l)}$ функції $\kappa(\varphi(x, y))$ у сітковій області G_ω^γ запишемо так

$$\begin{cases} x_{i,j}^{(l-1)} = x_{i,j}^{(l)}, & y_{i,j}^{(l-1)} = y_{i,j}^{(l)}, & j = \overline{1, n}, \\ \kappa_l \left(x_{i,j}^{(l-1)} - x_{i-1,j}^{(l-1)} \right) = \kappa_{l-1} \left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right), \\ \kappa_l \left(x_{i,j}^{(l-1)} - x_{i-1,j}^{(l-1)} \right) = \kappa_{l-1} \left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right), & j = \overline{0, n+1}, & l = \overline{1, s}. \end{cases} \quad (8)$$

Квазіконформний інваріант γ отримаємо на підставі умови "конформної подібності в малому" відповідних елементарних чотирикутників двох областей [2]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=\overline{0,n}}^{i_{s+1}-1,n} \gamma_{i,j}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} = & \frac{1}{\kappa_{i,j}} \times \left(\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2} + \right. \\ & + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)} \right)^2} \Big) \times \\ & \times \left(\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)} \right)^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

де $\kappa_{i,j} = \kappa \left(x_{i,j}^{(l)}, y_{i,j}^{(l)} \right)$, $l = \overline{0, s}$.

Невідому витрату Q обчислюємо за формулою

$$Q = m \Delta_\varphi \cdot \gamma. \quad (10)$$

Розв'язки $x_{i,j}^{(l)}$, $y_{i,j}^{(l)}$ скінченно-різницевого рівняння Лапласа (4) знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень. Для цього область G_ω^γ "розіб'ємо" на сіткові прямокутники з "накладками": $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{s-1} \tilde{G}_\omega^{(l)}$, де $\tilde{G}_\omega^{(l)} = G_\omega^{(l)} \cup G_\omega^{(l+1)}$. При цьому отримаємо $s-1$ проекцію задачі (4)–(10) (стосовно підобластей $\tilde{G}_\omega^{(l)}$) [12, 13] для знаходження послідовностей сіткових функцій $\left(\left\{ \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^\infty, \left\{ \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^\infty \right)$: $x_{i,j}^{(l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)}$, $y_{i,j}^{(l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)}$, де ξ — номер кроку ітераційного процесу [12], що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [6]. Розв'язки цих підзадач представимо формулами сумарних зображень [8–9, 14]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)} = & \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^i a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^i b_k^{(l)(\xi)} + \right. \\ & \left. + \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i, g) \left(p_{1,k} x_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(l)} \right) \right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)} = & \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^i c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^i d_k^{(l)(\xi)} + \right. \\ & \left. + \gamma^2 \sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i, g) \left(p_{1,k} y_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{g,n+1}^{(l)} \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$i = \overline{i_{l-1} + 1, i_{l+1} - 1}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s-1}$, де $\tilde{\kappa}_l = \kappa_l / \kappa_{l+1}$; функція $\Phi(i, g)$ визначається за формулою

$$\Phi(i, g) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu_k^{|i-g|} + \frac{1-\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{2*i_l-i-g}}{\mu_k - \nu_k}, \quad g = \overline{i_{l-1} + 1, i_l - 1}, \\ \frac{\nu_k^{i_l-i}}{\mu_k - \nu_k}, \quad g = i_l, \\ \frac{\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{g-i}}{\mu_k - \nu_k}, \quad g = \overline{i_l + 1, i_{l+1} - 1}, \\ \frac{\frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{i-g}}{\mu_k - \nu_k}, \quad g = \overline{i_{l-1} + 1, i_l - 1}, \\ \frac{\nu_k^{i-i_l}}{\mu_k - \nu_k}, \quad g = i_l, \\ \frac{\mu_k - \nu_k}{\nu_k^{|i-g|} + \frac{\tilde{\kappa}_l-1}{\tilde{\kappa}_l+1} \nu_k^{i+g-2*i_l}}, \quad g = \overline{i_l + 1, i_{l+1} - 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = \overline{i_{l-1} + 1, i_l}, \\ i = \overline{i_l + 1, i_{l+1} - 1}, \end{array}$$

елементи матриці Р-трансформацій $P = \{p_{j,k}\}_{j,k=1}^n$ обчислюються як $p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}$, елементи діагональних матриць $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$, $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$ визначаються за формулами $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1})$ [8]. Системи рівнянь для обчислення $a_k^{(l)(\xi)}$, $b_k^{(l)(\xi)}$, $c_k^{(l)(\xi)}$, $d_k^{(l)(\xi)}$ ($k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s-1}$) мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l-1}} a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{i_{l-1}} b_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{i_{l-1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k^{(l)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l+1}} a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{i_{l+1}} b_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{i_{l+1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k'^{(l)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l-1}} c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{i_{l-1}} d_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{i_{l-1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k''^{(l)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l+1}} c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^{i_{l+1}} d_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{i_{l+1},j}^{(l)(\xi-1)} - \hat{S}_k'''^{(l)}, \end{array} \right.$$

де $p_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, n}$) — елементи матриці P^* , оберненої до P ($P \cdot P^* = E$),

$$\begin{aligned} S_k^{(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l-1}, g) \left(p_{1,k} x_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(l)} \right), \\ S_k'^{(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l+1}, g) \left(p_{1,k} x_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(l)} \right), \\ S_k''^{(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l-1}, g) \left(p_{1,k} y_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{g,n+1}^{(l)} \right), \\ S_k'''^{(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l+1}, g) \left(p_{1,k} y_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{g,n+1}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Алгоритм розв'язування скінченно-різницевої задачі (4)–(10) будується аналогічно [2, 3] із додаванням елементів "декомпозиції" і "шаруватості" та може бути описаний таким чином.

Задаємо кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ (так, щоб відповідні вузли лежали на лініях $\varphi_{i_l} = \varphi^{(l)}$ і $\gamma \approx 1$), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення δ_* , нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб значення $\Delta_\varphi \cdot (n+1)/\gamma$ не перевищувало шуканої витрати Q), початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)(0)}$, $y_{0,j}^{(0)(0)}$, $x_{m+1,j}^{(s)(0)}$, $y_{m+1,j}^{(s)(0)}$, $x_{i,n+1}^{(l)(0)}$, $y_{i,n+1}^{(l)(0)}$, $x_{i,0}^{(l)(0)}$, $y_{i,0}^{(l)(0)}$ (так, щоб виконувались умови (6)) і обчислюємо (див. нижче) початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(l)(0)}, y_{i,j}^{(l)(0)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s}$. За формулами (9), (10) обчислюємо значення квазіконформного інваріанта γ і повної витрати Q . Після цього уточнюємо координати граничних вузлів (5), (7) (даний граничний вузол на k -ому кроці "підправляємо" за умов, що фіксованими є навколишні та відповідні приграничні [2]).

Наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(l)(k)}, y_{i,j}^{(l)(k)})$ ($k = 0, 1, \dots$ — номер кроку загальної ітерації) отримуємо як результат ітераційного процесу по ξ обчислення функцій $(\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)(k)}, \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)(k)}) = (\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)})$ за формулами (11)–(12), де, для спрощення викладок, номер кроку k загальної ітерації опущено. При цьому, значення граничних вузлів у підобластях $\tilde{G}_\omega^{(l)}$ визначатимемо як значення внутрішніх вузлів (вздовж відповідних вертикальних відрізків) сусідніх підобластей з "накладками" [12]. Зазначимо, що достатньо провести щонайбільше $s-1$ ітерацію по ξ для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Далі знову уточнюємо γ та Q за (9), (10). Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(l)(k)} - x_{i,j}^{(l)(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(l)(k)} - y_{i,j}^{(l)(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію; якщо вона більша за ε , то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку оцінюємо ступінь конформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де δ_1, δ_2 — нев'язки апроксимацій рівнянь (1):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |\delta_{i,j}^{(1)}|, \quad \delta_{i,j}^{(1)} = \gamma(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}) - (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)});$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |\delta_{i,j}^{(2)}|, \quad \delta_{i,j}^{(2)} = \gamma(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}) + (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)}).$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше вважаємо, що задача розв'язана із

необхідною точністю. При цьому, з метою забезпечення приналежності вузлів до ліній розриву параметр n доцільно збільшувати в ціле число разів, а m так, щоб відповідні "малі прямокутники" були якомога "ближчими" до квадратів.

Побудовані за описаним вище алгоритмом динамічні сітки є основою для досліджень інших кількісних характеристик руху, зокрема, швидкості.

Швидкість руху $\vec{v} = v_x(x, y) + iv_y(x, y)$ знаходимо за формулою $\vec{v} = \frac{d\omega}{dz} = 1/\frac{dz}{d\omega}$ [3]. Різницеві формули для обчислення величини швидкості $v_{i,j}^{(l)} = v(x_{i,j}^{(l)}, y_{i,j}^{(l)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{(l)} &= 2 \frac{\Delta\psi\kappa_l}{J_{i,j}} \sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}\right)^2}, \\ J_{i,j} &= (x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)})(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)}) - (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)})(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}); \\ v_{0,j}^{(1)} &= 2 \frac{\Delta\psi\kappa_1}{J_{0,j}} \sqrt{\left(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}\right)^2 + \left(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}\right)^2}, \\ J_{0,j} &= (x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)})(y_{0,j+1}^{(1)} - y_{0,j-1}^{(1)}) - (x_{0,j+1}^{(1)} - x_{0,j-1}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}); \\ v_{m+1,j}^{(s)} &= 2 \frac{\Delta\psi\kappa_s}{J_{m+1,j}} \sqrt{\left(x_{m+1,j}^{(s)} - x_{m,j}^{(s)}\right)^2 + \left(y_{m+1,j}^{(s)} - y_{m,j}^{(s)}\right)^2}, \\ J_{m+1,j} &= (x_{m+1,j}^{(s)} - x_{m,j}^{(s)})(y_{m+1,j+1}^{(s)} - y_{m+1,j-1}^{(s)}) - \\ &\quad - (x_{m+1,j+1}^{(s)} - x_{m+1,j-1}^{(s)})(y_{m+1,j}^{(s)} - y_{m,j}^{(s)}); \\ v_{i,0}^{(l)} &= v_{i,n+1}^{(l)} = \frac{\Delta\psi\kappa_l}{J_{i,0}} \sqrt{\left(x_{i+1,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,0}^{(l)} - y_{i-1,0}^{(l)}\right)^2}, \\ J_{i,0} &= (x_{i+1,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)})(y_{i,1}^{(l)} - y_{i,n}^{(l)}) - (x_{i,1}^{(l)} - x_{i,n}^{(l)})(y_{i+1,0}^{(l)} - y_{i-1,0}^{(l)}); \\ v_{0,0}^{(1)} &= v_{0,n+1}^{(1)} = \frac{\Delta\psi\kappa_1}{J_{0,0}} \sqrt{\left(x_{1,0}^{(1)} - x_{0,0}^{(1)}\right)^2 + \left(y_{1,0}^{(1)} - y_{0,0}^{(1)}\right)^2}, \\ J_{0,0} &= (x_{1,0}^{(1)} - x_{0,0}^{(1)})(y_{0,1}^{(1)} - y_{0,n}^{(1)}) - (x_{0,1}^{(1)} - x_{0,n}^{(1)})(y_{1,0}^{(1)} - y_{0,0}^{(1)}); \\ v_{m+1,0}^{(s)} &= v_{m+1,n+1}^{(s)} = \frac{\Delta\psi\kappa_s}{J_{m+1,0}} \sqrt{\left(x_{m+1,0}^{(s)} - x_{m,0}^{(s)}\right)^2 + \left(y_{m+1,0}^{(s)} - y_{m,0}^{(s)}\right)^2}, \\ J_{m+1,0} &= (x_{m+1,0}^{(s)} - x_{m,0}^{(s)})(y_{m+1,1}^{(s)} - y_{m+1,n}^{(s)}) - (x_{m+1,1}^{(s)} - x_{m+1,n}^{(s)})(y_{m+1,0}^{(s)} - y_{m,0}^{(s)}). \end{aligned}$$

ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ

Як приклад, розглянемо стаціонарну задачу фільтрації у сланцевому пласті G_z , обмеженому еліптичним контуром живлення L^* , що містить одну свердловину L_* при заданих значеннях потенціалів φ^* і φ_* на даних контурах (відповідно). Коефіцієнт провідності (фільтрації) $\kappa = \kappa(\varphi)$ пред-

ставимо у вигляді: $\kappa = \begin{cases} \kappa_3 = \kappa_0, & \varphi^{(2)} < \varphi \leq \varphi^*, \\ \kappa_2 = \kappa_0 + \kappa_v, & \varphi^{(1)} < \varphi \leq \varphi^{(2)}, \\ \kappa_1 = \kappa_0 + \kappa_v + \kappa_c, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(1)}, \end{cases}$ де κ_0 — природний (малий, близький до нуля) коефіцієнт фільтрації пласта, κ_v — його

збільшення (приріст) за рахунок деформацій, викликаних "відсмоктуванням", κ_c — збільшення коефіцієнта фільтрації внаслідок присвердловинних деформацій пласта, $\varphi^{(1)}$ і $\varphi^{(2)}$ — відповідні критичні значення потенціалу (напору, тиску). На рис. 1 а) зображено розраховану динамічну сітку і відповідні лінії розділу L_z^1 і L_z^2 , а на рис.1 б) — поверхню величини швидкості при $L_* = \{x + iy : x = 0,1 \cos(t) + 0,2; y = 0,1 \sin(t) + 0,1; 0 \leq t < 2\pi\}$; $L^* = \{x + iy : x = \cos(t); y = 0,7 \sin(t); 0 \leq t < 2\pi\}$; $\phi_* = 0$; $\phi^* = 2,3$; $\phi^{(1)} = 0,7$; $\phi^{(2)} = 1,6$; $\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = 1$; $\kappa_3 = 0,1$.

Висновки

Таким чином, на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень з декомпозицією області альтернуючим методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних шаруватих криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Побудований алгоритм забезпечує можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки, знаходження ліній розділу шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення величин швидкості та повної витрати. Ефективність запропонованої методики продемонстровано на прикладі розрахунку характерних параметрів фільтрації у сланцевому пласті.

Використання методів сумарних зображень для наближення внутрішніх вузлів дозволяє у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області по прошарках сталості коефіцієнта провідності з "накладками" дає змогу, по-перше, ефективно знаходити неперервні розв'язки нелінійних крайових задач з розривними коефіцієнтами; по-друге, розв'язувати задачі у більш "зручних" підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових, сланцевих пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами пласта і діаметрами свердловин; по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних мереж і відповідних комунікаційних програм, що важливо з огляду на великий обсяг обчислювальної роботи для таких класів задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А. Я. Синтез числовых методов конформных отображений та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А. Я. Бомба, А. П. Кузьменко, О. М. Гладка. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. — 2012. — №2. — С. 11–18.
2. Бомба А. Я. Нелинейные обращения краевых задач на конформные отображения с управлением в граничных условиях / А. Я. Бомба // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 4. — С. 80–90.

3. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фізико-математичні науки. — 2001. — Вип. 3. — С. 188–195.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К: Наукова думка. — 1991. — 432 с.

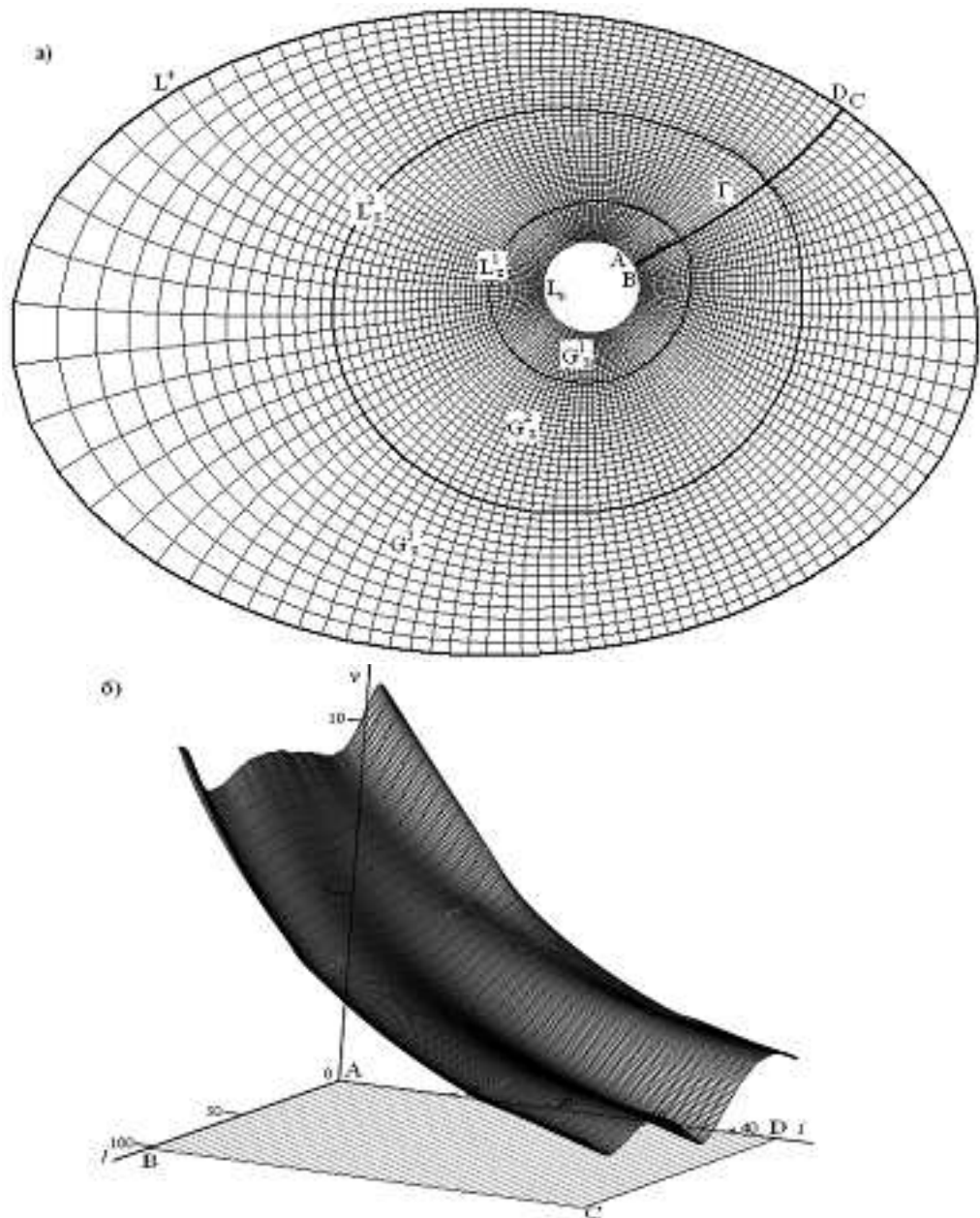


Рис. 1. а) динамічна сітка, б) величина швидкості.

5. Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В. И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин. — К: Наукова думка. — 1990. — 374 с.
6. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
7. Положий Г. М. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. М. Положий. — К: Изд-во КГУ. — 1982. — 161 с.
8. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. — К.: Наукова думка. — 1973. — 264 с.
9. Ляшко И. И. Решение краевых задач в слоистых грунтах / И. И. Ляшко, А. Е. Грищенко. // Алгоритмы и программы решения краевых задач математической физики. — К: Изд-во Киев. ун-та, 1972. — 173 с.
10. Глущенко А. А. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов / А. А. Глущенко, А. П. Кузьменко. // Вычисл. и прикл. математика. — 1984. — Вып. 54. — С. 50–56.
11. Тригуб О. С. Профільна модель волого переносу в пористих середовищах / О. С. Тригуб, О. Б. Стеля, І. О. Стеля // Національний університет Києво-Могилянська академія. Наукові записки. Комп'ютерні науки. — Т. 125. — 2011. — С. 41–45.
12. Гладка О. М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатопаровій смузі / О. М. Гладка, А. П. Кузьменко. // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. — К.: Ін-т математики НАН України. — 1995. — Вип.9. — С. 168–173.
13. Кузьменко А. П. До розв'язання нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях. / А. П. Кузьменко, О. М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Наук.-техн. зб. — Рівне: УДАВГ. — 1998. — Вип. 23. — С. 76–83.
14. Бомба А. Я. Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних крайових задач на конформні відображення в шаруватих середовищах / А. Я. Бомба // Волинський математичний вісник — 2000. — №7. — С. 17–21.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ, РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, вул. ОСТАФОВА, 31; ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМ, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ, вул. СОВОРНА, 11, РІВНЕ, УКРАЇНА.

Надійшла 16.05.2012

УДК 517.9

ДВА МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ФЕЙЄРІВСЬКОГО ОПЕРАТОРА

В. В. СЕМЕНОВ¹

РЕЗЮМЕ. В роботі досліджено збіжність двох методів знаходження нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів. Перший метод є новою та привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи. Другий — варіант класичного методу Гальперна-Сузукі. Доведено теореми про сильну збіжність методів.

(Присвячується пам'яті Івана Івановича Ляшка)

1. ВСТУП ТА ДОПОМІЖНІ ФАКТИ

Фейєрівські оператори та породжені ними ітераційні процеси [1–19] мають велике значення в оптимізаційній алгоритміці. Книга [3] — одне з найкращих джерел по ітераційним алгоритмам з фейєрівською властивістю для розв'язання рівнянь, нерівностей та задач оптимізації.

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина.

Означення 1. Оператор $T : C \rightarrow H$ називають фейєрівським (квазінерозтягуючим), якщо $F(T) = \{x \in C : x = Tx\} \neq \emptyset$ та

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in C.$$

Основний приклад фейєрівського оператора — нерозтягуючий оператор $T : C \rightarrow H$ ($\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C$) з непорожньою множиною нерухомих точок $F(T)$.

Зауваження 1. Множина $F(T)$ опукла та замкнена [3, 7].

Для фейєрівського оператора T має місце

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &\geq \|Tx - z\|^2 = \|Tx - x + x - z\|^2 = \\ &= \|Tx - x\|^2 + 2(Tx - x, x - z) + \|x - z\|^2 \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

Звідки

$$(x - Tx, x - z) \geq \frac{1}{2} \|x - Tx\|^2 \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in C. \quad (1)$$

Сильну збіжність в просторі H позначимо через $\rightarrow$, а слабку — $\rightharpoonup$.

¹Робота виконана за фінансової допомоги Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект GP/F44/042).

Означення 2. Оператор $F : C \rightarrow H$ називають замкненим в точці $y \in H$, якщо

$$x_n \rightarrow x, \quad Fx_n \rightarrow y \Rightarrow Fx = y.$$

Означення 3. Оператор $F : C \rightarrow H$ називають демізамкненим в точці $y \in H$, якщо

$$x_n \rightharpoonup x, \quad Fx_n \rightarrow y \Rightarrow Fx = y.$$

Відомо, що для нерозтягуючих операторів $T : C \rightarrow H$ оператори $I - T$ (I — тотожний оператор) демізамкнені в точці 0 [7, 20].

У даній роботі ми розглянемо два методи розв'язання задачі

$$\text{знайти } x \in F(T), \quad (2)$$

де $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор. Перший метод є модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи [21]. Другий — варіант класичного методу Гальперна-Сузукі [22–28].

Позначимо через P_C оператор метричного проектування гільбертового простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$.

Лема 1 ([7]). *Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H$, $y \in C$. Наступні умови рівносильні:*

- 1) $y = P_C x$;
- 2) $(y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C$.

Зауваження 2. Оператор P_C є нерозтягуючим [7].

Корисною є

Лема 2 ([25, 26]). *Нехай (ξ_n) — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність $\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, де послідовності (α_n) , (β_n) і (γ_n) мають властивості: 1) $\alpha_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq 0$; 3) $\gamma_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$.*

2. МОДИФІКОВАНИЙ ГІБРИДНИЙ МЕТОД

В роботі [21] для пошуку нерухомих точок нерозтягуючого оператора $T : C \rightarrow H$ запропоновано метод

$$\begin{cases} x_0 \in C_0 = C, \\ y_n = Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0. \end{cases} \quad (3)$$

В припущенні $F(T) \neq \emptyset$ доведена сильна збіжність послідовності (x_n) до нерухої точки $z = P_{F(T)} x_0$. Майже без змін в основних міркуваннях обґрунтування цього методу переноситься на випадок замкнених фейєрівських операторів. Випадок багатозначних фейєрівських операторів розглянуто в роботі [12]. В роботі [13] на базі подібної схеми побудовано сильно збіжний екстрапроксимальний алгоритм для розв'язання задач рівноважного програмування.

Основний недолік ітерацій (3) — зростаюча складність опуклих множин C_n , на які проектується точка x_0 . Бажаною є схема без зростання складності допоміжних множин. У цьому розділі ми пропонуємо можливий варіант такої схеми. Але ціною буде зростання кількості метричних проектувань на ітераційному кроці.

Приділимо спочатку увагу допоміжній задачі пошуку спільної нерухомої точки зліченної родини нерозтягуючих операторів².

Нехай $T_i : C \rightarrow C$ — злічений набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині C простору H , $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$. Розглядаємо задачу

$$\text{знайти } x \in F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i). \quad (4)$$

Для знаходження спільної нерухомої точки операторів T_i можна використати такий варіант схеми Гальперна.

Алгоритм 1. Задаємо $x_1 \in C$ і $a \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$.

Сильна збіжність цієї схеми доводиться стандартними міркуваннями [26, 27]. Наведемо їх для замкненості статті.

(Факт 1). *Послідовність (x_n) обмежена.* Дійсно, для $p \in F$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \alpha_n \|a - p\| + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \leq \max \{\|a - p\|, \|x_n - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \{\|x_1 - p\|, \|a - p\|\}, \quad n \geq 1.$$

(Факт 2). *Для послідовності (x_n) виконується $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$.* Маємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (\alpha_n - \alpha_{n-1})a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_{n-1} = \\ &= (\alpha_n - \alpha_{n-1})a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - T_i x_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) T_n x_{n-1}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\| + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \|a - T_n x_{n-1}\|.$$

²Запропонована нижче схема апроксимації розв'язку задачі (2) буде проінтерпретована як варіант схеми Гальперна для задачі пошуку спільної нерухомої точки певної зліченної родини нерозтягуючих операторів

З леми 2 про числові послідовності випливає бажане.

(Факт 3). Для всіх i має місце $\|x_n - T_i x_n\| \rightarrow 0$. Маємо

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n) = \alpha_n(a - x_n) + x_n - x_{n+1}.$$

Для довільного $p \in F$ розглянемо рівність

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n, x_n - p) &= \\ &= \alpha_n(a - x_n, x_n - p) + (x_n - x_{n+1}, x_n - p). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\|x_n - p\|^2 \geq \|T_i x_n - p\|^2 = \|T_i x_n - x_n\|^2 + \|x_n - p\|^2 + 2(T_i x_n - x_n, x_n - p),$$

то

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - x_n\|^2 \leq 2\alpha_n(a - x_n, x_n - p) + 2(x_n - x_{n+1}, x_n - p).$$

Для фіксованого i при $n > i$ маємо

$$\|T_i x_n - x_n\|^2 \leq \frac{M(\alpha_n + \|x_n - x_{n+1}\|)}{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}.$$

Звідки

$$\|x_n - T_i x_n\| \rightarrow 0.$$

Доведемо, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (P_F a - x_n, P_F a - a) \leq 0. \quad (5)$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) таку, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (P_F a - x_n, P_F a - a) = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_F a - x_{n_k}, P_F a - a).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$. З принципу демізамкненості випливає включення $\tilde{x} \in F$. Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_F a - x_{n_k}, P_F a - a) = (P_F a - \tilde{x}, P_F a - a) \leq 0,$$

чим і доводимо (5).

Покажемо тепер, що $x_n \rightarrow z = P_F a$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \left\| \alpha_n a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - z \right\|^2 = \\ &= \left\| \alpha_n (a - z) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - z) \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) (T_i x_n - z) \right\|^2 + 2\alpha_n (a - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, x_{n+1} - z). \quad (6) \end{aligned}$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (6) лему 2 про числові послідовності, робимо висновок, що $\|x_n - z\| \rightarrow 0$. Отже, має місце

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T_i : C \rightarrow C$ — нерозтягуючі оператори, $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$, $a \in C$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_F a$.*

Тепер повернемося до задачі (2). Для її розв'язання пропонуємо

Алгоритм 2 (модифікований гібридний метод). Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = P_{C_1} x_n, \\ z_{n,2} = P_{C_2} x_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n,n} = P_{C_n} x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$.

Нехай $C = H$. Розпишемо у явному вигляді обчислювальні формули алгоритму 2

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ \begin{cases} z_{n,1} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\{0, (x_1 - y_1, x_n) - (\|x_1\|^2 - \|y_1\|^2)/2\}}{\|x_1 - y_1\|^2} (x_1 - y_1), & x_1 - y_1 \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше,} \end{cases} \\ z_{n,2} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\{0, (x_2 - y_2, x_n) - (\|x_2\|^2 - \|y_2\|^2)/2\}}{\|x_2 - y_2\|^2} (x_2 - y_2), & x_2 - y_2 \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше,} \end{cases} \\ \dots\dots\dots \\ z_{n,n} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\{0, (x_n - y_n, x_n) - (\|x_n\|^2 - \|y_n\|^2)/2\}}{\|x_n - y_n\|^2} (x_n - y_n), & x_n - y_n \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше,} \end{cases} \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Має місце

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ замкнений в 0, $a \in C$. Тоді породжена алгоритмом 2 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_{F(T)} a$.*

Доведення. Множини C_n — опуклі та замкнені. Покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення $F(T) \subseteq C_n$. Для $p \in F(T)$ маємо

$$\|y_n - p\| = \|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Отже, $p \in C_n$. Звідки випливає $F(T) \subseteq C_n$.

Алгоритм 2 можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{C_k} x_n.$$

За теоремою 1, маємо $x_n \rightarrow z = P_F a$, де $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(P_{C_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Покажемо, що $z \in F(T)$, чим і доведемо теорему. Оскільки $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, то

$$\|x_n - z\| \geq \|y_n - z\| = \|Tx_n - z\|.$$

Після граничного переходу, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - z\| = 0.$$

Звідки, маємо $z = Tz$. □

Зауваження 3. Теорема 2 буде справедливою і для варіанту модифікованого гібридного методу з $y_n = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)Tx_n$ ($0 \leq \lambda_n \leq \bar{\lambda} < 1$).

3. МЕТОД ГАЛЬПЕРНА-СУЗУКІ

Для розв'язання задачі (2) можна використати

Алгоритм 3 (метод Гальперна-Сузукі). Обираємо $a \in H$, $x_1 \in C$, генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C (\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n),$$

де $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $T_{\lambda_n} = \lambda_n I + (1 - \lambda_n)T$, $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, 1)$.

Зауваження 4. Дослідження збіжності алгоритму 3 у класі нерозтягуючих операторів має довгу історію. Принципові результати отримано в роботах Б. Гальперна [22], П.-Л. Люнса [23], Р. Вітмана [24], Х. К. Ксу [25, 26, 27] та Т. Сузукі [28].

Наша мета — доведення сильної збіжності алгоритму 3 для фейєрівських операторів $T : C \rightarrow H$ з демізамкненим в 0 оператором $I - T$.

Має місце

Лема 3. *Послідовність (x_n) обмежена.*

Доведення. Для $p \in F(T)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \leq \max \{\|a - p\|, \|x_n - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \max \{\|x_1 - p\|, \|a - p\|\}, \quad n \geq 1.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена. □

Доведення збіжності алгоритму 3 ґрунтується на такій лемі.

Лема 4. Для $z = P_{F(T)}a$ та послідовності (x_n) виконується нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n (a - z, y_n - z) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $y_n = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}x_n$.

Доведення. Має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|P_C(\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}x_n) - z\|^2 \leq \\ &\leq \|\alpha_n(a - z) + (1 - \alpha_n)(T_{\lambda_n}x_n - z)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(a - z, y_n - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(a - z, y_n - z), \quad (8) \end{aligned}$$

де $y_n = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}x_n$. Маємо

$$\begin{aligned} \|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 &= \|\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)Tx_n - z\|^2 = \\ &= \|x_n - z + (1 - \lambda_n)(Tx_n - x_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - 2(1 - \lambda_n)(x_n - z, x_n - Tx_n) + (1 - \lambda_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2. \end{aligned}$$

З (1) випливає

$$\|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \lambda_n(1 - \lambda_n) \|Tx_n - x_n\|^2.$$

Урахувавши це в (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n(a - z, y_n - z), \end{aligned}$$

що і треба було довести. $\square$

Має місце

Теорема 3. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ — демізамкнений в 0, $a \in H$. Тоді згенерована алгоритмом 3 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z = P_{F(T)}a$.

Доведення. З леми 3 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$|(a - z, y_n - z)| \leq M$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 4 одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \quad (9) \end{aligned}$$

Використаємо прийом з роботи [29]. Розглянемо числову послідовність $(\|x_n - \bar{x}\|)$. Можливі два варіанти:

(а) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall n \geq \bar{n};$$

(b) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що

$$\|x_{n_k+1} - z\| > \|x_{n_k} - z\| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо варіант (a). У цьому випадку існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \rightarrow 0$ та $\alpha_n \rightarrow 0$, маємо

$$\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $F(T)$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_n - z) \leq 0. \quad (10)$$

Маємо

$$(a - z, y_n - z) = \underbrace{\alpha_n(a - z, a) + (1 - \alpha_n)(1 - \lambda_n)(a - z, Tx_n - x_n)}_{\rightarrow 0} + (1 - \alpha_n)(a - z, x_n - z).$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) , таку, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, x_n - z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a - z, x_{n_k} - z).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x} \in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a - z, y_{n_k} - z) = (a - z, \tilde{x} - z) = (a - P_{F(T)}a, \tilde{x} - P_{F(T)}a) \leq 0,$$

чим і доводимо (10).

З (10) та нерівності

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, y_n - z)$$

робимо висновок, що $\|x_n - z\| \rightarrow 0$.

Розглянемо варіант (b). У цьому випадку можна розглянути послідовність номерів

$$\pi_n = \max \{n_1 \leq k \leq n : \|x_{k+1} - z\| > \|x_k - z\|\}.$$

Послідовність (π_n) має властивості:

- (i) $\pi_n \nearrow +\infty$;
- (ii) $\|x_{\pi_n+1} - z\| \geq \|x_{\pi_n} - z\|$ для всіх $n \geq n_1$;
- (iii) $\|x_{\pi_n+1} - z\| \geq \|x_n - z\|$ для всіх $n \geq n_1$.

З (9) та (ii) випливає

$$\begin{aligned} \alpha_{\pi_n} \|x_{\pi_n} - z\|^2 + (1 - \alpha_{\pi_n}) \lambda_{\pi_n} (1 - \lambda_{\pi_n}) \|x_{\pi_n} - Tx_{\pi_n}\|^2 &\leq \\ &\leq 2\alpha_{\pi_n} (a - z, y_{\pi_n} - z) \leq 2\alpha_{\pi_n} M. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_{\pi_n} - Tx_{\pi_n}\| \rightarrow 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_{π_n}) належать множині $F(T)$ та має місце нерівність

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_{\pi_n} - z) \leq 0.$$

Маємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{\pi_n} - z\|^2 \leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_{\pi_n} - z) \leq 0.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\pi_n} - z\| = 0$. Оскільки

$$\|x_{\pi_{n+1}} - x_{\pi_n}\| \leq \alpha_{\pi_n} \|a - x_{\pi_n}\| + (1 - \alpha_{\pi_n})(1 - \lambda_{\pi_n}) \|Tx_{\pi_n} - x_{\pi_n}\| \rightarrow 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\pi_{n+1}} - z\| = 0.$$

Ураховуючи нерівності (iii), отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0$. $\square$

Зауваження 5. Для схеми з похибками

$$y_{n+1} = P_C (\alpha_n a + (1 - \alpha_n) T_{\lambda_n} y_n + e_n)$$

має місце аналогічне теоремі 3 твердження за умови $(\|e_n\|) \in \ell_1$.

4. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Модифікований гібридний метод легко адаптувати для задачі пошуку спільної нерухомої точки скінченної родини фейєрівських операторів

$$\{T_1, T_2, \dots, T_p\}, \quad T_i : C \rightarrow H.$$

Алгоритм 4. Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_{n,i} = T_i x_n, \\ C_{n,i} = \{z \in C : \|y_{n,i} - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{1,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{1,2}} + \dots + \frac{1}{p} P_{C_{1,p}}\right) x_n, \\ z_{n,2} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{2,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{2,2}} + \dots + \frac{1}{p} P_{C_{2,p}}\right) x_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n,n} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{n,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{n,2}} + \dots + \frac{1}{p} P_{C_{n,p}}\right) x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Алгоритм 5. Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \left(\frac{1}{p} T_1 + \frac{1}{p} T_2 + \dots + \frac{1}{p} T_p\right) x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = P_{C_1} x_n, \\ z_{n,2} = P_{C_2} x_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n,n} = P_{C_n} x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Теорема, аналогічна теоремі 3, має місце для схеми в'язкої апроксимації

$$y_{n+1} = P_C (\alpha_n S y_n + (1 - \alpha_n)(\lambda_n y_n + (1 - \lambda_n) T y_n)),$$

де $S : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор ($\alpha_n \in (0, 1)$, $(\alpha_n) \in c_0 \setminus \ell_1$, $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, 1)$). За умов теореми 3, послідовність (y_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності

$$z \in F(T) : (z - Sz, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Автор щиро вдячний Ю. В. Маліцькому за конструктивні зауваження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Еремін І. І. Методи фейєровських наближень в випуклому програмуванні / І. І. Еремін // Матем. заметки. — 1968. — 3:2. — С. 217–234.
2. Еремін І. І. Нестационарные процессы математического программирования / І. І. Еремін, В. Д. Мазуров. — Москва: Наука, 1979. — 228 с.
3. Васин В. В. Операторы и итерационные процессы фейєровского типа. (Теория и приложения) / В. В. Васин, І. І. Еремін. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
4. Еремін І. І. Фейєровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов / І. І. Еремін, Л. Д. Попов // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 1. — С. 44–65.
5. Petryshyn W. V. Strong and Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Quasi-Nonexpansive Mappings / W. V. Petryshyn, T. E. Williamson // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — 43. — P. 459–497.
6. Nakajo K. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups / K. Nakajo, W. Takahashi // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 279. — P. 372–379.
7. Bauschke H. H. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces / H. H. Bauschke, P. L. Combettes. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
8. Семенов В. В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации / В. В. Семенов // Проблемы управления и информатики, 2010. — № 2. — С. 42–46.
9. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 1 (100). — С. 121–129.
10. Войтова Т. А. Метод решения двухэтапных операторных включений / Т. А. Войтова, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
11. Маліцький Ю. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задач рівноважного програмування / Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.
12. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 4 (103). — С. 89–93.
13. Войтова Т. А. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 1 (104). — С. 10–23.
14. Денисов С. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність / С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.

15. Войтова Т. А. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач / Т. А. Войтова, Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)—Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 30–31.
16. Lyashko S. I. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems / S. I. Lyashko, V. V. Semenov, T. A. Voitova // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2011. — N. 4. — P. 631–639.
17. Апостол Р. Я. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей / Р. Я. Апостол, А. А. Гриненко, В. В. Семенов // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.
18. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
19. Войтова Т. А. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // *Доповіді НАН України*. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
20. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings / Z. Opial // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967. — 73. — P. 591–597.
21. Takahashi W. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces / W. Takahashi, Y. Takeuchi, R. Kubota // *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — 341. — P. 276–286.
22. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps / B. Halpern // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967. — 73. — P. 957–961.
23. Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions / P.-L. Lions // *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B* **284** (1977), A1357–A1359.
24. Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings / R. Wittmann // *Arch. Math.* — 1992. — 58. — P. 486–491.
25. Xu H. K. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings / H. K. Xu // *Bull. Austral. Math. Soc.* — 2002. — 65 — P. 109–113.
26. Xu H. K. Iterative algorithms for nonlinear operators / H. K. Xu // *J. London Math. Soc.* — 2002. — 2. — P. 240–256.
27. Xu H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings / H. K. Xu // *J. Math. Anal. Appl.* — 2004. — 298. — P. 279–291.
28. Suzuki T. A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings / T. Suzuki // *Proc. of the AMS*. — 2007, v. 135. — n. 1. — P. 99–106.
29. Mainge P.-E. Strong Convergence of Projected Subgradient Methods for Non-smooth and Nonstrictly Convex Minimization / P.-E. Mainge // *Set-Valued Analysis*. — 2008. — V. 16. — P. 899–912.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601,
УКРАЇНА.

Надійшла 22.02.2012

УДК 517.9: 519.7

УСЕРЕДНЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ НА ДРІБНО-ПЕРІОДИЧНІЙ СІТЦІ В КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОМУ ВИПАДКУ

А. С. Крилова, Г. В. Сандраков

РЕЗЮМЕ. Проводиться усереднення спектральної задачі на дрібно-періодичній сітці із періодичними крайовими умовами та наведена оцінка, що є обґрунтуванням отриманої асимптотики. Методом теорії Флоке побудовані точні власні функції задачі на сітці. Встановлено відповідність між усередненими розв'язками та точними власними функціями Флоке.

Вступ

У даній роботі проводиться усереднення спектральної задачі для рівнянь другого порядку на дрібно-періодичній сітці, де розглядатимемо комплекснозначні власні функції. Випадок дійснозначних власних функцій такої задачі був розглянутий у [1]. Теорія задач усереднення для диференціальних рівнянь, які описують різноманітні фізичні процеси в мікро-неоднорідних середовищах, інтенсивно розвивається останні 30 років. Усереднення рівнянь на дрібно-періодичній сітці розглядалось у [2], а на дрібно-періодичному каркасі з тонких стержнів у [3]. Питання усереднення спектральних задач вивчались у роботах [3]–[6]. Усереднення високочастотного спектру для задач на області вивчалось у [6]. Спектральні задачі на сітках досліджувались у [7] і [8].

Для поставленої задачі можливо використовувати й інший підхід за рахунок спектру Флоке, який був розглянутий у [9]. Дослідження спектральної задачі на дрібно-періодичній сітці прямим методом, який ґрунтується на ідеях теорії Флоке, дає точні розв'язки спектральної задачі на сітці із досить щільним спектром.

Перш ніж визначити задачу на сітці, розглянемо задачу на періодично-повторюваній комірці, яка є фрагментом сітки.

1. Постановка задачі на комірці

Визначимо множину Y як об'єднання двох замкнутих натягнутих струн σ_1 та σ_2 , які зв'язані у їх спільній середині та містяться у прямокутнику $Q = [0, 1] \times [0, l] \subset \mathbb{R}^2$, де l фіксоване додатне число. Розглянемо покриття $\mathbb{R}^2$ сіткою таких прямокутників, в кожному з яких знаходиться одна й та сама множина Y . Множину Y будемо називати періодично-повторювальною коміркою сітки. Прикладом такого об'єднання струн, які містяться у періодично-повторювальній комірці, є струнний хрест, який розглянутий у [7],

[9]. Струни хреста будемо вважати однорідними відрізками, розташованими під прямим кутом відносно одна одної та такими, що мають одиничний натяг та щільність розподілу мас [7].

Позначимо через $C(Y)$ множину функцій $u : Y \rightarrow \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y неперервних функцій, визначених на прямокутнику Q . Функцію u на струнному хресті будемо розглядати як набір неперервних звужень функції на кожен струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$ та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0, 1]$, y_2 із $[0, l]$. Визначимо інтеграл як суму інтегралів по кожній із струн, помножену на нормуючий множник $l/(l+1)$

$$\int_Y u(y) dy = \frac{l}{l+1} \left(\int_0^1 u_1(y_1) dy_1 + \int_0^l u_2(y_2) dy_2 \right). \quad (1)$$

Визначимо $C^1(Y)$ як множину функцій $u : Y \rightarrow \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y функцій із $C^1(Q)$, завданих на прямокутнику Q . Простір $L^2(Y)$ це поповнення простору $C(Y)$ по нормі, індукованої скалярним добутком $(u, v)_{L^2(Y)} = \int_Y u \bar{v} dy$.

Функціональний простір $H^1(Y)$ є поповненням $C^1(Y)$ по нормі $\| \cdot \|_{H^1(Y)}$, що відповідає скалярному добутку $\langle u, v \rangle_{H^1(Y)} = \int_Y u \bar{v} dy + \int_Y (\partial_y u)(\partial_y \bar{v}) dy$. Множину функцій $u \in C^1(Y)$, що задовольняють умовам періодичності

$$u_1(0) = u_1(1), \quad u_2(0) = u_2(l), \quad \partial_{y_1} u_1(0) = \partial_{y_1} u_1(1), \quad \partial_{y_2} u_2(0) = \partial_{y_2} u_2(l)$$

позначимо через $C_{per}^1(Y)$. Через $H_{per}^1(Y)$ позначимо поповнення множини періодичних функцій $C_{per}^1(Y)$ по нормі $\|u\|_{H^1(Y)} = \int_Y |u|^2 dy + \int_Y |\partial_y u|^2 dy$.

Будемо розглядати таку Y -періодичну спектральну задачу на комірці: знайти $u \in H_{per}^1(Y)$ таку, що $\|u\|_{L^2(Y)} = 1$ та

$$\begin{aligned} -\partial_{y_1}^2 u_1(y_1) &= \lambda u_1(y_1) \quad \text{при } y_1 \in [0, 1], \\ -\partial_{y_2}^2 u_2(y_2) &= \lambda u_2(y_2) \quad \text{при } y_2 \in [0, l], \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_1(0) = u_1(1), \quad u_2(0) = u_2(l), \quad \partial_{y_1} u_1(0) = \partial_{y_1} u_1(1), \quad \partial_{y_2} u_2(0) = \partial_{y_2} u_2(l)$$

з умовами неперервності функцій та потоків у вузлах перетину струн

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{l}{2}\right),$$

$$\partial_{y_1} u_1\left(\frac{1}{2} + 0\right) - \partial_{y_1} u_1\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \partial_{y_2} u_2\left(\frac{l}{2} + 0\right) - \partial_{y_2} u_2\left(\frac{l}{2} - 0\right) = 0.$$

Слід зазначити, що умови неперервності та періодичності виконані автоматично для $u \in C_{per}^1(Y)$ (і, у відомому сенсі [2], для $u \in H_{per}^1(Y)$).

2. ЗАДАЧА НА СІТЦІ

Зменшимо прямокутник Q і струни хреста Y у N разів, де N є заданим натуральним числом. Отримаємо множини Q_ε і Y_ε із координатами $x' = \varepsilon y$ при $\varepsilon = 1/N$. Повторимо по періодичності прямокутники Q_ε та отримаємо замкнену область $\Omega = [0, 1] \times [0, l] \subset \mathbb{R}^2$ з границею $\partial\Omega$. На цю область натягнута дрібно-періодична сітка G_ε в $\mathbb{R}^2$, що є об'єднанням N^2 струнних

хрестів Y_ε . Таке Y_ε назвемо періодично-повторюваною коміркою з ребрами довжиною ε та $l\varepsilon$. Параметр x' визначає положення точки на сітці G_ε .

Подібна сітка розглядається у [2] з довільними дугами замість однорідних натягнутих струн. Згідно [2], на множині G_ε визначається простір $H^1(G_\varepsilon)$ функцій, які є неперервними у вузлах та абсолютно неперервними на кожній струні, із нормою

$$\|u\|_{H^1(G_\varepsilon)}^2 = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} (|u|^2 + |\partial_{x'} u|^2) dx'. \quad (3)$$

Простір функцій $H_{per}^1(G_\varepsilon) \subset H^1(G_\varepsilon)$ періодичних на $G_\varepsilon \cap \partial\Omega$ визначається аналогічно до визначення такого простору на Y . Надалі функцію $u_\varepsilon \in H^1(G_\varepsilon)$ зручніше розглядати як набір $2N$ функцій $u_{1j}^\varepsilon(x'_{1j})$ та $u_{2j}^\varepsilon(x'_{2j})$, визначених на прямих, отриманих періодичними продовженнями струн $\varepsilon\sigma_1$ та $\varepsilon\sigma_2$, які параметризовані координатами $x'_{1j} \in [0, 1]$ та $x'_{2j} \in [0, l]$, де $j = 1, \dots, N$.

Таким чином, розглядається наступна крайова спектральна задача на сітці G_ε : знайти $u_\varepsilon \in H_{per}^1(G_\varepsilon)$ таку, що $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \partial_{x'_{1j}}^2 (u_{1j}^\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon u_{1j}^\varepsilon \quad \text{при } x'_{1j} \in [0, 1], \\ -\varepsilon^2 \partial_{x'_{2j}}^2 (u_{2j}^\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon u_{2j}^\varepsilon \quad \text{при } x'_{2j} \in [0, l], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_{1j}^\varepsilon(0) &= u_{1j}^\varepsilon(1), \quad u_{2j}^\varepsilon(0) = u_{2j}^\varepsilon(l), \\ \partial_{x'_{1j}} u_{1j}^\varepsilon(0) &= \partial_{x'_{1j}} u_{1j}^\varepsilon(1), \quad \partial_{x'_{2j}} u_{2j}^\varepsilon(0) = \partial_{x'_{2j}} u_{2j}^\varepsilon(l), \end{aligned} \quad (5)$$

де $j = 1, \dots, N$. Умови періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε , які визначені для функцій $u_{1j}^\varepsilon(x'_{1j})$ та $u_{2j}^\varepsilon(x'_{2j})$, виконані автоматично, оскільки $u_\varepsilon \in H_{per}^1(G_\varepsilon)$. Крім того, u_{1j}^ε та u_{2j}^ε є досить гладкими завдяки еліптичності цих рівнянь.

Задача на сітці (4)–(5) має тривіальний розв'язок $u_\varepsilon = C$, де $|C| = l^{-1/2}$, для власного значення $\lambda_\varepsilon = 0$. Щоб виключити такий розв'язок із розгляду, визначимо простір $H_{per*}^1(G_\varepsilon) = \{u \in H_{per}^1(G_\varepsilon) : (u, 1)_{L^2(G_\varepsilon)} = 0\}$ із нормою $\|u\|_{H_{per*}^1(G_\varepsilon)}^2 = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x'} u|^2 dx'$, яка еквівалентна нормі (3) на $H_{per}^1(G_\varepsilon)$ в силу нерівності Пуанкаре. За визначенням, існують зчисленні множини власних значень $\lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2, \dots$ та ортонормованих власних функцій $u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, \dots$ цієї задачі таких, що $\alpha\varepsilon^2 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^s \leq \dots$, з урахуванням кратності, де α є деякою додатною сталою та $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_\varepsilon^s = \infty$.

3. СПЕКТР ФЛОКЕ

Відмінністю комплекснозначного випадку від дійснозначного є можливість знаходження великої кількості точних розв'язків, які описані в [9] на основі ідеї теорії Флоке для найпростішого фрагменту сітки. Ідеї теорії Флоке використовувалися раніше у [6] при усередненні спектральних задач із швидко осцилюючими коефіцієнтами, де спектр Флоке із відповідними власними функціями називається також спектром Блоха із відповідними власними функціями. Наведемо, наприклад, для непарного N та $l = 1$, доведену у [9], таку теорему.

Теорема 1. Для непарного N ($N = 2K + 1$ з $K \geq 1$) спектральна задача (4)–(5) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n + \varepsilon t)^2$ при $t = 1, \dots, N - 1$ та $n \in \mathbb{Z}^+$, якому відповідає такий чотирьох-вимірний власний підпростір:

$$\begin{aligned} u_{1j}^\varepsilon &= e^{i(2j-1)\pi\varepsilon t} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon t} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + \\ &+ e^{i(2j-1)\pi\varepsilon t} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon t} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}}, \quad x'_{1j} \in [0, 1], \\ u_{2j}^\varepsilon &= e^{i(2j-1)\pi\varepsilon t} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + e^{i(2j-1)\pi\varepsilon t} C_2 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + \\ &+ e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon t} C_1 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon t} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{2j}}, \quad x'_{2j} \in [0, 1], \end{aligned} \quad (6)$$

де A, C_1, C_2, C є довільними комплексними сталими та $j = 1, 2, \dots, N$.

Випадок парного N дещо відрізняється. Власний підпростір, коли значення $N = 2K$ та $t = K$, має досить "велику" розмірність при великих N та відповідні точки спектру є "суттєво" особливими при $N \rightarrow \infty$ (детальніше див. [9]). Для всіх інших точок спектру, тобто коли $t \neq K$, матимемо скінченну розмірність, яка не залежить від N . Такий випадок розглянутий у наступній теоремі.

Теорема 2. Для $N = 2K$ із $K > 1$ спектральна задача (4)–(5) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n + \varepsilon t)^2$ при $t = 1, \dots, K - 1, K + 1, \dots, N - 1$ та $n \in \mathbb{Z}^+$, якому відповідає чотирьох-вимірний власний підпростір (6).

Такий підхід дає досить "багато" власних функцій та щільний спектр при великих N для задачі на дрібно-періодичній сітці. Однак, й до такої спектральної задачі можливо застосувати теорію усереднення для подальшого дослідження спектру.

4. ПОБУДОВА ТА ОБҐРУНТУВАННЯ АСИМПТОТИКИ

Побудуємо асимптотику "низькочастотного" спектру, тобто будемо використовувати власне значення $\lambda^0 = 0$ задачі на комірі (2) із власною функцією $N^0(y) = C$, де $|C| = l^{-1/2}$. При побудові початкових доданків асимптотичного розкладення для розв'язків задачі (4)–(5), будемо слідувати принципам усереднення, які сформульовані у роботі [10]. Розклад власної функції u_ε та власного значення λ_ε задачі (4)–(5) будемо шукати у вигляді асимптотичних сум

$$\begin{aligned} u_a(x', \frac{x'}{\varepsilon}) &= u_0(x', \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x', \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x', \frac{x'}{\varepsilon}), \\ \lambda_a &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2, \end{aligned} \quad (7)$$

де функції $u_0(x, y), u_1(x, y), \dots$, які визначені при $(x, y) \in Q \times Y$, розглядаються при $x = x', y = x'/\varepsilon$, мають розділені змінні та є Y -періодичними по другому аргументу. Такі функції шукатимемо у вигляді $u_i = N_i(y) v_i(x)$, де $N_i \in H_{per}^1(Y)$. Підставляючи асимптотичну суму $u_a(x, y)$ в (4), матимемо

$$-\{\partial_y^2 + 2\varepsilon^1 \nabla \partial_y + \varepsilon^2 \nabla^2\} u_a(x, y) = \lambda_a u_a(x, y),$$

де $y = x'/\varepsilon$, $x = x'$ та, для зручності запису, використовувалися позначення

$$\partial_y^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right), \quad \nabla \partial_y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях ε та отримуємо рівняння для знаходження функцій u_0 , u_1 та u_2 . Таким чином, при ε^0 , матимемо задачу на комірці. Тому оберемо $u_0 = A v(x)$, де сталу A та функцію $v(x)$ визначимо пізніше. З умови розв'язності рівняння при ε^1 матимемо $\lambda_1 = 0$ та $u_1 = A v_1(x)$, де функцію $v_1(x)$ оберемо нульовою для простоти розрахунків.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^2 , маємо таку рівність на комірці, яку за визначенням можливо розглядати як систему рівнянь

$$-\partial_{y_1}^2 u_2^1(y_1, x) = A \partial_{x_1}^2 v + \lambda_2 A v, \quad -\partial_{y_2}^2 u_2^2(y_2, x) = A \partial_{x_2}^2 v + \lambda_2 A v.$$

Знайдемо скалярний добуток правої частини отриманого рівняння та складової $N^0(y)$ ядра задачі на комірці та прирівнюємо цей добуток до нуля. В результаті отримаємо для функції $v(x)$, нормованою умовою $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, наступну спектральну усереднену задачу

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 v(x) + l \partial_{x_2}^2 v(x) + (l+1) \lambda_2 v(x) &= 0 \quad \text{при } x \in \Omega \\ v(x) &= v(x + l_i), \quad \partial_x v(x) = \partial_x v(x + l_i) \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

яка доповнена умовами періодичності у відповідності із (4)–(5), де позначено $l_1 = 1$ та $l_2 = l$. Розв'язки цієї спектральної задачі визначаються зчисленими множинами власних значень

$$\lambda^s = 4\pi^2(l+1)^{-1}(n^2 + m^2 l^{-1})$$

при $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, які упорядкуємо так, що $0 < \lambda^1 \leq \lambda^2 \leq \dots$ (із урахуванням кратності, яка може дорівнювати 2, 4 або 8 у залежності від l), та власних функцій $v^s(x)$, які матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} l^{-1/2} e^{i2\pi(n x_1 + m l^{-1} x_2)}, \quad l^{-1/2} e^{i2\pi(n x_1 - m l^{-1} x_2)}, \\ l^{-1/2} e^{i2\pi(-n x_1 + m l^{-1} x_2)}, \quad l^{-1/2} e^{i2\pi(-n x_1 - m l^{-1} x_2)}, \end{aligned}$$

при $m, n \in \mathbb{N}$. Відомо [11], що $\lambda^s = 4\pi s l^{-1} + O(s^{1/2})$ при великих s . У результаті, можливо отримати, при $A = 1$, для асимптотики власних значень та функцій такі представлення

$$\lambda_a^s = \varepsilon^2 \lambda^s, \quad u_a^s(x, y) = v^s(x) + \varepsilon^2 N_2(y) (\partial_{x_1}^2 v_0^s(x) + \lambda^s v_0^s(x)),$$

де $N_2(y) \in H_{per}^1(Y)$ задовольняє такий системі рівнянь

$$-\partial_{y_1}^2 N_2^1(y_1) = 1, \quad -\partial_{y_2}^2 N_2^2(y_2) = -l^{-1},$$

яка має розв'язок (визначений з точністю до постійної функції $AN^0(y)$), що нормується таким чином, щоб $\int_Y N_2(y) N^0(y) dy = 0$. Функцію $N_2(y)$ будемо продовжувати по періодичності на всю сітку. Таким чином, функція $u_a^s(x', \frac{x'}{\varepsilon})$ є визначеною на G_ε . Більш того, функція $u_a^s(x', \frac{x'}{\varepsilon})$ автоматично задовольняє умовам періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε , оскільки функція $v^s(x)$, визначена на прямокутнику Ω , є гладкою та задовольняє умовам періодичності на Ω , а функція $N_2(y)$ належить $H_{per}^1(Y)$ та є досить регулярною на Y як розв'язок еліптичного рівняння на хресті [2].

Обґрунтуванням побудованої асимптотики є наступна теорема.

Теорема 3. Для власних значень λ_ε^s та власних функцій u_ε^s задачі (4)–(5) існує стала C , яка не залежить від ε та s , така, що

$$|\lambda_\varepsilon^s - \varepsilon^2 \lambda^s| \leq C \varepsilon^3 (\lambda^s)^{3/2}, \quad \|u_\varepsilon^s - v^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq C \varepsilon (\lambda^s)^{1/2},$$

при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ і $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, де λ^s та v^s є власним значенням та власною функцією відповідної усередненої задачі, яка буде визначена надалі.

Оцінка цієї теореми виконана для всіх таких λ^s і u_ε^s , що $\lambda^s \leq c \varepsilon^{-2+\sigma}$ із деякою сталою c при $0 < \sigma \leq 2$ та $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ (це і означає, що $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$), але доведення цієї теореми може бути некоректним для $\lambda^s = c \varepsilon^{-2}$. Така ситуація є природною і пов'язана із наявністю у задачі (4)–(5) високочастотного спектру, який буде представленим та обґрунтованим у наступних дослідженнях.

5. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Доведення теореми 1 будемо проводити прямим методом. Для того, щоб перевірити чи є функція u^ε власною, двічі продиференціюємо наведені в теоремі 1 власні функції. Спершу розглянемо функцію u_{1j}^ε для $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \partial_{x_{1j}}^2 u_{1j}^\varepsilon = & -4\pi^2 (Nn + m)^2 \left(e^{i(2j-1)\pi \varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + \right. \\ & + e^{-i(2j-1)\pi \varepsilon m} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{i(2j-1)\pi \varepsilon m} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + \\ & \left. + e^{-i(2j-1)\pi \varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} \right) = -4\pi^2 (Nn + m)^2 u_{1j}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Підставляючи отриманий результат в рівняння (4) матимемо

$$-\varepsilon^2 \partial_{x_{1j}}^2 (u_{1j}^\varepsilon) = \varepsilon^2 4\pi^2 (Nn + m)^2 u_{1j}^\varepsilon = 4\pi^2 (n + \varepsilon m)^2 u_{1j}^\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_{1j}^\varepsilon.$$

Таким чином маємо власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2 (n + \varepsilon m)^2$, тобто u_{1j}^ε є власною функцією. Аналогічним чином перевіряється, що u_{2j}^ε є також власною функцією.

Функція $e^{\pm i2\pi(Nn+m)x'}$ та її похідна є один-періодичною по x' , тому власні функції задачі (4) задовольняють умовам періодичності (5).

Перевіримо рівність власних функцій у вузлах сітки. Струни сітки, які горизонтально направлені, мають координати $x_2 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, а струни сітки, які розташовані вертикально, відповідно $x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$. Оберемо будь-який вузол сітки та покажемо рівність відповідних функцій в цьому вузлі. Наприклад, вузол, який знаходиться на перетині третьої горизонтальної та другої вертикальної струн, має координати $(3/2\varepsilon, 5/2\varepsilon)$ та такі значення власних функцій

$$\begin{aligned} u_{13}^\varepsilon = & e^{i5\pi \varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} + e^{-i5\pi \varepsilon m} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} + e^{i5\pi \varepsilon m} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} + \\ & + e^{-i5\pi \varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} = (-1)^n \left(e^{i8\pi \varepsilon m} A + e^{-i2\pi \varepsilon m} C_2 + e^{i2\pi \varepsilon m} C_1 + e^{-i8\pi \varepsilon m} C \right), \\ u_{22}^\varepsilon = & e^{i3\pi \varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} + e^{i3\pi \varepsilon m} C_2 e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} + e^{-i3\pi \varepsilon m} C_1 e^{i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} + \\ & + e^{-i3\pi \varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} = (-1)^n \left(e^{i8\pi \varepsilon m} A + e^{-i2\pi \varepsilon m} C_2 + e^{i2\pi \varepsilon m} C_1 + e^{-i8\pi \varepsilon m} C \right). \end{aligned}$$

Отже в даному вузлі власні функції рівні. Аналогічним чином доводиться рівність функцій й у всіх інших вузлах. Умова балансу натягу виконується автоматично, адже власні функції є неперервними разом із їх похідними.

Таким чином власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n + \varepsilon t)^2$ та відповідні власні функції (6) є точним розв'язком задачі на дрібно-періодичній сітці (4)–(5), що доводить теорему 1. $\square$

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до доведення теореми 1, де виключається з розгляду значення t для якого $t\varepsilon = 1/2$, адже для такого t ми маємо $(2N + 1)$ -вимірний власний підпростір, який більш детально описаний в [9]. $\square$

Для доведення теореми 3 необхідно розглянути допоміжне твердження про заміну інтегралу по $\Omega = [0, 1] \times [0, l]$ на інтеграл по дрібно-періодичній сітці G_ε та аналог леми Рімана-Лебега.

Твердження 1. Для функції $v \in H^2(\Omega)$ існує стала C , яка не залежить від ε , така що виконується нерівність

$$\left| \int_{\Omega} v(x) dx - \varepsilon \int_{G_\varepsilon} v(x') dx' \right| \leq C\varepsilon^2.$$

Доведення. Розглянемо лінійний функціонал

$$l(v) = \int_{\Omega} v(x) dx - \varepsilon \int_{G_\varepsilon} v(x') dx'.$$

За визначенням

$$l(v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\int_{Q_\varepsilon^{ij}} v(x) dx - \varepsilon \int_{Y_\varepsilon^{ij}} v(y) dy \right).$$

Оцінимо функціонал в дужках $l^{ij}(v)$, скориставшись лемою Брембла-Гільберта з [12].

Перш ніж скористуватись оцінкою вкладення $H^2(Q_\varepsilon^{ij}) \subset C(\overline{Q}_\varepsilon^{ij})$ із сталими, що не залежать від ε , зробимо заміну $y = x/\varepsilon$ та введемо наступне позначення $\tilde{v}(y) = v(\varepsilon y)$. Звідки випливає

$$l^{ij}(v) = l^{ij}(\tilde{v}) = \varepsilon^2 \left(\int_{Q^{ij}} \tilde{v}(y) dy - \int_{Y^{ij}} \tilde{v}(y) dy \right).$$

Враховуючи для Q^{ij} оцінку вкладання $\max_{y \in Q^{ij}} |\tilde{v}(y)| \leq C \|\tilde{v}(y)\|_{H^2(Q^{ij})}$, маємо

$$|l^{ij}(\tilde{v})| \leq C\varepsilon^2 \|\tilde{v}(y)\|_{H^2(Q^{ij})}.$$

Безпосередньо перевіряється, що на многочленах першого ступеня, функціонал $l(\tilde{v})$ обертається в нуль. Тоді, згідно лемі Брембла-Гільберта, маємо відповідну оцінку. В цій оцінці перейдемо знову до змінної x та отримуємо

$$|l^{ij}(v)| \leq M\varepsilon^2 |\tilde{v}(y)|_{H^2(Q^{ij})} = M\varepsilon^3 |v(x)|_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})}.$$

Таким чином, виконані співвідношення

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq M\varepsilon^3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |v(x)|_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})} = M\varepsilon^3 N \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |v(x)|_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= M\varepsilon^2 |v(x)|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отже, заміна інтегралу дає похибку $O(\varepsilon^2)$, що необхідно було довести. $\square$

Твердження 2. Для функції $U \in L_2(Y)$, подовженої по періодичності на всю сітку, та функції $v \in H_{per}^2(\Omega)$ такої, що $\|\partial_x^2 v\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq c$ із сталою c , яка не залежить від ε , виконується нерівність

$$\left| \varepsilon \int_{G_\varepsilon} U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x') dx' - l^{-1} \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq C\varepsilon^2,$$

де стала C не залежить від ε .

Доведення. Визначимо $M(y) \in H_{per*}^2(Y)$ як розв'язок рівняння

$$\partial_y^2 M(y) = U(y) - l^{-1} \int_Y U(y) dy$$

та подовжемо $M(y)$ по періодичності на всю сітку. Враховуючи, що

$$\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) = \partial_y^2 M(y)|_{y=\frac{x'}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) - l^{-1} \int_Y U(y) dy,$$

помножимо це рівняння на функцію $v(x)$ та проінтегруємо по мілко-періодичній сітці G_ε . Таким чином, отримуємо

$$\varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} \partial_{x'}^2 M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x') dx' = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x') dx' - \varepsilon l^{-1} \int_Y U(y) dy \int_{G_\varepsilon} v(x') dx'.$$

Розглянемо окремо ліву частину рівняння. Двічі проінтегруємо її по частинах та застосуємо нерівність Коши-Буняковського. З огляду періодичності функцій на сітці матимемо

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} \partial_{x'}^2 M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x') dx' &= \varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial_{x'}^2 v(x') dx' \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left| M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx'} \sqrt{\varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x'}^2 v(x')|^2 dx'} \leq c \varepsilon^2 \|M\|_{L^2(Y)}, \end{aligned}$$

оскільки

$$\left\| M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(G_\varepsilon)}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon \int_{Y_\varepsilon^{ij}} \left| M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon^2 \|M\|_{L^2(Y)}^2 = \|M\|_{L^2(Y)}^2.$$

Користуючись твердженням 1, ми отримали похибку $O(\varepsilon^2)$, яка визначається півнормами $\|M\|_{L^2(Y)}$, $\|\partial_{x'}^2 v\|_{L^2(G_\varepsilon)}$ та $\|\partial_{x'}^2 v\|_{L^2(\Omega)}$, що необхідно було довести. $\square$

Тут використовувалися простори $H_{per*}^2(Y)$, $H_{per}^2(\Omega)$, ... які визначаються звичайним чином згідно розділу 2, [8] та [12]. Надалі, через C позначаються сталі, які не залежать від ε та s , можливо різні в різних формулах.

Доведення теореми 3 для власних значень та власних функцій задачі (4)–(5) з не дуже великими номерами ($s \ll \varepsilon^{-2}$) проведемо, використовуючи метод Релея-Рітца, який доведений у [11], та відому теорему Вішика-Люстерніка [13], [14].

Нехай H^1 та L^2 є гільбертовими просторами. Простір H^1 компактно вкладається у L^2 та H^{-1} є спряженим простором до H^1 відносно скалярного добутку в L^2 . Оператор $L : H^1 \rightarrow H^{-1}$ є неперервним і таким, що $\langle Lv, v \rangle_{L^2} \geq \alpha \|v\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in H^1$, де α деяка додатна стала, та $L^* = L$. Тоді власні значення λ_k оператору L є дійсними, створюють неспадяючу послідовність $\alpha \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ (із урахуванням кратності), а власні функції $u_1, u_2, \dots$ ортонормовані в L^2 . Для такого оператору L виконується така теорема.

Теорема 4 (Вішика-Люстерніка). *Нехай λ_k і u_k власні значення і функції оператора L та існують $\mu \in \mathbb{R}$ і $u \in H^1$ такі, що $\|u\|_{L^2} = 1$ та*

$$\|Lu - \mu u\|_{L^2} \leq \beta.$$

Тоді існує λ_s таке, що $|\mu - \lambda_s| \leq \beta$ і для кожного $\sigma > \beta$ існує $\tilde{u} \in H^1$ таке, що $\|\tilde{u}\|_{L^2} = 1$ та

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2} \leq 2\beta\sigma^{-1},$$

де $\tilde{u}$ є лінійною комбінацією власних векторів оператора L , які відповідають власним значенням з інтервалу $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Подіємо оператором $L = -\varepsilon^2 \partial_{x'}^2$ на наближену функцію $u_a^s = u_0^s + \varepsilon^2 u_2^s$ з чого отримаємо

$$\begin{aligned} Lu_a^s(x', x'/\varepsilon) &= -\varepsilon^2 \nabla^2 u_0^s - \varepsilon^2 \partial_y^2 u_2^s - 2\varepsilon^3 \nabla \partial_y u_2^s - \varepsilon^4 \nabla^2 u_2^s = \\ &= \varepsilon^2 \lambda^s u_0^s + \varepsilon^4 \lambda^s u_2^s + \varepsilon^3 K^s = \varepsilon^2 \lambda^s u_a^s(x', x'/\varepsilon) + \varepsilon^3 K^s(x', x'/\varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

де, для $w_{3/2}^s = \partial_x^3 v^s + \lambda^s \partial_x v^s$ та $w_2^s = \partial_x^4 v^s + 2\lambda^s \partial_x^2 v^s + \lambda^s \lambda^s v^s$, позначено

$$K^s(x, y) = -2\nabla \partial_y u_2^s - \varepsilon \nabla^2 u_2^s - \varepsilon \lambda^s u_2^s = -2(\partial_y N_2) w_{3/2}^s - \varepsilon (N_2) w_2^s.$$

При великих λ^s , безпосередньо із (8), матимемо $\|\partial_x v^s\|_{L^2(\Omega)}^2 = O(\lambda^s)$ та

$$\|\partial_x^2 v^s\|_{L^2(\Omega)}^2 = O((\lambda^s)^2), \quad \|\partial_x^2 v^s + \lambda^s v^s\|_{L^2(\Omega)}^2 = O((\lambda^s)^2),$$

$$\|w_{3/2}^s\|_{L^2(\Omega)}^2 = O((\lambda^s)^3), \quad \|w_2^s\|_{L^2(\Omega)}^2 = O((\lambda^s)^4),$$

$$\|\partial_x^2 ((w_{3/2}^s)^2)\|_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^4), \quad \|\partial_x^2 ((w_2^s)^2)\|_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^5).$$

Аналогічні оцінки $\|\partial_{x'} v^s\|_{L^2(G_\varepsilon)}^2 = O(\lambda^s)$, ... виконані для відповідних норм на G_ε , оскільки диференціювання $\partial_{x'_1}$ і $\partial_{x'_2}$ від v^s надає множник еквівалентний $(\lambda^s)^{1/2}$, $|v^s| \leq 2l^{-1/2}$ за визначенням та, наприклад, $\varepsilon \int_{G_\varepsilon} 1 dx' = l$.

Використовуючи твердження 2 (із урахуванням залежності сталої від v), регулярність функції $N_2(y)$ та гладкість функції $v^s(x)$ маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{G_\varepsilon} |K^s(x', x'/\varepsilon)|^2 dx' &\leq 4\varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\partial_y N_2 w_{3/2}^s|^2 dx' + 2\varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} |N_2 w_2^s|^2 dx' \leq \\ &\leq C \int_{\Omega} |w_{3/2}^s|^2 dx + \varepsilon^2 C \int_{\Omega} |w_2^s|^2 dx + \varepsilon^2 C (\lambda^s)^4 + \varepsilon^4 C (\lambda^s)^5, \end{aligned} \quad (10)$$

де стала C не залежить від ε та s , що є актуальним при великих λ^s .

Крім того, згідно твердженню 2, виконані наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \left| \|u_a^s(x', x'/\varepsilon)\|_{L^2(G_\varepsilon)}^2 - 1 \right| &\leq C\varepsilon^2 \lambda^s + \int_{\Omega} |v^s(x)|^2 dx - 1 + C\varepsilon^4 (\lambda^s)^2 + \\ &+ \dots + C\varepsilon^6 (\lambda^s)^3 + \varepsilon^4 \int_Y |N_2(y)|^2 dy \int_{\Omega} |\partial_x^2 v^s(x) + \lambda^s v^s(x)|^2 dx \leq \\ &\leq C\varepsilon^2 \lambda^s + C\varepsilon^4 (\lambda^s)^2 + C\varepsilon^6 (\lambda^s)^3 \leq C\varepsilon^2 \lambda^s \end{aligned} \quad (11)$$

при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ (тобто для $\lambda^s \leq C\varepsilon^{-2+\sigma}$ при $0 < \sigma \leq 2$), де стала C не залежить від ε та s , оскільки $\int_{\Omega} |v^s(x)|^2 dx = 1$ та $\int_Y N^0(y) \overline{N_2(y)} dy = 0$ за визначенням. Аналогічно перевіряється, що

$$\left| \varepsilon \int_{G_\varepsilon} u_a^s(x', x'/\varepsilon) \overline{u_a^j(x', x'/\varepsilon)} dx' \right| \leq C\varepsilon^2 \lambda^s + C\varepsilon^2 \lambda^j$$

при $s \neq j$ та $\lambda^s, \lambda^j \ll \varepsilon^{-2}$, тобто функції $u_a^1, u_a^2, \dots, u_a^s$ є майже ортонормованими в $L^2(G_\varepsilon)$ (у сенсі виконання двох останніх нерівностей) і тому є лінійно незалежними при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$. Тут важливо, що система власних функцій $\{v^s\}_{s=1}^\infty$ є ортонормованою в $L^2(\Omega)$. Згідно (11), також маємо $\|u_a^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \neq 0$ при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ і, позначивши $\hat{u}_a^s = \|u_a^s\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1} u_a^s$, отримаємо $\|\hat{u}_a^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$.

Перенесемо в ліву частину рівняння (9) доданок із власним значенням λ^s , піднесемо до другого степеня отриманий вираз, помножимо на ε та зінтегруємо по сітці G_ε . Тоді при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$, враховуючі (10) та (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{G_\varepsilon} |Lu_a^s - \varepsilon^2 \lambda^s u_a^s|^2 dx' &= \|Lu_a^s - \varepsilon^2 \lambda^s u_a^s\|_{L^2(G_\varepsilon)}^2 = \varepsilon^7 \int_{G_\varepsilon} |K^s(x', x'/\varepsilon)|^2 dx' \leq \\ &\leq \varepsilon^6 C (\lambda^s)^3 + \varepsilon^8 C (\lambda^s)^4 + \varepsilon^{10} C (\lambda^s)^5 \leq \varepsilon^6 C (\lambda^s)^3. \end{aligned}$$

Таким чином, матимемо наступну нерівність

$$\|L\hat{u}_a^s - \varepsilon^2 \lambda^s \hat{u}_a^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq \varepsilon^3 C (\lambda^s)^{3/2},$$

де стала C не залежить від ε та s при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$. Тому, згідно теореми 4, знайдеться власне значення $\lambda_\varepsilon^{k(s)}$ задачі (4)–(5) таке, що виконується нерівність

$$|\lambda_\varepsilon^{k(s)} - \varepsilon^2 \lambda_2^s| \leq \varepsilon^3 C (\lambda^s)^{3/2}. \quad (12)$$

Із нерівності (12) буде впливати оцінка теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5), якщо буде перевірено, що $k(s) = s$ для кожного $s = 1, 2, \dots$.

Розглянемо перше власне значення задачі (4)–(5). Перш ніж використати метод Релея-Рітца для $d = 1$, розглянемо відповідні власні функції. За

визначенням, u_ε^1 задовольняє рівності $(u_\varepsilon^1, 1)_{L^2(G_\varepsilon)} = 0$. Побудоване асимптотичне розкладення u_a^1 для u_ε^1 може не задовольняти умові ортогональності константі, тому відніmemo від u_a^1 постійну $A_\varepsilon^1 = \varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^1 dx'$, так, щоб $u_a^1 - A_\varepsilon^1 \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$. Тоді, за твердженням 2, маємо

$$\varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^1 dx' = \int_{\Omega} v^1 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\partial_x^2 v^1 + \lambda^1 v^1) dx \int_Y N^0 N_2 dy + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\int_{\Omega} v^1(x) dx = 0$ та $\int_Y N^0 N_2(y) dy = 0$ за визначенням. Таким чином, можемо написати $A_\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^1| \leq C$, та C не залежить від ε . Позначимо $\tilde{u}_a^1 = u_a^1 - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$, тоді $\tilde{u}_a^1 \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$ за визначенням постійної $\tilde{A}_\varepsilon^1$.

Подіємо оператором L на отриману функцію $\tilde{u}_a^1(x', x'/\varepsilon)$. Тоді, отримаємо результат (аналогічний до (9) при $s = 1$), який запишемо у вигляді

$$L\tilde{u}_a^1(x', x'/\varepsilon) = \varepsilon^2 \lambda^1 (u_0^1 + \varepsilon^2 u_2^1 - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1) + \varepsilon^3 \tilde{K}^1(x', x'/\varepsilon),$$

де використані перетворення з розділу 4 та $\tilde{K}^1(x, y) = K^1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1 \lambda^1$. Помножимо отриманий вираз на $\varepsilon \tilde{u}_a^1(x', x'/\varepsilon)$ та проінтегруємо по сітці

$$\left(L\tilde{u}_a^1, \tilde{u}_a^1 \right)_{L^2(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} L\tilde{u}_a^1 \tilde{u}_a^1 dx' = \varepsilon^2 \lambda^1 \|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)}^2 + \varepsilon^4 \int_{G_\varepsilon} \tilde{K}^1 \tilde{u}_a^1 dx'. \quad (13)$$

Розглянемо останній доданок виразу (13). Використавши оцінку (10) та нерівність Коши-Буняковского, отримаємо наступне

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \tilde{K}^1 \tilde{u}_a^1 dx' \leq \left[\varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\tilde{K}^1|^2 dx' \right]^{1/2} \left[\varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\tilde{u}_a^1|^2 dx' \right]^{1/2} \leq C \|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)}.$$

Віднімання постійної $\varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$ від функції u_a^1 істотно не впливає на оцінку (11), тому можливо вважати, що $\|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon^2)$.

Позначимо через $U_a^1 = \tilde{u}_a^1 \|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1}$, тоді матимемо $\|U_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^1 \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$.

Визначимо 1-вимірний підпростір $H_1 \subset H_{per*}^1(G_\varepsilon)$, де $U_a^1(x', x'/\varepsilon) \in H_1$, та ортогональний проектор P_1 на H_1 . За визначенням, $P_1 U_a^1 = U_a^1$. Тоді існує власне значення μ_ε^1 і ортонормована власна функція w_ε^1 оператору $L_1 = P_1 L P_1$. Крім того, згідно методу Релея-Рітца, матимемо $\lambda_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^1$.

Використовуючи отримані вище результати для $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$ маємо

$$L_1 U_a^1(x', x'/\varepsilon) = P_1 L U_a^1 = \varepsilon^2 \lambda^1 U_a^1 + O(\varepsilon^3)$$

Отже маємо оцінку зверху для першого власного значення задачі (4)–(5) в наступному вигляді

$$\lambda_\varepsilon^1 \leq \varepsilon^2 \lambda^1 + C \varepsilon^3.$$

Зафіксуємо натуральне $d > 1$. Далі ортонормуємо функції $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$, $u_a^2(x', x'/\varepsilon)$, $\dots$, $u_a^d(x', x'/\varepsilon)$ у просторі $L_*^2(G_\varepsilon)$.

Визначимо постійну $A_\varepsilon^i = \varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^i dx'$ для $i = 2, \dots, d$. Тоді, як у випадку $i = 1$, можемо написати $A_\varepsilon^i = \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^i$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^i| \leq C$, та C не залежить від ε . Таким чином, матимемо $\tilde{u}_a^i = u_a^i - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^i \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$ для $i = 2, \dots, d$.

Визначимо також постійну $A_\varepsilon^{21} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \tilde{u}_a^2 \overline{U_a^1} dx'$. Тоді, за твердженням 2, маємо

$$A_\varepsilon^{21} = \int_{\Omega} v^2 \overline{v^1} dx + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\int_{\Omega} v^2(x) \overline{v^1(x)} dx = 0$ за визначенням. Таким чином, можемо написати $A_\varepsilon^{21} = \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^{21}$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^{21}| \leq C$, та C не залежить від ε .

Позначимо $\check{u}_a^2 = \tilde{u}_a^2 - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^{21} U_a^1$. Тоді $\check{u}_a^2$ є ортогональною до U_a^1 і задовольняє співвідношенням аналогічним (9)–(11) та (13), тобто $U_a^2 = \check{u}_a^2 \|\check{u}_a^2\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1}$ є визначеною і ортогональною до U_a^1 , $\|U_a^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^2 \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$. Далі, за індукцією знайдемо ортонормовані $U_a^1, U_a^2, \dots, U_a^{d-1}$ та визначимо функцію

$$\check{u}_a^d = \tilde{u}_a^d - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^{d,d-1} U_a^{d-1} - \dots - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^{d1} U_a^1,$$

яка є ортогональною до U_a^i при $\varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^{di} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \tilde{u}_a^d \overline{U_a^i} dx'$ із $|\tilde{A}_\varepsilon^{di}| \leq C$ для $i = 1, \dots, d-1$ (тут важливо, що система власних функцій $v^1, \dots, v^d$ є ортонормованою) і задовольняє співвідношенням аналогічним (9)–(11) та (13). Таким чином, $U_a^d = \check{u}_a^d \|\check{u}_a^d\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1}$ є визначеною і ортогональною до функцій $U_a^1, U_a^2, \dots, U_a^{d-1}$. Крім того, $\|U_a^d\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^d \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$.

Визначимо d -вимірний підпростір $H_d \subset H_{per*}^1(G_\varepsilon)$, як лінійну оболонку функцій $U_a^1(x', x'/\varepsilon), U_a^2(x', x'/\varepsilon), \dots, U_a^d(x', x'/\varepsilon)$, та ортогональний проектор P_d на H_d . За визначенням для $U \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$ маємо

$$P_d U = \sum_{i=1}^d U_a^i (U_a^i, U)_{L^2(G_\varepsilon)}$$

і тому $P_d U_a^i = U_a^i$ для $i = 1, \dots, d$. Тоді існують d -множини власних значень $\mu_\varepsilon^1, \mu_\varepsilon^2, \dots, \mu_\varepsilon^d$ і ортонормованих власних функцій $w_\varepsilon^1, w_\varepsilon^2, \dots, w_\varepsilon^d$ оператора $L_d = P_d L P_d$ таких, що виконані нерівності $\mu_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \mu_\varepsilon^d$ з урахуванням кратності. Крім того, згідно методу Релея-Рітца, матимемо

$$\lambda_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^d \leq \mu_\varepsilon^d.$$

Використовуючи співвідношення аналогічні (9)–(11) та (13) для функцій $U_a^1(x', x'/\varepsilon), U_a^2(x', x'/\varepsilon), \dots, U_a^d(x', x'/\varepsilon)$, маємо

$$L_d U_a^i(x', x'/\varepsilon) = P_d L U_a^i = \varepsilon^2 \lambda^i U_a^i + O(\varepsilon^3)$$

і

$$\|L_d U_a^i - \varepsilon^2 \lambda^i U_a^i\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq \varepsilon^3 C,$$

де $i = 1, \dots, d$ та стала C не залежить від ε . Тому, згідно теореми 4, знайдеться власне значення $\mu_\varepsilon^{j(i)}$ оператору L_d таке, що виконується нерівність

$$\left| \mu_\varepsilon^{j(i)} - \varepsilon^2 \lambda^i \right| \leq \varepsilon^3 C, \quad (14)$$

де $i = 1, \dots, d$ та C не залежить від ε . Тут не важлива залежність C від i (яка фактично відома з співвідношень аналогічних (9)–(11)), адже для завершення доведення оцінки теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5) залишилось перевірити тільки, що $k(s) = s$ в (12) для кожного $s = 1, 2, \dots, d$.

Слідуючи [14], [13], перевіримо, що фактично $j(i) = i$ в (14) для кожного $i = 1, \dots, d$. Дійсно, якщо власні значення $\lambda^1, \dots, \lambda^d$ є простими, тоді одразу маємо $j(i) = i$ для кожного $i = 1, \dots, d$, оскільки d упорядкованих чисел $\mu_\varepsilon^1, \dots, \mu_\varepsilon^d$ знаходяться у ε^3 -околах d строго упорядкованих чисел $\varepsilon^2\lambda^1, \dots, \varepsilon^2\lambda^d$, що є можливим тільки при $j(i) = i$. Проте, в залежності від l , кратність власного значення λ^1 є рівною або двом або чотирьом.

Розглянемо, наприклад, перший випадок, тоді λ^3 відокремлена від λ^1 на деяку константу δ (наприклад, для $l = 1/2$ константа $\delta = 1$). Обираючи $d = 2$ в (14) маємо $j(1) = 1$ та $j(2) = 2$ (що і необхідно довести, оскільки $\lambda^1 = \lambda^2$) або $j(1) = 2$ та $j(2) = 2$. В останньому випадку, існує стала $\sigma > 0$ така, що $\mu_\varepsilon^1 < \mu_\varepsilon^2 - \varepsilon^2\sigma < \mu_\varepsilon^2 + \varepsilon^2\sigma < \mu_\varepsilon^3$ і на інтервалі $(\varepsilon^2\lambda^1 - \varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2\lambda^1 + \varepsilon^2\sigma)$ знайдеться тільки одне власне значення μ_ε^2 оператора L_2 . Таким чином, маємо

$$\|U_a^1 - w_\varepsilon^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq \varepsilon C, \quad \|U_a^2 - w_\varepsilon^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq \varepsilon C$$

згідно теореми 4. Однак, це є неможливим [14], оскільки нормована функція w_ε^2 наближає одразу дві ортонормовані функції U_a^1 та U_a^2 .

Таким чином, доведені рівності $j(i) = i$ для $i = 1, 2$. Аналогічно доводиться, що $k(s) = s$ в (15) для $s = 1, 2$ (якщо кратність λ^1 є рівною 2). Дійсно, на відрізку $[\alpha\varepsilon^2, \mu_\varepsilon^2]$ знаходяться тільки два власних значення $\lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2$ задачі (4)–(5), оскільки $\alpha\varepsilon^2 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \mu_\varepsilon^2$, завдяки методу Релея-Рітца. Крім того, виконана нерівність (12) і тому $k(1) = 1$ та $k(2) = 2$ або $k(1) = 2$ та $k(2) = 2$. В останньому випадку, існує стала $\sigma > 0$ така, що на інтервалі $(\varepsilon^2\lambda^1 - \varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2\lambda^1 + \varepsilon^2\sigma)$ знайдеться тільки одне власне значення λ_ε^2 оператора L . Тому, згідно теореми 4, майже ортонормовані функції $\hat{u}_a^1$ та $\hat{u}_a^2$ (у відповідності із (11)) наближаються однією нормованою функцією u_ε^2 , що є неможливим.

Розглянемо тепер, наприклад, випадок коли кратності λ^1 та λ^3 є рівними 2 та r відповідно. Обираючи $d = 3 + r - 1$ в (14) матимемо, що у ε^3 -околу $\varepsilon^2\lambda^1$ знаходяться власні значення $\mu_\varepsilon^1, \mu_\varepsilon^2$ та принаймні μ_ε^{3+r-1} належить ε^3 -околу числа $\varepsilon^2\lambda^3$. Якщо μ_ε^3 не належить ε^3 -околу числа $\varepsilon^2\lambda^3$, тоді r ортонормованих функцій $U_a^3, \dots, U_a^{3+r-1}$ можуть бути наближені $(r-1)$ ортонормованими функціями $w_\varepsilon^4, \dots, w_\varepsilon^{3+r-1}$, що є неможливим.

Таким чином, доведені рівності $j(i) = i$ для $i = 1, \dots, 3 + r - 1$. Аналогічно доводиться, що $k(s) = s$ в (12) для $s = 1, \dots, 3 + r - 1$. Завдяки нерівності (12) та методу Релея-Рітца, це доведення можливо продовжити для інших d при $\lambda^d \ll \varepsilon^{-2}$, що доводить оцінку теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5). Тут є важливим, що для кожного d та ε виконується співвідношення

$$\alpha\varepsilon^2 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^d \leq \mu_\varepsilon^d,$$

яке надає контроль над кількістю власних значень задачі (4)–(5) на конкретному відрізку $[\alpha\varepsilon^2, \mu_\varepsilon^d] \subset [\alpha\varepsilon^2, \varepsilon^2\lambda^d + \varepsilon^2C(\lambda^d)^{3/2}]$. Це є важливим тому, що функція $k(s)$ в (12) може фактично залежати від ε . Точніше, теорема 4 гарантує тільки, що для фіксованих s та ε число $k(s)$ із (12) є визначеним.

Розглянемо тепер деяке власне значення λ^s задачі (8) кратності r (яка може дорівнювати 2, 4 або 8). Тоді, за визначенням, маємо співвідношення

$$\lambda^{s-1} < \lambda^s = \lambda^{s+1} = \dots = \lambda^{s+r-1} < \lambda^{s+r}.$$

Позначимо через σ_s найменше число із $(\lambda^{s-1} + \lambda^s)/2$ та $(\lambda^s + \lambda^{s+r})/2$. Із нерівності (12) витікає, що інтервалу $(\varepsilon^2 \lambda^s - \varepsilon^2 \sigma_s, \varepsilon^2 \lambda^s + \varepsilon^2 \sigma_s)$ належать тільки власні значення $\lambda_\varepsilon^s, \dots, \lambda_\varepsilon^{s+r-1}$ задачі (4)–(5). Тому, згідно теореми 4, знайдуться (можливо залежні від ε) постійні α_i^j при $i, j = s, s+r-1$ такі, що

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_a^s - \alpha_s^s u_\varepsilon^s - \dots - \alpha_{s+r-1}^s u_\varepsilon^{s+r-1}\|_{L^2(G_\varepsilon)} &\leq C \varepsilon (\lambda^s)^{3/2} \sigma_s^{-1}, \\ \dots &\dots \dots, \\ \|\hat{u}_a^{s+r-1} - \alpha_s^{s+r-1} u_\varepsilon^s - \dots - \alpha_{s+r-1}^{s+r-1} u_\varepsilon^{s+r-1}\|_{L^2(G_\varepsilon)} &\leq C \varepsilon (\lambda^s)^{3/2} \sigma_s^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Крім того, в силу умов теореми 4, матимемо

$$\begin{aligned} \|\alpha_s^s u_\varepsilon^s + \dots + \alpha_{s+r-1}^s u_\varepsilon^{s+r-1}\|_{L^2(G_\varepsilon)} &= 1, \dots, \\ \|\alpha_s^{s+r-1} u_\varepsilon^s + \dots + \alpha_{s+r-1}^{s+r-1} u_\varepsilon^{s+r-1}\|_{L^2(G_\varepsilon)} &= 1, \end{aligned} \quad (16)$$

Функції $u_\varepsilon^s, \dots, u_\varepsilon^{s+r-1}$ є ортонормованими і тому

$$(\alpha_s^s)^2 + \dots + (\alpha_{s+r-1}^s)^2 = 1, \dots, (\alpha_s^{s+r-1})^2 + \dots + (\alpha_{s+r-1}^{s+r-1})^2 = 1$$

у відповідності із (16), тобто матриця $\{\alpha_j^i\}_{i,j=s,s+r-1}$ є ортогональною.

Визначимо функції $\check{u}_a^s, \dots, \check{u}_a^{s+r-1}$ як ортогональні перетворення функцій $\hat{u}_a^s, \dots, \hat{u}_a^{s+r-1}$ матрицею $\{\alpha_j^i\}_{i,j=s,s+r-1}$. Тоді, із (15) матимемо

$$\|\check{u}_a^s - u_\varepsilon^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq C \varepsilon (\lambda^s)^{3/2} \sigma_s^{-1}, \dots, \|\check{u}_a^{s+r-1} - u_\varepsilon^{s+r-1}\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq C \varepsilon (\lambda^s)^{3/2} \sigma_s^{-1},$$

що завершує доведення теореми 3 (оскільки, можна вважати, що $\lambda^s = \sigma_s$ при великих s), де за власну функцію v^s задачі (8), яка фігурує у оцінці теореми 3, слід обрати відповідну лінійну комбінацію власних функцій

$$\begin{aligned} l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 + ml^{-1}x_2)}, & \quad l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \\ l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 + ml^{-1}x_2)}, & \quad l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

із коефіцієнтами, які розташовані у одній із строк матриці $\{\alpha_j^i\}_{i,j=s,s+r-1}$, та відповідними n і m . Підкреслимо, що для власного значення λ^s задачі (8) кратності r існує довільність у виборі власних функцій $v^s, \dots, v^{s+r-1}$, яка визначається деякою ортогональною матрицею. Тому і виникає необхідність у використанні строк відповідної матриці $\{\alpha_j^i\}_{i,j=s,s+r-1}$. $\square$

6. ВИСНОВКИ ТА ЗАУВАЖЕННЯ

У випадку $l = 1$ можна помітити наступний цікавий факт. Для отриманих власних значень λ^s та відповідних власних функцій $v^s(x)$ усередненої задачі (8) оберемо $n = m$. Тоді матимемо власне значення $\lambda^s = 4\pi^2 m^2$, а відповідні власні функції обмежимо на сітку, тобто зафіксуємо, наприклад,

для функції $e^{i2\pi(mx_1+mx_2)}$, координати $x_2 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, які відповідають координатам горизонтальних струн, та $x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, які відповідають координатам вертикальних струн. В результаті ми отримаємо такі власні функції на кожній струні дрібно-періодичної сітки

$$e^{i\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{11}}, e^{i3\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{12}}, \dots, e^{-i\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{1N}};$$

$$e^{i\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{21}}, e^{i3\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{22}}, \dots, e^{-i\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{2N}}.$$

Оберемо для точного власного значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n + \varepsilon m)^2$, яке описане в теоремі 1 для непарного значення N , значення $n = 0, m = 1, 2, \dots, N - 1$. Тоді $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 4\pi^2 m^2$ а відповідні власні функції матимуть такий вигляд (із значеннями довільних констант $A = 1, C_1 = 0, C_2 = 0$ та $C = 0$)

$$u_{1j}^\varepsilon = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{1j}}, x_{1j} \in [0, 1], u_{2j}^\varepsilon = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon} e^{i2\pi m x_{2j}}, x_{2j} \in [0, 1],$$

де $j = 1, 2, \dots, N$. Таким чином точний розв'язок, який побудований на основі теорії Флоке, співпадає із усередненою поверхнею $v^s(x)$, яка розглянута на сітці G_ε .

Аналогічним чином показується відповідність між усередненою поверхнею $e^{i2\pi(-mx_1+mx_2)}$ та точними власними функціями $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0, C_1 = 1, C_2 = 0, C = 0$; між $e^{i2\pi(mx_1-mx_2)}$ та $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0, C_1 = 0, C_2 = 1, C = 0$; а також між $e^{i2\pi(-mx_1-mx_2)}$ та $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0, C_1 = 0, C_2 = 0, C = 1$.

Для парного значення N (розв'язки спектральної задачі (4)–(5) в цьому випадку описані в теоремі 2) робимо такі самі висновки, окрім значення m , коли $m\varepsilon = 1/2$. Тоді перетином усереднених розв'язків та точних власних функцій є чотирьох-вимірний власний підпростір, проте є ще й $(2N - 3)$ -вимірний власний підпростір, який більш детально описаний в [9]. Тому значення m для якого $m\varepsilon = 1/2$ ми виключаємо з розгляду.

Отже, нами була побудована асимптотика для власних значень та комплекснозначних власних функцій спектральної задачі на сітці (4)–(5), а також доведена теорема 3 для s -го власного значення λ_ε^s та s -ої власної функції u_ε^s цієї задачі, що є обґрунтуванням побудованих асимптотик, де λ^s власне значення осередненої задачі (8) із власною функцією v^s , що ортонормована придатним чином, тобто v^s є відповідною лінійною комбінацією власних функцій наведених у (17). Крім того встановлена відповідність між точними розв'язками задачі на дрібно-періодичній сітці, які описані в теоремах 1 та 2, та наближеними розв'язками, які були отримані в результаті побудови асимптотики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Krylova A. S. Homogenization of spectral problem on small-periodic networks / A. S. Krylova, G. V. Sandakov // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – vol. 8, No. 4. – P. 336–356.

2. Мазья В. Г. Осреднение дифференциального оператора на мелкой периодической криволинейной сетке / В. Г. Мазья, А. С. Слупцкий // *Mathematische Nachrichten*. – 1987. – 133. – С. 107–133.
3. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Олейник О. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
5. Марченко В. А. Усредненные модели микронеоднородных сред / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. – Киев: Наукова думка, 2005. – 550 с.
6. Allaire G. Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis / G. Allaire, C. Conca // *J.Math. Pures et Appl.* – 1998. – 77. – Р. 153–208.
7. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.
8. Gavrilov A. Poincare's inequality on the stratified sets and applications / A. Gavrilov, S. Nicaise, O. Penkin // *Progress in nonlinear differential equations and their applications*. – 2003. – 55. – С. 195–213.
9. Крилова А. С. Комплексні власні підпростори спектральної задачі на сітці / А. С. Крилова, Г. В. Сандраков // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2012. – № 2(109). – С. 81–96.
10. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами / Г. В. Сандраков // *Матем. сб.* – 1989. – Т. 180, № 12. – С. 1634–1679.
11. Рид М. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон; пер. с англ.: В. Н. Сушко, А. К. Погребков. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
12. Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. – М.: Высш.шк., 1987. – 296 с.
13. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // *Успехи мат. наук.* – 1957. – Т. 12. в.5. – С. 3–122.
14. Люстерник Л.А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа / Л. А. Люстерник // *Успехи мат. наук.* – 1954. – Т. 9. в.2. – С. 3–66.

Надійшла 01.06.2012

УДК 517.982.22

ДІЖКОВІСТЬ ПРОСТОРУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ СУМОВНИХ З ДЕЯКИМ СТЕПЕНЕМ, ІЗ ЗМІНЕНОЮ НОРМОЮ

А. В. Анікушин

РЕЗЮМЕ. У роботі введено до розгляду простір послідовностей, що складається з елементів l_p , на якому введено норму простору l_q . При виконанні умов $1 < p < q < \infty$ у спряженому просторі наведено приклад системи функціоналів, що є поточно обмеженою, але не є обмеженою за нормою спряженого простору. На основі цього зроблено висновок, що простір, що розглядається, не є діжковим. Таким чином отримано конструктивне доведення недіжковості вказаного просторів.

Вступ

Діжкові простори (*barreled spaces*) виникають у функціональному аналізі поруч з принципом рівномірної обмеженості, або класичною теоремою Банаха-Штейнгауза. Це достатньо широкий клас просторів, що, наприклад, містить у собі всі банахові, повні простори, простори Бера тощо. Діжкові простори також важливі через їхній зв'язок з теоремою про замкнений графік [1]. У монографії [2] подано детальний огляд діжкових просторів, їх властивостей, критеріїв діжковості.

У роботах [3, 4] було отримано деякі достатні умови недіжковості лінійного нормованого простору. Зокрема в роботі [4] доведено, що простори

$$(l_p, \|\cdot\|_{l_q}), 1 < p < q < \infty$$

не є діжковими. Це твердження отримано з теореми, що встановлює достатні умови недіжковості лінійного нормованого простору. Доведення цієї теореми носить неконструктивний характер. У той же час видається цікавим навести конкретний приклад, що встановлював би недіжковість вказаного простору. Дана коротка замітка присвячена вирішенню цієї задачі.

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ

Розглянемо лінійний топологічний простір V . Нагадаємо [5, 6], що множина $S \subseteq V$ називається *абсолютно опуклою*, якщо $\forall |\alpha| \leq 1 : \alpha S \subseteq S$. Абсолютно опукла множина $S \subseteq V$ називається *поглинаючою*, якщо для кожного $x \in V$ існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $x \in \alpha S$. Множина $S \subseteq V$ називається *діжкою*, якщо S абсолютно опукла, замкнена та поглинаюча. Нарешті, лінійний топологічний простір V називається *діжковим*, якщо довільна діжка S у ньому є околom нуля.

Нагадаємо, що поняття діжковості тісно пов'язане [5, 6] з теоремою Банаха-Штейнгауза [7], а також з поточною та рівномірною обмеженістю (одностаїною неперервністю) лінійних відображень.

КОНСТРУКЦІЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІОНАЛІВ

Нехай $1 < p < q < \infty$. Розглянемо простір $E = (l_p, \|\cdot\|_{l_q})$. Через p', q' позначимо числа, що задовольняють рівностям $1/p + 1/p' = 1$; $1/q + 1/q' = 1$.

Покладемо $\alpha = \frac{q-1}{q} = \frac{1}{q'}$ і розглянемо послідовність дійсних чисел $\{k^{-\alpha}\}_{k=1}^{\infty}$. Неважко перевірити, що виконується нерівність $p' > q'$. Тоді можна стверджувати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p'\alpha}} < \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q'\alpha}} = \infty.$$

Розглянемо лінійні функціонали $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, що визначені таким чином:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot x_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in E. \quad (1)$$

Лема 1. *Нехай f_n визначено згідно (1), тоді*

$$\|f_n\|_{E^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Доведення. Скористаємося нерівністю Гьолдера [7]:

$$\forall x \in E : |f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^{\alpha}} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}} \|x\|_E.$$

Рівність досягається на елементі

$$x = \left(1^{-\frac{\alpha q'}{q}}, 2^{-\frac{\alpha q'}{q}}, \dots, n^{-\frac{\alpha q'}{q}}, 0, 0, 0, \dots \right) \in E.$$

□

Лема 2. *Послідовність функціоналів f_n , що визначена згідно (1) не є рівномірно обмеженою, але є поточною обмеженою.*

Доведення. Згідно леми 1 норми функціоналів f_n є частковими сумами ряду $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-q'\alpha}$. Але цей ряд є розбіжним внаслідок вибору параметра α . Тому $\|f_n\|_{E^*} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Розглянемо тепер довільний елемент $x \in E$. Оскільки $x \in l_p$, а ряд $\sum k^{-p'\alpha}$ — збіжний, то застосовуючи нерівність Гьолдера, отримаємо

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^{\alpha}} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p'\alpha}} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p'\alpha}} \right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_{l_p}.$$

□

На основі леми 2 можна сформулювати таку теорему:

Теорема 1. *Нехай $1 < p < q < \infty$. Тоді простір $(l_p, \|\cdot\|_{l_q})$ не є діжковим.*

Висновки

Таким чином, вдалося навести конструктивне доведення недіжковості просторів $(l_p, \|\cdot\|_{l_q})$, $1 < p < q < \infty$. Відзначимо, що при $p = q$ ми маємо справу з класичними просторами l_p , $p > 1$. Як відомо [7], ці простори є повними, а тому [5, 6] також і діжковими. Це дозволяє, як висновок роботи, сформулювати теорему:

Теорема 2. *Нехай $1 < p \leq q < \infty$. Простір $(l_p, \|\cdot\|_{l_q})$ діжковий тоді і лише тоді, коли $p = q$.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Perez-Carreras P. Some aspects of the theory of barreled spaces / P. Perez-Carreras // Casopis pro pestovani matematiky. — 1987. — V.112. — №2. — P. 123–161.
2. Perez-Carreras P. Barreled locally convex spaces / P. Perez-Carreras. — Elsevier Science Publishers. — 1987. — 529 p.
3. Анікушин А. В. Діжковість передгільбертових просторів / А.В. Анікушин // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №4(110). — С. 51–55.
4. Анікушин А. В. Про зв'язок між апіорними нерівностями та послабленими апіорними нерівностями для лінійних операторів / А.В. Анікушин // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101). — С. 3–8.
5. Робертсон А. П. Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 260 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
7. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К.: Выща школа, 1990. — 600 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 10.07.2012

УДК 517.91, 681.511, 519.713

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ НЕЧІТКИХ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

О. С. Бичков

РЕЗЮМЕ. В роботі розглянуто дослідження стійкості формалізму моделювання невизначеної динаміки, що базується на теорії можливості та гібридних автоматах. Застосування гібридних автоматів дозволяє моделювати складну динаміку за допомогою певної кількості простих систем. Використання для моделювання нечіткого аналога стохастичного рівняння Іто вирішує проблему відсутності статистичних даних та дозволяє досліджувати саме нечітку траєкторію. Для отримання достатніх умов стійкості пропонується використовувати мультикомпонентні функції Ляпунова.

Вступ

Методи теорії можливостей дозволяють оцінити рівень істини певної події по відношенню до інших подій на основі суб'єктивних думок експертів. Ці методи корисні для дослідження невизначених процесів або явищ, у разі, коли недостатність статистичної інформації не дозволяє застосовувати імовірнісні методи. Розв'язання таких задач як прогнозування розвитку соціально-економічного явища, моделювання складної динаміки польоту, часто вимагає використання диференціальних рівнянь, які містять деяку невизначеність. У таких областях, статистичні данні ненадійні або відсутні, тому доцільно використовувати теоретико-можливісні підходи [1]–[3].

У цьому контексті широко розповсюджені нечіткі диференціальні рівняння, що базуються на теорії нечітких множин Заде [4]–[7]. Ці рівняння часто розглядаються або як звичайні диференціальні рівняння з нечіткими параметрами, або як рівняння, що призначені для опису еволюції функцій приналежності. Ці підходи є корисними в багатьох випадках, але мають деякі недоліки. Диференціальні рівняння з нечіткими параметрами не дозволяють описувати динаміку зміни невизначеності. Рівняння, що описують еволюцію функції приналежності, не дають якісної характеристики фазової траєкторії. Тому виникають певні питання стосовно змісту поняття стійкості розв'язку. Для дослідження стійкості таких рівнянь використовують метод функцій Ляпунова [8]–[11]. У приведених статтях, в якості стійкості, автори розглядають динаміку відхилення функції приналежності від тотожньо нульової функції.

У цій статті ми пропонуємо дослідження стійкості іншого формалізму моделювання невизначеної динаміки, що базується на теорії можливості

та гібридних автоматах [12]–[14]. Застосування гібридних автоматів дозволяє моделювати складну динаміку за допомогою певної кількості простих систем. Використання для моделювання нечіткого аналога стохастичного рівняння Іто вирішує проблему відсутності статистичних даних та дозволяє досліджувати саме нечітку траєкторію, а не ставлення до неї експертів. Для отримання достатніх умов стійкості пропонується використовувати мультикомпонентні функції Ляпунова [13]–[14].

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введемо такі позначення. Нехай $\|\cdot\|$ — евклідова норма в просторі $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\nabla_f V(y_0) = V'(y_0)f(y_0)$, якщо $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ або $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times l}$.

Будемо досліджувати стійкість стаціонарного стану [17] узагальненого нечіткого гібридного автомату з нечітким перемиканням (УНГАНП) [17]. Зафіксуємо деякий УНГАНП $GHA = (Q, Y, PS, Inv, Jump, Orb)$ і стаціонарний стан $y_* \in St(GHA)$ (в припущенні, що $St(GHA) \neq \emptyset$).

Означення 1. Стаціонарний стан $y_* \in St(GHA)$ називається стійким з рівнем $\bar{\alpha}$, де $\bar{\alpha} : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ — функція, визначена в околі нуля, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх фазових орбіт $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, де $\bar{y} = (y^i)_{i \in \langle \tau \rangle}$ і $\tau = (I_i)_{i \in \langle \tau \rangle}$, таких, що $y^0(\tau_0) \in B(y_*, \delta)$ і $P\{x\} > \bar{\alpha}(\varepsilon)$, виконується умова $y^i(t) \in B(y_*, \varepsilon)$ для всіх $i \in \langle \tau \rangle$ і $t \in I_i$.

Для кожної частково визначеної функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ позначимо $InfInv(f)$ частково визначену функцію $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задана умовами:

$g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$, якщо $y \in \mathbb{R}$ і множина $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$ непорожня і обмежена зверху.
 $g(y)$ не визначено в іншому випадку.

Визначимо $HL(HA, y_*)$ як множину кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q})$, в яких:

$\bar{\alpha} : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ — функція, визначена в околі нуля.

$(V_q)_{q \in Q}$ — індексована сім'я неперервних частково визначених функцій з Y в $\mathbb{R}_+$.

$(\nu_q)_{q \in Q}$ — індексована сім'я частково визначених функцій $v_q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, і виконуються такі умови, де $\psi = InfInv(\bar{\alpha})$:

L1) $\{y_*\} \cup Inv(q) \subseteq \text{dom } V_q$ для всіх $q \in Q$, і якщо $(q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)$ для деяких $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$ і $x \in X_+$, то $y_1 \in \text{dom } V_{q_1}$ і $y_2 \in \text{dom } V_{q_2}$;

L2) існує число $v > 0$, таке, що $[0, v) \cup \text{Range } \psi \subseteq \text{dom } v_q$, $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ при $w \in \text{dom } v_q \setminus \{0\}$;

L3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

L4) якщо $V_q(y) \leq \nu_q(w)$ для деяких $y \in \text{dom } V_q$ і $w \in \text{dom } v_q$, то $\rho(y_*, y) \leq w$;

L5) якщо $q \in Q$, $x \in X_+$, $P\{x\} \in \text{dom } \psi$, $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, $i \in \langle \tau \rangle$, $\bar{q}(i) = q$ і для деякого (скінченного) інтервалу $(t_1, t_2) \subset [\tau_i, \tau'_i)$

виконується нерівність $V_q(y^i(t)) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ при $t \in (t_1, t_2)$, то функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ не зростає на інтервалі (t_1, t_2) .

Зауважимо, що функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ визначена на інтервалі (τ_i, τ'_i) , оскільки $y^i(t) \in Inv(\bar{q}(i))$ при $t \in (\tau_i, \tau'_i)$.

Зміст елементів кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(GHA, y_*)$ такий: функції $(V_q)_{q \in Q}$ грають роль функцій Ляпунова, визначених окремо для кожного дискретного стану автомата GHA і адаптованих для встановлення стійкості стаціонарного стану y_* з рівнем $\bar{\alpha}$; функція ν_q знаходить лінію рівня функції V_q , яка міститься у кулі заданого радіусу (з центром в точці y_*).

Введемо такі позначення для всіх $q_1, q_2 \in Q, u \in (0, 1]$:

$$J(q_1, q_2, u) = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \exists x \in X_u : (q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)\};$$

$$E = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q \mid \exists x \in X_+ \exists (y_1, y_2) \in Y \times Y : (q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)\}.$$

Означення 2. Орієнтованим графом, який лежить в основі GHA називається пара (Q, E) і позначається як $Gr(GHA)$.

Означення 3. Множиною часткових дискретних фазових орбіт GHA називається множина $PDPO(GHA) = \{(\bar{q}(0), \bar{q}(1), \dots, \bar{q}(k)) \mid \exists k \geq 1, \exists \tau, \bar{q}, \bar{y}, x : (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb \wedge k \leq \langle \tau \rangle\}$.

Змістовно, це є множина непорожніх скінченних послідовностей дискретних станів, які може проходити автомат на деякій фазовій орбіті.

Означення 4. Нечітким гібридним автоматом з нечітким перемикуванням (НГАНП) називається кортеж $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, Inv, Init, Jump)$, в якому:

- Q — скінченна множина дискретних станів;
- $Y = \mathbb{R}^d$ — множина неперервних станів;
- $PS = (X, 2^X, P)$ — простір можливостей з нормованою мірою можливості;
- $w : \mathbb{R} \times X_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ — процес нечіткого блукання (ПНБ) [12],[13] на просторі PS ;
- $g : Q \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, h : Q \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times l}$ — частково визначені функції, за допомогою яких задається неперервна поведінка автомату під час перебування в дискретному стані; будемо позначати $g_q = y \mapsto g(q, y)$ і $h_q = y \mapsto h(q, y)$;
- $Inv : Q \rightarrow Y \setminus \{\emptyset\}$ — відображення, яке задає множину незмінності дискретного стану;
- $Init \subseteq Q \times Y$ — множина початкових станів;
- $Jump : Q \times Y \times X \rightarrow 2^{Q \times Y}$ — відображення, яке задає умову переходу між дискретними станами;

і виконується умова $Inv(q) \subseteq Dom g_q \cap Dom h_q$ для всіх $q \in Q$.

Означення 5. Фазовою орбітою яка допускається НГАНП HA називається кортеж $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x)$, в якому $x \in X_+, \tau = (I_i)_{i=0}^N \in \text{НТ}, \bar{q} : \langle \tau \rangle \rightarrow Q$ —

відображення і $\bar{y} = (y^i)_{i \in \langle \tau \rangle}$ — індексована сім'я неперервних відображень $y^i : I_i \rightarrow Y$, таких, що:

- 1) $y^i(t) \in \text{Inv}(\bar{q}(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau'_i]$, якщо $i \in \langle \tau \rangle$ і крім того, $y^i(\tau'_i) \in \text{Inv}(\bar{q}(i))$, якщо $i = N(\tau)$ і $\tau'_i \in U(\tau)$;
- 2) $(\bar{q}(i+1), y^{i+1}(\tau_{i+1})) \in \text{Jump}(\bar{q}(i), y^i(\tau'_i), x)$ для всіх $i \in \langle \tau \rangle \setminus \{N(\tau)\}$;
- 3) функція y^i локально абсолютно неперервна на I_i і задовольняє диференціальне рівняння за процесом нечіткого блукання [12],[13]

$$\dot{y}^i(t) = g(\bar{q}(i), y^i(t)) + h(\bar{q}(i), y^i(t))\dot{w}(t, x)$$

для майже всіх $t \in I_i$;

- 4) $(q(0), y^0(0)) \in \text{Init}$.

Зауважимо, що в пункті 3, функції $t' \mapsto g_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ і $t' \mapsto h_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ є визначеними на $I_i \setminus \{\tau'_i\}$, оскільки $y^i(t) \in \text{Inv}(\bar{q}(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau'_i]$ за пунктом 1.

Позначимо: $\text{Orb}(HA)$ — множина фазових орбіт автомату HA , φ_w — функція розподілу процесу нечіткого блукання w , а Ξ — його коваріаційна матриця [12],[13], тобто додатно-визначена матриця, така, що перехідна можливість ПНБ має вигляд $P\{w(t) = y \mid w(t_0) = y_0\} = \varphi(\frac{\|\Xi^{-1/2}(y-y_0)\|^2}{(t-t_0)^2})$. Нехай λ_m — найменше власне число матриці $\Xi^{-1/2}$.

Поставимо у відповідність автомату HA автомат УНГАНП

$$GHA = (Q, Y, PS, \text{Inv}, \text{Jump}, \text{Orb}(HA)),$$

де Y — простір $(\mathbb{R}^d, \rho)$ з метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Зауважимо, що множина $\text{Orb}(HA)$ задовольняє умови означення множини фазових орбіт УНГАНП в силу умов означення фазової орбіти НГАНП, тому GHA дійсно є УНГАНП.

Автомат GHA є абстракцією автомату HA , тому визначені для нього поняття стаціонарного стану і стійкості з рівнем можна перенести на HA .

Означення 6. Стаціонарним станом НГАНП HA називається стаціонарний стан відповідного УНГАНП GHA .

Будемо позначати $St(HA)$ — множина стаціонарних станів HA .

Означення 7. Стаціонарний стан $y_* \in St(HA)$ називається стійким з рівнем $\bar{\alpha}$, де $\bar{\alpha} : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля, якщо y_* є стійким з рівнем $\bar{\alpha}$ стаціонарним станом GHA .

Означення 8. Орієнтованим графом, що лежить в основі HA (позначається $Gr(HA)$) називається орієнтований граф, який лежить в основі GHA .

Розглянемо фіксований НГАНП $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, \text{Inv}, \text{Init}, \text{Jump})$ і відповідний йому УНГАНП GHA .

Позначимо $DF(\mathbb{R}^d)$ — клас усіх частково визначених неперервних функцій $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, які є неперервно диференційовними на внутрішності своєї області визначеності.

Визначимо $HLo(HA, y_*)$ (конкретизація $HL(GHA, y_*)$ для НГАНП) як множину кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q})$, в яких:

$\bar{\alpha} : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ — функція, визначена в околі нуля;
 $(V_q)_{q \in Q}$ — індексована сім'я функцій класу $DF(\mathbb{R}^d)$;
 $(\nu_q)_{q \in Q}$ — індексована сім'я визначених функцій $v_q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 визначених в околі нуля (включаючи нуль), і виконуються умови,
 в яких $\psi = \text{InfInv}(\bar{\alpha})$:

Lo1) $\{y_*\} \cup O_q \subseteq \text{Dom} V_q$ для всіх $q \in Q$, де O_q — деяка відкрита на
 множенні $\text{Inv}(q)$, і якщо $(q_2, y_2) \in \text{Jump}(q_1, y_1, x)$ для деяких $q_1, q_2 \in$
 Q , $y_1, y_2 \in Y$ і $x \in X_+$, то $y_1 \in \text{Dom} V_{q_1}$ і $y_2 \in \text{Dom} V_{q_2}$;

Lo2) $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ для всіх $w \in \text{Dom} v_q \setminus \{0\}$;

Lo3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

Lo4) якщо $V_q(y) \leq \nu_q(w)$ для деяких $y \in \text{Dom} V_q$ і $w \in \text{Dom} v_q$, то
 $\|y_* - y\| \leq w$;

Lo5) для всіх елементів $q \in Q$, $x \in X_+$ і $y \in \text{Inv}(q)$ таких, що
 $P\{x\} \in \text{Dom} \psi$ і $V_q(y_1) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ визначена, виконується

$$\nabla_{g_q} V_q(y) \leq -\frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})} \|\nabla_{h_q} V_q(y)\|.$$

Зміст кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, y_*)$ аналогічний змісту кор-
 тежів з множини $HL(GHA, y_*)$: функції $(V_q)_{q \in Q}$ грають роль функцій Ля-
 пунова, визначених окремо для кожного дискретного стану HA і адаптова-
 них для встановлення стійкості стаціонарного стану y_* з рівнем $\bar{\alpha}$. Функція
 ν_q задає лінію рівня функції V_q , яка міститься у кулі заданого радіусу.

Зауважимо, що значення $\nabla_{g_q} V_q(y), \nabla_{h_q} V_q(y)$ визначені для всіх $y \in \text{Inv}(q)$,
 оскільки виконується умова Lo1 і $\text{Inv}(q) \subseteq \text{Dom} g_q \cap \text{Dom} h_q$.

Лема 1. Для кожного $x \in X_+$ нерівність $\|\dot{w}(t, x)\| \leq \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}$
 виконується для майже всіх $t \in \mathbb{R}_+$.

Доведення. Для всіх $t_1 \neq t_2$ і $C > 0$ виконується

$$\begin{aligned} & P\{ \|w(t_1, x) - w(t_2, x)\| \geq C|t_1 - t_2| \} = \\ & = \sup\{ P\{w(t_1, x) - w(t_2, x) = a\} \mid \|a\| \geq C|t_1 - t_2| \} = \\ & = \sup \left\{ \varphi_w \left(\left\| \frac{\Xi^{-1/2} a}{(t_1 - t_2)^2} \right\|^2 \right) \right\} \leq \varphi_w \left(\frac{\lambda_m^2 C^2 (t_1 - t_2)^2}{(t_1 - t_2)^2} \right) = \varphi_w(\lambda_m^2 C^2). \end{aligned}$$

Внаслідок довільності $C > 0$, для кожного $x \in X_+$ маємо

$$\|w(t_1, x) - w(t_2, x)\| \leq \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})} |t_1 - t_2|.$$

За результатом [18, Лема 3], для кожного $x \in X_+$, траєкторія $t \mapsto w(t, x)$ є
 майже скрізь диференційовною. Звідси для майже всіх $t \in \mathbb{R}_+$ виконується

$$\|\dot{w}(t, x)\| \leq \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}.$$

□

Далі будемо використовувати термінологію теорії формальних мов. Вве-
 демо такі позначення:

- A^* — множина слів в алфавіті A (тобто скінченних послідовностей елементів множини A), або замикання Кліні формальної мови A ;
- A^+ — множина непорожніх слів в алфавіті A , або обмежене замикання Кліні формальної мови A ;
- $|p|$ — довжина слова p ;
- p_1p_2 або $p_1.p_2$ — конкатенація слів p_1 і p_2 ;
- $p_1 \triangleleft p_2$ — $p_1 \in$ (можливо, порожнім) підсловом p_2 ;
- $beg(p)$ — перша літера слова p , якщо слово p не порожнє;
- $end(p)$ — остання літера p , якщо слово p не порожнє;
- $beg(L) = \{beg(p) | p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$;
- $end(L) = \{end(p) | p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$;
- $pref(p)$ — множина (непорожніх) префіксів слова p ;
- $SwL(L) = \{p \mid \exists u \in L : p \triangleleft u\}$ — множина підслів усіх слів множини $L \subseteq A^+$;
- $SwL_k(L) = \{p \mid |p| = k \wedge \exists u \in L : p \triangleleft u\}$ — множина підслів довжини k усіх слів $L \subseteq A^+$;
- $PCL(L) = \bigcup_{p \in L} \succsim(p)$ — префіксне замикання множини $L \subseteq A^+$ (без порожнього слова);
- $PrL(L) = \{L_1 \in \Delta = \Delta \setminus \{\emptyset\} \mid L_1 = PCL(L)\}$ — множина непорожніх префіксно-замкнених підмножин множини $L \subseteq A^*$.

Для дослідження стійкості стаціонарних станів з рівнем $\bar{\alpha}$ будемо використовувати такий результат.

Теорема 1. [17] *(Про стійкість стаціонарних станів УНГАНП).*

Припустимо, що для УНГАНП GHA і стаціонарного стану y_* існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(GHA, y_*)$. Нехай $\psi = \text{Infinv}(\bar{\alpha})$.

Нехай $v_{\max} > 0$ — число і

$$((SD, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_{\Theta}, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = \text{aes}'(GHA, HL, v_{\max}),$$

де $\text{aes}'(GHA, HL, v_{\max})$ — асоційована розширена s' -структура [17].

Нехай $W_* \in PrL(W)$ — множина, така, що $PDPO(GHA) \subseteq W_*$, де $PDPO(GHA)$ — множина часткових дискретних фазових орбіт GHA .

Припустимо, що A_i, B_i, C_i , $i = 1, 2, \dots, m$ — скінченні підмножини Q^* , такі, що $W_* \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^* C_i$; $E_0 = SwL_2(\bigcup_{i=1}^m (A_i C_i \cup A_i B_i C_i))$ та виконуються умови:

для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1 q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = \vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

- (а) $V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$,
- (б) $V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u))$;

$\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$.

Тоді стаціонарний стан y_* стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведемо ряд допоміжних лем.

Лема 2. *Нехай $D \subseteq \mathbb{R}^d$ — відкрита множина, (t_1, t_2) , де $t_1 < t_2$ — (скінченний) інтервал $\mathbb{R}$. Нехай $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна функція і $\bar{y} : (t_1, t_2) \rightarrow D$ — локально абсолютно неперервна функція. Тоді функція $t \mapsto V(\bar{y}(t))$ локально абсолютно неперервна на (t_1, t_2) .*

Доведення. Оберемо довільне $t_0 \in (t_1, t_2)$. Оскільки функція $\bar{y}$ локально абсолютно неперервна, то існує число $\gamma_1 > 0$, таке, що для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta_0(\varepsilon) > 0$, таке, що для кожної індексованої сім'ї інтервалів $\left((t_1^{(i)}, t_2^{(i)})\right)_{i \in N}$ в $\mathbb{R}$, такої, що $\sum_{i \geq 1} t_2^{(i)} - t_1^{(i)} < \delta_0(\varepsilon)$ і

$$\bigcup_{i \geq 1} (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) \subseteq (t_0 - \gamma_1, t_0 + \gamma_1),$$

виконується нерівність

$$\sum_{i \geq 1} \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \leq \varepsilon.$$

Нехай $\bar{O}$ — замкнена куля $\mathbb{R}^d$ з центром в точці $\bar{y}(t_0)$, така, що $\bar{O} \subseteq D$. Покладемо $\gamma \in (0, \gamma_1)$ — число, таке, що $\bar{y}(t) \in \bar{O}$ для всіх $t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$ (яке існує в силу неперервності функції $\bar{y}$). Покладемо M — число, таке, що

$$M > \max_{y \in \bar{O}} \left\| \frac{dV(y)}{dy} \right\|.$$

Цей максимум визначений, оскільки функція V неперервно диференційовна.

Оберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \delta_0(\varepsilon/M) > 0$ (де $\delta_0(\varepsilon)$ вказано вище). Нехай $\left((t_1^{(i)}, t_2^{(i)})\right)_{i \in N}$ — індексована сім'я інтервалів в $\mathbb{R}$, така, що $\sum_{i \geq 1} t_2^{(i)} - t_1^{(i)} < \delta$ і крім того,

$$\bigcup_{i \geq 1} (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) \subseteq (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma).$$

Тоді для кожного $i \geq 1$ відрізок $[\bar{y}(t_1^{(i)}), \bar{y}(t_2^{(i)})]$ в $\mathbb{R}^d$ включається в $\bar{O}$, тому

$$\begin{aligned} \left| V(\bar{y}(t_2^{(i)})) - V(\bar{y}(t_1^{(i)})) \right| &\leq \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \max_{y \in [\bar{y}(t_1^{(i)}), \bar{y}(t_2^{(i)})]} \left\| \frac{dV(y)}{dy} \right\| < \\ &< M \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\|. \end{aligned}$$

Тоді

$$\sum_{i \geq 1} \left| V(\bar{y}(t_2^{(i)})) - V(\bar{y}(t_1^{(i)})) \right| < M \sum_{i \geq 1} \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \leq \varepsilon.$$

В силу довільності вибору $t_0 \in (t_1, t_2)$ і числа $\varepsilon > 0$, функція $t \mapsto V(\bar{y}(t))$ є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2) .

Лему доведено. $\square$

Лема 3. $HLo(HA, y_*) \subseteq HL(GHA, y_*)$ для кожної точки $y_* \in St(HA)$.

Доведення. Нехай $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, y_*)$. Оскільки для HL виконуються умови Lo1 - Lo4, то для HL виконуються умови L1 - L4 і достатньо перевірити виконання умови L5.

Нехай $q \in Q$, $x \in X_+$, $P\{x\} \in Dom\psi$, $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, $i \in \langle \tau \rangle$, $\bar{q}(i) = q$ і для деякого непорожнього, скінченного інтервалу $(t_1, t_2) \subset [\tau_i, \tau'_i)$ виконується нерівність $V_q(y^i(t)) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ при $t \in (t_1, t_2)$. Позначимо $f : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функція, визначена рівністю $f(t) = V_q(y^i(t))$. Зауважимо, що оскільки $y^i(t) \in Inv(q)$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то функція f визначена на (t_1, t_2) . Застосовуючи лему 2 до функції V_q на внутрішності своєї області визначення (яка включає $Inv(q)$) і функції y^i на (t_1, t_2) , отримуємо, що функція f є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2) .

Оскільки $y^i(t) \in Inv(q)$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то за умовою Lo5, для всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується нерівність

$$\nabla_{g_q} V_q(y^i(t)) \leq -\frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})} \|\nabla_{h_q} V_q(y^i(t))\|.$$

За лемою 1, для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується нерівність

$$\|\dot{w}(t, x)\| \leq \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}.$$

Оскільки для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується

$$\dot{y}^i(t) = g_q(y^i(t)) + h_q(y^i(t))\dot{w}(t, x),$$

тоді

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{dV_q(y^i(t))}{dy} (g_q(y^i(t)) + h_q(y^i(t))\dot{w}(t, x)) \leq \\ &\leq \frac{dV_q(y^i(t))}{dy} g_q(y^i(t)) + \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})} \left\| \frac{dV_q(y^i(t))}{dy} h_q(y^i(t)) \right\| = \\ &= \nabla_{g_q} V_q(y^i(t)) + \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})} \|\nabla_{h_q} V_q(y^i(t))\| \leq 0 \end{aligned}$$

для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Враховуючи, що функція f є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2) , приходимо до висновку, що функція f незростає на інтервалі (t_1, t_2) , тобто функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ не зростає на (t_1, t_2) .

Таким чином, умова L5 виконується, а отже $HL \in HL(GHA, y_*)$. Тоді отримуємо включення $HLo(HA, y_*) \subseteq HL(GHA, y_*)$.

Лему доведено. $\square$

Для довільного орієнтованого графу $G = (Q, E)$ позначимо

$$W(G) = Q \cup \{p \in Q^+ \setminus Q \mid p = q_1 q_2 \dots q_n \wedge q_i \in Q \wedge \forall i \in \overline{2, n} (q_{i-1}, q_i) \in E\}.$$

тобто це є множина слів в алфавіті Q , які зображають маршрути в орієнтованому графі G як послідовності вузлів.

Нехай

$$W_{init}(HA) = W(Gr(HA)) \cap Init.Q^*,$$

тобто це є множина слів в алфавіті Q , які зображають маршрути в графі, які починаються в стані з множини $Init$.

Зауважимо, що

$$W_{init}(HA) \in PrL(W(Gr(HA))) \text{ і } PDPO(GHA) \subseteq W_{init}(HA).$$

Теорема 2. Припустимо, що для автомату HA і стаціонарного стану $y_* \in St(HA)$ існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, y_*)$. Нехай $\psi = InfInv(\bar{\alpha})$. Нехай $A_i, B_i, i = 1, 2, \dots, m$ — скінченні підмножини Q^* , такі, що $W_{init}(HA) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^*$. Нехай $E_0 = SwL_2(\bigcup_{i=1}^m (A_i \cup A_i B_i))$. Нехай $v_{\max} > 0$ — деяке число і

$$((S_D, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_{\Theta}, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(GHA, HL, v_{\max}).$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1 q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = \vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} V_{q_2}(y_2) &\leq v_{q_2}(\psi(u)), \text{ якщо } V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u)), \\ V_{q_2}(y_2) &\leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1)), \text{ якщо } V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}] \text{ і } V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u)); \end{aligned}$$

2) $\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$;

Тоді стаціонарний стан y_* автомату HA стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведення. За лемою 3, $HL \in HL(GHA, y_*)$. Крім того, $PDPO(GHA) \subseteq W_{init}(HA)$ і $W_{init}(HA) \in PrL(W(Gr(HA)))$. Тому для доведення теореми достатньо використати теорему 1, поклавши $C_i = \{\varepsilon\}$ для $i = 1, 2, \dots, m$, де ε — порожнє слово і $W_* = W_{init}(HA)$.

Теорему доведено. $\square$

Теорема 3. Припустимо, що для НГАНП HA і стаціонарного стану $y_* \in St(HA)$ існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, y_*)$, такий, що $V_q \in DF_0^\infty(\mathbb{R}^d, y_*)$ для всіх $q \in Q$. Нехай $\psi = InfInv(\bar{\alpha})$, і A_i, B_i — скінченні підмножини Q^* для $i = 1, 2, \dots, m$, такі, що

$$W_{init}(HA) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^*.$$

Нехай $E_0 = SwL_2(\bigcup_{i=1}^m (A_i \cup A_i B_i))$, $v_{\max} > 0$ — деяке число і $((S_D, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_{\Theta}, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(GHA, HL, v_{\max})$.

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, такої, що $q_1 q_2 \in E_0$ і всіх $u \in D$ і $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$, виконується $V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$;

2) $\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$.

Тоді стаціонарний стан y_* автомату HA стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведення. Застосуємо теорему 2, для чого достатньо довести виконання другої нерівності умови 1 з її формулювання, тобто, що для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1 q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = \vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх

елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1) > \nu_{q_1}(\psi(u))$, виконується нерівність $V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$.

Зафіксуємо пару $q_1, q_2 \in Q$, таку, що $q_1 q_2 \in E_0$ і покладемо $\delta_{q_1 q_2} = \nu_{q_1}(1) > 0$. Визначимо відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ рівністю

$$\vartheta_{q_1 q_2}(v) = \sup\{V_{q_2}(y) | y \in \text{Dom}V_{q_1} \cap \text{Dom}V_{q_2} \wedge V_{q_1}(y) \leq v\}.$$

Зауважимо, що це значення визначено, бо $y_* \in \text{Dom}V_{q_1} \cap \text{Dom}V_{q_2}$ і скінченне, оскільки при $V_q(y) \leq \nu_q(1)(1)$ виконується $\|y_* - y\| \leq 1$, а функція $V_{q_2}(y)$ локально обмежена. Оскільки $V_{q_1}(y) > 0$ при $y \neq y_*$, то $\vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$. Оскільки $\vartheta_{q_1 q_2}$ монотонна, то значення $\vartheta_{q_1 q_2}(0+)$ визначено. Перевіримо, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Дійсно, $\inf_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(\nu_{q_1}(\varepsilon)) = 0$, оскільки функція V_{q_1} неперервна на своїй області визначення і $V_{q_1}(y_*) = 0$. Але якщо $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) \neq 0$, то $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) > 0$ і тоді $\inf_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(\nu_{q_1}(\varepsilon)) > 0$, бо $\nu_{q_1}(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Отже, $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Якщо $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ для деякого $u \in D$, то $y_1 = y_2$, бо автомат неімпульсний, і $y_1 \in \text{Dom}V_{q_1} \cap \text{Dom}V_{q_2}$. Тому $V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$ за визначенням $\vartheta_{q_1 q_2}$.

Отже за теоремою 2, стаціонарний стан y_* стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Теорему доведено. □

ВИСНОВКИ

Автором пропонуються достатні умови стійкості нечіткого гібридного автомату із нечітким перемиканням. Перемикання станів відбувається при досягненні фазовою траєкторією поверхні перемикань. В локальних станах динаміка складної невизначеної системи описується нечітким аналогом стохастичного рівняння Іто. Це дозволяє вирішити проблему відсутності статистичних даних та досліджувати саме нечітку траєкторію, а не ставлення до неї експертів. Дослідження проводиться за допомогою мультикомпонентних функцій Ляпунова.

Роботу виконано при підтримці ДФФД проект № № Ф28.1/033.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cooman, G. Possibility theory. Part I: Measure- and integral-theoretic groundwork. Int. J. of General Syst. 25 (1997) 291–371.
2. Dubois D., Prade H. Possibility Theory. New York: Plenum, 1988.
3. Bychkov, A.S. About possibility theory and its application. Reports of National Academy of Sciences of Ukraine, 5 (2007) 7–12 (in Ukrainian).
4. Lakshmikantham, V., Mohapatra, R. Theory of fuzzy differential equations and inclusions. Taylor and Francis, London, (2003)
5. Buckley, J.J., Feuring Th. Fuzzy Differential Equations. Fuzzy Sets and Systems, 110 (2000) 43–54.
6. Buckley J.J., Qu Y., Solving fuzzy equations: a new solution concept, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 1–14.
7. Friedmanan, Y., Sandler, U. A New Approach to Fuzzy Dynamics. Proc. of the 12th IAPR International Conference, Jerusalem, Israel (1994).

8. P. Diamond, Stability and periodicity in fuzzy differential equations, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 8 (2000) 583-590.
9. Jae Ug Jeong Stability of a periodic solution for fuzzy differential equations // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2003. — V. 13, №1-2. — 217-222
10. Shiji Song, Cheng Wu, E.S. Lee Asymptotic equilibrium and stability of fuzzy differential equations // Computers & Mathematics with Applications, V.49, # 7-8, (2005), 1267-1277
11. Мартынюк А.А., Слынько В.И. Обусловия ограниченности движений механических систем, описываемых нечеткими дифференциальными уравнениями // прикладная механика. — 2005. — 41, №12. — с.93–99.
12. Bychkov, A.S. Modelling and studying fuzzy dynamical systems. Journal of Mathematical Sciences, 3 (2009) 466–479.
13. Бєлов Ю.А., Бичков О.С., Меркурьев М.Г. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки // Доповіді НАН України. — 2006. — №10. — С. 14–19
14. Бичков О.С. Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісник Київського університету, Сер. фіз. і мат. — 2005. — №4 — С. 19–24.
15. Martynyuk A.A., Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions // London: Cambridge Scientific publ., 2007.— 322 p.
16. Бычков А.С., Меркурьев М.Г. Достаточные условия устойчивости стационарного состояния линейных гибридных автоматов // Управляющие системы и машины. — 2007. - №2. — С. 18–23.
17. Бичков О.С. Продостатні умови стійкості гібридних автоматів з нечітким перемиканням // Доповіді НАН України. — 2011. — №4. — С. 7–14.
18. Бичков О.С., Іванов Є.В. Чисельне розв'язання нечіткого диференціального рівняння // Математичні машини і системи. — 2009. — №1. — С. 31–39.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 02.07.2012

УДК 517.91

ГОМОТОПІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕКРИТИЧНИХ М-ФУНКЦІЙ НА ТРИВИМІРНОМУ ДИСКУ

О. Н. Вятчанінова, О. О. Пришляк, К. О. Пришляк

РЕЗЮМЕ. Використовуючи розклади на m -ручки, дається критерій гомотопічної еквівалентності функцій на тривимірних тілах. Для тривимірного диску доводиться, що дві m -функції без внутрішніх критичних точок можна з'єднати шляхом у просторі m -функцій, якщо вони мають однакові числа критичних точок кожного індексу.

ВСТУП

При дослідженні простору функцій на многовиді часто виділяють підмножини, які складаються з функцій загального положення (страти корозмірності 0). Це функції, які при малому порушенні зберігають свої топологічні властивості. На замкнутих многовидах такими функціями є прості функції Морса. Шлях в просторі функцій Морса це неперервна сім'я функцій Морса. Будемо такий шлях називати гомотопією. В. Шарком [1] та С. Максименком [2] було доведено, що дві функції Морса можна з'єднати шляхом у просторі функцій Морса на замкнутому двовимірному многовиді тоді та тільки тоді, коли функції мають однакове число критичних точок кожного індексу.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m -функції. Це такі функції, у яких всі критичні точки є невинродженими та не лежать на краю, а також такі, що обмеження функції на край є функцією Морса. Топологічні властивості m -функцій досліджувалися у роботах [3–8]. С. Максименко для топологічної класифікації m -функцій використовував графи з інволюцією [8]. В роботі [9] описані всі прості орієнтовані атоми на поверхнях з краєм, а також дана повна пошарова класифікація простих m -функцій на компактних орієнтованих поверхнях з краєм.

Мета даної роботи — використовуючи m -ручки, дати критерій існування шляху між двома m -функціями на тривимірному тілі без внутрішніх критичних точок, а також гомотопічна класифікація таких функцій на тривимірному диску.

Нехай M — гладкий компактний n -вимірний многовид з краєм.

Означення 1. Функція $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ називається m -функцією, якщо:

- а) усі її критичні точки — невинроджені і не лежать на краю ∂M ;
- б) обмеження f_{∂} функції f на ∂M є функція Морса.

Критичні значення m -функції складаються з критичних значень функцій f і f_{∂} . m -функції це узагальнення функцій Морса для многовидів на многовиди з краєм.

Означення 2. Нехай $x \in \partial M$ — критична точка f_{∂} . Индексом $\text{ind } x$ цієї критичної точки називається пара (λ, ϵ) , де λ — звичайний індекс, а $\epsilon = +1$, якщо вектор $\text{grad } f_x$ спрямований назовні і $\epsilon = -1$, якщо $\text{grad } f_x$ спрямований усередину многовиду M . Якщо $x \notin \partial M$ — критична точка f , то індекс визначається звичайним чином.

1. m -РУЧКИ

Для диска, напівдиска, сфери і півсфери введемо такі позначення:

$$D^{\lambda} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{\lambda}) \in \mathbf{R}^{\lambda} \mid \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 \leq 1\}, \quad D_+^{\lambda} = \{x \in D^{\lambda} \mid x_{\lambda} \geq 0\},$$

$$S^{\lambda-1} = \partial D^{\lambda}, \quad S_+^{\lambda-1} = \{x \in S^{\lambda-1} \mid x_{\lambda} \geq 0\}.$$

Прості ручки

Означення 3. Будемо говорити, що многовид W отримано з многовида M за допомогою приклейки ручки $h^{\lambda} = D^{\lambda} \times D^{n-\lambda}$ індексу λ , якщо $W = M \cup_{\varphi} D^{\lambda} \times D^{n-\lambda}$, де $\varphi : \partial D^{\lambda} \times D^{n-\lambda} \rightarrow \text{Int } \partial_+ M$ — гладке вкладення.

Отриманий многовид W будемо розглядати як многовид з кутами $(W, \partial W, V_- \cup V_+)$. Тут $\partial W = \partial_- M \cup \partial_0 M \cup \partial_+ W$ і $\partial_+ W$ — многовид з краєм, отриманий в результаті перебудови Морса многовида $\partial_+ M$; $\partial_- M$, $\partial_0 M$, V_- і V_+ — початкові підмноговиди.

Означення 4. Диски $D^{\lambda} \times \{0\}$ і $\{0\} \times D^{n-\lambda}$ називаються середнім і косереднім дисками, а їх границі $S^{\lambda-1} \times \{0\}$ і $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$ — середньою і косередньою сферами.

m -ручки індексу $(\lambda, -1)$

Означення 5. Множина W отримана з многовиду M за допомогою приклейки тонкої m -ручки $h_T^{\lambda-} = D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1}$ індексу $(\lambda, -1)$, якщо

$$W = M \cup_{\varphi} D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1},$$

де $\varphi : \partial D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1} \rightarrow V_+$ — гладке вкладення.

m -ручки індексу $(\lambda, -1)$ є стовщенням тонкої m -ручки індексу λ . Більш точно: многовид W отримано з многовиду M за допомогою приклейки m -ручки $h^{\lambda-} = D^{\lambda} \times D_+^{n-\lambda}$ індексу $(\lambda, -1)$ якщо $W = M \cup_{\varphi} D^{\lambda} \times D_+^{n-\lambda}$, де $\varphi : \partial D^{\lambda} \times D_+^{n-\lambda} \rightarrow \partial_+ M$ — гладке вкладення таке, що $\varphi(\partial D^{\lambda} \times D_+^{n-\lambda}) \cap V_+ = \varphi(\partial D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1})$ і $D^{n-\lambda-1} = \partial D_+^{n-\lambda} \setminus \text{Int } S_+^{n-\lambda-1}$.

При цьому $\partial_0 W$ виходить з $\partial_0 M$ приклеюючи ручки індексу λ : $\partial_0 W = \partial_0 M \cup D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1}$, де $\psi = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda-1}}$, а $\partial_+ W$ дифеоморфно $\partial_+ M$ із приклеєною ручкою індексу λ : $\partial_+ W = (\partial_+ M \setminus \varphi(\partial D^{\lambda} \times S_+^{n-\lambda})) \cup_{\phi} D^{\lambda} \times S_+^{n-\lambda-1}$, де $\phi = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times S_+^{n-\lambda-1}}$. Кут V_+ замінюється (у результаті перебудови Морса) на підмноговид $V_+ \setminus (\varphi(\partial D^{\lambda} \times D^{n-\lambda-1})) \cup_{\gamma} (D^{\lambda} \times \partial D^{n-\lambda-1})$, де $\gamma = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-2}}$. Підмноговид $\partial_- M$ і V_- при приклеїтці m -ручки індексу $(\lambda, -1)$ не змінюються.

Означення 6. Диски $D^\lambda \times \{0\}$ і $\{0\} \times D_+^{n-\lambda}$ називаються середнім диском і косереднім напівдиском, а їх границі $S^{\lambda-1} \times 0$ і $0 \times S^{n-\lambda-1}$ — середньою і косередньою сферами m -ручки.

За побудовою, приклеїка m -ручки індексу $(\lambda, -1)$ рівносильна (результати дифеоморфні) приклеїці коміру $(\partial_+ M \cup_\varphi D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}) \times [0, 1]$ після приклеїки тонкої m -ручки.

m -ручки індексу $(\lambda, +1)$

Означення 7. Кажуть, що многовид W отриманий з многовиду M за допомогою приклеїки m -ручки $h^{\lambda+} = D_+^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1}$ індексу $(\lambda, +1)$, якщо

$$W = M \cup_\varphi D_+^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1},$$

де $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \rightarrow \partial_+ M$ — гладке вкладення таке, що

$$\varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}) \cap \partial_+ V = \varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}).$$

Тут $D^\lambda = \partial D_+^{\lambda+1} \setminus \text{Int} S_+^\lambda$. При цьому $\partial_0 W$ виходить із $\partial_0 M$ приклеїкою ручки індексу λ : $\partial_0 W = \partial_0 M \cup_\psi D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$, де $\psi = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda-1}}$, а $\partial_+ M$ дифеоморфно $\partial_+ W$ із приклеєною ручкою індексу $n - \lambda - 2$:

$$\partial_+ W = (\partial_+ M \setminus \text{Int} \varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})) \cup_\phi D_+^{\lambda+1} \times S^{n-\lambda-2},$$

де $\phi = \varphi|_{D^\lambda \times S^{n-\lambda-2}}$. Кут V_+ замінюється (у результаті перебудови Морса) на підмноговид $V_+ \setminus (\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})) \cup_\gamma (D^\lambda \times \partial D^{n-\lambda-1})$, де $\gamma = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-2}}$. Підмноговиди $\partial_- M$ і V_- при приклеїці m -ручки індексу $(\lambda, +1)$ не змінюються.

Зауваження. Многовиди W і M є дифеоморфними при приклеюванні ручки індексу $(\lambda, +1)$. Змінюється лише розбиття їх країв на дві частини і кут. Крім того, якщо після приклеювання ручки індексу $(\lambda, +1)$ приклеїти комір (це не змінює многовиду і розбиття його краю), то це те ж саме, що приклеїти комір до $\partial_+ M \setminus \varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})$, не приклеюючи ручки. Отже, при приклеюванні ручки індексу $(\lambda, +1)$ з $\partial_+ M$ видаляється тонка λ -ручка.

Означення 8. Диски $D_+^{\lambda+1} \times \{0\}$ і $\{0\} \times D^{n-\lambda-1}$ називаються середнім напівдиском і косереднім диском, а їх границі $S^\lambda \times \{0\}$ і $\{0\} \times S^{n-\lambda-2}$ — середньою і косередньою сферами.

2. М-РОЗКЛАДИ НА РУЧКИ

Означення 9. m -розкладом на ручки називається послідовність вкладень $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_N = M$ таких, що $M_0 = \partial_- M \times [0, 1]$, M_{i+1} отримано з M_i за допомогою приклеїки звичайної чи m -ручки.

Означення 10. m -розкладом на ручки з комірами називається послідовність вкладень $M'_0 \subset M_1 \subset M'_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M'_N = M$ таких, що $M'_0 = \partial_- M \times [0, 1]$, M_i виходить з M'_{i-1} за допомогою приклеїки звичайних чи m -ручок, а M'_i виходить з M_i за допомогою приклеїки коміра $N_i \times [0, 1]$, де $N_i = \partial_+ M_i$. На кожному комірці задана проекція $\pi : N_i \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Означення 11. m -розклади на ручки з комірами називаються ізоморфними, якщо існує гомеоморфізм між многовидами, що переводить ручки в ручки, коміри в коміри, зберігаючи розбивку комірів на пари.

За кожною m -функцією $f : M \rightarrow \mathbf{R}^1$ із критичними значеннями $\{1, 2, \dots, N\}$ задамо m -розклад на ручки з комірами так, що при цьому внутрішності комірів $N_i \times [0, 1]$ будуть пошарово гомеоморфними компонентам зв'язності множини $M \setminus f^{-1}(\{1, 2, \dots, N\})$. Це можна зробити так само, як і для функцій Морса, якщо взяти в якості ручок регулярні околиці критичних точок, а внутрішності комірів — доповнення до цих околів і критичних рівнів.

Розпишемо цю конструкцію детальніше для випадку тривимірного тіла і функції без внутрішніх критичних точок. Почнемо з ручок індексу $(\lambda, +1)$. Для відповідної критичної точки спочатку побудуємо ручку на межі ∂M для функції f_∂ . Середніми дисками ручки для критичної точки x буде преретин стійкого многовиду поля $\text{grad } f_\partial$ з множиною $f^{-1}(f(x) - \delta, f(x) + \delta)$, а сама ручка це ϵ -оکیل середнього диску в преретині з цією множиною. М-ручка буде об'єднанням частин траєкторій поля $\text{grad } f$, для точок яких значення функції не менше $f(x) - \delta$. М-ручка індексу $(\lambda, -1)$ може бути побудована як ручка індексу $(n - \lambda, +1)$ для функції $-f$. Виріжемо так побудовані m -ручки і розріжемо многовид за критичними рівнями. Компоненти зв'язності отриманої множини будуть комірами.

Для отримання розкладу на m -ручки розглянемо на кожному комірі градієнтно-подібне векторне поле, яке дотикається бокової поверхні кожного коміру (існування такого поля доведено в [5]). Параметризувавши кожну траєкторію параметром з $[0, 1]$ пропорційно довжині дуги, отримаємо структуру прямого добутку на комірі. Стиснемо дугу кожної траєкторії між верхньою і нижньою основами коміра в точку. Фактично ми позбудемось комірів, а відповідне приклеювання ручок буде задаватися структурами прямих добутків на комірах.

3. ГОМОТОПІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ М-ФУНКЦІЙ

Теорема 1. *(Еквівалентність функцій на комірах). Якщо функції мають однакові градієнтно-подібні векторні поля з локальними координатами $\{0, 0, 1\}$ на $F \times [0, 1]$, де F — поверхня, а функції сталі і мають однакові значення на основах циліндра $F \times \{0\}$ (мінімальне) і $F \times \{1\}$ (максимальне), то існують деформації однієї функції в іншу, стала на основах.*

Доведення. Нехай x, y — координати на M , а z — координата на $[0, 1]$.

Для функцій f і g шукана деформація задається формулою

$$f_t = (1 - t)f + tg.$$

При цьому $f_0 = f$, $f_1 = g$, $f_t(x, y, 0) = (1 - t)f(x, y, 0) + tg(x, y, 0) = f(x, y, 0)$, $f_t(x, y, 1) = (1 - t)f(x, y, 1) + tg(x, y, 1) = g(x, y, 1)$. За умовою теореми $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$ і $\frac{\partial g}{\partial z} > 0$. Тоді $\frac{\partial f_t}{\partial z} = (1 - t)\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial g}{\partial z} > \min\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) > 0$. Отже, поле $\{0, 0, 1\}$ є градієнтно-подібним для f_t при кожному t .

Наслідок. Теорема залишиться справедливою, якщо в умові однакові поля замінити на ізотопні.

Доведення. Якщо $h_t : M \rightarrow M$ — ізотопія, то $f_t = f(h_t)$ — шукана деформація функції.

Оскільки ізотопія ручок задає структуру прямого добутку на комірці, то вона може бути реалізована, як деформація функцій.

Теорема 2. *(Перестановка ручок або критичних точок). Якщо в розкладі на ручки вони не перетинаються, то їх можна приклеювати в довільному порядку (зробити значення однієї критичної точки більшим за інші).*

Доведення аналогічне доведенню для звичайних функцій [1].

Ці теореми дозволяють довільний розклад на руки звести до такого, що ручки приклеюються в такому порядку: спочатку ручки індексу $(0, -1)$, далі ручки індексу $(0, +1)$, $(1, -1)$, $(1, +1)$, $(2, -1)$ і останніми ручки індексу $(2, +1)$. При цьому ручки індексу $(1, \pm 1)$ не перетинаються між собою. Ручки індексу $(1, -1)$ будемо також називати зовнішніми 1-ручками, а індексу $(1, +1)$ — внутрішніми 1-ручками.

Додавання ручок — це операція, при якій одна $(1, \pm 1)$ -ручка ковзає по іншій $(1, \pm 1)$ -ручці. При цьому, якщо внутрішня $(1, +1)$ -ручка ковзає по зовнішній одним кінцем середнього диску, то щоб позбутися перетину між ними треба також здійснити ковзання по цій самій зовнішній ручці іншого кінця, або того самого кінця в зворотньому напрямку.

Дві ручки називаються доповняльними, якщо середній диск однієї перетинає косередній диск іншої в одній точці і вони мають сусідні індекси та однакові знаки. Доповняльними можуть бути такі пари ручок: 1) $(0, -1)$ і $(1, -1)$; 2) $(0, +1)$ і $(1, +1)$; 3) $(1, -1)$ і $(2, -1)$; 4) $(1, +1)$ і $(2, +1)$. Отже, однією з доповняльних ручок є 1-ручка.

Скорочення ручок — це операція, яка знищує пару доповняльних ручок. Це означає, що в розкладі на ручки будуть відсутні ці дві ручки. При цьому геометрично збільшується на об'єднання пари доповняльних ручок та $(0, \pm 1)$ - або $(2, \pm 1)$ -ручка, до якої належить інший кінець середнього або косереднього диску $(1, \pm 1)$ -ручки, відповідно. Обернена операція — введення пари доповняльних ручок.

Теорема 3. *Дві функції на тривимірному тілі є гомотопічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли вони мають однакові числа ручок для кожного індексу і з розкладу на m -ручки однієї можна отримати розклад іншої за допомогою ізотопій, перестановок, додавань, скорочень та введення пар доповняльних ручок.*

Доведення. Необхідність. Нехай функції гомотопічно еквівалентні. Оскільки невиродженість критичної точки забезпечує їй структурну стійкість, то при гомотопії зберігаються критичні точки і їх індекси. Вектор градієнта не може дотикатися краю в критичних точках, а отже, при гомотопії зберігається також знак критичної точки. Якщо зафіксувати ріманову метрику, то при гомотопії з розкладами на ручки будуть відбуватися ізотопії ручок, а також перестановка ручок (коли значення функції в одній критичній точці збільшується, або в іншій зменшується) та додавання, коли стійкі та нестійкі многовиди 1-ручок проходять положення, в якому вони нетрансверсальні.

Достатність. Ізотопії, перестановки та додавання ручок можуть бути реалізовані за допомогою гомотопії згідно теорем 1 та 2. Пара доповняльних ручок гомеоморфна двовимірному диску приклеєному по дузі свого краю. Вона може бути зроблена як завгодно малою і переміщена ізотопією в будь-яке місце. Число доповняльних ручок, що скоротилися або були введені, задається різницею чисел ручок індексу $(0, \pm 1)$ та $(2, \pm 1)$ початкового і кінцевого розкладів на ручки. Це забезпечує рівність пар доповняльних ручок. А отже, існує ізоотопія набору пар доповняльних ручок першого розкладу в такий набір пар іншого розкладу. Ця ізоотопія, як і раніше, реалізується гомотопією функцій.

4. ФУНКЦІЇ НА ТРИВИМІРНОМУ ДИСКУ.

Наша подальша мета — побудувати розклад з мінімальним числом ручок кожного індексу.

Оскільки межа многовиду зв'язна, то для кожної, крім першої, $(0, \pm 1)$ -ручки знайдеться доповняльна $(1, \pm 1)$ -ручка. Якщо вони однакового знаку, то ця пара ручок може бути скорочена. Дві $(0, -1)$ -ручки не можуть бути з'єднані $(1, +1)$ -ручкою. Проте $(0, +1)$ -ручка може бути з'єднана $(1, -1)$ -ручкою з іншими ручками. В цьому випадку ця пара ручок рівносильна одній простій 1-ручці на 3-многовиді. Аналогічно, $(2, \pm 1)$ -ручки, крім однієї $(2, +1)$ -ручки, з'єднуються $(1, \pm 1)$ -ручками. Пари однакового знаку скорочуються, а пара $(1, +1)$ -ручки з $(2, -1)$ -ручкою рівносильна простій 2-ручці. Якщо пара $(0, +1)$ та $(1, -1)$ -ручок утворюють просту 1-ручку, то незаклеєна частина краю $(0, +1)$ -ручки буде дугою на краю поверхні. Тоді будь-яка $(1, +1)$ -ручка, що приклеюється хоча б одним кінцем до цієї компоненти краю, може бути зроблена доповняльною до $(0, +1)$ -ручки. Аналогічно, для простої 2-ручки.

Розклад на ручки, що не містить пар доповняльних ручок чи пар, що можуть бути зроблені доповняльними після ізоотопії, будемо називати мінімальним.

Теорема 4. *Дві m -функції без внутрішніх критичних точок на тривимірному диску можна з'єднати шляхом в просторі m -функцій без внутрішніх критичних точок, якщо вони мають однакові числа критичних точок кожного індекса.*

Доведення. Необхідність випливає з теореми 3.

Достатність. Нехай функції мають однакові числа критичних точок кожного індекса. Це означає, що в розкладі на m -ручки у них однакове число ручок кожного індекса. Скоротимо всі пари доповняльних ручок. Якщо пара $(0, +1)$ - та $(1, -1)$ -ручок утворюють просту 1-ручку, то її приклеїть до фундаментальної групи многовида. Оскільки ця група тривіальна, то знайдеться 2-ручка (утворена парою $(1, +1)$ -ручки з $(2, -1)$ -ручкою) доповняльна до цієї 1-ручки. Тоді $(1, +1)$ -ручка від 2-ручки буде доповняльною до $(0, +1)$ -ручки з 1-ручки. Отже, поскорочуються всі $(0, \pm 1)$ -ручки, крім однієї $(0, -1)$ -ручки.

Так само поскорочуються всі $(2, \pm 1)$ -ручки, крім однієї $(2, +1)$ -ручки. Тоді число $(1, \pm 1)$ -ручок буде визначати рід поверхні краю. Оскільки для тривимірного диску цей рід дорівнює 0, то $(1, \pm 1)$ -ручок не буде. Отже, розклад на ручки звівся до двох ручок індексу $(0, -1)$ та $(2, +1)$. Два будь-яких таких розклади будуть ізоморфні оскільки на двовимірній сфері ізоморфні границі $(0, -1)$ -ручок. Використання теореми 3 завершує доведення.

ВИСНОВОК.

Доведено критерій гомотопічної еквівалентності (теорема 3) без внутрішніх критичних точок на тривимірних тілах. На його основі отримана гомотопічна класифікація таких m -функцій на тривимірному диску. Цей критерій важливий для отримання гомотопічної класифікації на довільному тривимірному тілі. Фактично він зводить задачу гомотопічної класифікації до задачі побудови канонічного розкладу на m -ручки та проблеми ізоморфії таких розкладів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шарко В. В. Функции на поверхностях I / В. В. Шарко // Некоторые вопросы совр. математики. Т. 25. — К.: Праці ін-ту математики НАНУ. — 1998. — С. 408–434.
2. Maksymenko S. I. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / S. I. Maksymenko // Comment. Math. Helv. — 2005. — V. 80. — P. 655–690.
3. Лукова-Чуйко Н. В. Пошарова еквівалентність m -функцій загального положення на 3-многовидах з межею / Н. В. Лукова-Чуйко, О. О. Пришляк. // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106) — С. 114–123.
4. Пришляк А. О. Эквивалентность m -функций на трехмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАНУ. — 2000. — №6. — С. 22–26.
5. Пришляк О. О. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанінова. // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101) — С. 113–119.
6. Hajduk B. Minimal m -functions / B. Hajduk // Fund. math. — 1981. — V. 110. — №3. — P. 178–200.
7. Jankowski A. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary / A. Jankowski, R. Rubinsztein // Comm. Math. — 1972. — XVI. — P. 99–112.
8. Максименко С. И. Классификация m -функций на поверхностях / С. И. Максименко // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51. — №8. — С. 1129–1135.
9. Пришляк О. О. Класифікація простих m -функцій на орієнтованих поверхнях / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, К. І. Міщенко, Н. В. Лукова // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 1–12.

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ ТА ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ,
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА,
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 18.04.2012

УДК 517.9

ФАКТОРИЗАЦІЯ ОБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ РОЗРІДЖЕНИМИ МАТРИЦЯМИ

В. Ю. ГОНЧАРЕНКО

РЕЗЮМЕ. У роботі доведена можливість представлення матриці оберненої до розрідженої, у вигляді добутку розріджених матриць. Отримана точна оцінка довжини факторизації. Показано зв'язок факторизації матриць з побудовою прикладного програмного забезпечення розподілених обчислювальних систем з локальною взаємодією.

ВСТУП

Розглянемо просторово-одновимірне рівняння теплопереносу зі слабкою нелінійністю

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, x), x \in [0; 1], t \in [0; \infty)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t).$$

Припустимо, що $u_1(t)$, $u_2(t)$, та $f(u, x)$ задовольняють всім необхідним умовам.

Для дискретизації задачі скористаємось методом скінченних різниць ([1], с. 565).

Оберемо рівномірну сітку ω_h з кроком h , що має n внутрішніх вузлів по просторовій змінній, та рівномірну сітку ω_τ з кроком τ по часовій змінній. Використовуючи неявну схему, запишемо систему рівнянь відносно значень сіткової функції на $(k+1)$ -му часовому шарі.

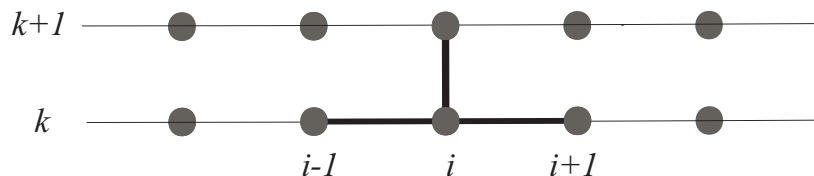


Рис. 1. Шаблон явної схеми.

$$\begin{cases} y_0^k = u_1((k+1)\tau), \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}(y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k) + f(y_i^k), i = \overline{1, n}, \\ y_{n+1}^k = u_2((k+1)\tau), \end{cases}$$

де y_i^k — значення сіткової функції в просторовій точці (i, k) . Після елементарних перетворень значення сіткової функції в i -й точці на $(k+1)$ -му шарі можна знайти за формулою

$$y_i^{k+1} = \frac{\tau}{h^2}(y_{i+1}^k - (2 - \frac{h^2}{\tau})y_i^k + y_{i-1}^k) + f(y_i^k)\tau. \quad (1)$$

Отже, для переходу від часового шару з номером k до наступного часового шару з номером $(k+1)$ у i -й просторовій точці достатньо знати значення сіткової функції у точках $(i-1, k)$, (i, k) , $(i+1, k)$, тобто у самій точці (i, k) та двох сусідніх $(i-1, k)$, $(i+1, k)$. В операторному вигляді перехід на наступний шар реалізується, як дія відображення

$$F(\bar{y}) = C\bar{y} + \bar{f}^k, \quad (2)$$

де C — трьохдіагональна матриця Якобі.

Це спостереження за часів появи мікропроцесорів наптовхнуло голландського інженера Я.Пакера (Y.Paker) на ідею створити спеціалізований обчислювач для розв'язання задач математичної фізики явними методами, яку він запатентував у 1977 році [2].



Рис. 2. Структура обчислювальної системи.

На рисунку 2 наведена структура такої обчислювальної системи. Квадратами позначаються процесори, стрілками — дуплексні канали зв'язку. Для переходу на $(k+1)$ -й шар i -й процесор системи повинен по каналах зв'язку обмінятися інформацією про значення сіткової функції з сусідніми процесорами та обчислити значення сіткової функції y_i^{k+1} за формулою (1).

Отже, обчислювальна система може знаходитися в двох станах.

А. "Обмін" — коли i -та машина отримує інформацію про значення сіткової функції в машинах, що безпосередньо з нею зв'язані.

Б. "Обчислення" — обчислення значення сіткової функції в наступному часовому шарі.

За один цикл "обмін"- "обчислення" на обчислювальній системі, що зображена на рисунку 2, можна реалізувати дію відображення вигляду

$$F(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(x_1; x_2), \\ \dots, \\ f_i(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}), \\ \dots, \\ f_n(x_{n-1}; x_n), \end{cases} \quad (3)$$

Робота такої обчислювальної системи може бути зображена у вигляді суперпозиції відображень вигляду (3)

$$\bar{y} = F_k(\dots(F_3(F_2(F_1(\bar{x}))))$$

або

$$\bar{y} = F_k \circ F_{k-1} \circ \dots \circ F_1(\bar{x}).$$

Для обчислювальної системи, зображеної на рисунку 2 побудуємо орієнтований граф міжмашинних зв'язків G . Якщо дві машини зв'язані дуплексним каналом зв'язку, то їх сполучають двома різнонапрямленими дугами (від однієї до іншої і навпаки).

Машини мають локальну пам'ять. На графі це відображається наявністю петлі в кожній вершині (рис. 3).



Рис. 3. Граф міжмашинних зв'язків.

Матриця суміжності графа, зображеного на рисунку 3, має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця C у відображенні (2) має нулі на тих самих місцях, що і матриця суміжності графа міжмашинних зв'язків в G . Стовпчики матриці суміжності вказують, від яких машин може отримати дані i -та машина, а отже, від яких змінних можуть бути обчислені координатні функції відображення (3).

Стійкість явних схем накладає обмеження на відношення $\frac{\tau}{h^2}$ ([1], с. 674). Відношення $\frac{\tau}{h^2}$ повинно бути достатньо малим. Зростання точності апроксимації по просторовій змінній приводить до квадратного збільшення часових шарів.

Тому застосуємо до вихідного рівняння неявну різницеву схему з шаблоном, що наведений на рисунку 4

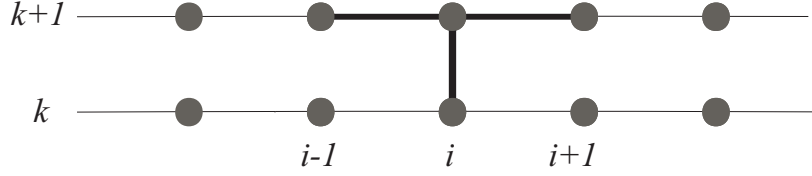


Рис. 4. Шаблон неявної схеми.

$$\begin{cases} y_0^{k+1} = u_1((k+1)\tau), \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}(y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}) + f(y_i^k), \quad i = \overline{1, n}, \\ y_{n+1}^{k+1} = u_2((k+1)\tau), \end{cases}$$

Після елементарних перетворень отримаємо систему рівнянь

$$-y_{i-1}^{k+1} + (2 + \frac{h^2}{\tau})y_i^{k+1} - y_{i+1}^{k+1} = h^2 f(y_i^k) + \frac{1}{\tau}y_i^k, \quad i = \overline{1, n}.$$

Або в операторній формі

$$C_1 \bar{y}^{k+1} = \bar{f}^k.$$

Трьохдіагональна матриця C_1 є матрицею з діагональною перевагою, тому вона оборотна [4] (с. 52–53) і розв'язок системи можна представити у вигляді

$$\bar{y}^{k+1} = C_1^{-1} \bar{f}^k.$$

Але матриця C_1^{-1} , обернена до трьохдіагональної, буде заповненою. Вона не є відображенням вигляду (3), отже, виникає питання чи можна матрицю C_1^{-1} взагалі реалізувати у вигляді послідовності відображень (3).

Іншими словами, чи можна матрицю C_1^{-1} представити у вигляді добутку скінченної кількості трьохдіагональних матриць.

УЗАГАЛЬНЕНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ФАКТОРИЗАЦІЮ

Розглянемо багатопроцесорну обчислювальну систему MIMD структури з локальною взаємодією (за класифікацією Фліна [3]). Інтерпретуємо її як орієнтований граф G . Вершинами графа є універсальні машини, а дугами — однонаправлені канали зв'язку. Якщо i -та машина може передати повідомлення машині з j -тим номером, то граф має дугу, яка починається в вершині з номером i та закінчується в вершині з номером j . Якщо машина має локальну пам'ять, то відповідна вершина має петлю. Назвемо граф G графом міжмашинних зв'язків обчислювальної системи.

Позначимо символом Θ_i множину номерів тих вершин графа, з яких в i -ту вершину веде дуга. Іншими словами, Θ_i — це множина номерів вершин зіркового графа заходу до вершини з номером i [5].

Нехай X_i — множина станів i -ї машини, $x_i \in X_i$, тоді вектор $\bar{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ описує стан системи. Позначимо символом D множину можливих станів обчислювальної системи ($D \subseteq \otimes_{i=1}^n X_i$). Розглянемо в функціонуванні системи моменти зміни станів. Природно припустити, що наступний стан машини з номером i є функцією від власного попереднього стану та стану машин, безпосередньо зв'язаних з нею, тобто машин з номерами з Θ_i . Тоді наступний стан системи буде вектором вигляду

$$\bar{y} = F(\bar{x}) = \{f_1(\bar{x}), \dots, f_i(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})\}, \quad (4)$$

де відображення F переводить множину D в себе, а його координатні функції $f_i(\bar{x})$ залежать лише від тих координат вектора станів, номери яких належать Θ_i .

Означення. Відображення вигляду (4) називається *погодженим зі структурою графа G* .

Функціонування системи можна представити як послідовність станів

$$\bar{x}(j) = F_j(F_{j-1}(F_{j-2}(\dots F_1(\bar{x}(0)) \dots))), \quad j \in N, \quad (5)$$

де всі F_i — відображення, погоджені зі структурою графа, $\bar{x}(i), \dots, \bar{x}(j)$ — вектори початкового та наступного за ним стану системи. Відображення $\Phi = F_j \circ F_{j-1} \circ \dots \circ F_0$, що переводить $\bar{x}(i)$ в $\bar{x}(j)$, необов'язково є погодженим зі структурою графа. Представлення відображення Φ у вигляді композицій відображень, що погоджені зі структурою графа, називається факторизацією. Доведення можливості факторизації відображення є предметом теорії розпаралелювання алгоритмів. Кількість відображень в факторизаційному ланцюзі називається його довжиною. Існує багато способів факторизації відображення. Найбільш ефективний той, що приводить до ланцюга найменшої довжини.

Визначення. *Найменшою довжиною факторизації відображення $\Phi : D \rightarrow D$ відображеннями, погодженими зі структурою графа, називається найменша можлива довжина факторизаційного ланцюга*

$$\min_{\sigma(F)} \{j \mid F = F_j \circ F_{j-1} \circ \dots \circ F_0\}, \quad (6)$$

де F — погоджене зі структурою графа відображення, $\sigma(F)$ — множина всіх можливих способів факторизації відображення Φ .

Найменша довжина факторизації конкретного відображення

Φ характеризує найвищу продуктивність, якої може досягти обчислювальна система при реалізації дії $\bar{y} = \Phi\bar{x}$. Розвинути обчислення погоджених зі структурою графа відображень можна надаючи $D \subseteq \otimes_{i=1}^n X_i$ властивості конкретних математичних структур. Далі розглядається важливий для чисельного аналізу випадок, коли множина станів для кожної машини

є множиною дійсних чисел, а множина станів обчислювальної системи — арифметичним векторним простором R^n .

Нехай G — деякий орієнтований граф, що містить n вершин, з петлею в кожній вершині (дуги та петлі однократні), B_G — його матриця суміжності. Вкажемо вигляд матриць лінійних операторів, що діють на R^n і погоджені зі структурою графа G . Для цього в множині квадратних матриць M_N введемо відношення порядку. Назвемо матрицю $A = \{a_{i,j} | i, j = \overline{1, n}\}$ передуючою матриці $B = \{b_{i,j} | i, j = \overline{1, n}\}$, якщо з того, що $b_{i,j} = 0$ випливає, що $a_{i,j} = 0$ (позначається $A \prec B$). Це означає, що на тих місцях, де у більшій матриці B стоять нулі, у меншій матриці A також повинні бути нулі. Інші елементи меншої матриці можуть бути будь-якими.

Лінійний оператор C є узгодженим зі структурою графа G тоді і тільки тоді, коли його матриця $C \prec B_G^T$, де B_G^T — транспонована матриця суміжності графа G .

Критерій факторизації було вказано в роботі [6].

Теорема (критерій факторизації). *Будь-який невідроджений лінійний оператор в R^n може бути представлений у вигляді композиції операторів, погоджених зі структурою графа G , тоді і тільки тоді, коли граф G сильно зв'язний з петлею в кожній вершині.*

Довжина факторизації оцінювалась числом $2dn(n-1)+1$, де $d \geq 1$ — діаметр графа.

Теорема. *Для будь-якої невідродженої матриці $A \in M_n$ з ненульовими елементами на головній діагоналі існує такий факторизаційний ланцюг для її оберненої матриці $A^{-1} = I_m \times C_{m-1} \times \dots \times C_1$, що всі $C_k \prec A$ та її довжина менша n .*

Доведення. Нехай A — квадратна матриця розміру $n \times n$. Розглянемо її характеристичний многочлен

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Якщо A — невідроджена матриця, то вільний член характеристичного многочлена $a_n = P_n(0) = \det(-A) \neq 0$ відмінний від нуля. По теоремі Гамільтона-Келлі характеристичний многочлен $P_n(\lambda)$ є тим, що анулює матрицю A , тобто

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n E = 0.$$

Представимо останній доданок цієї матричної рівності у вигляді $a_n E = a_n A^{-1} A$, тоді

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A = -a_n A^{-1} A.$$

Домножимо справа на A^{-1} і розділимо на $-a_n$, отримаємо

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} E).$$

Таким чином, підстановка матриці A в многочлен

$$B_{n-1}(\lambda) := \frac{1}{\lambda}(P_n(\lambda) - a_n)$$

дає з точністю до знаку матрицю, приєднану (взаємну) по відношенню до A . Доведення випливає з того, що $A + \lambda E \prec A$, та можливості розкладу $B_{n-1}(\lambda)$ на множники.

Результат є точним у тому сенсі, що існують такі матриці $A \in M_n$, для яких довжина факторизаційного ланцюга дорівнює $n - 1$ (наприклад, матриця C_1).

ВИСНОВОК

Нехай G — граф міжмашинних зв'язків обчислювальної системи. Матриця A — оборотна. Тоді на такій обчислювальній системі можливий розв'язок СЛАР $A\bar{x} = \bar{b}$ за не більш ніж $(n - 1)$ циклів "обмін-обчислення".

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский — М: Наука, 1972. — С. 556–557.
2. Paker Y. Application of microprocessor networks for the occlusion of diffusion equation / Y. Paker — Math. and Comput. In Simul. — 1977. — XIX, № 1 — P. 23–27.
3. Flynn M. Some computer organizations an their effectiveness / M. Flynn — IEEE Trans. Comput. — 1972. — P. 21.
4. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт — М: Мир, 1975. — С. 52–53.
5. Оре О. Теория графов / О. Оре — М: Наука, 1989. — С. 23.
6. Гончаренко Ю.В. О некоторых свойствах операторов, согласованных со структурой графа / Ю.В. Гончаренко — К: Вища школа, Исследование операций и АСУ, Выпуск 23, 1984. — С. 73–81.
7. Гончаренко В.Ю. Оценка длины факторизации квадратных матриц разреженными матрицами / В.Ю. Гончаренко // Воронежская международная научная конференция „Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования“, 12–17 сентября 2011: материалы/ Воронеж, Россия — 2011. — Т. 1. — С. 71–72.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 05.07.2012

УДК 519.6

ОРБИТРОН: УСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

С. С. Зуб

РЕЗЮМЕ. Основная цель этой статьи — привести конструктивное доказательство существования устойчивых орбитальных движений в системах тел, взаимодействующих только магнитными силами, то есть предъявить конкретную магнитную систему, для которой строго аналитически доказывается устойчивость. Рассматривается динамика малого магнитного тела — магнитного диполя, совершающего квазиорбитальное движение в поле двух неподвижных магнитных полюсов, расположенных на оси системы. Доказательство использует обобщенный метод энергии-момента для нахождения условий устойчивости исследуемых относительных равновесий. Впервые предложена модель магнитной системы, для которой удастся полностью аналитически получить условия устойчивости и прояснить их физический смысл. Подобраны физически реализуемые параметры системы, для которых проведено численное моделирование траекторий движения со случайным выбором начальных данных (метод Монте-Карло) в заданной окрестности.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости магнитных конфигураций имеет давнюю историю. В 1600 году вышел трактат У. Гильберта "О магните, магнитных телах и о большом магните Земле", в котором автор предположил, что магниты могут образовывать бесконтактные устойчивые системы.

С тех пор и по наше время в изучение этой проблемы внесли вклад ряд ученых, имена некоторых из них, например, Ньютона, Ирншоу, Гейзенберга, Капицы, Браунбека, Тамма, Гинзбурга хорошо известны всем.

Проблема устойчивости магнитного равновесия естественным образом распадается на задачи статического и динамического равновесия.

К сожалению, и в той и в другой области возник ряд предубеждений и заблуждений, не до конца проясненных и сегодня.

Что касается статического равновесия, то таким заблуждением стало некритическое перенесение вывода теоремы Ирншоу о неустойчивости систем из электростатики на область магнитных явлений. Отчасти это заблуждение было отброшено по результатам опытов Браунбека и Капицы-Аркадьева по магнитной левитации (т.е. в комбинации как магнитной силы, так и силы тяжести).

Что касается статического равновесия тел, взаимодействующих исключительно магнитными силами, то решению этого вопроса посвящены ряд работ и диссертация автора [1, 2].

Определенные предубеждения сложились и в проблеме устойчивости динамического равновесия магнитных систем.

На заре ядерной эры в годы бурного исследования атомного ядра магнитное взаимодействие рассматривалось, как возможный механизм удержания частиц в ядре. В работах Тамма и Гинзбурга (1941-1947) было показано, что в случае взаимодействия двух магнитных диполей орбитальное движение невозможно, т.к. имеет место падение частицы на центр как в классической, так и в квантовой механике [3]. Этот факт в физике получил название "проблемы $1/r^3$ " и вместе с теоремой Ирншоу, распространенной на случай магнитостатики, на многие годы сформировал мнение "о глобальной неустойчивости магнитных систем".

Но и после этих результатов интерес к магнитной модели материи проявляли такие известные физики как Ю. Швингер [4].

Новый всплеск интереса к проблеме динамического равновесия в магнитных системах вызвало создание Роем Хэрригеном левитрона в 1983 году. Интернет предоставил широкие возможности для популяризации этой необычной игрушки, а также других опытов с магнитными телами [5].

На этом фоне представляется незаслуженной малая известность теоретических и экспериментальных исследований В.В.Козореза, проведенных почти десятью годами раньше в 1974 году [6, 7].

В. В. Козорез пытался реализовать известную идею решения проблемы устойчивости магнитных систем, основанную на учете протяженности магнитной частицы, высказанную Гейзенбергом в 20-х годах прошлого века.

Ему удалось создать экспериментальную установку, в которой небольшой магнит совершал квазиорбитальное движение продолжительностью до 6 минут (эта установка, в отличие от левитрона не была запатентована).

Как уже отмечалось в нашей работе [8], его теоретические исследования носят скорее оценочный характер, т.к. в то время еще не был создан адекватный математический аппарат [9, 10, 11, 12] для исследования устойчивости систем типа [13].

В частности, полученное Козорезом условие устойчивости для системы, аналогичной рассмотренной ниже в данной статье, является только одним из трех достаточных условий устойчивости. Это условие дает просто точное выражение того хорошо известного факта, что на значительном удалении любая магнитная система выглядит как диполь.

Что касается эксперимента, то с философской точки зрения эксперимент как натуральный, так и численный в принципе не может доказать динамическую устойчивость, а может только дать определенные доводы в пользу последней [13, 15, 14].

Впервые строго аналитическое доказательство устойчивости орбитального движения в магнитных системах дано в работе [8]. Аналитические условия устойчивости для системы из двух "магнитных гантелей" имеют

довольно сложный вид и значения параметров из области устойчивости этой системы определялись численно.

Поэтому имеет смысл рассмотреть более простую магнитную систему, условно названную нами Орбитроном, для которой в данной работе не только доказывается аналитически существование устойчивых орбит, но и условия устойчивости имеют простой физический смысл.

В этой системе подвижное тело является небольшим постоянным магнитом с осевой симметрией. Его взаимодействие с магнитным полем описывается в приближении магнитного диполя, а движение подчиняется законам движения твердого тела.

Это отличается от модели, принятой в работе [14]. Мы не используем аналогию, возникающую из попыток классического описания такой квантово-механической величины, как спин частицы.

Уравнения движения магнитного диполя в заданном внешнем магнитном поле в рамках гамильтонового подхода были приведены в работе [15], а в работе [16] дан гамильтонов формализм для системы магнитно взаимодействующих осесимметричных тел (как с постоянными магнитными моментами, так и сверхпроводящих), что позволяет получить правильные уравнения для магнитного диполя как частный случай.

В математической модели, которую мы будем называть Орбитроном, на основе результатов работ [11, 17, 18] строго аналитически доказывается существование устойчивого орбитального движения небольшого намагниченного твердого тела, описываемого как магнитный диполь. Достаточные условия устойчивости принимают в этой модели простой вид, допускающий ясную физическую интерпретацию.

1. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим гамильтонову динамику "небольшого" твердого тела, для которого справедливо приближение магнитного диполя, в осесимметричном магнитном поле. Такое поле могут создавать цилиндрические магниты, соленоиды, токонесущие кольца и др. с осью симметрии вдоль оси z .

Вариант такого формализма может быть получена из формализма работы [16] путем предельного перехода к массе $m_1 \rightarrow \infty$. Т.о. мы считаем первое тело неподвижным и ориентированным по оси z . Тогда его динамические переменные исчезают из рассмотрения либо становятся параметрами модели. При этом группа симметрии задачи сужается до $S^1 = SO(2)$.

Для построения гамильтоновой динамики на основе пуассоновых структур необходимо указать пуассоново многообразие, а также кинетическую и потенциальную энергию системы.

Пуассоновым многообразием Орбитрона является прямое произведение евклидовых пространств

$$P = R_x^3 \times R_p^3 \times R_v^3 \times R_n^3 \quad (1)$$

вместе со скобками Пуассона для соответствующих образующих.

Образующими для Орбитрона будут: x_i - координаты диполя; p_i - его компоненты импульса (орбитального движения); n_i - компоненты собственного момента импульса диполя; ν_i - компоненты направляющего орта оси симметрии диполя.

Ненулевые скобки Пуассона между образующими на P имеют вид

$$\begin{cases} \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}; \\ \{n_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijk}\nu_k; \quad \{n_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk}n_k. \end{cases} \quad (2)$$

Переменные в (2) относятся к внешней инерциальной системе отсчета. Подобный подход используется в работах [19, 20]. В работе [20] отмечается, что полученные из (2) уравнения всегда обладают двумя первыми интегралами, являющимися функциями Казимира, а именно, нетрудно проверить, что они имеют следующий вид: $\vec{\nu}^2 = 1$ и $(\vec{\nu}, \vec{n}) = \text{const}$. Выражения (2) приводят к скобкам Пуассона динамических переменных общего вида:

$$\begin{aligned} \{f(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\nu}, \vec{n}), g(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\nu}, \vec{n})\} = & \\ & \langle \nabla^{(x)} f, \nabla^{(p)} g \rangle - \\ & \langle \nabla^{(p)} f, \nabla^{(x)} g \rangle + \\ & \langle \vec{\nu}, \nabla^{(n)} f \times \nabla^{(\nu)} g + \nabla^{(\nu)} f \times \nabla^{(n)} g \rangle + \\ & \langle \vec{n}, \nabla^{(n)} f \times \nabla^{(n)} g \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Справедливость тождества Якоби для данной структуры проверялась прямыми вычислениями.

Гамильтониан системы запишем в виде:

$$h = T + U(r, c', c'', c'''), \quad (4)$$

где

$$U = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}), \quad (5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r, c')\vec{e}_r + B_z(r, c')\vec{e}_z, \quad (6)$$

$$\begin{cases} r = |\vec{r}|; \\ \vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|; \\ c' = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = x_3/r; \\ c'' = \vec{\nu} \cdot \vec{e}_r; \\ c''' = \vec{e}_z \cdot \vec{\nu} = \nu_3. \end{cases} \quad (7)$$

Как обычно, кинетическая энергия подвижного тела (диполя) складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений [16, 8].

$$T(p^2, \vec{n}^2) = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{\alpha}{2}\vec{n}^2,$$

где M — масса диполя; $\alpha = \frac{1}{I_\perp}$ (как и ранее мы полагаем, что $I_1 = I_2 = I_\perp$, где I_1, I_2, I_3 — собственные моменты инерции тела).

Получаем систему уравнений движения для магнитного диполя в осесимметричном магнитном поле:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p}/M; \\ \dot{\vec{p}} = -\partial_r U \vec{e}_r - \frac{1}{r}(\partial_{c'} U P_{\perp}^e(\vec{e}_z) + \partial_{c''} U P_{\perp}^e(\vec{v})); \\ \dot{\vec{v}} = \alpha(\vec{n} \times \vec{v}); \\ \dot{\vec{n}} = -\vec{v} \times (\vec{e}_r \partial_{c''} + \vec{e}_z \partial_{c'''})U, \end{cases} \quad (8)$$

где $P_{\perp}^e$ — проектор на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{e}_r$, т.е. $P_{\perp}^e(\vec{e}_z) = \vec{e}_z - c' \vec{e}_r$ и $P_{\perp}^e(\vec{v}) = \vec{v} - c'' \vec{e}_r$.

Известны выражения для силы и момента сил, действующих на диполь во внешнем магнитном поле. Покажем, что второе и четвертое уравнение системы (8) могут быть представлены в классическом виде.

Что касается второго уравнения системы (8), то оно получено из стандартного для гамильтонового формализма соотношения

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \{p_i, U\} = \partial_r U \{p_i, r\} + \partial_{c'} U \{p_i, c'\} + \partial_{c''} U \{p_i, c''\}. \quad (9)$$

Для потенциальной энергии вида (5) получаем классическое выражение силы

$$\dot{\vec{p}} = \{\vec{p}, H\} = \{\vec{p}, U\} = -\nabla U = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Что касается четвертого уравнения системы (8), то для потенциальной энергии диполя, описываемой (5), в магнитном поле осесимметричного типа, описываемого (6), имеет место

$$(\vec{e}_r \partial_{c''} + \vec{e}_z \partial_{c'''})U = -\mu \vec{B}. \quad (10)$$

Тогда получаем последнее уравнение из (8) в привычном классическом виде

$$\dot{\vec{n}} = \mu \vec{v} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (11)$$

Теперь система уравнений (8) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p}/M; \\ \dot{\vec{p}} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}); \\ \dot{\vec{\mu}} = (\vec{n} \times \vec{\mu})/I_{\perp}; \\ \dot{\vec{n}} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \end{cases} \quad (12)$$

По поводу систем уравнений движения (8, 12) необходимо сделать несколько замечаний.

1. Как та, так и другая системы справедливы в приближении квазистационарного электромагнитного поля [21, 22]. Это приближение характеризуется тем, что в пределах системы пренебрегается конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений и током смещения, а магнитные поля рассчитываются по формулам магнитостатики.

2. Система уравнений (8) использует понятие магнитной потенциальной энергии, свойственное концепции дальнего действия в классической механике. Как только что отмечено, это допустимо в квазистационарном приближении. Выбранная форма потенциальной энергии, как в (4), описывает не

только диполи, но и достаточно широкий класс осесимметричных магнитных тел.

3. Система уравнений (12) соответствует концепции близкодействия в теории электромагнитного поля. При этом очевидно, что эти уравнения справедливы не только для осесимметричного магнитного поля, но и описывают движение диполя в *произвольном* внешнем магнитном поле.

4. Мы рассматриваем магнитный диполь, как малое намагниченное твердое тело с осевой симметрией, например, как в левитроне. Уравнение (1) работы [14] не может в этом случае заменить третье и четвертое уравнение системы (12). Это и отличает нашу математическую модель от той, что принята в работе [14].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРБИТРОНА

Не все осесимметричные магнитные поля могут создать возможность для устойчивого орбитального движения магнитного диполя. Например, поле магнитно-дипольного типа приводит к упомянутой во введении "проблеме $1/r^3$ ". Следовательно, имеет смысл воспользоваться гипотезой Гейзенберга о возможности устойчивых магнитных конфигураций с протяженными магнитными телами (см. также [7]).

Итак, предлагается следующая модель Орбитрона.

На оси z в точках $\pm h$ расположим два разноименных магнитных полюса. Эти полюса создают осесимметричное магнитное поле, в котором и движется магнитный диполь. Предполагается, что при определенных параметрах системы возможно устойчивое орбитальное движение.

Здесь следует дать пояснение. Уравнения магнитостатики не предполагают существование уединенных магнитных зарядов. Однако, поле, например, тонкого соленоида (то же и для тонкого цилиндрического магнита) *вне соленоида* с большой точностью будет совпадать с полем двух полюсов [23]. С другой стороны, поле *внутри соленоида* не только не совпадает с полем зарядов, но и противоположно по знаку, так что поток через замкнутую поверхность, охватывающую только один полюс, равен нулю, как это и требуют уравнения магнитостатики.

Предполагается, что диполь движется на достаточном удалении от полюсов магнита, являющегося источником поля, и модель двух магнитных зарядов описывает поле с высокой точностью.

Таким образом, магнитное поле в системе имеет вид суммы кулоновских полей двух зарядов:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \vec{B}_{\varepsilon}(\vec{r}), \quad \vec{B}_{\varepsilon} = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon \kappa \frac{\vec{r} - \varepsilon h \vec{e}_z}{|\vec{r} - \varepsilon h \vec{e}_z|^3}, \quad (13)$$

где каждое из полей $\vec{B}_{\varepsilon}$, а следовательно и суммарное поле может быть представлено в виде (6).

Тогда для потенциальной энергии диполя в магнитном поле получаем следующее выражение

$$U(r, c', c'', c''') = -\frac{\lambda_0}{4\pi} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon U_\varepsilon(r, c', c'', c'''), \quad \lambda_0 = \mu_0 \kappa \mu, \quad (14)$$

где

$$U_\varepsilon(r, c', c'', c''') = \frac{rc'' - \varepsilon hc'''}{R_\varepsilon(r, c')^3} \quad (15)$$

и

$$R_\varepsilon(r, c') = \left(r^2 - 2\varepsilon hrc' + h^2 \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Приведем первые производные функции U_ε :

$$\partial_r U_\varepsilon = \frac{c''}{R_\varepsilon(r, c')^3} - \frac{3(rc'' - \varepsilon hc''')(r - \varepsilon hc')}{R_\varepsilon(r, c')^5}, \quad (17)$$

$$\partial_{c'} U_\varepsilon = \frac{3(rc'' - \varepsilon hc''')\varepsilon hr}{R_\varepsilon(r, c')^5}, \quad (18)$$

$$\partial_{c''} U_\varepsilon = \frac{r}{R_\varepsilon(r, c')^3}, \quad (19)$$

$$\partial_{c'''} U_\varepsilon = -\frac{\varepsilon h}{R_\varepsilon(r, c')^3}. \quad (20)$$

3. ПРИМЕР УСТОЙЧИВОГО ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основная цель этой работы состоит в доказательстве существования устойчивого орбитального движения в системах тел, взаимодействующих исключительно магнитными силами. Примером такой системы является описанный в п.2 Орбитрон, а устойчивой орбитой будет круговая орбита в плоскости $z = 0$.

3.1 ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Особую роль в вопросах устойчивости орбитальных движений гамильтоновых систем играют так называемые *относительные равновесия* [18, 10, 11, 12], т.е. такие траектории динамики системы, которые одновременно являются однопараметрическими подгруппами группы инвариантности системы.

Как уже отмечалось, группой инвариантности Орбитрона является S^1 . Каждая однопараметрическая подгруппа этой группы будет характеризоваться своей угловой скоростью вращения $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Скорость изменения любой физической величины $\vec{v}$ нашей задачи вдоль орбиты данной подгруппы будет задаваться формулой $\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Поэтому, для относительного равновесия должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{r}); \\ \dot{\vec{p}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{p}); \\ \dot{\vec{v}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{v}); \\ \dot{\vec{n}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{n}). \end{cases} \quad (21)$$

Покажем, что существует динамическая орбита, для которой выполняются эти соотношения. Рассмотрим орбиту, пространственно расположенную в плоскости $z = 0$. Предположим также, что $\vec{v} \parallel \vec{e}_z$ и $\vec{n} \parallel \vec{e}_z$. Тогда вдоль всей этой траектории $c' = c'' = 0$, $c''' = \pm 1$ и из (14), (18-20) следует, что $\partial_{c'} U = \partial_{c''} U = \partial_{c'''} U = 0$.

Третье и четвертое уравнение системы (8) при этом выполняются тождественно, а первое и второе сводятся к уравнению второго порядка вида

$$M\ddot{\vec{r}} + \left(\frac{\partial_r U}{r} \right)_{|r=r_0} \vec{r} = 0. \quad (22)$$

При условии $(\partial_r U)_{|r=r_0} > 0$ уравнение (22) имеет решение, соответствующее движению по окружности радиуса r_0 с частотой, которая определяется соотношением

$$\left(\frac{\partial_r U}{r} \right)_{|r=r_0} = \omega^2 M. \quad (23)$$

Таким образом, можно считать доказанным, что приведенная орбита, действительно, является относительным равновесием.

Подходящим инструментом для исследования устойчивости относительных равновесий на пуассоновых многообразиях является теорема 4.8. статьи [11]. Важным преимуществом теоретико-групповых методов представляется то, что исследование функционального пространства траекторий заменяется на исследование конечномерного векторного пространства вариаций динамических переменных в *фиксированной* точке траектории. При этом схема исследования устойчивости во многом аналогична изучению условного экстремума функции методом неопределенных множителей Лагранжа.

3.2 ВЫБОР ОПОРНОЙ ТОЧКИ

Зададим такую точку на орбите относительного равновесия

$$z_e = \begin{cases} \vec{x}_0 = r_0 \vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_2; \\ \vec{v} = -\vec{e}_3; \\ \vec{n} = n_0 \vec{e}_3. \end{cases} \quad (24)$$

Заметим, что знак механического момента n_0 мы не фиксируем, он может быть *любым*. Что же касается знака p_0 , то для положительной угловой скорости он будет положительным.

Покажем, что в опорной точке выполняются соотношения

$$\partial_{c'} U|_{z_e} = 0; \quad \partial_{c''} U|_{z_e} = 0. \quad (25)$$

Т.к. в опорной точке

$$\begin{cases} c' = 0; \\ c'' = 0; \\ c''' = -1, \end{cases} \quad (26)$$

то

$$R_\varepsilon(r, c')|_{z_e} = (r^2 + h^2)^{1/2} \quad (27)$$

Из выражений для производных потенциальной энергии (18-19)

$$(\partial_{c'} U_\varepsilon)|_{z_e} = \frac{3h^2 r}{(r^2 + h^2)^{5/2}}, \quad (\partial_{c''} U_\varepsilon)|_{z_e} = \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (28)$$

замечаем, что оба этих выражения не зависят от ε , а, значит, в сумме по ε (с множителем ε) они дадут 0.

3.3 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА

В качестве интегралов движения мы возьмем

$$\begin{cases} j_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + n_3; \\ C_1 = \frac{\lambda_1}{2} \vec{\nu}^2; \\ C_2 = \lambda_2(\vec{\nu}, \vec{n}), \end{cases} \quad (29)$$

где 1-я строка представляет сохраняющуюся 3-ю компоненту полного момента тела, а 2 остальные являются функциями Казмира системы.

Выпишем соответствующие дифференциалы в точке z_e

$$\begin{cases} (dj_3)|_{z_e} = p_0 dx_1 + r_0 dp_2 + dn_3; \\ (dC_1)|_{z_e} = -\lambda_1 d\nu_3; \\ (dC_2)|_{z_e} = \lambda_2(n_0 d\nu_3 - dn_3). \end{cases} \quad (30)$$

Целевая функция (присоединенный гамильтониан) имеет вид

$$\tilde{H} = T + U - \omega j_3 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2. \quad (31)$$

Необходимым условием устойчивости в теореме 4.8. статьи [11] является равенство нулю дифференциала целевой функции в опорной точке, т.е. $d\tilde{H}|_{z_e} = 0$.

Для дифференциала потенциальной энергии имеем

$$dU|_{z_e} = \partial_r U dx_1 + \partial_{c''} U d\nu_3. \quad (32)$$

Для дифференциала кинетической энергии имеем

$$dT|_{z_e} = \frac{p_0}{M} dp_2 + \alpha n_0 dn_3. \quad (33)$$

Собирая дифференциалы целевой функции, получаем

$$\begin{aligned} d\tilde{H}|_{z_e} &= (\partial_r U|_{z_e} - \omega p_0) dx^1 + \\ &+ \left(\frac{p_0}{M} - \omega r_0 \right) dp_2 + \\ &+ (\partial_{c'''} U|_{z_e} - \lambda_1 + \lambda_2 n_0) d\nu^3 + \\ &+ (\alpha n_0 - \omega - \lambda_2) dn_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Приравнивая $d\tilde{H}|_{z_e}$ нулю выводим следующее выражения для множителей Лагранжа

$$\begin{cases} p_0/M = \omega r_0; \\ \omega p_0 = \partial_r U|_{z_e} = \frac{3Kr_0}{R^2}; \\ \lambda_2 = \alpha n_0 - \omega; \\ \lambda_1 = \partial_{c'''} U|_{z_e} + \lambda_2 n_0 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega), \end{cases} \quad (35)$$

где

$$K = \partial_{c'''} U|_{z_e} = \frac{\lambda_0 h}{2\pi R^3}. \quad (36)$$

1-е из уравнений (35) — это обычная связь между линейной и угловой скоростью при круговом орбитальном движении.

2-е из уравнений (35) — равенство центробежной (слева) и центростремительной (справа) сил.

Из этих двух выражений получаем соотношение для угловой скорости, а именно

$$M\omega^2 = \frac{1}{r_0} \partial_r U|_{z_e} = \frac{3K}{R^2}. \quad (37)$$

3.4 ДОПУСТИМЫЕ ВАРИАЦИИ

Для применения достаточного условия устойчивости по теореме 4.8 статьи [11] необходимо выделить линейное подпространство допустимых вариаций.

Рассмотрим вариации динамических переменных, аннулирующих дифференциалы (30).

Из 2-й строки (30) следует $\delta\nu^3 = 0$, тогда из 3-й строки следует $\delta n^3 = 0$.

Т.о. получаем

$$\begin{cases} \delta\nu^3 = 0; \\ \delta n_3 = 0; \\ \delta p_2 = -\frac{p_0}{r_0} \delta x_1. \end{cases} \quad (38)$$

Отсюда следует, что как независимые могут рассматриваться вариации вида

$$\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3; \quad \delta p_1, \delta p_3; \quad \delta\nu^1, \delta\nu^2; \quad \delta n_1, \delta n_2, \quad (39)$$

при этом, мы еще должны исключить из этого подпространства направление, касательное к орбите.

Из формулы (21) следует, что это направление в точке z_e определяется так

$$\begin{cases} \delta \vec{x} = r_0 \vec{e}_2; \\ \delta \vec{p} = -p_0 \vec{e}_1; \\ \delta \vec{\nu} = 0; \\ \delta \vec{n} = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Чтобы исключить вариацию вида (40), наложим на вариации еще одно дополнительное условие, и тогда получим связи

$$\begin{cases} \delta \nu^3 = 0; \\ \delta n_3 = 0; \\ \delta p_1 = \frac{p_0}{r_0} \delta x_2; \\ \delta p_2 = -\frac{p_0}{r_0} \delta x_1, \end{cases} \quad (41)$$

а независимым набором вариаций будет

$$\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3; \quad \delta p_3; \quad \delta \nu^1, \delta \nu^2; \quad \delta n_1, \delta n_2. \quad (42)$$

3.5 ОСНОВНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Достаточное условие минимума состоит в положительной определенности квадратичной формы вида $d^2 \tilde{H}|_{z_e}(\delta z, \delta z)$, где вектор вариации δz должен быть выражен через независимые вариации (42) с учетом связей (41). Полученную квадратичную форму от независимых вариаций обозначим через Q .

Вычисление гессиана целевой функции (присоединенного гамильтониана) и основной квадратичной формы от независимых вариаций выполнены в Maple.

Для лучшего структурирования выражений неопределенные множители Лагранжа на первом этапе не раскрываются.

После незначительной перестановки столбцов (и соответствующих строк с тем же номером) матрица основной квадратичной формы приобретает вид

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{33} & Q_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{35} & Q_{55} & Q_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{57} & Q_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & Q_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{68} & Q_{88} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Выпишем ненулевые элементы матрицы квадратичной формы (построчно). Подставляя выражение для $M\omega^2$ из (37) в Q_{11} , Q_{22} , получим

$$Q_{11} = 3 \left(\frac{h^2 - 4r_0^2}{R^2} \frac{K}{R^2} + M\omega^2 \right) = \frac{3K}{R^2} \frac{4h^2 - r_0^2}{R^2}, \quad (44)$$

$$Q_{22} = 3 \left(\frac{K}{R^2} + M\omega^2 \right) = \frac{12K}{R^2}, \quad (45)$$

$$Q_{44} = \frac{1}{M}, \quad (46)$$

$$Q_{33} = \frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2} \frac{3K}{R^2}, \quad Q_{35} = -\frac{3Kr_0}{R^2}, \quad (47)$$

$$Q_{55} = \lambda_1, \quad Q_{57} = \lambda_2, \quad (48)$$

$$Q_{77} = \alpha, \quad (49)$$

$$Q_{66} = \lambda_1 = Q_{55}, \quad Q_{68} = \lambda_2 = Q_{57}, \quad (50)$$

$$Q_{88} = \alpha = Q_{77}. \quad (51)$$

3.6. Условия положительной определенности основной квадратичной формы

Для положительной определенности матрицы Q необходимо, прежде всего, чтобы все диагональные элементы матрицы были положительными.

Заведомо положительными являются Q_{22} , Q_{44} , Q_{77} , Q_{88} . Оставшиеся условия выглядят так

$$\begin{cases} 0 < Q_{11} = \frac{3K}{R^2} \frac{4h^2 - r_0^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{33} = \frac{3K}{R^2} \frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega). \end{cases} \quad (52)$$

Первые два условия сводятся к чисто геометрическим ограничениям

$$(Q_{11} > 0) \& (Q_{33} > 0) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{r_0}{h} \right) \& \left(\frac{r_0}{h} < 2 \right). \quad (53)$$

Эти условия положительной определенности матрицы Q теперь следует дополнить условиями положительной определенности двух подматриц 3×3 и 2×2 , а именно

$$\begin{bmatrix} Q_{33} & Q_{35} & 0 \\ Q_{35} & Q_{55} & Q_{57} \\ 0 & Q_{57} & Q_{77} \end{bmatrix} \quad (54)$$

и

$$\begin{bmatrix} Q_{66} & Q_{68} \\ Q_{68} & Q_{88} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

С учетом выше сказанного для матрицы (55) достаточно проверить условие положительности ее детерминанта $Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2$. Таким образом к условиям (53) добавляется следующее условие

$$0 < Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2 = \alpha K + \omega(\alpha n_0 - \omega). \quad (56)$$

Исследуем теперь условия положительной определенности матрицы (54). 1-е условие $Q_{33} > 0$ мы уже рассмотрели. Т.о. дополнительные условия положительной определенности матрицы (54) сводятся к положительности двух детерминантов

$$0 < Q_{33}Q_{5,5} - Q_{35}^2 \quad (57)$$

и

$$0 < Q_{33}Q_{55}Q_{77} - Q_{33}Q_{57}^2 - Q_{77}Q_{35}^2. \quad (58)$$

Условие (58) может быть также записано в виде

$$Q_{77}(Q_{33}Q_{55} - Q_{35}^2) > Q_{33}Q_{57}^2 \quad (59)$$

и, так как $Q_{77} > 0$, то (58) переходит в

$$Q_{33}Q_{55} - Q_{35}^2 > \frac{Q_{33}}{Q_{77}}Q_{57}^2, \quad (60)$$

которое заменяет условие (57), т.к. перекрывает его.

Итак, условие (57) является излишним и надо изучать только условие (58). Напомним, что

$$\begin{cases} Q_{33} = \frac{3K}{R^2} \frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2}; \\ Q_{35} = -3 \frac{Kr_0}{R^2}; \\ Q_{55} = K + n_0(\alpha n_0 - \omega) = Q_{66}; \\ Q_{57} = \alpha n_0 - \omega = Q_{68}; \\ Q_{77} = \alpha = Q_{88}. \end{cases} \quad (61)$$

Запишем теперь (58) в форме

$$Q_{55}Q_{77} - Q_{57}^2 > \frac{Q_{77}Q_{35}^2}{Q_{33}}, \quad (62)$$

т.к. следует полагать, что $Q_{33} > 0$.

Учитывая (61), условие (62) эквивалентно

$$Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2 > \frac{Q_{77}Q_{35}^2}{Q_{33}} > 0. \quad (63)$$

Т.о., условие (56) является следствием условия (58) и $Q_{33} > 0$ из (52). Это означает, что условие (56) может быть опущено.

Имеем следующий сокращенный набор условий положительной определенности матрицы Q

$$\begin{cases} 0 < Q_{11} = \frac{3K}{R^2} \frac{4h^2 - r_0^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{33} = \frac{3K}{R^2} \frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega); \\ 0 < Q_{33}Q_{55}Q_{77} - Q_{33}Q_{57}^2 - Q_{77}Q_{35}^2. \end{cases} \quad (64)$$

Исследуем последнее из условий (64) в форме

$$\begin{aligned} 0 &< Q_{33}(Q_{55}Q_{77} - Q_{57}^2) - Q_{77}Q_{35}^2 = \\ &= Q_{33}(Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2) - Q_{77}Q_{35}^2 = \\ &= \frac{3K}{R^4} [(3r_0^2 - 2h^2)\omega(\alpha n_0 - \omega) - 2\alpha K h^2]. \end{aligned}$$

Это условие эквивалентно

$$\frac{\omega}{\alpha}(\alpha n_0 - \omega) > \frac{K}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1}. \quad (65)$$

В частности, т.к. $Q_{33} > 0$, имеем $\alpha n_0 - \omega > 0$, а это значит, что условия $Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 > 0$ заведомо выполняется и может быть опущено.

Итак, выполнение условий

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{r_0}{h} < 2; \\ \frac{\omega}{\alpha}(\alpha n_0 - \omega) > \frac{K}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1} \end{cases} \quad (66)$$

обеспечивает положительную определенность формы Q .

4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УСЛОВИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В предыдущем разделе были найдены такие условия на параметры системы, которые обеспечивают положительную определенность основной квадратичной формы (66).

1-е условие в (66) является чисто геометрическим, определяя допустимый диапазон для радиуса орбиты, представляющей относительное равновесие (24). 2-е условие является динамическим и определяет нижнюю границу для собственного момента импульса тела. В частности, это означает, что тело должно достаточно быстро вращаться. Поэтому есть смысл разрешить это неравенство относительно n_0 .

Используя соотношения (37), получим

$$n_0 > \frac{\omega}{\alpha} + \frac{1}{3} \frac{1 + (\frac{h}{r_0})^2}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1} (\omega M r_0^2). \quad (67)$$

Величина ω/α соответствует собственному моменту, который имело бы тело, если бы вращалось с угловой скоростью ω перпендикулярно своей оси симметрии.

Величина $\omega(M r_0^2)$ является ни чем иным, как орбитальным моментом импульса $(L_z)|_{z_e}$.

Условию (67) можно придать такой физический смысл: *собственный момент вращения тела должен быть порядка орбитального или больше него*.

Действительно, множитель перед $\omega(M r_0^2)$ является геометрическим фактором, который при $r_0/h = 1,0$ равен $\sim 1,33$, а при $r_0/h = 1,5$ равен $\sim 0,2$.

В этих оценках 1-м слагаемым в правой части выражения (67) можно пренебречь.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В математическом плане полученные выше условия устойчивости допускают широкий диапазон значений параметров задачи, однако не все они могут быть реализованы физически. В физическом плане значение параметров ограничивается свойствами имеющихся материалов.

Кроме того, очевидно, на практике трудно реализовать высокие скорости вращений, особенно это касается собственной угловой скорости вращения подвижного магнитного тела (диполя).

Поэтому представляется необходимым указать такие значения параметров, которые могут быть реализованы в эксперименте. Для магнитов,

изготовленных из $Nd - Fe - B$, имеем следующие физические характеристики: $\rho = 7,4 \cdot 10^3 (\text{кг/м}^3)$ – плотность и $B_r = 0,25 (\text{Тл})$ – остаточная индукция. Тогда нетрудно получить магнитный ”заряд” полюса $\kappa = 17,6 (\text{А} \cdot \text{м})$. Расстояние между полюсами $L = 2h = 0,1 (\text{м})$.

Подвижный магнит выберем в форме цилиндра (диска) с диаметром $d = 0,014 (\text{м})$ и высотой $l = 0,006 (\text{м})$. Тогда магнитный момент диска $\mu = 0,18 (\text{А} \cdot \text{м}^2)$.

В результате для орбиты радиусом $r_0 = 1,5h = 0,075 (\text{м})$ получим угловую скорость орбитального движения $\omega = 1,54 (\text{рад/с})$, при этом минимальная угловая скорость собственного вращения диска в этом случае составит $\Omega = 72,8 (\text{рад/с})$. Такие значения угловых скоростей представляются вполне разумными.

С использованием указанных значений параметров Орбитрона было проведено численное моделирование орбитального движения при отклонениях начальных значений динамических переменных от значений, соответствующих относительному равновесию, в пределах 1%. Методом Монте-Карло (т.е. случайно выбирая начальные значения в данной окрестности) было совершено 1000 бросаний, которые продемонстрировали устойчивость орбитального движения. Более подробно это будет освещено в следующих частях данной работы.

Выводы

Была предложена новая математическая модель магнитной системы, для которой впервые существование устойчивых орбитальных движений может быть доказано полностью аналитически.

Показано, что обобщенный метод энергии–момента обеспечивает необходимый математический аппарат для исследования устойчивости орбитальных движений в рассмотренной модели.

Дана физически прозрачная интерпретация полученных условий устойчивости и подобраны физически реализуемые параметры исследуемой системы.

Проведены независимые (методом прямого численного моделирования) исследования траекторий в окрестности найденных относительных равновесий. Для генерации начальных условий испытываемых траекторий использовался метод Монте-Карло.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zub S. S. Contact-free Static Stable Equilibrium in the Ground and Space Systems / S. S. Zub // in Proc. of the Int. Conf. on MagLev Sys. and Linear Drivers / Lausanne, Switzerland. — 2002.
2. Зуб С. С. Вплив топології надпровідних елементів на стійкість рівноваги вільного тіла: автореф. канд. тех. наук / С. С. Зуб. — К., 2005. — 15 с.
3. Гинзбург В. Л. Теория мезона и ядерные силы / В. Л. Гинзбург // — Усп. физ. наук. — 1947. — Т. 31, вып. 2. — С. 174–209.

4. Schwinger J. A Magnetic Model of Matter / J. Schwinger // Science/ — 1969. — Vol. 165, № 3895.
5. Harrigan R. M. Levitation device / R. M. Harrigan // U. S. Patent 382245, May 3, 1983.
6. Козорез В. В. О задаче двух магнитов / В. В. Козорез // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1974. — № 3. — С. 29–34.
7. Козорез В. В. Динамика системы магнитно взаимодействующих свободных тел / В. В. Козорез — К. : Наук. думка, 1981. — 140 с.
8. Zub S. S. Research into Orbital Motion Stability in System of Two Magnetically Interacting Bodies / S. S. Zub // Int.-Arch., — 2012. — Vol. 1, iss. 2. — P. 10.
9. Marsden J. E. Introduction to Mechanics and Symmetry / J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Cambridge University Press, London, 1998.
10. Marsden J. E. Lectures on Mechanics / J. E. Marsden // Cambridge University Press, London, 1992.
11. Ortega J-P. Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry / J-P. Ortega, T. S. Ratiu // J. Geom. Phys. — 1999. — 32. — P. 160.
12. Marsden J. E. Hamiltonian reduction by stages / J. E. Marsden, G. Misiolek, J-P. Ortega, M. Perlmutter, T. S. Ratiu // Springer-Verlag, New York, 2007.
13. Zub S. S. Hamiltonian formalism for magnetic interaction of free bodies / S. S. Zub // J.Num.Appl.Math., — 2010. — Vol. 102., issues 3. —P. 49.
14. Simon M. D. Spin stabilized magnetic levitation / M. D. Simon, L. O. Heflinger, S. L. Ridgway // Am.J.Phys., — 1997. — 65, — P. 286.
15. Dullin H. R. Stability of Levitrons / H. R. Dullin, R. W. Easton // Physica D. — 1999. — 126. — P. 1.
16. Zub S. S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies / S. S. Zub // PoS(ACAT08)116, — 2009. — P. 5.
17. Simo J. C. Stability of relative equilibria II: Three dimensional elasticity / J. C. Simo, D. Lewis, J. E. Marsden // Arch. Rational Mech. Anal., 115, — P. 61 — 100.
18. Patrick G. W. Relative equilibria in Hamiltonian systems: the dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space / G. W. Patrick // J.Geom.Phys., — 1992. — 9. — P. 111.
19. Bogoyavlenskii O. I. Integrable Euler Equations on Lie Algebras Arising in Problems of Mathematical Physics / O. I. Bogoyavlenskii // Mathematics of the USSR-Izvestiya, — 1985. — Vol. 25, issues 2. — P. 207.
20. Borisov A. V. Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // Izd. UdSU, Izhevsk, 1999.
21. Tamm I. E. Fundamentals of the theory of electricity / I. E. Tamm // Mir, 1979.
22. Landau L. D. Electrodynamics of continous media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz // Pergamon, Oxford, 1960.
23. Smythe W. R. Static and Dynamic Electricity / W. R. Smythe // McGraw-Hill, New York, 1939.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601,
УКРАИНА.

Поступила 29.08.2012

УДК 519.87

SINGLE-OBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY COEFFICIENTS AND RESOURCES

E. V. IVOKHIN, ALMODARS BARRAQ SUBHI KAML

RESUME. In this paper fuzzy single-objective linear programming problem in which both technological coefficient and resources are fuzzy with linear membership function was studied and solved. The problem was solved using the approach proposed by Gasimov R. N. and Yenilmez K. Further a real case study of a manufacturing plant and the implementation of the proposed technique is presented.

INTRODUCTION

Fuzzy multi-objective linear programming (FMOLPP) problem has its many applications in the different fields of real world. Several researchers suggested different method to solve those problems. Generally, in a single-objective linear programming problem (FSOLPP), coefficients (of objective and constraint functions) as well as constraint goals are assumed to be fixed in value. But there are many practical situations where this assumptions are not valid. These coefficients as well as constraint goals may not be well defined due to lack of information of data and/or uncertain market situations. For this reasons, the different coefficients and constraint goals may be characterized by fuzzy numbers.

The idea of fuzzy set was first proposed by Zadeh [5], as a mean of handling uncertainty that is due to imprecision rather than to randomness. After that Bellman and Zadeh [5] proposed that a fuzzy decision might be defined as the fuzzy set, defined by the intersection of fuzzy objective and constraint goals. From this view point, Tanaka and Asai [2], Zimmermann [3] introduced fuzzy linear programming problem in fuzzy environment Gasimov and Yenilmez [6] among others, considered with all fuzzy parameters. Tong considered the single objective mathematical programming problem with fuzzy constraints. After defuzzification he solved the so-obtained crisp problem by fuzzy decisive set method proposed by Sakawa and Yano[4]. Gasimov and Yenilmez considered fuzzy linear programming problem with less than type constraints. In their paper coefficients of constraints were taken as fuzzy numbers. They solved it by fuzzy decisive set method. Lai-Hawng [7] considered FMOLPP with all parameters, having a triangular possibility distribution. They used an auxiliary model and it was solved by multi-objective linear programming methods. Chanas [1] proposed a fuzzy programming in multi-objective linear programming and it was solved by parametric approach. Zimmermann [3] proposed a fuzzy multi-criteria decision making set, defined as the intersection of all fuzzy goals and constraints.

1. LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY TECHNOLOGICAL COEFFICIENTS

We consider a linear programming problem with fuzzy technological coefficients

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

subject to $\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$.

Assumption 1. $\widetilde{a}_{ij}$ is a fuzzy number with the following linear membership function Gasimov and Yenilmez [6]:

$$\mu_{\widetilde{a}_{ij}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < a_{ij} \\ (a_{ij} + d_{ij} - x)/d_{ij}, & \text{if } a_{ij} \leq x < a_{ij} + d_{ij} \\ 0, & \text{if } x \geq a_{ij} + d_{ij} \end{cases}$$

where $x \in \mathbb{R}$ and $d_{ij} > 0$ for all $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. For defuzzification of this problem, we must calculate the lower and upper bounds of the optimal values Z_l and Z_u by solving the standard linear programming problems

$$Z_1 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2)$$

subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$, and

$$Z_2 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

subject to $\sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$.

The objective function takes values between Z_1 and Z_2 while technological coefficients vary between a_{ij} and $a_{ij} + d_{ij}$.

Let $Z_l = \min(Z_1, Z_2)$ and $Z_u = \max(Z_1, Z_2)$, then Z_l and Z_u are called the lower and upper bounds of the optimal values, respectively.

Assumption 2. The linear crisp problems (2) and (3) have finite optimal values. In this case the fuzzy set of optimal values, denoted G , which is a subset of $\mathbb{R}^n$; is defined as Gasimov and Yenilmez [6]:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sum_{j=1}^n c_j x_j < Z_l \\ (\sum_{j=1}^n c_j x_j - Z_l)/(Z_u - Z_l), & \text{if } Z_l \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j < Z_u \\ 1, & \text{if } \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq Z_u \end{cases} \quad (4)$$

The fuzzy set of the i -th constraint, denoted F_i , which is a subset of R^m , is defined by

$$\mu_{F_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } b_i < \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^n d_{ij}x_j}, & \text{if } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i < \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij})x_j \\ 1, & \text{if } b_i \geq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij})x_j \end{cases}, \quad (5)$$

$1 \leq i \leq m$.

By using the definition of the fuzzy decision proposed by Bellman and Zadeh [5] (see also Lai and Hwang [7]), the problem (1) becomes to the following optimization problem

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \mu_G(x) \geq \lambda, \mu_{F_i}(x) \geq \lambda, \quad 1 \leq i \leq m, \\ x \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

By using (4) and (5), the problem (6) can be written as

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \lambda(Z_u - Z_l) - \sum_{j=1}^n c_j x_j + Z_l \leq 0, \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}x_j) - b_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (7)$$

where $x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Notice that, the constraints in problem (7) containing the cross product terms λx_j , $1 \leq j \leq n$, are not convex. Therefore the solution of this problem requires the special approach adopted for solving general nonconvex optimization problems.

2. LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY TECHNOLOGICAL COEFFICIENTS AND FUZZY RIGHT-HAND-SIDE NUMBERS

In this section we consider a linear programming problem with fuzzy technological coefficients and fuzzy right-hand-side numbers

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} x_j \leq \widetilde{b}_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, and at least one $x_j > 0$.

Assumption 3. $\widetilde{a}_{ij}$ and $\widetilde{b}_i$ are fuzzy numbers with the following linear membership functions:

$$\mu_{a_{ij}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < a_{ij} \\ (a_{ij} + d_{ij} - x)/d_{ij}, & \text{if } a_{ij} \leq x < a_{ij} + d_{ij} \\ 0, & \text{if } x \geq a_{ij} + d_{ij} \end{cases}$$

and

$$\mu_{b_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < b_i \\ (b_i + p_i - x)/p_i, & \text{if } b_i \leq x < b_i + p_i \\ 0, & \text{if } x \geq b_i + p_i \end{cases},$$

$$1 \leq i \leq m.$$

We first calculate the lower and upper bounds of the optimal values. The optimal values Z_l and Z_u can be defined by solving the following standard linear programming problems, for which we assume that all they have the finite optimal values,

$$Z_1 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0,$$

$$Z_2 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0,$$

$$Z_3 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i, \quad 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0,$$

$$Z_4 = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j \leq b_i + p_i, \quad 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0.$$

Let $Z_l = \min(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ and $Z_u = \max(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$. The objective function takes values between Z_l and Z_u while technological coefficients take values between a_{ij} and $a_{ij} + d_{ij}$ and the right-hand-side numbers take values between b_i and $b_i + p_i$.

Then, the fuzzy set of optimal values denoted as early G, which is a subset of R^n is defined by

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sum_{j=1}^n c_j x_j < Z_l \\ (\sum_{j=1}^n c_j x_j - Z_l) / (Z_u - Z_l) & \text{if } Z_l \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j < Z_u \\ 1, & \text{if } \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq Z_u \end{cases} \quad (13)$$

The fuzzy set of the i -th constraint denoted F_i , which is a subset of R^n is defined by

$$\mu_{F_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } b_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j + p_i}, & \text{if } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i < \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j + p_i \\ 1, & \text{if } b_i \geq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j + p_i \end{cases} \quad (14)$$

$1 \leq i \leq m.$

Then, by using the method of defuzzification for the problem (1), the problem (8) is reduced to the following crisp problem:

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda(Z_u - Z_l) - \sum_{j=1}^n c_j x_j + Z_l \leq 0 \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}) x_j + \lambda p_i - b_i \leq 0, 1 \leq i \leq m, \quad x_j \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Notice that, the problem (15) is also a nonconvex programming problem, similar to the problem (7).

3. THE ALGORITHM OF THE FUZZY DECISIVE SET METHOD

This method is based on the idea that, for a fixed value of λ , the problems (7) and (15) are linear programming problems. Obtaining the optimal solution λ^* to the problems (7) and (15) is equivalent to determining the maximum value of λ so that the feasible set is nonempty.

The algorithm of this method for the problem (7) is presented below. The algorithm for the problem (15) is similar.

Step 1. Set $\lambda = 1$ and test whether a feasible set satisfying the constraints of the problem (7) exists or not using phase one of the simplex method. If a feasible set exists, set $\lambda = 1$. Otherwise, set $\lambda^L = 0$ and $\lambda^R = 1$ and go to the next step.

Step 2. For the value of $\lambda = (\lambda^L + \lambda^R)/2$, update the value of λ^L and λ^R using the bisection method as follows :

$\lambda^L = \lambda$ if feasible set is nonempty for λ ,

$\lambda^R = \lambda$ if feasible set is empty for λ .

Consequently, for each λ , test whether a feasible set of the problem (7) exists or not using phase one of the Simplex method and determine the maximum value λ^* satisfying the constraints of the problem (7).

4. A NUMERICAL EXAMPLE PRODUCES AND TRANSPORTS PROBLEM

The operations of a concrete manufacturing plant, which produces and transports concrete to building sites, have been analyzed. Fresh concrete is produced at a central concrete plant and transported by seven transit mixers over the distance ranging 1500–3000 m (depending on the location of the construction site) to the three construction sites.

Concrete pumps and interior vibrators are used for delivering, placing and consolidating the concrete at each construction site. Table 1 illustrates the manufacturing capacities of the plant, operational capacity of the concrete mixer, interior vibrator, pumps and manpower requirement at the three construction sites. A quick analysis will reveal the complexity of the variables and constraints of this concrete production plant and delivery system. The plant manager’s task will be to optimize the profit by utilizing the maximum plant capacity while meeting the three-construction site’s concrete and other resource requirement through a feasible schedule.

Table 1. Concrete plant capacity and construction site’s resource demands

	Site A	Site B	Site C	Capacity	Tolerance (resources)	Tolerance (coefficients)		
Transit mixers	1 m ³ /h	1 m ³ /h	1 m ³ /h	15	5	1	1	1
Worker requirement	7	5	3	80	40	4	3	1
Concrete pumps	3 m ³ /h	4.4 m ³ /h	10 m ³ /h	100	30	1	2	4
(Tolerance)	47 m ³	60 m ³	72 m ³	-	-			

4.1. OBJECTIVE FORMULATION

Success of any decision model will directly depend on the formulation of the objective function taking into account all the influential factors. We modeled the final objective function taking into account factor profit expressed as \$/m³.

Profit: The expected profit as related to the volume of concrete to be manufactured is modeled as the first objective and is shown in Table 2.

Table 2. Modeling profit as an objective

	Site A	Site B	Site C
Expected profit (AU\$/m ³)	10	11	15

4.2. VARIABLES THAT OPTIMIZE THE OBJECTIVE FUNCTION

After knowing the objective function the next task is to determine the variables that optimizes the objective function. In our problem it is to find the optimal value of unknowns $x_j, j = 1, 2, 3$, that represent quantities of concrete which have to be delivered to Site A, B and C respectively and corresponding optimal values of the objective function Z.

According to problem requirements and available data (see Table 1 and Table 2), the model formulated as

$$\max Z = 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \quad (16)$$

subject to

$$\begin{aligned} \tilde{1}x_1 + \tilde{1}x_2 + \tilde{1}x_3 &\leq \tilde{15}, \\ \tilde{7}x_1 + \tilde{5}x_2 + \tilde{3}x_3 &\leq \tilde{80}, \\ \tilde{3}x_1 + \tilde{4.4}x_2 + \tilde{10}x_3 &\leq \tilde{100}, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3,$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 4.4 & 10 \end{pmatrix}, (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, (a_{ij} + d_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 11 & 8 & 4 \\ 4 & 6.4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(b_i) = \begin{pmatrix} 15 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}, (p_i) = \begin{pmatrix} 5 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}, (b_i + p_i) = \begin{pmatrix} 20 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3.$$

We shall apply our algorithm for this fuzzy task (16), calculate the lower and upper bounds of the optimal values. The bounds of the optimal values Z_l^* and Z_u^* are obtained by solving the standard linear programming problems

$$Z_1 = \max Z = 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \quad (17)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 80 \\ 3x_1 + 4.4x_2 + 10x_3 &\leq 100 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, \\ Z_2 = \max Z &= 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \end{aligned} \quad (18)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 120 \\ 3x_1 + 4.4x_2 + 10x_3 &\leq 130 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, \\ Z_3 = \max Z &= 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \end{aligned} \quad (19)$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 15 \\ 11x_1 + 8x_2 + 4x_3 &\leq 80 \\ 4x_1 + 6.4x_2 + 14x_3 &\leq 100 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, \\ Z_4 = \max Z &= 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \end{aligned} \quad (20)$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ 11x_1 + 8x_2 + 4x_3 &\leq 120 \\ 4x_1 + 6.4x_2 + 14x_3 &\leq 130 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Optimal value of these problems are $Z=(189.3, 250, 110, 145)$, and therefore $Z_l^* = 110$, $Z_u^* = 250$.

By using these optimal values, the problem (16) can be reduced by the following non-linear programming problem:

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & (10x_1 + 11x_2 + 15x_3 - 110)/(250 - 110) \geq \lambda, \\ & (15 - (x_1 + x_2 + x_3))/(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5) \geq \lambda, \\ & (80 - (7x_1 + 5x_2 + 3x_3))/(4x_1 + 3x_2 + x_3 + 40) \geq \lambda, \\ & (100 - (3x_1 + 4.4x_2 + 10x_3))/(x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 30) \geq \lambda, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

That is,

$$\begin{aligned} & \max \lambda \tag{21} \\ & 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \geq 140\lambda + 110, \\ & (2\lambda + 1)x_1 + (2\lambda + 1)x_2 + (2\lambda + 1)x_3 \geq 15 - 5\lambda, \\ & (4\lambda + 7)x_1 + (3\lambda + 5)x_2 + (\lambda + 3)x_3 \geq 80 - 40\lambda, \\ & (\lambda + 3)x_1 + (2\lambda + 4.4)x_2 + (4\lambda + 10)x_3 \geq 100 - 30\lambda, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Let us solve the problem (21) by using fuzzy decisive set method. For $\lambda=1$, the problem can be written as

$$\begin{aligned} & 10x_1 + 11x_2 + 15x_3 \geq 250, \\ & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ & 11x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 40, \\ & 4x_1 + 6.4x_2 + 14x_3 \leq 70, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Since the feasible set is empty, by taking $\lambda^L=0$ and $\lambda^R = 1$, we applied the algorithm that explained in subsection 3 and obtained:

$$\begin{aligned} & \lambda = 0.2188; \lambda = 0.2031; \lambda = 0.2109; \lambda = 0.2070; \lambda = 0.2089; \\ & \lambda = 0.2080; \lambda = 0.2085; \lambda = 0.2083; \lambda = 0.2081; \lambda = 0.2081. \end{aligned}$$

Consequently, we obtain the optimal value of λ at the fifteenth iteration by using the fuzzy decisive set method. The optimal solution is $x_1^*=1.67$, $x_2^*=0$, $x_3^*=80.12$, $Z^* = 139.1$ and $\lambda^* = 0.2081$.

CONCLUSION

In this paper, fuzzy single-objective linear programming problem in which both the resources and the technological coefficients are fuzzy with linear membership function was studied the problem was solved by fuzzy decisive set method. This procedure may be very helpful for any fuzzy single-criteria decision making problem.

REFERENCES

1. D. Chanas. Fuzzy programming in multi-objective linear programming-parametric approach // Fuzzy Set and System. — 1989. — 29. — P. 303–313.
2. H. Tanaka, K. Asai. Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. — 1984. — 13. — P. 1–10.
3. H.J. Zimmermann. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy Sets and System. — 1978. — 1 — P. 45–55.
4. M. Sakawa, H. Yano. Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters // Cybernetics Systems. 1985. — 16. — P. 377–394.
5. R.E. Bellman, L.A. Zadeh. Decision making in a fuzzy environment // Management Science. 1970. — 17. — P. 141–164.
6. R.N. Gasimov, K. Yenilmez. Solving fuzzy linear programming with linear membership functions // Turk. J. Math.— 2002. — 26 — P. 375–396.
7. Y.J. Lai , C.L. Hwang. Fuzzy Mathematical Programming. Lecture notes in Economics and Mathematical systems // Springer-Verlag, 1992.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601,
УКРАЇНА.

Надійшла 10.05.2012

УДК 519.85

УПАКОВКА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КОНТЕЙНЕР С УЧЕТОМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ

А. А. КОВАЛЕНКО, А. В. ПАНКРАТОВ, Т. Е. РОМАНОВА,
П. И. СТЕЦЮК

РЕЗЮМЕ. Рассматривается задача упаковки параллельных круговых цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса с учетом ограничений, связанных с механическими характеристиками поведения системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость). Строится математическая модель на основе метода ϕ -функций Стояна, предлагаются методы решения. Приводятся тестовые примеры.

Ключевые слова: упаковка кругов, ограничения механического поведения системы, математическая модель, ϕ -функции, приближенные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи размещения относятся к классу NP-сложных. 3D-задачи размещения имеют широкий спектр применения в нанотехнологиях, робототехнике, энергетике, машиностроении и т.д. Особый интерес представляют 3D-задачи упаковки, возникающие при проектировании кораблей, экранированных машин, платформ с буровой установкой, космических кораблей и спутников. Для решения задач используются, как правило, эвристические методы.

В основе предлагаемых алгоритмов: теоретический анализ, тестовая задача с оптимальными решениями, инженерное применение. Однако алгоритм теоретического анализа является достаточно трудоемким, алгоритм инженерного применения — еще более сложный для ряда случаев, поэтому чаще всего проводят оценку при помощи тестовой задачи. В статье [1] представлены семь тестовых задач с известными оптимальными решениями на основе оптимизационных задач компоновки упрощенного модуля спутника, предназначенных для оценки алгоритмов решения трехмерных задач упаковки с ограничениями поведения. В одной из последних монографий [2] рассматриваются результаты избранных инновационных исследований, которые охватывают широкий спектр проблем, возникающих в космической технике. В монографии обсуждаются классические и современные проблемы ракетно-космической техники — в том числе размещение грузов и оборудования.

В данной работе предлагается математическая модель, использующая метод ϕ -функций Стояна [3] и метод решения 3D-задачи оптимальной упаковки цилиндров в цилиндрическом контейнере с учетом ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω – контейнер (контейнер спутника) (прямой круговой цилиндр переменного радиуса R и высоты $2H$), A_i , $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ – множество цилиндров радиуса $r_i < R$ и высоты $2h_i$, $h_i \leq H$. Далее объекты A_i помещаются внутрь контейнера Ω . Объекты – твердые однородные тела, массы которых определяются как $m_i = \rho \cdot V_i$, где V_i – объем, а ρ – плотность объекта A_i . Контейнер Ω с упакованными в нем объектами назовем (спутниковой) системой Ω^A .

Задача. Упаковать объекты A_i , $i = 1, 2, \dots, N$, в контейнер Ω минимального радиуса с учетом ограничений, связанных с механическими характеристиками поведения системы Ω^A (равновесием, моментами инерции, устойчивостью).

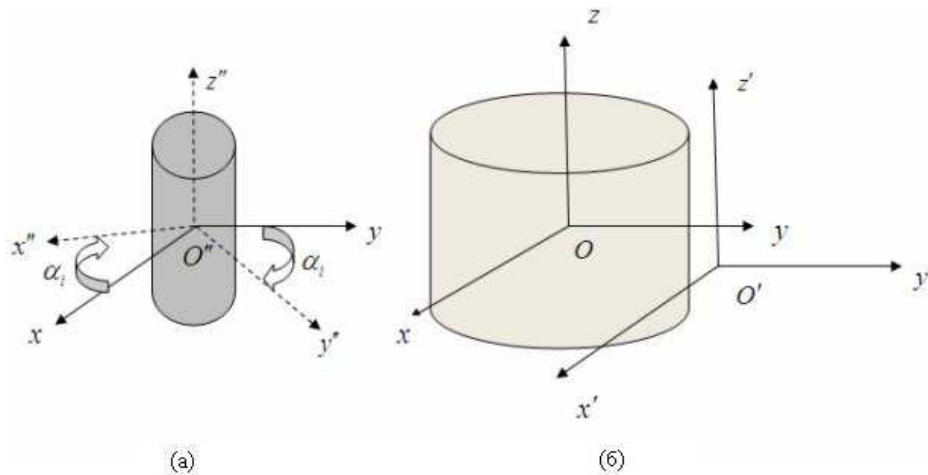


Рис. 1. Системы координат (а) объекта A_i , (б) контейнера Ω и системы Ω^A

Пусть: $Oxyz$ – неподвижная система координат, где O совпадает с центром масс контейнера Ω , z – ось симметрии контейнера Ω ;

$O'x'y'z'$ – система координат системы Ω^A , где O' совпадает с центром масс системы Ω^A , z' – главная ось системы Ω^A ;

$O''x''y''z''$ – собственная система координат объекта A_i , где O'' совпадает с центром масс объекта A_i , z'' – продольная ось симметрии объекта, параллельная оси z ;

$u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – параметры размещения (вектор трансляции) объекта A_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, относительно $Oxyz$;

(x_e, y_e, z_e) – заданный центр масс системы Ω^A , совпадающий с центром симметрии O контейнера Ω . Не теряя общности, полагаем $(x_e, y_e, z_e) = (0, 0, 0)$.

Таким образом, вектор u переменных включает: радиус R (радиус основания контейнера Ω) и параметры размещения u_i , т.е. $u = (R, u_1, u_2, \dots, u_N)$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Центр масс (x_c, y_c, z_c) множества $\{A_i, i \in I_N\}$ определяется следующими соотношениями:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (1)$$

Моменты инерции $J_x(u), J_y(u), J_z(u)$ системы Ω^A относительно осей Ox, Oy, Oz неподвижной системы координат определяются как

$$\begin{aligned} J_x(u) &= \sum_{i=1}^N (J''_{xi} \cos^2 \alpha_i + J''_{yi} \sin^2 \alpha_i) + \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) - (y_c^2 + z_c^2) \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_y(u) &= \sum_{i=1}^N (J''_{yi} \cos^2 \alpha_i + J''_{xi} \sin^2 \alpha_i) + \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) - (x_c^2 + z_c^2) \sum_{i=1}^N m_i, \quad (2) \\ J_z(u) &= \sum_{i=1}^N J''_{zi} + \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - (x_c^2 + y_c^2) \sum_{i=1}^N m_i, \end{aligned}$$

где α_i – угол поворота объекта A_i вокруг своей центральной оси $O''z''$, J''_{xi} , J''_{yi} , J''_{zi} – моменты инерции объекта A_i относительно осей $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$ системы координат $O''x''y''z''$. Поскольку A_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ – объекты цилиндрической формы, то $J''_{xi}, J''_{yi}, J''_{zi}$ описываются так:

$$J''_{xi} = J''_{yi} = \frac{1}{12} m_i (3r_i^2 + 4h_i^2), \quad J''_{zi} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \quad (3)$$

а соотношения (2) примут вид

$$\begin{aligned} J_x(u) &= \sum_{i=1}^N J''_{xi} + \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) - (y_c^2 + z_c^2) \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_y(u) &= \sum_{i=1}^N J''_{yi} + \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) - (x_c^2 + z_c^2) \sum_{i=1}^N m_i, \quad (4) \\ J_z(u) &= \sum_{i=1}^N J''_{zi} + \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - (x_c^2 + y_c^2) \sum_{i=1}^N m_i. \end{aligned}$$

Углы отклонения $\varphi_x(u), \varphi_y(u), \varphi_z(u)$ главной оси инерции системы Ω^A от осей Ox, Oy, Oz неподвижной системы координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_x(u) &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2J_{xy}(u)}{J_y(u) - J_x(u)} \right), \\ \varphi_y(u) &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2J_{yz}(u)}{J_z(u) - J_y(u)} \right), \\ \varphi_z(u) &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2J_{xz}(u)}{J_z(u) - J_x(u)} \right),\end{aligned}\tag{5}$$

где $J_{xy}(u), J_{yz}(u), J_{xz}(u)$ — центробежные моменты инерции системы Ω^A относительно системы координат $Oxyz$, которые определяются так:

$$\begin{aligned}J_{xy}(u) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (J''_{xi} + m_i(y_i^2 + z_i^2) - J''_{yi} - m_i(x_i^2 + z_i^2)) \sin 2\alpha_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_{yz}(u) &= \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i - y_c z_c \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_{xz}(u) &= \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - x_c z_c \sum_{i=1}^N m_i.\end{aligned}\tag{6}$$

Поскольку $J''_{xi} = J''_{yi}$, то соотношения (6) примут вид

$$\begin{aligned}J_{xy}(u) &= \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_{yz}(u) &= \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i - y_c z_c \sum_{i=1}^N m_i, \\ J_{xz}(u) &= \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - x_c z_c \sum_{i=1}^N m_i.\end{aligned}\tag{7}$$

Математическую модель поставленной задачи можно представить в виде

$$F(u^*) = \min_{u \in W \subset R^{3N+1}} R, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_N, R),\tag{8}$$

$$W = \{u \in R^{3N+1} : \Upsilon(u) \geq 0, G_1(u) \geq 0, G_2(u) \geq 0, \\ G_3(u) \geq 0, R \geq r_i, i = 1, \dots, N\},\tag{9}$$

где $\Upsilon(u) \geq 0$ — ограничение на размещение объектов $A_i, i = 1, \dots, N$, в контейнере Ω :

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) &= \min\{\Phi_{ij}^{CC}, i > j = 1, \dots, N-1, \Phi_i^{\Omega^*C}, i = 1, \dots, N\}, \\ \Phi_{ij}^{CC} &— \text{phi-функция цилиндров } A_i \text{ и } A_j,\end{aligned}$$

$$\Phi_{ij}^{CC} = \max\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2, z - (h_i + h_j), -z - (h_i + h_j)\}, i > j = 1, \dots, N - 1, \quad (10)$$

$\Phi_i^{\Omega^*C}$ – phi-функция цилиндра A_i и объекта Ω^* , $\Omega^* = R^3 \setminus \text{int}\Omega$,

$$\Phi_i^{\Omega^*C} = \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2, -z + (H - h_i), z + (H - h_i)\}, i = 1, \dots, N; \quad (11)$$

$G_1(u) \geq 0$ – ограничение устойчивости,

$$G_1(u) = \min\{g_1(u), g_2(u), g_3(u)\},$$

$$g_1(u) = \min\{-(x_e - x_c) + \Delta x_c, (x_e - x_c) + \Delta x_c\},$$

$$g_2(u) = \min\{-(y_e - y_c) + \Delta y_c, (y_e - y_c) + \Delta y_c\}, \quad (12)$$

$$g_3(u) = \min\{-(z_e - z_c) + \Delta z_c, (z_e - z_c) + \Delta z_c\},$$

где $(\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c)$ – допустимые отклонения от центра масс системы Ω^A ;

$G_2(u) \geq 0$ – ограничение моментов инерции,

$$G_2(u) = \min\{g_4(u), g_5(u), g_6(u)\},$$

$$g_4(u) = \min\{-J_x(u) + \Delta J_x, J_x(u) + \Delta J_x\},$$

$$g_5(u) = \min\{-J_y(u) + \Delta J_y, J_y(u) + \Delta J_y\}, \quad (13)$$

$$g_6(u) = \min\{-J_z(u) + \Delta J_z, J_z(u) + \Delta J_z\},$$

где $(\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z)$ – допустимые отклонения от моментов инерции системы Ω^A ;

$G_3(u) \geq 0$ – ограничение равновесия,

$$G_3(u) = \min\{g_7(u), g_8(u), g_9(u)\},$$

$$g_7(u) = \min\{-\varphi_x(u) + \Delta\varphi_x, \varphi_x(u) + \Delta\varphi_x\},$$

$$g_8(u) = \min\{-\varphi_y(u) + \Delta\varphi_y, \varphi_y(u) + \Delta\varphi_y\}, \quad (14)$$

$$g_9(u) = \min\{-\varphi_z(u) + \Delta\varphi_z, \varphi_z(u) + \Delta\varphi_z\},$$

где $(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)$ – допустимые погрешности угла наклона главной оси системы Ω^A от осей координат Ox, Oy, Oz .

Ограничения $G_1(u) \geq 0$, $G_2(u) \geq 0$, $G_3(u) \geq 0$ называются ограничениями поведения системы Ω^A [2].

Если положить $H = h_i$ (такая задача рассматривается в статье [1]), то соотношения (10) и (11) можно упростить следующим образом:

$$\Phi_{ij}^{CC} = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2, i > j = 1, \dots, N - 1, \quad (15)$$

$$\Phi_i^{C^*C} = -x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2, i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где Φ_{ij}^{CC} – phi-функция C_i и C_j (C_i и C_j – основания цилиндров A_i и A_j); $\Phi_i^{C^*C}$ – phi-функция C_i и C^* (C – основание контейнера Ω).

Тогда задача (8)–(9) является задачей нелинейного программирования с линейной функцией цели. Область допустимых решений описывается системой неравенств вида

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (r_1 + r_2)^2 \geq 0, \\
 \dots \\
 (x_N - x_{N-1})^2 + (y_N - y_{N-1})^2 - (r_N + r_{N-1})^2 \geq 0,
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } \frac{1}{2} N(N-1)} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 -x_1^2 - y_1^2 + (R - r_1)^2 \geq 0, \\
 \dots \\
 -x_N^2 - y_N^2 + (R - r_N)^2 \geq 0,
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } N} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 (x_e - x_c) + \Delta x_c \geq 0, \\
 (y_e - y_c) + \Delta y_c \geq 0, \\
 (z_e - z_c) + \Delta z_c \geq 0, \\
 -(x_e - x_c) + \Delta x_c \geq 0, \\
 -(y_e - y_c) + \Delta y_c \geq 0, \\
 -(z_e - z_c) + \Delta z_c \geq 0,
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } 6} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 J_x(u) + \Delta J_x \geq 0, \\
 J_y(u) + \Delta J_y \geq 0, \\
 J_z(u) + \Delta J_z \geq 0, \\
 -J_x(u) + \Delta J_x \geq 0, \\
 -J_y(u) + \Delta J_y \geq 0, \\
 -J_z(u) + \Delta J_z \geq 0,
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } 6} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 -\varphi_x(u) + \Delta \varphi_x \geq 0, \\
 \varphi_x(u) + \Delta \varphi_x \geq 0, \\
 -\varphi_y(u) + \Delta \varphi_y \geq 0, \\
 \varphi_y(u) + \Delta \varphi_y \geq 0, \\
 -\varphi_z(u) + \Delta \varphi_z \geq 0, \\
 \varphi_z(u) + \Delta \varphi_z \geq 0.
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } 6}
 \end{array}$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Метод 1. С помощью негладких штрафов задача (8)–(9) сводится к задаче минимизации негладкой функции вида

$$\begin{aligned}
 f(u) = & R + P_1 \sum_{k=1}^N \max\{0, -\Phi_k\} + P_2 \sum_{k=n+1}^{n+18} \max\{0, -g_k\} + \\
 & + P_3 \max\{0, -R + \max_{i=1, \dots, N} r_i\},
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $n = \frac{N(N+1)}{2}$, P_k — штрафные коэффициенты, $k = 1, 2, 3$, Φ_k — функции вида (15), (16), $k = 1, 2, \dots, N$, g_k — функции вида (12), (13), (14),

$k = n+1, \dots, n+18$. Для заданного набора стартовых точек осуществляется поиск локальных минимумов функции $f(u)$. При решении задачи $\min f(u)$ используется эффективный алгоритм минимизации негладких выпуклых функций — $r(\alpha)$ -алгоритм Шора [4]. Величина шага адаптивно настраивается с помощью ряда параметров [5]. Наилучший из локальных минимумов функции (17), для которого штрафная часть в функции $f(u)$ равна нулю, принимается за решение задачи (8)–(9). Стартовые точки генерируются случайным образом.

Метод 2. Для решения задач нелинейной оптимизации используется ПРОРТ [6]. Стартовые точки генерируются случайным образом.

Рассмотрим реализации математических моделей (8)–(9) и (17) на тестовых примерах.

Пусть $N = 5$, $H = 1$, $h_i = 1$, $i = 1, \dots, 5$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$, $r_3 = 0.3$, $r_4 = 0.5$, $r_5 = 0.8$, $m_1 = 0.0785$, $m_2 = 0.314$, $m_3 = 0.7065$, $m_4 = 1.9625$, $m_5 = 5.024$ (при $\rho = 2, 5$), $(x_e, y_e, z_e) = (0, 0, 0)$, $(\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c) = (0.0001, 0.0001, 0.0001)$, $(\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z) = (5, 5, 5)$.

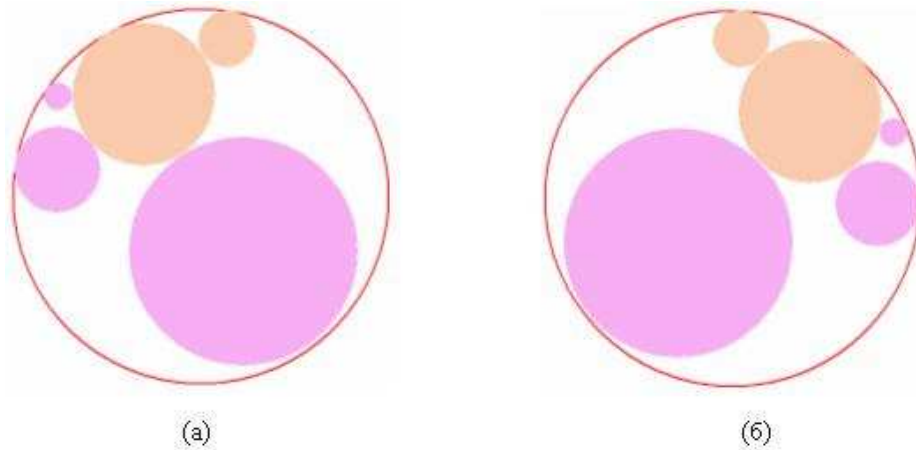


РИС. 2. Размещение объектов с учетом ограничения равновесия $G_1(u) \geq 0$, соответствующее точке локального минимума u^* : (а) методом 1, (б) методом 2

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия, найденное r -алгоритмом Шора (рис. 2 а):

$u^* = (1.316129, -0.996358, 0.697289, 0.000000, 0.187239, 1.100245, 0.000000, -0.998733, 0.187146, 0.000000, -0.396235, 0.713487, 0.000000, 0.299239, -0.384839, 0.000000)$, $F(u^*) = R^* = 1.316129$.

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия, найденное программой ПРОРТ (рис. 2 б):

$u^* = (1.316108, 1.124725, 0.462506, 0.000000, 0.058511, 1.114573, 0.000000, 1.015461, -0.036266, 0.000000, 0.542956, 0.609287, 0.000000, -0.376283, -0.309951, 0.000000)$, $F(u^*) = R^* = 1.316108$.

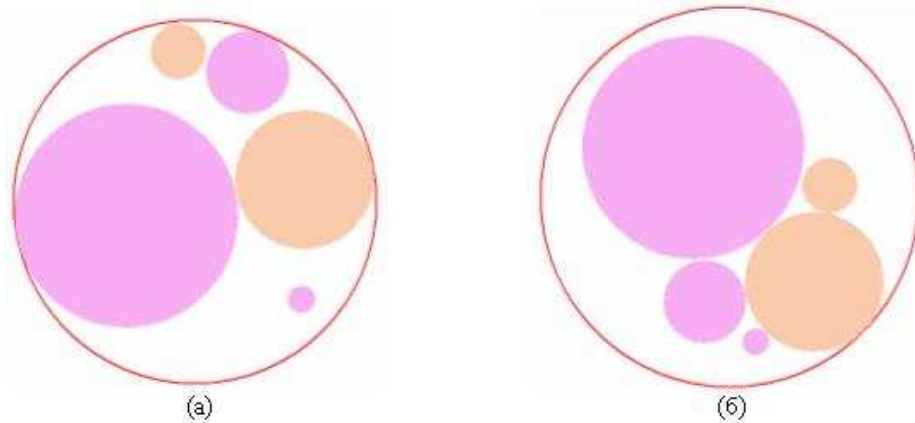


РИС. 3. Размещение объектов, соответствующее точке локального минимума u^* : (а) без учета ограничений поведения, (б) с учетом ограничений поведения

Заметим, что оптимальное решение задачи (8)–(9) без учета ограничений поведения получено в точке $u^* = (1.3000000, 0.7626976, -0.6994965, 0.000000, -0.1182920, 1.0736409, 0.000000, 0.3772566, 0.9238060, 0.000000, 0.7842687, 0.1578690, 0.000000, -0.4901677, -0.0986691, 0.000000)$, $F(u^*) = R^* = 1.3000000$ (рис.3а), точка u^* является точкой глобального минимума.

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия и моментов инерции получено в точке $u^* = (1.362501, 0.187796, -1.036294, 0.000000, 0.721202, 0.081223, 0.000000, -0.177798, -0.749687, 0.000000, 0.609890, -0.609871, 0.000000, -0.261406, 0.354932, 0.000000)$, $F(u^*) = R^* = 1.362501$ (рис. 3 б).

Работа выполнена при поддержке Научно Технологического Центра в Украине и НАН Украины (проект № 5710).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fasano G., Pinter J.D., eds. Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. – Springer. – New York. – 2012. – 404 p.
2. Chao Che, Yi-shou Wang, Hong-fei Teng. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. – Optimization Online. – 2008. – 11 p. http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/09/2093.html.
3. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – V. 43, № 5. – P. 535–553.
4. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С. 4–22.

5. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций// Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.
6. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. – Math. Programming. – 2006. – V. 106, № 1. – P. 25–57.

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ им. А.Н.Подгорного НАН Украины, ул. Дм.Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина.

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В.М.Глушкова НАН Украины, пр. Академика Глушкова, 40, Киев-187, 03680, Украина.

Поступила 09.06.2012

УДК 517.91

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Г. РУТКАС, М. С. ФИЛИПКОВСКАЯ

РЕЗЮМЕ. Доказана теорема существования и единственности глобального решения полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с регулярным характеристическим пучком матриц индекса один в конечномерном вещественном пространстве. Нелинейная правая часть может не удовлетворять глобальному условию Липшица. Используется метод продолжения решений через дифференциальные неравенства с функциями Ляпунова и Ла-Салля, а также доказанный в работе вариант глобальной теоремы о неявной функции.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциально-алгебраические уравнения, не разрешенные относительно производных (см. ниже (4)), возникают в теории электрических цепей, радиотехнике и электронике, математической экономике, робототехнике, дескрипторных системах управления, экологии [1, 2, 3, 4, 5]. Особенностью этих уравнений, порождающей проблему для исследователя, является следующее: в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ существует многообразие размерности $n+1$, точки (t, x) которого недоступны для траекторий $(t, x(t))$ вырожденной динамической системы $\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t, x)$, для которой $\det A = 0$. Все возможные траектории этой системы в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ принадлежат некоторому эволюционному многообразию точек (t, x) размерности меньшей, чем $n+1$, которое будет описано в п. 3.

Вторая проблема — получение глобальных теорем существования и единственности решений нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений, которые необходимы для долгосрочного прогнозирования динамики и управления соответствующими реальными системами. Известные в настоящее время глобальные теоремы основаны на предположениях, эквивалентных глобальным условиям Липшица [5]. Однако реальные нелинейности в радиотехнике, электронике, математической экономике не являются глобально липшицевыми.

В связи с этим в п. 3 мы доказываем глобальную теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения путем продолжения локальных решений с использованием дифференциальных неравенств типа Ляпунова и Ла-Салля.

1. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Предварительно рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$, векторная форма которой имеет вид:

$$\dot{x} = F(t, x), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (t_0 \geq 0), \quad (2)$$

где функция $F(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial F}{\partial x}$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на некотором интервале $[t_0, t_1)$, удовлетворяющая системе (1) и начальному условию (2).

Ниже используются следующие классические понятия и факты (см. [6, 7]).

Решение $x(t)$ задачи (1), (2) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех $t \geq t_0$, то есть решение продолжаемо на весь луч $t_0 \leq t < \infty$ как решение задачи (1), (2). Если решение $x(t)$ имеет конечное время определения, то есть не продолжаемо на весь луч $t_0 \leq t < \infty$, то существует такое $c > t_0$, что $\lim_{t \rightarrow c-0} \|x(t)\| = \infty$.

Скалярнозначная функция $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если выполнены условия: функция $W(x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в $\mathbb{R}^n$; $W(0) = 0$; $W(x) > 0$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Скалярнозначная функция $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если выполнены условия: функция $V(t, x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$; $V(t, 0) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$; существует такая положительно определенная функция $W(x)$, что $W(x) \leq V(t, x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$.

Производная функции V в силу системы (1) определяется как

$$\dot{V}\Big|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + (grad V, F).$$

Для произвольного $T > 0$ введем срезку $F_T(t, x) = \begin{cases} F(t, x), & 0 \leq t \leq T, \\ F(T, x), & t > T \end{cases}$ функции $F(t, x)$ из (1), систему

$$\dot{x} = F_T(t, x) \quad (3)$$

и производную функции V в силу системы (3)

$$\dot{V}\Big|_{(3)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (grad V, F_T).$$

Заметим, что гладкость функции $F_T(t, x)$ такая же, как и у функции $F(t, x)$.

Через Ω^c будем обозначать дополнение произвольного множества Ω в $\mathbb{R}^n$. Следующая лемма из [8] обобщает соответствующие результаты из [7].

Лемма 1. Пусть существуют функция $K(t, v) \in C([0, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ и положительно определенная функция $V(t, x) \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такие, что:

1) $V(t, x) \rightarrow +\infty, \|x\| \rightarrow \infty$ равномерно по t на каждом конечном интервале $[a, b)$ ($b > a \geq 0$);

2) для любого $T > 0$ найдется ограниченное множество Ω_T в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, такое, что

$$\dot{V}|_{(3)} \leq K(t, V(t, x)), \quad x \in \Omega_T^c, \quad t \geq 0;$$

3) дифференциальное неравенство $\dot{v} \leq K(t, v), t \geq 0$ не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения.

Тогда каждое решение $x(t)$ системы (1) неограниченно продолжаемо.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения в вещественном n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t, x), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (t_0 \geq 0), \quad (5)$$

где $x, x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, A, B — квадратные вещественные матрицы, вообще говоря, необратимые. Если $\det A = 0$, то уравнение (4) называется *вырожденным*.

Определение 1. Функция $x(t)$ называется *решением задачи* (4), (5) на некотором интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, если $x(t) \in C((t_0 - \delta, t_0 + \delta), \mathbb{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta), \mathbb{R}^n)$, $x(t_0) = x^0$, $x(t)$ удовлетворяет (4) на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Влияние левой (линейной) части уравнения (4) естественно учитывать с помощью свойств характеристического пучка матриц $\lambda A + B$. Здесь рассматривается регулярный пучок, когда $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$.

Поскольку точки спектра пучка могут быть комплексными, то резольвенту $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ следует рассматривать в комплексной плоскости. Стандартной комплексификацией пространства $\mathbb{R}^n$ является пространство $\mathbb{C}^n$ с элементами $(x, y) = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (см. [9]). Ассоциируя исходные матрицы A, B с линейными операторами A, B в $\mathbb{R}^n$, можно ввести комплексные расширения [9, с. 482–486] — операторы $\tilde{A}, \tilde{B}$ в $\mathbb{C}^n$. Соответствующий комплексный матричный пучок $\lambda \tilde{A} + \tilde{B}$ является регулярным (вместе с исходным вещественным пучком), поэтому его спектр ограничен, т. е. существует константа $C_2 > 0$ такая, что все собственные числа λ пучка $\lambda \tilde{A} + \tilde{B}$ находятся внутри круга $|\lambda| < C_2$ в комплексной плоскости.

Наше основное ограничение на матрицы A, B для (4) состоит в том, что резольвента $\tilde{R}(\lambda) = (\lambda \tilde{A} + \tilde{B})^{-1}$ ограничена для больших λ :

$$\exists C_1 > 0 \exists C_2 > 0 : \left\| (\lambda \tilde{A} + \tilde{B})^{-1} \right\| \leq C_1, \quad |\lambda| \geq C_2. \quad (6)$$

В теории линейных дифференциально-алгебраических уравнений принято говорить, что пучок $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$, а также исходный пучок $\lambda A + B$ со свойством резольвенты (6), является пучком индекса 1.

В дальнейшем мы будем использовать введенные в статье [10] спектральные проекторы пучка $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_2} \tilde{R}(\lambda) d\lambda \tilde{A}, \quad P_2 = E - P_1, \quad (7)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_2} \tilde{A} \tilde{R}(\lambda) d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1, \quad (8)$$

где E — единичная матрица, причем эти проекторы являются вещественными операторами (см. [5, с. 50–51, 181]). Мы сохраняем обозначения P_1, P_2, Q_1, Q_2 для соответствующих индуцированных операторов в $\mathbb{R}^n$ и их матричных представлений в координатном базисе $\bar{e} = \{e_i\}_{i=1}^n$ (у вектора e_i i -ая компонента равна 1, а все остальные — нулевые) пространства $\mathbb{R}^n$.

Две пары взаимно дополнительных проекторов P_1, P_2 и Q_1, Q_2 расщепляют пространство $\mathbb{R}^n$ в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2, \quad X_j = P_j \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\mathbb{R}^n = Y_1 \dot{+} Y_2, \quad Y_j = Q_j \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Относительно разложения (9) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы $x = x^1 + x^2$, где $x^1 = P_1 x \in X_1, x^2 = P_2 x \in X_2$.

Суженные операторы $A_j = A|_{X_j}, B_j = B|_{X_j}, j = 1, 2$ отображают X_j в Y_j , причем $A_2 = 0$, существуют обратные операторы $A_1^{-1} : Y_1 \rightarrow X_1, B_2^{-1} : Y_2 \rightarrow X_2$ и выполнены равенства (см. [5]):

$$AP_j = Q_j A, \quad BP_j = Q_j B, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

В [11, 5] введен обратимый оператор в $\mathbb{R}^n$

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B, \quad GX_j = Y_j, \quad j = 1, 2,$$

обладающий свойствами

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \quad G^{-1}BP_2 = P_2, \quad AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2. \quad (12)$$

Так как $\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2$, то объединение базисов подпространств X_1 и X_2 является базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\dim X_1 = m$, тогда $\dim X_2 = d$, где $d = n - m$. В силу (9) $\text{rang} P_j = \dim X_j, j = 1, 2$. В $(n \times 2n)$ -матрице $P_{1,2} = (P_1 \ P_2)$ можно выбрать n линейно независимых столбцов $\{p_i\}_{i=1}^n$, где $\{p_1, \dots, p_m\}$ — столбцы матрицы P_1 , а $\{p_{m+1}, \dots, p_n\}$ — столбцы матрицы P_2 . Две системы векторов $\bar{e} = \{e_i\}_{i=1}^n, \bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^n$ образуют, соответственно, два базиса в $\mathbb{R}^n$: «старый» координатный базис $\bar{e}$ и «новый» базис $\bar{p}$, расщепляющий пространство $\mathbb{R}^n$ в том смысле, что набор векторов $\{p_1, \dots, p_m\}$ образует базис подпространства X_1 , а набор векторов $\{p_{m+1}, \dots, p_n\}$ — базис подпространства X_2 , где X_1, X_2 из разложения (9).

Обозначим через x^e, x^p векторы-столбцы из координат вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в базисах $\bar{e}, \bar{p}$ соответственно и заметим, что $x^e = x$. Обратимая $(n \times n)$ -матрица

$$P = (p_1 \cdots p_n)$$

задает в базисе $\bar{e}$ оператор $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ перехода от базиса $\bar{e}$ к базису $\bar{p}$: $Pe_i = p_i, i = \overline{1, n}$. Координаты вектора x в базисах $\bar{e}, \bar{p}$ преобразуются с помощью матриц P, P^{-1} [12, гл. III]: $x = x^e = Px^p, x^p = P^{-1}x$.

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из разложения по базису $\bar{p}$, имеющего вид $x = \sum_{i=1}^m z_i p_i + \sum_{k=1}^{n-m} v_k p_{m+k}$, вытекает представление: $x^p = \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$, где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d, d = n - m, \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}P_1x,$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}P_2x$. Значит оператор $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ действует так, что $P(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = X_1, P(\{0\} \times \mathbb{R}^d) = X_2$.

Относительно разложения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \{0\} \dot{+} \{0\} \times \mathbb{R}^d$ в базисе $\bar{p}$ проекторы P_1, P_2 вида (7) имеют блочную структуру

$$P^{-1}P_1P = \begin{pmatrix} E_{\mathbb{R}^m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

$$P^{-1}P_2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^d.$$

Определение 2. Аддитивным разложением единицы E_Y в s -мерном линейном пространстве Y назовем любую систему одномерных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s, \Theta_k : Y \rightarrow Y$ ($\Theta_k^2 = \Theta_k$) таких, что $\Theta_i \Theta_j = 0$ при $i \neq j$ и $E_Y = \sum_{k=1}^s \Theta_k$.

Система векторов $\{g_k \in Y : g_k = \Theta_k g_k, g_k \neq 0\}_{k=1}^s$ образует базис в Y .

Определение 3. Оператор-функция $\Phi(x) : D \rightarrow [X, Y], D \subset X$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $\text{conv}\{x_1, x_2\}$ векторов $x_1, x_2 \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{x_1, x_2\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в s -мерном пространстве Y оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in [X, Y]$ является обратимым так, что $\Lambda^{-1} \in [Y, X]$ ($[X, Y]$ — множество непрерывных линейных операторов из X в Y).

Заметим, что факт базисной обратимости не зависит от выбора базиса или аддитивного разложения единицы в Y .

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнения (4) введем многообразие

$$L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n : BP_2x = Q_2f(t, x)\}.$$

Здесь и далее мы пользуемся спектральными проекторами P_k , Q_k и спектральными подпространствами X_k , Y_k , $k = 1, 2$ характеристического пучка $\lambda A + B$ уравнения (4), определенными в п. 2.

Теорема 1. Пусть функция $f(t, x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x}f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, характеристический пучок $\lambda A + B$ уравнения (4) является регулярным пучком индекса 1. Пусть

$$\forall t \geq 0 \forall x^1 \in X_1 \exists x^2 \in X_2 : (t, x^1 + x^2) \in L_0 \quad (13)$$

и для любых $u_1, u_2 \in X_2$ таких, что $(t, x^1 + u_k) \in L_0$, $k = 1, 2$, функция

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t, x^1 + u)) - B \right] P_2 \in C(X_2, [X_2, Y_2]) \quad (14)$$

является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$.

Предположим, что проекция Q_1f допускает представление:

$$Q_1f(t, x) = S_1(t)P_1x + \psi(t, x) + \Pi(x)e(t), \quad (15)$$

где $S_1(t) \in C([0, \infty), [X_1, Y_1])$, $\psi(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$ и $\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $e(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, функция $\Pi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, [\mathbb{R}^n, Y_1])$ ограничена для больших норм P_1x так, что

$$\exists r > 0 \exists C > 0 \forall x : \|P_1x\| \geq r \Rightarrow \|\Pi(x)\| \leq C. \quad (16)$$

Пусть существует постоянная $(n \times n)$ -матрица $H = H^* > 0$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R = R_T > 0$ такое, что

$$(HP_1x, G^{-1}\psi(t, x)) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \quad \|P_1x\| \geq R_T. \quad (17)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (4), (5) на всей временной полуоси $t_0 \leq t < \infty$.

Доказательство. Применяя к уравнению (4) проекционные матрицы Q_1 , Q_2 и учитывая (11), получим эквивалентную (4) систему из двух уравнений

$$\frac{d}{dt}(AP_1x) + BP_1x = Q_1f(t, x), \quad (18)$$

$$Q_2f(t, x) - BP_2x = 0. \quad (19)$$

Далее, используя преобразование G^{-1} и учитывая (12), получим систему, эквивалентную системе (18), (19):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1x) + G^{-1}BP_1x = G^{-1}Q_1f(t, x), \\ G^{-1}Q_2f(t, x) - P_2x = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Введем суженные операторы

$$P_m = P|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1, \quad P_d = P|_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \rightarrow X_2,$$

для которых, очевидно, существуют обратные операторы $P_m^{-1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P_d^{-1} : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Очевидно, $z = P_m^{-1}P_1x$, $v = P_d^{-1}P_2x$, $x = P_mz + P_dv$. Уравнения системы (20) умножим на P_m^{-1} , P_d^{-1} соответственно и получим эквивалентную (20) систему

$$\frac{d}{dt}z + P_m^{-1}G^{-1}BP_mz = P_m^{-1}G^{-1}Q_1\tilde{f}(t, z, v), \quad (21)$$

$$P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v = 0, \quad (22)$$

где $\tilde{f}(t, z, v) = f(t, P_mz + P_dv)$.

Рассмотрим отображение

$$F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v = [P^{-1}G^{-1}Q_2f(t, x) - P^{-1}P_2x]|_{\mathbb{R}^d}.$$

Оно непрерывно вместе с функцией $f(t, x)$ и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(t, z, v) = P_m^{-1}G^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t, x))P_m,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}F(t, z, v) = P_d^{-1}\left[G^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t, x)) - P_2\right]P_d = P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_dv)P_d,$$

где последнее равенство эквивалентно (14) при $u = P_dv$, а $P_d^{-1}P_2P_d = E_{\mathbb{R}^d}$.

Согласно базисной обратимости функции $\Phi(u)$ (14) для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, x^1 + u_i) \in L_0$ ($i = 1, 2$), существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1 = \sum_{k=1}^d \Theta_k\Phi(\tilde{u}_k) \in [X_2, Y_2]$ является обратимым для любого набора векторов $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^d \subset \text{conv}\{u_1, u_2\}$. С помощью обратимого оператора $N = P_d^{-1}G^{-1} : Y_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ введем в $\mathbb{R}^d$ систему одномерных проекторов $\hat{\Theta}_k = N\Theta_kN^{-1}$, которые образуют аддитивное разложение единицы $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Выберем любые $v_i \in \mathbb{R}^d$ такие, что

$$(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0 = \left\{(t, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d : P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v = 0\right\},$$

$i = 1, 2$, и любые $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$, положим $u_i = P_dv_i$, $\tilde{u}_k = P_d\tilde{v}_k$. При связи $P_1x = P_mz$, $P_2x = P_dv$ получается, что $(t, z, v) \in \tilde{L}_0 \Leftrightarrow (t, P_1x + P_2x) \in L_0$, следовательно, для введенных векторов u_i , $\tilde{u}_k$ оператор Λ_1 обратим, поэтому обратим и действующий в $\mathbb{R}^d$ оператор

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v}F(t, z, \tilde{v}_k) = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d\tilde{v}_k)P_d = N\Lambda_1P_d.$$

Таким образом, для $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$ функция $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v}F(t, z, v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v_1, v_2\}$.

Из условия (13) и эквивалентности уравнений (19) и (22), следует, что для любых точек t, z можно выбрать v так, что $F(t, z, v) = 0$. Из базисной

обратимости $\Psi(v)$ следует существование обратного оператора $[\frac{\partial}{\partial v}F(t, z, v)]^{-1}$.

Пусть (t_*, z_*) — произвольная точка из $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$. В силу теорем [13, с. 294, 298] о неявной функции, существуют окрестности $U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v = v(t, z) \in C(U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*), U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по z , такая, что $F(t, z, v(t, z)) = 0$, $(t, z) \in U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$ и $v(t_*, z_*) = v_*$. Определим глобальную функцию $v = \eta(t, z) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ в точке (t_*, z_*) как $\eta(t_*, z_*) = v(t_*, z_*)$. Докажем, что

$$\forall (t, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \exists! v \in \mathbb{R}^d : (t, z, v) \in \tilde{L}_0. \quad (23)$$

Существование v уже доказано, необходимо доказать единственность.

Рассмотрим точки $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1, 2$, т. е. $F(t, z, v_i) = 0$. Для функции $F(t, z, v)$ ее проекции $F_k(t, z, v) = \hat{\Theta}_k F(t, z, v)$, $k = \overline{1, d}$, являются функциями со значениями в одномерном пространстве $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфном $\mathbb{R}$. По теореме о среднем (формула конечных приращений [13, с. 248]): $F_k(t, z, v_2) - F_k(t, z, v_1) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$, следовательно

$$\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0, \quad k = \overline{1, d}. \quad (24)$$

Суммирование выражений (24) по k дает $\Lambda_2(v_2 - v_1) = 0$, следовательно, $v_2 = v_1$.

Так как в некоторой окрестности каждой точки (t_*, z_*) из $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ существует единственное решение $v = \nu(t, z)$ неявного уравнения (22), непрерывное по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируемое по z , то функция $v = \eta(t, z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t, z)$ и обладает соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t, z)$ единственная на всем $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t, z)$, обладающая в некоторой точке (t_*, z_*) из $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t, z)$, то, в силу (23), $\eta(t_*, z_*) = \mu(t_*, z_*) = v_*$, следовательно, $\eta(t, z) = \mu(t, z)$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$.

Подставим $v = \eta(t, z)$ в (21):

$$\frac{d}{dt}z + P_m^{-1}G^{-1}BP_m z = P_m^{-1}G^{-1}Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z)). \quad (25)$$

Очевидно, что функция $Q_1 f(t, x)$ вида (15) и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial x}(Q_1 f(t, x))$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. В силу свойств функций $\eta(t, z)$ и $Q_1 f(t, x)$, функция $Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z)) = Q_1 f(t, P_m z + P_d \eta(t, z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по z на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$. Следовательно, для любой начальной точки $(t_0, z_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ такой, что $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (25) на некотором интервале $t_0 \leq t < \varepsilon$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0, x^0) \in L_0$ и $x^0 = P_m z_0 + P_d \eta(t_0, z_0)$, то начальная точка $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$.

Обозначим $\hat{\Pi}(t, z) = \Pi(P_m z + P_d \eta(t, z))$. Поскольку $P_d \eta(t, z) \in X_2$, то в силу (16) выполнено

$$\exists \hat{r} > 0 \exists C > 0 \forall t \geq 0 \forall z : \|z\| \geq \hat{r} \Rightarrow \|\hat{\Pi}(t, z)\| \leq C. \quad (26)$$

Далее обозначим $\hat{\psi}(t, z) = \psi(t, P_m z + P_d \eta(t, z))$. С учетом всех новых обозначений уравнение (25) принимает вид

$$\frac{d}{dt} z = P_m^{-1} G^{-1} \left[(S_1(t) - B) P_m z + \hat{\psi}(t, z) + \hat{\Pi}(t, z) e(t) \right]. \quad (27)$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции $\hat{\psi}(t, z)$ по переменной t : $\hat{\psi}_T(t, z) = \begin{cases} \hat{\psi}(t, z), & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{\psi}(T, z), & t > T. \end{cases}$

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt} z = P_m^{-1} G^{-1} \left[(S_1(t) - B) P_m z + \hat{\psi}_T(t, z) + \hat{\Pi}(t, z) e(t) \right], \quad t \geq 0, \quad (28)$$

и функцию $V(x^1) = \frac{1}{2} (H x^1, x^1) = \frac{1}{2} (H P_m z, P_m z) = \frac{1}{2} (P_m^* H P_m z, z) = \frac{1}{2} (\hat{H} z, z) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_m^* H P_m$ и H — матрица из (17). Очевидно, $V(x^1)$ положительно определена и $V(x^1) \rightarrow +\infty$ при $\|x^1\| \rightarrow \infty$, аналогичными свойствами обладает функция $\hat{V}(z)$. Градиент функции $\hat{V}$ равен $\text{grad } \hat{V}(z) = \hat{H} z$.

Согласно (17) для каждого $T > 0$ найдется число $R = R_T > 0$ такое, что

$$(H P_m z, G^{-1} \hat{\psi}(t, z)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|P_m z\| \geq R_T. \quad (29)$$

Поскольку $(H P_m z, G^{-1} \hat{\psi}(t, z)) = (\hat{H} z, P_m^{-1} G^{-1} \hat{\psi}(t, z))$, то из (29) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\hat{R} = \hat{R}_T > 0$ такое, что

$$(\hat{H} z, P_m^{-1} G^{-1} \hat{\psi}(t, z)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|z\| \geq \hat{R}_T. \quad (30)$$

Коль скоро $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$ вместе с H , то существуют $\hat{H}^{-1}$ и $\hat{H}^{1/2}$, причем $\|z\|^2 = (\hat{H}^{-1} (\hat{H}^{1/2})^2 z, z) = (\hat{H}^{1/2} \hat{H}^{-1} \hat{H}^{1/2} z, z) \leq \|\hat{H}^{-1}\| \|\hat{H}^{1/2} z\|^2 = \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H} z, z)$. Тогда $|\left(\hat{H} z, P_m^{-1} G^{-1} [S_1(t) - B] P_m z \right)| \leq \|\hat{H}\| \|P_m^{-1} G^{-1}\| \|[S_1(t) - B] P_m\| \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H} z, z)$.

Выбирая $\hat{R} \geq \max \left\{ \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r} \right\}$, с учетом (26) имеем оценку:

$$\left| \left(\hat{H} z, P_m^{-1} G^{-1} \hat{\Pi}(t, z) e(t) \right) \right| \leq C \|\hat{H}\|^{1/2} \|P_m^{-1} G^{-1}\| \|e(t)\| (\hat{H} z, z), \quad \|z\| \geq \hat{R}.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус $\hat{R} = \hat{R}_T$ в условии (30) так, чтобы выполнялось неравенство $\hat{R} \geq \max \left\{ \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r} \right\}$, получаем оценку для

производной функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (28), которая выполнена при всех z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}$ и всех $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} \Big|_{(28)} &= \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1} \left[(S_1(t) - B)P_mz + \hat{\psi}_T(t, z) + \hat{\Pi}(t, z)e(t) \right] \right) \leq \\ &\leq \left| \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[S_1(t) - B]P_mz \right) \right| + \left| \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\hat{\Pi}(t, z)e(t) \right) \right| \leq \\ &\leq \|P_m^{-1}G^{-1}\| \left(\|\hat{H}\| \| [S_1(t) - B]P_m \| \|\hat{H}^{-1}\| + C \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right) (\hat{H}z, z) = \\ &= k(t)\hat{V}(z), \end{aligned}$$

где $k(t) = 2 \|P_m^{-1}G^{-1}\| \left(\|\hat{H}\| \| [S_1(t) - B]P_m \| \|\hat{H}^{-1}\| + C \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right)$ — непрерывная функция при $t \geq 0$.

Так как неравенство $\dot{v} \leq K(t, v)$, $t \geq 0$, где $K(t, \hat{V}) = k(t)\hat{V}$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения [7, с. 133], то по лемме 1 каждое решение $z(t)$ уравнения (27) неограниченно продолжаемо. Значит, каждое решение $x(t) = P \begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t, z(t)) \end{pmatrix}$ уравнения (4) также неограниченно продолжаемо.

Проверим, что каждое локальное решение $x(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$ ($t_0 \geq 0$) уравнения (4) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $t_0 \leq t < \infty$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи Коши (4), (5) единственно на некотором интервале $t_0 \leq t < \varepsilon$. Предположим, что решение не единственно на $t_0 \leq t < \infty$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $t_* \leq t < \varepsilon_1$ должно существовать единственное решение уравнения (4) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению. $\square$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПЕРСПЕКТИВЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Во многих практических задачах, в которых возникают дифференциально-алгебраические уравнения вида (4), проверка условий теоремы 1 оказывается вполне эффективной и эти условия выполняются в случае нелинейных функций $f(t, x)$, не являющихся глобально липшицевыми. В следующей статье мы покажем, как теорема 1 позволяет гарантировать существование глобальных решений уравнений динамики некоторых классов нелинейных радиотехнических систем.

Представляет интерес также изучение глобальных решений нелинейных систем с внешними импульсными возмущениями и эффектами запаздывания, для которых естественно использовать результаты работы [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell S. L. Singular Systems of Differential Equations. / S. L. Campbell. — San Francisco, CA: Pitman, 1980. — 177 p.
2. Rutkas A. G. Existence of Solutions of Degenerate Nonlinear Differential Operator Equations. / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // Nonlinear Oscillations. — 2001. — Vol. 4, № 2. — P. 252–263.
3. Rutkas A. G. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semi-linear functional differential equations. / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // Nonlinear Analysis. TMA. — 2003. — Vol. 55, № 1-2. — P. 125–139.
4. Власенко Л. А. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика. — 2011. — № 1-3 (67-69). — С. 4–9.
5. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. / Л. А. Власенко. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 273 с.
6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л. С. Понтрягин — М.: Наука, 1974. — 331 с.
7. Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
8. Филипповская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике. / М. С. Филипповская // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". — 2012. — № 1015, Вип. 19. — С. 306–319.
9. Канторович Л. В. Функциональный анализ. / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
10. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. / А. Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.
11. Vlasenko L. Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications. / L. Vlasenko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2000. — 23. — P. 937–948.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
13. Шварц Л. Анализ. Т. 1. /Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 822 с.
14. Власенко Л. А. Об одной стохастической системе с импульсными воздействиями. / Л. А. Власенко, С. И. Ляшко, А. Г. Руткас // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 2. — С. 50–55.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. Н. КАРАЗИНА, пл. СВОБОДЫ, 4, ХАРЬКОВ, 61022, УКРАИНА.

Поступила 01.08.2012

ПОСТРОЕНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ МЕЖПОЛИТОПНОЙ ОБЛАСТИ В d -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. М. ТЕРЕЩЕНКО

РЕЗЮМЕ. В статье предложен метод решения задачи триангуляции области между выпуклыми многогранниками в d -мерном пространстве с использованием триангуляцию Делоне, за $O(N^2)$ времени. Следует отметить, что новизна работы заключается в использовании модифицированного алгоритма триангуляции Делоне с ограничениями.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка проблемы. В работе рассматривается метод решения задачи триангуляции области между политопами в d -мерном Евклидовом пространстве. Большое количество задач вычислительной геометрии и компьютерной графики, а также их приложений сводиться к такой задаче. Особое распространение эта задача приобрела в геоинформационных системах при моделировании рельефа, в реконструкции изображений, распознавании образов и компьютерных играх.

Анализ последних исследований. В последнее время ставиться вопрос о возможности решения этой задачи за время $O(n + k^2)$ (n — общее количество точек, k — количество многогранников) [1]. При дальнейшем исследовании было обнаружено, что сложность решения зависит от формы участка между многогранниками [2]. Позже Б. Джо предлагает новый подход, связанный с локальным преобразованием многогранника, что улучшает качество триангуляции (триангуляция Делоне) [4]. Однако время выполнения такого алгоритма, $O(n^2 + k^2)$, далеко от желаемого результата.

Один из подходов к решению задачи состоит из двух основных этапов: построения самого участка и его триангуляции. Для каждого этапа используются различные методы. Например, часть методов поиска участка базируется на построении выпуклого многогранника вокруг заданных многогранников и затем удаление из него точек, принадлежащих заданным многогранникам. На этапе построения участка также используются различные алгоритмы построения выпуклой оболочки [3]. Для построения триангуляции тоже существуют различные способы [4, 5]. В частности, эту проблему можно решать как проблему триангуляции с ограничениями [6, 7] или проблему триангуляции невыпуклого многогранника [8]. Однако оптимального подхода еще не предложено, и проблема остается открытой.

Новизна и идеи. В данной работе предложена модификация подхода, базирующегося на построении выпуклой области и триангуляции с ограничениями.

Цель статьи. Предложить новый подход к решению задачи триангуляции области между многогранниками.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Постановка задачи триангуляции участка. Пусть в d -мерном пространстве заданы k выпуклых многогранника с общим количеством N вершин, которые между собой не пересекаются. Необходимо триангулировать область, образованную заданными многогранниками (тетраедраезировать область).

Определение 1. Область, ограниченная выпуклой оболочкой для множества многогранников и их взаимовыпуклыми гранями, образует участок, который необходимо триангулировать. Разделим задачу триангуляции участка на две подзадачи: 1) построение участка, образованного заданными многогранниками; 2) триангуляция построенного участка.

Рассмотрим метод решения задачи на примере трехмерного пространства.

Замечание 1. Все грани являются треугольными, однако две смежные грани могут лежать на одной плоскости. На вход всех алгоритмов подаются именно такие грани, поскольку любую грань можно триангулировать.

Замечание 2. Введем отношение порядка для вершин. Вершина $v_1 < v_2$, тогда и только тогда, когда x -координата v_1 меньше x -координаты v_2 , или если x -координата v_1 равна x -координате v_2 и y -координата v_1 меньше y -координаты v_2 , или если x -координата v_1 равна x -координате v_2 и y -координата v_1 равна y -координате v_2 и z -координата v_1 меньше z -координаты v_2 .

Также дополнительно введем отношение порядка для граней. Пусть v_{11}, v_{12}, v_{13} — вершины, которые задают f_1 , а v_{21}, v_{22}, v_{23} — вершины, которые задают f_2 , причем $v_{11} < v_{12} < v_{13}$, и $v_{21} < v_{22} < v_{23}$.

Грань $f_1 < f_2$, тогда и только тогда, когда $v_{11} < v_{21}$ или $v_{11} = v_{21}$ и $v_{12} < v_{22}$ или $v_{11} = v_{21}, v_{12} = v_{22}$ и $v_{13} < v_{23}$.

1.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ

Для построения области, нам необходимо сначала построить выпуклую оболочку на множестве входных многогранников. Для этого применим стратегию "Разделяй и властвуй" [9]. В результате получим выпуклую оболочку множества заданных многогранников. Следующим шагом является удаление множества точек, принадлежащих входным многогранникам:

1. Отсортируем грани входящих многогранников (обозначим это множество, как F_v).

2. Отсортируем грани построенного выпуклого многогранника (F_m).
3. F_a -множество граней области.
4. Определяем наименьшую грань f среди всех граней, принадлежащих $F_v \cup F_m$.
5. Если грань $f \in F_v \cap f \in F_m$, то f не принадлежит области, и просто удаляется из F_m и F_v . Иначе f прибавляется к F_a и удаляется из F_v (если $f \in F_v$) или F_m ($f \in F_m$).
6. Если $F_v \cup F_m = \emptyset$, то останавливаемся, иначе п.4

В результате множество F_a содержать все грани, принадлежащие области, а следовательно, область построена.

1.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИАНГУЛЯЦИИ ОБЛАСТИ

Триангуляцию полученной фигуры будем рассматривать как проблему триангуляции с ограничениями в виде поверхностей.

Определение 2. Триангуляция множества точек с ограничениями в виде поверхностей — это построение триангуляции, в которой ребра построенных тетраэдров не пересекают поверхности ограничений (вершины тетраэдров могут лежать на поверхностях ограничений).

Для решения задачи триангуляции с ограничениями применим известный алгоритм С. Hazlewood [6], который состоит из четырех шагов.

1. Триангуляция Делоне без ограничений.
2. Восстановление ребер ограничений.
3. Восстановления поверхностей ограничений.
4. Удаление тетраэдров, которые находятся вне заданной области.

Все эти шаги подробно описаны в [6]. Но, учитывая специфику поставленной нами задачи, первый шаг будет иметь свои особенности. И поэтому, опишем модифицированный алгоритм построения триангуляции Делоне без ограничений с учетом участка ограниченного многогранниками.

1.2.1. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ

В качестве узлов триангуляции будем использовать вершины области. Алгоритм построения триангуляции состоит из следующих шагов.

1. Создание множества U — набор заданных узлов.
2. Создание "суперструктуры" — тетраэдра, в середине которого лежат все заданные узлы.
3. Формирование пустого множества G .
4. Поиск для суперструктуры центра и радиуса описанной сферы.
5. Выбор любого узла с U и перенос его в G . Удаляются все тетраэдры, для которых q лежит внутри описанных вокруг них сфер. В результате, в построенной сетке образуется многогранник, который в общем случае имеет звездную форму, причем любой луч, который выходит из q , должен пересекать контур этого многогранника только в одной точке. Если существуют тетраэдры (смежные с нашим многогранником), для которых q

лежит в плоскости одной из граней, то такие грани также необходимо удалить. Фактически ребро или грань удаляются только в том случае, если удаляются все смежные с ним тетраэдры, при этом грани и ребра суперструктуры не удаляются никогда. Новые тетраэдры образуются добавлением ребер между q и вершинами полученного многогранника. Доказано [10], что при этом получим триангуляцию Делоне.

6. Поиск центров и радиусов описанных сфер для новых тетраэдров.

7. Если множество U непустое, то переходим на шаг 5, иначе — конец алгоритма.

Результатом работы алгоритма будет триангуляция Делоне вершин участка, находящегося в середине тетраэдра.

2. СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМА

Теорема 1. *Задачу триангуляции области на множестве многогранников (суммарное число вершин — N) предложенным методом можно решить за $O(N^2)$ времени.*

Доказательство. Основные этапы построения триангуляции области между многогранниками следующие:

1. Алгоритм построения выпуклой оболочки множества многогранников (алгоритм «разделяй и властвуй»).
2. Алгоритм построения триангуляции области (алгоритм построения триангуляции Делоне с ограничениями).

На *этапе 1* применяется стратегия «разделяй и властвуй», основными шагами которой будут: алгоритм поиска первой грани процедуры слияния (нижнего моста) и рекурсивное построение выпуклой оболочки [9]. Временная сложность алгоритма поиска нижнего моста будет равна $O(N)$ так, как все операции: построение проекции на плоскость XOY , построение отрезков, поиск медианы [11] и удаления выполняются за линейное время. На каждом шаге гарантированно удаляется $N/4$ вершин. Тогда время алгоритма нахождения моста определяется следующим образом:

$$O\left(N + \left(\frac{3}{4}\right)N + \left(\frac{3}{4}\right)^2 N + \dots\right) = O(N).$$

Что касается рекурсивного построения выпуклой оболочки, то сортировка вершин занимает время — $O(N \log N)$, слияние двух выпуклых многогранников занимает время $O(N)$. Сложность нахождения триангуляции — $O(\text{количество ребер } CH(A \cup B))$. Сложность удаления скрытых граней — $O(\text{количество граней } CH(A) + \text{количество граней } CH(B))$. Из формулы Эйлера для выпуклого многогранника следует $N - M + L = 2$, где N — количество вершин, M — количество ребер, L — количество граней, следует, что сложность слияния двух выпуклых многогранников $O(N)$. Так что в общем случае сложность построения выпуклой оболочки — $O(N \log N)$. Формирование выпуклой области занимает $O(N \log N)$ времени. Так, в частности, сортировка граней занимает время $O(N \log N)$, а слияние двух списков производится за линейное время.

На *этапе 2* применяется алгоритм построения триангуляции Делоне с ограничениями, сложность которого $O(N^2)$. Так, в частности, построение суперструктуры занимает линейное время. Вставка одной точки занимает линейное время от количества тетраэдров. Количество тетраэдров составляет $O(N)$. Чтобы вставить все вершины в триангуляцию необходимо потратить $O(N^2)$ времени. Время восстановления одного ребра триангуляции — линейное от количества тетраэдров. Поэтому восстановление всех ребер также займет $O(N^2)$ времени. Аналогично, время восстановления поверхностей ограничений занимает $O(N^2)$. Проверка на принадлежность точки многограннику занимает $O(N)$ времени, поэтому общее время проверки для всех тетраэдров будет равно $O(N^2)$ времени. Таким образом, суммарная сложность всех шагов будет следующей:

$$O(N \log N + N \log N + N^2) = O(N^2).$$

□

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Программа реализована на языке программирования Java. Для отображения используется библиотека Java3D, а для представления данных используется структура данных — "узлы", "ребра" и "треугольники". Ввод данных осуществляется с помощью следующих средств:

1. Xml-файл, в котором каждый многогранник представляется списками вершин и граней.
2. Генерация многогранников, которая позволяет сгенерировать до 10 многогранников с суммарным количеством вершин 10000.

Программа дает возможность просматривать процесс решения программы поэтапно (результат построения выпуклой области, ее вид, результат триангуляции). Также есть возможность просмотреть элементы триангуляции по очереди. На рис. 1–5 показан пример программной реализации основных шагов алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод решения задачи построения и триангуляции области в d -мерном пространстве. Алгоритм можно модернизировать, используя другую структуру данных, чтобы уменьшить затраты памяти, но это может повлиять на быстродействие при выполнении некоторых шагов алгоритма. Также необходимо обратить внимание на то, что алгоритм является достаточно чувствительным к точности, поскольку решаются плохо обусловленные задачи (поиск центра и радиуса описанной сферы, точек пересечения и т.д.). Поэтому для повышения точности можно использовать точную арифметику, но за счет увеличения сложности вычислений элементарных операций это повлияет на быстродействие всего алгоритма.

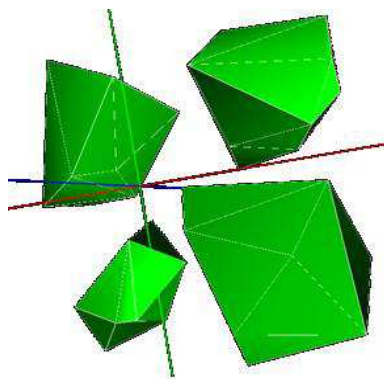


Рис. 1. Пример заданного множества многогранников

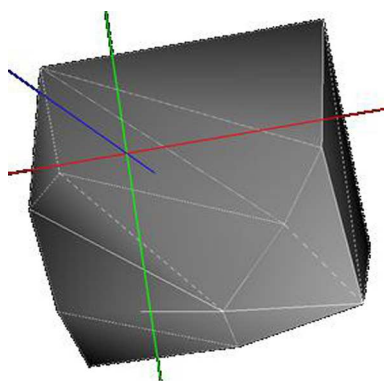


Рис. 2. Выпуклая оболочка области триангуляции

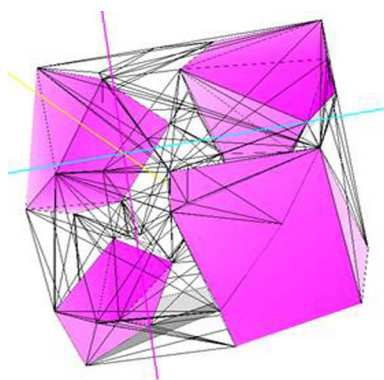


Рис. 3. Триангуляция области

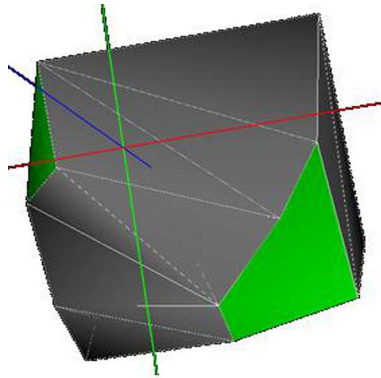


Рис. 4. Выделение триангулированной области между многогранниками

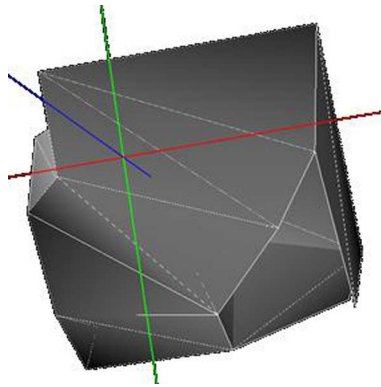


Рис. 5. Результирующая триангулированная область

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman J. E. Handbook of Discrete and Computational Geometry. / J. E. Goodman and J. O'Rourke, eds. — Chapman and Hall: CRC Press, 2004. — 1453 p.
2. Chazelle B. Bounds on the Size of Tetrahedralizations. / B. Chazelle, N. Shouraboura. // Discrete & Computational Geometry — 1995. — 14. — P. 429–444.
3. Preparata F. P. Computational Geometry: An introduction. / F. P. Preparata, M. I. Shamos — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — 478 p.
4. Kraus M. Simplification of Nonconvex Tetrahedral Meshes. / M. Kraus, T. Ertl // Mathematics and Visualization — 2003. — P. 185–195.
5. Ruppert J. On the difficulty of tetrahedralizing 3-dimensional non-convex polyhedra. / J. Ruppert, R. Seidel // Discrete & Computational Geometry — 1992. — 7. — P. 227–253.
6. Hazlewood C. Approximating constrained tetrahedralizations. / C. Hazlewood. // Computer Aided Geometric Design — 1983. — 10. — P. 67–87.
7. Skvortsov A. V. Delaunay Triangulation and Its Application. / A. V. Skvortsov — Tomsk: Izd. Tomsk. Gos. Univ., 2002. — 478 p.
8. Chazelle B. Triangulating a Nonconvex Polytope. / B. Chazelle, L. Palios. // Discrete & Computational Geometry — 1990. — 5. — P. 505–526.

9. Preparata F. P. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions. / F. P. Preparata and S. J. Hong. // Comm. ACM — 1977. — 2. — P. 87–93.
10. Joe B. Construction Of Three-Dimensional Delaunay Triangulations Using Local Transformations. / B. Joe. // Computer Aided Geometric Design — 1991. — 8. — P. 123–142.
11. Cormen T. H. Introduction to Algorithms. / T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest — Cambridge: MIT Press, 2009. — 1312 p.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601,
УКРАИНА.

Поступила 03.04.2012

УДК 519.6

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

С. М. ШАХНО

РЕЗЮМЕ. Запропоновано нові різницеві і параметричні ітераційні методи для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів. Обґрунтовано локальну збіжність методів і знайдено область єдиності розв'язку. Побудовано модифікації методу Гаусса-Ньютона з послідовною та паралельною апроксимаціями оберненого оператора та вивчено їхню збіжність.

ВСТУП

Нелінійні задачі найменших квадратів часто потрібно розв'язувати в наукових та інженерних задачах. Зокрема, вони виникають при розв'язуванні перевизначених систем рівнянь, при оцінюванні параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, при побудові нелінійних регресійних моделей, при оцінюванні параметрів і перевірці гіпотез в математичній статистиці, в керуванні різними об'єктами, процесами тощо.

Для їх розв'язування можна використовувати добре відомі методи Гаусса-Ньютона та Левенберга-Марквардта, які мають квадратичну збіжність у спеціальному випадку нульового відхилення [1, 2, 3, 4, 5]. Ці методи використовують похідні від функцій. Однак на практиці значення функцій часто отримують з експериментів або як результат обчислення на комп'ютері, тоді аналітичних похідних не існуватиме. Якщо похідна функції задається складною формулою, її обчислення може бути обтяжливим. Тому актуальними є розробка і використання методів, що використовують у своїх ітераційних формулах тільки значення функцій, і разом з тим володіють високою швидкістю збіжності. Найпростішим методом такого типу є метод [6], який збігається з надлінійною швидкістю збіжності — з порядком 1,618... у випадку нульового відхилення. Проте в даному випадку виникає проблема вибору кроку скінченних різниць. У цій статті запропоновано і досліджено за єдиною методикою, розробленою нами, методи з порядками збіжності 1,618..., 1,839..., 2 та $1 + \sqrt{2}$, які використовують апроксимацію якобіана поділеними різницями. Також розроблено параметричні модифікації методів Гаусса-Ньютона та Левенберга-Маркварта і методи з апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати.

Головні результати цієї праці детально викладені в статтях [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

У статтях [11, 18] для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати пропонуються нові ітераційні методи без похідних зі швидкістю збіжності 1,618, 1,839... та 2. Розроблена схема доведення, за якою з єдиної точки зору проведено дослідження класу ітераційно-різницевих методів з різними порядками збіжності. За результатами проведеного чисельного експерименту новий метод порівнюється з відомими різницевиими методами та класичним методом Гаусса-Ньютона.

У статтях [17, 19] проведено дослідження однокрокової модифікації методу Гаусса-Ньютона з використанням апроксимації похідної поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Встановлено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі. Проведено аналогічні дослідження за узагальнених умов Гьольдера.

У статті [15] досліджено ітераційно-різницевий метод з надквадратичною збіжністю розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати, який не потребує обчислення матриці похідних. Доведено теорему, яка обґрунтовує збіжність, та визначено швидкість збіжності розглянутого методу. Наведено результати чисельного експерименту. У статті [14] вивчено локальну збіжність цього методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Знайдено область єдиності розв'язку задачі.

У статтях [7, 20] запропоновано та досліджено збіжність однопараметричної модифікації методу Гаусса-Ньютона та Левенберга-Маркварта і наведено результати чисельних розрахунків.

У статті [8] застосовано метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ до нелінійних задач найменших квадратів та проведено чисельний експеримент, у [12] запропоновано та вивчено швидкість збіжності методів з послідовною і паралельною апроксимаціями оберненого оператора,

Стаття [21] присвячена практичній реалізації методів розв'язування нелінійних задач найменших квадратів, у [22, 23] побудовано алгоритм для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів з обмеженнями типу рівностей і нерівностей.

Опишемо коротко структуру статті. У першому пункті наведені означення поділених різниць та умов Ліпшиця для поділених різниць, сформульовано різницеві методи розв'язування нелінійних задач найменших квадратів. Другий пункт присвячений обґрунтуванню локальної збіжності різницевих методів. У третьому пункті вивчено збіжність методу типу хорд за узагальнених умов Ліпшиця та Гьольдера для поділених різниць першого порядку. У четвертому пункті вивчено збіжність різницевого методу з надквадратичною збіжністю за звичайних та узагальнених умов Ліпшиця, встановлено область єдиності розв'язку задачі. Всі теореми сформульовані в термінах поділених різниць. У п'ятому пункті розглянуто параметричні методи розв'язування нелінійних задач найменших квадратів, які використовують похідні. Шостий пункт присвячений методам з апроксимацією оберненого оператора. У сьомому пункті зроблено короткі висновки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ПОДІЛЕНІ РІЗНИЦІ ТА РІЗНИЦЕВІ ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ

Розглянемо нелінійну задачу про найменші квадрати:

Знайти

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \quad (1)$$

де $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq n$) — нелінійна по x функція.

У цій статті ми з єдиної точки зору дослідимо ітераційні методи вигляду

$$x_{n+1} = x_n - [A_n^T A_n]^{-1} A_n^T F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де A_n — лінійний оператор, який є поділеною різницею або лінійною комбінацією поділених різниць першого порядку від функції $F(x)$.

Зазначимо, що при $A_n = F'(x_n)$ отримуємо добре відомий метод Гаусса-Ньютона [1]. Локальна збіжність цього методу досліджена в [1, 24], а напівлокальна збіжність вивчена у статтях [2, 5].

Для опису ітераційно-різницевих методів попередньо введемо деякі означення.

Нехай X, Y — два банахові простори, D — підмножина простору X , а x, y та z — три точки з D . Лінійний оператор з X в Y , позначуваний $F(x, y)$, називається *поділеною різницею першого порядку* від F за точками x і y , якщо він задовольняє умову [25, 26]

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \quad (3)$$

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \quad (4)$$

Позначимо $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ — кулю радіуса r з центром в точці x_0 .

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|), \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (5)$$

називаємо умовою Ліпшиця зі сталою L .

Якщо виконується умова

$$\|F(x, y) - F'(x_0)\| \leq L(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|), \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \quad (6)$$

то її називаємо центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L .

Вважатимемо, що для $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ виконуються умови типу Ліпшиця в такій формі:

$$\|F(x, y) - F(x, z)\| \leq p \|y - z\|, \quad x, y, z \in D, \quad (7)$$

$$\|F(y, x) - F(z, x)\| \leq \bar{p} \|y - z\|, \quad x, y, z \in D, \quad (8)$$

$$\|F(x, y, z) - F(u, y, z)\| \leq q \|x - u\|, \quad u, x, y, z \in D. \quad (9)$$

Якщо поділена різниця $F(x, y)$ від F задовольняє (7) або (8), тоді F диференційовний за Фреше на D і $F'(x) = F(x, x)$. Більше того, якщо (7) і (8) виконуються, тоді похідна Фреше неперервна за Ліпшицем на D зі сталою Ліпшиця $k = p + \bar{p}$ [27].

У праці [28] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію.

У статті [29] ми вводим аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цих умов обґрунтовуємо збіжність методу хорд. У цьому випадку (5) і (6) будуть замінені відповідно на

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u) du, \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (10)$$

та

$$\|F(x, y) - F'(x_0)\| \leq \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u) du, \quad \forall x, y \in B(x_0, r). \quad (11)$$

Умови (10) і (11) називатимемо узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

2. ЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянемо ітераційні процеси вигляду (2). Вивчимо випадки: (a) $A_n = F(x_n, x_{n-1})$, (b) $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$, (c) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, де $F(u, v)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$, причому $F(u, u) = F'(u)$. Представимо результати теоретичних досліджень умов і порядку збіжності ітераційного процесу (2) для різних варіантів A_n . Зокрема, для $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ встановлено локальну збіжність процесу (2) зі швидкістю $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$, для $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$ — з порядком $1.839\dots$ і для $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ — з квадратичним порядком у випадку нелінійної задачі найменших квадратів з нульовим відхилом.

Випадок (a) $A_n = F(x_n, x_{n-1})$.

Теорема 1. 1) Нехай функція $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ неперервно диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок x^* в області D і існує обернена операція $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ та $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \leq B$;

2) в області $\Omega = \Omega(x^*, r_*) = \{x : \|x - x^*\| \leq r_*\} \subset D$, де

$$r_* = \frac{-5BM\alpha + \sqrt{(5BM\alpha)^2 + 24BM^2 - 48B^2M^3\eta}}{12BM^2},$$

функція F має поділені різниці першого порядку, і

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq M(\|x - u\| + \|y - v\|);$$

3) $\|F(x^*)\| \leq \eta$, $\|F'(x^*)\| \leq \alpha$;

4) $BM r_*(\alpha + 2M r_*) + 2MB\eta < 1$.

Тоді для $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ ітераційний процес (2) коректно визначений і генерує послідовність $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, яка належить відкритій області

Ω ; вона збігається до розв'язку x^* зі швидкістю, яка характеризується нерівністю

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1 \|x_{n-1} - x^*\| + C_2 \|x_n - x^*\| \|x_{n-1} - x^*\|, \quad (12)$$

де C_1, C_2 — невід'ємні обмежені сталі.

Зауважимо, що нерівність (12) дає можливість зробити висновок про збіжність ітераційного процесу з вибором $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ зі швидкістю $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ (у випадку нульового відхилю, коли $F(x^*) = 0$, тоді $\eta = 0$ і стала $C_1 = 0$). У випадку малого відхилю (η є мале) збіжність буде лише лінійна, і у випадку великого відхилю ітераційний процес (2) з $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ може взагалі розбігатися.

Випадок (b) $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$.

Теорема 2. Нехай функція $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — двічі неперервно диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що: 1) задача (1) має розв'язок x^* в області D ; 2) обернена операція $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ існує та $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \leq B$; 3) в області $\Omega = \Omega(x^*, r_*) = \{x : \|x - x^*\| < r_*\} \subset D$ функція F має поділені різниці першого і другого порядків, і

$$\begin{aligned} \|F(x, y) - F(u, v)\| &\leq M(\|x - u\| + \|y - v\|); \\ \|F(u, x, y) - F(v, x, y)\| &\leq N\|u - v\|; \\ \|F(x^*)\| &\leq \eta, \quad \|F'(x^*)\| \leq \alpha. \end{aligned}$$

Тоді для $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \Omega$, достатньо близьких до розв'язку x^* задачі (1), ітераційний процес (2) збігається до розв'язку зі швидкістю, яка характеризується нерівністю

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1 \|x_n - x^*\| + C_2 \|x_n - x^*\| \|x_{n-1} - x^*\| \|x_{n-2} - x^*\|, \quad (13)$$

де C_1, C_2 — деякі обмежені невід'ємні сталі.

Наслідок 1. Порядок збіжності ітераційної процедури (2)-(b) у випадку нульового відхилю дорівнює 1.839....

Випадок (c) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1)–3) теореми 2 в області $\Omega(x^*, 3r_*) = \{x : \|x - x^*\| < 3r_*\} \subset D$, де r_* єдиний додатний нуль функції

$$\begin{aligned} q(r) &= B(\alpha + 4Nr^2 + 2Mr) + B(4Nr + 2M)\eta + \\ &+ B(2\alpha + 2Mr + 4Nr^2)(2Mr + 4Nr^2) - 1. \end{aligned}$$

Тоді для $x_{-1}, x_0 \in \Omega(x^*, r_*)$ ітераційна послідовність $\{x_n\}$, визначена за (2), належить $\Omega(x^*, r_*)$ для всіх $n \geq 0$ і збігається до розв'язку x^* та справджується оцінка похибки для всіх $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq C_1 \|x_n - x^*\| + C_2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \\ &+ C_3 \|x_n - x^*\|^2 + C_4 \|x_n - x^*\| \|x_n - x_{n-1}\|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — деякі обмежені невід'ємні сталі.

Наслідок 2. *Збіжність досліджуваного ітераційного процесу квадратична у випадку нульового відхилення ($\eta = 0$).*

Зауважимо, що результати цього пункту отримали розвиток в статтях інших авторів [30, 31].

3. ПРО ОДИН МЕТОД ТИПУ ХОРД ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянемо нелінійну задачу найменших квадратів (1). Для знаходження розв'язку цієї задачі пропонуємо ітераційний метод типу хорд

$$x_{n+1} = x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

де $A_n = F(x_n, x_n + \alpha_n(x_{n-1} - x_n))$, $F(x, y)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ за точками x та y , $\alpha_n \in [0, 1]$, x_{-1}, x_0 — задані.

Зауважимо, що при $\alpha_n = 1$ з (15) ми отримаємо метод хорд [18], а при $\alpha_n = 0$ — класичний метод Гаусса-Ньютона [1].

У цьому пункті досліджено збіжність методу типу хорд (15) при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку для нелінійних задач найменших квадратів. Відзначимо, що умова Ліпшиця зі сталою Ліпшиця є частковим випадком узагальненої умови Ліпшиця. Отримано радіус збіжності методу. Проведено аналогічні дослідження при узагальненій умові Гольдера.

Теорема 4. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

- 1) *задача (1) має розв'язок x^* в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ та існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;*
- 2) *в області $\Omega(x^*, r)$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє умову Ліпшиця з усередненим L :*

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-u\| + \|y-v\|} L(u) du, \quad (16)$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна;

- 3) $r > 0$ *задовольняє нерівність*

$$\frac{\beta \int_0^r L(u) du}{1 - \beta \int_0^{2r} L(u) du} + \frac{\sqrt{2} \alpha \beta^2 \int_0^{2r} L(u) du}{r(1 - \beta \int_0^{2r} L(u) du)} \leq 1. \quad (17)$$

Тоді метод (15) збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ таких, що $\rho(x_{-1}) \leq \rho(x_0)$ і

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{q_1}{\rho(x_0)} \|x_{n-1} - x^*\| \|x_n - x^*\| + q_0 \|x_{n-1} - x^*\|, \quad (18)$$

де

$$\rho(x) = \|x - x^*\|; \quad \alpha = \|F(x^*)\|; \quad \beta = \|[F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1} F'(x^*)^T\| \quad (19)$$

і величини

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du}{\rho(x_{-1})(1-\beta \int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du)}; \\ q_1 &= \frac{\beta \int_0^{(1-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du}{1-\beta \int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du} \end{aligned} \quad (20)$$

менші за одиницю.

Наслідок 3. Порядок збіжності ітераційного процесу (15) у випадку нульового відхилю дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Область єдиності розв'язку задачі (1) встановлює

Теорема 5. Нехай x^* задовольняє (1), $F(x)$ неперервна в $\Omega(x^*, r)$. Крім того, $F'(x^*) = F(x^*, x^*) = A_*$ має повний стовпцевий ранг, $F(x)$ має поділену різницю першого порядку, яка задовольняє узагальнену умову Ліпшиця

$$\|F(x, y) - F(x^*, x^*)\| \leq \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)du, \quad (21)$$

де $x, y \in \Omega(x^*, r)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$ і L — неспадна. Нехай r задовольняє нерівність

$$\beta \int_0^r L(u)du + \frac{\alpha\beta_0}{r} \int_0^{2r} L(u)du \leq 1, \quad (22)$$

де α і β визначені в (19),

$$\beta_0 = \|[A_*^T A_*]^{-1}\|. \quad (23)$$

Тоді задача (1) має єдиний розв'язок x^* в $\Omega(x^*, r)$.

Ми досліджували локальну збіжність методу (15) за узагальнених умов Ліпшиця. Також доведено, що послідовність $\{x_n\}$, генерована методом (15), збігається до розв'язку x^* задачі (1) надійно. Далі проведемо дослідження збіжності методу (15) з використанням узагальненої умови Гьольдера у випадку, коли $\alpha_n = O(\|x_n - x^*\|)$.

Теорема 6. Нехай $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:

1) задача (1) має розв'язок x^* в області D та існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;

2) в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє умову Гьольдера з $0 < p \leq 1$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|^p + \|y-v\|^p} L(u)du, \quad (24)$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна;

3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^{r^p} L(u) du}{1 - \beta \int_0^{2r^p} L(u) du} + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r^p} L(u) du}{1 - \beta \int_0^{2r^p} L(u) du} \leq 1. \quad (25)$$

Тоді метод (15) збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ таких, що $\rho(x_{-1}) \leq \rho(x_0)$ і

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq q_1 \frac{(1 - \alpha_n + O(1)\rho(x_{n-1}))^p}{\gamma_0^p} \|x_n - x^*\|^{p+1} + \\ &+ q_0 \frac{1 + (1 - \alpha_n + O(1)\rho(x_{n-1}))^p}{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} \|x_n - x^*\|^p, \end{aligned} \quad (26)$$

де α і β визначені в (19) і величини

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u) du}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u) du}; \quad q_1 = \frac{\beta \int_0^{\gamma_0^p} L(u) du}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u) du} \quad (27)$$

менші за 1.

4. РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД З НАДКВАДРАТИЧНОЮ ЗБІЖНІСТЮ

Для знаходження розв'язку задачі (1) розглянемо різницеву модифікацію двокрокового методу Гаусса-Ньютона

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

де $A_n = F(x_n, y_n)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ в точках x_n, y_n ; x_0, y_0 — задані початкові наближення. Цей метод досліджувався в [32]. Однак обґрунтування збіжності, наведене нижче, базується на іншому підході і за слабших умов, зокрема не вимагається існування і обмеженість поділених різниць другого порядку.

Достатні умови і швидкість збіжності ітераційного процесу (28) визначені в такій теоремі.

Теорема 7. Нехай $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неперервно диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок x^* в деякій області $\Omega = \Omega(x^*, r_0) = \{x : \|x - x^*\| < r_0\} \subset D$, існує обернений оператор $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ і $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \leq B$. В області Ω функція F має поділену різницю першого порядку і

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq M(\|x - u\| + \|y - v\|),$$

$$\|F(x^*)\| \leq \eta, \quad \|F'(x^*)\| \leq \alpha, \quad 3BMr_0(\alpha + 2Mr_0) + 2MB\eta < 1,$$

$$q = \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0 + 2C_2) + 2C_2\} < 1,$$

де

$$\begin{aligned} r_0 &= \max\{\|x_0 - x^*\|, \|y_0 - x^*\|\}, \\ C_1 &= BM(\alpha + 2Mr_0)/[1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)], \\ C_2 &= 2BM\eta/[1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)]. \end{aligned}$$

Тоді для $x_0, y_0 \in \Omega$ ітераційний процес (28) є коректно визначеним і генерованим ним послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}, n = 0, 1, \dots$, містяться у відкритій області Ω і збігаються до розв'язку x^* , причому справедливі оцінки:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1 \|x_n - x^*\| \|y_n - x^*\| + C_2 (\|x_n - x^*\| + \|y_n - x^*\|); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - x^*\| &\leq C_1 (\|x_{n+1} - x_n\| + \|y_n - x^*\|) \|x_{n+1} - x^*\| + \\ &+ C_2 (\|x_n - x^*\| + \|y_n - x^*\|); \end{aligned} \quad (30)$$

$$r_{n+1} = \max\{\|x_{n+1} - x^*\|, \|y_{n+1} - x^*\|\} \leq q r_n \leq \dots \leq q^{n+1} r_0. \quad (31)$$

Як бачимо з оцінок (29) і (30), збіжність ітераційного процесу суттєво залежить від доданку, який містить величини η і M . Якщо $\eta = 0$, то ми маємо нелінійну задачу найменших квадратів з нульовим відхилом у розв'язку. У разі $M = 0$ функції відхилу лінійні. Для задач з малим відхилом у розв'язку (η — "мале") або слабо нелінійних задач (M — "мале") збіжність ітераційного процесу лінійна. При великих відхилах (η — велике) або для сильно нелінійних задач (M — велике) ітераційний процес (28) може взагалі не збігатися.

Для задач з нульовим відхилом у розв'язку, тобто таких, що $F(x^*) = 0$, можна отримати кращі оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу (28).

Розглянемо збіжність двокрокової ітераційно-різницевої модифікації методу Гаусса-Ньютона [8, 15] на базі методу з порядком $1 + \sqrt{2}$ за узагальнених умов Ліпшиця для нелінійних задач найменших квадратів. Отже, дослідимо збіжність методу (28) до розв'язку задачі (1).

Теорема 8. Нехай $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:

1) задача (1) має розв'язок x^* в області D та існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;

2) в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє узагальнену умову Ліпшиця

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-u\| + \|y-v\|} L(z) dz, \quad (32)$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна функція;

3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^{3r} L(z) dz}{1 - \beta \int_0^{2r} L(z) dz} + \frac{\sqrt{2} \alpha \beta^2 \int_0^{2r} L(z) dz}{r(1 - \beta \int_0^{2r} L(z) dz)} \leq 1. \quad (33)$$

Тоді метод (28) збігається для всіх $x_0, y_0 \in \Omega(x^*, r)$ таких, що $\rho(y_0) \geq \rho(x_0)$ і

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{q_1}{\rho(y_0)} \|x_n - x^*\| \|y_n - x^*\| + q_0 \|x_n - x^*\|, \quad (34)$$

$$\|y_{n+1} - x^*\| \leq \frac{q_2}{\rho(x_1)} \|x_{n+1} - x^*\| \|x_n - x^*\| + q_0 \|x_n - x^*\|, \quad (35)$$

де

$$\rho(x) = \|x - x^*\|, \quad \alpha = \|F(x^*)\|, \quad \beta = \|[F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1} F'(x^*)^T\| \quad (36)$$

і величини

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(x_0)(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}, \quad q_1 = \frac{\beta \int_0^{\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz},$$

$$q_2 = \frac{\beta \int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz} \quad (37)$$

менші за 1.

Наслідок 4. *Порядок збіжності ітераційного процесу (28) у випадку задачі з нульовим відхилом дорівнює $1 + \sqrt{2}$.*

5. ПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

У цьому пункті для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів (1) пропонуємо метод

$$x_{k+1} = x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k),$$

$$\bar{x}_k = (1 - \mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

де $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — деякий допоміжний оператор, для якого

$$x^* = \varphi(x^*). \quad (39)$$

Легко бачити, що при $\mu = 0$ ми отримуємо з (38) відомий метод Гаусса-Ньютона [1]. За допомогою параметра μ можна вибрати метод з найбільшою швидкістю збіжності серед методів класу (38).

Розглянемо деякі варіанти вибору оператора $\varphi(x)$.

1. *Випадок з нульовим відхилом:* $F(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$.

Умови і швидкість збіжності ітерацій (38) встановлюються у такій теоремі.

Теорема 9. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m (m \geq n)$ і функція $f(x) = \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$ двічі неперервно диференційовна на відкритій опуклій множині $D \subset \mathbb{R}^n$. Припустимо, що*

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq N\|x - y\|,$$

$\|\varphi'(x)\| \leq \alpha$, $\|\varphi''(x)\| \leq L$, $\forall x, y \in D$, а також що існують $x^ \in D$ і $\alpha \geq 0$, такі, що $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$, α — найменше власне число для $F'(x^*)^T F'(x^*)$.*

Тоді існує r_0 таке, що для $x_0 \in \Omega_ = \{x : \|x - x^*\| \leq r_0\}$ послідовність, породжена (38), коректно визначена, збігається до x^* і задовольняє нерівності*

$$r_k = \|x_k - x^*\| \leq (h_0 r_0)^{(2^k - 1)} r_0, \quad (40)$$

де

$$h_0 = \frac{1 + \alpha}{2\lambda} \left(\frac{N}{3} r_0 \mu^2 (1 + \alpha^2) + L(|2\mu - 1| + 2\mu) \right) < \frac{1}{r_0},$$

$$r_0 = \|x_0 - x^*\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

Дослідимо вплив параметра μ на швидкість збіжності ітераційного процесу (38). Швидкість збіжності можна підвищувати двома шляхами: збільшенням порядку збіжності і зменшенням знаменника збіжності $h_0 r_0$. У знаменник $h_0 r_0$ входить величина $\chi(\mu) = |2\mu - 1| + 2\mu\alpha$, найменше значення якої досягається при $\mu = 0,5$ у випадку $\alpha < 1$ і при $\mu = 0$ у протилежному випадку. Тоді ітераційний процес матиме найбільшу швидкість збіжності і найменш жорсткі умови на вибір початкового наближення x_0 (ширша область збіжності). Як бачимо із (40), при достатньо малих значеннях r_0 процес (38) із значенням $\mu = 0,5$ і $\alpha < 1$ має вищу швидкість збіжності, ніж метод Гаусса-Ньютона.

2. Випадок $F(x^*) \neq 0$. Умові (39) задовольняє оператор

$$\varphi(x) = x - \beta F'(x)^T F(x), \quad \beta > 0,$$

який відповідає градієнтному методу мінімізації функціоналу $f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$.

Теорема 10. Нехай виконуються умови теореми 9 і $\|F'(x)\| \leq \alpha$,

$$\|(F'(x) - F'(x^*))^T F(x^*)\| \leq \sigma \|x - x^*\| \quad (41)$$

для всіх $x_0 \in D$, причому $\lambda > \sigma(1 + \delta) \geq 0$, $\delta = \mu\beta(\alpha^2 + \sigma)$.

Тоді для довільного $C \in (1, \lambda(1 + \delta)\sigma)$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $x_0 \in \Omega(x^*, \varepsilon)$ послідовність (38) коректно визначена, збігається до x^* і задовольняє нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq \frac{C\sigma(1 + \delta)}{\lambda} \|x_k - x^*\| + \\ &+ \frac{C\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} \|x_k - x^*\|^2 + L(1 + 2\delta) \right] \|x_k - x^*\|^2; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{C\sigma(1 + \delta) + \lambda}{2\lambda} \|x_k - x^*\| < \|x_k - x^*\|. \quad (43)$$

Наслідок 5. Нехай виконані умови теореми 10. Якщо $F(x^*) = 0$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $x_0 \in \Omega(x^*, \varepsilon)$ послідовність $\{x_k\}$, породжена методом (38), коректно визначена і збігається квадратично до x^* .

Із (41) бачимо, що параметр σ є абсолютною мірою нелінійності і величини відхилю в розв'язку задачі, а з (42) — що $\frac{\sigma(1 + \delta)}{\lambda}$ можна розглядати як відносну міру нелінійності і величини відхилю в розв'язку задачі. З теореми 10 випливає, що швидкість збіжності методу (38) зменшується зі зростанням відносної нелінійності чи відносного відхилю в розв'язку задачі. Якщо одна із цих двох величин надто велика, то метод може взагалі розбігатися.

Недолік методу (38) полягає в тому, що він не є коректно визначеним, якщо матриця $[F'(x_k)^T F'(x_k)]^{-1}$ невизначена. Цей недолік усунутий в методі

$$x_{k+1} = x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k) + \gamma_k E]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F'(x_k), \quad (44)$$

$$\bar{x}_k = (1 - \mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad \gamma_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

частковим випадком якого при $\mu = 0$ є метод Левенберга-Марквардта [1]. Властивості локальної збіжності методу (44) аналогічні властивостям методу (38) і наведені в [7].

Відзначимо, що неточний метод Гаусса-Ньютона за узагальнених умов Ліпшиця вивчався у [4].

6. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ З ПОСЛІДОВНОЮ ТА ПАРАЛЕЛЬНОЮ АПРОКСИМАЦІЯМИ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА ДО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

На кожній ітерації методу Гаусса-Ньютона, Левенберга-Маркварта [1] та його модифікацій [7, 33] для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів (1) потрібно розв'язувати систему лінійних рівнянь, що не завжди легко здійснити. Тому ми використаємо ідею послідовної та паралельної апроксимацій оберненого оператора [9, 34] для побудови нових методів для розв'язування задачі (1), які не потребують розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо метод з послідовною апроксимацією, побудований на базі методу Гаусса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \quad (45)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_{k+1})^T J(x_{k+1}) A_k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (46)$$

Тут E — тотожний оператор (одичина матриця), $J(x) = F'(x)$, x_0 , A_0 — відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* задачі (1) і до оберненого оператора $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Процес (45)–(46) складається з двох гілок, які виконуються по черзі.

Умови збіжності ітераційного процесу (45)–(46) до розв'язку задачі (1) для випадку нульового відхилення $F(x^*) = 0$ дає

Теорема 11. *Нехай виконуються умови:*

1) задача (1) має розв'язок x^* , $F(x^*) = 0$ і існує $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$;

2) в околі $\Omega_* = \{x : \|x - x^*\| \leq r_0\}$ справедливі оцінки $\|F''(x)\| \leq L$, $\|J(x)^T - J(x^*)^T\| \leq L \|x - x^*\|$;

3) $\max\{\|J(x^*)\|, \|J(x^*)^T\|\} \leq C$;

4) $h_0 = \max\{K_0, C^2 + (B + r_0)^2 L K_0 (2C + L r_0)\} < \frac{1}{r_0}$,

де

$$r_0 = \max\{\|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\|\},$$

$$K_0 = C^2 + (B + r_0)[C(2 + \frac{1}{2}L) + L(1 + \frac{1}{2}L)r_0].$$

Тоді послідовності $\{x_k\}$ і $\{A_k\}$ збігаються відповідно до x^* і A^* , причому справедливі оцінки

$$r_k = \max\{\|x_k - x^*\|, \|A_k - A^*\|\} \leq (h_0 r_0)^{2^k - 1} r_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (47)$$

Для розв'язування задачі (1) на паралельних обчислювальних процесорах, які працюють зі спільною пам'яттю, розглянемо такий ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \quad (48)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_k)^T J(x_k) A_k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (49)$$

де також x_0, A_0 — відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* задачі (1) і до оберненого оператора $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Метод (48)–(49), як і метод (45)–(46), складається з двох гілок, однак тут обидві гілки виконуються паралельно. Крім того, обчислення в кожній гілці можна розпаралелити, використовуючи методи лінійної алгебри.

Достатні умови збіжності методу (48)–(49) встановлює

Теорема 12. *Нехай виконуються умови:*

1) задача (1) має розв'язок $x^* \in D$, $F(x^*) = 0$ і існує $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$;

2) в околі $\Omega_* = \{x : \|x - x^*\| \leq r_0\} \subset D$ справедливі оцінки

$$\|F''(x)\| \leq L, \quad \|J(x)^T - J(x^*)^T\| \leq L\|x - x^*\|;$$

3) $\max\{\|J(x^*)\|, \|J(x^*)^T\|\} \leq C$;

4) $h_0 = \max\{K_0 r_0, G\} < 1$,

де

$$r_0 = \max\{\|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\|\},$$

$$K_0 = C^2 + (B + r_0) \left[C \left(2 + \frac{1}{2} L \right) + L \left(1 + \frac{1}{2} L \right) r_0 \right],$$

$$G = C^2 r_0 + L(2C + L r_0)(B + r_0)^2.$$

Тоді послідовності $\{x_k\}$ і $\{A_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, збігаються відповідно до x^* і A^* , причому знайдуться такі сталі γ_1 і γ_2 , при яких справедливі оцінки

$$\|x_k - x^*\| \leq h^{c_k} r_0, \quad \|A_k - A^*\| \leq h^{g_k} r_0, \quad (50)$$

де

$$c_k = \gamma_1 t_1^k + \gamma_2 t_2^k - 2, \quad g_k = c_{k-1} + 1, \quad c_{-1} = -1,$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618, \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

При наявних перевагах методу (48)–(49) у нього є і недоліки: швидкість його збіжності знизилась до $1,618 \dots < 2$. Крім того, через різну кількість обчислень у формулах (48) та (49) один із процесорів буде завантажений неповністю і може простоювати. Хоча за рахунок використання паралельних обчислювальних пристроїв досягається скорочення загального часу розв'язання задач, однак обчислювальні ресурси використовуються неефективно. Щоб усунути згадані недоліки, можна здійснити реалізацію

обчислювального процесу, яка не передбачає синхронізації обчислень у різних процесорах [35]. Такий підхід приводить до асинхронного варіанту методу (48)–(49):

$$x_{k+1}^{m+1} = x_{k+1}^m - A_k J(x_k^{m_k-1})^T F(x_{k+1}^m), \quad m = 0, 1, \dots, m_{k+1} - 1, \quad (51)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_k^{m_k-1})^T J(x_k^{m_k-1}) A_k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (52)$$

де $x_k^{m_k}$ — останнє наближення до точного розв'язку x^* задачі (1), при визначенні якого застосовували апроксимацію оберненого оператора A_{k-1} ; $x_k^{m_k} = x_k = x_{k+1}^0$; x_0, A_0 — початкові наближення до x^* , $[J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Метод (51)–(52) використовує асинхронну апроксимацію оберненого оператора. Перевага методу (51)–(52) перед методом з синхронною апроксимацією оберненого оператора (48)–(49) полягає в тому, що при реалізації методу (51)–(52) на двох паралельних процесорах останні не будуть простоювати. Крім того, порядок збіжності процесу (51)–(52) більший (2 проти 1,618...). Достатні умови квадратичної збіжності ітерацій (51)–(52) до точного розв'язку x^* , A^* встановлюються за схемою праці [35].

Аналогічно можна побудувати модифікації з послідовною та паралельною апроксимаціями на базі інших методів ньютонівського типу для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів.

7. ВИСНОВКИ

У цій статті запропоновано нові ітераційно-різницеві методи та параметричні модифікації методу Гаусса-Ньютона і Левенберга-Маркварта. Розглянуто нові однокрокові та двокрокові різницеві ітераційні процеси. Методи вивчалися при класичних умовах Ліпшиця, при умовах Гьольдера, при узагальнених умовах Ліпшиця, які накладались на поділені різниці першого або другого порядку. Також запропоновано та обгрунтовано варіанти методу Гаусса-Ньютона з послідовною та паралельною апроксимаціями оберненого оператора.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
2. Argyros I.K. On the Gauss-Newton method / I K. Argyros, S. Hilout // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2012. — V. 35(1). — P. 537–550.
3. Chen J. Convergence of Gauss-Newton method and uniqueness of the solution / J. Chen, W. Li // Appl. Math. Comp. — 2005. — V. 170. — P. 686–705.
4. Chen J. The convergence analysis of inexact Gauss-Newton methods for nonlinear problems / J. Chen // Computational Optimization and Applications. — 2008. — V. 40. — № 1. — P. 97–118.
5. Häussler W.M. A Kantorovich-type convergence analysis for the Gauss-Newton method / W.M. Häussler // Numer. Math. — 1986. — V. 48(1). — P. 119–125.
6. Schwetlick H. Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen / H. Schwetlick. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. — 346 s.

7. Бартіш М.Я. Деякі методи розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів / М.Я. Бартіш, С.М. Шахно // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1993. — Вип. 39. — С. 3–7.
8. Бартіш М.Я. Про одну модифікацію методу Гауса-Ньютона / М.Я.Бартіш, А.І. Чипурко, С.М. Шахно // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1995. — Вип. 42. — С. 35–38.
9. Бартиш М.Я. Исследование параметрических итерационных процессов для решения нелинейных уравнений / М.Я. Бартиш, С.М. Шахно // Проблемы управления и информатики. — 1997. — №2. — С. 22–30.
10. Бартіш М.Я. Чисельне дослідження деяких алгоритмів розв'язування нелінійних рівнянь / М.Я.Бартіш, С.М. Шахно, В.О. Ломіковський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1995. — Вип. 41. — С. 3–8.
11. Шахно С.М. Дослідження різницевих аналогів методу Гауса-Ньютона / С.М. Шахно // Математичні студії. — 1998. — Т. 10. — № 2. — С. 119–122.
12. Шахно С.М. Застосування методів з послідовною і паралельною апроксимаціями оберненого оператора до нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно // Інф. технол. і системи. — 1999. — Т. 2. — № 1. — С. 151–154.
13. Шахно С.М. Методи з апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно // "Сучасні проблеми математики". Матеріали Міжнародної наук. конф. Ч. 3. Чернівці-Київ (22-27 червня 1998 р., Чернівці). — С. 212–215.
14. Шахно С.М. Про двокрокову модифікацію методу Гауса-Ньютона при узагальнених умовах Ліпшиця для нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно, Р.П. Якимчук // Матем. вісник НТШ. — Т. 6. — 2009. — С. 277–286.
15. Шахно С. Про різницевий метод з надквадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С.М. Шахно, О.П. Гнатишин, Р.П. Якимчук // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. мат. та інф. — Вип. 13. — 2007. — С. 51–58.
16. Shachno S. Iterative-Difference Methods for Solving Nonlinear Least-Squares Problem / S. Shachno, O. Gnatyshyn // Progress in Industrial Mathematics at ECMI 98. — Stuttgart: Teubner, 1999. — P.287–294.
17. Shakhno S.M. On a Secant Type Method for Nonlinear Least Squares Problems / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn, R.P. Iakymchuk // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2009. — № 1 (97). — P. 112–121.
18. Shakhno S.M. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear least squares problems / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — V. 161, №1. — P. 253–264.
19. Shakhno S.M. On an one-step modification of Gauss-Newton method under generalized Lipschitz conditions for solving the nonlinear least squares problem / S.M.Shakhno, R.P. Iakymchuk // Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — V. 9. — P. 565–566.
20. Shakhno S.M. Some numerical methods for nonlinear least squares problems / S.M. Shakhno // Symbolic Algebraic Methods and Verification Methods / G. Alefeld, J. Rohn, S. Rump, T. Yamamoto (eds.). — Wien New York: Springer, 2001. — P. 235–243.
21. Шахно С.М. Програмна реалізація методів розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С.М. Шахно, П.М. Недашковський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1998. — Вип. 50. — С. 211–213.

22. Shakhno S.M. Algorithmus für die Lösung eines nichtlinearen Quadratmittelproblems unter Nebenbedingungen / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn // Zeitschrift für Angewandte Math. und Mech. — 2001. — V. 81, S. 4. — P. 1023-1024.
23. Шахно С.М. Застосування методів типу Гауса-Ньютона до нелінійної задачі найменших квадратів з обмеженнями / С.М. Шахно, О.П. Гнатишин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф. — 2000. — Вип. 1. — С. 255–258.
24. Argyros I.K. On the local convergence of the Gauss–Newton method / I.K. Argyros, S. Hilout // Punjab University Journal of Mathematics. — 2009. — P. 23–33.
25. Argyros I.K. On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations / I.K. Argyros // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1991. — V. 10. — № 1. — P. 83–92.
26. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. — 1967. — Т. 16. — С. 13–26, С. 146–156.
27. Potra F.A. On an iterative algorithm of order 1.839...for solving nonlinear operator equation / F.A. Potra // Numer. Funct. Anal. And Optimiz. — 1984–85. — 7(1). — P. 75–106.
28. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / X. Wang // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — V. 20. — P. 123–134.
29. Шахно С.М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / С.М. Шахно // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т. 4. — С. 296–305.
30. Ren A. A derivative free iterative method for solving least squares problems / H. Ren, I.K. Argyros, Saïd Hilout // Numerical Algorithms. — 2011. — V. 58. — № 4. — P. 555–571.
31. Ren H. Local convergence of a secant type method for solving least squares problems / H. Ren, I.K. Argyros // Appl. Math. Comp. — 2010. — V. 217. — P. 3816–3824.
32. Бартіш М.Я. Про одну модифікацію методу Гаусса-Ньютона / М.Я. Бартіш, А.І. Чипурко // Математичні студії. — 1998. — V. 10. — №1. — С. 85–92.
33. Shachno S.M. Numerical methods for solving nonlinear least squares problems / S.M. Shachno // Book of abstracts of 9th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry . — Copenhagen (Denmark), 1996. — P. 543–545.
34. Роозе А.Ф. Об итерационном методе решения нелинейных уравнений с применением параллельной аппроксимации обратного оператора / А.Ф. Роозе // Известия АН ЭССР. Физика. Матем. — 1982. — Т. 16. — №1. — С. 32–37.
35. Роозе А.Ф. Асинхронный итерационный метод решения нелинейных уравнений с применением параллельной аппроксимации обратного оператора / А.Ф. Роозе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986. — Т. 26. — № 8. — С. 1250–1254.

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ, ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА, ВУЛ. УНІВЕРСИТЕТСКА, 1, ЛЬВІВ, 79000, УКРАЇНА.

Надійшла 29.08.2012

З М І С Т

90 років від дня народження академіка Івана Івановича Ляшка, головного редактора журналу (1969–2008)	3
<i>О. Ю. Грищенко, Д. А. Ключин</i> Науковий спадок академіка І. І. Ляшка	6
<i>Э. Н. Береславский</i> О применении метода П. Я. Полубариновой-Кочкиной в теории фильтрации	12
<i>І. М. Александрович, М. В. Сидоров</i> Інтегральні зображення $x^k y^l$ -аналітичних функцій та їх формули обернення	24
<i>А. Я. Бомба, О. М. Гладка</i> Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах	35
<i>В. В. Семенов</i> Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора	46
<i>А. С. Крылова, Г. В. Сандраков</i> Усреднения спектральной задачи на дрібно-періодичній сітці в комплекснозначному випадку	57
<i>А. В. Анікушин</i> Діжковість простору послідовностей сумовних з деяким степенем, із зміненою нормою	73
<i>О. С. Бичков</i> Дослідження стійкості узагальнених нечітких гібридних автоматів	76
<i>О. Н. Вятчанінова, О. О. Пришляк, К. О. Пришляк</i> Гомотопічна класифікація некритичних м-функцій на тривимірному диску	87
<i>В. Ю. Гончаренко</i> Факторизація обернених матриць розрідженими матрицями	94
<i>С. С. Зуб</i> Орбитрон: устойчивость орбитального движения магнитного диполя	101
<i>E. V. Ivokhin, Almodars Barraq Subhi Kaml</i> Single-objective linear programming problems with fuzzy coefficients and resources	117
<i>А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк</i> Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений поведения системы	126

<i>А. Г. Руткас, М. С. Филипковская</i>	
Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений	135
<i>В. М. Терещенко</i>	
Построение триангуляции межполитопной области в d -мерном пространстве	146
<i>С. М. Шахно</i>	
Ітераційні методи для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів	154