

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДВОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

А. Я. Бомба, С. В. Ярощак

РЕЗЮМЕ. Розглядається процес двофазної фільтрації в пласті, обмеженому непроникним зовнішнім контуром, контурами по-чергово розміщених криволінійними рядами нагнітальних і експлуатаційних свердловин. В рамках теорії Баклея-Леверетта на основі ідей методів квазіконформних відображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу розроблено числовий алгоритм розв'язання відповідних задач (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо).

Вступ

При розв'язанні задач фільтрації в системі свердловин числовими методами (наприклад, методами скінченних різниць, скінченних елементів тощо) у зв'язку із значним переважанням розмірів пласта над радіусами свердловин виникають проблеми як апроксимації границі області так і вибору внутрішніх вузлів сітки [1]. Нами в роботах [2]–[5] запропоновано підхід (що автоматично вирішує проблему вибору кроку сітки) до розв'язання задач фільтрації (зокрема, двофазної), оснований на ідеях методів квазіконформного відображення (фізичної області на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, а також оберненого до нього відображення) та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища.

У цій роботі в основу дослідження процесу двофазної фільтрації, породженого серією свердловин, покладено нелінійну, відносно насиченості, модель Баклея-Леверетта. Модифіковано числовий метод квазіконформних відображень до розв'язання відповідних нелінійних крайових задач (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо), який дозволяє передбачити характеристики пластової системи при різних умовах впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в призабійних зонах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо пласт, обмежений непроникним зовнішнім контуром, що розбурений «квазісиметричними» рядами експлуатаційних та нагнітальних

свердловин (див., рис. 1). Ряди розташовані так, що перетік між «серіями трійок» експлуатаційних та нагнітальних свердловин — відсутній. Це дає можливість область комплексного квазіпотенціалу G_ω зобразити у вигляді «вертикального» прямокутника з горизонтальними «квазіперіодично» розміщеними розрізами.

Зокрема, на рис. 2 зображено випадок, коли у відповідних рядах на одну експлуатаційну свердловину припадає декілька нагнітальних, але за умов певного роду симетрії, що дозволяє виділити елемент G_z , який містить p нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну (див., рис. 3а, де $d = 2p(r+a)$, r^0 — радіус свердловин, a — половина відстані між нагнітальними свердловинами).

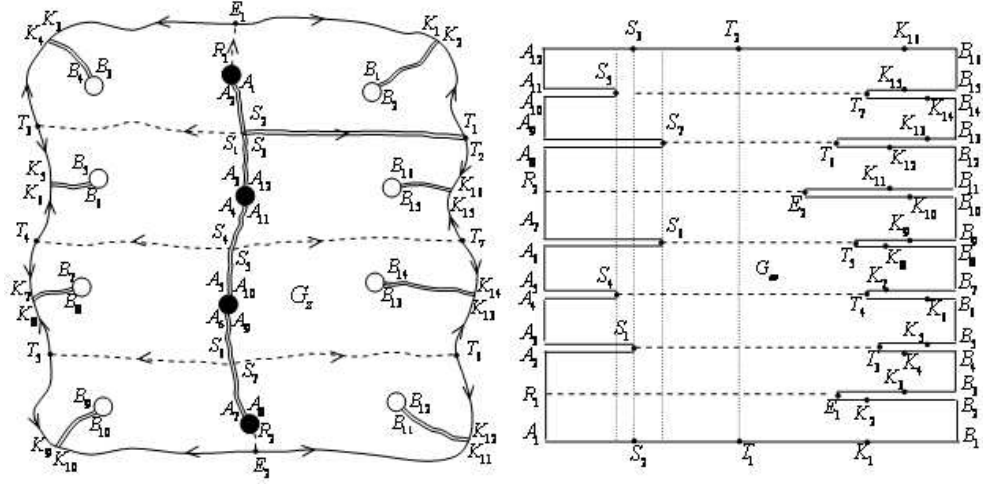
Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ — тиск, $\tilde{p}$ — деяке характерне його значення) та водонасиченості $s = s(x, y, t)$, згідно з [4–7] представимо у вигляді:

$$\vec{v}_1 = \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1} \text{grad}\varphi, \quad \vec{v}_2 = \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_1 = 0, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_2 = 0,$$

де t — час, σ, k — пористість та абсолютна проникність ґрунту, $\tilde{k}_1 = (1-s)^2$, $\tilde{k}_2 = s^2$ — відносні фазові проникності, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ — вектори швидкості, μ_1, μ_2 — в'язкості нафти та води. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії та початкових і граничних умов, маємо:

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{v} &= 0, \quad \vec{v} = \bar{k} \cdot \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \varphi|_{L_g} &= \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\underline{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\check{L}} = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \\ s|_{L_g} &= s_*, \quad s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

де $L_g = \{z = x + iy : x = r^0 \cos(\tau), y = r^0 \sin(\tau) + (2g-1)(a+r^0), 3\pi/2 \leq \tau \leq 5\pi/2\} = \{z : f_g(x, y) = 0, g = \overline{1, p}\}$, $L^* = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + h, y = r^0 \sin(\tau) + b + r^0, \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\} = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, $\underline{L} = A_1 \tilde{H} \cup \tilde{H} D \cup D B_0 = \{z : f(x, y) = 0\}$, $A_1 \tilde{H} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\}$, $\tilde{L} = A_{2p} \tilde{H} \cup \tilde{H} C \cup C B_p = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}$, $\tilde{H} D = \{z : y = 0, 0 \leq x \leq h\}$, $D B_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq b\}$, $A_{2p} \tilde{H} = \{z : x = 0, d-a \leq y \leq d\}$, $\tilde{H} C = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}$, $\check{L} = \bigcup_{u=2}^p A_{2u-2} H_{u-1} A_{2u-1}$, $C B_p = \{z : x = h, b+2r \leq y \leq d\}$, $f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}$, $\bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}$, $A_{2u-2} H_{u-1} A_{2u-1} = \{z : x = 0, 2(u-1)(a+r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a+r^0) + a\}$, $\tilde{s}(x, y)$ — задана, достатньо гладка функція така, що $\tilde{s}|_{L_g} = s_*$.


 Рис. 1. Пласт та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω

Аналогічно до [3]–[5], ввівши функцію течії ψ (комплексно спряжену до φ) задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим) полем насиченості зводиться до задачі на квазиконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [2] однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^p G_g \cup \bigcup_{g=1}^{p-1} \bar{L}_g$:

$$\begin{aligned} \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_g} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\bar{L}} = 0, \quad \psi|_{\bar{L}} = Q_p, \\ \psi|_{A_{2u-2}H_{u-1}A_{2u-1}} &= Q_{u-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, \quad s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y), \quad (3)$$

де $Q_g - Q_{g-1} = \oint_{L_g} -v_y dx + v_x dy$, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$,
 $G_g = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad Q_{g-1} < \psi < Q_g, Q_0 = 0\}$,
 $\bar{L}_g = \{\omega : \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_g\}$, Q_g – невідома витрата.

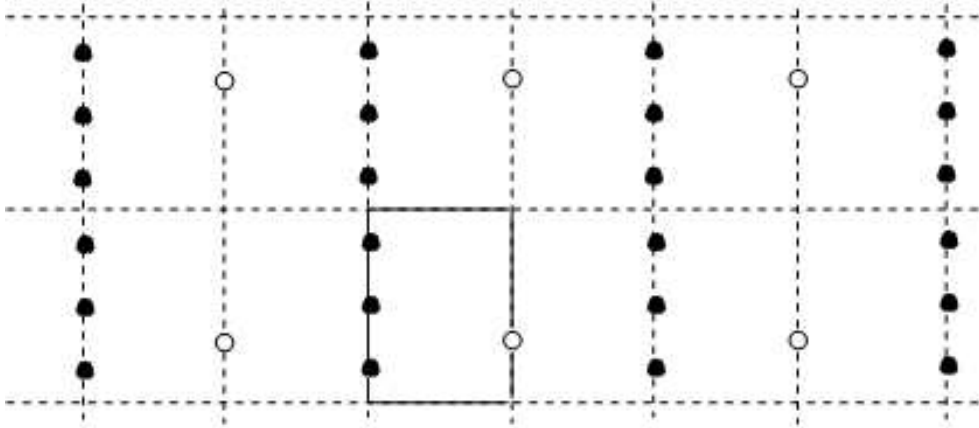


Рис. 2. Схематичне зображення розміщення свердловин в пласті з виділеним елементом симетрії

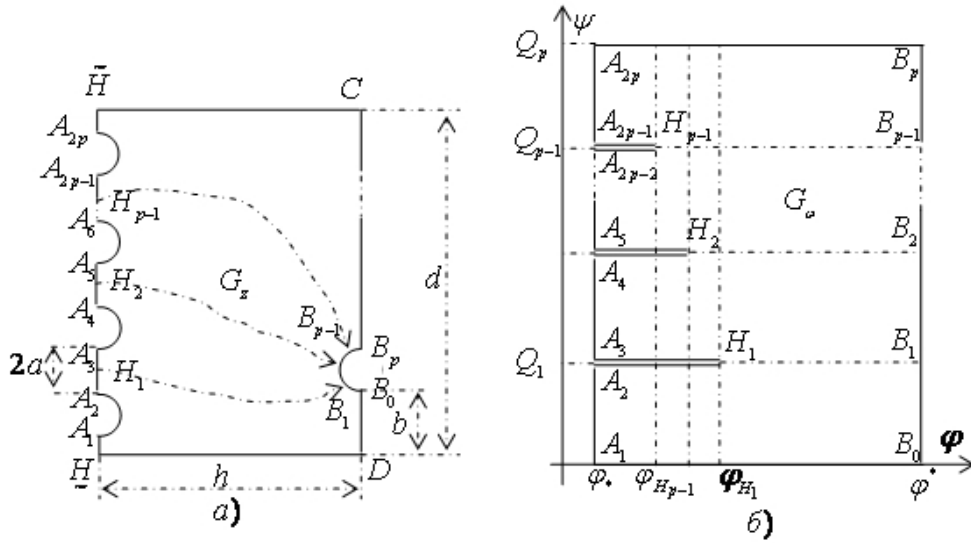


Рис. 3. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область квазіпотенціалу G_ω (б)

Обернена до (2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини характеристичної функції течії запишеться у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_p), y(\varphi, Q_p)) = 0, \\ \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, f_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g, \\ x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}}, \\ x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r) + a, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_p, g = 2, p, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (6)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$, умови (4) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$, задачу для насиченості (3) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (7)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (8)$$

де рівняння (7) є фактично просторово-одновимірним (адже змінні t та ψ тут фігурують як параметри). Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з таким використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення (зокрема, будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату і інші невідомі фільтраційні параметри); за знайденими фільтраційними характеристиками згідно (7) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень (однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витіснючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини).

Постановка задач (як прямих в термінах φ , ψ так і обернених) для пласта, зображеного на рис. 1, ускладнюється в зв'язку з необхідністю задання умов для відшукування характерних ліній розділу течії, точок «призупинки», величин різного роду перетоків, а також конструювання схем процесу склеювання між собою прямокутників, що утворюють область квазіпотенціалу тощо. При цьому, можливі, наприклад, такі типи конкретизації постановки вихідної задачі:

1. За відомими координатами центрів свердловин і потенціалами, заданими на них, знаходимо гідродинамічну сітку, фільтраційні витрати, координати точок «призупинки», поля квазіпотенціалу, насиченості і положення кривих, що розділяють ділянки впливу згаданих вище криволінійних рядів.
2. За заданими вхідними параметрами вказати умови розташування свердловин в криволінійних рядах, що забезпечували б відсутність перетоків між рядами.

2. РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ ТА АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Різницевий аналог та алгоритм розв'язання задачі запишемо для одного із характерних випадків формування течії, коли $\varphi_{H_1} \geq \varphi_{H_2} \geq \varphi_{H_3} \geq \dots \geq \varphi_{H_{p-1}}$.

Вузли (φ_i, ψ_j) сітки визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*)/(n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi_* - \varphi_{H_g})/(n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j\Delta\psi_g, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1}, (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g, \\ \Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1})/m_g, g = \overline{1, p}, Q_0 = 0, m_0 = 0,$$

$n = n_1^g + n_2^g + 1, m = \sum_{l=1}^p m_l + p - 1, m_l, n_1^g, n_2^g \in N$. Рівняння (6) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [8, 9] таким чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \quad (9)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}, a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}, a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2, \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2, k_n = 2k_{i,j}k_{i,j+1}/(k_{i,j} + k_{i,j+1}), k_s = 2k_{i,j}k_{i,j-1}/(k_{i,j} + k_{i,j-1}), k_e^{-1} = 0,5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), k_w^{-1} = 0,5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1})$ (вибір величин $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω , наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{H_1}, \psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2, \Delta\psi_+ = \Delta\psi_1, \Delta\psi_- = \Delta\psi_1$). Апроксимації крайових умов запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} f_g(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1}, \\ f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, j = \overline{0, m}, x_{i, m_{g-1}} = 0, \\ 2(g-1)(a+r) - a &\leq y_{i, m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1, \\ x_{i, m_g} &= 0, y_{H_{g-1}} \leq y_{i, m_g} \leq 2(g-1)(a+r) + a, i = \overline{0, n_1}, \\ \tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, \tilde{f}(x_{i, m_p}, y_{i, m_p}) = 0, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, g = \overline{2, p}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут, як і в [4, 5], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності, вздовж границі області G_z , приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних. Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1}, g = \overline{1, p}, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) &= 0, j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (11)$$

Невідомі витрати Q_g та значення потенціалу φ_{H_g} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами: $\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g$,

$Q_g = m_g \Delta \psi_g$, де $\Delta \psi_g = \frac{\Delta \varphi_1 \gamma_2^g + \Delta \varphi_2 \gamma_1^g}{2 \gamma_1^g \gamma_2^g}$, γ_l^g одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей, а саме:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g (n_1 + 1)}, \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$\tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \gamma_{i,j} = \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, g = \overline{1, p}, \quad (12)$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (7) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [10] таким чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma_{k_{i,j}} \Delta \varphi_l^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \quad (13)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = 1, n_1^g + 1, \quad l = 1, \quad i = n_1^g + 2, n, \quad l = 2,$$

де τ — крок по часу, $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ — насиченість у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ — швидкість (шукаємо аналогічно, як і в роботі [3]). Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок τ , параметри розбиття $n_1^g, n_2^g, m_g, g = \overline{1, p}$ області G_ω та точності роботи алгоритму $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (10)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулами (12) наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (9) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [3–5], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних вузлів, використовуючи умови ортогональності та знаходимо наближення величин Q_g, φ_{H_g} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов, відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей

та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку по часу (з врахуванням граничної умови) згідно (13) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті, та повторюємо кроки алгоритму.

При побудові різницевого аналогу відповідної рис. 1 задачі до двох індексів (i, j) координат (x, y) шуканих точок приписуємо ще один, що характеризує належність їх образів до того чи іншого прямокутника Π ($\Pi \in G_\omega$).

3. ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ

Вище описаний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Продемонструємо його можливості на тестовому прикладі, коли $r^0 = 0.3$, $a = 1$, $h = 3$, $d = 2p(a + r^0)$, $n_2 = 30$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\sigma = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $k = 1$, $\tau = 0.0001$. На рис.4 зображено гідродинамічну сітку та розподіл насиченості в момент часу $t = t_0$, при $p = 3$, $n_1^1 = 5$, $n_1^2 = 5$, $m_1 = 20$, $m_2 = 30$, $m_3 = 20$, $b = 3a + 2r^0$. Величини невідомих параметрів Q_1 , Q_2 , Q_3 та φ_{H_1} , φ_{H_2} в початковий момент часу $t = 0$ відповідно дорівнюють $Q_1 = 0,126$, $Q_2 = 0,233$, $Q_3 = 0,126$, $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_2} = 0,038$, а при $t = 3,199$: $Q_1 = 0,142$, $Q_2 = 0,216$, $Q_3 = 0,142$, $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_2} = 0,027$.

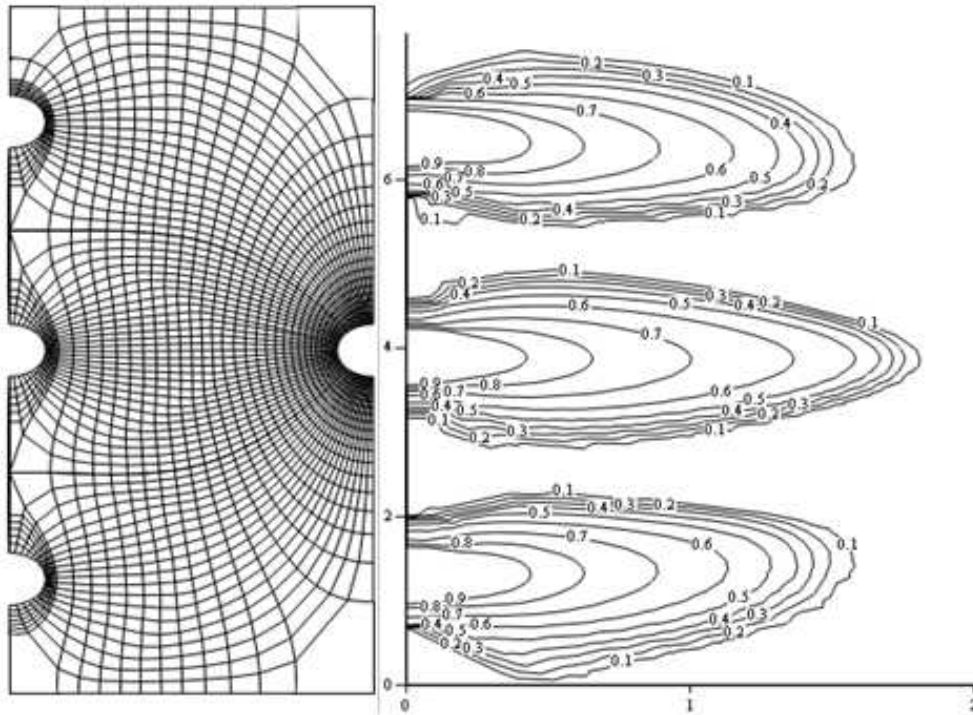


Рис. 4. Гідродинамічна сітка та поле насиченості в момент часу $t_0 = 3.199$

ВИСНОВКИ

На основі ідей методів квазіконформних відображень (зокрема, введення спеціального типу фіктивного комплексного квазіпотенціалу для далеко не квазіпотенціальних фізичних полів) та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища побудовано алгоритм числового розв'язання модельних задач двофазної фільтрації типу Баклея-Левеверетта (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо). При цьому вихідна нелінійна задача розщеплена на послідовність простіших задач: крайових задач на квазіконформні відображення та нелінійних задач для просторово-одновимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з параметрами.

З метою забезпечення можливості керування фільтраційним потоком (адже, в залежності від значень параметра b , що характеризує розміщення експлуатаційної свердловини, можливими є різні випадки формування течії у пласті, а отже, і області комплексного квазіпотенціалу) розроблено відповідний програмний комплекс, що реалізує запропонований підхід та містить як алгоритм вибору так і алгоритми розв'язання задачі у кожному із конкретних випадків (див., напр., [2]). У перспективі є проведення відповідного системного аналізу та постановка такого роду задач за умов оптимізації та керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Никифоров А. И. Численное решение задачи прослеживания границы раздела двух жидкостей в неоднородном пласте / А. И. Никифоров // Исслед. по подземн. гидромех., — 1979, выпуск 3. — С. 63–68.
2. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський — К. : Наукова думка, 2007. — 308 с.
3. Бомба А. Я., Ярошак С. В. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6(15). — Рівне : РДГУ, 2009. — С. 20–35.
4. Бомба А. Я., Ярошак С. В. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Доповіді НАН України. — 2010. — №10 — С. 34–40.
5. Бомба А. Я., Ярошак С. В. Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2010. — № 2(35). — С. 31–35.
6. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик — М. : Недра, 1972. — 288 с.
7. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. — Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. — 531 p.

8. Versteeg Н. К. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / Н. К. Versteeg, W. Malalasekera. — Longman Scientific & Technical. New York, 1995. — 267 с.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.
10. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р. Д. Каневская. — Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. — 140 с.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ, РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, вул. Остафова, 31, РІВНЕ, УКРАЇНА.

Надійшла 10.08.2010

УДК 519.2

ПРОЦЕС УНІФІКАЦІЇ ДАНИХ

К. М. ГОЛУБЄВА

РЕЗЮМЕ. В статті запропоновано кілька методів уніфікації даних, проведено їх порівняння між собою, а також обґрунтовано необхідність проведення уніфікації до застосування комп'ютерного цитогенетичного методу діагностики раку молочної залози.

ВСТУП

В багатьох моделях виділення корисного сигналу $f(t)$ на фоні випадкових перешкод $y(t)$ вважають, що випадковий шум $y(t)$ діє адитивно на корисний сигнал $f(t)$ так, що можливо спостерігати лише суперпозицію $f(t)$ та $y(t)$: $x(t) = f(t) + y(t)$, $t \in [0, T]$.

Випадковий шум $y(t)$, як правило, залежить від двох параметрів: його математичного сподівання $m[y(t)] = m$ та дисперсії $D[y(t)] = \sigma^2$. Випадковий шум є стаціонарним випадковим процесом, але при різних спостереженнях, у наслідок неконтрольованих випадкових факторів, ці основні параметри шуму $y(t)$ можуть змінюватись так, що математичне сподівання m_1 , m_2 та дисперсія σ_1^2 та σ_2^2 при двох різних випробовуваннях можуть відрізнятися між собою: $m_1 \neq m_2$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Якщо час t змінюється дискретно, тобто $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, то при даному спостереженні реалізація процесу $x(t)$ перетворюється на вибірку та в багатьох випадках можна вважати, що її випадкова компонента (шум) $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ одержана внаслідок простого випадкового вибору, але при різних спостереженнях така гіпотеза є хибною.

Процесом уніфікації називається таке перетворення T випадкового шуму $y(t)$ $\tilde{y}(t) = T[y(t)]$ з неперервним або дискретним часом t , для якого випадковий шум $y(t)$ має сталі математичне сподівання $m[y(t)] \equiv m$ та дисперсію $D[y(t)] \equiv \sigma^2$ при різних випадкових випробуваннях (спостереженнях).

Таким чином, у результаті застосування процесу уніфікації поліпшуються оцінки багатьох показників основного процесу $x(t)$, зокрема оцінки параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ корисного сигналу $f(t) = f(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Процес уніфікації в значній степені залежить від того випадкового експерименту, при якому спостерігається реалізація (траєкторія) основного процесу $x(t)$, а також від розмірності змінної t (в деяких випадках t не обов'язково є часом, а може бути змінною, що має дві або більше координат).

В цій роботі буде описано процес уніфікації сканограм інтерфазних ядер букального епітелію людини, що одержані для комп'ютерної цитогенетичної діагностики раку молочної залози (РМЗ) та фіброаденоматозу (ФАМ) [1].

1. ПРЕДМЕТ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сканограми будуються за зображеннями ядер букального епітелію, при чому розглядається яскравість лише зеленої компоненти, як найбільш інформативної для діагностики. На рис. 1 приведені типові ядра.

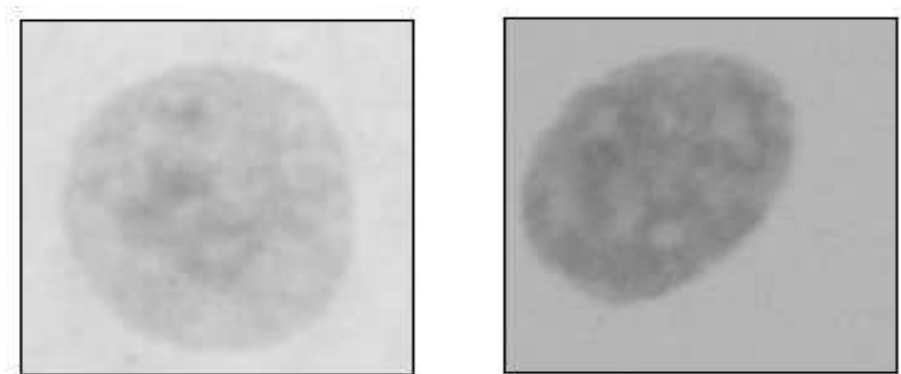


Рис 1. Ядра букального епітелію

Складність полягає у тому, що загальна середня яскравість самих зображень може бути різною. Ядро, а також сам фон на малюнку праворуч темніші, ніж ядро та фон на малюнку ліворуч. Причиною можуть бути різні умови фарбування ядер або різні умови, при яких були зроблені фотографії ядер. В будь-якому випадку, перш ніж аналізувати такі дані, необхідно провести їх уніфікацію.

При проведенні уніфікації будемо враховувати фон зображень. Уніфікацію будемо робити кількома способами. Знайдемо:

- 1) відношення до середньої яскравості фону;
- 2) логарифм відношення до середньої яскравості фону;
- 3) різницю з яскравістю фону;
- 4) різницю з деяким еталонним зображенням.

Отримані таким чином уніфіковані дані будемо використовувати для побудови сканограм та їх подальшого аналізу. Вже застосувавши всі способи на конкретних даних, можна буде визначити, який з них краще виконує поставлену задачу.

Нехай X — яскравість фону деякого зображення ядра, при чому під яскравістю тут і надалі будемо вважати яскравість лише зеленої компоненти, а Z — яскравість ядра. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, де n — кількість пікселів фону, $x_i \in \mathcal{N}$, $i = \overline{1, n}$. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$, де s — кількість пікселів ядра, $z_j \in \mathcal{N}$, $j = \overline{1, s}$.

1. Відношення яскравості до середньої яскравості фону. Для проведення уніфікації, знайдемо середнє значення яскравості фону зображення, а потім для кожної точки (пікселя) зображення ядра обчислимо відношення яскравості в даній точці до середньої яскравості фону.

Середнє значення яскравості фону зображення:

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Після уніфікації вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ матиме вигляд

$$\tilde{Z} = \left(\frac{z_1}{x_c}, \frac{z_2}{x_c}, \dots, \frac{z_s}{x_c} \right).$$

2. Логарифм відношення яскравості до середньої яскравості фону. При аналізі зображень цитологічних препаратів інколи застосовують так звану оптичну щільність зображення, яка обчислюється як десятичний логарифм відношення яскравості точки ядра до середньої яскравості фону.

Таким чином, після уніфікації вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ матиме вигляд

$$\tilde{Z} = \left(\lg \frac{z_1}{x_c}, \lg \frac{z_2}{x_c}, \dots, \lg \frac{z_s}{x_c} \right).$$

3. Різниця яскравості з яскравістю фону. В цьому випадку знайдемо різницю між яскравістю кожної точки ядра та середньою яскравістю фону зображення.

Після уніфікації вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ матиме вигляд

$$\tilde{Z} = (z_1 - x_c, z_2 - x_c, \dots, z_s - x_c).$$

4. Різниця яскравості з деяким еталонним зображенням. Виберемо деяке еталонне зображення, наприклад, в якого середня яскравість фону найменша серед всіх інших зображень. Для кожного зображення знайдемо відповідну різницю з еталонним зразком та віднімемо її від кожної точки зображення ядра.

Отже, нехай x_{em} — середня яскравість фону еталонного зразка, тоді вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ матиме вигляд

$$\tilde{Z} = (z_1 - (x_c - x_{em}), z_2 - (x_c - x_{em}), \dots, z_s - (x_c - x_{em})).$$

2. ПОПЕРЕДНЯ ПІДГОТОВКА ЗОБРАЖЕНЬ

Перш ніж перейти до безпосередньої уніфікації даних, необхідно провести попередню обробку зображень. Для аналізу використовуються рівні ядра без плям та пошкоджень, але фон, на якому розташовується ядро, може бути неоднорідним. Для того щоб уникнути великої похибки внаслідок наявності артефактів на зображенні, обчислимо вектор частот P та проаналізуємо гістограму, побудовану за отриманими даними. Яскравість артефактів буде відрізнятися від яскравості загального фону.

Отже, нехай X — яскравість фону зображення ядра, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, де n — кількість пікселів фону, $x_i \in \mathcal{N}$, $i = \overline{1, n}$. Побудуємо варіаційний

ряд: $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Значення яскравості фону змінюється в межах інтервалу $(x_{(1)}, x_{(n)})$. Отже, для кожного $y \in \mathcal{N}$: $x_{(1)} \leq y \leq x_{(n)}$ знайдемо частоту p : $p = j/n$, де j — кількість входжень значення y у вектор X . Очевидно, що якщо $\forall i: i = \overline{1, n}, y \neq x_{(i)}$, то відповідне $p = 0$. Таким чином, отримаємо вектор частот $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, де $k = x_{(n)} - x_{(1)} + 1$, який відповідає вектору яскравості $Y = (y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(k)})$.

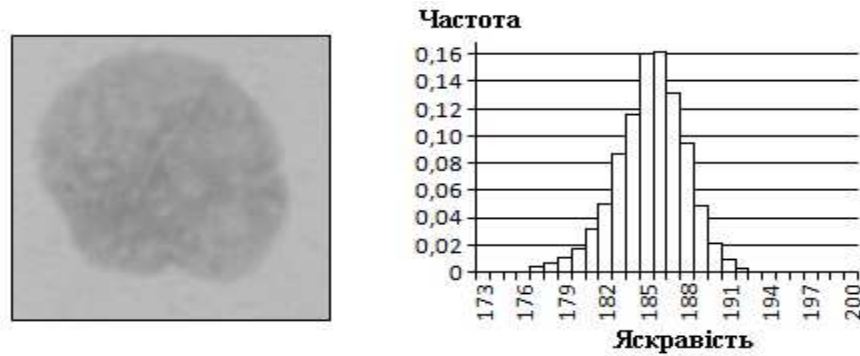


Рис. 2. Однорідний фон

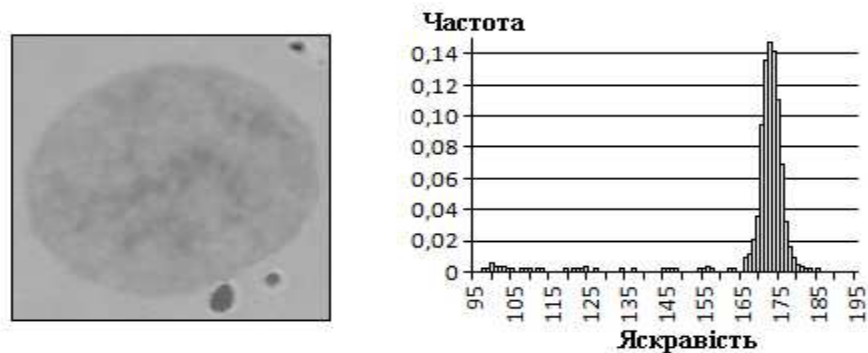


Рис. 3. Фон із плямами

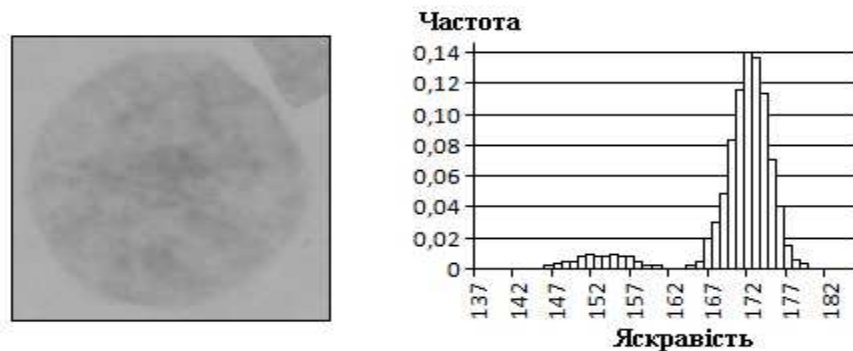


Рис. 4. Фон із частиною ядра

Розглянемо найбільш розповсюджені випадки зображень ядер та відповідні гістограми векторів частот яскравості фону. Аналізується саме фон, а не зображення ядра, оскільки заздалегідь відомо, що ядра вибираються без сторонніх артефактів. Фон може бути: 1) однорідний (рис. 2); 2) із сторонніми плямами (рис. 3); 3) із частиною іншого ядра (або кількох інших ядер) (рис. 4).

З гістограм видно, що в будь-якому разі найбільшою є частота значень яскравості фону. Для того щоб виключити із розгляду значення яскравості артефактів, досить знайти моду значень яскравості, знайти зліва від моди перший елемент, менший за рівень значущості β , та відкинути решту елементів зліва; так само відкидаються значення справа.

Отже, нехай $y_{(m)}$ — мода вибірки $Y : y_{(m)} \in Y$, відповідна їй частота $p_m = \max\{p_i\}$, $i = \overline{1, k}$. Знаходимо зліва від $y_{(m)}$ перше $y_{(l)} : p_{(l)} < \beta$ та $1 \leq l < m$, справа від значення моди $y_{(m)}$ знаходимо перший елемент вибірки $y_{(j)} : p_{(j)} < \beta$, $m < j \leq k$. Відкинувши всі артефакти, отримали вектор яскравості фону: $\tilde{Y} = (y_l, y_{l+1}, \dots, y_m, \dots, y_{j-1}, y_j)$, для зручності перепозначимо його елементи: $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_r)$, $r = j - l + 1$. Надалі під вектором яскравості фону будемо вважати вектор $\tilde{Y}$.

3. ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ УНІФІКАЦІЇ

Викладені методики перевіримо на конкретних даних. Візьмемо дві вибірки a та b з однієї генеральної сукупності: $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in G$ та $b = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in G$, де $\overline{a_i}$, $i = \overline{1, N}$ — середнє значення яскравості ядра i -ї сканограми, а b_j , $j = \overline{1, N}$ — середнє значення яскравості ядра j -ї сканограми. Обчислимо p -статистику $p(a, b)$. Після відповідних перетворень векторів яскравостей ядер знов обчислимо p -статистики.

Перевірялися сканограми двох пацієнтів з діагнозом рак молочної залози, причому діагноз підтверджений гістологічними дослідженнями. В кожного пацієнта розглядалося близько 50 сканограм, з яких досліджувалася середня яскравість ядер. Результати дослідження наведені в таблиці 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Значення p -статистики для кожного типу уніфікації

Порівняння p -статистик	
Тип уніфікації	$p(a, b)$
Відношення яскравості до середньої яскравості фону	0,9964
Логарифм відношення яскравості до середньої яскравості фону	0,9964
Різниця яскравості з яскравістю фону	0,9914
Різниця яскравості з деяким еталонним зображенням	0,9914

Добре видно, що уніфікація позитивно впливає на аналіз даних. Найкращою серед усіх уніфікацій виявилось знаходження відношення яскравості до середньої яскравості фону, оскільки метод є дуже простим і ефективним.

4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо три групи: хворі на РМЗ — 20 пацієнтів, хворі на дифузний фіброаденоматоз (ДФАМ) — 36 пацієнтів та хворі на очаговий фіброаденоматоз (ОФАМ) — 44 пацієнта. Застосуємо до хворих на РМЗ комп'ютерний цитогенетичний метод діагностики, що ґрунтується на усередненні p -статистик. Потім проведемо уніфікацію даних методом знаходження відношення яскравості до середньої яскравості фону і знов застосуємо вказаний метод діагностики. Отримані результати наведені в таблиці 2.

ТАБЛИЦЯ 2. Міри близькості групи РМЗ до інших груп

Міра близькості						
№	з уніфікацією			без уніфікації		
	до РМЗ	до ДФАМ	до ОФАМ	до РМЗ	до ДФАМ	до ОФАМ
1	0,6177	0,5605	0,5493	0,5490	0,5128	0,4782
2	0,6809	0,6056	0,5898	0,5987	0,5444	0,5136
3	0,6134	0,5510	0,5339	0,5530	0,5072	0,4745
4	0,5769	0,5412	0,5120	0,5510	0,5099	0,4804
5	0,7781	0,7175	0,7211	0,6209	0,5926	0,5680
6	0,7338	0,7147	0,7114	0,6070	0,5790	0,5957
7	0,7403	0,6933	0,6812	0,6353	0,5958	0,5940
8	0,7925	0,6732	0,6825	0,6602	0,5941	0,5812
9	0,7799	0,6721	0,6823	0,6568	0,5988	0,5805
10	0,7662	0,6634	0,6771	0,6325	0,5806	0,5663
11	0,7744	0,6679	0,6763	0,6382	0,5794	0,5660
12	0,7754	0,7325	0,7295	0,6354	0,5999	0,6131
13	0,7577	0,7295	0,7225	0,6290	0,5912	0,6082
14	0,7286	0,6765	0,6791	0,5689	0,5810	0,5636
15	0,7745	0,6697	0,6823	0,5746	0,5611	0,5565
16	0,7740	0,6670	0,6858	0,5617	0,5639	0,5738
17	0,6913	0,7192	0,7148	0,5674	0,5834	0,5846
18	0,4717	0,5297	0,4982	0,4506	0,4894	0,4601
19	0,7772	0,6962	0,7080	0,5928	0,6098	0,5878
20	0,7112	0,6123	0,6285	0,5476	0,5442	0,5439

При діагностиці не уніфікованих даних пацієнтам під номерами 14, 16, 17, 18 і 19 діагноз було поставлено неправильно, у випадку застосування комп'ютерного цитогенетичного методу діагностики до уніфікованих даних діагноз було поставлено неправильно пацієнтам під номерами 17 та 18. Таким чином, похибка для не уніфікованих даних складає 25%, а для уніфікованих — 10%. Отже, при застосуванні уніфікації діагностика дає більш точний результат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ключин Д. А. Доказательная медицина. Применение статистических методов / Д. А. Ключин, Ю. И. Петунин. — М: ООО И.Д. Вильямс, 2008. — 320 с.
2. Buades A. On image denoising methods / A. Buades, B. Coll, J. M. Morel // SIAM Multiscale Modeling and Simulation. — 2005. — 4(2). — P. 490–530.
3. Chen G. Y. Image denoising using neighboring wavelet coefficients / G. Y. Chen, T. D. Bui, A. Krzyzak // ICASSP. — 2004. — II. — P. 917–920.
4. Motwani M. C. Survey of Image Denoising Techniques / M. C. Motwani, M. C. Gadiya, R. C. Motwani // Proceedings of GSPx. — 2004. — P. 27–30.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601.

Надійшла 30.03.2010

UDC 517.929

STABILIZATION OF SOLUTIONS OF THE SYSTEM LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEMI-MARKOV COEFFICIENTS AND RANDOM TRANSFORMATIONS of SOLUTIONS*

I. A. DZHALLADOVA, M. RUZICKOVA

ABSTRACT. In this paper consider the linear controllable systems which defined differential equations with semi-Markov coefficients and random transformation of solutions which occurred simultaneously with jump semi-Markov process. Using equations for Lyapunov function we find minimal values for an functional. Finding necessary condition of optimal solutions, which reaches synthesis optimal control this class system.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

On probability bases $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}_t, t \geq 0\})$ consider the linear control system

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, \xi(t)) X(t) + B(t, \xi(t)) U(t) \quad (1)$$

with initial conditions $X(0) = \varphi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ and semi-Markov coefficients which defined intensities $q_{\alpha k}(t)$ ($\alpha, k = 1, 2, \dots, n$) of transition from state θ_k in state θ_α . Supposed, that vectors $U(t)$ belong set of control U . The function $q_{\alpha k}(t)$ ($\alpha, k = 1, 2, \dots, n$) satisfy condition:

$$q_{\alpha k}(t) \geq 0; \int_0^\infty q_k(t) dt = 1; q_k(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}(t),$$

On space $C^1(G) \times U$ introduce functional

$$J = \int_0^\infty \langle X^*(t) Q(t, \xi(t)) X(t) + U^*(t) L(t, \xi(t)) U(t) \rangle dt, \quad (2)$$

where $Q(t, \xi(t))$ and $L(t, \xi(t))$ symmetric positive defined matrix with semi-Markov elements, which we called ***an quality criterion***.

Definition 1. Vector

$$U(t) = S(t, \xi(t)) X(t), \quad (3)$$

where $S(t, \xi(t))$ -matrix with semi-Markov elements that minimizes an quality criterion $J(X, U)$ subject to (1) called of ***optimal control***.

*His research was done at support under NSP of Slovak Republic (№557) during april 1 – 30, 2010.

Introduced denoted

$$\begin{aligned} G(t, \xi(t)) &\equiv A(t, \xi(t)) + B(t, \xi(t)) B(t, \xi(t)), \\ H(t, \zeta(t)) &\equiv Q(t, \zeta(t)) + S^*(t, \zeta(t)) L(t, \zeta(t)) S(t, \zeta(t)), \end{aligned}$$

Obtained the system of linear differential equations

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(t, \xi(t)) X(t), \quad (4)$$

Considering that finding values the functional

$$J = \int_0^\infty \langle X^*(t) H(t, \xi(t)) X(t) \rangle dt. \quad (5)$$

Supposed also that every jump of random process $\xi(t)$ in time t_j solutions of the system equations (4) have random transformation

$$X(t_j + 0) = C_{sk} X(t_j - 0) \quad (s, k = 1, \dots, n),$$

as conditions $\xi(t_j + 0) = \theta_s, \xi(t_j - 0) = \theta_k$.

Definition 2. Concept of semi-Markov functions $a(t, \xi(t))$ defined next. Select this n difference determinant function $a_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) at $t \geq 0$. If $\xi(t_j - 0) = \theta_k, \xi(t_j + 0) = \theta_s$ ($s, k = 1, \dots, n$), then at $t_j \leq t < t_{j+1}$ functions $a(t, \xi(t))$ have kind $a(t, \xi(t) = \theta_s) = a_s(t - t_j)$.

Applying semi-Markov functions enablement using concept of stochastic operators. Really semi-Markov functions $a(t, \xi(t))$ is operator from semi-Markov process $\xi(t)$, because only definition of values t and $\xi(t)$ not defined of value semi-Markov functions $a(t, \xi(t))$. You must also specify the function $a_s(t)$ at $t \geq 0$ and the value of the jump t_j , proceeding the moment of time t .

2. AUXILIARY RESULTS: CONSTRUCTING LYAPUNOV'S FUNCTION

Consider the systems of linear differential equations

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, \xi(t)) X(t), \quad (6)$$

Introduce quadratic form

$$w(t, x, \xi(t)) = x^* B(t, \xi(t)) x, \quad B(t, \xi(t)) > 0,$$

where elements matrix $B(t, \xi(t))$ is semi-Markov process. For a defined matrix $B(t, \xi(t))$ set n difference symmetric and positive defined at $t \geq 0$ matrix $B_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$). If at $t_j \leq t < t_{j+1}$ holds equality $\xi(t) = \theta_s$ then

$$B(t, \xi(t)) = B_s(t - t_j) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Finding of functional value

$$v = \int_0^\infty \langle w(t, X(t), \xi(t)) \rangle dt.$$

For calculation that's functional introduce *particular Lyapunov functions*

$$v_k(x) = \int_0^\infty \langle w(t, X(t), \xi(t)) | X(t) = x, \xi(0) = \theta_k \rangle dt \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7)$$

If finding Lyapunov functions $v_k(x) = x^* C_k x$ ($k = 1, \dots, n$), then value of functional v can find on formula

$$v = \int_{E_m} \sum_{k=1}^n v_k(x) f_k(0, x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{E_m} C_k \circ x x^* f_k(0, x) dx = \sum_{k=1}^n C_k \circ D_k(0)$$

Theorem 1. *Let for system equations (6) holds of next conditions: For that zero solutions of system equations (6) was L_2 -stability, necessary and sufficient, that holds one of next equivalent conditions:*

1) *The systems equations*

$$C_k = H_k + \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) N_k^*(t) C_{sk}^* C_s C_{sk} N_k(t) dt \quad (k = 1, \dots, n) \quad (8)$$

as $H_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) have solutions $C_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$);

2) *convergence method of sequences approximations*

$$C_k^{(j+1)} = H_k + \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) N_k^*(t) C_{sk}^* C_s^{(j)} C_{sk} N_k(t) dt, \quad (9)$$

$$C_k^{(0)} \equiv 0 \quad (k = 1, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots).$$

For L_2 -stability of solutions (6) enough, to for some symmetric positive defined matrix $C_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) holds inequalities

$$C_k - \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) N_k^*(t) C_{sk}^* C_s C_{sk} N_k(t) dt > 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Proof. Constructing the system of equations which defined Lyapunov functions $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$). Introduce auxillary semi-Markov functions

$$u_k(t, x) = \langle w(t, X(t), \xi(t)) | X(0) = x, \xi(0) = \theta_k \rangle \quad (k = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Since as $\xi(t) = \theta_k$ ($t \geq 0$) true equality

$$X(t) = N_k(t) x \quad (X(0) = x),$$

Simultaneously with a jump $\xi(t)$ occurred jump of solutions, to 3 формул (11) finding equation

$$u_k(t, x) = \psi_k(t) w_k(t, N_k(t) x) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) u_s(t - \tau, C_{sk} N_k(\tau) x) d\tau \quad (k = 1, \dots, n). \quad (12)$$

Introduced denote

$$u_k(t, x) \equiv x^* u_k(t) x \quad (k = 1, \dots, n), \quad (13)$$

and finding for matrix $u_k(t)$ the system of integral equations

$$u_k(t) = \psi_k(t) N_k^*(t) B_k(t) N_k(t) + \\ + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) N_k^*(\tau) C_{sk}^* u_s(t - \tau) C_{sk} N_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \dots, n). \quad (14)$$

From formulas (7) and (11) obtained equations for matrix C_k ($k = 1, \dots, n$) and functions $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$):

$$C_k = \int_0^\infty u_k(t) dt, \quad v_k(x) = \int_0^\infty u_k(t, x) dt. \quad (15)$$

Integrating the systems of equations (14), have systems of equations

$$C_k = \int_0^\infty \psi_k(t) N_k^*(t) B_k(t) N_k(t) dt + \\ + \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) N_k^*(\tau) C_{sk}^* C_s C_{sk} N_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Similarly, integrating the systems equations (12), we find the systems equations for the Lyapunov functions

$$v_k(x) = \int_0^\infty \psi_k(t) w_k(t, N_k(t) x) dt + \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) v_s(C_{sk} N_k(t) x) dt.$$

Introduce denote

$$H_k \equiv \int_0^\infty \psi_k(t) N_k^*(t) B_k(t) N_k(t) dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

If holds conditions

$$\lambda_1 E \leq B_k(t) \leq \lambda_2 E \quad (\lambda_1 > 0),$$

or equivalent conditions

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq x^* B_k(t) x \leq \lambda_2 \|x\|^2 \quad (\lambda_1 > 0), \quad (17)$$

then matrix H_k ($k = 1, \dots, n$) symmetric and positive defined.

Writing the system equations (16) in kind

$$C_k = H_k + \sum_{s=1}^n L_{sk}^* C_s \quad (k = 1, \dots, n), \quad (18)$$

where we using denote (15). That system is conjugate to system equations (13). Therefore existing positive defined solutions of system системи (18) $C_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) equivalent existing positive defined solutions $B_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) and equivalents L_2 -stability solutions of equations (6). Simultaneous from exist stochastic Lyapunovs function $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) (7) follow L_2 -stability of solutions the system equations (6), therefore from conditions (17) and the convergence of the integral (15) implies the inequality

$$\int_0^{\infty} \langle w(t, X(t), \xi(t)) \rangle dt \geq \int_0^{\infty} \langle \|X\|^2 \rangle dt.$$

Theorem is proved. $\square$

Remark. For the system linear differential equations (6) with piecewise constant coefficients in case when function $w(t, X(t), \xi(t))$ have kind

$$w(t, X(t), \xi(t)) = x^* B(\xi(t)) x, \quad B_k \equiv B(\theta_k) \quad (k = 1, \dots, n),$$

the system equation (16) have kind

$$C_k = \int_0^{\infty} \psi_k(t) e^{A_k^* t} B_k e^{A_k t} dt + \int_0^{\infty} \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) e^{A_k^* t} C_{sk}^* C_s C_{sk} e^{A_k t} dt \quad (k = 1, \dots, n). \quad (19)$$

If semi-Markov process $\xi(t)$ coincides with some Markov process then the system equations (19) have kind

$$C_k = \int_0^{\infty} e^{a_{kk} t} e^{A_k^* t} B_k e^{A_k t} dt + \int_0^{\infty} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n a_{sk} e^{a_{kk} t} e^{A_k^* t} C_{sk}^* C_s C_{sk} e^{A_k t} dt$$

($k = 1, \dots, n$)

and its writing in next form :

$$C_k = \int_0^{\infty} e^{a_{kk} t} e^{A_k^* t} \left(B_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n a_{sk} C_{sk}^* C_s C_{sk} \right) \times$$

$\times e^{A_k t} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (20)$

If convergence will be integrals, then the systems equations (20) is equivalent to the system matrix equations

$$(Ea_{kk} + A_k^*)C_k + C_kA_k + B_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n a_{sk}C_{sk}^*C_sC_{sk} = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

which can be written as

$$A_k^*C_k + C_kA_k + B_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n a_{sk}C_{sk}^*C_sC_{sk} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

at $C_{kk} = E$ ($k = 1, \dots, n$). Theorem 1 can be used for investigating stability of solutions of the systems (6).

Example. Let semi- Markov process $\xi(t)$, takes two states θ_1 i θ_2 , coincides with Markov process the set of system differential equations

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda p_2(t), \quad \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t).$$

Constructing the systems equations (19) for investigating L_2 — stability of solutions of differential equations

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \quad a(\theta_k) \equiv a_k. \quad (21)$$

The systems equations (19) takes forms

$$c_1 = 1 + \int_0^\infty e^{2a_2t} \lambda e^{-\lambda t} c_2 dt, \quad c_2 = 1 + \int_0^\infty e^{2a_1t} \lambda e^{-\lambda t} c_1 dt$$

and have solutions

$$c_1 = \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - 2a_2)}{2a_1a_2 - \lambda(a_1 + a_2)}, \quad c_2 = \frac{(\lambda - a_2)(\lambda - 2a_1)}{2a_1a_2 - \lambda(a_1 + a_2)}.$$

At conditions $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$ zero solutions of equations (21) L_2 -stability.

Let intensity of semi- Markov process $\xi(t)$ satisfied condition

$$q_{11}(t) \approx 0, q_{22}(t) \approx 0, \quad q_{21}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0, \quad q_{12}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0.$$

Using the theorem 1, finding sufficient condition L_2 -stability of solutions of equations (21):

$$1 - c_1 \int_0^\infty q_{11}(t) e^{2a_1t} dt - c_2 \int_0^\infty (q_{21}(t) - \lambda e^{-\lambda t}) e^{2a_2t} dt > 0,$$

$$1 - c_1 \int_0^\infty (q_{12}(t) - \lambda e^{-\lambda t}) e^{2a_1t} dt - c_2 \int_0^\infty q_{22}(t) e^{2a_1t} dt > 0.$$

3. AUXILIARY RESULTS: CONSTRUCTION OF OPTIMAL CONTROL FOR THE SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN DETERMINANTE CASE

Consider in boundary area G deterministic systems of linear equations

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X + B(t)U, X \in R^m, U \in R^l \quad (22)$$

with initial conditions $X(t) = x_0$. Assume that vector $U(t)$ belong a control set U . On space $C^1(G) \times U$ set a quality criterion in the form of quadratic functional

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [X^*(\tau) C(\tau) X(\tau) + U^*(\tau) D(\tau) U(\tau)] d\tau, \quad (23)$$

$$C^*(t) = C(t), \quad D^*(t) = D(t).$$

Control

$$U(t) = S(t)X(t), \quad \dim S(t) = l \times m, \quad (24)$$

which reached a minimum quality criterion (23) is called **optimal control**.

Problems of optimization in finding optimal control (24) which is the set of admissible controls U , or in fact in finding equation to determine $S(t)$, $\dim S(t) = l \times m$.

Theorem 2. *Let the system of equations (22) there exist an optimal control (24). Then the optimal control synthesis of the equation керування визначається equations*

$$S = -D^{-1}(t)B^*(t)\Psi^*, \quad \Psi^* = K(t)X(t),$$

where matrix $K(t)$ satisfying the equations Rikkati

$$\frac{dK(t)}{dt} = -C(t) - K(t)A(t) - A^*(t)K(t) + K^*(t)B(t)D^{-1}(t) \cdot B^*(t)K(t).$$

Proof. Let the control in system (22) has the form (24), where matrix $S(t)$ unknown and at this control calculated the minimum value of the functional (23)

$$v(t, X(t)) \equiv \frac{1}{2} X^*(t) K(t) X(t) = \min_{S(t)} I(t).$$

Introduce the row-vector

$$\Psi = \frac{Dv(t, x)}{Dx} = X^* K(t).$$

If known vectors $X(t)$, then the minimum of functional (23) finding with a formula

$$\min_{S(t)} I(t) = \frac{1}{2} \Psi(t) X(t) \quad (\tau \geq t),$$

using Pontryagin maximum principle [1,2]. This put Hamilton function [2]

$$H(t, x, U, \Psi) = \Psi(A(t)x + B(t)U) + \frac{1}{2}(x^*Cx + U^*\mathbf{D}U), \quad U = Sx, \quad (25)$$

And writing necessary condition for optimality

$$\frac{\partial H}{\partial s_{kj}} = 0 \quad (k = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m), \quad (26)$$

where s_{kj} — elements of matrix S . To simplify the recording conditions (26), introduce the matrix of derivatives of functions by elements of matrix S

$$\frac{DH}{DS} = \left\| \frac{\partial H}{\partial s_{kj}} \right\| \quad (k = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m),$$

which will call for the derivative matrix S .

Using the concept of a scalar product of matrices of diminution N, S with elements v_{kj}, s_{kj} ($k = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m$) [3]

$$N \circ S = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m v_{kj} s_{kj}$$

and its property [3]

$$\frac{D(N \circ S)}{DS} = N,$$

write a Hamilton function (25) as

$$H = \Psi A(t)x + \frac{1}{2}x^*C(t)x + B^*(t)\Psi^*x^* \circ S + \frac{1}{2}\mathbf{D}(t) \cdot Sxx^* \circ S. \quad (27)$$

Differentiating matrix for matrix S obtained

$$\frac{DH}{DS} = B^*(t)\Psi^*x^* + \mathbf{D}(t)Sxx^* = 0. \quad (28)$$

Since the equality (28) holds for any values of x , then finding expression for vector control

$$U = Sx = -\mathbf{D}^{-1}(t)B^*(t)\Psi^* = -\mathbf{D}^{-1}(t)B^*(t)K(t)x.$$

Expected from the expression (27) matrix

$$S = -\mathbf{D}^{-1}(t)B^*(t)\Psi^*,$$

Obtained an expression for Hamiltonian function

$$H = \Psi A(t)x + \frac{1}{2}x^*C(t)x - \frac{1}{2}\Psi B(t) \cdot \mathbf{D}^{-1}(t)B^*(t)\Psi^*.$$

Canonical system of linear differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{DH}{D\Psi}, \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{DH}{Dx},$$

for x, Ψ have kind

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x - B(t)\mathbf{D}^{-1}(t)B^*(t)\Psi^*, \quad \frac{d\Psi^*}{dt} = -C(t)x - A^*(t)\Psi^*. \quad (29)$$

To define matrix $K(t)$ finding the integral manifolds for a system equations

$$\Psi^* = K(t) X(t). \quad (30)$$

Differentiating the systems equations (30) by t with together system equations (29) and expected vector Ψ^* , obtained matrix differential equations (24). This equations are known in literature as Riccati equations, for example [5,6].

Let finding solutions $K_T(t)$ of equations (24) which satisfied initial conditions

$$K_T(T) = 0 \quad (T > 0).$$

Matrix $K_T(t)$ determines from the minimum of functional

$$\begin{aligned} \min_{S(\tau)} \int_t^T [X^*(\tau) C(\tau) X(\tau) + U^*(\tau) \mathbf{D}(\tau) U(\tau)] d\tau = \\ = \frac{1}{2} X^*(t) K_T(t) X(t), \end{aligned}$$

where solutions $K(t)$ of equations (24) finding from formula (26), and the minimum of functional (23) approximately finding from relation

$$K(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} K_T(t).$$

Remark 2. A similar results can be obtained from the Bellman equations [7], which satisfied the function $v(t, x)$

$$\begin{aligned} \min_{S(t)} \left\{ \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{Dv(t, x)}{Dx} (A(t) + B(t) S(t)) x + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x^* C(t) x + \frac{1}{2} x^* S^*(t) \mathbf{D}(t) S(t) x \right\} = 0. \end{aligned}$$

□

4. MAIN RESULTS

Theorem 3. *Let coefficients of the controllable system (1) is semi-Markov function and defined next equality*

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = G_k(t) X_k(t), G_k(t) \equiv A_k(t) + B_k(t) S_k(t) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (31)$$

Then set of optimal control is nonempty subset of space U , which coincide with set of solutions systems equations

$$U_s(t) = -L_s^{-1}(t) B_s^*(t) R_s(t) X_s(t) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (32)$$

Where matrix $R_s(t)$ defined from the system equations Riccati type

$$\begin{aligned} \frac{dR_s(t)}{dt} = & -Q_s(t) - A_s^*(t) R_s(t) - R_s(t) A_s(t) + \\ & + R_s(t) B_s(t) L_s^{-1}(t) B_s^*(t) R_s(t) - \frac{\psi'_s(t)}{\psi_s(t)} R_s(t) - \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{q_{ks}(t)}{\psi_s(t)} C_{ks}^* R_k(0) C_{ks} \quad (s = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (33)$$

Proof. Remember that at $t_j \leq t < t_{j+1}$, $\xi(t) = \theta_s$ coefficients the system equations (1), (4) and functionals (2), (5) next:

$$\begin{aligned} A(t, \xi(t)) &= A_s(t - t_j), \quad B(t, \xi(t)) = B_s(t - t_j), \\ Q(t, \xi(t)) &= Q_s(t - t_j), \quad L(t, \xi(t)) = L_s(t - t_j), \quad S(t, \xi(t)) = S_s(t - t_j). \end{aligned}$$

Analogously, we have

$$\begin{aligned} G(t, \xi(t)) &= G_s(t - t_j) \equiv A_s(t - t_j) + B_s(t - t_j) S_s(t - t_j), \\ H(t, \xi(t)) &= H_s(t - t_j) \equiv Q_s(t - t_j) + S_s^*(t - t_j) L_s(t - t_j) S_s(t - t_j). \end{aligned}$$

For calculation functional (5) using formula

$$V = \sum_{k=1}^n C_k \circ D_k(0) = \sum_{k=1}^n \int_{E_m} v_k(x) f_k(0, x) dx, \quad (34)$$

where $v_k(x) \equiv x^* C_k x$ ($k = 1, \dots, n$) — particular Lyapunov's functions

$$\begin{aligned} v_k(x) \equiv x^* C_k x &= \int_0^\infty \langle X^*(t) H(t, \xi(t)) X(t) | X(0) = \\ &= x, \xi(0) = \theta_k \rangle dt \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (35)$$

For particular Lyapunov's function (35) finding expression

$$\begin{aligned} v_k(x) \equiv x^* C_k x &= \int_0^\infty \left(X_k^*(t) \left(\psi_k(t) Q_k(t) + \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) C_{sk}^* C_s C_{sk} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times U_k^*(t) \psi_k(t) L_k(t) U_k(t) \right) dt \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (36)$$

Then systems equations (31) have kind

$$\begin{aligned} \frac{dX_k(t)}{dt} &= A_k(t) X_k(t) + B_k(t) U_k(t), \\ U_k(t) &\equiv S_k(t) X_k(t) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (37)$$

Let for systems control (1) exist optimal control of kind (3), that no depending from initial value $X(0)$. From formula (34) follow, that optimal control according minimal values of particular Lyapunov's function $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$)

(33). It also follow from the fact the functions $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) are particular values functional (34). Finding the minimal values $v_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) by choosing optimal control $U_k(x)$ is well studied problem, and the main results in [5]. Significantly, that in expression in formula (36) all matrix C_s ($s = 1, \dots, n$) are constant, and hence, in solving optimization problem can be considered as matrices of parameters.

Therefore, finding of optimal control (3) for systems (1) reduce to solutions n problem of finding optimal control for deterministic system (37) for the systems linear differential equations like (22). $\square$

5. OTHER METHOD OF PROOF

Conduct independent proved of theorem 3. Finding optimal control $U(t)$ which reaches a minimum of quality criterion

$$x^* C x = \int_0^T (X^*(t) Q A) X(t) + U^*(t) L(t) U(t) dt \quad (38)$$

i introduce Lagrange function

$$I = \int_0^T (X^*(t) Q(t) X(t) + U^*(t) L(t) U(t) + 2Y^*(t) \times \\ \times \left(A(t) X(t) + B(t) U(t) - \frac{dX(t)}{dt} \right)) dt,$$

where $Y(t)$ - column-vector of Lagrange multiplies.

Equalizing to zero the firs variations of functional δI_x δI_y obtained the system of linear differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= A(t) X(t) - B(t) L^{-1}(t) B^*(t) Y(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} &= -Q(t) X(t) - A^*(t) Y(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Then optimal control $U(t)$ finding on formula

$$U(t) = -L^{-1}(t) B^*(t) Y(t), \quad Y(T) = 0.$$

For synthesis optimal control need finding integral manifolds of solutions systems (39) of kind

$$Y(t) = K(t) X(t), \quad K(T) = 0.$$

According to the theory of integral manifolds [12] finding for matrix $K(t)$ differential matrix equation Riccati type

$$\frac{dK(t)}{dt} = -Q(t) - A^*(t) K(t) A(t) + K(t) B(t) L^{-1}(t) B^*(t) K(t), \quad (40)$$

Which integrating from time $t = T$ to time $t = 0$ with initial conditions $K(T) = 0$.

Then for obtained Lagrange functions receive expressions for optimal control

$$U(t) = -L^{-1}(t) B^*(t) K(t) X(t). \quad (41)$$

Proved, that this

$$\int_t^T (X^*(\tau) Q(\tau) X(\tau) + U^*(\tau) L(\tau) U(\tau) \tau d\tau) = X^*(t) K(t) X(t). \quad (42)$$

Really, differentiating equality (42) by t obtained matrix equation

$$\begin{aligned} -X^*(t) Q(t) X(t) - U^*(t) L(t) U(t) &= X^*(t) \frac{dK(t)}{dt} X(t) + X^*(t) K(t) \times \\ &\times (A(t) X(t) + B(t) U(t)) + (X^*(t) A^*(t) + U^*(t) B^*(t)) K(t) X(t). \end{aligned}$$

Expected $U(t)$, obtained differential equation for $K(t)$, which coincide with (40). From positive defined matrix $Q(t)$, $L(t)$ holds that matrix $K(t) = K^*(t)$ at $t < T$. Therefore from equation (42) we have, that $K(t) = 0$, then from equation (38) follow, that $C = K(0)$. Using formula (40) i (41) to system equations (36) with minimal functionals (37), finding expression for optimal control

$$U_s(t) = -\psi_s^{-1}(t) L_s^{-1}(t) B_s^*(t) K_s(t) X_s(t) \quad (s = 1, \dots, n),$$

where symmetric matrix $K_s(t)$ satisfy at systems matrix differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dK_s(t)}{dt} &= -\psi_s(t) Q_s(t) - A_s^*(t) K_s(t) - \sum_{k=1}^n q_{ks}(t) C_{ks}^* C_k C_{ks} + \\ &+ K_s(t) B_s(t) \psi_s^{-1}(t) L_s^{-1}(t) B_s(t) K_s(t) \quad (s = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (43)$$

Systems equations (37), (43) defined necessary condition of optimal solutions of systems (2). This that matrix $S_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$), which defined optimal control, finding from the systems equations (36) and have form

$$S_k(t) = -\psi_k^{-1}(t) L_k^{-1}(t) B_k^*(t) K_k(t) \quad (k = 1, \dots, n).$$

In the system equations (43) matrix C_s defined from equations

$$C_s = K_s(0) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Simplify the system equations (43), taking

$$R_s(t) = \psi_s^{-1} K_s(t), \quad \psi_s(0) = 1, \quad C_s = R_s(0) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Then systems equations (43) has of kind (33), a optimal control defined formula (32).

Remark 3. If systems control (1) is determinant, then $q_{ks}(t) \equiv 0$, $\psi'_s(t) \equiv 0$ ($k, s = 1, \dots, n$) and systems equations (33) coincide with system equations like Riccati (40).

6. PARTICULAR CASE

Corollary.1. Let systems control (1) has piecewise coefficients:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t)) X(t) + B(\xi(t)) U(t). \quad (44)$$

Optimal control of kind

$$U(t) = S(t, \xi(t)) X(t)$$

finding from condition minimal quadratics functional

$$V = \int_0^\infty \langle X^*(t) Q(\xi(t)) X(t) + U^*(t) L(\xi(t)) U(t) \rangle dt. \quad (45)$$

Then at $t_j \leq t < t_{j+1}$, $\xi(t) = \theta_k$ we have

$$S(t, \xi(t)) = S_k(t - t_j),$$

where matrix $S_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) defined equation

$$S_k(t) = -L_k^{-1} B_k^* R_k(t) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (46)$$

and matrix $R_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) is solutions of the systems equations Riccati type:

$$\begin{aligned} \frac{dR_k(t)}{dt} = & -Q_k - A_k^* R_k(t) - R_k(t) A_k + R_k(t) B_k L_k^{-1} B_k^* R_k(t) - \\ & - \frac{\psi'_k(t)}{\psi_k(t)} R_k(t) - \sum_{s=1}^n \frac{q_{sk}(t)}{\psi_k(t)} C_{sk}^* R_s(0) C_{sk} \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (47)$$

Remark 4. Coefficients systems equations (44) and functional (45) is a piecewise, but optimal control appears unsteady.

Corollary 2. Optimal control $U(t)$ will be piecewise, where matrix $R_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) in formulas (46) will be constant, if holds condition

$$\frac{\psi'_k(t)}{\psi_k(t)} = \text{const}, \quad \frac{q_{sk}(t)}{\psi_k(t)} = \text{const} \quad (k, s = 1, \dots, n). \quad (48)$$

Then systems equations (47) has of kind

$$\begin{aligned} Q_k + A_k^* R_k + R_k A_k - R_k B_k L_k^{-1} B_k^* R_k + \\ + \frac{\psi'_k(t)}{\psi_k(t)} R_k + \sum_{s=1}^n \frac{q_{sk}(t)}{\psi_k(t)} C_{sk}^* R_k C_{sk} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (49)$$

That systems equations have constant solutions R_k ($k = 1, \dots, n$), if holds condition (48). If random process $\xi(t)$ is Markov then condition (48) has of kind

$$\frac{\psi'_k(t)}{\psi_k(t)} = a_{kk} = \text{const}, \quad \frac{q_{sk}(t)}{\psi_k(t)} = a_{sk} = \text{const} \quad (k, s = 1, \dots, n; s \neq k),$$

systems equations (49) transform of kind

$$Q_k + A_k^* R_k + R_k A_k - R_k B_k L_k^{-1} B_k^* R_k + \sum_{s=1}^n a_{sk} C_{sk}^* R_s C_{sk} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

with optimal control

$$U(t) = S(\xi(t)) X(t), \quad S(\theta_k) \equiv S_k, \quad S_k = -L_k^{-1} B_k^* R_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Corollary 3. Let non-Markov process $\xi(t)$, не може перебувати у стані θ_s понад час $T_s > 0$. Then systems equations (36) has of kind

$$v_k(x) \equiv x^* C_k x = \int_0^{T_k} \left(X_k^*(t) \left(\psi_k(t) Q_k(t) + \sum_{s=1}^n q_{sk}(t) C_{sk}^* C_s C_{sk} \right) \times \right. \\ \left. \times X_k(t) + U_k^*(t) \psi_k(t) L_k(t) U_k(t) \right) dt \quad (k = 1, \dots, n),$$

where in system equations (38)

$$K_s(T_s) = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (50)$$

Since as $\psi_s(T_s) = 0$ ($s = 1, \dots, n$), then conditions (50) holds

$$K_s(t) = \psi_s(t) R_s(t) \quad (s = 1, \dots, n).$$

As concrete examples finding matrix $K_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$) reducing to integrating the systems of matrix differential equations (42) on interval $[0, T_s]$ with initial conditions (50). Then every equation (42) can have a singular point $t = T_s$, therefore $\psi_s(T_s) = 0$ ($s = 1, \dots, n$). If $\psi_s(t)$ have in point $t = T_s$ simple zero, then from systems equations (42) finding necessary condition of boundary matrix $R_s(t)$ in singular points

$$\psi'_s(T_s) R_s(T_s) + \sum_{k=1}^n q_{ks}(T_s) C_{ks}^* R_s(0) C_{ks} = 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

BIBLIOGRAPHY

1. Artem'ev V. M. Handbook on the theory of automatic control / V. M. Artem'ev, I. E. Kazakov. — M. : Nauka, 1987. — 721 p. (on Russian)
2. Qvakernaak H. The linear optimal system of control. / X. Qvakernaak, P. Sivan. — M. : Mir, 1977. — 650 p. (on Russian)
3. Ostrem K. U. Input in stochastic theory of control / K. U. Ostrem. — M.: Mir, 1973. — 319 c.
4. Resnik S.I. Adventures in stochastic processes / S.I. Resnic, — Boston, 1992, — 626 p.
5. Valeev K. G. Constructing of Lyapunov function / K. G. Valeev, G. S. Finin. — K. : Nauk. dumka, 1981. — 412 p.
6. Barbashyn E. A. Lyapunov functions / E. A. Barbashin — M. : Nauka, 1970. — 240 p.
7. Bellman P. Introduction theory of matrix / P. Беллман. — M. : Nauka, 1969. — 368 c.
8. Valeev K. G. Optimization of random process / K. G. Valeev, I. A. Dzhalladova. — K. : KNEU, 2006. — 310 p.

9. Hyhman I. I. Controlable of random process / I. I. Gihman, A. V. Skorohod. — K. : Naukova dumka, 1977. — 252 p.
10. Dzhalladova I. A. Optimization of stochastic system / I. A. Dzhalladova. — K. : KNEU, 2005. — 284 p.
11. Jasinsky V. K. Problem of stability and stabilization of dynamic systems with finite aftereffect / V. K. Jasinskiy, E. V. Jasinskiy. — K. : TVIMS, 2005. — 578 p. (on russian)
12. Valeev K. G. Infinity systems of differential equations / K. G. Valeev, O. A. Jautykov. — Alma-Ata : Nauka, 1974. — 415 p. (on russian)

Надійшла 05.08.2010

УДК 004.89, 004.93

АВТОМАТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАУЗ ТА ЗМЕНШЕННЯ РІВНЯ ШУМУ В СИСТЕМІ КОМП'ЮТЕРНОГО СТЕНОГРАФУВАННЯ

О. С. ЗАГВАЗДІН

РЕЗЮМЕ. У статті розглядається підхід до визначення пауз і зменшення рівня сторонніх шумів у мовних голосових сигналах в контексті розробки системи комп'ютерного стенографування. Запропоновано новий підхід до визначення пауз а звуковому сигналі, що стабільно працює у сигналах з нестационарним шумом. Показано, як отримана за допомогою такого підходу інформація про паузи може бути використана для апроксимації шуму з метою використання у методі спектрального віднімання.

1. Вступ.

У системі розподіленого комп'ютерного стенографування [1, 2] сегментація вхідного мовного голосового сигналу на короткі фрагменти, які подаються на обробку операторам-стенографістам відбувається за інформацією про паузи, наявні у звуковому сигналі. Для того, щоб сегментація відбувалась точно і отримані сегменти були рівноцінними та потрібної довжини, потрібно визначати паузи у сигналі, зокрема, за умов, коли енергія шуму і характер шуму, що заповнює ділянки сигналу з паузами, змінюється (шум є нестационарним). Важливо щоб алгоритм визначення пауз не вимагав великих обчислювальних ресурсів і міг працювати в режимі близькому до реального часу. До того ж для збільшення продуктивності роботи операторів-стенографістів потрібно підвищити якість вхідного звукового сигналу і зменшити рівень впливу на нього сторонніх шумів. Типово мовні голосові звукові сигнали, що використовуються при стенографуванні мають характерні шуми, що походять від звукозаписуючого обладнання та шуму оточуючого середовища. Рівень співвідношення сигнал/шум є, зазвичай невисоким, оскільки для запису звуку можуть використовуватися довільні, в тому числі і побутові записуючі пристрої, і шуми можуть істотно впливати на зрозумілість мови. Також, як показують експерименти, типові шуми, які присутні у таких сигналах можна вважати адитивними в спектральній області, і до них може бути використаний метод спектрального віднімання. Для роботи такого методу необхідна оцінка спектру шуму, характерного для ділянки сигналу, що обробляється. У загальному випадку його можна отримати з найближчої до поточної ділянки сигналу, що містить паузу, у припущенні, що ці паузи у сигналі заповнені характерним шумом.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЇЇ ВИРІШЕННЯ

Отже задачу данного дослідження можна сформулювати так: для обох завдань — сегментації сигналу і зменшення рівня сторонніх шумів сторонніх шумів, треба побудувати алгоритм визначення пауз у вхідному сигналі, який зможе надійно працювати в умовах нестационарного шуму і буде мати невелику обчислювальну складність. При цьому його можна реалізувати на звичайному комп'ютерному обладнанні за умови, що він має працювати у режимі майже реального часу.

Для сегментації сигналу за визначеними паузами із заданою мінімальною довжиною сегменту достатньо за знайденими паузами визначити позицію паузи, найближчу до бажаної (за заданої умови, що довжина сегменту повинна бути не менше деякого значення) паузу і там поставити границю сегменту. Наступний сегмент починається з границі попереднього.

Розглянемо задачу зменшення рівня сторонніх шумів більш детально. Нехай $Y[n]$ — дискретне перетворення Фур'є вхідного сигналу з шумом. Тоді задача зменшення рівня шуму при цифровій обробці сигналу — це отримання оцінки спектру сигналу, позбавленого стороннього шуму $X[n]$ зі спектру вхідного сигналу $Y[n]$:

$$\hat{X}[n] = f(Y[n]) \quad (1)$$

Тут $f(\cdot)$ — деяка функція, що очищує сигнал від сторонніх шумів. Детальніше приклад такої функції буде розглянуто нижче.

У випадку адитивного шуму, фільтр шуму можна задати як фільтр Вайнера [3, 4], що мінімізує середньо квадратичну похибку:

$$H(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{S_X(\omega) + S_N(\omega)} \quad (2)$$

Тут $S_X(\omega)$ — спектр сигналу, а $S_N(\omega)$ — відповідно, спектр шуму. Звідси функція фільтрації сигналу від шуму для фрейму m може бути задана як:

$$f(Y_m) = \frac{S_X(m)}{S_X(m) + S_N(m)} Y_m \quad (3)$$

Вважаючи, що спектр шуму відомий, спектр очищеного від шуму сигналу можна описати як:

$$S_X(m) = \begin{cases} |Y(m)|^2 - S_N(m), & |Y(m)|^2 > S_N(m) \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

Звідси функція видалення шуму може бути задана у вигляді:

$$f(Y(m)) = \begin{cases} \frac{|Y(m)|^2 - S_N(m)}{|Y(m)|^2} Y(m), & |Y(m)|^2 > S_N(m) \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

Оцінити спектр шуму в загальному випадку досить складно, особливо у випадку нестационарного шуму, тобто шуму, який змінюється з часом. Якщо вважати, що ділянки сигналу, де немає голосу містять лише шум, то за апроксимацію спектру шуму можна взяти спектр сигналу в ділянці сигналу, де немає голосу.

Тобто задача визначення спектру шуму зводиться до визначення пауз у голосовому сигналі і визначення їх спектру. Як вказано у роботі Hirsch [5], «ця задача (визначення пауз у голосовому сигналі) є дуже складною і в загальному сенсі не розв'язаною для реалістичних ситуацій зі змінним рівнем шуму». На сьогоднішній день існує досить велика кількість алгоритмів для визначення пауз у мовному потоці, кожен з яких має певні переваги у швидкодії, чутливості, точності чи обчислювальній складності. Розроблені алгоритми базуються на відстані між коефіцієнтами лінійного передбачення Itakura [6], рівнях енергії, пітчі, і частоті зміни знаку амплітуди сигналу (zero crossing rate) [7], кепстральних властивостях [8], тощо. Деякі з цих алгоритмів на сьогодні успішно використовуються, зокрема у телекомунікаційних системах [9], проте, оскільки більшість з них базується на стаціонарно визначеному пороговому рівні, що відділяє ділянки звукового сигналу де є пауза, якість визначення пауз такими алгоритмами є не достатньо високою для сигналів зі змінним рівнем шуму і невисоким співвідношенням сигнал/шум.

Останнім часом було розроблено досить багато адаптивних алгоритмів, що можуть адаптуватися до змінного співвідношення сигнал/шум і можуть впевнено визначати паузи у мовному сигналі з низьким співвідношенням сигнал/шум. Так, в роботі [10] наводиться порівняльний аналіз трьох алгоритмів визначення пауз, що базуються на логарифмічній енергії сигналу і порогових значеннях для енергії ділянок сигналу з голосовою активністю і ділянок сигналу лише з шумом (пауз). Показано, що точність адаптивних алгоритмів, які обраховують порогові значення на кожному кроці є вищою, аніж алгоритму, де порогові значення задано заздалегідь, проте поведінка запропонованих алгоритмів для сигналів з реальним шумом не є достатньо проілюстрованою.

Один з достатньо точних підходів до визначення пауз пропонують так звані геометрично адаптивні методи визначення порогової енергії, що базуються на імовірнісному розподілі амплітуди сигналу, а також комбінації класичних методів визначення порогової енергії з геометрично адаптивними. Проте такі алгоритми мають достатньо високу обчислювальну складність, що ускладнює їх використання у системах реального часу.

У більшості класичних підходів енергія сигналу визначається логарифмічно за спектральною енергією сигналу або за частотою зміни знаку функцією амплітуди сигналу, проте деякі автори пропонують використовувати четвертого [11] порядку для визначення енергії сигналу.

3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАУЗ І АПРОКСИМАЦІЯ ШУМУ У ГОЛОСОВОМУ МОВНОМУ СИГНАЛІ

Для визначення пауз у голосовому мовному сигналі по сигналу проходимо прямокутним вікном довжиною 100 мс. таким чином, щоб кожне наступне вікно починалося на середині попереднього. Тобто на кожному кроці алгоритму сигнал задається як:

$$s_k[i] = \begin{cases} s[i], & 0.05 * D * k \leq i < 0.15 * D * k \\ 0, & else \end{cases} \quad (6)$$

Тут D — частота дискретизації сигналу в Гц, а k — номер кроку алгоритму.

Вважаємо, що на ділянці сигналу тривалістю 10 секунд має бути принаймні одна пауза. Отже, на кожному кроці алгоритму інформація про попередні 10 с. звукового сигналу має бути врахована. Також вважаємо, що енергія сигналу у ділянці з паузою є меншою, ніж енергія сигналу у ділянках, де присутня голосова активність.

3.1. ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГІЇ СИГНАЛУ

Енергію сигналу визначимо як дисперсію амплітуди сигналу у заданому вікні:

$$E_{s_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_k[i]^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_k[i] \right)^2. \quad (7)$$

Можливість використання другого статистичного моменту в якості міри енергії сигналу показано в [11], а, отже, використання дисперсії в якості міри енергії є розвитком підходу описаного в [11]. Дисперсія в якості міри енергії сигналу має схожі властивості до логарифмічної енергії і частоти зміни знаку функцією амплітуди, обчислювальна складність для алгоритму обрахунку дисперсії є невеликою і при високій частоті дискретизації кількість значень, що враховуються при обрахунку дисперсії може бути зменшена за рахунок ігнорування кожного другого значення амплітуди сигналу у вікні, що дозволяє зменшити обчислювальну складність алгоритму ще більше без суттєвого погіршення точності алгоритму. До того ж, виходячи зі статистичних властивостей дисперсії, вона характеризує відмінність значень у вибірці, що для ділянок сигналу з голосом має бути вищою, ніж для ділянок де присутній лише шум (пауз).

3.2. ВИЗНАЧЕННЯ ПОРОГОВИХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ АЛГОРИТМУ ПОШУКУ ПАУЗ

Як зазначається в роботі [12], при неперервному мовленні в середньому кожне 28 з 34 слів має перед собою паузу тривалістю ≥ 250 мс. Виходячи з експериментальних даних, встановлено, що середня тривалість слова складає 0,25–1 с. Виходячи з цих даних, можна стверджувати, що на ділянці сигналу тривалістю 10 с. може бути в середньому 6–10 пауз. До того ж, як вказано у [12] доросла людина в середньому робить 14 дихальних рухів на хвилину. Звідси, на інтервалі 10 с. людина робить принаймні два вдихи, а це значить, що на цій ділянці буде принаймні дві паузи для вдиху повітря. Враховуючи те, що при використанні систем стенографування доводиться мати справу з мовленням, швидшим за середню швидкість мовлення, тому можна припустити, що на ділянці сигналу тривалістю 10 с. буде присутня принаймні одна пауза, тривалість якої дозволить обчислити спектр сигналу для використання у алгоритмі спектрального віднімання.

Отже, перед початком роботи алгоритму аналізуємо перші 10 секунд мовного звукового сигналу. Для аналізу проходимо по сигналу вікнами (6) і для кожного вікна обраховуємо енергію за формулою (7). Серед всіх вікон на даній ділянці знаходимо вікно, для якого значення енергії мінімальне.

Експериментально було встановлено, що у голосових сигналах, що використовуються для стенографування, енергія вокалізованих і невокалізованих ділянок відрізняється принаймні в 4-6 разів. Отже мінімальне значення енергії домножуємо на два і отримуємо стартове порогове значення для роботи алгоритму:

$$E_t = 2 \min(E_{s_k}). \quad (8)$$

Тут E_{s_k} — енергія сигналу для кожного з вікон на перші 10 с. звучання, тобто

$$k = 1, 2, \dots, 200, \quad (9)$$

враховуючи, що довжина вікна — 100 мс і вікна перекриваються на 50%.

Далі на кожному кроці алгоритму порівнюємо значення енергії у вікні, що аналізується, з пороговим значенням і, якщо значення енергії у вікні, що аналізується, менше, ніж порогове значення:

$$E_{s_k} < E_t, \quad k = 1, 2, \dots, 20 * t, \quad (10)$$

стверджуємо, що у даній ділянці сигналу є пауза, де t — тривалість сигналу в секундах.

Порогове значення уточнюється на кожному кроці алгоритму, враховуючи інформацію про попередні 10 с. звучання сигналу: на кожному кроці алгоритму запам'ятовуємо у масиві значення енергії для поточного вікна, і виключаємо з масиву найперше значення (що було включено в масив раніше за всі інші). Аналогічно першому кроку алгоритму, знаходимо мінімальне значення в масиві, домножуємо його на 2 і таким чином отримуємо нове порогове значення.

4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА

Запропонований алгоритм пошуку, а також метод спектрального віднімання для фільтрації сторонніх шумів було реалізовано в рамках системи розподіленого комп'ютерного стенографування [1, 2]. При надходженні звукового сигналу на вхід системи автоматично відбувається пошук пауз по всій довжині сигналу. Серед параметрів системи заздалегідь задано мінімальну тривалість сегменту звукового сигналу, що як правило відповідає 5–9 словам, які оператор-стенографіст може легко запам'ятати, і враховуючи задану тривалість сегменту відбувається сегментація сигналу за знайденими паузами. Одночасно із пошуком пауз в сигналі відбувається фільтрація сигналу від сторонніх шумів за допомогою методу спектрального віднімання. Така обробка сигналу (визначення пауз, фільтрація від шумів, сегментація) проводиться одноразово, далі отриманий вихідний сигнал зберігається в системі, що виключає додаткове навантаження на систему при повторному зверненні до ділянок сигналу, що особливо важливо

під час розподіленого стенографування, коли швидкість отримання наступного сегменту оператором є критичною.

Робота алгоритму визначення пауз і фільтрації шумів перевірялась з використанням системи розподіленого комп'ютерного стенографування на записах фонограм засідань спеціалізованої вченої ради по захисту дисертаційних робіт Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Такі записи характеризуються тим, що мовлення під час засідання є досить швидким, паузи — короткими, а їх кількість — порівняно невеликою. До того ж, співвідношення сигнал/шум у таких сигналах є невеликим за рахунок того, що в сигналі присутній сторонні шуми від аудиторії і шуми від побутових звукозаписуючих пристроїв, якими створюються такі фонограми, є також досить значними.

Для перевірки роботи запропонованого адаптивного алгоритму визначення пауз було проведено два експерименти: один з використанням запропонованого адаптивного алгоритму, а інший — з використанням статичного порогового значення, що було експериментально підібрано перед початком роботи алгоритму

Результати експерименту наведено в таблиці 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Результати експерименту з перевірки алгоритму визначення пауз у голосовому мовному сигналі

Алгоритм	Реальна кількість пауз	Коректно знайдені паузи	Некоректно знайдені паузи	Пропущені паузи
Адапт.	17	14	4	3
Станд.	17	13	7	4

Зміну порогового значення при використанні адаптивного алгоритму показано на рис. 1, на рис. 2, проілюстровано використання стандартного алгоритму зі статичним значенням порогу.

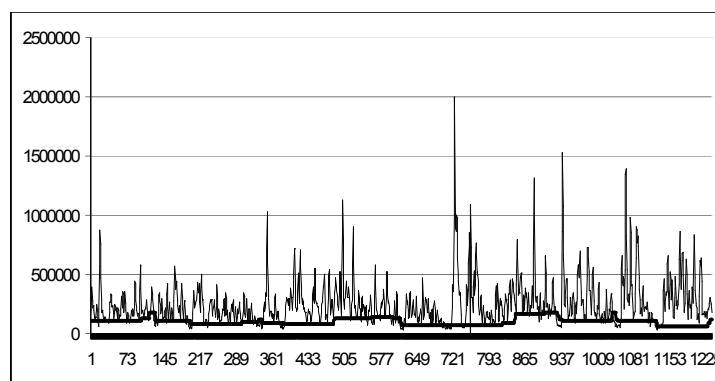


Рис 1. Змінний поріг при використанні адаптивного алгоритму

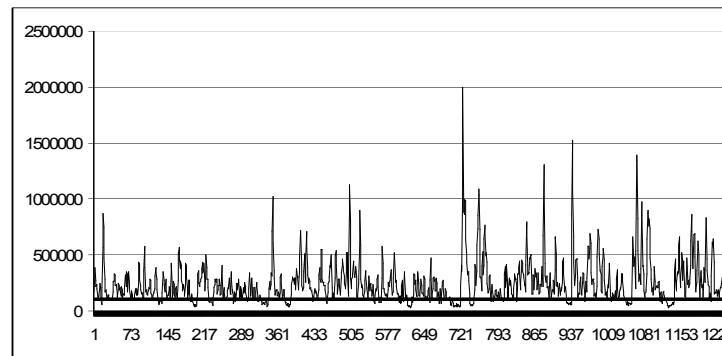


Рис 2. Статичний поріг при використанні стандартного алгоритму

Отже, використання адаптивного алгоритму з перерахунком порогового значення дозволяє підвищити точність визначення пауз порівняно з алгоритмом, де використовується статичний поріг. Точність роботи алгоритму, наприклад, зменшення кількості некоректно визначених пауз можна надалі покращити, ввівши обмеження, зокрема на тривалість паузи.

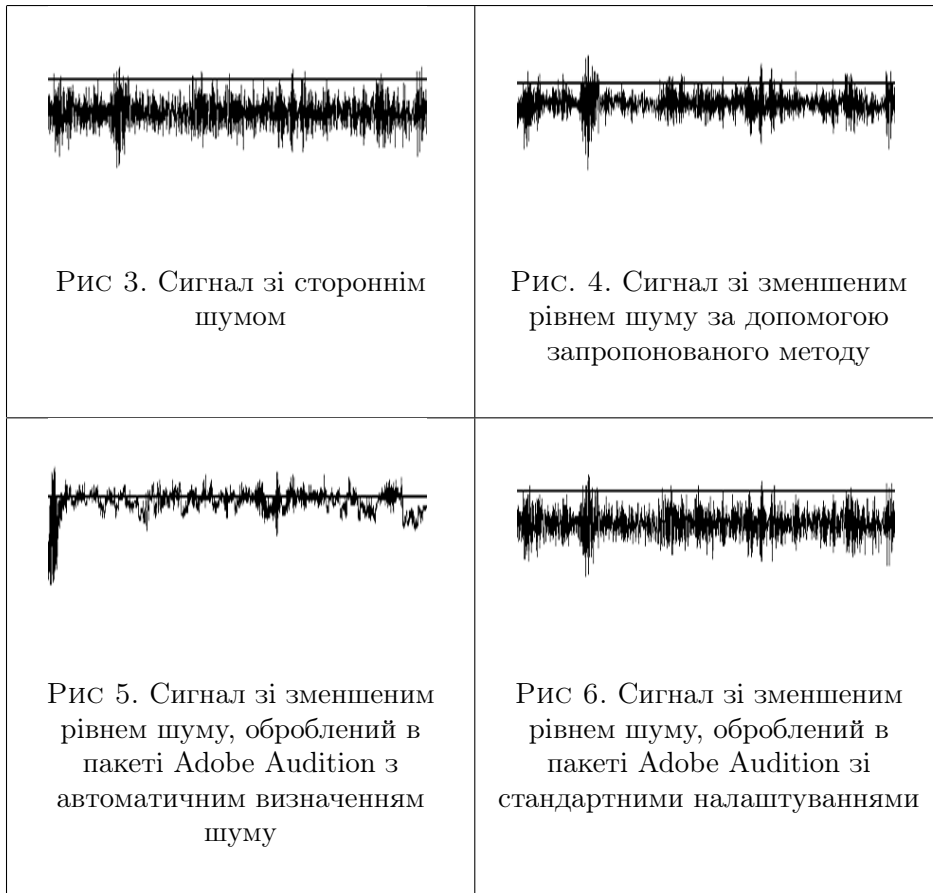
Перевірка підходу до зменшення рівня сторонніх шумів за методом спектрального віднімання із використанням інформації про паузи, наявної у звуковому сигналі також проводилась на сигналах із записами фонограм засідань вчених рад інституту кібернетики. На рис. 3 нижче наведено приклад осцилограми фрагменту сигналу із шумом. На рис. 4. наведено той самий фрагмент, після обробки його за допомогою алгоритму спектрального віднімання і апроксимацією спектру шуму за допомогою адаптивного алгоритму визначення пауз, що наведено вище.

Для порівняння до того самого сигналу було застосовано фільтрацію від шуму за допомогою інструменту Hiss Reduction пакету Adobe Audition із автоматичним визначенням шуму (рис. 5) і зі стандартними налаштуваннями (High hiss reduction, рис. 6). У першому випадку значно зменшилась амплітуда сигналу, порушилась неперервність сигналу і появилась «штучність» при відтворенні сигналу, що значно погіршує його зрозумілість. У другому випадку, при застосуванні стандартних налаштувань, зрозумілість сигналу вдалося покращити, і вдалося зменшити рівень стороннього шуму, але не настільки, як при використанні запропонованого підходу. Отже, проведені експерименти показали, що за допомогою запропонованого підходу можна достатньо точно визначати паузи у мовному сигналі, і застосовувати інформацію про визначені паузи для апроксимації шуму в алгоритмах фільтрації сигналу від сторонніх шумів. Якість фільтрації сигналу при цьому є порівнюваною (а в багатьох випадках і кращою) із існуючими стандартними засобами.

5. Висновки

Запропонований алгоритм адаптивного визначення пауз дозволяє визначати фрагменти сигналу, де міститься лише шум в умовах нестационарного

шуму з точністю, що дає можливість використовувати спектр фрагментів сигналу, де міститься лише шум, для фільтрації методом спектрального віднімання. Застосування такого підходу дозволило підвищити продуктивність як одиночної роботи операторів-стенографістів, так і роботу групи операторів. Невисока обчислювальна складність запропонованих підходів дозволяє використовувати такі підходи для створення стенограм в режимі реального часу.



Серед недоліків описаного підходу до визначення пауз і фільтрації від сторонніх шумів слід відзначити:

1. Основним припущенням, з якого виходили під час розробки такого підходу, було те, що паузи між словами заповнені лише шумом, адитивним в спектральній області. Насправді, нерідко зустрічаються випадки, коли в паузах між словами може бути присутня музика, або шуми, що не є адитивними в спектральній області.
2. Запропонований підхід надійно працює за умови, що енергія шуму є меншою від енергії сигналу, що в деяких випадках може не мати місця в реальних сигналах.

Незважаючи на зазначені недоліки, запропонований підхід надійно працює в більшості типів сигналів, які звичайно використовуються в системах

автоматизованого стенографування, навіть у досить сильно зашумлених сигналах і сигналах з нестационарним шумом. Запропоновані підходи доповнюють інструментарій, що пропонується автоматизованою системою комп'ютерного стенографування [1, 2] для підвищення продуктивності роботи операторів-стенографістів для швидкого отримання стенограм в реальних умовах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кривонос Ю. Г. Информационная система распределенного компьютерного документирования речевых фонограмм заседаний. / Ю.Г. Кривонос, Ю. В. Крак, А. В. Бармак, А. С. Загваздин. // Управляющие системы и машины, (УСиМ) — 2008. — №3. — С.46–52.
2. Кривонос Ю. Г. Розподілене комп'ютерне документування голосових мовних фонограм. / Ю. Г. Кривонос, Ю. В. Крак, О. В. Бармак, О. С. Загваздин // Проблеми програмування. — 2008. — №2–3. — С. 650–656.
3. Papoulis A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. / Papoulis A. — 3rd Edition — New York: McGraw-Hill — 1991. — 852 p.
4. Godsill S. J. Digital Audio Restoration — a statistical model based approach / S. J. Godsill, P. J. Rayner — London: Springer — 1998 — 346 p.
5. Hirsch H. G. Estimation of noise spectrum and its application to SNR estimation and speech enhancement. // Int. Comput. Sci. Inst., Berkeley, CA, Tech. Rep. TR-93-012 — 1993. — P. 1–32.
6. Rabiner L. R. Voiced-unvoiced-silence detection using the Itakura LPC distance measure. / L. R. Rabiner, M. R. Sambur // Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing — 1977. — P. 323–326.
7. J. C. Junqua. A study of endpoint detection algorithms in adverse conditions: Incidence on a DTW and HMM recognize / J. C. Junqua, B. Reaves, B. Mak // Proc. Eurospeech'91 — 1991. — P. 1371–1374.
8. Haigh J. A. Robust voice activity detection using cepstral features. / J. A. Haigh, J. S. Mason // Proc. IEEE TENCON, China — 1993. P. 321–324.
9. Freeman D. K. The voice activity detector for the Pan-European digital cellular mobile telephone service / D. K. Freeman, G. Cosier, C. B. Southcott, I. Boyd // Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Glasgow, U. K. — May 1989, P. 369–372.
10. Gerven S. A comparative study of speech detection methods. / S. Gerven, F. Xie // Proc. EUROSPEECH — 1997 — Vol. 3. — P. 1095–1098.
11. Nemer E. SNR estimation of speech signals using subbands and fourth-order statistics. / E. Nemer, R. Goubran, S. Mahmoud // IEEE Signal Processing Lett. — 1999 — Vol. 6. — P. 171–174.
12. A.W.Sieghman. Of speech and time: temporal speech patterns in interpersonal contexts. — New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc — 1979 — 240 p.

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В. М. ГЛУШКОВА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ, ПРОСПЕКТ АКАДЕМІКА ГЛУШКОВА, 40, КИЇВ, 03680 МСП, УКРАЇНА.

Надійшла 17.08.2010

УДК 517.977

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ

Н. С. ИБРАГИМОВ

РЕЗЮМЕ. В данной работе изучается вопрос сходимости разностного метода решения задачи идентификации для линейного нестационарного уравнения квазиоптики, возникающей при изучении распространения световых волн в неоднородной среде. При этом устанавливается оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении задач идентификации для уравнения квазиоптики, которые часто встречаются в нелинейной оптике при изучении распространения световых волн в неоднородной среде [1], важное место занимает вопрос сходимости разностного метода. С учетом этого в данной работе изучается вопрос сходимости разностного метода решения задачи идентификации для линейного нестационарного уравнения квазиоптики, когда неизвестные коэффициенты ищутся в классе измеримых ограниченных функций. Следует отметить, что вопрос относительно задач идентификации для стационарного уравнения квазиоптики ранее изучены, например, в работах [2]–[9] и др. Ввиду того, что задача, изученная в этой работе, отличается от ранее изученных, исследование вопроса сходимости разностного метода решения рассматриваемой задачи представляет немалый интерес.

1. ПОСТАНОВКА И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ.

Пусть $l > 0, T > 0, L > 0$ — заданные числа, $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq L, \Omega_t = (0, l) \times (0, t), \Omega_z = (0, l) \times (0, z), \Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z), \Omega = \Omega_{TL}; C^k([0, T], B)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \geq 0$ -раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(0, l)$ — лебегово пространство функций, суммируемых на отрезке $[0, l]$ со степенью $p \geq 1$; $W_p^k(0, l), W_p^{k,m}(\Omega_L), W_p^{k,m}(\Omega_T), p \geq 1, k \geq 0, m \geq 0$ — соболевы пространства, которые определены, например, в [10]; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x, t, z)$ из $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z} \in L_2(\Omega)$, скалярное произведение и норма в нем

определяются в виде:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x, t, z)$ пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в нем определяются в виде:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x^2} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^{2,1,1}(\Omega)$, элементы которого обращаются в нуль на концах отрезка $[0, l]$ для $(t, z) \in Q \equiv (0, T) \times (0, L)$; символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через $c_j, j = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим задачу идентификации о минимизации функционала:

$$J(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \quad (1)$$

на $V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1) : v_m \in L_2(0, l), 0 \leq v_m(x) \leq b_m, \overset{\circ}{\forall} x \in (0, l), m = 0, 1 \right\}$ при условиях:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a(x) \psi + v_0(x) \psi + i v_1(x) \psi = f(x, t, z),$$

$$(x, t, z) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), (x, z) \in \Omega_L, \quad \psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), (x, t) \in \Omega_T, \quad (3)$$

$$\psi(0, t, z) = \psi(l, t, z) = 0, \quad (t, z) \in Q, \quad (4)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $a_0 > 0, a_1 > 0, b_m > 0, m = 0, 1$ — заданные числа, $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ — заданные числа, такие, что $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$, $a(x)$ — заданная измеримая вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию:

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \quad \overset{\circ}{\forall} x \in (0, l), \mu_0 = \text{const} > 0; \quad (5)$$

$\varphi_0(x, z), \varphi_1(x, t), f(x, t, z), y_0(x, z), y_1(x, t)$ — заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_0 \in \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L), \varphi_1 \in \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_T), f \in W_2^{0,1,1}(\Omega),$$

$$y_0 \in W_2^{1,1}(\Omega_L), y_1 \in W_2^{1,1}(\Omega_T). \quad (6)$$

При каждом $v \in V$ задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ из условий (2)–(4) будем называть прямой задачей для линейного нестационарного уравнения квазиоптики (2). Под решением прямой задачи будем понимать почти всюду решение из пространства $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$. Используя метод Галеркина, можно установить справедливость утверждения:

Теорема 1. Пусть функции $a(x)$, $\varphi_0(x, z)$, $\varphi_1(x, t)$, $f(x, t, z)$ удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда при каждом $v \in V$ прямая задача (2)–(4) имеет единственное почти всюду решение и справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi_0\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right). \quad (7)$$

Наряду с этой теоремой, используя методику работ [5], [11], можно доказать, что задача идентификации (1)–(4) имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим разностную аппроксимацию задачи идентификации (1)–(4). С этой целью область $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, T] \times [0, L]$ заменим последовательностью сеток:

$$\begin{aligned} \{(x_j, t_k, z_p)_n\}, \quad x_j &= jh_n - \frac{h_n}{2}, \quad j = \overline{1, M_n - 1}, \\ x_0 &= x_1 - \frac{h_n}{2} = 0, \quad x_{M_n} = x_{M_n - 1} + \frac{h_n}{2} = l, \\ t_k &= k\tau_n, \quad k = \overline{0, N_n}, \quad z_p = p\theta_n, \quad p = \overline{0, Z_n}, \\ h_n &= \frac{l}{M_n - 1}, \quad \tau_n = \frac{T}{N_n}, \quad \theta_n = \frac{L}{Z_n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пусть $M = M_n$, $N = N_n$, $Z = Z_n$, $h = h_n$, $\tau = \tau_n$, $\theta = \theta_n$,

$$\begin{aligned} \delta_t \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p}{\tau}, \quad \delta_{\bar{z}} \Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}}{\theta}, \\ \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p}{h}, \quad \delta_{\bar{x}\bar{x}} \Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{j+1k}^p - 2\Phi_{jk}^p + \Phi_{j-1k}^p}{h^2}, \\ \delta_{\bar{x}} \Phi_{1k}^p &= 2 \frac{\Phi_{1k}^p - \Phi_{0k}^p}{h}, \quad \delta_{\bar{x}} \Phi_{Mk}^p = 2 \frac{\Phi_{Mk}^p - \Phi_{M-1k}^p}{h}. \end{aligned}$$

При каждом $n \geq 1$ рассмотрим задачу о минимизации функции:

$$I_n([v]_n) = \beta_0 \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jN}^p - y_{0j}^p|^2 + \beta_1 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^Z - y_{1j}^k|^2 \quad (8)$$

на $V_n \equiv \{[v]_n = ([v_0]_n, [v_1]_n) : [v_m]_n = (v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{mM-1}), \quad 0 \leq v_{mj} \leq b_m, \quad j = \overline{1, M-1}, m = 0, 1\}$ при условиях:

$$\begin{aligned} i\delta_t \Phi_{jk}^p + ia_0 \delta_{\bar{z}} \Phi_{jk}^p - a_1 \delta_{\bar{x}\bar{x}} \Phi_{jk}^p + a^j \Phi_{jk}^p + v_{0j} \Phi_{jk}^p + iv_{1j} \Phi_{jk}^p &= \\ &= f_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_{j0}^p = \varphi_{0j}^p, \quad j = \overline{0, M}, \quad p = \overline{1, Z}, \quad \Phi_{jk}^0 = \varphi_{1j}^k, \quad j = \overline{0, M}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (10)$$

$$\Phi_{0k}^p = \Phi_{Mk}^p = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}, \quad (11)$$

где сеточные функции $a^j, \varphi_{0j}^p, \varphi_{1j}^k, y_{1j}^p, y_{1j}^k, f_{jk}^p$ определены формулами:

$$a^j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad (12)$$

$$\varphi_{0j}^p = \frac{1}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi_0(x, z) dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, p = \overline{1, Z},$$

$$\varphi_{00}^p = \varphi_{0M}^p = 0, p = \overline{1, Z}, \quad (13)$$

$$\varphi_{1j}^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi_1(x, t) dx dt, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N},$$

$$\varphi_{10}^k = \varphi_{1M}^k = 0, k = \overline{1, N}, \quad (14)$$

$$y_{0j}^p = \frac{1}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y_0(x, z) dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, p = \overline{1, Z}, \quad (15)$$

$$y_{1j}^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y_1(x, t) dx dt, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (16)$$

$$f_{jk}^p = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x, t, z) dx dt dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (17)$$

С помощью метода сумматорных тождеств для решения разностной схемы (9)–(11) можем доказать следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $[v]_n \in V_n$ для решения разностной схемы (9)–(11) справедлива оценка:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq$$

$$\leq c_1 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right), \quad (18)$$

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}.$$

Отметим, что ввиду линейности уравнения (2) оценка (18) определяет и оценку устойчивости для решения разностной схемы (9)–(11).

2. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ.

Теперь изучим погрешность аппроксимации разностной схемы (9)–(11). С этой целью рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} i\delta_{\bar{t}}W_{jk}^p + ia_0\delta_{\bar{z}}W_{jk}^p - a_1\delta_{\bar{x}x}W_{jk}^p + a^jW_{jk}^p + v_{0j}W_{jk}^p + iv_{1j}W_{jk}^p = \\ = F_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$W_{j0}^p = 0, j = \overline{0, M}, p = \overline{1, Z}, W_{jk}^0 = 0, j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$W_{0k}^p = W_{Mk}^p = 0, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (21)$$

где сеточная функция F_{jk}^p определяется формулой:

$$\begin{aligned} F_{jk}^p = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} \left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial\psi}{\partial z} - \right. \\ \left. - a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi \right) dxdt dz - \end{aligned} \quad (22)$$

$$-i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^p - ia_0\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}^p + a_1\delta_{\bar{x}x}\psi_{jk}^p - a^j\psi_{jk}^p - v_{0j}\psi_{jk}^p - iv_{1j}\psi_{jk}^p,$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$, $W_{jk}^p = \Phi_{jk}^p - \psi_{jk}^p$, Φ_{jk}^p — решение разностной схемы (9)–(11), а ψ_{jk}^p определяется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_{jk}^p = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} \psi(x, t, z) dxdt dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \\ \psi_{j0}^p = \varphi_{0j}^p, j = \overline{0, M}, p = \overline{1, Z}, \quad \psi_{jk}^0 = \varphi_{1j}^k, j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N}, \quad (23) \\ \psi_{0k}^p = \psi_{Mk}^p = 0, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \end{aligned}$$

Пусть оператор $Q_n = Q_n(v)$ на множестве V определяется формулой:

$$Q_n(v) = ([w_0]_n, [w_1]_n) = (w_{01}, \dots, w_{0M-1}, w_{11}, \dots, w_{1M-1}), \quad (24)$$

$$w_{mj} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} v_m(x) dx, \quad j = \overline{1, M-1}, m = 0, 1.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда справедлива оценка:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq c_2 \left(\beta_{\tau h}^\theta + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2 \right) \quad (25)$$

для $\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}$, где $\beta_{\tau h}^\theta > 0$, $\beta_{\tau h}^\theta \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$;

$$\|Q_n(v) - [v]_n\|^2 = h \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{m=0}^1 |w_{mj} - v_{mj}|^2. \quad (26)$$

Доказательство. Используя методику доказательства оценки (18), имеем:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq c_3 \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^p|^2 \quad (27)$$

$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}$. Сеточную функцию F_{jk}^p представим в виде:

$$F_{jk}^p = F_{jk}^{p1} + F_{jk}^{p2} + F_{jk}^{p3} + F_{jk}^{p4} + F_{jk}^{p5} + F_{jk}^{p6}, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (28)$$

где

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz - i \delta_{\bar{t}} \psi_{jk}^p, \quad (29)$$

$$F_{jk}^{p2} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} i a_0 \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial z} dx dt dz - i a_0 \delta_{\bar{z}} \psi_{jk}^p, \quad (30)$$

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} a_1 \frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} dx dt dz + a_1 \delta_{\bar{x}} \psi_{jk}^p, \quad (31)$$

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} a(x) \psi(x, t, z) dx dt dz - a^j \psi_{jk}^p, \quad (32)$$

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} v_0(x) \psi(x, t, z) dx dt dz - v_{0j} \psi_{jk}^p, \quad (33)$$

$$F_{jk}^{p6} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} i v_1(x) \psi(x, t, z) dx dt dz - i v_{1j} \psi_{jk}^p, \quad (34)$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. С помощью формул (23) для ψ_{jk}^p из (29) имеем:

$$F_{jk}^{p1} = \frac{i}{\theta\tau^2h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left[\frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right] d\gamma dx dt dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим неравенство:

$$|F_{jk}^{p1}|^2 \leq \frac{i}{\theta\tau^2h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left| \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right|^2 d\gamma dx dt dz \quad (35)$$

для $j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}, p = \overline{1, Z}$. При $k = 1$ имеем:

$$F_{j1}^{p1} = \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz -$$

$$- \frac{i}{\theta\tau^2h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_0}^t \frac{\partial\psi(x, \gamma, z)}{\partial \gamma} d\gamma dx dt dz.$$

Из этого нетрудно получить неравенство:

$$|F_{j1}^{p1}|^2 \leq \frac{4}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, p = \overline{1, Z}. \quad (36)$$

Действуя аналогично, как при получении (35), (36), из формулы (30) имеем:

$$|F_{jk}^{p2}|^2 \leq \frac{a_0^2}{\theta^2\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\theta}^0 \left| \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial\psi(x, t, z + \eta)}{\partial z} \right|^2 d\eta dx dt dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{2, Z}, \quad (37)$$

$$|F_{jk}^{12}|^2 \leq \frac{4a_0^2}{\theta\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial z} \right|^2 dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (38)$$

Используя формулу (31) для $F_{jk}^{p3}, j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ и формулу для сеточной функции ψ_{jk}^p из (23), нетрудно получить справедливость

равенства:

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 a_1 \left[\frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t + \gamma, z)}{\partial x^2} \right] d\beta d\xi dx dt dz.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|F_{jk}^{p3}|^2 \leq \frac{a_1^2}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 \left| \frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t, z)}{\partial x^2} \right| d\beta d\xi dx dt dz, \quad (39)$$

$j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. Теперь оценим $F_{1k}^{p3}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. С помощью формулы (31) при $j = 1$ получим следующее равенство:

$$F_{1k}^{p3} = -\frac{a_1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_1-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_1+h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz + \\ + \frac{2a_1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_1-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_1+h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \int_{x_1-h/2}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|F_{1k}^{p3}|^2 \leq \frac{16a_1^2}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_1-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_1+h/2}^{x_1+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dt dz, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (40)$$

Аналогично этому неравенству из формулы (31) при $j=M-1$ получим:

$$|F_{M-1k}^{p3}|^2 \leq \frac{16a_1^2}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_{M-1}-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_{M-1}+h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dt dz, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (41)$$

Теперь оценим $F_{jk}^{p4}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. С помощью формул (12), (23) из (32) получим следующее равенство:

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} a(x)(\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p) dx dt dz, \\ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (42)$$

С помощью формулы (23) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p &= \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left[\int_{\xi}^x \frac{\partial\psi(\beta, t, z)}{\partial\beta} d\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma}^t \frac{\partial\psi(\xi, \alpha, z)}{\partial\alpha} d\alpha + \int_{\eta}^z \frac{\partial\psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial\chi} d\chi \right] d\xi d\gamma d\eta, \end{aligned} \quad (43)$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. С учетом этой формулы из (42) при условии (5) имеем:

$$\begin{aligned} |F_{jk}^{p4}|^2 &\leq \frac{3\mu_0^2 h}{\theta\tau} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\beta, t, z)}{\partial\beta} \right|^2 d\beta dt dz + \\ &\quad + \frac{3\mu_0^2 \tau}{\theta h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\xi, \alpha, z)}{\partial\alpha} \right|^2 d\xi d\alpha dz + \\ &\quad + \frac{3\mu_0^2 \theta}{\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial\chi} \right|^2 d\xi d\gamma d\chi, \end{aligned} \quad (44)$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. Используя (23), (24), из (33) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} F_{jk}^{p5} &= \psi_{jk}^p (w_{0j} - v_{0j}) + \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) (\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p) dx dt dz, \\ &\quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью формулы (43) и условия $0 \leq v_{0j} \leq b_0, j = \overline{1, M-1}$ получим:

$$\begin{aligned} |F_{jk}^{p5}|^2 &\leq 2|\psi_{jk}^p|^2 |w_{0j} - v_{0j}|^2 + \frac{6b_0^2 h}{\theta\tau} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\beta, t, z)}{\partial\beta} \right|^2 d\beta dt dz + \\ &\quad + \frac{6b_0^2 \tau}{\theta h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\xi, \alpha, z)}{\partial\alpha} \right|^2 d\xi d\alpha dz + \\ &\quad + \frac{6b_0^2 \theta}{\tau h} \int_{z_{p-1}t_{k-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k} \int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial\chi} \right|^2 d\xi d\gamma d\chi, \end{aligned} \quad (45)$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. Аналогично этому из (34) имеем:

$$\begin{aligned}
 |F_{jk}^{p6}|^2 &\leq 2|\psi_{jk}^p|^2 |w_{1j} - v_{1j}|^2 + \frac{6b_1^2 h}{\theta \tau} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k + h/2} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta dt dz + \\
 &+ \frac{6b_1^2 \tau}{\theta h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k + h/2} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\xi d\alpha dz + \\
 &+ \frac{6b_1^2 \theta}{\tau h} \int_{z_{p-1} t_{k-1} x_j - h/2}^{z_p} \int_{t_k}^{t_k + h/2} \int_{x_j + h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\xi d\gamma d\chi,
 \end{aligned} \tag{46}$$

$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$. Используя теорему Фубини (см. [12]) из (35) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 &\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz \right] d\gamma.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Согласно теореме о непрерывности в среднем $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz < \varepsilon,$$

если только $|\gamma| \leq \tau < \delta$. Поэтому для таких τ из (47) получим неравенство:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \omega_{0\tau}, \tag{48}$$

где $\omega_{0\tau} > 0, \omega_{0\tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Кроме того, из (36) имеем:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |F_{j1}^{p1}|^2 \leq 4 \int_0^\tau \left\| \frac{\partial \psi(., t, .)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 dt.$$

Отсюда в силу абсолютной непрерывности интеграла получим:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |F_{j1}^{p1}|^2 \leq \tilde{\omega}_{0\tau}, \tag{49}$$

где $\tilde{\omega}_{0\tau} > 0, \tilde{\omega}_{0\tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Суммируя (48) и (49), имеем:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \omega_{1\tau}, \tag{50}$$

где $\omega_{1\tau} = \omega_{0\tau} + \tilde{\omega}_{0\tau}$. Аналогично получению этого, из (37)–(41) получим:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p2}|^2 \leq \omega_{2\theta}, \quad (51)$$

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p3}|^2 \leq \omega_{3h}, \quad (52)$$

где $\omega_{2\theta} > 0, \omega_{2\theta} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$; $\omega_{3h} > 0, \omega_{3h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. В силу оценки (7) из неравенства (44) получим:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p4}|^2 \leq c_4(h^2 + \tau^2 + \theta^2). \quad (53)$$

Из неравенства (45) с помощью оценки (7) имеем:

$$\begin{aligned} \theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p5}|^2 &\leq c_5(h^2 + \tau^2 + \theta^2) + \\ &+ 2\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_{0j} - v_{0j}|^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Ясно, что имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} &\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_{0j} - v_{0j}|^2 \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq M-1} \left(\theta\tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \right) \left(h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{0j} - v_{0j}|^2 \right). \end{aligned} \quad (55)$$

С помощью формулы (22) имеем:

$$\begin{aligned} \theta\tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 &\leq \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}^2 dx \leq \\ &\leq \max_{x \in [0, l]} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2, \forall j \in \{1, 2, \dots, M-1\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Используя вложение $C^0([0, l], L_2(Q))$ в пространство $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и оценку (7), из (56) получим справедливость оценки:

$$\max_{1 \leq j \leq M-1} \left(\theta\tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \right) \leq c_6.$$

С учетом этого и неравенства (55) из (54) имеем:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p5}|^2 \leq c_5(h^2 + \tau^2 + \theta^2) + c_7h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{0j} - v_{0j}|^2. \quad (57)$$

Аналогично получению этой оценки, из неравенства (46) получим справедливость оценки:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p6}|^2 \leq c_8(h^2 + \tau^2 + \theta^2) + c_9h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{1j} - v_{1j}|^2. \quad (58)$$

Таким образом, в силу оценок (50)–(53), (57), (58) и формул (26), (28) из оценки (27) получим:

$$\begin{aligned} & \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq \\ & \leq c_{10}(\omega_{1\tau} + \omega_{2\theta} + \omega_{3h} + h^2 + \tau^2 + \theta^2 + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2). \end{aligned}$$

Если в этом примем обозначение $\beta_{\tau h}^\theta = \omega_{1\tau} + \omega_{2\theta} + \omega_{3h} + h^2 + \tau^2 + \theta^2$ и $c_2 = c_{10}$, то получим утверждение теоремы. Теорема 3 доказана. $\square$

3. СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛУ.

Теперь установим сходимость разностных аппроксимаций по функционалу.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и условие согласования шагов сетки: $c_{11} \leq \frac{\tau}{h^2} \leq c_{12}$, $c_{13} \leq \frac{\theta}{h^2} \leq c_{14}$. Пусть, кроме того, функции $y_0(x, z), y_1(x, t)$ удовлетворяют условиям (6). Тогда для $\forall v \in V$ и $\forall [v]_n \in V_n$ имеет место:

$$|J(v) - I_n([v]_n)| \leq c_{15} \left(\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta} + \|Q_n(v) - [v]_n\| \right), n = 1, 2, \dots, \quad (59)$$

где $\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta > 0, \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

Доказательство. С помощью формул (1), (8) и оценок (7), (18) имеем:

$$\begin{aligned} & |J(v) - I_n([v]_n)| \leq \\ & \leq c_{16} \left[\left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, T, z) - \Phi_{jN}^p + y_{0j}^p - y_0(x, z)|^2 dx dz \right)^{1/2} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{t_{k-1}x_j-h/2}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, L) - \Phi_{jk}^Z + y_{1j}^k - y_1(x, t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \right] = \\ & = c_{17}[J_0 + J_1]. \end{aligned} \quad (60)$$

По формуле для J_0 получим:

$$\begin{aligned}
 (J_0)^2 &\leq 3 \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, T, z) - \psi_{jN}^p|^2 dx dz + \\
 &+ 3 \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi_{jN}^p - \Phi_{jN}^p|^2 dx dz + \\
 &+ 3 \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |y_{0j}^p - y_0(x, z)|^2 dx dz = 3(J_{01} + J_{02} + J_{03}). \quad (61)
 \end{aligned}$$

По формуле для J_{02} и с учетом оценки (25) имеем:

$$J_{02} = \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jN}^p - \Phi_{jN}^p|^2 \leq c_2(\beta_{\tau h}^\theta + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2). \quad (62)$$

С помощью формулы для J_{03} и условия $y_0 \in W_2^{1,1}(\Omega_L)$ установим неравенство:

$$J_{03} \leq c_{18}(h^2 + \theta^2). \quad (63)$$

Теперь оценим J_{01} . Используя его формулу и формулу (23) имеем:

$$\begin{aligned}
 J_{01} &= \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, T, z) - \psi_{jN}^p|^2 dx dz \leq \\
 &\leq 3\tau \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}x_j-h/2}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \left| \frac{\partial \psi(x, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\alpha dx dz + \\
 &+ 3 \frac{h^2}{\tau} \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}t_{N-1}}^{z_p} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, \gamma, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta d\gamma dz + \\
 &+ 3\theta \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}t_{N-1}}^{z_p} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\xi d\gamma d\chi.
 \end{aligned}$$

Отсюда получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned}
 J_{01} &\leq 3\tau \int_{T-\tau}^T \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 dt + \\
 &+ 3 \frac{h^2}{\tau} \int_{T-\tau}^T \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 dt + 3\theta \int_{T-\tau}^T \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t, \cdot)}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 dt.
 \end{aligned}$$

Из этого неравенства в силу согласования шагов сетки и оценки (7), а также абсолютной непрерывности интеграла имеем:

$$J_{01} \leq c_{19}(\tau + \theta) + \omega_{4\tau}, \quad (64)$$

где $\omega_{4\tau} > 0, \omega_{4\tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Таким образом, используя (62)–(64) и условия согласования шагов сетки, из неравенства (61) получим справедливость оценки:

$$(J_0)^2 \leq c_{20}(\beta_{\tau h}^\theta + \omega_{4\tau} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2). \quad (65)$$

Аналогично получению этой оценки из формулы для J_1 получим оценку:

$$(J_1)^2 \leq c_{21}(\beta_{\tau h}^\theta + \omega_{5\theta} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2), \quad (66)$$

где $\omega_{5\theta} > 0, \omega_{5\theta} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$. Суммируя (65), (66), и обозначая $\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta = \beta_{\tau h}^\theta + \omega_{4\tau} + \omega_{5\theta}$, из (60) получим утверждение теоремы. Теорема 4 доказана. $\square$

Для установления оценки сходимости разностных аппроксимаций по функционалу докажем еще две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть, кроме того, оператор Q_n определяется формулой (24) для любого $v \in V$. Тогда $Q_n(v) \in V_n$ и имеет место оценка:

$$|J(v) - I_n(Q_n(v))| \leq c_{15}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (67)$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ любой элемент. Используя формулу (24) и структуры множества V , имеем:

$$0 \leq w_{mj} \leq b_m, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad m = 0, 1. \quad (68)$$

Из этого и структуры множества V_n получаем, что $[w]_n = Q_n(v) \in V_n$. Тогда вместо элемента $[v]_n \in V_n$ выбирая $Q_n(v) \in V_n$ в теореме 4, получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана. $\square$

Пусть оператор P_n определяется следующей формулой:

$$P_n([v]_n) = \tilde{v}(x), \quad \tilde{v}(x) = (\tilde{v}_0(x), \tilde{v}_1(x)) = v_j = (v_{0j}, v_{1j}), \quad (69)$$

$$x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1},$$

где $v_{mj}, j = \overline{1, M-1}$ компоненты вектора $[v_m]_n \in V_n, m = 0, 1$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 4 и для $[v]_n \in V_n$ оператор P_n определяется формулой (69). Тогда $P_n([v]_n) \in V$ и имеет место оценка:

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \leq c_{15}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (70)$$

Доказательство. Пусть $[v]_n \in V_n$ любой элемент. С помощью формулы (69) из структуры множества V_n имеем:

$$0 \leq \tilde{v}_m(x) \leq b_m, \quad x_j - \frac{h}{2} \leq x \leq x_j + \frac{h}{2}, \quad j = \overline{1, M-1}, m = 0, 1.$$

Из этого соотношения получаем, что кусочно постоянное восполнение элемента $[v]_n \in V_n$ определяет элемент $\tilde{v}(x) = P_n([v]_n), x \in [0, l]$, который

принадлежит множеству V . Тогда выбирая $\tilde{v} \in V$ вместо элемента $v \in V$ в теореме 4, получим утверждение леммы. Лемма 2 доказана. $\square$

Наконец, сформулируем теорему о сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Теорема 5. Пусть выполнены условия леммы 1 и леммы 2 и $v^* \in V$ и $[v]_n^* \in V_n$ являются решениями задач (1)–(4) и (8)–(11), соответственно. Тогда последовательность разностных задач (8)–(11) аппроксимирует задачу (1)–(4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^* = J_*$$

и справедлива оценка сходимости:

$$|I_n^* - J_*| \leq c_{15} \sqrt{\beta_{\tau h}^\theta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{где } J_* = J(v^*) = \inf_{v \in V} J(v), \quad I_n^* = I_n([v]_n^*) = \inf_{[v]_n \in V_n} I_n([v]_n).$$

Доказательство этой теоремы проводится методикой работы [13].

Замечание 1. Следует отметить, что аналогичный результат устанавливается и для задачи идентификации о минимизации функционала (1) на множестве V при условиях (2), (3) и при вторых краевых условиях:

$$\frac{\partial \psi(0, t, z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t, z)}{\partial x} = 0, \quad (t, z) \in Q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. Н. Принципы адаптивной оптики. / М. А. Воронцов — М.: Наука, 1985. — 336 с.
2. Потапов М. М., Разгулин А. В., Шамеева Т. Ю. Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления типа Шредингера. / М. М. Потапов // Вестник Московского университета. — Сер. 15. — Вычисл. матем. и киберн. — 1987. — №1. — С. 8–13.
3. Разгулин А. В. Аппроксимация задач управления для нелинейного уравнения Шредингера. / А. В. Разгулин // Вестник Московского университета. — Сер. 15. — Вычисл. матем. и киберн. — 1988. — №2. — С. 28–33.
4. Ягубов Г. Я. Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера. / Г. Я. Ягубов // В сб.: «Матем. модел. и автоматизированные системы» — Баку. Изд-во Бакинского университета. — 1990. — С. 53–60.
5. Ягубов Г. Я. Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера. / Г. Я. Ягубов // Докторск. дисс. — Баку, 1993. — 318 с.; Автореферат докт. дисс. — Киев, 1994. — 29 с.
6. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Разностный метод решения вариационной постановки одной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера. / Г. Я. Ягубов // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-тех. и матем. наук. — 1995. — Т. XVI, №1–2. — С. 46–51.
7. Yildiz B., Yagubov G. Y. On an optimal control problem. / B. Yildiz // Journal computational and applied mathematics. — Vol. 88 (1997). — P. 275–287.

8. Ягубов Г. Я. Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области. / Г. Я. Ягубов // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управления» — Баку. — 2001. — С. 37–47.
9. Ягубов Г. Я. Сходимость разностного метода решения задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества. / Г. Я. Ягубов // Вестник Сумгаитского Государственного Университета. — 2001, №1. — С. 37–42.
10. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. / О. А. Ладыженская — М.: Наука, 1973. — 408 с.
11. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. / Ж.-Л. Лионс — М.: Мир, 1972. — 416 с.
12. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. / В. П. Михайлов — М.: Наука, 1983. — 424 С.
13. Васильев В. П. Методы решения экстремальных задач. / В. П. Васильев — М.: Наука, 1981. — 400 с.

КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ, БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, УЛ. АКАДЕМИКА ЗАХИД ХАЛИЛОВА 23, AZ 1148, Г. БАКУ, AZ-1073/1, АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА.

Надійшла 11.08.2010

УДК 517.9

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ НЕЧІТКИХ СИСТЕМ ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ

Є. В. ІВОХІН

РЕЗЮМЕ. В роботі запропоновано підхід до декомпозиції та агрегування нечітких динамічних систем та розглянуто задачу якісного дослідження динаміки багатомірних нечітких систем. Вважаючи, що система складається з декількох підсистем, і припускаючи, що ізольовані підсистеми є стійкими за ступенем належності, отримано умови стійкості розв'язків багатомірної системи.

Використання нечітких множин для опису ситуацій з невизначеністю знаходить все більше застосувань у різних прикладних галузях. Однак, слід зазначити, що в основному розглядаються системи, розмірність яких невелика. Дослідження багатомірних систем ускладнюється не лише проблемами, пов'язаними з розмірністю, а й з відсутністю специфічних операцій декомпозиції та агрегування нечітких множин.

Розглянемо одну з можливих реалізацій процедур декомпозиції нечітких систем на підсистеми та агрегування окремих нечітких підсистем у загальну систему на основі запропонованої операції над нечіткими множинами.

Розглянемо нечітку динамічну систему S , множина станів якої описується сукупністю нечітких множин $\tilde{A}_S = \{(x, \mu_S(x)), x \in X\}$, де X — деяка універсальна множина. Припустимо, що в системі виділено дві підсистеми S_1, S_2 , стани яких також мають бути представлені у вигляді нечітких множин $\tilde{A}_{S_1} = \{(x^1, \mu_{S_1}(x^1)), x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{A}_{S_2} = \{(x^2, \mu_{S_2}(x^2)), x^2 \in X_2\}$ універсальних множин X_1, X_2 відповідно, $X_1 \cup X_2 = X$.

Для визначення невідомих функцій належності $\mu_{S_1}(x^1) : X_1 \rightarrow [0, 1]$ та $\mu_{S_2}(x^2) : X_2 \rightarrow [0, 1]$ нечітких множин $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$ використаємо підхід з теорії корисності. Ототожнюючи $\mu_{S_1}(x^1)$ та $\mu_{S_2}(x^2)$ з корисністю підсистем S_1, S_2 , будемо представляти величини міри належності $\mu_S(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\mu_S(x^1) &= [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha, \quad x^1 \in X_1, \\ \mu_S(x^2) &= [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta, \quad x^2 \in X_2,\end{aligned}\tag{1}$$

де $\alpha, \beta \geq 0$.

Знаходження величин α, β можна провести на основі методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв [1].

Нехай елементи квадратної матриці $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2}}$, $p_{ii} = 1$, $p_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1,2}$, $i \neq j$, визначають важливості підсистем S_1, S_2 . Матриця з невід'ємними елементами називається M -матрицею (позитивною матрицею). За теоремою Перрона-Фробеніуса [2] вона має максимальне дійсне число

$\lambda(P) \geq 0$ та невід'ємний власний вектор $v(P) = (v_1, v_2)$, що відповідає власному числу $\lambda(P)$. Обираючи $\alpha = v_1$, $\beta = v_2$, отримуємо показники степенів в (1). Після цього, знаходження функцій $\mu_{S_1}(x^1)$, $x^1 \in X_1$ та $\mu_{S_2}(x^2)$, $x^2 \in X_2$ зводиться до розв'язання нелінійної системи рівнянь

$$[\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha = \mu_S(x^1), \quad (2)$$

$$[\mu_{S_2}(x^2)]^\beta = \mu_S(x^2),$$

з обмеженнями $\mu_{S_1}(x^1) \leq 1$, $x^1 \in X_1$, $\mu_{S_2}(x^2) \leq 1$, $x^2 \in X_2$.

Процедура агрегування нечітких множин проводиться за аналогічним принципом. Припустимо, що є дві нечіткі множини $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$, що описують стани нечітких систем S_1, S_2 розмірностей m_1 та m_2 відповідно. Функції $\mu_{S_1}(x^1)$ та $\mu_{S_2}(x^2)$ є значеннями мір належності елементів x^1 , $x^1 \in X_1$ та x^2 , $x^2 \in X_2$ відповідним нечітким множинам, X_1, X_2 — універсальні множини значень станів систем, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Розглянемо простір $X_1 \cup X_2 = X$ розмірності $m = m_1 + m_2$, що містить значення станів нечіткої системи S , складеної з підсистем S_1, S_2 . Визначимо правило побудови значень функції належності $\mu(x)$ на основі величин функцій належності $\mu_{S_1}(x_1)$ та $\mu_{S_2}(x_2)$ як мір належності станів підсистем S_1, S_2 . Для кожного $x = (x^1, x^2) \in X$ значення функції належності будемо визначати за допомогою співвідношень (1) $\mu_S(x^1) = [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha$, $x^1 \in X_1$, $\mu_S(x^2) = [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta$, $x^2 \in X_2$, де $\alpha, \beta \geq 0$. Величини α, β визначимо на основі наведеної вище методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв. Визначаючи власний вектор $v(P) = (v_1, v_2)$ позитивної матриці P , елементи якої задають рівні важливості підсистем, отримаємо $\alpha = v_1$, $\beta = v_2$ та обчислюємо значення функції належності $\mu(x)$ для довільного $x \in X$.

Запропоновані процедури декомпозиції та агрегування нечітких систем дозволяють розглянути задачу якісного дослідження динаміки багатомірних нечітких систем такого вигляду

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \quad (3)$$

де $\tilde{X}_k = \tilde{X}(t_k)$ нечіткі множини, що використовуються для опису станів системи, $\tilde{X}_0 = \tilde{X}(t_0)$ нечітка множина, що визначає початковий стан системи, $R_k = R(t_k)$ — оператори переходу, що визначають динаміку системи, $t_k = k$, $k = 0, 1, \dots$ — моменти часу, $\circ$ — операція композиції.

Для дослідження системи (3) застосуємо підхід, який було використано для аналізу систем великої розмірності. Вважатимемо, як і раніше, що система складається з 2 підсистем. При цьому система (3) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k+1}^{(1)} &= R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} + F_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(2)}, \\ \tilde{X}_{k+1}^{(2)} &= R_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(2)} + F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $R_k^{(1)}$, $R_k^{(2)}$ — нечіткі відображення з X_i в X_i , $i = 1, 2$ відповідно, що визначають переходи станів підсистем, $k = 0, 1, 2, \dots$, а $F_k^{(1)}$, $F_k^{(2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — визначають взаємний вплив підсистем.

Нехай нечіткі відображення $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, k = 0, 1, 2, \dots$ задаються однорідними операторами [3], а дію операторів $F_k^{(1)}(\cdot), F_k^{(2)}(\cdot)$ можна записати у вигляді $F_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(2)} = f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)}), F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} = f_k^{(2)}(\tilde{X}_k^{(1)}), k = 0, 1, 2, \dots$ відповідно, де $f_k^{(i)}(\cdot), k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ — неперервні оператори.

Припустимо, що ізольовані підсистеми є стійкими (асимптотично стійкими) за ступенем належності [4]. Це означає, що нечіткі множини

$$\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)} = \left\{ (x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1 \right\}, \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)} = \left\{ (x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2 \right\},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, визначають стійкі (асимптотично) розв'язки підсистем

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} &= R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \\ \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(2)} &= R_k^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)} \end{aligned} \quad (5)$$

з початковими значеннями

$$\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)} = \left\{ (x^1, \mu_0^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1 \right\}, \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)} = \left\{ (x^2, \mu_0^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2 \right\}.$$

Розглянемо динаміку системи (4) з початковими даними $\tilde{X}_0^{(1)} = \tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}, \tilde{X}_0^{(2)} = \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}$. Для $k = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(1)} &= R_0^{(1)} \circ \tilde{X}_0^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{X}_0^{(2)}) = R_0^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_0^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}) = \tilde{\tilde{X}}_1^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}), \\ \tilde{X}_1^{(2)} &= R_0^{(2)} \circ \tilde{X}_0^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{X}_0^{(1)}) = R_0^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}) = \tilde{\tilde{X}}_1^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}). \end{aligned}$$

Використаємо це представлення для знаходження наступного значення. Отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2^{(1)} &= R_1^{(1)} \circ \tilde{X}_1^{(1)} + f_1^{(1)}(\tilde{X}_1^{(2)}) = R_1^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_1^{(1)} + R_1^{(1)} \circ f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}) + f_1^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_1^{(2)}) = \\ &= \tilde{\tilde{X}}_2^{(1)} + R_1^{(1)} \circ f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}) + f_1^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_1^{(2)}), \\ \tilde{X}_2^{(2)} &= R_1^{(2)} \circ \tilde{X}_1^{(2)} + f_1^{(2)}(\tilde{X}_1^{(1)}) = R_1^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_1^{(2)} + R_1^{(2)} \circ f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}) + f_1^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_1^{(1)}) = \\ &= \tilde{\tilde{X}}_2^{(2)} + R_1^{(2)} \circ f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}) + f_1^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_1^{(1)}). \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес далі, маємо

$$\tilde{X}_{k+1}^{(i)} = \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}), k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^k R_k^{(i)} \circ R_{k-1}^{(i)} \circ \dots \circ R_{k-j+1}^{(i)} \circ f_{k-j}^{(i)}(\tilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}), i = 1, 2$.

Таким чином, відхилення розв'язків $\tilde{X}_k^{(1)} = \left\{ (x^1, \mu_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1 \right\}$ та $\tilde{X}_k^{(2)} = \left\{ (x^2, \mu_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2 \right\}$ системи (4) від відповідних розв'язків $\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)} = \left\{ (x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1 \right\}, \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)} = \left\{ (x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2 \right\}$ ізольованих підсистем (5) для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$ визначається нечіткими величинами $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)})$.

Далі використаємо підхід, наведений в [5]. Неважко перевірити, що зміну величин $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}), k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ можна записати у вигляді різницьових рівнянь

$$z_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}, \tilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = R_{k+1}^{(i)} \circ z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}) + f_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}), \quad (7)$$

$$z_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}) = f_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2.$$

Позначивши через d_H хаусдорфову відстань між нечіткими множинами, отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Припустимо, що для $\forall k = 0, 1, 2, \dots$,*

$$d_H(\tilde{X}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) \leq g^{(i)}(d_H(\tilde{X}_k^{(i)}, \tilde{X}_k^{(i)})), \quad (8)$$

де $g^{(i)}(w_k^{(i)}), i = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots$ неперервні додатні функції на R^1 .

Нехай $r_k^{(i)}(w_0^{(i)}), k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ — максимальні розв'язки скалярних різницевих рівнянь:

$$w_{k+1}^{(i)} = \lambda_k^{(i)} w_k^{(i)} + g^{(i)}(w_k^{(i)}), \quad w_0^{(i)} \geq 0, \quad 0 < \lambda_k^{(i)} \leq 1, \quad (9)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$.

Тоді для кожного $i = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots$ маємо

$$\begin{aligned} d_H(\tilde{X}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) &\leq r_k^{(i)}(w_0^{(i)}), \\ d_H(\tilde{X}_1^{(i)}, f_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)})) &\leq w_0^{(i)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доведення. Умови твердження для кожної підсистеми аналогічні, тому їх можна отримати окремо. Оберемо для визначеності $i = 1$. Позначимо $m_k^{(1)} = d_H(\tilde{X}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)})$. Оцінимо величину $m_{k+1}^{(1)}$. Маємо

$$\begin{aligned} m_{k+1}^{(1)} &= d_H(\tilde{X}_{k+1}^{(1)}, \tilde{X}_{k+1}^{(1)}) \leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^{(1)}, \tilde{X}_{k+1}^{(1)} + z_k^{(1)}) \leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^{(1)}, z_k^{(1)}) = \\ &= d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, z_k^{(1)}) = d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ z_{k-1}^{(1)} + f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})) \leq \\ &\leq d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ z_{k-1}^{(1)}) + d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})) = \\ &= d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}) + d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})). \end{aligned}$$

Оператори $R_k^{(1)}, k = 0, 1, 2, \dots$ визначають стійкі (асимптотично стійкі) розв'язки підсистем (5), тому є стискаючими. Іншими словами, справедливі співвідношення

$$d_H(R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}) \leq \lambda_k^{(1)} d_H(\tilde{X}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $0 < \lambda_k^{(1)} \leq 1$ величини норм відповідних операторів $R_k^{(1)}, k = 0, 1, 2, \dots$.

Враховуючи цю нерівність та припущення (8), отримуємо:

$$\begin{aligned} m_{k+1}^{(1)} &\leq \lambda_k^{(1)} d_H \left(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)} \right) + d_H \left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)}) \right) \leq \\ &\leq \lambda_k^{(1)} d_H \left(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)} \right) + g^{(1)}(d_H(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)})) = \lambda_k^{(1)} m_k + g^{(1)}(m_k), \end{aligned}$$

або

$$m_{k+1} \leq \lambda_k^{(1)} m_k + g^{(1)}(m_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Для другої підсистеми доведення проводиться аналогічно.

Таким чином, якщо виконуються умови твердження 1, взаємний вплив підсистем може бути обмежений деякою послідовністю $r_k^{(i)}(w_0^{(i)}) \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$. За умов асимптотичної стійкості ізолюваних підсистем повна система різницьових рівнянь (4) також буде стійкою (асимптотично стійкою) за ступенем належності.

Остаточно, нечітка багатомірна система (3) може бути досліджена на стійкість на основі декомпозиції системи на дві підсистеми з подальшим дослідженням якісної поведінки розв'язків ізолюваних підсистем.

У випадку, коли система (3) є автономною, тобто $\tilde{X}_{k+1} = R \circ \tilde{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ і, відповідно, $R_k^{(i)} = R^{(i)}, F_k^{(i)} = F^{(i)}, f_k^{(i)}(\cdot) = f^{(i)}(\cdot)$, $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ ізолювані підсистеми мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} &= R^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \\ \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(2)} &= R^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)}, \end{aligned} \tag{11}$$

а динаміку станів системи можна записати у вигляді

$$\tilde{X}_{k+1}^{(i)} = \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}), \tag{12}$$

де $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^k \left(\bigcirc_{s=1}^j R^{(i)} \right) \circ f^{(i)}(\tilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})$, $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$.

Співвідношення (7), за яким формується послідовність нечітких величин

$$z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}),$$

що визначають відхилення розв'язків системи (4) від розв'язків ізолюваних підсистем (5), буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &z_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}, \tilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = \\ &= R^{(i)} \circ z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}) = \\ &= R^{(i)} \circ R^{(i)} \circ z_{k-1}^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_{k-1}^{(3-i)}) + \\ &+ R^{(i)} \circ f^{(i)}(\tilde{X}_{k-1}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}) = \dots = \\ &= \left(\bigcirc_{j=1}^{k+1} R^{(i)} \right) \circ z_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}) + \sum_{j=1}^k \left(\bigcirc_{s=1}^j R^{(i)} \right) \circ f^{(i)}(\tilde{X}_{k-j+1}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_{k+1}^{(3-i)}), \\ &z_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}) = f^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}), k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \end{aligned} \tag{13}$$

а скалярні різниці рівняння (9) запишуться у вигляді

$$w_{k+1}^{(i)} = \lambda^{(i)} w_k^{(i)} + g^{(i)}(w_k^{(i)}), \quad w_0^{(i)} \geq 0, \quad 0 < \lambda^{(i)} \leq 1, \quad (14)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$.

Якщо у випадку автономної системи (3) дію кожного з операторів підсистем (4) $R^{(i)}$, $i = 1, 2$ формалізувати у вигляді матрично-векторних операцій з діагональними квадратними матрицями $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, відповідно, можна записати співвідношення, аналогічні (11)–(13):

$$\tilde{X}_{k+1}^{(1)} = D^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}, \quad \tilde{X}_{k+1}^{(2)} = D^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(2)}, \quad (15)$$

$$\tilde{X}_{k+1}^{(i)} = \tilde{X}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2,$$

$$\text{де } z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^k [D^{(i)}]^j f^{(i)}(\tilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}),$$

$$z_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, \dots, \tilde{X}_k^{(3-i)}, \tilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = [D^{(i)}]^{k+1} z_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}) + \sum_{j=1}^k [D^{(i)}]^j \circ$$

$$\circ f^{(i)}(\tilde{X}_j^{(3-i)}) + f^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2,$$

а скалярні різниці рівняння, що визначаються твердженням 1, як і раніше, будуть мати вигляд (14).

Розглянемо інший випадок нечітких систем. Припустимо, що задано набір нечітких множин:

$$\tilde{A}_1 = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), x^1 \in X_1\}, \dots, \tilde{A}_m = \{(x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m)), x^m \in X_m\},$$

що визначені у відповідних універсальних множинах $X_1, \dots, X_m$.

Розглянемо універсальну множину X у вигляді підмножини декартового добутку $X \subset \prod_{i=1}^m X_i$.

Припустимо, що динаміка нечіткої системи S описується нечіткою різницевою системою, множина станів якої визначається сукупністю складених нечітких множин $K(\tilde{A}^m)$ у множині X :

$$\tilde{X}_{k+1}^m = R_k \circ \tilde{X}_k^m, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де $\tilde{X}^m(t_k) = \tilde{X}_k^m$, $k = 0, 1, 2, \dots$ складені нечіткі множини в X можливих станів системи в моменти часу $t_k = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, що визначають розв'язки системи, $\tilde{X}^m(t_0) = \tilde{X}_0^m$ множина початкових станів системи, $R(t_k) = R_k$ деякі нечіткі відображення з X в X , що визначають переходи системи, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Формально систему (16) можна представити у вигляді m взаємозв'язаних підсистем $S_1, \dots, S_m$, стани яких описуються нечіткими множинами $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$ відповідних універсальних множин X_i , $i = \overline{1, m}$.

Для аналізу якісної поведінки системи (16) застосуємо підхід, який було використано для аналізу нечітких систем великої розмірності (3). Розбиття системи (16) на підсистеми у даному випадку не потребує залучення додаткових процедур декомпозиції: система складається зі зкінченної кількості підсистем, стани яких задаються нечіткими множинами. Покладемо для

простоти, як і раніше, $m = 2$. При цьому система (16) буде мати вигляд

$$\tilde{X}_{k+1}^{m(1)} = R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{m(1)}, \quad (17)$$

$$\tilde{X}_{k+1}^{m(2)} = R_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{m(2)},$$

де $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}$ нечіткі відображення з X_i в X_i , $i = 1, 2$, відповідно, що визначають переходи підсистем, $k = 0, 1, 2, \dots$, взаємний вплив в яких відсутній.

Запишемо розв'язок системи (16) у вигляді

$$\tilde{X}_k^{m^0} = \left\{ (x^i, [\mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)]_k) : x^i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{X}^m(0) = \tilde{X}_0^m = \left\{ (x^i, \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)) : x^i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}, \text{початкові значення, } [\mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)]_0 = \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i), x^i \in X_i, i = \overline{1, m}.$$

Визначення 1. *Складену нечітку множини*

$\tilde{X}_0^m = \left\{ (x^i, \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)) : x^i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}$ будемо називати *стійкою* (асимптотично стійкою) за ступенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0, \forall \eta > 0 \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ для довільного розв'язку системи (16) $\tilde{X}_k^{m^1} = \left\{ (x^i, [\mu_{\tilde{A}_i}^1(x^i)]_k) : x^i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots$, початкові значення якого задовольняє умові:

$$\max_{i=\overline{1, m}} \left| \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i) - \mu_{\tilde{A}_i}^1(x^i) \right| < \gamma, \quad (18)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливе:

$$\max_{i=\overline{1, m}} \left| [\mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)]_k - [\mu_{\tilde{A}_i}^1(x^i)]_k \right| < \eta, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i=\overline{1, m}} \left| [\mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)]_k - [\mu_{\tilde{A}_i}^1(x^i)]_k \right| = 0, k = 0, 1, 2, \dots \right).$$

Твердження 2. Для стійкості (асимптотичної стійкості) за рівнем належності системи (16) необхідно і достатньо, щоб стійкими (асимптотично стійкими) були нечіткі підсистеми (17), з яких складається система.

Доведення в даному випадку є очевидним. Дійсно, якщо відомо, що система (16) має стійку (асимптотично стійку) складену нечітку множини $\tilde{X}_0^m = \left\{ (x^i, \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)) : x^i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}$, для якої за означенням 1 існують параметри $\bar{T} > 0, \eta > 0, \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$, тоді ці величини будуть параметрами стійкості (асимптотичної стійкості) за рівнем належності для кожної підсистеми, що входить до системи в цілому.

І, навпаки, припустимо, що нечіткі підсистеми (17) є стійкими (асимптотично стійкими) за рівнем належності. Це означає, що для кожної з них існують параметри $\bar{T}_i > 0, \eta_i > 0, \gamma(\eta_i, \bar{T}_i) > 0, i = \overline{1, m}$, які за означенням 1 характеризують стійкість (асимптотичну стійкість) нечітких підсистем.

Позначимо $\bar{T} = \max_{i=\overline{1,m}} \bar{T}_i$, $\eta = \max_{i=\overline{1,m}} \eta_i$, $\gamma(\eta, \bar{T}) = \max_{i=\overline{1,m}} \gamma(\eta_i, \bar{T}_i)$. Тоді складена нечітка множина

$$\tilde{X}_0^m = \left\{ (x^i, \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)) : (x^i, \mu_{\tilde{A}_i}^0(x^i)) \in \tilde{A}_i, i = \overline{1,m} \right\}$$

також буде стійкою (асимптотично стійкою) за рівнем належності з параметрами $\bar{T} > 0$, $\eta > 0$, $\gamma(\eta, \bar{T}) > 0$.

Таким чином, якісне дослідження складених нечітких систем може бути проведене у формі перевірки стійкості окремих підсистем, що входять у систему. При цьому, якісний аналіз нечітких підсистем може передбачати представлення підсистем (17) у вигляді сукупності нових окремих підсистем та їх подальше дослідження з використанням твердження 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Борисов А. Н. Принятия решений на основе нечетких моделей. / А. Н. Борисов — Рига: Зинатне, 1990. — 184 с.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов — М.: Наука, 1984. — 318 с.
3. Івохін Є. В., Волчков С. О. Якісне дослідження динаміки нечітких дискретних систем. / Є. В. Івохін // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2006. — №1. — С. 40–48.
4. Івохін Є. В. Про стійкоподібні властивості розв'язків нечітких різницевих систем. / Є. В. Івохін // Вісник Київського університету, серія "Кібернетика". — 2006. — №7. — С. 23–31.
5. Lakshmikantham V. Uncertain and fuzzy differential equations. / V. Lakshmikantham // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2000. — Т. 6, вып. 2 (12). — С. 78–91.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 21.01.2010

УДК 517.9

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЛІКІВ В РАКОВІЙ ПУХЛИНІ

Д. А. Ключин, Н. І. Ляшко, С. І. Ляшко,
Г. Г. Дяченко, К. В. Шевченко

РЕЗЮМЕ. В роботі запропоновано модель внутрішньопухлинного переносу ліків із точкових джерел, що є модифікацією моделі Бакстера–Джейна, а також розроблено ефективний варіаційний метод ідентифікації потужності точкових джерел ліків (мікрокапсул), що дозволяє отримати бажану концентрацію діючої речовини в раковій пухлині.

Вступ

Однією з основних складових лікування онкологічних хворих в даний час є передопераційна хіміотерапія ракових пухлин, спрямована на зменшення їхніх розмірів і, відповідно, оптимізацію обсягу хірургічного втручання. Ці методи розділяються на внутрішньовенні, внутрішньоартеріальні й внутрішньопухлинні. На ефективність обраного методу лікування суттєво впливає хімічна стійкість ліків та особливості їх введення в організм. Дослідження Jain, Jang та інших [1, 2] показують, що внутрішньовенні та внутрішньоартеріальні способи введення ліків втрачають ефективність за рахунок фізіологічних перешкод, що заважають швидкому і повноцінному потраплянню ліків до пухлини: висока щільність пухлинних кліток, високий тиск інтерстиціальної рідини усередині пухлини і підвищена проникність її мікрокапілярів. Внаслідок цього на передній план виходять методи внутрішньопухлинного введення ліків, зокрема, за допомогою гелевих розчинних мікрокапсул. Математичні моделі фармакодинаміки, цитостатиків усередині пухлин вивчалися в роботах Baxter і Jain [3–6], Lankelma et al. [7], Goldberg et al. [8], Ward і King [9], Tzafriri et al. [10], Kaowumpai et al. [11], Goh et al. [12] та інших дослідників. Крім того, нові моделі для моделювання та оптимізації переносу ліків всередині пухлин були запропоновані авторами в роботах [13, 14].

Більшість моделей переносу ліків всередині пухлин є початково-крайовими задачами конвективної дифузії, що враховують фармакокінетичні властивості ліків у мікроскопічному масштабі. Внаслідок урахування мікроскопічних особливостей ці моделі є досить складними і тому доцільно розглянути можливість використання макроскопічного масштабу, розглядаючи середню концентрацію ліків в інтерстиціальному просторі. В основу такого дослідження покладемо модель Бакстера–Джейна [2–5].

1. ПРЯМА ЗАДАЧА.

Згідно із моделлю Бакстера–Джейна ракова пухлина в макроскопічному масштабі розглядається як неоднорідна сфера, ядро якої утворено некротичними тканинами, що оточені шарами напівнекротичних та васкуляризованих тканин відповідно. За умови нехтування відстанню між капілярами порівняно із радіусом пухлини та припускаючи осеву симетрію переносу і постійний коефіцієнт дифузії, приходимо до рівняння переносу макромолекул в інтерстиціальному просторі в обмеженій області $G = (0, T) \times [r_0, R]$:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + Au = \phi_S - \phi_R, x \in [r_0, R], 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$-D \frac{\partial u}{\partial r} + vu = 0, r = r_0, \quad (2)$$

$$u(R, t) = u_R(t), \quad (3)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad (4)$$

де $Au \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 vu) - D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r})$, $u(r, t)$ — концентрація розчину ліків в інтерстиціальному просторі (г/моль), v — швидкість інтерстиціальної рідини, спрямованої вздовж радіусу назовні сфери (см/с), D — коефіцієнт дифузії (см²/с), $\phi_S(r)$ — розподілене джерело ліків, що надходять через стінки капілярів (г/моль·с), $\phi_R(r)$ — функція екстраваскулярного зв'язування ліків за рахунок хімічних реакцій (г/моль·с). Умова (2) описує умову непроникненості некротичного ядра пухлини, а умова (4) — розподіл ліків у нормальній тканині, що оточує пухлину.

Розглянемо модель, що описує розподіл ліків у пухлині в результаті дифузії із мікрокапсул r_β або внаслідок ін'єктивного уведення. Припустимо, що координати мікрокапсул відомі заздалегідь. Включимо в модель Бакстера–Джейна точкові джерела $\bar{Q} = (Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_p(t))$, і уведемо спеціальне позначення $\bar{\delta} = (\delta(r - r_1), \delta(r - r_2), \dots, \delta(r - r_p))$, що враховує точкову природу джерел, а також умови ідеального контакту на межі r_1 між шарами напівнекротичних і васкулярних тканин пухлини. Точки r_β визначають розташування джерел ліків з невідомими потужностями Q_β . Треба визначити $q_\beta(t)$, $\beta = \overline{1, p}$, що мінімізують стандартне квадратичне відхилення від цільової концентрації $\phi(r, t)$.

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + Au = \phi_S - \phi_R + \bar{Q}\bar{\delta}(r), x \in [r_0, R], 0 < t \leq T, \quad (5)$$

$$-D \frac{\partial u}{\partial r} + vu = 0, r = r_0, \quad (6)$$

$$u(R, t) = u_R(t), \quad (7)$$

$$\left(-D \frac{\partial u}{\partial r} + vu \right) \Big|_{r=r_1+0} = \left(-D \frac{\partial u}{\partial r} + vu \right) \Big|_{r=r_1-0}, \quad (8)$$

$$u(r, 0) = 0. \quad (9)$$

Застосуємо для розв'язання цієї задачі варіаційний підхід, запропонований Самарським і Вабищевичем [15], і сформулюємо еквівалентну задачу оптимального керування. Будемо вважати, що оптимальне керування належить гільбертовому простору $(L_2(G))^p$, де $G = (0, T) \times [r_0, R]$.

Функціонал якості доцільно взяти у вигляді

$$J_\alpha(\bar{Q}) = \int_{r_0}^R \int_0^T (u(r, t) - \phi(r, t))^2 dr dt + \alpha \|\bar{Q}\|^2, \quad (10)$$

де $\bar{Q} = (Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_p(t))^T$ — вектор керування, $\alpha > 0$ — параметр регуляризації. Оптимальне керування визначається з умови мінімуму функціонала, а саме

$$J_\alpha(\bar{Q}^*) = \min_{\bar{Q} \in (L_2(G))^p} J_\alpha(Q).$$

3. ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ.

Нехай H — поповнення простору гладких функцій, що задовольняють умовам (6)–(9) за нормою:

$$\|u\|_H^2 = \int_{r_0}^R \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right) dr$$

та нехай H_+ — аналогічний простір, що містить гладкі функції, які задовольняють граничним та початковим умовам спряженої задачі. Розширимо оператор L на H за неперервністю, враховуючи граничні умови. Маємо таке операторне рівняння:

$$Lu = f, \quad (11)$$

де $f = -\delta \bar{Q}$. Застосовуючи методологію, розроблену С. І. Ляшком [16], отримаємо такі результати.

Теорема 1. Для будь-якого елемента $f \in (H_+)^*$, існує єдиний слабкий розв'язок задачі (11) в розумінні $(u, L^*v)_{L_2(G)} = \langle f, v \rangle_+, \forall v \in H_+, u \in L_2(G)$.

Теорема 2. Нехай стан системи визначається як слабкий розв'язок задачі (11), та справджуються такі умови: критерій якості $\Phi : L_2(G) \mapsto \mathbb{R}^1$ є слабо напівніперервним знизу за станом системи $u(r, t)$, функціоналом, обмеженим знизу та строго опуклим, множина допустимих керувань $U_\partial \subset (L_2(G))^p$ — обмежена, замкнена та опукла в гільбертовому просторі $U_\partial \subset H$. Тоді існує єдине оптимальне керування системою (5–9).

4. АЛГОРИТМ

Продиференціюємо функціонал (10), та отримаємо

$$J'_\alpha(\bar{Q}) = \bar{\Psi}(t) + 2\alpha\bar{Q}(t), \quad (12)$$

де $\bar{\Psi}(t) = (\psi_1(t, r_1), \psi_2(t, r_2), \dots, \psi_p(t, r_p))^T$, вектор значень розв'язку оберненої задачі у відповідних точках. Отже, рівняння Ейлера для квадратичного функціонала має вигляд:

$$\bar{\Psi}(t) + 2\alpha\bar{Q}(t) = 0. \quad (13)$$

Алгоритм розв'язання задачі точкового оптимального керування складається з трьох стадій: розв'язання прямої задачі, розв'язання спряженої задачі, знаходження нового наближення для оптимального керування.

1. Розв'язання прямої задачі

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + Au^{(k)} = f^{(k)}, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$u^{(k)}(0) = 0. \quad (15)$$

2. Розв'язання спряженої задачі

$$-\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} + A^*\psi^{(k)} = 2 \int_{r_0}^R (u(r, t) - \phi(r, t))^2 dr, 0 < t \leq T, \quad (16)$$

$$\psi^{(k)}(T) = 0. \quad (17)$$

3. Знаходження нового наближення для оптимального керування

$$\frac{\bar{Q}^{(k+1)} - \bar{Q}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \bar{\Psi}^{(k)} + 2\alpha\bar{Q}^{(k)} = 0, k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Для розв'язання рівняння конвекції-дифузії застосуємо лагранжово-ейлеровий підхід [17, 18]. Запишемо рівняння (11) в лагранжовій формі:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Au + f, \quad (19)$$

де $\frac{\partial}{\partial \tau}$ субстанційна похідна.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}.$$

Рівняння траєкторій руху лагранжових координат подамо у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tau} = v_\alpha(\tilde{r}). \quad (20)$$

Побудуємо в області G регулярну ейлерову сітку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, де $\bar{\omega}_h$ — рівномірна різницева сітка за просторовою змінною, а $\bar{\omega}_\tau$ — рівномірна різницева сітка за часом. На кожному часовому інтервалі побудуємо лагранжову сітку $\bar{\omega}_{h,\tau}$, яка узгоджується з регулярною ейлеровою сіткою так, щоб

у момент часу $t = t^n$ їх вузли збігалися. Лінії лагранжевої сітки утворюються траєкторіями руху лагранжевих координат

$$\tilde{r}(t) = r - vt, \tau = t_n - t, t \in [t_{n-1}, t_n].$$

Субстанціональну похідну апроксимуємо на локальній лагранжевій сітці, а оператор дифузії — на регулярній ейлеровій сітці. Неявна різницева схема для задачі (5–9) має вигляд

$$\frac{U_i^n - I(U^{n-1}, \tilde{r})}{\tau} = \Lambda U^n + FW, \quad (21)$$

$$U(r, 0) = 0, \quad (22)$$

де Λ — різницевий оператор, що апроксимує оператор дифузії на регулярній ейлеровій сітці із урахуванням крайових умов, $I(U^{n-1}, \tilde{r})$ — значення інтерполяційного полінома, побудованого за станом U^{n-1} в момент t^{n-1} в точці $\tilde{r}$, яка в момент t^n приходить у вузол сітки $\tilde{r}$. Якщо лагранжева траєкторія виходить на межу області $[r_0, R]$, значення стану системи у відстеженій точці визначається з крайових умов (8).

В результаті отримуємо систему лінійних рівнянь, яка легко розв'язується за допомогою методу немонотонної прогонки.

5. РЕЗУЛЬТАТИ

Для моделювання був обраний процес дифузії ліків з одиночної мікросфери, імплантованої в середину пухлини. Для контролю концентрації використовувалася точка розташування мікросфери. Цільова концентрація дорівнювала $\phi = 0,00005$. Параметри області: $r_0 = 0,1$ см, $R = 1$ см. Коefіцієнт дифузії був заданий згідно із даними, наведеними в роботі [3] $D = 0,00000002$ см²/с. Параметри різницевої схеми: $h = 0,009$ см, $\tau = 0,01$, $T = 0,99$ с. Процес уточнення оптимальної потужності виявився монотонним і швидко збіжним. Відносна похибка обчислення концентрації, що відповідає оптимальній потужності джерела дорівнює 7 %.

ЛІТЕРАТУРА

1. Jan R. K. Transport of molecules, particles and cells in solid tumors / R. K. Jan // Annual Review of Biomedical Engineering. — 1999. — Vol. 1. — P. 241–263.
2. Jang S. H. Drug delivery and transport in solid tumors / S. H. Jang, M. G. Lu, D. Wientjes, J. L. S. Au // Pharmaceutical Research. — 2003. — Vol. 20. — P. 1337–1350.
3. Baxter L. T. Transport of fluid and macromolecules in tumours. I. Role of interstitial pressure and convection / L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1989. — Vol. 37. — P. 77–104.
4. Baxter L. T. Transport of fluid and macromolecules in tumours. II. Role of heterogeneous perfusion and lymphatics / L. T. Baxter, R. K. Jain // Macrovascular research. — 1990. — Vol. 40. — P. 246–263.

5. Baxter L. T. Transport of fluid and macromolecules in tumours. III. Role of binding and metabolism / L. T. Baxter, R. K. Jain // *Macrovascular research*. — 1991 — Vol. 41. — P. 5–23.
6. Baxter L. T. Transport of fluid and macromolecules in tumours. IV. A macroscopic model of a perivascular distribution / L. T. Baxter, R. K. Jain // *Macrovascular research*. — 1991. — Vol. 41. — P. 252–272.
7. Lankelma J., Luque, R. F., Dekker, H., Schinkel, W., Pinedo, H. A mathematical model of drug transport in human breast cancer / J. Lankelma, R. F. Luque, H. Dekker et al. // *Macrovascular research*. — 1999. — Vol. 59. — P. 149–161.
8. Goldberg E. P. Intratumoral cancer chemotherapy and immunotherapy: opportunities for nonsystemic preoperative drug delivery / E. P. Goldberg, A. R. Hadba, B. A. Almond, J. S. E.P. Marotta // *Journal of Pharmacy and Pharmacology*. — 2002. — Vol. 54. — P. 159–180.
9. Ward J. P. Mathematical modelling of drug transport in tumor multicell spheroids and monolayer cultures / J. P. Ward, J. R. King // *Mathematical Biosciences*. — 2003. — №2. — P. 177–207.
10. Tzafriri A. R. Mathematical modeling and optimization of drug delivery from intratumorally injected microspheres / A. R. Tzafriri, E. I. Lerner, M. Flashner-Barak et al. // *Clinical Cancer Research*. — 2005. — Vol. 11. — P. 826–834.
11. Kaowumpai W. Development of a mathematical model for doxorubicin controlled release system using Pluronic gel for breast cancer / W. Kaowumpai, W. Koolpitruck, K. Viravaidya // *Biomedical Engineerings: Abstracts of the 2nd International Symposium*. — Bangkok, 2006. — P. 65–70.
12. Goh Y. M. F., Kong H. L., Wang C.-H. Simulation of the Delivery of Doxorubicin to Hepatoma / Y. M. F. Goh, H. L. Kong, C.-H. Wang // *Pharmaceutical Research*. — 2001. — Vol. 18, №6. — P. 761–770.
13. Ляшко Н. И. Математическое моделирование и оптимизация внутриопухолевого распределения лекарств / Н. И. Ляшко, Д. А. Ключин, Ю. Н. Онопчук // *Кибернетика и системный анализ*. — 2007. — №6. — P. 147–154.
14. Ляшко С. І. Математичне моделювання конвективного переносу цитостатиків усередині ракової пухлини / С. І. Ляшко, Н. І. Ляшко, Д. А. Ключин // *Доповіді НАН України*. — 2008. — №2. — P. 30–35.
15. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Разностные методы решения задач идентификации источника для параболических задач / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. — 1995. — №1. — P. 47–56.
16. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. / С. И. Ляшко. — К.: Наукова думка, 1998. — 472 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 15.01.2010

УДК 004.7(045)

ФРОФ-МЕТОД ДИНАМІЧНОЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕРЕЖ, ЩО ЗРОСТАЮТЬ

Г. М. КРЕМЕНЕЦЬКИЙ

РЕЗЮМЕ. У статті запропоновано метод розширення зони мінімальної взаємодії у поверхневому шарі з поступовою кластеризацією – froth-метод. Метод розглянуто у мережах, що зростають, які використовують алгоритми кліткових структур та нейронного газу, що зростають.

ВСТУП

Підвищення швидкості та розповсюдження мережі Інтернет, зростання можливостей комп'ютерної техніки дає змогу втілювати в життя різноманітні речі, які у минулому вважалися фантастичними. Наприклад, штучна нейронна мережа, яка може розповсюджуватись між мільйонами обчислювальних вузлів. Але існує багато обмежень, які потрібно обходити.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Обмеження у обчислювальних потужностях можна вирішувати розпаралелюванням. Також з'являються обмеження у швидкості каналів зв'язку. Тому основним завданням є вирішення питання як розділити (кластеризувати) спеціалізовану обчислювальну мережу і мінімізувати потоки даних між кластерами (рис. 1).

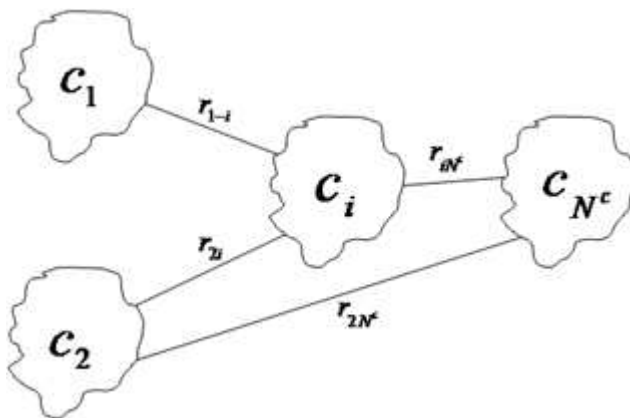


Рис. 1. Кластерна нейронна мережа

Тобто функція оптимізації має вигляд:

$$y = \begin{cases} \min_{i=1}^{N^C} [L(c_i)], \\ \min_{l=1}^{N^R} [V(r_l)], l = \{j, k\}, \end{cases}$$

де r_l — зв'язок між c_j та c_k кластерами, $L(c_i)$ — обчислювальне навантаження на i -й кластер, $V(r_l)$ — потрібна швидкість каналу для зв'язку r_l , N^C — кількість кластерів, N^R — кількість зв'язків між кластерами, $N^R \leq \frac{N^C(N^C-1)}{2}$.

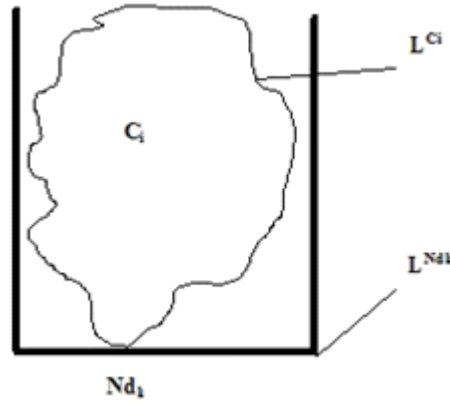


Рис. 2. Візуальне представлення "тиску" у обчислювальному вузлі

Якщо $L^{C_i} \geq L^{Nd_k}$ (L^{C_i} — навантаження, яке потрібно для кластера, L^{Nd_k} — можливості вузла), то міграція частини обчислювань на вільний вузол — Nd_m ($m \neq k$) (рис. 2)

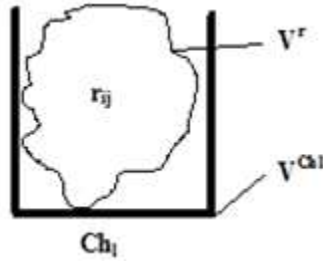


Рис. 3. Візуальне представлення "тиску" у каналі зв'язку

Якщо $V^{r_{ij}} \geq V^{Ch_i}$, де $V^{r_{ij}}$ — необхідна пропускна здатність для існування зв'язків між кластерами, V^{Ch_i} — пропускна здатність каналу (рис. 3), то міграція частини обчислювань на вільний вузол — Nd_o , де $Nd_o \notin \{Nd(Ch_p)\}$, тобто на вузол, що не має зв'язків, які використовують перевантажені канали V^{Ch_p} .

2. ПОВЗДОВЖНЄ ТА ПОПЕРЕЧНЕ РОЗДІЛЕННЯ

Поперечне розділення у площині, що паралельна площині входів, відбувається формуванням передатних адаптерів в зоні прогнозованої стабілізації росту мережі, яка визначається або відсутністю росту взагалі, або ростом мережі нижче визначеного коефіцієнту.

Аналогічний процес відбувається і в перпендикулярних площинах мігруючої частини.

Графічно цей процес показано на рис. 4

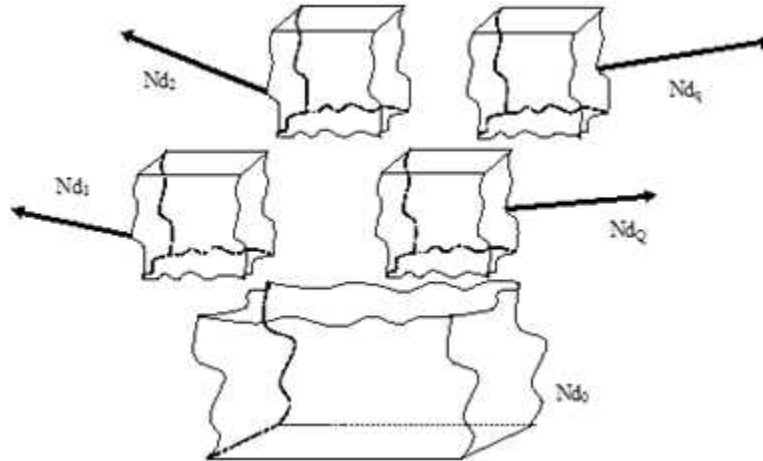


Рис. 4. Процес формування автономних кластерів у спеціалізованих обчислювальних мережах, що зростають

3. АЛГОРИТМ GCS (GROWING CELL STRUCTURES)

Розглянемо алгоритм зростаючих кліткових структур, який адаптований до багат шарової мережі [1].

1. Оберемо розмірність мережі k . Ініціалізуємо множину $A = \{c_1, c_2, \dots, c_{k+1}\}$, що складається з $k+1$ модулів c_i , та векторів зв'язків $w_{c_i} \in R^n$, значення вагових коефіцієнтів яких обирається випадково згідно з $p(\xi)$.

Множина зв'язків C буде така, що $C \subset A \times A$, тобто ми маємо зв'язки всіх до всіх. Цю топологію називають k -вимірним багатогранником.

2. Згенеруємо випадкові вхідні сигнали ξ згідно з $p(\xi)$.
3. Визначимо переможця s :

$$s(\xi) = \arg \min_{c \in A} \|\xi - w_c\|.$$

4. До локальної змінної E_s додамо значення середньоквадратичної помилки

$$\Delta E_s = \|\xi - w_s\|^2.$$

5. Адаптуємо зв'язки s та його прямих топологічних сусідів ξ :

$$\Delta w_s = e_b(\xi - w_s),$$

$$\Delta w_i = e_n(\xi - w_i), \quad (\forall i \in N_s),$$

де N_s — множина прямих топологічних сусідів s .

6. Якщо кількість вхідних сигналів кратна λ , додамо наступний вузол таким чином:

- Визначимо вузол q з максимальною накопиченою помилкою

$$q = \arg \max_{c \in A} E_c.$$

- Додамо вузол r між вузлами q та f , які мають зв'язок з найвагомішим коефіцієнтом. Додамо зв'язки (q, r) та (r, f) , видалимо (q, f) . Побудуємо зв'язки $N_q \cap N_f$.
- Встановимо значення вагових коефіцієнтів r (q, r) та (r, f) :

$$w_r = \frac{(w_q - w_f)}{2}.$$

- Зменшимо значення помилки для всіх сусідів r :

$$\Delta E_i = -\frac{a}{|N_r|} E_i, \quad (\forall i \in N_r).$$

- Встановимо значення помилки для r :

$$\Delta E_r = -\frac{a}{|N_r|} \sum_{i \in N_r} E_i.$$

7. Зменшимо значення помилки для всіх вузлів:

$$\Delta E_c = -\beta E_c \quad (\forall c \in A).$$

Якщо критерій зупинки (наприклад, розмір мережі або швидкодія) ще не досягнуто, то повернемося до кроку 2.

4. АЛГОРИТМ GNG (GROWING NEURAL GAS)

Розглянемо алгоритм зростаючого нейронного газу, що адаптовано до багатопарової мережі [2].

1. Визначимо переможця s_1 та його сусіда s_2 , $(s_1, s_2 \in A)$

$$s_1 = \arg \min_{c \in A} \|\xi - w_c\|,$$

$$s_2 = \arg \min_{c \in A \setminus \{s_1\}} \|\xi - w_c\|.$$

2. Якщо зв'язку між s_1 та s_2 не існує, створимо його:

$$C = C \cup \{(s_1, s_2)\}.$$

Встановимо вік 0 зв'язку s_1 та s_2 :

$$age(s_1, s_2) = 0.$$

3. Встановимо значення локальної змінної:

$$\Delta E_{s_1} = \|\xi - w_{s_1}\|^2.$$

4. Встановимо вагові коефіцієнти прямих сусідів переможця з використанням коефіцієнтів e_b та e_n , у відповідності до похибки:

$$\Delta w_{s_1} = e_b(\xi - w_{s_1}),$$

$$\Delta w_i = e_n(\xi - w_i) (\forall i \in N_{s_1}),$$

де N_{s_1} — множина прямих сусідів s_1 .

5. Збільшимо на одиницю вік усіх зв'язків, що виходять з s_1 :

$$age(s_1, i) = age(s_1, i) + 1 \quad (\forall i \in N_{s_1}).$$

6. Видалимо зв'язки, вік яких більший $a_{\max}$. Якщо вузол не має жодного зв'язку, видалимо його.

7. Після λ циклів навчання, додамо вузол таким чином:

- Визначимо вузол q з максимальною помилкою:

$$q = \arg \max_{c \in A} E_c.$$

- Знайдемо вузол f з максимальною помилкою між сусідами q :

$$f = \arg \max_{c \in N_q} E_c.$$

- Додамо вузол r до мережі та встановимо значення ваги, як середнє між вагою зв'язку q та f

$$A = A \cup \{r\}, \quad w_r = \frac{(w_q - w_f)}{2}.$$

- Додамо зв'язки між r , q і f , видалимо зв'язок між q та f :

$$C = C \cup \{(r, q), (r, f)\} \quad C = C \setminus \{(q, f)\}.$$

- Зменшимо значення похибок для вузлів q та f :

$$\Delta E_q = -aE_q, \quad \Delta E_f = -aE_f.$$

- Підрахуємо значення похибки для r на основі q та f :

$$\Delta E_r = \frac{E_q + E_f}{2}.$$

8. Зменшимо значення похибок для всіх вузлів:

$$\Delta E_c = -\beta \Delta E_c, \quad (\forall c \in A).$$

9. Якщо критерій зупинки (наприклад, розмір мережі або цільове значення похибки) не досягнуто, перейдемо до кроку 1.

5. АДАПТОВАНИЙ ДО БАГАТОШАРОВОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ АЛГОРИТМ ЗРОСТАННЯ

1. Проведемо навчання існуючою вибіркою. Якщо помилка вища необхідного рівня, то перейти до кроку 2, інакше завершити алгоритм.
2. Шукаємо у мережі нейрон q з найбільшою помилкою

$$q = \arg \max_{c \in A} E_c.$$

3. Додамо до цього шару ще вузол r .

4. Додамо зв'язки між r та сусідами q (вузлами, що мають зв'язки з q).
5. Якщо в мережі існує зв'язок (a, b) , ваговий коефіцієнт якого перевищує обране значення $w_{\max}$, додамо новий шар l_c між шарами l_a та l_b таким чином, щоб кожному вузлу у l_b відповідав вузол у новому шарі l_c .
6. Додамо зв'язки між l_a та новим шаром l_c таким чином, щоб вузли нового шару мали ті ж самі зв'язки, що й відповідні вузли l_b .
7. Додамо зв'язки між новим шаром та l_b таким чином, щоб вузли послідовники l_b мали зв'язки з вузлами попередниками l_b .
8. Додамо зв'язки між новим шаром та l_b таким чином, щоб вузли послідовники вузлів з мінімальною похибкою мали зв'язки з іншими вузлами шару l_b з достатньо малою помилкою.
9. Видалимо зв'язки з коефіцієнтом меншим визначеного значення $w_{\min}$.
10. Якщо кількість ітерацій менша заданої, повернемося до кроку 1.

6. АЛГОРИТМ ДО FROTH-МЕТОДУ МОНІТОРИНГУ ОБМЕЖЕНЬ ТА МІГРАЦІЇ

1. Якщо

$$L^{c_i} \geq L^{Nd_k},$$

або

$$V^{r_{ij}} \geq V^{Ch_l},$$

то перейдемо до кроку 2, інакше вихід.

2. Оберемо шар з найбільшим рівнем зростання

$$l_y = \arg \min[avg(A)], A\{age_l\}, \quad \forall l = 1..L.$$

3. Оберемо найактивніші ділянки зростання у шарі

$$j_y = \arg \min[avg(A)], A\{age_{lj}\}, \quad \forall j = 1..J.$$

4. Формуємо кластери, які обмежені обраними вузлами

$$C_k = \{n_{ij}\}, \quad \forall i = l_y..L, \quad \forall j = j_{y-1}..j_y.$$

5. Встановлюємо нейронні мережі-адаптери [3].

6. Переміщуємо кластери до вільних обчислювальних вузлів з вільними каналами зв'язку Nd_k .

Висновки

Алгоритм до froth-методу моніторингу обмежень та міграції призначений для використання у багатошарових штучних нейронних мережах. Він не порушує структуру мережі, тому після побудови кластерів залишається можливість використання алгоритмів навчання багатошарових мереж, наприклад, алгоритм зворотного розповсюдження помилки [4]. Але його використання обмежується лише мережею, з якої виключені міжкластерні адаптери.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fritzke B. Growing cell structures - a self-organizing network for unsupervised and supervised learning // *Neural Networks*. — 1994 — №7(9): — 1460.
2. Fritzke B. A growing neural gas network learns topologies // *Advances in Neural Information Processing Systems, MIT Press, Cambridge MA*. — 1995. — №7. — P. 625–632.
3. Кременецький Г.М. Кластеризація у модульних нейронних мережах / Г.М. Кременецький // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — К.2009. — №3(99). — С. 57–62.
4. Саймон Хайкин. Нейронные сети.— М: Издательский дом «Вильямс», 2006.

ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ, ПР. КОМАРОВА, 1, КИЇВ, 03058, УКРАЇНА.

Надійшла 10.08.2010

УДК 517.9: 519.7

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ ФРАГМЕНТІВ СІТОК

А. С. КРИЛОВА, Г. В. САНДРАКОВ

РЕЗЮМЕ. Розглядається спектральна задача для довільних фрагментів сіток на двовимірному "струнному хресті". Дослідження власних значень і функцій цієї задачі виконується з умовами контакту, балансу натягу струн у спільному вузлі та граничними умовами періодичності та а-періодичності. У результаті розрахунків отримано розв'язок задачі, який формує одновимірні та тривимірні простори при довільних константах. Розмірність власних підпросторів залежить від довжин струн хреста.

ВСТУП

Краєві задачі для диференціальних рівнянь другого порядку на відрізку є ключовим поняттям при аналізі моделей різноманітних коливань. Такі рівняння виникають в задачах механіки й математичної фізики. Останнім часом виникли вони й при аналізі процесів в складних системах, таких як періодична сітка або решітка [1]. Математики почали звертати увагу на такі задачі зовсім недавно (див., наприклад, [1], [2], [3]). Дослідження проводиться на маленькій періодично-повторюваній частині цієї системи. Для натягнутої однорідної сітки періодичним фрагментом будемо вважати модель "струнний хрест". Наступним етапом цього дослідження ми вбачаємо у використанні отриманих результатів на періодичній частині для всієї системи, використовуючи метод усереднення, що розглянутий у [2] та [3].

Спектральна задача для фрагментів сіток з позиції моделі "струнний хрест" [1] вже розглядалась на двовимірному струнному хресті однієї довжини з умовами контакту, балансу натягу у спільному вузлі та крайовими умовами періодичності та а-періодичності у [4]. Продовжимо дослідження цієї моделі з тими ж самими умовами, проте довжини струн будуть довільними.

Спочатку розглядається періодична спектральна задача з умовами періодичності, умовами контакту та балансу натягу у спільному вузлі. Дослідження проводиться для власних значень $\lambda > 0$ та відповідних власних функцій у вигляді $v = A \cos(x\sqrt{\lambda}) + C \sin(x\sqrt{\lambda})$ [5]. Після перевірки всіх умов цієї задачі впливають три власні значення $\lambda_1 = 4\pi^2 n^2$, $\lambda_2 = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ та $\lambda_3 = \frac{4\pi^2 n^2}{(1+l)^2}$, де l — значення довжини одного з плечей хреста. У подальшому дослідженні доведено, що для значення l , яке можна представити у

вигляді дробу $\frac{t_1}{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, тобто $l \in \mathbb{Q}$, маємо за розв'язок власне значення $\lambda = 4\pi^2 n^2$, за умови $n \frac{t_1}{t_2} \in \mathbb{Z}$, з відповідними власними функціями $(A \cos(2\pi n x_1) + C_1 \sin(2\pi n x_1), \pm A \cos(2\pi n x_2) + C_2 \sin(2\pi n x_2))$, або власне значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$, за умови $n \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Z}$, з відповідними власними функціями $(A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_1) + C_1 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_1), \pm A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_2) + C_2 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_2))$. Якщо l не підпадає під попередні умови, або $l \notin \mathbb{Q}$, тоді маємо одновимірні простори власних функцій на хресті, тобто якщо візьмемо власне значення $\lambda = 4\pi^2 n^2$, то отримаємо власні функції $(C \sin(2\pi n x), 0)$, $x \in [0, 1]$, а якщо беремо власне значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$, то маємо власні функції $(0, C \sin(\frac{2\pi n}{l} x))$, $x \in [0, l]$.

У статті також розглядається а-періодична спектральна задача аналогічно до періодичної задачі.

1. ПОСТАНОВКА ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Нехай довжина однієї струни буде довільною та дорівнюватиме a , а довжина іншої струни хреста дорівнюватиме довільному значенню b . Для полегшення розрахунків розділимо довжини на значення a , що є ненульовим за фізичним змістом, з чого отримаємо еквівалентний хрест з відповідними довжинами 1 та $\frac{b}{a}$. Позначимо отриману довжину $\frac{b}{a}$ через l . Отримаємо хрест, що зображено на малюнку (рис.1).

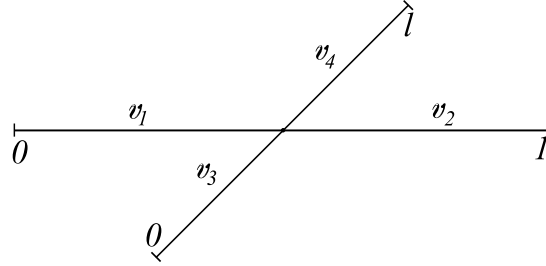


Рис 1. Струнний хрест

Розглянемо кожне плече хреста як окрему струну, тому струнний хрест представимо як сукупність чотирьох відрізків. Необхідно знайти усі власні значення спектральної задачі, що описана нижче, на цьому струнному хресті.

Розглянемо періодичну спектральну задачу на струнному хресті

$$\begin{aligned} -v_1'' &= \lambda v_1, \\ -v_2'' &= \lambda v_2, \\ -v_3'' &= \lambda v_3, \\ -v_4'' &= \lambda v_4, \end{aligned} \tag{1}$$

з періодичними граничними умовами

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_2(1), \\ v_3(0) &= v_4(l), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v_1'(0) &= v_2'(1), \\ v_3'(0) &= v_4'(l), \end{aligned} \quad (3)$$

умовами зв'язки вузлів

$$v_1(\frac{1}{2}) = v_2(\frac{1}{2}) = v_3(\frac{l}{2}) = v_4(\frac{l}{2}), \quad (4)$$

умовами балансу натягу

$$v_1(\frac{1}{2} + 0) - v_2(\frac{1}{2} - 0) + v_3(\frac{l}{2} + 0) - v_4(\frac{l}{2} - 0) = 0. \quad (5)$$

Теорема 1. Нехай дана задача (1)-(5) на двомірному струнному хресті з довжинами струн 1 та l , тоді розв'язком є такі власні значення з відповідними власними функціями, залежно від довжини струни l :

(а) $\lambda = 4\pi^2 n^2$, якщо $l \in \mathbb{Q}$, тобто $l = \frac{t_1}{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, та $n \frac{t_1}{t_2} \in \mathbb{Z}$ а власні функції

$$u_1 = A \cos(2\pi n x_1) + C_1 \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = (-1)^{n \frac{t_1}{t_2} - n} A \cos(2\pi n x_2) + C_2 \sin(2\pi n x_2), \quad x_2 \in [0, l];$$

(б) $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$, якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $n \frac{t_1}{t_2} \notin \mathbb{Z}$ та $n \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Z}$, а власні функції

$$u_1 = A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_1) + C_1 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_1), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = (-1)^{n \frac{t_2}{t_1} - n} A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_2) + C_2 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_2), \quad x_2 \in [0, l];$$

(в) якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $n \frac{t_1}{t_2} \notin \mathbb{Z}$ та $n \frac{t_2}{t_1} \notin \mathbb{Z}$ або $l \notin \mathbb{Q}$ тоді для власного значення $\lambda = 4\pi^2 n^2$ маємо

$$u_1 = C \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = 0, \quad x_2 \in [0, l]$$

або для власного значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ маємо

$$u_1 = 0, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = C \sin(\frac{2\pi n}{l} x_2), \quad x_2 \in [0, l],$$

де $n \in \mathbb{N}$ та введені позначення $v_1 = u_1$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $v_2 = u_1$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v_3 = u_2$ при $x \in [0, \frac{l}{2}]$, $v_4 = u_2$ при $x \in [\frac{l}{2}, l]$.

Доведення. Вигляд загального розв'язку для задачі (1) вже відомий з теорії звичайних диференціальних рівнянь [5]. Вибір власних значень $\lambda > 0$ ми вже аргументували у статті [4], яким відповідають власні функції у вигляді

$$v_i = A_i \cos(x_i \sqrt{\lambda}) + C_i \sin(x_i \sqrt{\lambda}), \quad i = \overline{1, 4} \quad (6)$$

для кожного плеча хреста.

Для знаходження власних значень, спочатку розглянемо виконання умови (2)

$$\begin{aligned} A_1 \cos(0) + C_1 \sin(0) &= A_2 \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}), \\ A_3 \cos(0) + C_3 \sin(0) &= A_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \sin(l\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}), \\ A_3 &= A_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \sin(l\sqrt{\lambda}). \end{aligned} \quad (7)$$

З умови (3) маємо

$$\begin{aligned} -A_1 \sqrt{\lambda} \sin(0) + C_1 \sqrt{\lambda} \cos(0) &= -A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}), \\ -A_3 \sqrt{\lambda} \sin(0) + C_3 \sqrt{\lambda} \cos(0) &= -A_4 \sqrt{\lambda} \sin(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \sqrt{\lambda} \cos(l\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

з чого випливає

$$\begin{aligned} C_1 &= -A_2 \sin(\sqrt{\lambda}) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}), \\ C_3 &= -A_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \cos(l\sqrt{\lambda}). \end{aligned} \quad (8)$$

З умови зв'язки вузлів (4), прирівнюючи функції на одній струні, отримаємо такі тотожності $A_1 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + C_1 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = A_2 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})$ та $A_3 \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + C_3 \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) = A_4 \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + C_4 \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})$, з яких, використовуючи перетворення на основі тригонометричної тотожності половинного аргументу, отримаємо для першої та другої тотожності відповідно

$$\begin{aligned} -2A_2 \sin(\sqrt{\lambda}) \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + 2C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\sqrt{\lambda}) &= 0, \\ -2A_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + 2C_4 \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(l\sqrt{\lambda}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

З першої тотожності маємо або $\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$, розв'язком якого буде перше власне значення задачі (1)–(5) $\lambda_1 = 4\pi^2 n^2$, або $A_2 \sin(\sqrt{\lambda}) - C_2 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0$. Звідси випливає рівність $A_2 = C_2 \frac{\cos(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})}$, яку підставивши у вирази (7)–(8) маємо

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})} + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = \frac{C_2}{\sin(\sqrt{\lambda})}, \\ C_1 &= -C_2 \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

З другої тотожності (9) маємо або $\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$, розв'язком якого буде друге власне значення (1)–(5) $\lambda_2 = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$, або $A_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) - C_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Звідси випливає рівність $A_4 = C_4 \frac{\cos(l\sqrt{\lambda})}{\sin(l\sqrt{\lambda})}$, яку підставивши у вирази (7)–(8) маємо

$$\begin{aligned} A_3 &= C_4 \frac{\cos^2(l\sqrt{\lambda})}{\sin(l\sqrt{\lambda})} + C_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) = \frac{C_4}{\sin(l\sqrt{\lambda})}, \\ C_3 &= -C_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо прирівняти в умові (4) функції на протилежних струнах, та маючи на увазі отримані результати (10)–(11) отримаємо

$$C_2 \frac{\cos(\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\sqrt{\lambda})} + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = C_4 \frac{\cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(l\sqrt{\lambda})} \text{ звідки маємо}$$

$$C_4 = C_2 \frac{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}.$$

З огляду на отримані результати можемо переписати систему узагальнених розв'язків (6)

$$\begin{aligned} v_1 &= C_2 \frac{1}{\sin(\sqrt{\lambda})} \cos(x_1 \sqrt{\lambda}), \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= C_2 \left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})} \cos(x_2 \sqrt{\lambda}) + \sin(x_2 \sqrt{\lambda}) \right), \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= C_2 \frac{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \sin(l\sqrt{\lambda})} \cos(x_3 \sqrt{\lambda}), \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= C_2 \frac{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})} \left(\frac{\cos(l\sqrt{\lambda})}{\sin(l\sqrt{\lambda})} \cos(x_4 \sqrt{\lambda}) + \sin(x_4 \sqrt{\lambda}) \right), \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l]. \end{aligned} \quad (12)$$

Розглянемо умову (5) та нехай для функцій $v_1, \dots, v_4$ у точці зв'язки вузла не має розриву, тоді матимемо умову $v'_1(\frac{1}{2}) - v'_2(\frac{1}{2}) + v'_3(\frac{l}{2}) - v'_4(\frac{l}{2}) = 0$. Підставимо в цю умову функції з системи (12) та зважаючи на логічне припущення, що $C_2 \neq 0$ матимемо (якщо власне значення не дорівнюватиме нулю) $-\frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\sqrt{\lambda})} + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}) \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\sqrt{\lambda})} - \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) - \frac{\sin^2(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \sin(l\sqrt{\lambda})} + \frac{\sin^2(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(l\sqrt{\lambda})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \sin(l\sqrt{\lambda})} - \frac{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})} = 0$.

Звідки випливає або $\frac{1}{2 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})} = 0$, якщо для цього дробу $\lambda \neq 0$ та $\lambda \neq \frac{\pi^2(1+2n)^2}{l^2}$, або $\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$. З цього виразу отримаємо третє власне значення $\lambda_3 = \frac{4\pi^2 n^2}{(1+l)^2}$.

Перевіримо отримані власні значення, знайдемо значення відрізка l , де ці власні значення існують та сформуємо систему власних функцій для отриманих значень.

Для першого власного значення $\lambda_1 = 4\pi^2 n^2$ маємо систему власних функцій

$$v_i = A_i \cos(2\pi n x_i) + C_i \sin(2\pi n x_i), \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (13)$$

для якої перевіримо усі умови, що описані вище.

Періодичні граничні умови (2)–(3) дають такі результати:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2; \quad A_3 = A_4 \cos(2\pi n l) + C_4 \sin(2\pi n l); \\ C_1 &= C_2; \quad C_3 = -A_4 \sin(2\pi n l) + C_4 \cos(2\pi n l). \end{aligned}$$

Умову зв'язки вузлів перевіримо спочатку для перших двох власних функцій, потім для третьої та четвертої, а потім для другої та четвертої. З огляду рівності коефіцієнтів функцій v_1 та v_2 , зробимо висновок про їх тотожну рівність в спільній точці $\frac{1}{2}$. Для рівності $v_3(\frac{l}{2}) = v_4(\frac{l}{2})$ маємо $-A_4 \sin(2\pi nl) \sin(\pi nl) + C_4 \cos(2\pi nl) \sin(\pi nl) = 0$, звідки випливає або $\sin(\pi nl) = 0$ з чого маємо

$$l = \frac{k}{m}, \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

або рівняння

$$-A_4 \sin(2\pi nl) + C_4 \cos(2\pi nl) = 0. \quad (15)$$

Перевіримо чи для всіх значень $l = \frac{k}{m}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\sin(\pi nl) = 0$. Підставимо відповідне значення довжини в цю рівність та отримаємо $\sin(\pi n \frac{k}{m}) = 0$, з чого маємо $\pi n \frac{k}{m} = \pi t$, $n, m, k, t \in \mathbb{Z}$, тобто розв'язок буде вірний тоді і тільки тоді, коли $n \frac{k}{m} \in \mathbb{Z}$.

Якщо прирівняти значення у вузлі другої та четвертої функції, то отримаємо $(-1)^n A_2 = A_4 \cos(\pi nl) + C_4 \sin(\pi nl)$.

Продовжимо дослідження власних функцій з умовою (5), з якої випливає рівняння

$$A_4 \cos(2\pi nl) \sin(\pi nl) + C_4 \sin(2\pi nl) \sin(\pi nl) = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде або $\sin(\pi nl) = 0$, що є таким самим розв'язком (14) попереднього рівняння, або рівняння

$$A_4 \cos(2\pi nl) + C_4 \sin(2\pi nl) = 0. \quad (16)$$

Так як дослідження системи зумовлює виконання всіх умов одночасно, то розглянемо у системі рівняння (15) та (16). Ми маємо систему лінійних однорідних рівнянь, а як відомо з курсу лінійної алгебри, система лінійних однорідних рівнянь має нетривіальні розв'язки, якщо визначник цієї системи буде дорівнювати нулю. Перевіримо це:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(2\pi nl) & \sin(2\pi nl) \\ -\sin(2\pi nl) & \cos(2\pi nl) \end{vmatrix} = 1.$$

Звідси видно, що маємо тривіальні розв'язки системи, тобто $A_4 = 0$ та $C_4 = 0$. З цього висновку та попередніх розрахунків маємо, що й $A_3 = 0$ та $C_3 = 0$, а звідси $A_1 = A_2 = 0$.

Зробимо висновок для власного значення $\lambda = 4\pi^2 n^2$. Якщо $l = \frac{k}{m}$, де $m, k \in \mathbb{Z}$ та такі що $n \frac{k}{m} \in \mathbb{Z}$, то ми маємо такі значення коефіцієнтів у власних функціях: $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4 \cos(2\pi n \frac{k}{m}) + C_4 \sin(2\pi n \frac{k}{m}) = A_4$, $C_1 = C_2$, $C_3 = -A_4 \sin(2\pi n \frac{k}{m}) + C_4 \cos(2\pi n \frac{k}{m}) = C_4$ та з умови контакту у спільному вузлі між першою та третьою функціями матимемо $A_1 \cos(\pi n) = A_3 \cos(\pi n \frac{k}{m})$ з чого випливає тотожність $(-1)^n A_1 = (-1)^{n \frac{k}{m}} A_3$. Тобто якщо різниця показників ступенів $|n \frac{k}{m} - n|$ за модулем парна, то маємо $A_1 = A_3 = A$, а якщо непарна, тоді матимемо $A_1 = -A_3$. Отже перепишемо систему (13), роблячи деякі спрощення у позначеннях коефіцієнтів

системи:

$$\begin{aligned} v_1 &= A \cos(2\pi n x_1) + C_1 \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= A \cos(2\pi n x_2) + C_1 \sin(2\pi n x_2), \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= \pm A \cos(2\pi n x_3) + C_2 \sin(2\pi n x_3), \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= \pm A \cos(2\pi n x_4) + C_2 \sin(2\pi n x_4), \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l], \end{aligned}$$

де у випадку v_3 та v_4 ми пишемо $+A$, якщо значення $|n \frac{k}{m} - n|$ парне, або $-A$, якщо це значення непарне.

Якщо $l \neq \frac{k}{m}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ та $n \frac{k}{m} \notin \mathbb{Z}$, то ми отримуємо власні функції

$$\begin{aligned} v_1 &= C \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= C \sin(2\pi n x_2), \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= 0, \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= 0, \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l]. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо власне значення $\lambda_2 = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ з відповідною системою власних функцій

$$v_i = A_i \cos(\frac{2\pi n}{l} x_i) + C_i \sin(\frac{2\pi n}{l} x_i), \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (17)$$

Аналогічно до попереднього випадку, почнемо з періодичних граничних умов (2) та (3), з яких маємо $A_1 = A_2 \cos(\frac{2\pi n}{l}) + C_2 \sin(\frac{2\pi n}{l})$, $A_3 = A_4$, $C_1 = -A_2 \sin(\frac{2\pi n}{l}) + C_2 \cos(\frac{2\pi n}{l})$ та $C_3 = C_4$.

Умова зв'язки вузлів (4) для перших двох власних функцій в результаті виліється в рівняння $-A_2 \sin(\frac{2\pi n}{l}) \sin(\frac{\pi n}{l}) + C_2 \cos(\frac{2\pi n}{l}) \sin(\frac{\pi n}{l}) = 0$, звідки маємо або $\sin(\frac{\pi n}{l}) = 0$, з чого отримуємо

$$l = \frac{m}{k}, \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

або рівняння

$$-A_2 \sin(\frac{2\pi n}{l}) + C_2 \cos(\frac{2\pi n}{l}) = 0. \quad (19)$$

Аналогічно до дослідження першого власного значення перевіримо для яких значень $m, k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\sin(\frac{\pi n}{l}) = 0$. Підставимо відповідне значення довжини в цю рівність та отримаємо що розв'язок буде вірний тоді і тільки тоді, коли $n \frac{k}{m} \in \mathbb{Z}$.

З огляду на рівність коефіцієнтів функцій v_3 та v_4 також зробимо висновок про їх тотожну рівність в спільній точці $\frac{l}{2}$. А з умови зв'язки вузлів між другою та четвертою функціями матимемо $(-1)^n A_4 = A_2 \cos(\frac{\pi n}{l}) + C_2 \sin(\frac{\pi n}{l})$.

Далі підставимо власні функції з отриманими коефіцієнтами в умову балансу натягу у спільному вузлі (5) та отримаємо рівняння

$$A_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) = 0$$

звідки маємо або розв'язок (18), який також отриманий під час дослідження умови зв'язки вузлів, або рівняння

$$A_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{l}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l}\right) = 0. \quad (20)$$

Таким же чином, як і в попередньому випадку, будемо досліджувати систему двох рівнянь (19) та (20) на нетривіальність розв'язків. Знайдемо визначник цієї системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{2\pi n}{l}\right) & \sin\left(\frac{2\pi n}{l}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi n}{l}\right) & \cos\left(\frac{2\pi n}{l}\right) \end{vmatrix} = 1.$$

Тобто маємо тривіальні розв'язки лінійної однорідної системи рівнянь $A_2 = 0$ та $C_2 = 0$, звідси та попередніх розрахунків маємо, що $A_1 = 0$, $C_1 = 0$ та $A_3 = A_4 = 0$.

Зробимо висновок. Для випадку $l = \frac{m}{k}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ та $n \frac{k}{m} \in \mathbb{Z}$ маємо власне значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} = 4\pi^2 (n \frac{k}{m})^2$ та такі значення коефіцієнтів у власних функціях: $A_3 = A_4$, $A_1 = A_2 \cos(2\pi n \frac{k}{m}) + C_2 \sin(2\pi n \frac{k}{m}) = A_2$, $C_3 = C_4$, $C_1 = -A_2 \sin(2\pi n \frac{k}{m}) + C_2 \cos(2\pi n \frac{k}{m}) = C_2$ та з вже розглянутої умови зв'язки вузлів між другою та четвертою функціями матимемо $(-1)^n A_4 = A_2 \cos(\frac{\pi n k}{m}) + C_2 \sin(\frac{\pi n k}{m})$ отримаємо тотожність $(-1)^n A_4 = (-1)^n \frac{k}{m} A_2$. Тобто маємо таку ж систему власних функцій, що й для власного значення λ_1 , проте з аргументом власних функцій $\frac{2\pi n}{l} x_i$, $i = \overline{1, 4}$.

Для випадку $l \neq \frac{m}{k}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ та $n \frac{k}{m} \notin \mathbb{Z}$ маємо власне значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ та таку систему власних функцій

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= 0, \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= C \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x_3\right), \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= C \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x_4\right), \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l]. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо третє власне значення $\lambda_3 = \frac{4\pi^2 n^2}{(1+l)^2}$, для якого маємо відповідні власні функції

$$v_i = A_i \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_i\right) + C_i \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_i\right), \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (21)$$

які з умовами(2)–(3) дають такі результати:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right), \quad A_3 = A_4 \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right), \\ C_1 &= -A_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right), \quad C_3 = -A_4 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) = C_4 \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right). \end{aligned}$$

Розглянемо умову контакту у спільному вузлі. Для перших двох функцій маємо рівність $-A_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l+1}\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l+1}\right) = 0$, звідки отримуємо або значення довжини струни $l = \frac{n}{k} - 1$, $n, k \in \mathbb{Z}$ або вираз $A_2 = C_2 \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)}$, який підставляючи в отримані з періодичних граничних умов результати, будемо мати $A_1 = C_2 \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)}$ та $C_1 = 0$.

Для рівності третьої та четвертої функцій в точці $\frac{l}{2}$ отримаємо вираз $-A_4 \sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right) \sin\left(\frac{\pi nl}{l+1}\right) + C_4 \cos\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right) \sin\left(\frac{\pi nl}{l+1}\right) = 0$, звідки $l = \left(\frac{n}{k} - 1\right)^{-1}$, де $n, k \in \mathbb{Z}$ або $A_4 = C_4 \frac{\cos\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)}$, який підставляючи в отримані з періодичних граничних умов результати, будемо мати $A_3 = C_4 \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)}$ та $C_3 = 0$.

Виходячи з того, що для умови контакту у спільному вузлі повинні одночасно виконуватись рівності перших двох функцій та третьої та четвертої функцій, то й значення l повинні бути однаковими, тобто $l = l^{-1}$, а це можливо лише, коли $l = 1$, що вже було розглянуто у статті [4], або $l = 0$, що не має фізичного сенсу для цієї задачі. Тому розглянемо інші результати, що були отримані з виразів. Виходячи з них перепишемо (21)

$$\begin{aligned} v_1 &= C_2 \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_1\right), \\ v_2 &= C_2 \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_2\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_2\right), \\ v_3 &= C_4 \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_3\right), \\ v_4 &= C_4 \frac{\cos\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_4\right) + C_4 \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1} x_4\right). \end{aligned}$$

Вже з новою системою підставимо першу та третю власні функції до умови зв'язки вузлів, та отримаємо відношення між коефіцієнтами C_2 та C_4

$$C_2 = C_4 \frac{\cos\left(\frac{\pi nl}{l+1}\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{l+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi nl}{l+1}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l+1}\right)}.$$

Використовуючи це відношення ми можемо знайти значення довжини l з умови балансу натягу у спільному вузлі, адже всі власні функції будуть записані через один коефіцієнт C_4 , який під час спрощення ми можемо відкинути з огляду на те, якщо C_4 буде дорівнювати нулю, то всі власні функції теж будуть дорівнювати нулю, а цей випадок нас не цікавить. Отже, після деяких перетворень, допущення неперервності власних функцій

у спільній точці та $C_4 \neq 0$, маємо такий вигляд умови (5)

$$\frac{\sin(\frac{\pi n}{l+1})(-1 + \cos(\frac{2\pi n}{l+1}) - 2\cos^2(\frac{\pi n}{l+1}))}{\sin(\frac{\pi nl}{l+1})\cos(\frac{\pi n}{l+1})} - \frac{1 - \cos(\frac{2\pi nl}{l+1}) + 2\cos^2(\frac{\pi nl}{l+1})}{\cos(\frac{\pi nl}{l+1})} = 0.$$

Звідки маємо тотожність

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi n}{l+1}) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi nl}{l+1}),$$

яка виконується тільки, якщо $l = -1$. А це не можливо з двох сторін: в фізичному сенсі цієї задачі, адже довжина не може бути від'ємною, та математичному, адже ми в аргументі функції маємо у знаменнику нуль. Тому власне значення $\lambda_3 = \frac{4\pi^2 n^2}{(1+l)^2}$ ми відкидаємо і подальше дослідження задачі для цього випадку проводити не будемо.

Зробимо висновок щодо цієї періодичної спектральної задачі. Для спрощення висновків введемо такі позначення, з огляду рівності констант: $v_1 = u_1$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $v_2 = u_1$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v_3 = u_2$ при $x \in [0, \frac{l}{2}]$, $v_4 = u_2$ при $x \in [\frac{l}{2}, l]$ та будемо мати три константи A , C_1 та C_2 . Якщо $l \in \mathbb{Q}$ тобто довжину можемо завжди уявити у вигляді $l = \frac{t_1}{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ та $n \frac{t_1}{t_2} \in \mathbb{Z}$, то власне значення буде мати вигляд $\lambda = 4\pi^2 n^2$, а власні функції запишемо у вигляді двох функцій

$$\begin{aligned} v_1 &= A \cos(2\pi n x_1) + C_1 \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= \pm A \cos(2\pi n x_2) + C_2 \sin(2\pi n x_2), \quad x_2 \in [0, l], \end{aligned}$$

де для v_2 ми пишемо $+$, якщо $|n \frac{t_1}{t_2} - n|$ парне значення, або $-$, якщо воно непарне.

Якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $n \frac{t_1}{t_2} \notin \mathbb{Z}$ та $n \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Z}$, то власне значення буде мати вигляд $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ та відповідні власні функції

$$\begin{aligned} v_1 &= A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_1) + C_1 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_1), \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= \pm A \cos(\frac{2\pi n}{l} x_2) + C_2 \sin(\frac{2\pi n}{l} x_2), \quad x_2 \in [0, l], \end{aligned}$$

де для v_2 ми пишемо $+$, якщо $|n \frac{t_2}{t_1} - n|$ парне значення, або $-$, якщо воно непарне.

Якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $n \frac{t_1}{t_2} \notin \mathbb{Z}$ та $n \frac{t_2}{t_1} \notin \mathbb{Z}$ або $l \notin \mathbb{Q}$ тоді для власного значення $\lambda = 4\pi^2 n^2$ маємо одновимірний простір власних функцій

$$\begin{aligned} v_1 &= C \sin(2\pi n x_1), \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= 0, \quad x_2 \in [0, l] \end{aligned}$$

або для власного значення $\lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$ маємо інший одновимірний простір власних функцій

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= C \sin(\frac{2\pi n}{l} x_2), \quad x_2 \in [0, l]. \end{aligned}$$

□

2. ПОСТАНОВКА А-ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Тепер розглянемо а-періодичну спектральну задачу на тому ж струнному хресті

$$\begin{aligned} -v_1'' &= \lambda v_1, \\ -v_2'' &= \lambda v_2, \\ -v_3'' &= \lambda v_3, \\ -v_4'' &= \lambda v_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Для цієї задачі змінюються граничні умови (2) та (3) на такі:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= -v_2(1), \\ v_3(0) &= -v_4(l), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_1'(0) &= -v_2'(1), \\ v_3'(0) &= -v_4'(l). \end{aligned} \quad (24)$$

Умови зв'язки вузлів та балансу натягу залишаються незмінними

$$v_1\left(\frac{1}{2}\right) = v_2\left(\frac{1}{2}\right) = v_3\left(\frac{l}{2}\right) = v_4\left(\frac{l}{2}\right). \quad (25)$$

$$v_1\left(\frac{1}{2} + 0\right) - v_2'\left(\frac{1}{2} - 0\right) + v_3'\left(\frac{l}{2} + 0\right) - v_4'\left(\frac{l}{2} - 0\right) = 0. \quad (26)$$

Теорема 2. *Нехай дана задача (22)-(26) на двовимірному струнному хресті з довжинами струн 1 та l , тоді розв'язком є такі власні значення з відповідними власними функціями, залежно від довжини струни хреста l :*

- (а) $\lambda = \pi^2(2n+1)^2$, якщо $l \in \mathbb{Q}$, тобто $l = \frac{2t_1+1}{2t_2+1}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, та $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \in \mathbb{Z}$, з власними функціями

$$u_1 = A_1 \cos((2n+1)\pi x_1) + C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = A_2 \cos((2n+1)\pi x_2) + (-1)^k C \sin((2n+1)\pi x_2), \quad x_2 \in [0, l],$$

$$\text{де } k = ||n + t_1 - t_2| - n|;$$

- (б) $\lambda = \frac{\pi^2(1+2n)^2}{l^2}$, якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \notin \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2t_2+1}{2t_1+1} \in \mathbb{Z}$, а власні функції

$$u_1 = A_1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_1\right) + C \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_1\right), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = A_2 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_2\right) + (-1)^k C \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_2\right), \quad x_2 \in [0, l],$$

$$\text{де } k = ||n + t_1 - t_2| - n|;$$

- (в) , якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \notin \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2t_2+1}{2t_1+1} \notin \mathbb{Z}$ або $l \notin \mathbb{Q}$, тоді

для власного значення $\lambda = \pi^2(2n+1)^2$ маємо

$$u_1 = A \cos((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = 0, \quad x_2 \in [0, l],$$

а власному значенню $\lambda = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}$ відповідають власні функції

$$u_1 = 0, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = A \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}x_2\right), \quad x_2 \in [0, l],$$

де $n \in \mathbb{N}$ та введені позначення $v_1 = u_1$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $v_2 = u_1$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v_3 = u_2$ при $x \in [0, \frac{l}{2}]$, $v_4 = u_2$ при $x \in [\frac{l}{2}, l]$.

Доведення. За аналогією з періодичною спектральною задачею будемо розв'язувати а-періодичну. Підставимо власні функції у вигляді (6) до умов (23) та (24)

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_2 \cos(\sqrt{\lambda}) - C_2 \sin(\sqrt{\lambda}), \\ A_3 &= -A_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) - C_4 \sin(l\sqrt{\lambda}), \\ C_1 &= A_2 \sin(\sqrt{\lambda}) - C_2 \cos(\sqrt{\lambda}), \\ C_3 &= A_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) - C_4 \cos(l\sqrt{\lambda}). \end{aligned} \tag{27}$$

Далі попарно розглянемо умову контакту (25). Для першої та другої функції матимемо $(A_2 \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda})) \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) - (A_2 \sin(\sqrt{\lambda}) - C_2 \cos(\sqrt{\lambda})) \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + A_2 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$, з чого отримаємо рівність $A_2 \cos(\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$. Ця рівність має за розв'язок або значення $\lambda_4 = \pi^2(1+2n)^2$ або вираз $A_2 = -C_2 \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\cos(\sqrt{\lambda})}$, який підставляючи до (27) маємо $A_1 = 0$, $C_1 = -C_2 \frac{1}{\cos(\sqrt{\lambda})}$.

Для третьої та четвертої функції матимемо $(A_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) + C_4 \sin(l\sqrt{\lambda})) \cdot \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) - (A_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) - C_4 \cos(l\sqrt{\lambda})) \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + A_4 \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + C_4 \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$, з чого отримаємо рівність $A_4 \cos(l\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + C_4 \sin(l\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) = 0$.

Ця рівність має за розв'язок або значення $\lambda_5 = \frac{\pi^2(1+2n)^2}{l^2}$ або вираз $A_4 = -C_4 \frac{\sin(l\sqrt{\lambda})}{\cos(l\sqrt{\lambda})}$, який підставляючи до (27) маємо $A_3 = 0$, $C_3 = -C_4 \frac{1}{\cos(l\sqrt{\lambda})}$.

Для рівності другої та третьої функцій умови (25) матимемо тотожність $C_4 = C_2 \frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(l\sqrt{\lambda})}{\cos(\sqrt{\lambda}) \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})}$.

Перепишемо систему (6) з отриманими значеннями

$$v_1 = -C_2 \frac{1}{\cos(\sqrt{\lambda})} \sin(x_1 \sqrt{\lambda}),$$

$$v_2 = -C_2 \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\cos(\sqrt{\lambda})} \cos(x_2 \sqrt{\lambda}) - \sin(x_2 \sqrt{\lambda}) \right),$$

$$v_3 = -C_2 \frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\sqrt{\lambda})} \sin(x_3 \sqrt{\lambda}),$$

$$v_4 = -C_2 \frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})}{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\sqrt{\lambda})} \left(\sin(l\sqrt{\lambda}) \cos(x_4 \sqrt{\lambda}) - \cos(l\sqrt{\lambda}) \sin(x_4 \sqrt{\lambda}) \right),$$

де $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, $x_3 \in [0, \frac{l}{2}]$ та $x_4 \in [\frac{l}{2}, l]$.

За аналогією до попередньої задачі підставимо отриману систему функцій в умову балансу натягу у спільному вузлі (26) з припущеннями, що $v_1, \dots, v_4$ у точці зв'язки вузла не має розриву та $C_2 \neq 0$ матимемо (якщо власне значення не дорівнюватиме нулю)

$$\frac{1}{\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})} (\cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) + \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}) \cos(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2})) = 0.$$

Звідси отримаємо або $\sin(\frac{l\sqrt{\lambda}}{2}) \neq 0$ з чого $\lambda \neq \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}$, що зрозуміло, адже це є одним з розв'язків попередньої задачі, або таке власне значення для а-періодичної задачі $\lambda_6 = \frac{4\pi^2 n^2}{(l+1)^2}$, яке ми за аналогією до попереднього висновку з приводу цього власного значення будемо відкидати.

Перевіримо отримані власні значення що до відрізка l .

Для першого власного значення цієї задачі $\lambda_4 = \pi^2(1+2n)^2$ маємо систему власних функцій

$$v_i = A_i \cos((2n+1)\pi x_i) + C_i \sin((2n+1)\pi x_i), \quad (i = \overline{1,4}), \quad (28)$$

для якої перевіримо усі умови, що описані вище.

З а-періодичних граничних умов (23)-(24) випливає: $A_1 = A_2$, $A_3 = -A_4 \cos((2n+1)\pi l) - C_4 \sin((2n+1)\pi l)$, $C_1 = C_2$ та константа $C_3 = A_4 \sin((2n+1)\pi l) - C_4 \cos((2n+1)\pi l)$.

Умову зв'язки вузлів перевіримо спочатку для перших двох власних функцій. З огляду рівності коефіцієнтів функцій v_1 та v_2 зробимо висновки про їх тотожну рівність в спільній точці $\frac{1}{2}$. Для рівності $v_3(\frac{l}{2}) = v_4(\frac{l}{2})$ маємо $A_4 \cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) \cos((2n+1)\pi l) + C_4 \cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) \sin((2n+1)\pi l) = 0$, звідки випливає або $\cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) = 0$ з чого маємо

$$l = \frac{2k+1}{2m+1}, \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

або рівняння

$$A_4 \cos((2n+1)\pi l) + C_4 \sin((2n+1)\pi l) = 0. \quad (30)$$

Перевіримо для яких значень $l = \frac{2k+1}{2m+1}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) = 0$. Після спрощень отримаємо $(2n+1)\frac{2k+1}{2m+1} = 2t+1$, $m, k, n, t \in \mathbb{Z}$, з чого видно, що ліва частина тотожності завжди непарна, тому можна казати, що ця тотожність виконується тоді і тільки тоді, коли $(2n+1)\frac{2k+1}{2m+1} \in \mathbb{Z}$.

З тієї ж умови зв'язки вузлів (25) між першою та третьою функціями маємо $A_1 \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}) + C_1 \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}) = A_3 \cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) + C_3 \sin(\frac{(2n+1)\pi l}{2})$. В результаті розрахунків ця тотожність перетворюється на таку

$$(-1)^n C_1 = A_3 \cos(\frac{(2n+1)\pi l}{2}) + C_3 \sin(\frac{(2n+1)\pi l}{2}). \quad (31)$$

Продовжимо дослідження власних функцій з умовою (26), з якої випливає рівняння

$$A_4 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi l}{2}\right) \sin((2n+1)\pi l) - C_4 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi l}{2}\right) \cos((2n+1)\pi l) = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде або $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi l}{2}\right) = 0$, що є таким самим розв'язком (29) попереднього рівняння, або

$$A_4 \sin((2n+1)\pi l) + C_4 \cos((2n+1)\pi l) = 0. \quad (32)$$

Так само як і в попередній задачі дослідимо систему рівнянь (30), (32). Ми маємо систему лінійних однорідних рівнянь та знайдемо визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos((2n+1)\pi l) & \sin((2n+1)\pi l) \\ \sin((2n+1)\pi l) & -\cos((2n+1)\pi l) \end{vmatrix} = -1.$$

Звідси видно, що маємо тривіальні розв'язки системи, тобто $A_4 = 0$ та $C_4 = 0$. З а-періодичних граничних умов (23)–(24) отримаємо що й $A_3 = 0$ та $C_3 = 0$, а з (31) та попередніх висновків маємо $C_1 = C_2 = 0$.

Узагальнимо, якщо $l = \frac{2k+1}{2m+1}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2k+1}{2m+1} \in \mathbb{Z}$, то ми маємо власне значення $\lambda = \pi^2(1+2n)^2$ та такі значення коефіцієнтів у власних функціях:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2, \quad A_3 = -A_4 \cos((2n+1)\pi \frac{2k+1}{2m+1}) - C_4 \sin((2n+1)\pi \frac{2k+1}{2m+1}) &= A_4, \\ C_1 = C_2, \quad C_3 = A_4 \sin((2n+1)\pi \frac{2k+1}{2m+1}) - C_4 \cos((2n+1)\pi \frac{2k+1}{2m+1}) &= C_4, \end{aligned}$$

та з тотожності (31) маємо $(-1)^n C_1 = C_3 \sin\left(\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{2m+1}\right)$, з чого випливає $(-1)^n C_1 = (-1)^{|n+k-m|} C_3$. Отже перепишемо систему (28), роблячи деякі спрощення у позначеннях коефіцієнтів системи:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos((2n+1)\pi x_1) + C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= A_1 \cos((2n+1)\pi x_1) + C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= A_2 \cos((2n+1)\pi x_1) \pm C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= A_2 \cos((2n+1)\pi x_1) \pm C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l], \end{aligned}$$

де у випадку v_3 та v_4 ми пишемо $+$, якщо значення $||n+k-m|-n|$ парне, або $-$, якщо це значення непарне.

Якщо $l \neq \frac{2k+1}{2m+1}$, $m, k \in \mathbb{Z}$, то ми отримуємо власні функції

$$\begin{aligned} v_1 &= A \cos((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ v_2 &= A \cos((2n+1)\pi x_2), \quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ v_3 &= 0, \quad x_3 \in [0, \frac{l}{2}], \\ v_4 &= 0, \quad x_4 \in [\frac{l}{2}, l]. \end{aligned}$$

Для другого власного значення цієї задачі $\lambda_5 = \frac{\pi^2(1+2n)^2}{l^2}$, що має систему власних функцій

$$v_i = A_i \cos(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_i) + C_i \sin(\frac{(2n+1)\pi}{l} x_i), \quad (i = \overline{1, 4})$$

знайдемо довжину l за таким самим алгоритмом, що й для власного значення $\lambda = \pi^2(1+2n)^2$. У результаті розрахунків отримали

$$l = \frac{2m+1}{2k+1}, \quad m, k \in \mathbb{Z}. \quad (33)$$

Таким самим чином ми робимо висновок, що тотожність $\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $(2n+1)\frac{2k+1}{2m+1} \in \mathbb{Z}$. Звідси ми отримуємо результат схожий на систему власних функцій власного значення $\lambda_4 = \pi^2(1+2n)^2$ при таких самих умовах, проте з аргументом власних функцій $\frac{\pi(1+2n)(2k+1)}{(2m+1)} x_i$, $i = \overline{1, 4}$.

Якщо ж значення довжини струни хреста не дорівнює (33) або $(2n+1)\frac{2k+1}{2m+1} \notin \mathbb{Z}$, тоді такі коефіцієнти будуть мати нульові значення: $A_2 = 0$ та $C_2 = 0$, з а-періодичних граничних умов $A_1 = 0$ та $C_1 = 0$, а з попередніх висновків $C_3 = C_4 = 0$. Тоді отримуємо одномірний простір власних функцій.

Зробимо висновок щодо цієї а-періодичної спектральної задачі. Для спрощення висновків введемо такі позначення, з огляду рівності констант: $v_1 = u_1$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $v_2 = u_1$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v_3 = u_2$ при $x \in [0, \frac{l}{2}]$, $v_4 = u_2$ при $x \in [\frac{l}{2}, l]$ та будемо мати три константи A_1 , A_2 та C . Якщо $l \in \mathbb{Q}$ тобто довжину можемо завжди уявити у вигляді $l = \frac{2t_1+1}{2t_2+1}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \in \mathbb{Z}$, то власне значення буде мати вигляд $\lambda = \pi^2(2n+1)^2$, а власні функції запишемо у вигляді двох функцій

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos((2n+1)\pi x_1) + C \sin((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= A_2 \cos((2n+1)\pi x_2) \pm C \sin((2n+1)\pi x_2), \quad x_2 \in [0, l], \end{aligned}$$

де для v_2 ми пишемо $+$, якщо $||n+t_1-t_2|-n|$ парне значення, або $-$, якщо це значення непарне.

Якщо $l \in \mathbb{Q}$ та $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \notin \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2t_2+1}{2t_1+1} \in \mathbb{Z}$, то власне значення буде мати вигляд $\lambda = \frac{\pi^2(1+2n)^2}{l^2}$, а власні функції

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x_1\right) + C \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x_1\right), \quad x_1 \in [0, 1], \\ v_2 &= A_2 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x_2\right) \pm C \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x_2\right), \quad x_2 \in [0, l], \end{aligned}$$

де для v_2 ми пишемо $+$, якщо $||n+t_1-t_2|-n|$ парне значення, або $-$, якщо це значення непарне.

Якщо $(2n+1)\frac{2t_1+1}{2t_2+1} \notin \mathbb{Z}$ та $(2n+1)\frac{2t_2+1}{2t_1+1} \notin \mathbb{Z}$ або $l \notin \mathbb{Q}$, тоді всі простори власних функцій одновимірні. Тобто якщо обираємо власне значення $\lambda = \pi^2(2n+1)^2$, то отримуємо

$$v_1 = A \cos((2n+1)\pi x_1), \quad x_1 \in [0, 1], \quad v_2 = 0, \quad x_2 \in [0, l].$$

А якщо обираємо власне значення $\lambda = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}$, то власні функції будуть виглядати таким чином

$$v_1 = 0, \quad x_1 \in [0, 1], \quad v_2 = A \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}x_2\right), \quad x_2 \in [0, l].$$

□

ЛІТЕРАТУРА

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 272 с.
2. Мазья В. Г. Слуцкий А. С. Осреднение разностных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. // Seminar Analysis Operator equat. and numerical analysis 1986/87, Karl-Weierstrab-Institut für Mathematik, Berlin. — 1987. — С. 63–92
3. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. // Матем. сб., 180:12 — 1989. — С. 1634–1679
4. Сандраков Г. В., Крилова А. С. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — 4. — С. 125–130
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. — 1971. — 576с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 10.08.2010

UDC 517.5:519.6

FINITE ELEMENT METHOD FOR THE GRAVITY-GYROSCOPIC WAVE EQUATION

M. N. MOSKALKOV, D. UTEBAEV

ABSTRACT. In this paper, the spatial and time schemes of the high-accuracy finite element method are proposed and analyzed. These schemes are designed for solving the combined boundary value problem associated with the equation for gravity-gyroscopic waves in stratified liquid. For the problem under consideration, the estimates of accuracy of the corresponding schemes are obtained.

Problems associated with internal wave motions are characteristic for many fields of science, such as the atmospheric physics, geophysics, oceanology, and revolving liquid analysis [1, 2]. It is difficult to obtain the exact analytical solutions of these problems. In order to circumvent these difficulties, the processes in internal wave motions are analyzed by using numerical techniques, specifically the net-point method [3] and the finite element method [4, 5].

In this paper, the finite element method is applied relative to spatial and time variables. The use of cubic finite elements provides the possibility to obtain the approximate solution of the problem with higher order of accuracy, so the number of fragments of the set of independent variables as well as computational costs can be reduced.

1. FORMULATION OF THE PROBLEM

Consider the problem discussed in [1] as follows:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta_3 u - \rho^2 u] + \omega_0^2 \Delta_2 u + \theta^2 [\Delta_1 u - \rho^2 u] = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

ω_0 is the Vyaysyal-Brent frequency, ρ , θ are constants with values > 0 , $\Omega = \{0 < x_k < l_k, k = 1, 2, 3\}$,

$$Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, \quad t \in (0, T]\}, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega.$$

The generalized solution of the problem (1, 2) is the function $u(x, t)$ with values in the set $H = \{u \in W_2^1(\Omega), u = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$ for all $t \in (0, T]$. This function has a derivative $\frac{d^2 u}{dt^2} \in W_2^1(\Omega)$, and for all $t \in [0, T]$, satisfies the following conditions:

$$a_3\left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \vartheta\right) + a_2(u(t), \vartheta) + a_1(u(t), \vartheta) = (f(t), \vartheta), \quad (3)$$

$$(u(0) - u_0, \vartheta) = 0, \quad \left(\frac{du}{dt}(0) - u_1, \vartheta\right) = 0, \quad \forall \vartheta(x) \in H, \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} a_3(u, \vartheta) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^3 u_{x_k} \vartheta_{x_k} + \rho^2 u \vartheta \right) dx, \quad a_2(u, \vartheta) = \\ &= \omega_0^2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 u_{x_k} \vartheta_{x_k} dx, \quad a_1(u, \vartheta) = \theta^2 \int_{\Omega} (u_{x_3} \vartheta_{x_3} + \rho^2 u \vartheta) dx, \end{aligned}$$

$u = u(t)$ is the function of an abstract argument $t \in [0, T]$ with values in H .

Denote the norm function in H as $\|u\|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^3 (u_{x_k})^2 + u^2 \right) dx}$. It is evident that $0 \leq a_1(u, u) \leq C_1 \|u\|_1^2$, $0 \leq a_2(u, u) \leq C_2 \|u\|_1^2$, $c_3 \|u\|_1^2 \leq a_3(u, u) \leq C_3 \|u\|_1^2$, where C_1 , C_2 , C_3 and c_3 are positive constants that depend on the parameters ρ , ω_0 , and θ .

The existence, continuity, and uniqueness of the solution of this problem are discussed in [1].

2. SPATIAL AND TIME DISCRETIZATION OF THE PROBLEM

For the discretization of the problem by spatial variables, the finite element method is used. Let $H_h \subset H$ be a set of elements such as $\vartheta_h = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(x)$, where $\{\Phi_m = \Phi_m(x)\}_{m=1}^M$ is the basic set of piecewise polynomial functions, every of which is a polynomial of degree p for every finite element [6, 7].

Consider the example of the basic set consisting of cubic polynomials. Divide the domain Ω into $M = N_1 * N_2 * N_3$ parallelepipeds:

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk} &= \{(i-1)h_1 \leq x_1 \leq ih_1, (j-1)h_2 \leq x_2 \leq jh_2, (k-1)h_3 \leq x_3 \leq kh_3\}, \\ i &= \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3}, h_s = l_s/N_s, s = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Choose the system of basis functions:

$$\Phi_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_3), \quad i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3},$$

where $\varphi_I(x)$ is the basic function formed on the basis of the B3 spline [6]. In this case, $p = 3$. Associate the following semidiscrete problem for $t \in [0, T]$ with

(3, 4):

$$a_3 \left(\frac{d^2 u_h(t)}{dt^2}, \vartheta_h \right) + a_2(u_h, \vartheta_h) + a_1(u_h, \vartheta_h) = (f(t), \vartheta_h), \quad (5)$$

$$(u_h(0) - u_0, \vartheta_h) = 0, \quad \left(\frac{du_h}{dt}(0) - u_1, \vartheta_h \right) = 0, \quad \forall \vartheta_h \in H_h. \quad (6)$$

This problem (5, 6) is associated with the Cauchy problem:

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A u_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \quad (7)$$

The operators D and A are active from H_h to H_h . These operators are associated with the stiffness matrices $D = (a_3(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M$ and $A = (a_2(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M + (a_1(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M$, where $u_{k,h} = P_h u_k(x)$, $k = 0, 1$, and P_h is the projection operator $P_h : H \rightarrow H_h$.

Let $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$ be a uniform net at the section $t \in [0, T]$. For every interval $(t_n, t_{n+1}) \in [0, T]$ from (7), the following expression is true:

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-D \dot{u}_h \dot{\vartheta}_h + A u_h \vartheta_h) dt + D \dot{u}_h \vartheta_h|_{t_n}^{t_{n+1}} = \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \vartheta_h(t) dt, \quad \forall \vartheta_h(t) \in H_h. \end{aligned} \quad (8)$$

The approximate solution of the problem (7) is determined as a Hermitian spline of degree 3 [8]:

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} y^n &= y(t_n), \quad \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n), \quad \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \varphi_{10}^n(t) &= \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2), \quad \xi = (t - t_n)/\tau. \end{aligned}$$

When choosing various weighting functions $\vartheta(t)$, such as $\vartheta_1(\xi) = 0.5$ and $\vartheta_2(\xi) = s_1 \tau (\xi - 0.5) + s_2 \tau (\xi^3 - 1.5\xi^2 + 0.5\xi)$, where $s_1 = 180\beta - 40\alpha$ and $s_2 = 1680\beta - 280\alpha$, the following two-parameter vector difference scheme [4, 5] is obtained from (8):

$$\begin{aligned} & (D - \gamma\tau^2 A) \frac{\hat{\dot{y}} - \dot{y}}{\tau} + A \frac{\hat{\dot{y}} + y}{2} = \varphi_1, \\ & (D - \alpha\tau^2 A) \frac{\hat{\dot{y}} - y}{\tau} - (D - \beta\tau^2 A) \frac{\hat{\dot{y}} + \dot{y}}{2} = \varphi_2, \\ & y^0 = u_{0,h}, \quad \dot{y}^0 = u_{1,h}, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\gamma = 1/12$, $\varphi_k = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \vartheta_k(\xi) d\xi$, $k = 1, 2$.

The parameters α and β comply with the condition for the fourth-order approximation [4]:

$$\alpha - \beta = 1/12. \quad (11)$$

Additionally, these parameters are determined with consideration for accuracy and simplicity of the computational algorithm used for the implementation of the scheme [5]. For example, $\alpha = 1/8$, $\beta = 1/24$.

3. ANALYSIS OF THE SPATIAL DISCRETIZATION

Theorem 1. Assume that $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in C([0, T]; W_2^{p+1}(\Omega) \cap H)$. If a reduction of the set H_h by one finite element is defined as a polynomial of degree k , the estimated accuracy of the solution of the problem (3) is determined as follows:

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - u_h(x, t)\|_1 \leq Mh^p & \left(\max_{t'} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t') \right\|_{p+1} + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t') \right\|_{p+1}^2 dt'} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\int_0^t \|u(x, t')\|_{p+1}^2 dt'} \right), \quad \forall t \in [0, T], \quad M = M(T, \rho, \theta, \omega_0) > 0. \end{aligned}$$

Proof of the theorem. Integrate (3), (4), (5), and (6) over t from t_n to $t_{n+1} = t_n + \tau$. Upon integrating the initial expressions by parts and subtracting the one obtained expression from the other, the following result is obtained:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[-a_3(\dot{u} - \dot{u}_h, \vartheta_h) + a_2(u - u_h, \vartheta_h) + a_1(u - u_h, \vartheta_h) \right] dt + \\ + a_3(\dot{u} - \dot{u}_h, \vartheta_h)|_{t_n}^{t_{n+1}} = 0, \quad \forall \vartheta_h(x) \in H_h. \end{aligned} \quad (12)$$

Denote $e_h = u - u_I$, $\xi_h = u_I - u_h$, $z_h = u - u_h = e_h + \xi_h$, where $u_I = P_h u(x, t)$. Choose $\vartheta_h(t) = -\int_t^s \xi_h(t') dt' \in H_h$, $t < s$; $\vartheta_h(t) = 0$, $t \geq s$. It is evident that $\dot{\vartheta}_h(t) = \xi_h(t)$.

Introduce the function $w_h(t) = \int_0^t \xi_h(t') dt' \in H_h$, $t < s$, $w_h(t) = 0$, $t \geq s$, which is associated with the other functions as follows: $\dot{w}_h(t) = \xi_h(t)$, $\vartheta_h(t) = w_h(t) - w_h(s)$.

With consideration for $(\dot{\xi}_h, \xi_h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\xi_h, \xi_h)$, $a_k(\dot{\vartheta}_h, \vartheta_h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a_k(\vartheta_h, \vartheta_h)$, $k = 1, 2, 3$, and $\xi_h(0) = 0$, $\vartheta_h(s) = 0$, $\vartheta_h(0) = w_h(s)$, by summing the values of (12) through $n = \overline{0, m-1}$, where m corresponds to the instant of time

$s = m\tau$, the following expression is obtained:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_3(\xi_h, \xi_h)(s) + \frac{1}{2}a_2(w_h, w_h)(s) + \frac{1}{2}a_1(w_h, w_h)(s) = & -a_3(\dot{e}_h(0), w_h(s)) - \\ & - \int_0^s [a_3(\dot{e}_h, \xi_h) - a_2(e_h, w_h(t) - w_h(s)) - a_1(e_h, w_h(t) - w_h(s))] dt. \end{aligned}$$

After estimating the right side of this expression by using the ε inequation, with consideration for the Gronuol lemma, the following expression is obtained:

$$\begin{aligned} & a_3(\xi_h, \xi_h)(s) + a_2(w_h, w_h)(s) + a_1(w_h, w_h)(s) \leq \\ \leq & M \left(a_3(\dot{e}_h(0), \dot{e}_h(0)) + \int_0^s a_3(\dot{e}_h, \dot{e}_h) dt + \int_0^s a_2(e_h, e_h) dt + \int_0^s a_1(e_h, e_h) dt \right), \end{aligned}$$

where M is a constant. As $0 \leq a_k(u, u) \leq C_k \|u\|_1^2$, $k = 1, 2$, this expression is presented as follows:

$$\|\xi_h(s)\|_1^2 \leq M \left(\|\dot{e}_h(0)\|_1^2 + \int_0^s \|\dot{e}_h(t)\|_1^2 dt + \int_0^s \|e_h(t)\|_1^2 dt \right). \quad (13)$$

For the solution $u(x, t)$, $\dot{u}(x, t) \in W_2^{p+1}(\Omega)$, $\forall t \in [0, T]$, there are the following estimates [6, 7]:

$$\|e_h(t)\|_1 \leq Mh^p \|u(t)\|_{p+1}, \quad \|\dot{e}_h(t)\|_1 \leq Mh^p \|\dot{u}(t)\|_{p+1}.$$

Theorem 1 is proved on account of (13) and the triangle inequality $\|z_h\| \leq \|e_h\| + \|\xi_h\|$. $\square$

4. ANALYSIS OF THE TIME DISCRETIZATION

Theorem 2. Assume that $D^* = D > 0$, $A^* = A > 0$, and additionally, the condition of approximation (11) and the condition of stability

$$D - \mu\tau^2 A \geq \varepsilon D, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \mu = \max\{\alpha, \beta, \gamma, 0\} \quad (14)$$

are met. In this case, for determining the solution for the scheme (10) so that this solution approximates the solution of the problem (7), with $\frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \in C[0, T]$, the following estimate of accuracy is true:

$$\|u_h(t) - y(t)\|_1 \leq M\tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t') \right\|_1^2 dt'}.$$

Proof of the theorem. It is evident that the convergence of the scheme is ensured if the conditions for the stability and approximation of the scheme are satisfied [9]. The stability of the scheme (10) is analyzed in [4]. The approximation of the scheme is analyzed below.

Assume that $y(t) \in H_\tau$, where H_τ is a set of functions of an argument t , every of which is a third-order polynomial (9) over the interval $t \in (t_n, t_{n+1})$ and a

cubic Hermitian spline for $t \in [0, T]$. Additionally, $y(t)$ for every $t \in (t_n, t_{n+1})$ is an element of the subset H_h . Really, $y = y(x, t) \in H_h^\tau = H_h \otimes H_\tau$.

Denote $e_\tau = y - u_\tau$, $\xi_\tau = u_\tau - u_h$, $\zeta_\tau = y - u_h = e_\tau + \xi_\tau$, where

$$u_\tau(t) = u_h^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{u}_h^n \varphi_{10}^n(t) + u_h^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{u}_h^{n+1} \varphi_{11}^n(t).$$

With consideration for $\zeta_\tau(t) = \xi_\tau(t) + e_\tau(t)$, upon performing the same operations for $\vartheta_\tau(t) = -\int_t^s \xi_\tau(t') dt'$, $t < s$; $\vartheta_\tau(t) = 0$, $t \geq s$ as in proving Theorem 1, the following expression is obtained:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_3(\xi_\tau, \xi_\tau)(s) + \frac{1}{2} a_2(\vartheta_\tau, \vartheta_\tau)(0) + \frac{1}{2} a_1(\vartheta_\tau, \vartheta_\tau)(0) = \\ & = a_3(\dot{e}_\tau, \vartheta_\tau)(0) + \int_0^s [a_3(\dot{e}_\tau, \xi_\tau) - a_2(e_\tau, \vartheta_\tau) - a_1(e_\tau, \vartheta_\tau)] dt. \end{aligned}$$

Denote $w_\tau(t) = \int_0^t \xi_\tau(t') dt'$, $t < s$, $w_\tau(t) = 0$, $t \geq s$, where $\dot{e}_\tau(0) = \dot{u}_h(0) - \dot{u}_\tau(0) = u_{1,h} - u_{1,h} = 0$. Then, the following expression for the error $\xi_\tau(t)$ is obtained from the preceding expression:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_3(\xi_\tau, \xi_\tau)(s) + \frac{1}{2} a_2(w_\tau, w_\tau)(s) + \frac{1}{2} a_1(w_\tau, w_\tau)(s) = \\ & = \int_0^s [a_3(\dot{e}_\tau, \xi_\tau) - a_2(e_\tau, w_\tau(t) - w_\tau(s)) - a_1(e_\tau, w_\tau(t) - w_\tau(s))] dt. \end{aligned}$$

As in Section 3, the following estimate is obtained from this expression:

$$\|\xi_\tau(s)\|_1^2 \leq M \left(\int_0^s \|\dot{e}_\tau(t)\|_1^2 dt + \int_0^s \|e_\tau(t)\|_1^2 dt \right).$$

The linear and limited functionals $\dot{e}_\tau(t)$ and $e_\tau(t)$ are zero for polynomials up to the third order for the variable t . From the preceding estimate, on the basis of the Bramble-Hilbert lemma [7], it follows:

$$\int_0^s \|e_\tau(t')\|_1^2 dt' \leq M^2 \tau^8 \int_0^s \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2 dt.$$

With consideration for $\int_0^s \|\dot{e}_\tau(t')\|_1^2 dt' \leq M^2 \tau^6 \int_0^s \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2 dt$ and $\|y - u_h\| \leq \|e_\tau\| + \|\xi_\tau\|$, it follows that the theorem is proved. $\square$

5. CONVERGENCE OF THE SCHEME

For the estimate according to Theorem 2, the error is dependent on the solution $u_h(t)$ of the semidiscrete problem (7), but it is desirable to define

requirements for the continuity of the solution of the initial problem (1). For this purpose, use the following estimate (see [7], page 97):

$$\|u_h\|_k = \|u - u + u_h\|_k \leq \|u\|_k + \|u - u_h\|_k \leq \|u\|_k + Ch|u|_{k+1} \leq \bar{C}\|u\|_{k+1},$$

$$k = 0, 1.$$

The constant $\bar{C}$ is not dependent on h .

Consequently, the estimate according to Theorem 2 is the following:

$$\|u_h(t) - y(t)\|_1 \leq M\tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t') \right\|_2^2 dt'}.$$

On the basis of Theorems 1 and 2, the following Theorem 3 is formulated.

Theorem 3. Assume that the conditions of Theorem 2 are met. In this case, for the solution of the scheme (10), which approximates the solution of the problem (1) and is such that $u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in C([0, T]; W_2^{p+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ and $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \in C\{[0, T]; W_2^2(\Omega)\}$, the following estimate of accuracy is true:

$$\|u(x, t) - y(x, t)\|_1 \leq M \left\{ h^p \left(\max_t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|_{p+1} + \sqrt{\int_0^t \|u(x, t')\|_{p+1}^2 dt'} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t') \right\|_2^2 dt'} \right\} \quad \forall t \in [0, T], \quad M = M(T, \rho, \theta, \omega_0) > 0.$$

When choosing a polynomial of the order no less than three for every spatial finite element, the third order of accuracy is ensured for both the steps h and τ .

Check the fulfillment of the stability condition (14). Define the operators of the scheme(10) as follows:

$$D = A_1 + A_2 + A_3 + \rho^2 E, \quad A = \omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \theta^2 A_3 + \rho^2 \theta^2 E,$$

where the stiffness matrices $A_k = (b_k(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M$, with the bilinear form $b_k(u, \vartheta) = \int_{\Omega} (u_{x_k} \vartheta_{x_k}) dx$, correspond to the operator $A_k \geq 0$. The condition (14) is presented as follows:

$$(1 - \varepsilon) (A_1 + A_2 + A_3 + \rho^2 E) - \mu\tau^2 (\omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \theta^2 A_3 + \rho^2 \theta^2 E) \geq 0.$$

For the fulfillment of this condition, it is sufficiently to satisfy the following condition:

$$\tau^2 \leq \frac{1 - \varepsilon}{\mu} \max \left(\frac{1}{\omega_0^2}, \frac{1}{\theta^2} \right), \quad \text{where } 0 < \varepsilon < 1.$$

The last condition is particularly remarkable by that the time increment is not associated with the spatial increment and is dependent on the parameters

of the problem such as the doubled angular frequency (θ) and the Vyaysyal-Brent frequency (ω_0). For the parameters $\alpha = 1/8$ and $\beta = 1/24$ of the scheme (10), $\mu = 1/8$. Finally,

$$\tau \leq \frac{2\sqrt{2(1-\varepsilon)}}{\min(\omega_0, \theta)}.$$

The implementation of the scheme (10) is discussed in [4, 5].

BIBLIOGRAPHY

1. Gabov S. A., Sveshnikov A. G. Problems of the Stratified Liquid Dynamics. — M.: Nauka, 1986. — 288 p.
2. Gabov S. A., Sveshnikov A. G. Linear Problems of Unsteady-State Internal Waves. — M.: Nauka, 1990. — 344 p.
3. Vasilyev S. A., Sveshnikov A.G. Use of Iterative Schemes for Solving Problems Associated with Motion of Stratified Liquid // Information Technologies. — 2006. — Vol. 11. — P. 45–52.
4. Moskalkov M. N. Scheme of the Finite Element Method of Enhanced Accuracy for Solving Unsteady-State Problems of Second-Order Equations // Differential Equations. — Minsk. — 1980. — Vol. 16. — P. 1283–1292.
5. Moskalkov M. N., Utebaev D. Investigation of Difference Schemes of Finite Element Method for Second-Order Unsteady-State Equations // J. Comput. Appl. Math. — 2005. — No. 92. — P. 70–76.
6. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Introduction to Finite Element Methods. — M.: Nauka, 1981. — 416 p.
7. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. placeStateBerlin: Springer-Verlag, — 1994. — 544 p.
8. Zenkevich O. Finite Element Method in Engineering. — M.: Mir, 1975. — 541 p.
9. Samarskiy A. A. Difference Scheme Theory. — M.: Nauka, 1977. — 656 p.

NATIONAL AVIATION UNIVERSITY, KYIV, UKRAINE. KARA-KALPAK STATE UNIVERSITY, NUKUS, UZBEKISTAN

Надійшла 10.03.2010

УДК 517.9

ОПТИМІЗАЦІЯ ІНТЕНСИВНОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ В СИСТЕМАХ З ПОВТОРАМИ І СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ ДЖЕРЕЛ ВИМОГ

В. Д. Пономарьов

РЕЗЮМЕ. В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю обслуговування в системі $M|M|n$ з повторними викликами і обмеженим числом джерел первинних вимог на основі порогових стратегій. Для даного типу керування представлено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей і знайдено явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі, що дає алгоритм розв'язку відповідної оптимізаційної задачі. Також розглядаються деякі чисельні приклади.

1. ВСТУП

В класичній теорії масового обслуговування, зазвичай, припускається, що вимога на обслуговування, яка не може бути виконана одразу, або стає у чергу (і обслуговується потім у відповідності з деякими правилами), або втрачається назавжди. Іноді, нетерплячі вимоги залишають чергу, але такі вимоги розглядаються, як втрачені. Насправді, припущення про втрату вимог є лише першою апроксимацією реальної ситуації. Клієнт, який не отримав обслуговування, через деякий випадковий проміжок часу повертається до системи і знову намагається отримати обслуговування. Наприклад, в мережах мобільного зв'язку внесок користувачів, які не отримали обслуговування і повторно звертаються до системи, в загальну кількість вимог на обслуговування є досить вагомим і нехтування ним призводить до втрати точності моделі. Також припускається, що вхідний потік вимог на обслуговування є пуассонівським. Це означає, що кількість незалежних джерел (потенційних клієнтів) є нескінченною і кожне з них звертається до системи досить рідко. Але на практиці таке припущення дає лише верхню границю для характеристик системи, що знову ж таки погіршує точність моделі.

Системи з повторними викликами і обмеженим числом джерел враховують описані вище недоліки класичних систем масового обслуговування і можуть ефективно застосовуватися на практиці. Використання систем з повторними викликами та обмеженим числом джерел для моделювання мереж мобільного зв'язку та дослідження впливу повторних вимог на обслуговування викладено в [1]. Більш детальний порівняльний аналіз стандартних систем і систем масового обслуговування з повторними викликами проведено в [2].

В даній роботі розглядається задача оптимізації інтенсивності обслуговування системи $M|M|n$ з повторними викликами і обмеженим числом джерел.

2. МОДЕЛЬ

Розглянемо ланцюг Маркова з неперервним часом $X(t) = (C(t); N(t))$, де $C(t) \in \{0, 1, \dots, n\}$, $N(t) \in \{0, 1, \dots, m - n\}$, який задається інфінітезимальними характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(X) = \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, m - n\}$:

1. якщо $i = \{0, 1, \dots, n - 1\}, j = \{0, 1, \dots, m - n\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m - i - j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (i + 1, j); \\ j\mu, & \text{при } (i', j') = (i + 1, j - 1); \\ i\nu_j, & \text{при } (i', j') = (i - 1, j); \\ -[(m - i - j)\lambda + j\mu + i\nu_j], & (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (1.1)$$

2. якщо $i = n, j = \{0, 1, \dots, m - n\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m - n - j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (n, j + 1); \\ n\nu_j, & \text{при } (i', j') = (n - 1, j); \\ -[(m - n - j)\lambda + n\nu_j], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Описаний ланцюг Маркова задає процес обслуговування в такій системі. Вимоги на обслуговування надходять від m користувачів і обслуговуються на n однакових пристроях. Умова $m > n$ завжди виконується на практиці. Кожен користувач через випадкові проміжки часу, які мають показниковий розподіл з параметром λ звертається до системи і обслуговується негайно, якщо є хоча б один вільний прилад. Час обслуговування — показниково розподілена випадкова величина з параметром ν_j , який залежить від кількості j користувачів в системі в поточний момент часу. Якщо усі прилади зайняті, то вимога залишає систему і повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром μ . Кількість зайнятих приладів в будь-який момент часу задається першою компонентою процесу $X(t)$, а кількість джерел повторних викликів — другою.

3. ПРОЦЕС ОБСЛУГОВУВАННЯ ПРИ ЗАДАНИЙ ПОРОГОВІЙ СТРАТЕГІЇ

Розглянемо порогові стратегії керування інтенсивністю обслуговування. В цьому випадку, якщо кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H , то система функціонує в першому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $\nu^{(1)}$. Якщо кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить у другий режим з інтенсивністю обслуговування $\nu^{(2)}$. Поріг H приймає значення $\{-1, 0, \dots, m - n\}$. При $H = -1$ система весь час функціонує у другому режимі, $\nu = \nu^{(2)}$. Якщо

$H = m - n$, то при будь-якому значенні $N(t)$ система знаходиться в першому режимі, $\nu = \nu^{(1)}$.

Формально керування $X(t)$ на основі порогової стратегії означає, що інтенсивність обслуговування має такий вигляд:

$$\nu_{(j)} = \begin{cases} \nu^{(1)}, & \text{при } j = 0, 1, \dots, H; \\ \nu^{(2)}, & \text{при } j = H + 1, \dots, m - n. \end{cases}$$

Нехай $\pi_{ij}(H)$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m - n$ стаціонарні ймовірності системи: $\pi_{ij}(H) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = i, N(H, t) = j\}$.

Введемо такі позначення.

$$\begin{aligned} e_i(n) &= (\delta_{i0} \ \delta_{i1} \ \dots \ \delta_{in-1})^T, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \\ e(n) &= (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T, \\ A_j &= \|a_{ik}^j\|_{i,k=0}^{n-1}, \quad a_{ik}^j = \begin{cases} -(m+1-i-j)\lambda, & k = i-1, \\ (m-i-j)\lambda + j\mu + i\nu_j, & k = i, \\ -(i+1)\nu_j, & k = i+1, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \\ B_j &= \|b_{ik}^j\|_{i,k=0}^{n-1}, \quad b_{ik}^j = \begin{cases} (j+1)\mu, & k = i-1, i \neq n-1, \\ \frac{n(j+1)\mu\nu_j}{(m-n-j)\lambda}, & k \neq n-2, i = n-1, \\ \frac{(j+1)\mu[(m-n-j)\lambda + n\nu_j]}{(m-n-j)\lambda}, & k = n-2, i = n-1, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \\ C_j &= \|c_{ik}^j\|_{i,k=0}^{n-1}, \quad c_{ik}^j = \begin{cases} 1, & k = 0, i = 0, \\ a_{i-1k}^{m-n}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \\ \Phi_j &= \left(\prod_{i=j}^{m-n-1} A_i^{-1} B_i \right) C^{-1} e_0(n). \end{aligned}$$

Перевіримо, що вектори Φ_j останнім співвідношенням задаються коректно.

Лема 1. Матриці A_j , $j = 0, 1, \dots, m - n - 1$, C невироджені.

Ймовірності $\pi_{ij}(H)$, $(i, j) \in S(X)$ можна подати через параметри системи в явному вигляді.

Теорема 1. Стаціонарні ймовірності системи мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \pi_j(H) &= \Phi_j \pi_{0m-n}(H), \quad j = 0, \dots, m - n, \\ \pi_{nj}(H) &= \frac{(j+1)\mu}{(m-n-j)\lambda} e(n)^T \Phi_{j+1} \pi_{0m-n}(H), \quad j = 0, \dots, m - n - 1, \\ \pi_{nm-n}(H) &= \frac{[\lambda + (m-n)\mu + (n-1)\nu_{m-n}] e_{n-1}^T(n) - 2\lambda e_{n-2}^T(n)}{n\nu_{m-n}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times C^{-1}e_0(n)\pi_{0m-n}(H), \\ \text{де } \pi_j(H) &= (\pi_{0j}(H) \ \pi_{1j}(H) \ \dots \ \pi_{n-1j}(H))^T, \\ \pi_{0m-n}^{-1}(H) &= \left\{ \sum_{j=0}^{m-n} \frac{(m-n+1-j)\lambda + j\mu}{(m-n+1-j)\lambda} e(n)^T \prod_{i=j}^{m-n-1} A_i^{-1} B_i + \right. \\ & \left. + \frac{[\lambda + (m-n)\mu + (n-1)\nu_{m-n}] e_{n-1}^T(n) - 2\lambda e_{n-2}^T(n)}{n\nu_{m-n}} \right\} C^{-1}e_0(n). \end{aligned}$$

Доведення. Для пошуку $\pi_{ij}(H)$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі ([3] стор. 49). Для кожного $j = 1, 2, \dots, m-n$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(1)}(X) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X)$, $S_j^{(1)}(X) = \{(p, q) \in S(X) : q \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(X)$, знаходимо

$$(m-n+1-j)\lambda\pi_{nj-1}(H) = j\mu \sum_{i=0}^{n-1} \pi_{ij}(H), \quad j = 1, \dots, m-n. \quad (2.2)$$

Тепер для $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-n+1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_{ij}^{(2)}(X) \cup \bar{S}_{ij}^{(2)}(X)$, $S_{ij}^{(2)}(X) = \{(i, j)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{ij}^{(2)}(X)$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & [(m+1-i-j)\lambda + (j-1)\mu + i\nu_{j-1}] \pi_{ij-1}(H) = \\ & = j\mu\pi_{i-1j}(H) + (m+2-i-j)\lambda\pi_{i-1j-1}(H) + (i+1)\nu_{j-1}\pi_{i+1j-1}(H), \\ & j = 1, \dots, m-n+1, \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=0}^{m-n} \sum_{i=0}^n \pi_{ij}(H) = 1. \quad (2.4)$$

Останнє рівняння — це запис умови нормування.

Подано рівняння (2.3) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & -(m+1-i-j)\lambda\pi_{i-1j}(H) + [(m-i-j)\lambda + j\mu + i\nu_j] \pi_{ij}(H) - (i+1)\nu_j\pi_{i+1j}(H) = \\ & = (j+1)\mu\pi_{i-1j+1}(H), \quad j = 0, \dots, m-n-1, \quad i = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Знайдемо з рівняння (2.2) імовірність $\pi_{nj}(H)$ і підставимо у (2.3) при $i = n-1$. Матимемо:

$$\begin{aligned} & -(m-n+2)\lambda\pi_{n-2j}(H) + [(m-n+1-j)\lambda + j\mu + (n-1)\nu_j] \pi_{n-1j}(H) = \\ & = \frac{(j+1)n\mu\nu_j}{(m-n-j)\lambda} \sum_{i=0, i \neq n-2}^{n-1} \pi_{ij+1}(H) + \frac{(j+1)\mu[(m-n-j)\lambda + n\nu_j]}{(m-n-j)\lambda} \pi_{n-2j+1}(H), \\ & j = 0, \dots, m-n-1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Систему рівнянь (2.5), (2.6) залишемо у векторно-матричній формі:

$$A_j\pi_j(H) = B_j\pi_{j+1}(H), \quad j = 0, \dots, m-n-1.$$

З останнього рівняння знаходимо, що

$$\pi_j(H) = \left(\prod_{i=j}^{m-n-1} A_i^{-1} B_i \right) \pi_{m-n}(H), \quad j = 0, \dots, m-n-1. \quad (2.7)$$

Доповнимо систему рівнянь (2.3) при $i = 0, 1, \dots, n-2$, $j = m-n+1$ рівнянням $\pi_{0m-n}(H) = \pi_{0m-n}(H)$ і запишемо у такій векторно-матричній формі:

$$C\pi_{m-n}(H) = e_0(n)\pi_{0m-n}(H).$$

Звідки знаходимо, що

$$\pi_{m-n}(H) = C^{-1}e_0(n)\pi_{0m-n}(H). \quad (2.8)$$

Остаточно, з рівнянь (2.7), (2.8) маємо:

$$\pi_j(H) = \left(\prod_{i=j}^{m-n-1} A_i^{-1} B_i \right) C^{-1}e_0(n)\pi_{0m-n}(H), \quad j = 0, \dots, m-n.$$

Підставляючи вираз імовірності $\pi_{j+1}(H)$ в рівняння (2.2), знаходимо $\pi_{nj}(H)$, $j = 0, \dots, m-n-1$. Імовірність $\pi_{nm-n}(H)$ отримуємо з рівняння (2.3) при $i = n-1$, $j = m-n+1$.

Імовірність $\pi_{0m-n}(H)$ знаходимо з умови нормування (2.4). $\square$

Зауваження 1. Вектор Φ_j можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \left(\prod_{i=j}^{m-n-1} \frac{(i+1)\mu\nu_i}{\lambda} D_i \right) c, \\ D_j &= \left\| d_{ik}^j \right\|_{i,k=0}^{n-1}, \\ d_{ik}^j &= \frac{(m-1-k-j)! \varphi_k^j}{i! \lambda^k \nu_j^{i+1} \varphi_i^j} \sum_{l=i}^{n-1} \frac{l! (\lambda \nu_j)^l}{(m-l-j)!} \prod_{g=i+1}^l \frac{\varphi_{g-2}^j}{\varphi_g^j} + \\ &+ \frac{n! \nu_j^{n-i-1} \varphi_{n-2}^j}{i! (m-n-j) \varphi_i^j} \prod_{l=i+1}^{n-1} \frac{\varphi_{l-2}^j}{\varphi_l^j}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad k = 0, \dots, n-3, \\ d_{in-2}^j &= \frac{(n-1)! \left[(m-n-j)\lambda + n\nu_j \right] \nu_j^{n-i-2} \varphi_{n-2}^j}{i! (m-n-j) \varphi_i^j} \prod_{l=i+1}^{n-1} \frac{\varphi_{l-2}^j}{\varphi_l^j}, \\ &\quad i = 0, \dots, n-1, \\ d_{in-1}^j &= \frac{n! \nu_j^{n-i-1} \varphi_{n-2}^j}{i! (m-n-j) \varphi_i^j} \prod_{l=i+1}^{n-1} \frac{\varphi_{l-2}^j}{\varphi_l^j}, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ c &= (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1})^T, \quad c_i = \frac{\varphi_{i-1}^{m-n}}{i! \nu_{m-n}^i}, \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\varphi_i^j = [(m-i-j)\lambda + j\mu + i\nu_j] \varphi_{i-1}^j - i(m+1-i-j)\lambda \nu_j \varphi_{i-2}^j, \quad \varphi_{-1}^j = 1, \quad \varphi_{-2}^j = 0.$$

Доведена теорема містить ефективний алгоритм рекурентного типу для пошуку стаціонарних ймовірностей. У випадку $n = 1, 2$ він зводиться до явних формул скалярного типу (дивись [4], [5]).

Наслідок 1. Для системи з одним обслуговуючим приладом стаціонарні ймовірності мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\pi_{0j}(H) &= \alpha_j \pi_{0m-1}(H), \quad j = 0, \dots, m-1, \\ \pi_{1j}(H) &= \frac{(j+1)\mu}{(m-1-j)\lambda} \alpha_{j+1} \pi_{0m-1}(H), \quad j = 0, \dots, m-2, \\ \pi_{1m-1}(H) &= \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\nu_{m-1}} \pi_{0m-1}(H), \\ \pi_{0m-1}^{-1}(H) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{(m-j)\lambda} \alpha_j + \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\nu_{m-1}}, \\ \alpha_j &= \prod_{i=j}^{m-2} \frac{(i+1)\mu\nu_i}{\lambda(m-1-i)[(m-i)\lambda + i\mu]}.\end{aligned}$$

Наслідок 2. Для системи з двома приладами стаціонарні ймовірності мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\pi_{0j}(H) &= \alpha_j \pi_{0m-2}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-3, \\ \pi_{1j}(H) &= \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{\nu_j} \alpha_j \pi_{0m-2}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \\ \pi_{2j}(H) &= \frac{(j+1)\mu}{(m-2-j)\lambda\nu_{j+1}} [(m-j-1)\lambda + (j+1)\mu + \nu_{j+1}] \alpha_{j+1} \pi_{0m-2}(H), \\ &\quad j = 0, 1, \dots, m-3, \\ \pi_{2m-2}(H) &= \frac{[\lambda + (m-2)\mu][2\lambda + (m-2)\mu] + (m-2)\mu\nu_{m-2}}{2\nu_{m-2}^2} \pi_{0m-2}(H),\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\pi_{0m-2}^{-1}(H) &= \sum_{j=0}^{m-2} \frac{[(m-1-j)\lambda + j\mu][(m-j)\lambda + j\mu + \nu_j]}{(m-2-j)\lambda\nu_j} \alpha_j + \\ &\quad + \frac{[\lambda + (m-2)\mu][2\lambda + (m-2)\mu] + (m-2)\mu\nu_{m-2}}{2\nu_{m-2}^2}, \\ \alpha_j &= \prod_{i=j}^{m-3} \frac{(i+1)\mu\nu_i}{(m-2-i)\lambda\nu_{i+1}} \times \\ &\quad \times \frac{(m-1-i)\lambda(2\nu_i + \nu_{i+1}) + 2\nu_i(\nu_{i+1} + (i+1)\mu) - \lambda\nu_{i+1}}{[(m-1-i)\lambda + i\mu][(m-i)\lambda + i\mu] + i\mu\nu_i}.\end{aligned}$$

Застосуємо доведену теорему до задачі оптимізації прибутку в системі з повторними викликами, коли вибір порогу знаходиться у нашому розпорядженні.

Нехай

$F_i(t, H)$ — число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи в i -му режимі, $i = 1, 2$;

$F_3(t, H)$ — число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$F_4(t, H)$ — число перемикань інтенсивності обслуговування.

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} F_i(t, H)$ позначимо через $F_i(H)$, $i = 1, \dots, 4$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$C_1 F_1(H) + C_2 F_2(H) - C_3 F_3(H) - C_4 F_4(H) \rightarrow \max, \\ H = \{-1, 0, 1, \dots, m - n\}, \quad (2.9)$$

де C_i , $i = 1, 2$ — прибуток, пов'язаний з обслуговуванням однієї вимоги при роботі системи у i -ому режимі;

C_3 — штраф за відмову в обслуговуванні;

C_4 — штраф за перемикання інтенсивності обслуговування.

Розв'язком задачі (2.9) є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для класичних моделей одноканальних систем з повторними викликами розглядалися в роботі [6].

Граничні функціонали $F_i(H)$, $i = 1, \dots, 4$ можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$F_1(H) = \nu^{(1)} \sum_{j=0}^H \sum_{i=1}^n i \pi_{ij}(H), F_2(H) = \nu^{(2)} \sum_{j=H+1}^{m-n} \sum_{i=1}^n i \pi_{ij}(H),$$

$$F_3(H) = \lambda \sum_{j=0}^{m-n-1} (m - n - j) \pi_{nj}(H),$$

$$F_4(H) = (m - n - H) \lambda \pi_{nH}(H) + (H + 1) \mu \sum_{i=0}^{n-1} \pi_{iH+1}(H),$$

що разом з результатом теореми 1 дає алгоритм розв'язку задачі (2.9).

4. ПРИКЛАД

В якості прикладу розв'язано задачу оптимізації для системи з такими характеристиками: $n = 4$, $m = 60$, $\lambda = 0,13$, $\nu^{(1)} = 5$, $\nu^{(2)} = 7$, $\mu = 1$. Вартісні коефіцієнти функціоналу якості: $C_1 = 500$, $C_2 = 100$, $C_3 = 10$, $C_4 = 100$.

На рисунку 1 представлено графік залежності функціоналу якості (2.9) від порогової стратегії керування H для заданої системи. Як видно з рисунку, максимальне значення функціоналу якості досягається при $H = 2$ і дорівнює 6520,67.

Результати розрахунків також наведені на рис. 1.

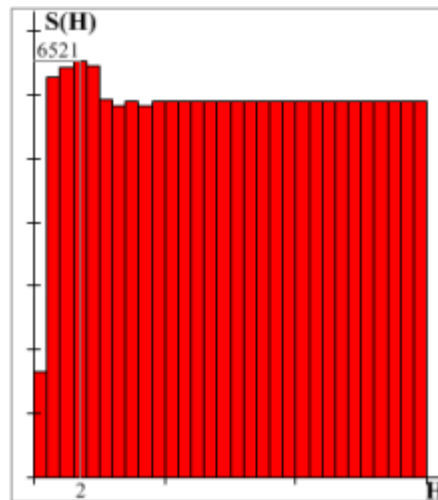


Рис 1. Графік залежності функціоналу якості (2.9) від стратегії керування

Як видно із прикладу, стратегія, оптимальна на класі порогових стратегій, дає більше значення функціоналу якості ніж у випадку використання лише першого чи лише другого режимів обслуговування.

ЛІТЕРАТУРА

1. P. Tran-Gia. Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks. / P. Tran-Gia, M. Mandjes // University of Wurzburg, Institute of Computer Science Report. — 1996. — 142 p.
2. J. R. Artalejo. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. / J. R. Artalejo, G. I. Falin // Revista Matematica Complutense. — 2002. — V. XV, № 1 — P. 101–129.
3. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. / Уолрэнд Дж.; — М.: Мир, 1993. — 336 с.
4. Лебедев Є. О. Оптимізація систем із повторами і скінченням числом джерел. / Є. О. Лебедев, В. Д. Пономарьов // Вісник Київського університету. — 2008. — №2 — С. 91–97.
5. Пономарьов В. Д. Оптимізація керування режимом роботи системи з повторними викликами і скінченням числом користувачів. / В. Д. Пономарьов // Вісник Київського університету. — 2008. — №4 — С. 161–168.
6. Клименок В. И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами / В. И. Клименок // Автоматика и вычислительная техника. — 1990. — №1 — С. 25–30.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 25.07.2009

УДК 517.91

ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ НА ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ

О.О. Пришляк¹, К.О. Пришляк, О.Н. Вятчанинова

РЕЗЮМЕ. Досліджуються топологічні властивості гладких функцій без критичних точок на обмежених тривимірних тілах. Будується повний топологічний інваріант функцій, обмеження яких на межу має один локальний мінімум, один локальний максимум та скінченне число сідлових критичних точок.

ВСТУП

Розглянемо тіло в тривимірному просторі, межею якого є гладка поверхня. Легко побудувати функцію без критичних точок в тілі. Прикладом може бути проекція на координатну вісь. Однак, у обмеження цієї функції на поверхню будуть критичні точки. Якщо функцію можна представити як проекцію на координатну вісь при вкладенні поверхні в $\mathbb{R}^3$, то вона природним чином продовжується на область. Слабші умови занурення були отримані в [2]. Якщо функція на поверхні є функцією Морса загального положення, то шукане вкладення поверхні може бути отримано, як межа околу графа Конрода-Ріба ([1], [9]) при його вкладенні в $\mathbb{R}^3$. Для довільних функцій Морса умови існування таких вкладень отримані в [7]. Під індексом Пуанкаре критичної точки функції будемо мати на увазі модуль індексу Пуанкаре її поля градієнта.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай T – обмежене тіло в $\mathbb{R}^3$, $F = \partial U$ – гладка поверхня, $g : \bar{T} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція, що не має критичних точок як у T , так і у ∂T . Нехай $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ – обмеження функції g на межу. Ми будемо розглядати такі функції f , у яких один максимум, один мінімум, а інші критичні точки – сідлові, тобто ізольовані і не є точками локального екстремуму, і значення функції в різних критичних точках різні.

Мета цієї статті дати топологічну класифікацію таких функцій та дослідити питання про те, які функції на F можуть бути продовжені до функцій без критичних точок на T при деякому вкладенні поверхні в тривимірний простір.

¹Ці дослідження частково підтримані Українсько-Словенським науково дослідним проектом "Топологія багатовидів та її застосування договір No M/150-2009.

1. ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ БЕЗ КРИТИЧНИХ ТОЧОК НА ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ

В [5] досліджено як змінюються рівні функції g при збільшенні значення функції. Зокрема доведені такі леми:

Лема 1. *Нехай відрізок $[v_1, v_2]$ не містить критичних значень, тоді $g^{-1}([v_1, v_2])$ гомеоморфно $g^{-1}(v_1) \times [0, 1]$.*

Лема 2. *Якщо півінтервал $[v_1, v_2]$ містить одне критичне значення, а відповідна критична точка є мінімумом, то $g^{-1}([v_1, v_2]) = g^{-1}((-\infty, v_2])$ гомеоморфно тривимірному напівдиску $D^3_- = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$, а функція g при цьому відповідає функції $g_h(x, y, z) = z$.*

Сідлові точки функції на поверхні F поділяються на два типи:

- 1) додатні, в яких поле градієнта функції g направлено всередину тіла;
- 2) від'ємні, в яких поле градієнта функції g направлено назовні тіла.

Лема 3. *Нехай відрізок (v_1, v_2) містить одне критичне значення, що відповідає додатній сідловій точці, тоді $g^{-1}(v_2)$ гомеоморфно $g^{-1}(v_1) \cup h_+$, а $g^{-1}((-\infty, v_2])$ гомеоморфно $g^{-1}((-\infty, v_1]) \cup H_+$. Тут h_+ – криволінійний $2n$ -кутник, що перетинається з межею $\partial g^{-1}(v_1)$ за n сторонами, серед яких нема сусідніх, індекс Пуанкаре критичної точки дорівнює $n-1$, $Int h_+ \cap Int g^{-1}(v_1) = \emptyset$. При цьому H_+ – той напівовал h_+ , який перетинається з $g^{-1}((-\infty, v_1])$.*

Наслідок. *Нехай відрізок (v_1, v_2) містить одне критичне значення, яке відповідає від'ємній критичній точці. Тоді $g^{-1}(v_2)$ гомеоморфно $g^{-1}(v_1) \setminus h_-$. Тут $h_- \subset g^{-1}(v_1)$ – двовимірний диск, що перетинається з межею $\partial g^{-1}(v_1)$ за n дугами з його межі, де n – індекс Пуанкаре критичної точки. При цьому $g^{-1}((-\infty, v_2])$ гомеоморфно $g^{-1}((-\infty, v_1])$.*

Розглянемо випадок додатньої точки індексу Пуанкаре 1. Тоді при її проходженні до межі рівня приклеюється чотирикутник за парою протилежних сторін, тобто смужка. Можливі 3 випадки такого приклеювання:

- 1) до однієї компоненти краю. У цьому випадку число компонент рівня не змінюється, а число компонент краю збільшується на 1, рід компонент не змінюється;
- 2) до різних компонентів краю, але однієї компоненти рівня. У цьому випадку рід цієї компоненти рівня збільшується на 1, інших не змінюється, число компонент рівня не змінюється, а компонент краю зменшується на 1;
- 3) до різних компонентів рівня. У цьому випадку число компонент рівня зменшується на 1, і число компонент краю також зменшується на 1, сумарний рід компонент не змінюється.

При проходженні додатньої критичної точки індексу n відбувається приклеїка $(2n+2)$ -кутника, що рівносильно приклеїці n чотирикутників. Таким чином, відбувається n змін числа компонент і сумарного роду, описаних у випадках 1) -3).

При проходженні від'ємної точки відбуваються зворотні зміни. Оскільки проходячи додатню точку не можна зменшити рід або збільшити число

компонент рівня або зменшити число компонент краю, не змінюючи сумарного роду і числа компонент рівня, то загальне число змін 1) -3), зроблених додатніми точками, дорівнює числу зворотних змін, зроблених від'ємними точками. Таким чином, суми індексів Пуанкаре відповідних точок однакові.

У [5] показано, що якщо існує продовження функції f на тривимірну область без критичних точок всередині області, то множину сідлових критичних точок можна розбити на дві частини так, що суми індексів Пуанкаре критичних точок у кожній з частин однакові.

У функції з одним сідлом, у якого індекс Пуанкаре не дорівнює 0, не існує продовження.

У функції з двома сідлами продовження існує, якщо їх індекси однакові. Топологічна класифікація таких продовжень отримана в роботі [4]. Існує функція на межі з трьома сідловими точками індексів 2, 4, 2, у якої регулярні рівні зв'язні та яка не має продовження всередину тіла. Для функцій Морса всі індекси Пуанкаре сідлових точок дорівнюють 1. Однак, існує функція з 4 сідлами, які лежать на одному рівні, яка не може бути продовжена всередину тіла.

2. Повний інваріант функції

Побудуємо спочатку повний топологічний інваріант функції на замкненій поверхні, який нам буде зручно доповнити до інваріанта функції на тривимірному тілі. Для цього задамо інваріанти функції в околах критичних рівнів, а потім вкажемо як ці околи треба склеювати, щоб отримати початкову поверхню. Фактично це узагальнення атомів та молекул, введенних А.Т.Фоменком для функцій Морса. Інші повні топологічні інваріанти функцій з ізольованими критичними точками побудовані в [3, 6, 8].

Якщо y – критичне значення функції, то окіл критичного рівня $f^{-1}([y - \epsilon, y + \epsilon])$ гомеоморфний циліндру $f^{-1}(y - \epsilon) \times [0, 1]$ з приклеєними $2n$ -кутниками по непарним сторонам. Позначимо компоненти рівня $f^{-1}(y - \epsilon)$ через $a^1, a^2, \dots, a^m$. Для кожного кола a^i виберемо напрямок обходу (якщо многовид орієнтований, то згідно орієнтації). Тоді занумеруємо послідовно всі середини непарних сторін $2n$ -кутників, що преклеюються до цього кола, позначивши їх середини буквами $a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i$.

Кола, що утворилися після приклейки $2n$ -кутників, як компоненти межі, позначимо через $b^1, b^2, \dots, b^l$. Вони відповідають компонентам рівня $f^{-1}(y + \epsilon)$. Виберемо на них орієнтацію та позначимо відповідні середини парних сторін $2n$ -кутників через b_j^i .

Для кожного $2n$ -кутника випишемо слово, що складається з літер a_j^i та b_j^i , обходячи послідовно середини його сторін. Тоді ці слова будуть задавати окіл критичного рівня і, з точністю до топологічної еквівалентності, функцію в ньому. Ці слова мають такі властивості:

- 1) букви a_j^i та b_j^i чергуються;
- 2) кожна буква міститься тільки в одному слові;

3) якщо в словах містяться фрагменти $a_k^i b_r^j$ та $b_q^p a_{k+1}^i$, то $p = j$ і а) $q = r - 1$ або б) $q = r + 1$. Випадок а) має місце, якщо орієнтації ребер, що містять a_k^i та b_r^j , узгоджені, інакше має місце випадок б).

Для побудови глобального інваріанта функції треба увести однаковий порядок на регулярних рівнях при впорядкуванні b^j попереднього критичного значення та a^i наступного критичного значення. Це означає, що ці b^j та a^i задають один і той самий регулярний рівень, якщо $i = j$. Тоді набір слів для кожного критичного рівня буде задавати повний топологічний інваріант функції на поверхні.

Для побудови повного інваріанта функції на тілі треба для кожного регулярного рівня відповідні букви розбити на групи. В одну групу попадають ті букви, що відповідають компонентам межі однієї компоненти рівня функції на тілі. Крім того, цій групі припишемо число, що дорівнює роду даної компоненти, взятому зі знаком "+" якщо вона орієнтована та "-" в іншому випадку. Зауважимо, що букви b^j та a^i можна задавати як ребра графа Ріба.

Визначення 1. Графом функції називається її орієнтований граф Ріба, для кожної вершини якого записано набір слів з ребер, інцидентних цій вершині, що задовольняють умовам 1)-3) і крім того, для кожного регулярного значення (яке дорівнює півсумі двох сусідніх критичних значень) множина ребер, що покриває це регулярне значення, розбита на групи та кожній групі приписано ціле число – її рід.

Визначення 2. Два графи функцій називаються еквівалентними, якщо існує ізоморфізм між їх графами Ріба, що зберігає орієнтацію ребер, розбиття на групи та їх рід і при заміні букв в словах при вершині першого графа на образи цих букв отримуються слова в образі вершини.

Визначення 3. Дві функції $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Теорема 1. *Дві функції на тілах топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли їх графи ізоморфні.*

Доведення. Необхідність. Якщо функції топологічно еквівалентні, то гомеоморфізм ϕ породжує еквівалентність графів функцій.

Достатність. Нехай графи функцій еквівалентні. Тоді за побудовою графів функцій відповідні компоненти регулярних рівнів будуть поверхнями з однаковим родом, типом орієнтованості та числом компонент межі. Отже, вони є гомеоморфними. Виберемо гомеоморфізми між ними, узгоджені з ізоморфізмом графів. Еквівалентність слів у вершинах забезпечує те, що ці гомеоморфізми регулярних рівнів і можуть бути продовжені на критичні рівні, а отже, і до шуканого гомеоморфізма всього многовида.

3. РЕАЛІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ ГРАФОМ

Для завершення топологічної класифікації функцій залишилося дослідити питання про те, яких значень може набувати побудований інваріант.

Розглянемо спочатку ситуацію коли на критичному рівні лежать всі внутрішні або всі зовнішні критичні точки. Такі рівні будемо називати внутрішніми та зовнішніми, відповідно.

Теорема 2. *Нехай G – орієнтований граф, для кожної вершини якого записано набір слів з ребер, інцидентних цій вершині, що задовольняють умовам 1)-3), і крім того, для кожного регулярного значення (яке дорівнює підсумі двох сусідніх критичних значень) множина ребер, що покриває це регулярне значення, розбита на групи та кожній групі приписано ціле число (рід групи). Граф G є графом функції тоді та тільки тоді, коли для кожного критичного рівня виконується умова: якщо критичні точки є додатними, то при зростанні значень функції всі підмножини, у яких є елементи відповідні ребрам, що входять у вершину v^j , після її проходження об'єднуються в одну підмножину. Нехай $g_1, \dots, g_m$ – роди початкових підмножин, а $k_1, \dots, k_m$ – число елементів в них. Тоді рід утвореної підмножини*

$$g = \sum_{i=1}^m g_i + \frac{1}{2}(\text{ind}(v^j) + \sum_{i=1}^m k_i - k - m).$$

Якщо точки є від'ємними, то при спаданні значення функції виконуються ті ж умови. При цьому підмножинам, що об'єднуються, будуть відповідати ті ребра, які виходять з відповідної вершини.

Доведення. Необхідність. Нехай G є графом функції. Тоді, як і раніше, $a^j = 1$ у додатних точках та $a^j = -1$ – у від'ємних. В одну підмножину входять ті компоненти, які утворюють край однієї компоненти поверхні рівня функції. Розглянемо додатну сідлову точку. Якщо її індекс дорівнює числу поверхонь, що об'єднуються, то утворюється одна нова поверхня, рід якої дорівнює сумі родів, а число компонент краю – сумі чисел компонент кожної підмножини мінус число підмножин плюс один. Якщо ж індекс більший за число поверхонь, то до об'єднання поверхонь приклеюються додаткові смужки. Кожна така смужка або збільшує число компонент краю на 1, не змінюючи роду, або зменшує число компонент на 1, збільшуючи при цьому рід на 1. Сформульоване правило задовольняє всім цим вимогам.

Достатність. Побудуємо деяке тривимірне тіло і функцію, граф якої збігається із заданим. Будуватимемо тіло послідовно, проходячи критичні значення функції від найменшого до найбільшого. При проходженні мінімуму маємо тривимірний напівдиск, як у лемі 2. Далі, при русі до наступного критичного значення, приклеюємо циліндр $D^2 \times [0, 1]$. Якщо наступна точка додатня сідлова, то приклеюємо H_+ , як у лемі 3, якщо від'ємна, то просто перерозіб'ємо межу отриманого об'єднання, як у наслідку з лем. Потім знову клеїмо циліндр і т.д. Наприкінці приклеюємо верхній напівдиск, що відповідає точці максимуму.

На кожному етапі ми отримуємо тривимірне тіло. Приклейка H_+ збільшує рід, решта приклейки не змінює його топологічного типу. В околах критичних точок функція задається стандартним чином, а на кожному

циліндри – це проекція на другий доданок у сумі з відповідною константою. Згладивши функцію на межі склеювань, отримаємо шукану функцію на тривимірному тілі. $\square$

Розглянемо випадок, коли на одному рівні лежать як внутрішні, так і зовнішні критичні точки. Збільшимо значення функції у зовнішніх критичних точках на однакову досить малу величину. Тоді між новим та старим критичним рівнем виникне регулярний рівень і ситуація зведеться до попередньої. Обернена процедура (злиття рівнів) завжди можлива оскільки зовнішні критичні точки можна опустити до рівня внутрішніх.

Наслідок. Нехай G – орієнтований граф, для кожної вершини якого записано набір слів з ребер, інцидентних цій вершині, що задовольняють умовам 1)-3), і крім того, для кожного регулярного значення (яке дорівнює півсумі двох сусідніх критичних значень) множина ребер, що покриває це регулярне значення, розбита на групи та кожній групі приписано ціле число (рід групи). Граф G є графом функції тоді та тільки тоді, коли для кожного критичного значення, що містить внутрішні та зовнішні критичні точки, можна відповідні вершини замінити парами вершин та ребрами, що їх з'єднують так, що утворений граф буде задовольняти умовам теореми 2.

Висновки

У роботі досліджені закономірності змін топологічних властивостей образу функції при проходженні критичних точок на межі тривимірного тіла. Отримана топологічна класифікація функцій без критичних точок на тривимірному тілі, обмеження яких на межу мають один локальний мінімумом і один локальний максимумом.

Отримані результати можуть бути застосовані як в топології, так і при вирішенні різних задач математичної фізики. Автори сподіваються, що отримані результати можна буде узагальнити на випадок функції з довільним числом локальних мінімумів і максимумів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кронрод А. С. О функциях двух переменных / А. С. Кронрод. // Успехи мат. наук. — 1950. — Вып. 5(35). — С. 24–134.
2. Кудрявцева Е. А. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты / Е. А. Кудрявцева // Матем. сборник. — 1999. — Т. 190 (3). — С. 29–88.
3. Лычак Д. П. Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками / Д. П. Лычак // Геометрія, топологія та їх застосування: зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 426–439.
4. Лукова Н. Функції без критичних точок на тривимірних многовидах з межею / Н. Лукова // Геометрія, топологія та їх застосування: зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т.6, №2. — С. 417–425.

5. Пришляк А. О. О продолжении функций на трехмерные многообразия / А. О. Пришляк, Е. А. Пришляк, Е. Н. Вятчанинова // Геометрія та топологія функцій на многовидах: зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2010. — Т. 7, №3. — С. 144–157.
6. Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В. В. Шарко // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, №5. — С. 687–700.
7. Burlet O. Realisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace $\mathbb{R}^3$ / O. Burlet, V. Haab // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. — 1985. — V. 300, №12. — P. 401–406.
8. Prishlyak A. O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface / A. O. Prishlyak // Topology and its appl. — 2002. — V. 119, №3. — P. 257–267.
9. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de Pfaff completement integrable ou de une function numerique / G. Reeb // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Academie des Sciences. — 1954. — V. 222. — P. 847–849.

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ ТА ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ,
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ.
ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 01.04.2010

УДК 517.988

О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. В. СЕМЕНОВ

РЕЗЮМЕ. Доказана слабая сходимость проксимального алгоритма решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами. Для алгоритма типа аппроксимации Браудера-Тихонова доказана теорема о сильной сходимости к нормальному решению двухуровневого вариационного неравенства.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные неравенства с монотонными операторами в последние 40 лет — один из центральных объектов изучения в прикладном нелинейном анализе. Принципиальные результаты здесь получены Ф. Браудером, Г. Минти, Ж.-Л. Лионсом, Р. Т. Рокафелларом, Р. И. Качуровским, М. М. Вайнбергом, М. И. Вишиком и другими математиками [1]–[6]. Многие задачи исследования операций, математической экономики, математической физики и др. могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено и исследовано большое количество алгоритмов [7]–[18].

Двухуровневые (двухэтапные) вариационные неравенства возникают как естественное обобщение задач лексикографической (последовательной) оптимизации с двумя критериями [19]–[22], а также при анализе обычных оптимизационных задач с ограничением в форме вариационного неравенства [23]. Как самостоятельный математический объект, двухуровневое вариационное неравенство в конечномерном случае рассматривалось в [24]. Разрешимости более общих n -уровневых вариационных неравенств и построению одноэтапных алгоритмов их решения посвящены работы [25, 26, 27]. Предложенные в цитируемых работах методы идейно связаны с методом скаляризации векторного критерия в классической задаче лексикографической оптимизации и методом штрафных функций.

Цель работы — доказательство при минимальных требованиях сходимости методов типа проксимального и А. Н. Тихонова решения двухуровневых вариационных неравенств.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порожденной им нормой $\|\cdot\|$. Пусть X — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H , A, B — монотонные хеминепрерывные операторы [2], действующие в пространстве H , $D(A) \cap D(B) \supseteq X$.

Рассмотрим вариационное неравенство

$$\text{найти } x \in X_B : (A(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X_B, \quad (1)$$

где X_B — множество решений вариационного неравенства

$$\text{найти } y \in X : (B(y), z - y) \geq 0 \quad \forall z \in X. \quad (2)$$

Замечание 1. При указанных условиях множество X_B и множество решений вариационного неравенства (1) — выпуклы и замкнуты (возможно пусты) [2].

Замечание 2. Пусть f, g — заданные на H , дифференцируемые по Гато и выпуклые функционалы, $A = f', B = g'$ — производные Гато функционалов f и g . Тогда неравенство (1) равносильно экстремальной задаче

$$f(x) \rightarrow \inf, x \in X_0,$$

где X_0 — множество решений задачи

$$g(x) \rightarrow \inf, x \in X. \quad (3)$$

В частности, при $f(x) = \|x\|^2$ имеем задачу поиска нормального (с минимальной нормой) решения задачи (3).

Зафиксируем последовательности положительных чисел (α_n) , (λ_n) и (ϵ_n) . Для решения задачи (1) используем следующую процедуру.

Алгоритм 1.

1. Задаем начальное приближение $x_1 \in X$, $n := 1$.
2. Находим элемент $x_{n+1} \in X$:

$$\lambda_n (\alpha_n A(x_{n+1}) + B(x_{n+1}), y - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}) \geq -\epsilon_n \quad \forall y \in X.$$

3. Полагаем $n := n + 1$, переходим на шаг 2.

Замечание 3. Введение последовательности (ϵ_n) моделирует неточность решения итерационных задач. При $\epsilon_n = 0$ вариационное неравенство из шага 2 имеет единственное решение, причем оператор $x \mapsto \lambda_n \alpha_n A(x) + \lambda_n B(x) + x$ — коэрцитивный [2].

Замечание 4. Алгоритм 1 относится к классу проксимальных методов решения вариационных задач [7, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Для задачи из замечания 2 алгоритм 1 при $\epsilon_n = 0$ имеет вид

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{x \in X} \left(\alpha_n f(x) + g(x) + \frac{1}{2\lambda_n} \|x - x_n\|^2 \right). \quad (4)$$

В случае $f(x) = \|x\|^2$ сходимость схемы (4) исследована в [29].

Описанный алгоритм имеет неявный характер. Используя для реализации шага 2 один из известных методов решения вариационных неравенств с монотонным оператором, приходим к явным методам.

2. СХОДИМОСТЬ ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Следующие ниже теоремы дают условия, гарантирующие справедливость соотношения

$$x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{слабо в } H,$$

где $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (1).

Теорема 1. Пусть $X_B \neq \emptyset$, функционал $x \mapsto (A(x), y - x)$ ограничен на X для всех $y \in X_B$. Предположим, что последовательности положительных чисел (α_n) , (λ_n) и (ϵ_n) удовлетворяют условия

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\alpha_n} = 0. \quad (5)$$

Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) слабо сходится к некоторому решению вариационного неравенства (2), причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\|x_{n+1} - x_n\| = o(\alpha_n)$. Тогда (x_n) слабо сходится к решению вариационного неравенства (1).

Замечание 5. Условие

$$\|x_{n+1} - x_n\| = o(\alpha_n)$$

носит технический характер (см. доказательство теоремы 2). Представляют интерес достаточные условия его выполнимости или нахождение иных более явных условий слабой сходимости (x_n) к решению вариационного неравенства (1).

3. АППРОКСИМАЦИЯ БРАУДЕРА-ТИХОНОВА РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВА (1)

Решения вариационного неравенства (1) будем приближать элементами $x_n \in X$, удовлетворяющими неравенства

$$(B(x_n), y - x_n) + \alpha_n (A(x_n), y - x_n) + \beta_n (x_n, y - x_n) \geq -\epsilon_n \quad \forall y \in X. \quad (6)$$

где (α_n) , (β_n) и (ϵ_n) — последовательности положительных чисел.

Неравенство (6) при $\epsilon_n = 0$ имеет единственное решение [2].

Для решения экстремальных задач подобная аппроксимация была предложена А. Н. Тихоновым [34] при построении регуляризующих алгоритмов. Ф. Браудер [35] применял схему (6) (при $A = 0$) для устойчивой аппроксимации нормального решения вариационного неравенства (2).

Теорема 3. Пусть вариационное неравенство (1) разрешимо, функционал $x \mapsto (A(x), y - x)$ ограничен на X для всех $y \in X_B$. Предположим, что последовательности положительных чисел (α_n) , (β_n) и (ϵ_n) удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\beta_n} = 0.$$

Если для определенной в (6) последовательности (x_n) и произвольного решения y вариационного неравенства (1) выполняется оценка

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(y), y - x_n) \leq 0, \quad (7)$$

то (x_n) сильно сходится к решению (1) с минимальной нормой.

Замечание 6. Условие (7) имеет место, когда (x_n) содержит подпоследовательность, принадлежащую множеству X_B .

Пусть P_X — оператор метрического проектирования на множество X , (γ_n) — последовательность положительных чисел. Для решения задачи (1) естественно использовать процедуру:

$$x_{n+1} = P_X (x_n - \gamma_n (B(x_n) + \alpha_n A(x_n) + \beta_n x_n)). \quad (8)$$

Любопытно, при каких условиях порожденная (8) последовательность сильно сходится к нормальному решению (1). Здесь полезным инструментом исследования является методика доказательства сходимости процедур итеративной регуляризации А. Б. Бакушинского [36].

Замечание 7. Для двухуровневых задач выпуклой оптимизации в гильбертовом пространстве несколько алгоритмов типа (8) предложено в сообщении [22] (конечномерная ситуация изучена в [21]).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Для произвольного $y \in X_B$ имеем

$$\lambda_n (\alpha_n A(x_{n+1}) + B(x_{n+1}), y - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}) \geq -\epsilon_n \quad (9)$$

и

$$(B(x_{n+1}), x_{n+1} - y) \geq 0. \quad (10)$$

Складывая (9) и (10), получим

$$\lambda_n \alpha_n (A(x_{n+1}), y - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}) \geq -\epsilon_n.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 - \|x_n - y\|^2 + \|x_{n+1} - x_n\|^2 &\leq 2\epsilon_n + \\ &+ 2\lambda_n \alpha_n (A(x_{n+1}), y - x_{n+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь мы использовали элементарное алгебраическое тождество

$$2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - y) = \|x_{n+1} - y\|^2 - \|x_n - y\|^2 + \|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

Применив к неравенству (11) лемму 1 из приложения, получим существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$ и сходимость ряда $\sum \|x_{n+1} - x_n\|^2$.

Последовательность (x_n) ограничена. Следовательно существует слабо сходящаяся к некоторому элементу $\bar{x} \in X$ подпоследовательность (x_{n_k}) . Из монотонности операторов A и B следует неравенство

$$\begin{aligned} & \alpha_{n_k-1} (A(x), x - x_{n_k}) + \frac{1}{\lambda_{n_k-1}} (x_{n_k} - x_{n_k-1}, x - x_{n_k}) + \frac{\epsilon_{n_k-1}}{\lambda_{n_k-1}} \geq \\ & \geq \alpha_{n_k-1} (A(x_{n_k}), x - x_{n_k}) + \frac{1}{\lambda_{n_k-1}} (x_{n_k} - x_{n_k-1}, x - x_{n_k}) + \frac{\epsilon_{n_k-1}}{\lambda_{n_k-1}} \geq \\ & \geq (B(x_{n_k}), x_{n_k} - x) \geq (B(x), x_{n_k} - x) \quad \forall x \in X. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая слабую сходимость подпоследовательности (x_{n_k}) к точке $\bar{x}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ перейдем в неравенстве (12) к пределу при $k \rightarrow \infty$. Получим

$$0 \geq (B(x), \bar{x} - x) \quad \forall x \in X.$$

Из леммы Минти (см. лемму 2 Приложения) следует, что $\bar{x} \in X_B$.

Докажем, что и вся последовательность (x_n) слабо сходится к точке $\bar{x}$. Рассуждаем от противного¹. Предположим, что (x_n) содержит подпоследовательность (x_{m_k}) , слабо сходящуюся к $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Ясно, что $\tilde{x} \in X_B$. Из существования пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{x}\|$, тождества

$$2(x_n - \bar{x}, \bar{x} - \tilde{x}) = \|x_n - \tilde{x}\|^2 - \|x_n - \bar{x}\|^2 - \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2$$

и слабой сходимости (x_{n_k}) к $\bar{x}$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \bar{x}, \bar{x} - \tilde{x}) = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{x}\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|^2$$

и

$$\|\tilde{x} - \bar{x}\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{x}\|^2$$

Откуда следует $\|\tilde{x} - \bar{x}\| = 0$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. В теореме 1 показано, что $x_n \rightarrow \bar{x} \in X_B$ слабо. Для произвольного $y \in X_B$ имеем

$$\begin{aligned} & (A(y), y - x_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} (x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}) + \frac{\epsilon_n}{\alpha_n \lambda_n} \geq (A(x_{n+1}), y - x_{n+1}) + \\ & + \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} (x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}) + \frac{\epsilon_n}{\alpha_n \lambda_n} \geq \frac{1}{\alpha_n} (B(x_{n+1}), x_{n+1} - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$(A(y), y - x_{n+1}) \geq -\frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \|x_{n+1} - x_n\| \cdot \|y - x_{n+1}\| - \frac{\epsilon_n}{\alpha_n \lambda_n}. \quad (13)$$

Переходя к пределу в (13), получаем

$$(A(y), y - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall y \in X_B.$$

¹Мы используем классическое рассуждение З. Опяла [37].

Следовательно, $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (1). Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Для произвольного решения $y \in X$ неравенства (2) и $x_n \in X$ имеем

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(y), y - x_n) + \|x_n\| \|y\| \geq \frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(x_n), y - x_n) + (x_n, y) \geq \|x_n\|^2 - \frac{\epsilon_n}{\beta_n}.$$

Откуда следует существование ограниченной, а значит и слабо сходящейся к некоторому элементу $\bar{x} \in H$ подпоследовательности (x_{n_k}) . В силу слабой замкнутости X имеем $\bar{x} \in X$.

Покажем, что $\bar{x} \in X_B$. Из монотонности операторов A и B следует неравенство

$$\begin{aligned} (B(x), x - x_{n_k}) + \alpha_{n_k} (A(x), x - x_{n_k}) &\geq \\ \geq (B(x_{n_k}), x - x_{n_k}) + \alpha_{n_k} (A(x_{n_k}), x - x_{n_k}) &\geq \\ \geq -\beta_{n_k} (x_{n_k}, x - x_{n_k}) - \epsilon_{n_k} \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Переходя к пределу получим

$$(B(x), x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

то есть, $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (2).

Рассмотрим для $y \in X_B$ неравенство

$$\begin{aligned} (A(y), y - x_{n_k}) &\geq (A(x_{n_k}), y - x_{n_k}) \geq \\ &\geq -\frac{1}{\alpha_{n_k}} (B(x_{n_k}), y - x_{n_k}) - \frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{n_k}} (x_{n_k}, y - x_{n_k}) - \frac{\epsilon_{n_k}}{\alpha_{n_k}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$(A(y), y - x_{n_k}) \geq -\frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{n_k}} (x_{n_k}, y - x_{n_k}) - \frac{\epsilon_{n_k}}{\alpha_{n_k}}. \quad (14)$$

Переходя в (14) к пределу, убеждаемся, что $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (1).

Покажем, что $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (1) с минимальной нормой. Пусть y — произвольное решение неравенства (1). Тогда

$$\begin{aligned} (y, y - x_{n_k}) + \frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}} (A(y), y - x_{n_k}) &\geq (x_{n_k}, y - x_{n_k}) + \\ + \frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}} (A(x_{n_k}), y - x_{n_k}) &\geq -\frac{1}{\alpha_{n_k}} (B(x_{n_k}), y - x_{n_k}) - \frac{\epsilon_{n_k}}{\alpha_{n_k}} \geq \frac{\epsilon_{n_k}}{\alpha_{n_k}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу с учетом $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(y), y - x_n) \leq 0$, получаем

$$(y, y - \bar{x}) \geq 0,$$

то есть $\bar{x}$ — решение вариационного неравенства (1) с минимальной нормой.

Из единственности решения с минимальной нормой следует

$$x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{слабо в } H.$$

Сильная сходимость последовательности (x_n) к $\bar{x}$ следуют из неравенства

$$\|x_n - \bar{x}\|^2 \leq \frac{\epsilon_n}{\beta_n} + (\bar{x}, \bar{x} - x_n) + \frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(\bar{x}), \bar{x} - x_n) + \frac{1}{\alpha_n} (B(\bar{x}), \bar{x} - x_n) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon_n}{\beta_n} + (\bar{x}, \bar{x} - x_n) + \frac{\alpha_n}{\beta_n} (A(\bar{x}), \bar{x} - x_n).$$

и уже доказанной слабой сходимости. Теорема доказана. $\square$

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены два вспомогательных факта.

Лемма 1. Пусть последовательности неотрицательных чисел (a_n) , (b_n) и (c_n) таковы, что $a_{n+1} - a_n + b_n \leq c_n$ ($n \in N$) и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in R$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Доказательство. Для произвольных m, n ($m > n$) имеем $a_m \leq a_n + \sum_{k=n}^{m-1} c_k$. Следовательно, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Из неравенства $\sum_{k=n}^{m-1} b_k \leq \sum_{k=n}^{m-1} c_k - a_{m+1} + a_n$ следует фундаментальность последовательности частичных сумм ряда $\sum b_n$. $\square$

Лемма 2 (Минти, [2]). Пусть X — выпуклое множество в H , оператор $B : X \rightarrow H$ монотонный и хеминепрерывный. Для фиксированного $x \in X$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $(B(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X;$
2. $(B(y), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Browder F. Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces / F. Browder, P. Hess // J. Funct. Anal. — 1972, 11:3. — P. 251—294.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — Москва: Мир, 1972. — 587 с.
3. Дюво Г. Неревенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — Москва: Наука, 1980. — 382 с.
4. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — Москва: Мир, 1988. — 510 с.
5. Байоки К. Вариационные и квазивариационные неравенства / К. Байоки, А. Капело. — Москва: Мир, 1988. — 448 с.
6. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.
7. Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm / R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1976, 14. — P. 877—898.
8. Bruck R.E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space / R.E. Bruck // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977, 61. — P. 159—164.
9. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. — Москва: Мир, 1979. — 576 с.
10. Рязанцева И.П. О решении вариационных неравенств с монотонными операторами методом регуляризации / И.П. Рязанцева // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1983. — 23, № 2. — С. 479—483.

11. Лисковец О.А. Регуляризация некоторых смешанных вариационных неравенств / О.А. Лисковец // ДАН СССР. — 1991, 317:2. — С. 300–304.
12. Pang G.S. A B-differentiable equation-based, globally and locally quadratically convergent algorithm for nonlinear programs, complementarity and variational inequality problems / G.S. Pang // Math. Progr. — 1991. — 51, № 1. — P. 101-131.
13. Пшеничный Б.Н. Метод решения вариационных неравенств / Б.Н. Пшеничный, М.У. Калжанов // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 6. — С. 48–55.
14. Patriksson M. Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach / M. Patriksson. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — xiv + 334 p.
15. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach / A. Nagurney. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — xxi + 325 p.
16. Панин В.М. Модели и методы конечномерных вариационных неравенств / В.М. Панин, В.В. Скопецкий, Т.В. Лаврина // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 47–64.
17. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities / I.V. Konnov. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.
18. Вихтенко Э.М. О методе решения полуконвективных вариационных неравенств, основанном на методе итеративной проксимальной регуляризации / Э.М. Вихтенко, Р.В. Намм // Изв. вузов. Матем. — 2004. — № 1. — С. 31–35.
19. Еремин И.И. О задачах последовательного программирования / И.И. Еремин // Сиб. мат. журн. — 1973. — 14, № 1. — С. 53–63.
20. Федоров В.В. Численные методы максимина / В.В. Федоров. — Москва: Наука, 1979. — 280 с.
21. Solodov M. An explicit descent method for bilevel convex optimization / M. Solodov // Journal of Convex Analysis. — 2007, 14. — P. 227–238.
22. Войтова Т.А. Ітераційні алгоритми для опуклих дворівневих задач оптимізації / Т.А. Войтова, А.А. Гриненко // III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика" (присвячена пам'яті академіка НАНУ І.І. Ляшка), Україна, Київ, 11 – 12 вересня 2009 року, Матеріали конференції, Київ, 2009. — С. 27.
23. Ye J.J. Necessary Optimality Conditions for Optimization Problems with Variational Inequality Constraints / J.J. Ye, X.Y. Ye // Mathematics of Operations Research. — 1997, Vol. 22, No. 4. — P. 977–997.
24. Калашников В.В. Решение двухуровневого вариационного неравенства / В.В. Калашников, Н.И. Калашникова // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 178-180.
25. Коннов И.В. О системах вариационных неравенств / И.В. Коннов // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 12. — С. 79–88.
26. Попов Л.Д. Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств / Л.Д. Попов // Изв. вузов. Матем. — 1998. — № 12. — С. 71–81
27. Попов Л.Д. Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения / Л.Д. Попов // Математическое программирование. Регуляризация и аппроксимация, Сборник статей. — Тр. ИММ. — 2002. — 8, № 1. — С. 103–115.

28. Martinet B. Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives / B. Martinet // *Rev. Francaise Informat. Recherche Operationelle*. — 1970, 4. — P. 154-159.
29. Васильев Ф.П. Регуляризованный проксимальный метод для выпуклых задач минимизации / Ф.П. Васильев, О. Обрадович // *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко*. — Тр. МИАН. — 1995, 211. — С. 131-139.
30. Антипин А.С. Равновесное программирование: проксимальные методы / А.С. Антипин // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1997. — 37, № 11. — С. 1327–1339.
31. Attouch H. A New Class of Alternating Proximal Minimization Algorithms with Costs-to-Move / H. Attouch, P. Redont, A. Soubeyran // *SIAM J. Optim.* — 2007. — Vol. 18, No. 3. — P. 1061–1081.
32. Nguyen Buong Regularization inertial proximal point algorithm for unconstrained vector convex optimization problems / Buong Nguyen // *Український математичний журнал*. — 2008. — 60, № 8. — С. 1275–1281.
33. Семенов В.В. Метод параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации / В.В. Семенов // *International Workshop "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2009) Abstracts, October 5-9, 2009, Kamyanets-Podilsky, Ukraine*. — P. 107-108.
34. Тихонов А.Н. Об устойчивости задач оптимизации функционалов / А.Н. Тихонов // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1966. — 6, № 4. — С. 631–634.
35. Browder F. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities / F. Browder // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. — 1966. — V. 56, № 4. — P. 1080–1086.
36. Бакушинский А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. — Москва: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
37. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings / Z. Opial // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967, 73. — P. 591–597.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601, УКРАИНА.

Поступила 10.06.2010

УДК 517.9

СВЯЗАННАЯ С ГИС ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ БОЛЬШИХ ТЕРРИТОРИЙ

О. Б. СТЕЛЯ

РЕЗЮМЕ. Приведено описание программно-моделирующего комплекса для изучения планового потока грунтовых вод. Программный комплекс состоит из: блока, реализующего численные методы решения краевых задач для моделирования потока грунтовых вод; графического пользовательского интерфейса для введения исходных данных и их хранения в файлах специальной структуры; блока для связи с географической информационной системой. Приведен пример использования для оросительной системы юга Украины.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительную экологическую проблему в Украине представляет подтопление сельскохозяйственных угодий и населенных пунктов. Одной из причин, которые вызывают подтопление, является подъем грунтовых вод в районах с интенсивным орошением. Значительное подтопление наблюдается также вдоль каскада днепровских водохранилищ. Мерами борьбы с подтоплением является дренаж и оптимизация ирригационной практики. Мировой опыт решения подобных задач основывается на использовании математического моделирования [1]. Методы математического моделирования позволяют рассчитывать многолетнюю динамику грунтовых вод и оптимизировать схемы дренажа в сложных гидрогеологических условиях. В данной работе приведено описание программно-моделирующего комплекса, основанного на математической модели потока грунтовых вод в плане для связанных перетоками водоносных горизонтов. Сравнение различных моделей течения грунтовых вод содержится в работе [2].

В настоящее время существуют различные пакеты программ для геофильтрационного моделирования. Наиболее популярными на рынке программного обеспечения являются пакеты Visual Modflow и Feflow. Основой для Visual Modflow [3] является программа, реализующая метод конечных разностей для фильтрационной модели Modflow [4]. В основу Feflow положен метод конечных элементов для трехмерной модели влагопереноса [5]. Разработанная компанией Геолинк Консалтинг программная система ModTech [6] для моделирования процессов геофильтрации и массопереноса в подземной гидросфере кроме своих разработок использует также вычислительные методы пакета Modflow.

Вместе с тем сложность рассматриваемых задач и их постоянно возрастающая практическая востребованность приводит к необходимости новых исследований в области разработки методов и алгоритмов решения математических задач и создания программных средств, ориентированных на широкий круг пользователей.

Особенностью данной разработки есть ее направленность на решение плановых задач потока грунтовых вод для больших территорий со сложными гидрогеологическими условиями, требующими введения значительных объемов информации, представленной в картографическом и табличном виде. Для удобного введения исходной информации разработан графический пользовательский интерфейс.

В статье приведен пример использования программного комплекса KRISFLOW для моделирования динамики грунтовых вод на территории Краснознаменской оросительной системы, расположенной в Херсонской области.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положенная в основу моделирующего комплекса математическая модель должна учитывать всю сложность питания водоносных горизонтов, источниками которого являются потери на фильтрацию из каналов различного назначения, питание грунтовых вод за счет орошения, осадки, отбор грунтовых вод дренажными скважинами, возможный переток между горизонтами. Также должны учитываться такие объекты, как расположенные внутри области водоемы и различные условия на границе области.

Используемая математическая модель основана на системе уравнений, которые описывают нестационарный плановый поток грунтовых вод в связанных между собой водоносных горизонтах:

$$S_1(x) \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_1(x) b_1(x, u_1(x, t)) \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x_i} \right) - \sum_{m=1}^p q_m(t) \delta(x - r_m) + \sigma(x)(u_2(x, t) - u_1(x, t)) + W(x, t), \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \setminus \sum_{l=1}^{n_1} \bar{\Xi}_l, 0 < t \leq T,$$

$$S_2(x) \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_2(x) b_2(x) \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x_i} \right) + \sigma(x)(u_1(x, t) - u_2(x, t)), \quad (2)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega_2, 0 < t \leq T,$$

где $u_1(x, t)$ – гидравлический напор безнапорного горизонта, $k_1(x)$ – коэффициент фильтрации безнапорного горизонта, $S_1(x)$ – коэффициент водоотдачи или эффективная пористость (коэффициент влагоемкости),

$b_1(x, u_1(x, t))$ – толщина насыщенной части пласта, q_m – объем воды, который отбирается m -той дренажной скважиной ($0 \leq q_m(t) \leq Q$), $\delta(x - r_m)$ – дельта-функция Дирака в точке r_m , точки $x = r_m$, $m = \overline{1, p}$ определяют положение дренажных скважин в области, $W(x, t)$ определяет суммарное поступление влаги на свободную поверхность грунтовых вод, $\sigma(x) = k_0(x)/b_0(x)$ ($k_0(x)$ – коэффициент фильтрации слабопроницаемого разделяющего слоя, $b_0(x)$ – его толщина), $u_2(x, t)$ – гидравлический напор напорного горизонта, $S_2(x)$ – коэффициент влагоемкости, $k_2(x)$ – коэффициент фильтрации напорного горизонта, $b_2(x)$ – мощность водоносного горизонта.

На границе области Ω_1 задаются условия $u_1(x, t) = g(x, t)$, $k_1(x)b_1(x, u_1(x, t))\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial n} = R(x, t, u_1)$, где n – вектор внешней нормали к границе области. Аналогичные условия задаются на границе области Ω_2 . Для уравнений (1), (2) задаются следующие начальные условия

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad x \in \overline{\Omega}_1, \quad u_2(x, t) = \varphi_2(x, t), \quad x \in \overline{\Omega}_2, \quad t = 0.$$

Внутренние поверхностные водоемы, содержащиеся в области моделирования, обозначены Ξ_l , а их границы – $\partial \Xi_l$, $l = \overline{1, n_1}$. На этих границах задаются условия $u_1(x, t) = g_l(t)$, $x \in \partial \Xi_l$, $l = \overline{1, n_1}$, где $g_l(t)$ соответствует отметке поверхности воды в l -м водоеме.

Для решения краевой задачи используется метод конечных разностей [7, 8].

3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА И ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА

При построении программного комплекса использован опыт создания алгоритмов и программного обеспечения для задач подземного массопереноса [9]. Работа является развитием исследований по построению математических моделей и программного обеспечения для задач гидрогеологии [10, 11]. Разработанный программный комплекс KRISFLOW предназначен для решения плановых задач со значительными объемами вводимой информации. Введение такой информации требует согласования исходных данных различного характера, представленных в табличном и картографическом виде. Данный программный комплекс ориентирован на использование на больших ирригационных системах для оптимизации их функционирования. В связи с этим, модель требует введения данных по распределению орошаемых площадей с нормами полива на них, данных о расположении каналов различного назначения с объемами потерь на фильтрацию из них, о расположении дренажных скважин с объемами откачки, данных о расположении наблюдательных скважин с результатами наблюдений за уровнем грунтовых вод и др.

Характер и структура информации необходимой для функционирования модели определили архитектуру программного комплекса, состоящего из трех блоков:

1. Блока, реализующего численные методы решения краевых задач для моделирования потока грунтовых вод.

2. Графического пользовательского интерфейса для введения исходных данных и их хранения в файлах специальной структуры.
3. Программного блока для связи с географической информационной системой (ГИС).

Программные средства графического интерфейса позволяют настраивать модель на исследуемый объект. Работа с графическим интерфейсом является интуитивно понятной и описана в руководстве пользователя. С помощью экранных форм вводимые данные структурируются и записываются в файлы для дальнейшего использования блоком решения краевых задач и ГИС для их отображения на карте. Данные, хранимые в файлах, непосредственно привязываются к дискретной модели (расчетной разностной сетке) на цифровой карте объекта. Пример экранной формы приведен на рис. 1. Форма предназначена для задания оросительных каналов, их административной принадлежности и информации по объемам потерь воды на фильтрацию. Каналы задаются номерами узлов сетки. Номера узлов могут задаваться как вручную, так и автоматизированно с помощью нажатия стрелок в направлении смещения на карте в нужный узел дискретной модели.

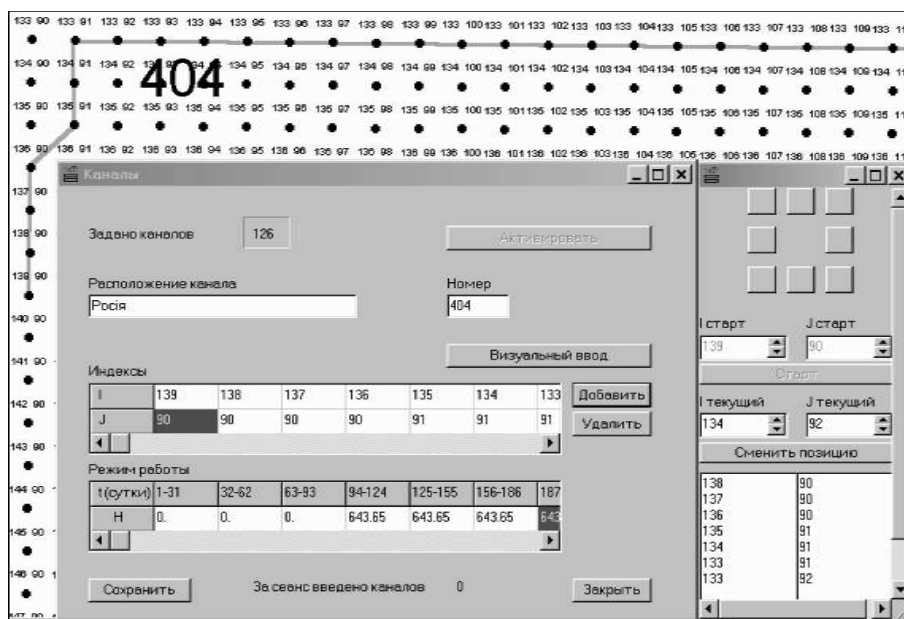


Рис 1. Узлы дискретной модели на карте объекта и экранная форма для задания потерь на фильтрацию из оросительных каналов.

После ввода с помощью экранной формы и записи данных в файл они могут автоматически отображаться на цифровой карте в ГИС. Таким образом ГИС используется, как на начальном этапе для привязки модели к исследуемой области, введения координатно-привязанных данных в модель и их контроля, так и на этапе отображения результатов моделирования

и автоматизированного построения тематических карт по результатам расчетов.

Данные для динамического построения карт хранятся в файлах специальной структуры, формируемых с помощью пользовательского интерфейса. В ГИС в автоматизированном режиме строятся такие слои цифровой карты, как узлы разностной сетки, граница области моделирования, дренажные скважины, наблюдательные скважины системы мониторинга, оросительные каналы, орошаемые поля, поверхностные водоемы и др.

Программный комплекс позволяет в автоматическом режиме отображать результаты моделирования на цифровой карте в виде абсолютных отметок поверхности грунтовых вод или в виде тематических карт глубин залегания грунтовых вод, данные мониторинга, а также графическую и атрибутивную информацию используемую в модели. Такие карты удобны с точки зрения анализа ситуации на объекте моделирования и принятия решений.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Изучаемая с помощью модели территория расположена в Херсонской области Украины на территории Краснознаменской оросительной системы. Для моделирования выбрана западная ее часть общей площадью около 460 квадратных километров. Такой выбор обоснован тем, что применяемая на ней сельскохозяйственная и ирригационная практика характерна для юга Украины, а область моделирования имеет хорошо выраженные гидрогеологические границы представленные Краснознаменским каналом (с севера и северо-востока) и берегом Черного моря (с юга). С другой стороны изучаемая область имеет слабую естественную дренированность земель и требует постоянных мероприятий по искусственному водопонижению. Целью исследования являлось моделирование уровня грунтовых вод в зависимости от распределения орошения по полям и работы дренажной системы. Результаты моделирования использовались для оценки эффективности существующего дренажа, оценки целесообразности введения в эксплуатацию дополнительных дренажных скважин, анализа развития ситуации в долгосрочном прогнозе.

Для ввода исходных данных в модель использовались такие слои цифровой карты как: дренажные скважины, орошаемые поля, поверхностные водоемы, каналы различного назначения с делением по типу покрытия, а также скважины системы мониторинга.

С картографическими объектами связаны файлы с различной атрибутивной информацией. Так, например, для дренажных скважин в файле содержится для каждой скважины: номер скважины, наименование населенного пункта, в котором она расположена, индексы узла разностной сетки, с которым она совпадает, ежесуточный дебит.

Для визуализации результатов моделирования и принятия решения использовались слои карты с населенными пунктами, коммуникациями, береговой линией Черного моря, границей области моделирования.

При решении задачи применялась равномерная сетка с величиной ячейки 100x100 метров, что привело к 46525 расчетным узлам. Размеры ячейки сетки выбирались исходя из точности используемых для моделирования данных. Слой карты с узлами разностной сетки строится динамически и используется для введения исходных данных и отображения результатов моделирования в цифровом виде. При расчетах использовался временной шаг 0.5 суток. На вертикальных участках, ограничивающих область с запада и востока, заданы однородные условия второго рода, на участках границы вдоль магистрального канала и берега моря – условия первого рода, интерполированные по данным наблюдений за уровнем грунтовых вод. Были заданы: пространственное и временное распределение орошения по хозяйствам, осадки, расположение каналов и объемы потерь из них, а также объемы и режим откачки дренажными скважинами. Калибровка модели осуществлялась на протяжении трех лет. В процессе калибровки с помощью математического моделирования влагопереноса были уточнены объемы питания грунтовых вод за счет орошения, а также потери на фильтрацию из каналов [12]. Утечки из каналов могут давать значительный вклад в повышение уровня грунтовых вод территории. Для определения потерь на фильтрацию из каналов использована модель влагопереноса на основе уравнения Ричардса

$$\frac{\partial \theta(x, u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} \right),$$

где $u(x, t)$ – напор, $\theta(x, u)$ – влажность грунта, $k(x, u)$ – коэффициент влагопроводности, x_1, x_2 изменяются в плоскости перпендикулярной оси канала.

Уравнение влагопереноса решалось при начальном и краевых условиях, учитывающих фильтрационные характеристики дна и стенок канала и уровень воды в канале. Алгоритм численного решения краевых задач базируется на их конечноразностной аппроксимации с дальнейшим применением итерационных методов для решения нелинейных систем разностных уравнений. Были проведены расчеты для различных типов грунтов и при различном расстоянии от дна канала до свободной поверхности грунтовых вод.

Полученный модельным путем уровень грунтовых вод (УГВ) сравнивался с измеренным в наблюдательных скважинах системы мониторинга. Результаты калибровки приведены на рис. 2. Время моделирования составляло один год, при этом рассчитанные уровни грунтовых вод использовались в качестве исходных данных при моделировании на следующий год.

Тематическая цифровая карта с областью моделирования и, построенными в автоматическом режиме, глубинами залегания грунтовых вод приведена на рис. 3. Прогнозные расчеты позволили оценить эффективность работы вертикального дренажа при изменении объемов и площадей орошения.

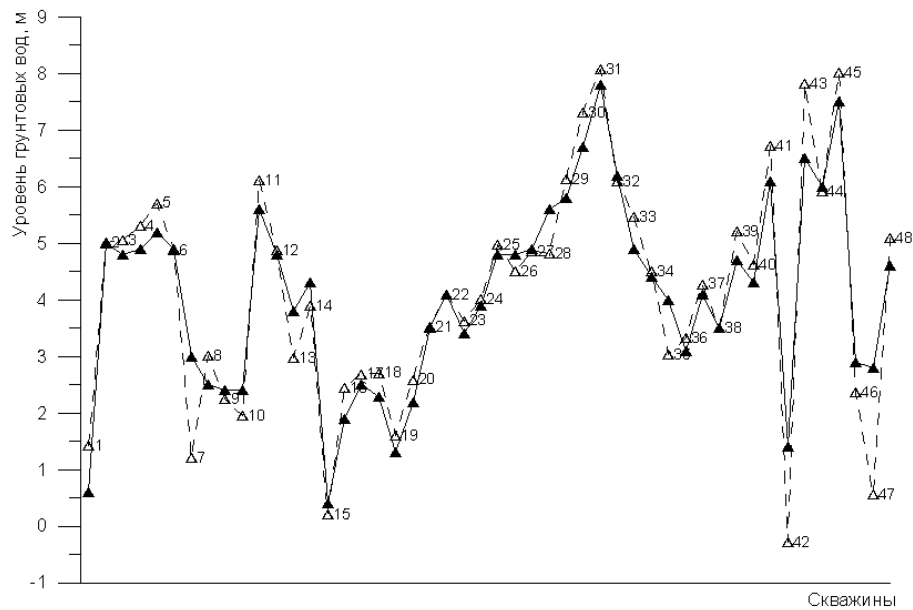


Рис 2. Результаты калибровки по 48 скважинам. Сплошные отметки – УГВ в наблюдательных скважинах, контурные – УГВ, полученный путем моделирования.

5. ОПТИМИЗАЦИЯ ДРЕНАЖА

Представленная модель может служить основой для оптимизации дренажа в отдельных населенных пунктах. Для определения оптимального режима дренажа необходимо найти зависящий от времени объем отбора воды каждой из m дренажных скважин, при котором функция $u_1(x, t)$ в некоторой заданной подобласти (участке на котором требуется понижение уровня грунтовых вод) $\bar{\Omega}_0 \in \Omega \in \Omega_1$ будет наиболее близка к функции $H(x) = R(x) - H_0$, где $R(x)$ – функция рельефа в $\bar{\Omega}_0$, H_0 – заданная константа. Задача сводится к поиску минимумов функционала:

$$J(q) = \int_0^T \int_{\bar{\Omega}_0} (u_{1q}(x, t) - H(x))^2 dx dt.$$

Минимум функционала находится при условии, что функция $u_{1q}(x, t)$ удовлетворяет краевой задаче для уравнения (1) при заданных функциях $q_m(t)$, $m = \overline{1, p}$. При этом принимается, что $\sigma = 0$, а в качестве краевых условий для задачи оптимизации используются напоры на границе выбранного фрагмента, вычисленные по модели KRISFLOW (рис. 4). Алгоритм решения задачи и результаты расчетов приведены в работе [13].

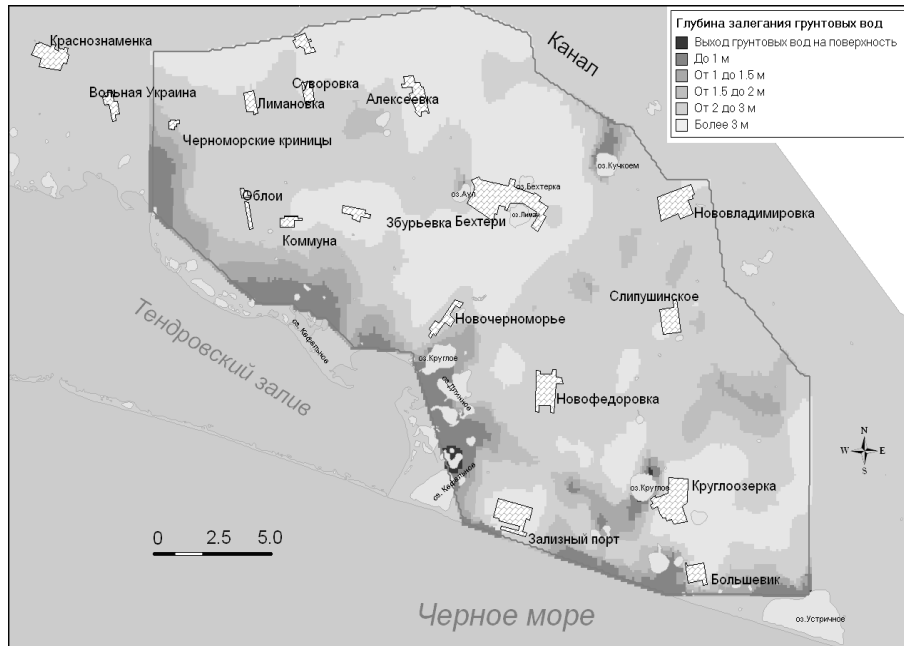


Рис 3. Фрагмент цифровой карты с найденными, путем моделирования, глубинами залегания грунтовых вод.

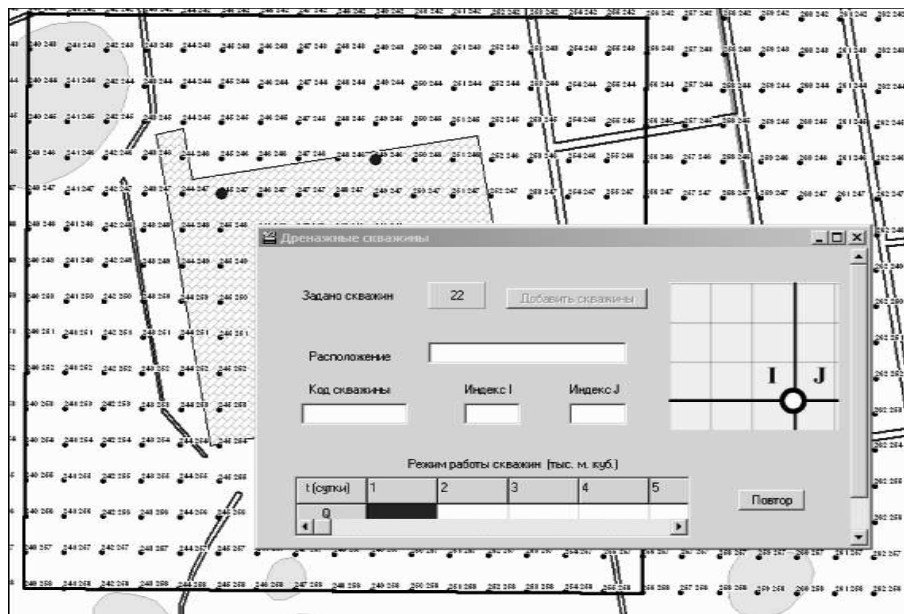


Рис 4. Выделенный фрагмент области для оптимизации дренажа населенного пункта с открытой экранной формой для ввода данных для дренажных скважин.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показало хорошую применимость математического моделирования для изучения и прогнозирования планового потока грунтовых вод для больших областей, таких как ирригационные системы. Использование ГИС и базы данных позволило с необходимой точностью задавать в модели различные условия и разнообразные объекты, влияющие на режим грунтовых вод. Полученные результаты позволяют надеяться на успешное применение разработанной методики на других оросительных системах. Программный комплекс имеет модульную структуру и может дополняться другими модулями для расчета переноса грунтовыми водами различных загрязнений.

Модель легко настраивается на объект моделирования и позволяет учитывать сложную конфигурацию границы области, перетекание из нижнего водоносного горизонта, распределенные и сосредоточенные источники.

Программный комплекс хорошо приспособлен для создания схем дренирования подтопленных участков населенных пунктов, расположенных на берегах рек и вблизи искусственных водохранилищ, оросительных систем, промышленных зон, в зонах влияния отстойников промышленных стоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gleeson T. Regional groundwater flow in mountainous terrain: Three-dimensional simulations of topographic and hydrogeologic controls / T. Gleeson, A. H. Manning // *Water Resour. Res.* — 2008. — V. 44, №10, — W10403.
2. Крукиер Л. А. Сравнение моделей гравитационного режима течения грунтовых вод / Л. А. Крукиер, И. В. Шевченко // *Математическое моделирование.* — 2002. — Т. 14, №2. — С. 51–60.
3. Visual MODFLOW [Электронный ресурс] / Schlumberger Limited — Режим доступа: <http://www.sws technology.com/groundwater-software/groundwater-modeling/visual-modflow>, свободный. — Загл. с экрана.
4. MODFLOW [Электронный ресурс] / U. S. Geological Survey — Режим доступа: <http://water.usgs.gov/nrp/gwsoftware/modflow.html>, свободный. — Загл. с экрана.
5. Zheng Ch. FEFLOW: A Finite-Element Ground Water Flow and Transport Modeling Tool / Chunmiao Zheng // *Ground Water.* — 2007. — V. 45, Issue 5. — P. 525–528.
6. Программная система ModTech [Электронный ресурс] / ЗАО "Геолинк Консалтинг— Режим доступа: <http://www.geolink-consulting.ru/products/modtech/>, свободный. — Загл. с экрана.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 614 с.
8. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М.: Наука, 1978. — 589 с.
9. Функциональное наполнение пакета прикладных программ ФСП-ОС / [Ляшко И. И., Демченко Л. И., Лычман В. В., Мистецкий Г. Е., Стеля О. Б. и др.] // *Пакеты прикладных программ. Вычислительный эксперимент.* — М.: Наука, 1983. — С. 139–145.

10. Стеля О. Б. Комбінована тривимірна модель потоку та транспорту забруднень в насичено-ненасичених пористих середовищах / О. Б. Стеля, Л. П. Стеля // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 1997. — №4. — С. 195–205.
11. Стеля О. Б. Математичне моделювання в системі моніторингу майданчика об'єкта "Вектор"(30-км зона ЧАЕС) / О. Б. Стеля, М. С. Ходорівський // Волинський математичний вісник. — 1998. — №5. — С. 134–138.
12. Стеля О. Б. Визначення фільтраційних втрат з каналів / О. Б. Стеля, Є. С. Вакал, А. С. Тригуб // Тези доповідей Міжнародної математичної конференції ім. В. Я. Скоробогатка, 24–28 вересня 2007, Дрогобич, Україна, — С. 46.
13. Стеля О. Б. Визначення режиму дренажу як розв'язку оберненої задачі нестационарного потоку ґрунтових вод / О.Б. Стеля // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2009. — № 98. — С. 77–84.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ул. Владимирская, 64, КИЕВ, 01601,
УКРАИНА.

Поступила 23.07.2010

УДК 519.8

БИНАРНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ МНОГОГРАННИК И ЕГО АППРОКСИМАЦИИ

П. И. Стецюк¹, Н. Ю. Золотых

РЕЗЮМЕ. В работе введен бинарный квадратичный многогранник $BiQP_n$ для описания множества допустимых решений в задаче нахождения экстремума квадратичной функции от n бинарных ± 1 -переменных. Построено семейство многогранников, заданных с помощью семейств линейных неравенств, и показано, что они аппроксимируют сверху многогранник $BiQP_n$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы, связанные с задачами минимизации (максимизации) квадратичных функций от булевых $(0 - 1)$ или бинарных $(-1, 1)$ переменных. В общем случае эти задачи являются NP -трудными. Так, например, к ним сводятся такие NP -трудные задачи из теории графов, как задача о максимальном независимом множестве вершин графа и задача об максимальном взвешенном разрезе графа [1].

Для описания множества допустимых решений в задаче нахождения экстремума квадратичной функции от n бинарных переменных введен бинарный квадратичный многогранник $BiQP_n$ (раздел 5) и сделано это по аналогии с булевым квадратичным многогранником Падберга [2]. Для аппроксимации сверху многогранника $BiQP_n$ построено семейство многогранников с конечным количеством линейных неравенств (раздел 6). В основу положено свойство нечетного количества ± 1 (раздел 1) и вытекающие из него квадратичные неравенства для четного и нечетного количества бинарных переменных (разделы 2, 3). В разделе 4 описано применение этих неравенств в бинарных и булевых квадратичных задачах, для которых они и были предложены в [3, 4].

1. НЕЧЕТНОЕ КОЛИЧЕСТВО ± 1

Пусть последовательность $l(k) = (l_1, \dots, l_k)$ состоит из $k \geq 2$ бинарных (± 1) чисел. Условимся ее называть бинарной последовательностью и будем использовать для нее еще и такое обозначение $l \in \{-1, 1\}^k$. Будем различать нечетной длины бинарную последовательность $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ и четной длины бинарную последовательность $l(2r) = (l_1, \dots, l_{2r})$. Здесь $r = 1, 2, 3, \dots$ — натуральные числа.

¹Работа поддержана совместным украинско-российским проектом ДФФД Украины — Ф28.1/005 и РФФИ — 09-01-90413-Укр.

Лемма 1. Для произвольной нечетной длины бинарной последовательности $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ всегда справедливо квадратичное неравенство:

$$S_{2r+1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{2r+1} l_i \right)^2 = (l_1 + l_2 + \dots + l_{2r+1})^2 \geq 1. \quad (1)$$

Для заданного r количество всех возможных квадратичных неравенств (1) равно 4^r .

Доказательство. Легко видеть, что для нечетной длины бинарной последовательности $l(2r+1)$ сумма всех ее членов $S_{2r+1} = l_1 + l_2 + \dots + l_{2r+1}$ не может быть равна нулю, так как S_{2r+1} получается в результате суммирования нечетного количества ± 1 . Самые близкие к нулю целые значения суммы S_{2r+1} такие: $S_{2r+1} = 1$, когда ровно $(r+1)$ произвольных членов последовательности $l(2r+1)$ равны $+1$, а оставшиеся r ее членов равны -1 ; $S_{2r+1} = -1$, когда ровно r членов последовательности $l(2r+1)$ равны $+1$ и оставшиеся $(r+1)$ ее членов равны -1 .

Следовательно, для бинарной последовательности $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ всегда справедливо следующее квадратичное неравенство:

$$S_{2r+1}^2 = (l_1 + l_2 + \dots + l_{2r+1})^2 \geq (\pm 1)^2 = 1,$$

что доказывает неравенство (1).

Для заданного r количество последовательностей $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ равно $2^{2r+1} = 2 \cdot 4^r$. Однако, последовательность $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ и последовательность $l'(2r+1) = (-l_1, \dots, -l_{2r+1})$ дают одно и то же неравенство (1). Следовательно, для заданного r количество всех возможных неравенств вида (1) равно 4^r . $\square$

2. КВАДРАТИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ БИНАРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть имеется вектор-строка $y = (y_1, \dots, y_k)$, которая состоит из k бинарных (± 1) переменных. Будем различать векторы $y \in \{-1, 1\}^{2r+1}$ с нечетным количеством бинарных переменных и векторы $y \in \{-1, 1\}^{2r}$ с четным количеством бинарных переменных, где $r = 1, 2, \dots$ — натуральные числа.

Лемма 2. Для нечетного количества бинарных переменных $y \in \{-1, 1\}^{2r+1}$, $r = 1, 2, \dots$ и произвольной нечетной длины бинарной последовательности $l(2r+1) = (l_1, \dots, l_{2r+1})$ справедливо квадратичное неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{2r+1} l_i y_i \right)^2 \geq 1 \quad \text{или его аналог} \quad \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_i y_j \geq -r. \quad (2)$$

Для четного количества бинарных переменных $y \in \{-1, 1\}^{2r}$, $r = 1, 2, \dots$, $l_0 = \pm 1$ и произвольной четной длины бинарной последовательности $l(2r) = (l_1, \dots, l_{2r})$ справедливо квадратичное неравенство

$$\left(l_0 + \sum_{i=1}^{2r} l_i y_i \right)^2 \geq 1 \quad \text{или его аналог} \quad \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_i y_j \geq -r. \quad (3)$$

Для заданного r количество всех возможных квадратичных неравенств как вида (2), так и вида (3), равно 4^r .

Доказательство. Первое неравенство в (2) следует из леммы 1, если ее применить к нечетной длины бинарной последовательности $l'(2r+1) = (l'_1, \dots, l'_{2r+1})$, члены которой получены по правилу: $l'_i = l_i y_i$, $i = 1, \dots, 2r+1$. Учитывая, что $l_i^2 = 1$ и $y_i^2 = 1$ для всех $i = 1, \dots, 2r+1$, правую часть первого неравенства из (2) можно записать так:

$$\left(\sum_{i=1}^{2r+1} l_i y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{2r+1} l_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_i y_j = 2r+1 + 2 \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_i y_j.$$

Тогда первое неравенство в (2) можно переписать следующим образом

$$2r+1 + 2 \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_i y_j \geq 1 \quad \text{или} \quad 2 \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_i y_j \geq -2r,$$

откуда, после деления на 2, получаем второе квадратичное неравенство в (2).

По аналогичной схеме доказывается и (3). Так, первое неравенство в (3) следует из леммы 1, если ее применить к нечетной длины бинарной последовательности $l'(2r+1) = (l'_1, \dots, l'_{2r+1})$, члены которой получены по правилу: $l'_1 = l_0$ и $l'_{i+1} = l_i y_i$, $i = 1, \dots, 2r$. Учитывая, что $l_0^2 = 1$, $l_i^2 = 1$ и $y_i^2 = 1$ для всех $i = 1, \dots, 2r$, правую часть первого неравенства из (3) можно записать так:

$$\begin{aligned} \left(l_0 + \sum_{i=1}^{2r} l_i y_i \right)^2 &= l_0^2 + \sum_{i=1}^{2r} l_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + 2 \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_i y_j \\ &= 2r+1 + 2 \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + 2 \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_i y_j. \end{aligned}$$

Тогда первое неравенство в (3) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} 2r+1 + 2 \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + 2 \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_i y_j &\geq 1, \\ 2 \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + 2 \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_i y_j &\geq -2r, \end{aligned}$$

откуда, после деления на 2, получаем второе квадратичное неравенство из (3).

Для одного и того же r ($r = 1, 2, 3, \dots$) квадратичным неравенствам (2) и (3) соответствуют пусть и различные, но одинаковой длины нечетные последовательности $l'(2r+1) = (l'_1, \dots, l'_{2r+1})$. Поэтому, для заданного r количество всевозможных квадратичных неравенств как вида (2), так и вида (3) равно 4^r (следует из леммы 1). $\square$

3. ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ СЕМЕЙСТВ КВАДРАТИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Приведем полные семейства квадратичных неравенств, которые следуют из леммы 2, для двоек и троек бинарных переменных (им соответствует $r = 1$), четверок и пятерок бинарных переменных (им соответствует $r = 2$). Для удобства будем рассматривать бинарные переменные y_i, y_j, y_k, y_l, y_m , т.е. каждой бинарной переменной от первой до пятой припишем свой отдельный индекс.

Полные семейства квадратичных неравенств для двоек и троек бинарных переменных содержат по 4 различных неравенства. Для двоек бинарных переменных полное семейство квадратичных неравенств следует из (3) при $r = 1$ и включает неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} (+1 + y_i + y_j)^2 \geq 1, \\ (-1 + y_i + y_j)^2 \geq 1, \\ (+1 - y_i + y_j)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i - y_j)^2 \geq 1, \end{array} \right. \quad \text{или их аналоги} \quad \left\{ \begin{array}{l} +y_i + y_j + y_i y_j \geq -1, \\ -y_i - y_j + y_i y_j \geq -1, \\ -y_i + y_j - y_i y_j \geq -1, \\ +y_i - y_j - y_i y_j \geq -1. \end{array} \right. \quad (4)$$

Для троек бинарных переменных полное семейство квадратичных неравенств следует из (2) при $r = 1$ и включает неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} (+y_i + y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j - y_k)^2 \geq 1, \end{array} \right. \quad \text{или их аналоги} \quad \left\{ \begin{array}{l} +y_i y_j + y_i y_k + y_j y_k \geq -1, \\ -y_i y_j - y_i y_k + y_j y_k \geq -1, \\ -y_i y_j + y_i y_k - y_j y_k \geq -1, \\ +y_i y_j - y_i y_k - y_j y_k \geq -1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Полные семейства квадратичных неравенств для четверок и пятерок бинарных переменных содержат по $16 = 4^2$ различных неравенств. Для четверок они следуют из (3) при $r = 2$, а для пятерок — из (2) при $r = 2$. Полные семейства квадратичных неравенств для четверок и пятерок бинарных переменных в форме первых неравенств из (3) и (2) включают следующие 16 неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} (+1 + y_i + y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (-1 + y_i + y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 - y_i + y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i - y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i + y_j - y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i + y_j + y_k - y_l)^2 \geq 1, \\ (-1 - y_i + y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (-1 + y_i - y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (-1 + y_i + y_j - y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (-1 + y_i + y_j + y_k - y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 - y_i - y_j + y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 - y_i + y_j - y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 - y_i + y_j + y_k - y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i - y_j - y_k + y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i - y_j + y_k - y_l)^2 \geq 1, \\ (+1 + y_i + y_j - y_k - y_l)^2 \geq 1, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} (+y_i + y_j + y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j + y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j + y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j - y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j + y_k - y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j + y_k + y_l - y_m)^2 \geq 1, \\ (-y_i - y_j + y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j - y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j + y_k - y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j + y_k + y_l - y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j - y_k + y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j + y_k - y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j + y_k + y_l - y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j - y_k - y_l + y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j - y_k + y_l - y_m)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j + y_k - y_l - y_m)^2 \geq 1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Аналоги квадратичных неравенств (6) приводить не будем в силу их громоздкости. Отметим лишь, что по мере увеличения r ($r = 3, 4, \dots$) полные семейства квадратичных неравенств приобретают очень громоздкую форму даже при их описании с помощью первых квадратичных неравенств из (3) и (2) в форме (6), которая использована для четверок и пятерок бинарных переменных. Так, например, при $r = 3$ (соответствует четным „шестеркам“ и нечетным „семеркам“ бинарных переменных) имеется $64 = 4^3$ неравенства. Форма (6) для них требует слишком много места, чтобы отразить все возможные комбинации ± 1 для шести- и семи-индексных бинарных переменных.

Описать полные семейства неравенств (2) и (3) для больших r можно в более экономной форме, но это не будет предметом обсуждения в работе.

4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ИЗ ЛЕММЫ 2

Отметим два центральных момента, которые следуют из леммы 2 для квадратичных экстремальных задач от n булевых $x \in \{0, 1\}^n$ или бинарных $y \in \{-1, 1\}^n$ переменных. Булевая переменная $x_i \in \{0, 1\}$ описывается квадратичным равенством $x_i^2 = x_i$, а бинарная переменная $y_i \in \{-1, +1\}$ описывается квадратичным равенством $y_i^2 = 1$. Принципиальной разницы между этими задачами нет. С помощью замены переменных $y_i = 1 - 2x_i$, $i = 1, \dots, n$ любую квадратичную экстремальную задачу с булевыми переменными можно свести к квадратичной экстремальной задаче с бинарными переменными (и наоборот).

Первый вывод из леммы 2: *использование идеи нечетного количества ± 1 позволяет в квадратичных экстремальных задачах с бинарными (а значит и с булевыми) переменными автоматизировать построение дополнительных квадратичных неравенств, справедливых для всевозможных значений бинарных переменных $y \in \{-1, 1\}^n$ (либо булевых переменных $x \in \{0, 1\}^n$).* В своем методе получения двойственных оценок Н.З.Шор такие неравенства называет функционально избыточными квадратичными ограничениями, так как они не изменяют множества допустимых решений в квадратичных экстремальных задачах с бинарными (булевыми) переменными [1, 5]. Двойственные алгоритмы для квадратичной экстремальной задачи, дополненной такими неравенствами, позволяют более точно аппроксимировать оптимальное значение целевой функции: сверху в задачах на максимум и снизу в задачах на минимум.

Для квадратичных экстремальных задач с бинарными переменными более удобной является первая форма неравенств (2) и (3) (для задач с булевыми переменными аналоги этой первой формы переписываются с учетом замены переменных $y_i = 1 - 2x_i$, $i = 1, \dots, n$). Первая форма определяется как полный квадрат от линейной комбинации бинарных переменных и для нее легко вычислять значение, которое принимает эта линейная комбинация при некотором заданном векторе $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. В двойственных алгоритмах это является существенным преимуществом, так как невязки ограничений в квадратичной задаче являются компонентами

суб(супер)градиента негладких функций от неизвестных множителей Лагранжа.

Второй вывод из леммы 2 связан со второй формой неравенств в (2) и (3) и утверждает: *использование второй формы квадратичных неравенств для четного и нечетного количества бинарных переменных позволяет автоматизировать переход от квадратичных экстремальных задач с бинарными переменными к их линейным аналогам, которые получены релаксацией (ослаблением) бинарных переменных*. На самом деле, вторые формы квадратичных неравенств в (2) и (3) фактически подготовлены для использования переменных $y_{ij} = y_i y_j$ и их можно записать в виде следующих линейных неравенств:

$$\sum_{i=1}^{2r} \sum_{j>i}^{2r+1} l_i l_j y_{ij} \geq -r \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{2r} l_0 l_i y_i + \sum_{i=1}^{2r-1} \sum_{j>i}^{2r} l_i l_j y_{ij} \geq -r.$$

При $r = 1$ (соответствует тройкам и двойкам бинарных переменных) линейные неравенства приобретают следующий вид

$$\begin{cases} +y_{ij} + y_{ik} + y_{jk} \geq -1, \\ -y_{ij} - y_{ik} + y_{jk} \geq -1, \\ -y_{ij} + y_{ik} - y_{jk} \geq -1, \\ +y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} +y_i + y_j + y_{ij} \geq -1, \\ -y_i - y_j + y_{ij} \geq -1, \\ -y_i + y_j - y_{ij} \geq -1, \\ +y_i - y_j - y_{ij} \geq -1. \end{cases}$$

В теории математического программирования первая четверка линейных неравенств известна как правило „треугольника“, а вторая четверка линейных неравенств известна как самое простейшее правило для линеаризации квадратичных булевых задач. Это правило следует из релаксации бинарных переменных y_i и y_j :

$$y_i \in \{-1, 1\} \implies -1 \leq y_i \leq 1 \equiv \begin{cases} 1 + y_i \geq 0, \\ 1 - y_i \geq 0, \end{cases}$$

$$y_j \in \{-1, 1\} \implies -1 \leq y_j \leq 1 \equiv \begin{cases} 1 + y_j \geq 0, \\ 1 - y_j \geq 0, \end{cases}$$

и использовании для релаксированных переменных очевидных неравенств:

$$\begin{cases} (1 + y_i)(1 + y_j) \geq 0, \\ (1 - y_i)(1 - y_j) \geq 0, \\ (1 - y_i)(1 + y_j) \geq 0, \\ (1 + y_i)(1 - y_j) \geq 0, \end{cases} \implies \begin{cases} +y_i + y_j + y_i y_j \geq -1, \\ -y_i - y_j + y_i y_j \geq -1, \\ -y_i + y_j - y_i y_j \geq -1, \\ +y_i - y_j - y_i y_j \geq -1. \end{cases}$$

При $r = 2$ (соответствует пятеркам и четверкам бинарных переменных), $r = 3$ (соответствует семеркам и шестеркам бинарных переменных) и т. д. линейные неравенства имеют аналогичный вид и их можно считать правилами „пятиугольника“, „семиугольника“ и т. д.

Ниже рассмотрим применение леммы 2 в рамках второго вывода, а именно будем использовать вытекающие из нее семейства линейных неравенств для аппроксимации сверху некоторого многогранника, который построен по типу булевого квадратичного многогранника введенного М. Падбергом (Padberg M.W.) в [2].

5. Многогранники $BiQP_n$ и $BoQP_n$

Рассмотрим выпуклый многогранник

$$BiQP_n = \text{conv}\{(y, x) \in \{-1, 1\}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} : x_{ij} = y_i y_j \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

и условимся его называть бинарным квадратичным многогранником (binary quadratic polytope). Он есть выпуклая оболочка всех возможных пар бинарных векторов $y \in \{-1, 1\}^n$ и $x \in \{-1, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где на компоненты вектора x наложены следующие ограничения: бинарная переменная x_{ij} равна 1 только тогда, когда обе бинарные переменные y_i и y_j одинаковы, и равна -1 только тогда, когда бинарные переменные y_i и y_j различные. Эти ограничения описываются с помощью функции $x_{ij} = y_i y_j$ (логическая функция два к двум), т.е. в двух случаях x_{ij} будет равно 1 (когда $y_i = y_j = 1$ и когда $y_i = y_j = -1$), а в двух случаях равно -1 (когда $y_i = 1$ и $y_j = -1$, и когда $y_i = -1$ и $y_j = 1$).

Другая логическая функция положена в основу булевого квадратичного многогранника (boolean quadratic polytope) Падберга (условимся его обозначать $BoQP_n$). Он определяется так:

$$BoQP_n = \text{conv}\{(x, y) \in \{0, 1\}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} : y_{ij} = x_i x_j \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

и есть выпуклая оболочка всех возможных пар булевых векторов $x \in \{0, 1\}^n$ и $y \in \{0, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где ограничения на компоненты булевого вектора y определяются некоторой логической функцией один к трем. На самом деле, булева компонента y_{ij} равна единице только в одном случае, а именно когда обе булевы компоненты x_i и x_j равны единице. В трех оставшихся случаях она принимает значение равное нулю.

Эти две различные по своей сути логические функции играют важную роль в теории графов. Так, например, с помощью многогранника $BiQP_n$ удобно описывать разрезы графа (ребрами связаны только вершины из двух различных подмножеств вершин графа), а с помощью многогранника $BoQP_n$ — свойства отдельных подмножеств графа (ребрами связаны только вершины этого подмножества вершин графа).

Для многогранников $BiQP_n$ и $BoQP_n$ при значениях $n = 2, 3, 4, 5, 6$ с помощью программы Skeleton (<http://www.uic.nnov.ru/~zny/skeleton>) были построены неприводимые системы линейных неравенств [6]. Для описания многогранников $BiQP_5$ и $BoQP_5$ системы линейных неравенств включают по 368 неравенства, а для описания многогранников $BiQP_6$ и $BoQP_6$ — по 116764 неравенства и чтобы их найти потребовалось 30 минут счетного времени на процессоре Pentium M 1.60 GHz.

 6. Аппроксимации многогранника $BiQP_n$

Легко видеть, что квадратичные неравенства леммы 2 очень подходят для верхней аппроксимации многогранника $BiQP_n$ с помощью многогранников, заданных семействами линейных неравенств для четных и нечетных подмножеств бинарных переменных $y \in \{-1, 1\}^n$. Действительно, с помощью переменных $x_{ij} = y_i y_j$ вторые формы квадратичных неравенств

из (2) и (3) записываются в форме линейных неравенств. Все возможные линейные неравенства для нечетной длины последовательностей и всех $r \in 1, \dots, r_1$, где r_1 такое, что $2r_1 + 1 \leq n$, можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{2r} \sum_{k>j}^{2r+1} l_j l_k x_{ij i_k} \geq -r, \quad r=1, \dots, r_1, \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_{2r+1} \leq n, \\ l \in \{-1, 1\}^{2r+1} : l_1 = 1. \end{array} \right. \quad (7)$$

Неравенства (7) следуют из второй формы квадратичных неравенств (2). Все возможные линейные неравенства для четной длины последовательностей и всех $r \in 1, \dots, r_2$, где r_2 такое, что $2r_2 \leq n$, можно записать таким образом:

$$\sum_{j=1}^{2r} l_j y_{ij} + \sum_{j=1}^{2r-1} \sum_{k>j}^{2r} l_j l_k x_{ij i_k} \geq -r, \quad r=1, \dots, r_2, \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_{2r} \leq n, \\ l \in \{-1, 1\}^{2r}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Рассмотрим следующий многогранник

$$LBiQP_n(r_1, r_2) = \{(y, x) \in R^{n+\frac{n(n-1)}{2}} : (y, x) \text{ удовлетворяют (7) и (8)}\},$$

где r_1 и r_2 такие, что $2r_1 + 1 \leq n$ и $2r_2 \leq n$. Самый полный многогранник $LBiQP_n(r_1, r_2)$, где r_1 и r_2 принимают все возможные значения, условимся обозначать $LBiQP_n$. Этот многогранник реализуется для четных n при $r_1 = \frac{n}{2} - 1$ и $r_2 = \frac{n}{2}$, а для нечетных n при $r_1 = r_2 = \frac{n-1}{2}$.

Теорема 1. Многогранник $LBiQP_n(r_1, r_2)$ аппроксимирует сверху многогранник $BiQP_n$, его описание содержит $M(r_1, r_2) = \sum_{r=1}^{r_2} 4^r C_n^{2r} + \sum_{r=1}^{r_1} 4^r C_n^{2r+1}$ линейных неравенств. Описание многогранника $LBiQP_n$ содержит $M(n) = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} - (n+1)$ линейных неравенств: количество неравенств для четных n равно $\frac{3(3^n-1)}{4} - n$, а для нечетных n равно $\frac{3^{n+1}-5}{4} - n$.

Доказательство. Многогранник $BiQP_n$ может быть задан с помощью следующей системы квадратичных неравенств:

$$y_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_{ij} = y_i y_j, \quad x_{ij}^2 = 1 \quad \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n. \quad (9)$$

Учитывая бинарность переменных $y \in \{-1, 1\}^n$ из леммы 2 следует, что множество решений системы (9) не изменится, если к ней прибавить семейство квадратичных неравенств

$$\sum_{j=1}^{2r} \sum_{k>j}^{2r+1} l_j l_k y_{ij} y_{i_k} \geq -r, \quad r=1, \dots, r_1, \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_{2r+1} \leq n, \\ l \in \{-1, 1\}^{2r+1} : l_1 = 1, \end{array} \right. \quad (10)$$

где $2r_1 + 1 \leq n$, и семейство квадратичных неравенств

$$\sum_{j=1}^{2r} l_j y_{ij} + \sum_{j=1}^{2r-1} \sum_{k>j}^{2r} l_j l_k y_{ij} y_{i_k} \geq -r, \quad r=1, \dots, r_2, \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_{2r} \leq n, \\ l \in \{-1, 1\}^{2r}. \end{array} \right. \quad (11)$$

где $2r_2 \leq n$. Здесь квадратичные неравенства (10) есть квадратичными неравенствами вида (2) для всех возможных нечетных подмножеств бинарных переменных от троек (соответствует $r = 1$) до $2r_1 + 1$. Их количество $M(r_1) = \sum_{r=1}^{r_1} 4^r C_n^{2r+1}$. Квадратичные неравенства (11) есть квадратичными неравенствами вида (3) для всех возможных четных подмножеств бинарных переменных от двоек ($r = 1$) до $2r_2$. Их количество $M(r_2) = \sum_{r=1}^{r_2} 4^r C_n^{2r}$.

Множество решений системы (9)–(11) не изменится, если в неравенствах (10) и (11) квадратичные термы $y_{i_j} y_{i_k}$ заменить на линейные $x_{i_j i_k}$ для всех $1 \leq j < k \leq n$. В результате получаем систему (7)–(9), которая эквивалентна системе (9)–(11). Релаксация (ослабление) бинарных переменных $y \in \{-1, 1\}^n$ и $x \in \{-1, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ для системы (7)–(9) дает многогранник, определяемый следующими линейными неравенствами

$$-1 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad -1 \leq x_{ij} \leq 1, \quad \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \quad (12)$$

$$(y, x) \in LBiQP_n(r_1, r_2). \quad (13)$$

В силу своего построения многогранник (12), (13) аппроксимирует сверху бинарный квадратичный многогранник $BiQP_n$. Однако, неравенства (12) и (13) являются избыточными (несущественными). Действительно, в многогранник $LBiQP_n(r_1, r_2)$ как обязательные включены линейные неравенства для всех возможных двоек (пар) переменных y_i и y_j . Они следуют из квадратичных неравенств (4) и имеют такую форму:

$$\begin{cases} +y_i + y_j + x_{ij} \geq -1, \\ -y_i - y_j + x_{ij} \geq -1, \\ -y_i + y_j - x_{ij} \geq -1, \\ +y_i - y_j - x_{ij} \geq -1, \end{cases} \quad \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n. \quad (14)$$

Легко видеть, что из неравенств (14) следуют линейные неравенства (12). Так, для произвольной пары (i, j) , сложив первое и второе неравенства из (14), имеем: $2x_{ij} \geq -2$ или $x_{ij} \geq -1$, а сложив третье и четвертое неравенства из (14) имеем: $-2x_{ij} \geq -2$ или $x_{ij} \leq 1$. По аналогичной схеме следуют и двусторонние границы на переменные y_i , $i = 1, \dots, n$. Так, сложив первое и четвертое неравенство из (14), получаем неравенство $y_i \geq -1$, а сложив второе и третье неравенства, получаем $y_i \leq 1$. Учитывая то, что индекс i принимает все значения $1, \dots, n-1$, получаем ограничения на все компоненты переменной y , за исключением последней. Границы на последнюю компоненту получаем путем сложения первого и третьего неравенств ($y_j \geq -1$) и второго и четвертого неравенств ($y_j \leq 1$), а индекс переменной y_j может принимать значение равное n .

Итак, многогранник (12), (13) тождественен многограннику $LBiQP_n(r_1, r_2)$ и, следовательно, последний аппроксимирует сверху бинарный квадратичный многогранник $BiQP_n$. Многогранник $LBiQP_n(r_1, r_2)$ включает все

неравенства для нечетных подмножеств $M(r_1)$ и все неравенства для четных подмножеств $M(r_2)$. Отсюда получаем полное количество неравенств

$$M(r_1, r_2) = M(r_1) + M(r_2) = \sum_{r=1}^{r_1} 4^r C_n^{2r+1} + \sum_{r=1}^{r_2} 4^r C_n^{2r}.$$

В заключение подсчитаем максимально возможное количество линейных неравенств в многограннике $LBiQP_n(r_1, r_2)$. Для этого воспользуемся двумя равенствами:

$$(1+2)^n = 1 + 2n + \sum_{i=2}^n 2^i C_n^i = 1 + 2n + \sum_{r=1}^{2r \leq n} 2^{2r} C_n^{2r} + \sum_{r=1}^{2r+1 \leq n} 2^{2r+1} C_n^{2r+1}$$

и

$$(1-2)^n = 1 - 2n + \sum_{i=2}^n (-2)^i C_n^i = 1 - 2n + \sum_{r=1}^{2r \leq n} 2^{2r} C_n^{2r} - \sum_{r=1}^{2r+1 \leq n} 2^{2r+1} C_n^{2r+1},$$

которые следуют из бинома Ньютона. Обозначив $\sum_{r=1}^{2r \leq n} 2^{2r} C_n^{2r}$ как S_{2r} , а $\sum_{r=1}^{2r+1 \leq n} 2^{2r+1} C_n^{2r+1}$ как S_{2r+1} , получаем систему из двух линейных уравнений

$$3^n = 1 + 2n + S_{2r} + S_{2r+1}$$

и

$$(-1)^n = 1 - 2n + S_{2r} - S_{2r+1},$$

из которой находим $S_{2r} = \frac{3^n + (-1)^n}{2} - 1$ и $S_{2r+1} = \frac{3^n - (-1)^n}{2} - 2n$. Полное количество линейных неравенств в многограннике $LBiQP_n$ равно

$$M(n) = \sum_{r=1}^{2r+1 \leq n} 2^{2r} C_n^{2r+1} + \sum_{r=1}^{2r \leq n} 2^{2r} C_n^{2r} = \frac{1}{2} S_{2r+1} + S_{2r} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} - (n+1).$$

Из последнего вытекает, что когда n — четное, то число неравенств равно $\frac{3(3^n-1)}{4} - n$ (реализуется при $r_1 = \frac{n}{2} - 1$ и $r_2 = \frac{n}{2}$), а когда n — нечетное, то число неравенств равно $\frac{3^{n+1}-5}{4} - n$ (реализуется при $r_1 = r_2 = \frac{n-1}{2}$). Теорема доказана. $\square$

При $n = 2, 3, 4$ многогранники $LBiQP_n$ полностью совпали с описывающими многогранники $BiQP_n$ неприводимыми системами линейных неравенств, которые получены с помощью программы *Skeleton*. Многогранник $BiQP_2$ описывается 4 линейными неравенствами для пары бинарных переменных. Система неравенств для многогранника $BiQP_3$ включает 16 неравенств: из них 4 для тройки и 3 по 4 для трех возможных пар. В описании многогранника $BiQP_4$ используется 56 неравенств (из них 16 для четверки, 4 по 4 для четырех троек и 6 по 4 для шести пар переменных).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описано свойство нечетного количества ± 1 и показано, что оно позволяет в квадратичных экстремальных задачах с бинарными и булевыми переменными автоматизировать построение дополнительных квадратичных неравенств, справедливых независимо от того, какие значения принимают бинарные переменные $y \in \{-1, 1\}^n$, либо булевы переменные $x \in \{0, 1\}^n$. На его основе построены семейства квадратичных неравенств для четного и нечетного количества бинарных переменных. Их линейризованные аналоги использованы для внешней аппроксимации бинарного квадратичного многогранника $BiQP_n$ (задает множество допустимых решений в задаче нахождения экстремума квадратичной функции от n бинарных переменных) с помощью многогранников с конечным количеством линейных неравенств от $n(n+1)/2$ переменных. Подсчитано максимальное количество линейных неравенств в аппроксимирующем многограннике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shor N. Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.
2. Padberg M. W. The boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Programming. — 1989. — Vol. 45. — P. 139–172.
3. Стецюк П. И. Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №1. — С. 63–75.
4. Stetsyuk P. I., Bardadym T. O. The Use of Odd Sets of Variables to Improve Bounds in Boolean Quadratic Problems // Abstracts of International Conference in Honor of the 70th Birthday of Academician I. V. Sergienko „Applied Optimization and Metaheuristic Innovations“ (July 19-21, 2006, Yalta, Ukraine). — P. 51.
5. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наукова думка, 1989. — 200 с.
6. Золотых Н. Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // III Всероссийская конференция „Проблемы оптимизации и экономические приложения“: Материалы конференции. — Омск: изд-во ОмГТУ, 2006. — С. 140

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ ИМ. В.М.ГЛУШКОВА НАН УКРАИНЫ, ПР. АКАДЕМИКА ГЛУШКОВА, 40, КИЕВ-187, 03680, УКРАИНА.

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО, ПР. ГАГАРИНА, 23, НИЖНИЙ НОВГОРОД, 603950, РОССИЯ.

Поступила 02.08.2010

УДК 519.21

ДИФУЗІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ ЕРЛАНГА З ДВОВИМІРНИМ ПУАССОНІВСЬКИМ ПОТОКОМ ВИМОГ

О.А. ЧЕЧЕЛЬНИЦЬКИЙ, О.В. КУЧЕРЕНКО

РЕЗЮМЕ. В цій статті вивчається мережева модель, яка складається з систем Ерланга з двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог. Знайдені умови існування стаціонарного розподілу процесу обслуговування та виписаний його явний вигляд. Для переважаного режиму доведена функціональна гранична теорема про дифузійну апроксимацію процесу обслуговування.

1. Вступ

Сучасні комунікаційні та комп'ютерні мережі характеризуються все більш складними структурами, що вимагає створення і аналізу відповідних математичних моделей. Модель системи обслуговування Ерланга вже давно використовується в багатьох сферах практичної діяльності. В цій статті ми розглянемо мережеву модель, яка складається з двох систем Ерланга типу $[M/M/m/0]$ з спільним зовнішнім двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$.

2. Стаціонарні характеристики мережевої моделі з системами Ерланга.

Позначимо через m_1 число обслуговуючих приладів в першій системі Ерланга, відповідно m_2 є числом обслуговуючих приладів в другій системі. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають для обслуговування на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему. Будемо передбачати, що час обслуговування вимог з потоку $\nu_1(t)$ має показниковий розподіл з параметром $\mu_1 > 0$, а час обслуговування вимог з потоку $\nu_2(t)$ має показниковий розподіл з параметром $\mu_2 > 0$ відповідно. Кожна вимога обслуговується лише на одній системі. Нехай $X_1(t)$ — число вимог, які знаходяться на обслуговуванні в першій системі Ерланга в момент часу t , а $X_2(t)$ — число вимог, які знаходяться на обслуговуванні в другій системі в момент часу t . Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Процес обслуговування моделі з двох систем Ерланга $(X_1(t), X_2(t))$ має ергодичний розподіл такого виду:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P\{X_1(t) = i, X_2(t) = j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \right) \right)^{-1},$$

де

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}, \quad a_3 = \frac{b}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2.$$

Доведення. За умови зроблених нами припущень на вхідний потік і час обслуговування вимог у системах двовимірний випадковий процес $(X_1(t), X_2(t))$ представляє собою двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом. Поведінка цього ланцюга Маркова на інтервалі $[t, t+h]$ виглядає таким чином: якщо в момент часу t процес прийняв значення $X_1(t) = i$, $X_2(t) = j$, тоді наш двовимірний процес на інтервалі $[t, t+h]$ може перейти в такі стани з відповідними ймовірностями незалежно від значень, які він приймав до цього моменту $(X_1(s), X_2(s))$, $s < t$:

$$(i, j) \rightarrow \begin{cases} (i+1, j), & \text{з ймовірністю } \lambda_1 h + o(h); \\ (i, j+1), & \text{з ймовірністю } \lambda_2 h + o(h); \\ (i+1, j+1), & \text{з ймовірністю } b h + o(h); \\ (i-1, j), & \text{з ймовірністю } \mu_1 i h + o(h); \\ (i, j-1), & \text{з ймовірністю } \mu_2 j h + o(h); \\ (i, j), & \text{з ймовірністю } 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + b + i\mu_1 + j\mu_2)h + o(h), \end{cases}$$

де $i = \overline{1, m_1 - 1}$, $j = \overline{1, m_2 - 1}$. Аналогічно ми можемо записати ймовірності переходів на інтервалі $[t, t+h]$ зі станів $(0, 0)$, $(0, j)$, $(i, 0)$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$, $j = \overline{1, m_2 - 1}$, (m_1, m_2) .

Крім того, будемо передбачати, що вхідний потік реагує на ситуацію, яка складається на системах Ерланга, а саме одна з систем є повністю зайнятою, змінюючи свої інтенсивності таким чином:

$$(i, m_2) \rightarrow \begin{cases} (i+1, m_2), & \text{з ймовірністю } (\lambda_1 + b \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2})h + o(h); \\ (i-1, m_2), & \text{з ймовірністю } \mu_1 i h + o(h); \\ (i, m_2 - 1), & \text{з ймовірністю } m_2 \mu_2 h + o(h); \\ (i, m_2), & \text{з ймовірністю } 1 - (\lambda_1 + b \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \mu_1 i + \mu_2 m_2)h + o(h), \end{cases}$$

і

$$(m_1, j) \rightarrow \begin{cases} (m_1, j+1), & \text{з ймовірністю } (\lambda_2 + b \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2})h + o(h); \\ (m_1, j-1), & \text{з ймовірністю } \mu_2 j h + o(h); \\ (m_1 - 1, j), & \text{з ймовірністю } m_1 \mu_1 h + o(h); \\ (m_1, j), & \text{з ймовірністю } 1 - (\lambda_2 + b \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \mu_2 j + \mu_1 m_1)h + o(h), \end{cases}$$

Ймовірності переходів зі станів $(0, m_2)$, $(m_1, 0)$ мають також аналогічний вигляд:

$$(0, m_2) \rightarrow \begin{cases} (1, m_2), & \text{з ймовірністю } (\lambda_1 + b \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2})h + o(h); \\ (0, m_2 - 1), & \text{з ймовірністю } m_2 \mu_2 h + o(h); \\ (0, m_2), & \text{з ймовірністю } 1 - (\lambda_1 + b \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \mu_2 m_2)h + o(h), \end{cases}$$

i

$$(m_1, 0) \rightarrow \begin{cases} (m_1, 1), & \text{з ймовірністю } (\lambda_2 + b \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2})h + o(h); \\ (m_1 - 1, 0), & \text{з ймовірністю } m_1 \mu_1 h + o(h); \\ (m_1, 0), & \text{з ймовірністю } 1 - (\lambda_2 + b \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \mu_1 m_1)h + o(h). \end{cases}$$

Використовуючи виписану вище структуру переходів нашого процесу, ми можемо виписати відповідну систему алгебраїчних рівнянь для стаціонарних ймовірностей $p_{ij} = P\{X_1 = i, X_2 = j\}$. Через велику розмірність ми не будемо її наводити в цій статті. Розв'язок цієї системи рівнянь існує і є єдиним на підставі наших припущень. Безпосередньою підстановкою в рівняння показується, що він має такий вигляд:

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \times \\ \times \left(\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \right) \right)^{-1},$$

де $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}$, $a_3 = \frac{b}{\mu_1 + \mu_2}$, $i = \overline{0, m_1}$, $j = \overline{0, m_2}$.

Зауважимо, що двовимірний пуассонівський потік має згідно з [1] таке представлення:

$$\nu_1(t) = y_1(t) + y_3(t), \quad \nu_2(t) = y_2(t) + y_3(t),$$

де $y_1(t)$ — пуассонівський потік з параметром $\lambda_1 > 0$, $y_2(t)$ — пуассонівський потік з параметром $\lambda_2 > 0$ і $y_3(t)$ в свою чергу є пуассонівським потоком з параметром $b > 0$. $\square$

Отже, під час доведення результату теореми 1 для мережевої моделі систем Ерланга $[M/M/m]^2$ з двовимірним пуассонівським потоком вимог ми отримали цікавий факт. Для існування стаціонарного розподілу числа вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, зазначеного вище вигляду ми повинні зменшувати інтенсивність b спільного потоку за допомогою коефіцієнта $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$, якщо зайняті всі m_1 приладів. Таким чином, інтенсивність потоку $y_3(t)$ повинна дорівнювати $b \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$. Аналогічно, якщо $X_2(t) = m_2$, інтенсивність b спільного вхідного потоку $y_3(t)$ має дорівнювати $b \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.

3. Дифузійна апроксимація мережевої моделі систем Ерланга з двовимірним пуассонівським потоком вимог

Зрозуміло, що вираз стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ є достатньо громіздким, коли параметри m_1 or m_2 приймають великі значення. В цій ситуації, за певних умов на інші характеристики нашої моделі, можна довести, що поведінка процесу обслуговування вимог буде близькою до поведінки відповідного дифузійного процесу. Іншими словами ми доведемо збіжність процесу обслуговування до відповідного дифузійного процесу в рівномірній топології.

Припустимо, що наша модель перебуває в стаціонарному режимі, тобто початковий розподіл числа зайнятих приладів буде дорівнювати:

$$P\{X_1(0) = i, X_2(0) = j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \times \\ \times \left(\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \right) \right)^{-1},$$

$$\text{де } a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}, \quad a_3 = \frac{b}{\mu_1+\mu_2},$$

$$i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2.$$

Крім того, будемо передбачати, що параметри нашої моделі залежать від n (номера серії) і є виконаними такі умови:

$$\mu_i^{(n)} = \frac{\mu_i}{n} + o(n^{-1}),$$

$$n^{-1/2}(m_i^{(n)} - \alpha_i n) \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

$$\text{where } \alpha_1 = (\lambda_1 + b)/\mu_1, \quad \alpha_2 = (\lambda_2 + b)/\mu_2.$$

Розглянемо таку послідовність випадкових процесів:

$$\xi_n(t) = (\xi_n^1(t), \xi_n^2(t)), \quad n \geq 1, \quad t \in [0, T],$$

$$\xi_n^i(t) = n^{-1/2}(X_1^{(n)}(nt) - \alpha_i n), \quad i = 1, 2.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Послідовність випадкових процесів $(\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$ збігається в рівномірній метриці до дифузійного процесу з коефіцієнтом переносу $a(x) = (a_1(x), a_2(x))$ і матрицею дифузії B , де*

$$(a_1(x), a_2(x)) = (-\mu_1 x, -\mu_2 x)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1 + b) & b \\ b & 2(\lambda_2 + b) \end{pmatrix}.$$

Доведення. . Розподіл послідовності випадкових процесів збігається до дифузійного процесу з вектором переносу $a(x)$ і дифузійною матрицею B , якщо виконані такі умови [2]:

$$\xi_n(0) \rightarrow \xi_0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\delta(n) = \sum_{k=0}^{d_n-1} E |E\{\Delta \xi_{n_k}/F_{n_k}\} - a(\xi_{n_k})\Delta t_{n_k}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} E |E\{(\Delta \xi_{n_k}, z)^2/F_{n_k}\} - (Bz, z)\Delta t_{n_k}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} P\{|\Delta \xi_{n_k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{for } \varepsilon > 0 \quad (4)$$

де $\Delta\xi_{n_k} = \xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}$, $\xi_{n_k} = \xi_n(t_{n_k})$, $\{t_{n_k}, k = 0, 1, \dots, d_n\}$ — розбиття інтервалу $[0, T]$ точками $0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{d_n}} = T$, $\max_k \Delta t_{n_k} \rightarrow 0$, $F_{n_k} = F_n(t_{n_k})$, $\{F_n(t), t \in [0, T]\}$ — послідовність зростаючих σ -алгебр.

Перевіримо виписані умови збіжності до дифузійного процесу для послідовності $(\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$. Нехай $t_{n_k} = \frac{k}{d_n}T$ для всіх $n = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots, d_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/n = 0$, σ -алгебра $F_n(t)$ утворюється випадковими величинами $\{\xi_n(\tau), \tau \leq t\}$.

Для довільного дійсного вектора $u = (u_1, u_2)$, використовуючи метод характеристичних функцій, ми отримаємо початкового розподілу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E e^{i(u, \xi_n(0))} = e^{-\frac{1}{2}u_1^2\alpha_1 - \frac{1}{2}u_2^2\alpha_2 - u_1u_2a_3}.$$

Отже, умова (1) виконується, при чому граничний вектор (ξ_0^1, ξ_0^2) має нормальний розподіл з вектором середніх $(0, 0)$ і коваріаційною матрицею C , де

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 \\ a_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки виконання умов (2), (3) and (4) ми використаємо таке представлення процесу $X_i(t)$, $i = 1, 2$:

$$X_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_i(0)} \chi_k^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^{\nu_i(t)} \chi_k^{(i)}(t - t_k), & \text{if } \nu_i(t) \leq m_i^{(n)} \\ \sum_{k=1}^{X_i(0)} \chi_k^{(i)}(t) + \kappa_i^n(t), & \text{if } \nu_i(t) > m_i^{(n)}, \end{cases}$$

де $\sum_{k=1}^{X_i(0)} \chi_k^{(i)}(t) + \kappa_i^n(t)$ є випадковою величиною, яка має розподіл $X_i(t)$, якщо $\nu_i(t) > m_i^{(n)}$. Випадкова величина $\chi_k^{(i)}(t)$ приймає значення 1 з ймовірністю $\exp(-\mu_i t)$ і 0 з ймовірністю $1 - \exp(-\mu_i t)$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$; $i = 1, 2$.

Тоді

$$\begin{aligned} & E(\Delta\xi_{n_k}^i / \xi_{n_k}^i = x_i) = \\ & = E\{n^{-1/2}(X_i^{(n)}(nt_{n_{k+1}}) - n\alpha_i) - x_i / X_i^{(n)}(nt_{n_k}) = n\alpha_i + \sqrt{n}x_i\} = \\ & = n^{-1/2}E\left\{ \sum_{k=1}^{\sqrt{n}x_i + \alpha_i n} \chi_k^{(i)}(\Delta t_{n_k}) + \sum_{k=1}^{\nu_i(n\Delta t_{n_k})} \chi_k^i(t_{n_k} - t_k) - \right. \\ & \quad \left. - n\alpha_i - \sqrt{n}x_i / \nu_i(n\Delta t_{n_k}) \leq m_n^i - \alpha_i n - \sqrt{n}x_i \right\} \times \\ & \quad \times P\{\nu_i(n\Delta t_{n_k}) \leq m_n^i - \alpha_i n - \sqrt{n}x_i\} + \\ & + n^{-1/2}E\left\{ \sum_{k=1}^{\sqrt{n}x_i + \alpha_i n} \chi_k^i(\Delta t_{n_k}) + \kappa_n(n\Delta t_{n_k}) - n\alpha_i - \sqrt{n}x_i / \nu_i(n\Delta t_{n_k}) > \right. \\ & \quad \left. > m_n^i - \alpha_i n - \sqrt{n}x_i \right\}. \end{aligned}$$

Після низки перетворень ми отримаємо:

$$E\{\Delta\xi_{n_k}^i / \xi_{n_k}^i = x_i\} = -x_i(1 - e^{-\mu_i \Delta t_{n_k}}) + o(\Delta t_{n_k}).$$

Крім того, неважко показати, що

$$E|\xi_{n_k}^i| = E\sqrt{(\xi_n^i(t_{n_k}))^2} \leq \sqrt{E(\xi_n^i(t_{n_k}))^2} < C.$$

Зрештою ми будемо мати:

$$\delta(n) = \sum_{k=0}^{d_n-1} E|\xi_{n_k}^i (e^{-\mu_i \Delta t_{n_k}} - 1) - \xi_{n_k}^i \mu_i \Delta t_{n_k} - o(\Delta t_{n_k})| \leq$$

$$Cd_n |e^{-\mu_i T/d_n} - 1 - \mu_i T/d_n| + d_n o\left(\frac{T}{n}\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Виконання умови (2) перевірено. В такий же спосіб перевіряється виконання умови (3) і (4). Збіжність у рівномірній топології буде доведена, якщо для послідовності $\xi_n(t) = (\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$ виконується умова

$$P\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| \geq \varepsilon, |\xi_n(t) - \xi_n(t_2)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \gamma} [H(t_2) - H(t_1)]^{2\alpha} \quad (5)$$

для $t_1 \leq t \leq t_2$ ($t_1, t, t_2 \in [0, T]$), $n \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, де функція $H(t)$ є неспадною неперервною функцією на $[0, T]$.

Можна показати, що умова (5) виконується для послідовності наших процесів $\xi_n(t)$, якщо $\gamma = 2$, $\alpha = 3/4$ і функція має вигляд $H(t) = ct$.

Теорема 2 доведена. $\square$

Результат теореми 2 означає, що асимптотично, коли $n \rightarrow \infty$, процес обслуговування $X^{(n)}(nt)$ можна представити як:

$$X^{(n)}(nt) \sim n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \sqrt{n} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix},$$

де вектор $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ має нормальний розподіл з середнім $(0, 0)$ і коваріаційною матрицею C .

Література:

1. Griffiths R. C., Milne R. K. A class of bivariate Poisson process. // J. Multivar. Anal. — 1978. — 8, № 3. — Р. 380–396.
2. Анисимов В. В., Лебедев Е. А. Стохастические сети обслуживания. — Киев.: Лыбидь. — 1992. — 206 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 10.08.2010