

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються, після виходу у світ реферуються в "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) та індексуються Google Scholar. Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) and indexed in Google Scholar. A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula, д-р фіз.-мат. наук, проф. (United Kingdom); Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; <u>В. В. Кириченко</u> , д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. T. Kiguradze, д-р фіз.-мат. наук, акад. АН Грузії (Georgia); Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko, д-р фіз.-мат. наук, проф. (United Kingdom); О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Sweden); О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Chile); V. Futornyy, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Brazil)
Адреса редколегії	Механіко-математичний факультет, просп. акад. Глушкова, 4Е, Київ, 03127, Україна, ☎ (38044) 259 05 42 E-mail: alex_z_ua@ukr.net, alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 17.12.19 (протокол № 6)
Атестовано	Міністерством освіти і науки України. Поновлено в переліку наукових фахових видань України МОН України 04.04.18
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	ВПЦ "Київський університет" (кімн. 43), б-р Т.Шевченка, 14, Київ, 01030, Україна, ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

1(40)/2019

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) and indexed in Google Scholar. A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються, після виходу у світ реферуються в "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) та індексуються Google Scholar. Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

CHIEF EDITOR

M. Gorodnii, Full Prof., Dr. Hab.

EDITORIAL BOARD

V. Samoylenko, Full Prof., Dr.Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, Ph. D. (Secretary); V. Bavula (United Kingdom), Full Prof., Dr. Hab.; Y. Drozd, Full Prof., Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Prof., Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Prof., Dr. Hab.; I. T. Kiguradze, Academician of NAS of Georgia (Georgia), Dr. Hab.; B. Kiforenko, Full Prof., Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Prof., Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Prof., Dr. Hab.; N. Leonenko Full Prof., Dr. Hab. (United Kingdom); O. Limarchenko, Full Prof., Dr. Hab.; Y. Mishura, Full Prof., Dr. Hab.; L. Mol'chenko, Full Prof., Dr. Hab.; I. Parasyuk, Full Prof., Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Prof., Academician of NAS of Ukraine, Dr. Hab.; A. Petravchuk, Full Prof., Dr. Hab.; D. Silvestrov, Full Prof., Dr. Hab. (Sweden); A. Stanzhytskyi, Full Prof., Dr. Hab.; S. Trofimchuk, Full Prof. (Chile), Dr. Hab; V. Futorny, Full Prof., Dr. Hab.; I. Shevchuk, Full Prof., Dr. Hab (Brazil)

Address of Editorial board

Faculty of Mechanics and Mathematics, 4E Acad. Glushkova Avenue
Kyiv, 03127, Ukraine;
☎ (38044) 259 05 42;
E-mail: alex_z_ua@ukr.net, alex_z_ua@univ.kiev.ua

Approved

Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics
17.12.19 (protocol № 6)

Attested

by Ministry of Education and Sciens (MES) of Ukraine
Decision of MES of Ukraine to include
in list as professional from 04.04.18

Registered

Ministry of Justice of Ukraine
Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09

Founder and publisher

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Publishing and printing center "Kyiv University".

The certificate included in the State Register
ДК № 1103 from 31.10.02

Address of publisher

Kyiv University Publishing and Printing Center (off. 43),
14, Taras Shevchenko blv., Kyiv, 01030, Ukraine,
☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; fax 239 31 28

ЗМІСТ

Петрова І. Про інтерполяційну оцінку монотонного кусково-поліноміального наближення.....	6
Сердюк М. До рівняння Чандрасекара у просторах $C([0,1])$ та $L_p([0,1])$	8
Щеглов М. Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відріzk функції.....	12
Верьовкіна Г., Гап'як І., Самойленко В., Телятник Т. Асимптотичний аналіз розв'язків рівнянь із регулярним збуренням	14
Пафик С. Асимптотичне розв'язання двоточної крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у некритичному та критичному стійких випадках	19
Гап'як І. Чисельний розв'язок кінетичного рівняння типу Больцмана для гранульованих газів	25
Авраменко О., Луньова М. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі.....	30
Самойленко В., Самойленко Ю., Орлова М. Асимптотичні розв'язки рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами на ненульовому фоні.....	35
Гук Н. Особливості варіаційного формулювання оберненої задачі теорії тонких пластин	40
Лимарченко О., Сапон М. Аналіз впливу кутової швидкості обертання трубопроводу з рідиною на розвинення динамічних процесів	48
Лимарченко О., Слюсарчук Ю. Аналіз силової взаємодії рідини і сферичного резервуара при збудженні руху системи періодичною силою	51
Володимир Васильович Шарко (25.09.1949 – 07.10.2014)	55

СОДЕРЖАНИЕ

Петрова И. Про интерполяционную оценку монотонного кусочно-полиномиального приближения.....	6
Сердюк М. К уравнению Чандрасекара в пространствах $C([0,1])$ и $L_p([0,1])$	8
Щеглов Н. Поточечная оценка отклонений полинома Крякина от непрерывной на отрезке функции	12
Верьовкина А., Гапак И., Самойленко В., Телятник Т. Асимптотический анализ решений уравнений с регулярным возмущением.....	14
Пафик С. Асимптотическое решения двухточечной краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в некритических и критических стойких случаях.....	19
Гапак И. Численное решение кинетического уравнения типа Больцмана для гранулированных газов	25
Авраменко О., Лунёва М. Модуляционная устойчивость волновых пакетов в трёхслойной гидродинамической системе.....	30
Самойленко В., Самойленко Ю., Орлова М. Асимптотические решения уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами на ненулевом фоне	35
Гук Н. Особенности вариационной формулировки обратной задачи теории тонких пластин	40
Лимарченко О., Сапон М. Анализ влияния угловой скорости вращения трубопровода с жидкостью на развитие динамических процессов.....	48
Лимарченко О., Слесарчук Ю. Анализ силового взаимодействия жидкости и сферического резервуара при возбуждении движения системы периодической силой.....	51
Владимир Васильевич Шарко (25.09.1949 – 07.10.2014)	55

CONTENTS

Petrova I.	
Interpolatory estimates in monotone piecewise-polynomial approximation.....	6
Serdiuk M.	
On Chandrasekhar equation in spaces $C([0,1])$ and $L_p([0,1])$	8
Shcheglov M.	
Pointwise estimate of deviation of Kriakin polynomial from a function, continuous on a segment	12
Verovkina G., Gapyak I., Samoilenko V., Telyatnik T.	
Asymptotic analysis of solutions to equations with regular perturbation	14
Pafyk S.	
Asymptotic solutions of a two-point edge-based problem for a linear singularly disturbed system of differential equations in noncritical and critical stable cases	19
Gapyak I.	
The numerical solution of the Boltzmann kinetic equation for granular gases	25
Avramenko O., Lunyova M.	
Modulation stability of wave packets in a three-layer hydrodynamic system	30
Samoilenko V., Samoilenko Yu., Orlova M.	
Asymptotic solutions to the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients at non-zero background	35
Guk N.	
Features of variational formulation of the inverse problem of the thin plate theory	40
Limarchenko O., Sapon M.	
Analysis of the influence of angular speed of rotation of a pipeline with liquid on the development of dynamic processes	48
Limarchenko O., Sliusarchuk Y.	
Analysis of power interaction of a liquid and a spherical reservoir when system motion is excited by a periodic force	51
Volodymyr Vasylovych Sharko (25.09.1949 – 07.10.2014)	54

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНУ ОЦІНКУ МОНОТОННОГО КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНОГО НАБЛИЖЕННЯ

Нещодавно ми отримали інтерполяційну оцінку монотонного кусково-поліноміального наближення неперервної на відрізку функції через другий модуль неперервності r -ї похідної, а також показано, що ця оцінка виконується лише для досить великої кількості відрізків розбиття, яка суттєво залежить від функції. У [2] обидва результати поширено на випадок опуклого наближення й отримано в дещо точнішій формі. Показано, що й у випадку монотонного наближення відповідні результати також виконуються у відповідній точнішій формі.

Ключевые слова: наближення функцій, модуль неперервності, опукле наближення, інтерполяційні оцінки.

Для $r \in \mathbb{N}$ через $C^r[a, b]$, $-1 \leq a < b \leq 1$, позначимо простір r разів неперервно диференційованих функцій на $[a, b]$, і через $C^0[a, b] = C[a, b]$ – простір неперервних функцій на $[a, b]$, з рівномірною нормою $\|\cdot\|_{[a, b]}$. Нехай P_n – простір алгебраїчних поліномів, степені яких не перевищують n . Для $f \in C[a, b]$ позначимо через

$$\omega_1(f, t; [a, b]) := \inf_{x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| \leq t} |f(x'') - f(x')|, \quad t \geq 0,$$

та

$$\omega_2(f, t; [a, b]) := \inf_{x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| \leq t} \left| f(x'') - 2f\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) + f(x') \right|, \quad t \geq 0,$$

відповідно до першого та другого модулів неперервності. Позначимо також

$$\Omega_2^L(f; x; [0, 1]) := \min_{m=1,2} \omega_m\left(f; (x-a)^{\frac{1}{m}}(b-a)^{\frac{m-1}{m}}; [a, b]\right)$$

та

$$\Omega_2^R(f; x; [0, 1]) := \min_{m=1,2} \omega_m\left(f; (b-x)^{\frac{1}{m}}(b-a)^{\frac{m-1}{m}}; [a, b]\right).$$

Нехай $X = \{x_j\}_{j=0}^n$ – таке розбиття відрізка $[a, b]$, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, і позначимо через $S(X, r+1)$ множину неперервних сплайнів порядку $r+1$ для розбиття X , тобто $s \in S(X, r+1)$, якщо $s \in C^r[a, b]$ та на кожному відрізку $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$, функція s є алгебраїчним поліномом, ступінь якого не перевищує r . Надалі через c позначено різні додатні сталі, які є або абсолютними, або можуть залежати лише від r . У [3] доведено таку теорему 2.4

Теорема 2.4. Для кожного $r \in \mathbb{N}$ існує стала така $c = c(r)$, що для кожної монотонної функції $f \in C^r[a, b]$ знайдеться таке число $H > 0$, що для кожного набору X , який задовольняє нерівності

$$x_{n-1} - H < a \quad \text{та} \quad b < x_1 + H,$$

існує неспадний сплайн $s \in S_n(X, r+1)$, для якого виконуються оцінки

$$|s(x) - f(x)| \leq c(x-a)^r \omega_2(f^{(r)}, \sqrt{(x-a)(x_{n-1}-a)}; [a, x_{n-1}]), \quad x \in [a, x_{n-1}],$$

$$|s(x) - f(x)| \leq c(b-x)^r \omega_2(f^{(r)}, \sqrt{(b-x)(b-x_1)}; [x_1, b]), \quad x \in [x_1, b],$$

та для всіх $j = 2, \dots, n-1$:

$$|s(x) - f(x)| \leq c(x_{j-1} - x_j)^r \omega_2(f^{(r)}, x_{j-1} - x_j; [x_j, x_{j-1}]), \quad x \in [x_j, x_{j-1}].$$

Нещодавно в [2] цей результат поширено на випадок опуклого наближення й отримано в дещо точнішій формі, а саме, у формі, в якій ω_2 замінено на Ω_2 . У даній статті ми показуємо, що й у випадку монотонного наближення відповідний результат також виконується у відповідній формі. Для цього разом з теоремою 2.4 використаємо частинний випадок леми 3.1 з [2] – лему 1.

Лема 1. Нехай $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^r[a, b]$, $C_0 > 0$, $P \in \Pi_{r+1}$ для якого поліном $P^{(v)}(a) = f^{(v)}(a)$, $0 \leq v \leq r$ та

$$\|f - P\|_{[a, b]} \leq C_0(b-a)^r \omega_2(f^{(r)}, b-a, [a, b]).$$

Тоді для всіх $x \in [a, b]$ та $m = 1, 2$ маємо

$$|f(x) - P(x)| \leq cC_0(x-a)^r \omega_m(f^{(r)}, (x-a)^{\frac{1}{m}}(b-a)^{\frac{m-1}{m}}).$$

Наступну теорему доведено.

Теорема 1. Для кожного $r \in \mathbb{N}$ існує така стала $c = c(r)$, що для кожної монотонної функції $f \in C^r[a, b]$ знайдеться число $H > 0$, таке, що для кожного набору X , який задовольняє нерівності

$$x_{n-1} - H < a \quad \text{та} \quad b < x_1 + H,$$

існує монотонний сплайн $s \in S_n(X, r+1)$, такий, що виконуються оцінки:

$$|s(x) - f(x)| \leq c(x-a)^r \Omega_2^L(f^{(r)}, x; [a, x_1]), \quad x \in [a, x_1], \quad (1)$$

$$|s(x) - f(x)| \leq c(b-x)^r \Omega_2^R(f^{(r)}, x; [x_{n-1}, b]), \quad x \in [x_{n-1}, b], \quad (2)$$

та для кожних $j = \dots, n-1$ і $x \in [x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s(x)| \leq c(x_j - x_{j-1})^r \omega_2(f^{(r)}, x_j - x_{j-1}; [x_{j-1}, x_j]). \quad (3)$$

Користуючись теоремою 1 можна довести таке твердження.

Твердження. Теорема 1.1 із [3, 4] справедлива з уточненням

$$|f(x) - S(x)| \leq c(r) \phi^{2r}(x) \omega_1(f^{(r)}, \phi^2(x)).$$

Для монотонного випадку виконуються також аналоги негативних результатів із [2], які, у свою чергу, є уточненнями негативних результатів із [3, 4] та [1].

Через $\Delta^{(1)}$ будемо позначати множину монотонно неспадних функцій на $[-1, 1]$.

Теорема 2. Для будь-яких $r \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$ існує така функція $f \in C^r[-1, 1] \cap \Delta^{(1)}$, що $\forall p_n \in P_n \cap \Delta^{(1)}$ і будь-якої такої додатної на $(-1, 1)$ функції ψ , що

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \psi(x) = 0$$

виконується або

$$\limsup_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\phi^2(x) \psi(x)} = +\infty, \quad (4)$$

або

$$\limsup_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\phi^2(x) \psi(x)} = +\infty. \quad (5)$$

Доведення. Покладемо $\varepsilon := \frac{1}{n^2}$ і розглянемо функцію

$$f(x) := \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 1 - \varepsilon \\ (x - 1 + \varepsilon)^{r+1}, & 1 - \varepsilon < x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$f \in C^r[-1, 1] \cap \Delta^{(1)}.$$

Припустимо від супротивного, що обидва співвідношення (4) та (5) не виконуються. Тоді існують такі $p_n \in P_n \cap \Delta^{(1)}$ і стала A , що:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq A \phi^2(x) \psi(x) \quad (6)$$

для всіх x як завгодно близьких до -1 і 1 .

Із (6) випливає, що

$$f(\pm 1) = p_n(\pm 1) \text{ і } f'(\pm 1) = p'_n(\pm 1),$$

а саме: $p_n(-1) = p'_n(-1) = 0$, $p_n(1) = \varepsilon^{r+1}$ і $p'_n(1) = (r+1)\varepsilon^r$. Оскільки $p_n \in \Delta^{(1)}$ і $p_n(-1) = 0$, то для всіх маємо $p_n(x) \geq 0$ і $\|p_n\| = p_n(1) = \varepsilon^{r+1}$.

За нерівністю Маркова отримуємо

$$(r+1)\varepsilon^r = p'_n(1) \leq \|p'_n\| \leq n^2 \|p_n\| = n^2 \varepsilon^{r+1} = \varepsilon^r,$$

тобто маємо суперечність.

Теорема 3. Для будь-яких $r, m, n \in \mathbb{N}$ і кожного розбиття $X = \{x_j\}_{j=0}^n$ відрізка $[-1, 1]$ існує така функція $f \in C^r[-1, 1] \cap \Delta^{(1)}$, що для всіх $s \in S(X, m) \cap \Delta^{(1)}$ і кожної такої додатної на $(-1, 1)$ функції ψ , що

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \psi(x) = 0$$

виконується або

$$\limsup_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x) - s_n(x)|}{\phi^2(x) \psi(x)} = +\infty,$$

або

$$\limsup_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - s_n(x)|}{\phi^2(x) \psi(x)} = +\infty.$$

Доведення. Доведення цієї теореми цілком аналогічне доведенню теореми 2. Відмінність полягає в тому, що нерівність Маркова використовуємо для відрізка $[x_{n-1}, 1]$:

$$(r+1)\varepsilon^r = s'(1) \leq \|s'\|_{[x_{n-1}, 1]} \leq \frac{2(m-1)^2}{1-x_{n-1}} \|s\|_{[x_{n-1}, 1]} = \frac{2(m-1)^2}{1-x_{n-1}} \varepsilon^{r+1}.$$

Вибираючи

$$\varepsilon < \frac{(r+1)(1-x_{n+1})}{2(m-1)^2},$$

отримуємо суперечність.

Висновки. Показано, що результати роботи [2] для опуклого наближення можуть бути поширені на випадок монотонного наближення. Таким чином, в уточненій формі отримано інтерполяційну оцінку монотонного кусково-поліноміального наближення неперервної на відрізку функції і наведено контрприклад, що свідчить про остаточність цієї оцінки.

Список використаних джерел:

1. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation / H.H. Gonska, D. Leviatan, I.A. Shevchuk, H.J. Wenz // Constr. Approx., 2000 – № 16. – P. 603–629.
2. Kopotun K.A. Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation / K.A. Kopotun, D. Leviatan, I.A. Shevchuk // J. of Mathemat. Analysis and Applications, 2019. – № 474. – P. 467–479.
3. Leviatan D. Interpolatory estimates in monotone piecewise polynomial approximation / D. Leviatan, I. Petrova // J. Approx.Theory, 2017. – № 223. –P. 1–8.
4. Leviatan D. Corrigendum to ‘Interpolatory estimates in monotone piecewise polynomial approximation’ / D. Leviatan, I. Petrova // J. Approx. Theory, 2018. – № 228. – P. 79–80.

Надійшла до редколегії 05.04.19

И. Петрова, асп.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ИНТЕРПОЛЯЦИОННУЮ ОЦЕНКУ МОНОТОННОГО КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Недавно нами была получена интерполяционная оценка монотонного кусочно-полиномиального приближения непрерывной функции через второй модуль непрерывности r -й производной, а также показано, что эта оценка имеет место только для достаточно большого количества отрезков разбиения, которая существенно зависит от функции. В [2] оба результата распространены на случай выпуклого приближения и получены в более точной форме. Мы показываем, что в случае монотонного приближения соответствующие результаты также справедливы в соответственной более точной форме.

Ключевые слова: приближения функций, модуль непрерывности, выпуклое приближение, интерполяционные оценки.

I. Petrova, Ph. D. graduate

Taras Shevchenko' Kyiv National University, Kyiv, Ukraine

INTERPOLATORY ESTIMATES IN MONOTONE PIECEWISE-POLYNOMIAL APPROXIMATION

Recently we obtained an interpolation estimate for a monotone piecewise-polynomial approximation of a continuous on a segment function, involving the second modulus of continuity of the r -th derivative, and also have shown that this estimate is valid only for a sufficiently large number of segments of the partition, which essentially depends on the function. In paper [2] both results are widespread to the case of a convex approximation and obtained in somewhat more precise form. We show that in the case of a monotone approximation, the corresponding results are also valid in an appropriate more precise form.

Keywords: approximation of functions, continuity module, convex approximation, interpolation estimates.

УДК 517.98

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.02.08-12>

М. Сердюк, студ.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail: mariemgnta@gmail.com

ДО РІВНЯННЯ ЧАНДРАСЕКАРА У ПРОСТОРАХ $C([0,1])$ ТА $L_p([0,1])$

Знайдено достатні умови застосування методу послідовних наближень для розв'язання рівнянь типу Чандрасекара у банахових просторах $C([0,1])$ та $L_p([0,1])$.

Ключові слова: рівняння Чандрасекара, існування єдиного розв'язку, метод послідовних наближень, достатні умови.

Вступ. Нелінійне інтегральне рівняння

$$x(s) = 1 + \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad s \in [0,1] \quad (1)$$

у просторі $C([0,1])$ називається *рівнянням Чандрасекара* (С. Чандрасекар – американський астрофізик індійського походження, лауреат Нобелівської премії з фізики 1983 року (1910–1995)) [1]. Рівняння (1) виникає в астрофізиці під час опису розсіювання випромінювання [2]. Це рівняння належить до квадратних рівнянь у банаховому просторі вигляду

$$x = y + B(x, x), \quad (2)$$

де $B: E \times E \rightarrow E$ – обмежений білінійний оператор, E – банахів простір. Рівняння даного типу виникають у моделях різноманітних фізичних явищ, і одним із способів відшукування їхніх розв'язків є метод послідовних наближень. Надалі $E = C([0,1])$ або $E = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$.

У статтях [3, 4] знайдено достатні умови, за яких можна застосовувати принцип відображень стиску до рівняння (2). Ці результати застосовано до рівняння (1) у просторі $C([0,1])$ і показано існування та єдиність розв'язку (2) у певній замкненій кулі для $|\lambda| < \ln 2$. У статтях [5–7] за допомогою теорем про нерухому точку досліджувалось існування розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь. Зокрема, в [7] для рівняння типу Чандрасекара було доведено теорему існування у просторі $C([0,1])$.

Ґрунтуючись на результатах з [3], ми розглянули узагальнення рівняння Чандрасекара у просторах $C([0,1])$ та $L_p([0,1])$, отримали достатні умови, за яких у деякій замкненій кулі існує єдиний розв'язок рівняння (1) та можна застосовувати метод послідовних наближень для його відшукування.

Основний результат. Розглянемо таке узагальнення рівняння (1):

$$x(s) = y(s) + \lambda x(s) \int_0^1 f(s,t)x(t)dt, \quad s \in [0,1] \quad (3)$$

відносно $x \in E$, де $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $f: [0,1]^2 \rightarrow [0,+\infty)$ – борельова функція. Рівняння (3) рівносильне рівнянню $x = y + B(x,x)$, де $B(x,z)(s) = \lambda x(s) \int_0^1 f(s,t)z(t)dt$, $x, z \in E$, – білінійний оператор.

Лема 1. Нехай $E = C([0,1])$, функція $f: [0,1]^2 \rightarrow [0,+\infty)$ неперервна на $[0,1]^2$ і така, що для довільного $t \in [0,1]$, $f(\cdot, t)$ неспадна на $[0,1]$ і нетотожно нульова. Тоді $B: (C([0,1]))^2 \rightarrow C([0,1])$ та $\|B\| = |\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt$.

Доведення. Оскільки f неперервна на $[0,1]^2$, то оператор $B: E^2 \rightarrow E$ визначений коректно. Для довільних функцій $x, z \in C([0,1])$ оцінимо норму $B(x,z)$:

$$\|B(x,z)\| = \max_{s \in [0,1]} |\lambda x(s) \int_0^1 f(s,t)z(t)dt| \leq |\lambda| \max_{s \in [0,1]} |x(s)| \max_{u \in [0,1]} |z(u)| \max_{s \in [0,1]} \int_0^1 f(s,t)dt \leq |\lambda| \cdot \|x\|_{C([0,1])} \cdot \|z\|_{C([0,1])} \cdot \int_0^1 f(1,t)dt.$$

Покладемо $x_0 = z_0 \equiv 1 \in C([0,1])$. Тоді $\|x_0\| = \|z_0\| = 1$ і маємо $\|B(x_0, z_0)\| = \max_{s \in [0,1]} |\lambda \int_0^1 f(s,t)dt| = |\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt$. Звідси випливає $\|B\| = |\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt$. Застосовуючи наслідок 1 і теорему 2 із [3], отримаємо такий результат.

Теорема 1. Нехай $E = C([0,1])$ і виконуються умови леми 1. Тоді при $\|y\| < (4|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt)^{-1}$:

(i) рівняння (3) має єдиний розв'язок x^* у замкненій кулі $\bar{U}(0, r_1)$, де $r_1 = (2|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt)^{-1}$;

(ii) окрім того, $x^* \in \bar{U}(0, r_2)$, де $r_2 = (1 - \sqrt{1 - 4\|y\| \cdot |\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt}) / (2|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt)$.

Зауваження 1. За вказаної в теоремі 1 умови на $\|y\|$ можна також стверджувати, що в околі $U(x^*, R)$ немає інших розв'язків, де $R = \sqrt{1 - 4\|y\| \cdot |\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt} / (2|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt)$.

Приклад 1. Нехай $f(s,t) = \frac{s}{s+t}$, $s, t \in [0,1]$, $B(x,z)(s) = \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t)dt$. Тоді $\|B\| = |\lambda| \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = |\lambda| \ln(1+t) \Big|_{t=0}^1 = |\lambda| \ln 2$ і для такого довільного $y \in C([0,1])$, що $\|y\| < 1/(4|\lambda| \ln 2)$, виконується твердження теореми 1.

Зауважимо, що в рівнянні Чандрасекара (1) маємо $y = 1$, тому умови теореми 1 виконуються при $|\lambda| < 1/(4 \ln 2)$.

Приклад 2. Нехай $E = C([0,1])$, $f(s,t) = \sin s \cos t$, $s, t \in [0,1]$, $B(x,z)(s) = \lambda x(s) \int_0^1 (\sin s)(\cos t)z(t)dt$, $x, z \in C([0,1])$. Тоді $\|B\| = |\lambda| \int_0^1 \sin(1) \cos t dt = |\lambda| (\sin(1))^2$ і для такого довільного $y \in C([0,1])$, що $\|y\| < 1/(4|\lambda| (\sin(1))^2)$, справедлива теорема 1.

Розв'язок x^* рівняння (3) можна шукати методом послідовних наближень. Для цього введемо і розглянемо рівняння

$$v = y + F(v, v) \quad (4)$$

відносно $v \in E$, де $F : E \times E \rightarrow E$ – обмежений симетричний білінійний оператор, y – фіксований в E . Далі скористаємося лемою 3 із [3].

Теорема 2 ([3], теор. 3). Припустимо, що існує розв'язок v рівняння (4), який задовольняє умову $\|v\| < 1/(2\sqrt{\|B\|}(\sqrt{\|B-F\|} + \sqrt{\|B\|}))$. Тоді:

(i) рівняння (3) має єдиний розв'язок $x^* \in \bar{U}(v, r_1)$, де $r_1 = \sqrt{1 - 2\sqrt{\|B\|}(\sqrt{\|B-F\|} + \sqrt{\|B\|})/(2\|B\|)}$;

(ii) окрім того, $x^* \in \bar{U}(0, r_3)$, де $r_3 = (1 - 2\|B\| \cdot \|v\| - ((2\|B\| \cdot \|v\| - 1)^2 - 4\|B-F\| \cdot \|B\| \cdot \|v\|^2)^{1/2})/(2\|B\|)$;

(iii) наближення $x_{n+1} = y + B(x_n, x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, збігаються для довільного $x_0 \in \bar{U}(0, r_3)$ до розв'язку x^* рівняння (3) та

$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$, $n = 0, 1, 2, \dots$, де $q = 1 - ((2\|B\| \cdot \|v\| - 1)^2 - 4\|B-F\| \cdot \|B\| \cdot \|v\|^2)^{1/2}$. Покладемо $F(v, v) \equiv 0$, $v \in C([0, 1])$. Тоді

рівняння (4) рівносильне рівнянню $v = y$. Якщо тепер припустити, що $y \in C([0, 1])$ задовольняє умову теореми 1, то

виконується й умова теореми 2: $\|y\| < 1/(4|\lambda| \int_0^1 f(1, t) dt) = 1/(4\|B\|)$.

Зокрема, маємо оцінку похибки $\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$, де

$$q = 1 - \sqrt{(2|\lambda| \int_0^1 f(1, t) dt \|y\| - 1)^2 - 4|\lambda| \int_0^1 f(1, t) dt \|y\|^2} = 1 - \sqrt{1 - 4|\lambda| \int_0^1 f(1, t) dt \|y\|}.$$

Перейдемо тепер до випадку $E = L_p([0, 1])$, $1 < p < +\infty$. Нехай $B(x, z)(s) = \lambda x(s) \int_0^1 f(s, t) z(t) dt$, $x, z \in L_p([0, 1])$.

Лема 2. Нехай $E = L_p([0, 1])$, $1 < p < +\infty$, $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, +\infty)$ – борельова функція, така, що для довільного $t \in [0, 1]$ $f(\cdot, t)$ неспадна на $[0, 1]$ і не дорівнює нулю майже скрізь, та для довільного $s \in [0, 1]$ $f(s, \cdot) \in L_q([0, 1])$, де $1/p + 1/q = 1$.

Тоді оператор $B : (L_p([0, 1]))^2 \rightarrow L_p([0, 1])$ визначений коректно та справедлива оцінка

$$\|B\|_p \leq \lambda \cdot \|f(1, \cdot)\|_q \quad (5)$$

Доведення. Для довільних $x, z \in L_p([0, 1])$ із нерівності Гельдера маємо

$$|\int_0^1 f(s, t) z(t) dt| \leq \int_0^1 |f(s, t) z(t)| dt \leq ((\int_0^1 |f(s, t)|^q dt))^{\frac{1}{q}} (\int_0^1 |z(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|f(s, \cdot)\|_q \|z\|_p < \infty$$

для довільного $s \in [0, 1]$, тому інтеграл в означенні оператора B визначений коректно.

Далі для довільних $x, z \in L_p([0, 1])$ оцінимо:

$$\|B(x, z)\|_p = (\int_0^1 |ds| \lambda x(s) \int_0^1 |df(s, t) z(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \cdot (\int_0^1 |x(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} (\int_0^1 |f(s, t) z(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Застосувавши до внутрішнього інтеграла нерівність Гельдера, отримаємо

$$\|B(x, z)\|_p \leq \lambda \cdot (\int_0^1 |x(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} ((\int_0^1 |f(s, t)|^q dt)^{\frac{1}{q}} (\int_0^1 |z(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \cdot \|z\|_p (\int_0^1 |x(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} (\int_0^1 |f(s, t)|^q dt)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}}$$

Тепер за рахунок монотонності функції f за першою змінною, отримаємо

$$\|B(x, z)\|_p \leq \lambda \cdot \|z\|_p (\int_0^1 |x(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} \|f(s, \cdot)\|_q^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \cdot \|z\|_p \cdot \|f(1, \cdot)\|_q (\int_0^1 |x(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} = \lambda \|f(1, \cdot)\|_q \|z\|_p \|x\|_p.$$

Звідси отримуємо, що $B(x, z) \in L_p([0, 1])$ та оцінку (5).

Теорема 3. Нехай $E = L_p([0, 1])$ та виконуються умови леми 2. Тоді при $\|y\| < (4|\lambda| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)^{-1}$:

(i) рівняння (3) має єдиний розв'язок x^* у замкненій кулі $\bar{U}(0, \hat{r}_1)$, де $\hat{r}_1 = (2|\lambda| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)^{-1}$;

(ii) окрім того, $x^* \in \bar{U}(0, \hat{r}_2)$, де $\hat{r}_2 = (1 - \sqrt{1 - 4\|y\| \cdot |\lambda| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q})/(2|\lambda| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)$.

Зауваження 2. За вказаної в теоремі 3 умови на $\|y\|$ можна також стверджувати, що в околі $U(x^*, \hat{R})$ немає інших розв'язків, де $\hat{R} = \sqrt{1 - 4\|y\| \cdot \|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q} / (2\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)$.

Доведення цих тверджень ґрунтується на попередній лемі та результатах статті [2].

Зауваження 3. У випадку $p=1$ нерівність Гельдера застосувати не можна. Припустимо, що окрім вказаних вище умов $f(s, t)$ також неспадна за змінною t при довільному фіксованому $s \in [0, 1]$. Тоді для довільних $x, z \in L_1([0, 1])$ отримаємо таку оцінку:

$$\|B(x, y)\|_1 = \int_0^1 ds \left| \lambda x(s) \int_0^1 dt f(s, t) z(t) \right| \leq \lambda \left| \int_0^1 ds |x(s)| f(s, 1) \int_0^1 dt |z(t)| \right| \leq \lambda \left| f(1, 1) \int_0^1 ds |x(s)| \int_0^1 dt |z(t)| \right| = \lambda \|f(1, 1)\| \|x\|_1 \|z\|_1$$

Звідси $\|B\|_1 \leq f(1, 1) \|\lambda\|$ і можемо отримати аналогічний теоремі 3 результат.

Приклад 3. Нехай, $s, t \in [0, 1]$, $B(x, z)(s) = \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt$, $x, z \in L_p([0, 1])$, $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$. Тоді

$$\|f(s, \cdot)\|_q^q = \int_0^1 \left(\frac{s}{s+t} \right)^q dt = \frac{s^q}{1-q} (s+t)^{1-q} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{s^q}{-q+1} ((s+1)^{-q+1} - s^{-q+1}) \text{ та } \|B\|_p \leq \lambda \frac{1}{1-q} (2^{1-q} - 1).$$

Отже, для $y \in L_p([0, 1])$ таких, що $\|y\|_p < (4\|\lambda\| \frac{1}{1-q} (2^{1-q} - 1))^{-1}$, справедлива теорема 3.

Зауважимо, що у випадку $p=2$ оцінка (5) має вигляд $\|B\|_2 \leq \lambda / \sqrt{2} \approx 0,7071 \|\lambda\|$, а оскільки $C([0, 1]) \subset L_2([0, 1])$, то значення норми в $L_2([0, 1])$ як відповідного супремуму може тільки зрости. Оскільки $\|B\|_{C([0, 1])} = \lambda |\ln 2| \approx 0,6931 \|\lambda\|$, то отримана оцінка досить точна. Аналогічно випадку простору неперервних функцій, розв'язок x^* можна шукати методом послідовних наближень.

Теорема 4. Нехай $E = L_p([0, 1])$. Тоді при $\|y\| < (4\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)^{-1}$:

(i) рівняння (6) має єдиний розв'язок $x^* \in \bar{U}(v, \hat{r}_1)$, де $\hat{r}_1 = (2\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q)^{-1}$;

(ii) окрім того, $x^* \in \bar{U}(0, \hat{r}_3)$, де $\hat{r}_3 = (1 - 2\|\lambda\| (\|f(1, \cdot)\|_q \cdot \|y\| - \sqrt{1 - 4\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q \cdot \|y\|}) / (2\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q))$;

(iii) послідовні наближення $x_{n+1} = y + B(x_n, x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, збігаються для довільного $x_0 \in \bar{U}(0, \hat{r}_3)$ до розв'язку x^* рівняння (3) та $\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q} \|x_1 - x_0\|$, $n = 0, 1, 2, \dots$, де $q = 1 - \sqrt{1 - 4\|\lambda\| \cdot \|f(1, \cdot)\|_q \cdot \|y\|}$.

Висновки. У статті узагальнено результати про існування та єдиність у деякій кулі розв'язку узагальнення рівняння Чандрасекара в просторі $C([0, 1])$ для довільної підінтегральної функції. Також це рівняння було досліджено в просторі $L_p([0, 1])$ та одержано аналогічні результати. Отримано достатні умови для застосування методу послідовних наближень для відшукування розв'язку даного рівняння у просторах $C([0, 1])$ та $L_p([0, 1])$.

Список використаних джерел:

1. Chandrasekhar S. On stars, their evolution and their stability / S. Chandrasekhar // Nobel lectures, Physics. – World Scientific Publishing Co. – Singapore. – 1993.
2. Chandrasekhar S. Radiative transfer / S. Chandrasekhar // Dover Publ. – New York. – 1960.
3. Argyros I.K. On the improvement of the speed of convergence of some iterations converging to solutions of quadratic equations / I.K. Argyros // Acta Math. Hung. 1991. – 57 (3-4). – P. 245–252.
4. Argyros I.K. On a contraction theorem and applications / I.K. Argyros // Prop. Symp. Pure Math. A.M.S, 1986. – 45. – P. 51–53.
5. Hashem H. Solvability of Chandrasekhar's Quadratic Integral Equations in Banach Algebra / H. Hashem, A. Alhejelan // Applied Mathematics, 2017. – 8. – P. 846–856.
6. Cichoń M. On a Fixed Point Theorem for the Product of Operators / M. Cichoń, M.M.A. Metwali // J. of Fixed Point Theory and Applications, 2016. – 18. – P. 753–770.
7. El-Sayed A.M.A. Existence Results for Nonlinear Quadratic Integral Equations of Fractional Order in Banach Algebra / A.M.A. El-Sayed, H.H.G. Hashem // Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA), 2013. – 16. – P. 816–826.

Надійшла до редколегії 08.08.19

М. Сердюк, студ.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

К УРАВНЕНИЮ ЧАНДРАСЕКАРА В ПРОСТРАНСТВАХ $C([0, 1])$ И $L_p([0, 1])$

Найдены достаточные условия применения метода последовательных приближений для решения уравнений типа Чандрасекара в банаховых пространствах $C([0, 1])$ и $L_p([0, 1])$.

Ключевые слова: уравнения Чандрасекара, существование единственного решения, метод последовательных приближений, достаточные условия.

M. Serdiuk, stud.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON CHANDRASEKHAR EQUATION IN $C([0,1])$ AND $L_p([0,1])$ SPACES

The sufficient conditions for applying fixed-point iteration method for solving of Chandrasekhar type equations in $C([0,1])$ and $L_p([0,1])$ spaces are found.

Keywords: the Chandrasekhar equation, the existence of a single solution, method of successive approximations, sufficient conditions.

УДК 517.51

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.03.12-14>

М. Щеглов, студ.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: santa-krus@ukr.net

ПОТОЧКОВА ОЦІНКА ВІДХИЛЕННЯ ПОЛІНОМА КРЯКІНА ВІД НЕПЕРЕРВНОЇ НА ВІДРІЗКУ ФУНКЦІЇ

Отримано нові оцінки для алгебраїчних поліномів, які наближають неперервну на відрізку функцію, через модулі неперервності вищих порядків, а саме, поточкові оцінки.

Ключові слова: наближення неперервних функцій, поліноми Крякіна, поліном найкращого наближення, оцінка відхилення.

Вступ. Одним із фундаментальних результатів теорії наближення є нерівність Вітні. Ця нерівність стосується зв'язку між модулями неперервності вищих порядків функції на відрізку та похибкою відхилення від неї алгебраїчних поліномів. Зокрема, поліномів найкращого наближення, інтерполяційних і поліномів, які є похідними інтерполяційних поліномів первісної (поліномами Крякіна). У відомих доведеннях максимальне відхилення – і, власне, оцінка у нерівності Вітні – досягається біля кінців відрізка, а отже, всередині ця оцінка може бути набагато кращою.

Метою статті є отримання поточної оцінки величини відхилення поліномів Крякіна всередині відрізка і показати, що ця оцінка набагато краща за відому рівномірну [1].

Постановка задачі. Нехай C – простір неперервних на відрізку $I := [0;1]$ функцій із нормою

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$, тоді

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j f(x+jh),$$

k -та різниця функції f із кроком $h \geq 0$. k -й модуль неперервності функції f у точці $1/k$ визначається формулою

$$\omega_k(f, 1/k) := \sup_{x, x+kh \in I} |\Delta_h^k f(x)|.$$

Означення 1. Поліномом Крякіна $Q_{k-1}(f, \cdot)$ для функції $f \in C[0;1]$ називається алгебраїчний поліном степеня, не більше $k-1$, який є похідною інтерполяційного многочлена Лагранжа за рівновіддаленими вузлами $\frac{i}{k}$, де $i = 0, 1, \dots, k$, від первісної F функції f . Інакше кажучи, поліном Крякіна – це такий многочлен $Q_{k-1}(f, \cdot)$ степеня, не більше $k-1$, для якого

$$\int_0^{i/k} (f(t) - Q_{k-1}(f, t)) dt \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Із [1] відомо, що

$$\|f - Q_{k-1}\| \leq \tilde{W}(k) \omega_k(f, 1/k), \quad (1)$$

де $\tilde{W}(k) = 2$ при $k \leq 82000$ та $\tilde{W}(k) = 2 + \exp(-2)$ при $k > 82000$. Однак, як зазначено, така оцінка в (1) отримується на кінцях відрізка I , тобто на відрізках $[0; \frac{1}{k}]$ та $[\frac{k-1}{k}; 1]$. Тому постає запитання, чи можна цю оцінку покращити всередині відрізка, тобто, чи можна для $x \in [\frac{1}{k}; \frac{k-1}{k}]$ отримати нерівність

$$|f(x) - Q_{k-1}(f, x)| \leq p(x) \omega_k(f, \frac{1}{k}),$$

де функція p суттєво менша 2 для вказаних значень точок x .

Основний результат. Основним результатом даної статті є наступна теорема.

Теорема 1. На кожному відрізку $[\frac{m}{k}; \frac{m+1}{k}]$, де $0 < m < k-1$, $k \geq 13$, виконується нерівність

$$|g(x)| \leq c \frac{m \ln k}{C_k^m} \quad \text{при } m < k/2 \text{ та } |g(x)| \leq c \frac{(k-m-1) \ln k}{C_k^{k-m-1}} \quad \text{при } m \geq k/2, \text{ де } c = \text{const} \leq 4.$$

Позначимо $g := f - Q_{k-1}(f, \cdot)$. Для доведення теореми нам знадобиться наступна лема.

Лема [1, с. 274]. Якщо $\omega_k(f, \frac{1}{k}) \leq 1$ та $m < k/2$, $x \in [\frac{m}{k}; \frac{m+1}{k}]$, $\delta = \frac{1-x}{k-m}$, то

$$C_k^m |g(x)| \leq 1 + (k\delta)^k - (-1)^{k-m} C_k^m A_k'(x) + \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{m-1} C_k^j \frac{1}{m-j} |A_k(x + \delta(j-m))|, \quad (2)$$

де многочлен $A_k(x)$ задається таким чином:

$$A_k(x) := \frac{k^k}{k!} x(x - \frac{1}{k})(x - \frac{2}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}).$$

Доведення теореми. Проведемо для випадку $m < k/2$. Із міркувань симетрії звідси буде випливати і твердження теореми для другого випадку. Для доведення теореми 1 треба оцінити праву частину у формулі (2). Оскільки

$$k\delta = \frac{(1-x)k}{k-m} \leq \frac{(1-\frac{m}{k})k}{k-m} = 1, \text{ то}$$

$$1 + (k\delta)^k \leq 2. \quad (3)$$

Далі, враховуючи, що $x \in [\frac{m}{k}; \frac{m+1}{k}]$, при всіх $0 \leq i \leq m$ маємо:

$$-(-1)^{k-m} x(x - \frac{1}{k}) \dots (x - \frac{i-1}{k})(x - \frac{i+1}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}) \leq 0,$$

тому

$$\begin{aligned} -(-1)^{k-m} A_k'(x) &= -(-1)^{k-m} \sum_{i=0}^k \frac{k^k}{k!} x(x - \frac{1}{k}) \dots (x - \frac{i-1}{k})(x - \frac{i+1}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}) \leq \\ &\leq -(-1)^{k-m} \sum_{i=m+1}^k \frac{k^k}{k!} x(x - \frac{1}{k}) \dots (x - \frac{i-1}{k})(x - \frac{i+1}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}) = \\ &= \sum_{i=m+1}^k \frac{k^k}{k!} \left[x(x - \frac{1}{k}) \dots (x - \frac{m}{k}) \right] \left| (x - \frac{m+1}{k}) \dots (x - \frac{i-1}{k})(x - \frac{i+1}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=m+1}^k \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{(m+1)!}{k^{m+1}} \left| (x - \frac{m+1}{k}) \dots (x - \frac{i-1}{k})(x - \frac{i+1}{k}) \dots (x - \frac{k}{k}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=m+1}^k \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{(m+1)!}{k^{m+1}} \cdot \frac{(k-m)!}{k^{k-m-1} \cdot (k-i)} = \frac{(m+1)(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-m})}{C_k^m} \leq \\ &\leq \frac{(m+1)(1 + \ln(k-m))}{C_k^m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут враховано, що $\frac{m}{k} \leq x \leq \frac{m+1}{k}$.

Нарешті, для оцінки суми у формулі (2) при кожному значенні i оцінимо величину $|A_k(x + \delta(j-m))|$. Для цього зауважимо, що при $x \in [m/k, (m+1)/k]$ вираз $x + \delta(j-m)$ належить проміжку $[j/k, (j+2)/k]$. З урахуванням цієї властивості в добутку $|A_k(x + \delta(j-m))| = \frac{k^k}{k!} \prod_{i=0}^k (x + \delta(j-m) - \frac{i}{k})$ окремо оцінимо добуток перших $(j+1)$ множників та $(k-j) - x$, що залишилися. Оцінювати будемо аналогічно співвідношенню (4).

Будемо вважати, що $x \in [j/k, (j+2)/k]$, оскільки $m < \frac{k}{2}$, а $A_k(x) \leq A_k(x - \frac{1}{k})$ при $x \leq \frac{1}{2}$. У результаті отримуємо

$$\frac{k^k}{k!} \prod_{i=0}^k (x + \delta(j-m) - \frac{i}{k}) \leq \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{(j+1)!}{k^{j+1}} \cdot \frac{(k-j)!}{k^{k-j}} = \frac{j+1}{k C_k^j}.$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{m-1} C_k^j \frac{1}{m-j} |A_k(x + \delta(j-m))| &\leq \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{m-1} C_k^j \frac{1}{m-j} \cdot \frac{j+1}{k C_k^j} = \frac{2}{\delta k} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j+1}{m-j} \leq \\ &\leq \frac{4}{C_k^m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{m+1}{m-j} - 1 \right) \leq \frac{3}{C_k^m} ((m+1)(1 + \ln m) - m), \end{aligned} \quad (5)$$

де враховано, що $k \geq 6$. Із (2) – (5) знаходимо нерівність

$$|g(x)| \leq \frac{1}{C_k^m} (1 + 1 + (m+1)(1 + \ln(k-m)) + ((m+1)(1 + \ln m) - m)) \leq 4 \cdot \frac{m \ln k}{C_k^m}.$$

Останню нерівність можна довести за індукцією, оскільки при $m = 1$ вона виконується, бо $k \geq 13$, а при збільшенні m на одиницю, ліва частина збільшується менше, ніж права.

Зауваження 1. Для достатньо великих k константу 4 у правій частині останньої нерівності можна "покрасити" до константи $3 + \varepsilon$, де значення ε є як завгодно малим.

Зауваження 2. За певних умов на функцію f можна "покрасити" і рівномірну оцінку полінома найкращого наближення на відрізьку. Якщо максимальні абсолютні величини відхилень на ділянках не рівні між собою, то шляхом додавання до многочлена константи або лінійної функції, можна досягти, що максимальне відхилення полінома від функції на всьому відрізьку зменшиться. Рівномірна оцінка покращиться тим більше, чим більша різниця вищезгаданих абсолютних величин.

Висновки. Отримано поточкову оцінку величини відхилення поліномів Крякіна всередині відрізька, де ця оцінка набагато краща за відому рівномірну. Також отримано деякі умови на функцію, за яких відому рівномірну оцінку величини найкращого наближення можна покращити.

Основний результат статті дає підстави припускати, що оцінку в нерівності Уїтні можна покращити шляхом зміни полінома таким чином, що всередині відрізька оцінка "погіршиться", а на кінцях "покраситься", і тим самим "покраситься" і рівномірна оцінка. Це дасть можливість наблизитися до розв'язання задачі Сендова [2, 3] про найкращу сталу в нерівності Уїтні. Це дослідження було підтримано у межах Проекту 0118U003795 відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України.

This research was supported by the Project 0118U003795 from the Department of Targeted Training of Taras Shevchenko National University of Kyiv at the NAS of Ukraine.

Список використаних джерел:

1. Gilewicz J. Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant / Gilewicz J., I.A. Shevchuk, Yu.V. Kryakin // J. of Approximation Theory, 2002. – Vol. 119, Issue 2. P. 271–290.
2. Kryakin Yu.V. Whitney's constants and Sendov's Conjectures / Yu.V. Kryakin // Mathematica Balcanica, 2002. – Vol. 16, fasc. 1–4.
3. Sendov Bl. On the constants of H. Whitney / Bl. Sendov // C.R. Acad. Bulg. Sci., 1982. – Vol. 35, Issue 4. – P. 431–434.

Надійшла до редколегії 05.03.19

Н. Щеглов, студ.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ ПОЛИНОМА КРЯКИНА ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

Получены новые оценки для алгебраических полиномов, которые приближают непрерывную на отрезке функцию, через модули непрерывности высших порядков, а именно поточечные оценки.

Ключевые слова: приближения непрерывных функций, полиномы Крякина, полином наилучшего приближения, оценка отклонения.

M. Shcheglov, stud.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

POINTWISE ESTIMATE OF DEVIATION OF KRIKIN POLYNOMIAL FROM A FUNCTION, CONTINUOUS ON A SEGMENT

New estimates for the algebraic polynomials that approximate a function continuous on a segment involving moduli of continuous of high orders are obtained, namely the pointwise estimates.

Keywords: approximation of continuous functions, Kryakin polynomials, polynomial of best approximation, estimation of deviation.

УДК 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.04.14-19>

Г. Верьовкіна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,

І. Гап'як, канд. фіз.-мат. наук, асист.,

В. Самойленко, д-р фіз.-мат., проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

Т. Телятник, студ.

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

E-mail: valsamyul@gmail.com

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ІЗ РЕГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ

Для квадратного рівняння, що містить малий параметр, який входить до рівняння регулярним чином, і рівняння Дюфінга з малою нелінійністю побудовано їхні асимптотичні розв'язки у вигляді асимптотичних за Пуанкаре рядів за малим параметром і проаналізовано властивості отриманих розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля. Продемонстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для систем із регулярним збуренням. Для квадратного рівняння проведено порівняльний аналіз ряду Тейлора для точних і отриманих асимптотичних розв'язків, а для рівняння Дюфінга з малою нелінійністю проведено порівняльний аналіз графіків точних і асимптотичних розв'язків з однаковими початковими умовами.

Ключові слова: асимптотичний аналіз, метод малого параметра, регулярні збурення, асимптотичний ряд за Пуанкаре, рівняння Дюфінга.

Вступ. На практиці досить часто доводиться використовувати наближені значення для різних числових величин і функціональних виразів [1]. Найпростішим таким прикладом є представлення ірраціональних чисел їхніми раціональними наближеннями. Задача про наближене обчислення певних числових виразів є однією з порівняно простих мате-

матичних задач, хоча і не завжди дуже простою. Значно складнішими є задачі, коли доводиться відшукувати наближенні розв'язки певних рівнянь, які неможливо проінтегрувати у замкненому (явному) вигляді. Подібні задачі часто виникають, наприклад, при вивченні математичних моделей нелінійних процесів чи явищ. Для знаходження наближених розв'язків таких рівнянь використовуються різні математичні методи, зокрема, методи, які орієнтовані на використання сучасних обчислювальних машин. При цьому отримуються наближенні (чисельні) розв'язки, для яких потім будуються їхнє графічне зображення, тобто здійснюється візуалізація отриманих наближених (чисельних) розв'язків, що дає можливість наочно уявити властивості тих чи інших систем.

З іншого боку, не всі математичні моделі можуть бути ефективно проаналізовані за допомогою методів обчислювальної математики, оскільки задача, що вивчається, може мати певні сингулярні характеристики, які визначаються геометричними характеристиками області, де розглядається та чи інша задача, і відповідна система може характеризуватися наявністю певних процесів, для яких властива значна нестійкість. Зокрема, застосування методів обчислювальної математики проблематичне до систем і задач, яким властива так звана чутливість до початкових умов, і до так званих некоректних задач. Тому для дослідження багатьох математичних задач досить часто використовуються так звані асимптотичні методи, бо, незважаючи на значний прогрес у розвитку сучасних засобів обчислювальної техніки і розробку значної кількості різних пакетів прикладних програм для них, асимптотичні методи [2, 3] залишаються досить ефективним інструментом для аналізу математичних моделей у техніці та природознавстві, скільки їхнє використання дає можливість не лише побудувати в аналітичному вигляді наближені розв'язки диференціальних рівнянь, що вивчаються, але й дослідити їхні якісні властивості та проаналізувати поведінку відповідних складних систем.

З іншого боку, досить часто становить інтерес вивчення питання про певні властивості асимптотичних методів і розв'язків, які побудовані за допомогою цих методів, зокрема, питання про те, наскільки точно побудовані асимптотичні розв'язки наближають відповідний точний розв'язок задачі, що досліджується. Відповідь на дане питання залежить від багатьох чинників, як від асимптотичного методу, який використовується для побудови певних асимптотичних розв'язків, так і від типу задач, які розглядаються.

Асимптотичні методи успішно використовуються для наближених обчислень вже тривалий час. Зокрема, такі методи знайшли широке застосування при дослідженні задач небесної механіки вже в XVI ст. У подальшому асимптотичні методи ефективно використовувалися в теорії спеціальних функцій. Зокрема, ще Леонард Ейлер у 1754 р. за допомогою асимптотичних методів наближено обчислив інтеграл вигляду

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt, \quad (1)$$

який, як відомо, неможливо обчислити в явному вигляді. Для наближеного знаходження даного інтеграла Ейлер записав знаменник підінтегрального виразу за допомогою формули для геометричної прогресії, а потім на проміжку $(0; \infty)$ почленно проінтегрував отриманий розклад за змінною t . Таким чином, він отримав рівність [4]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}. \quad (2)$$

Очевидно, що ці обчислення не повністю математично коректні, оскільки при отриманні ряду (2) використано ряд для нескінченної геометричної прогресії, який збігається лише на деякому проміжку для значень $t \in (-|z|; |z|)$ і є розбіжним для будь-яких інших значень z . Проте формула (2) має сенс при $|z| \rightarrow \infty$, оскільки різниця між значенням інтеграла (1) і частинною сумою ряду (2), при будь-якій фіксованій кількості N доданків у частинній сумі ряду (2), але великих значеннях $|z|$, є малою величиною порівняно з доданками частинної суми, останній з яких має порядок $1/|z|^N$. Зауважимо, що відповідна різниця (між значенням інтеграла (1) та частинною сумою ряду (2)) не перевищує величини $N!/|z|^{N+1}$, де N – кількість доданків у частинній сумі. Таким чином, хоча ряд (2) розбіжний, але його частинні суми при великих значеннях $|z|$ добре (у певному сенсі) наближають значення інтеграла (1).

Ряд (2) є прикладом асимптотичного ряду за незалежною змінною $|z| \rightarrow \infty$. Такі ряди широко використовуються в теорії спеціальних функцій для обчислення значень різних функцій. Зазвичай подібні ряди є розбіжними, хоча у багатьох випадках вони збігаються, наприклад, збіжними є ряди для функцій Бесселя [5] всіх значень їх порядку ν .

Асимптотичні ряди є одним з основних елементів асимптотичного аналізу. У теорії асимптотичних методів зазвичай використовується поняття асимптотичного ряду за Пуанкаре за малим параметром.

Означення. Кажуть, що функція $f(x, \varepsilon)$ зображується асимптотичним рядом за Пуанкаре вигляду

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

якщо для будь-якого цілого $N \geq 0$ і для всіх значень x (з деякої множини) виконується умова

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ f(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n f_n(x) \right\} \varepsilon^{-N} = 0.$$

Ряд (3) є прикладом асимптотичного ряду за малим параметром ε . Саме у такому сенсі ми розуміємо у подальшому поняття "асимптотичного ряду за малим параметром".

У даній статті розглянуто дві досить прості задачі про побудову асимптотичних розв'язків для рівнянь з малим збуренням, а саме: задачу про побудову за допомогою методу малого параметра асимптотичних розв'язків для квадратного рівняння з регулярним збуренням та задачу про побудову за допомогою методу Крилова–Боголюбова–Митропольського [6] асимптотичних розв'язків для класичного рівняння Дюфінга з малим нелінійним збуренням, тобто рівняння вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon x^3, \quad \text{де } \varepsilon - \text{малий параметр.} \quad (4)$$

Проаналізовано властивості побудованих асимптотичних розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля, проведено порівняльний аналіз точних і отриманих асимптотичних розв'язків, продемонстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для системи, що містить малий параметр регулярним чином.

Отримані результати роботи мають певний науково-методичний характер і можуть становити інтерес для студентів, аспірантів і фахівців фізико-математичного профілю та можуть знайти своє застосування при викладанні навчальних курсів із сучасних методів прикладної математики і теорії математичного моделювання.

Квадратне рівняння з малим параметром. Квадратне рівняння:

$$ax^2 + 2\epsilon bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (5)$$

з дійсними коефіцієнтами у полі комплексних чисел має два розв'язки, які легко можна записати в явному вигляді. Не втрачаючи загальності, розглянемо випадок, коли рівняння (4) має два (різні) дійсні корені (вважаємо, що $b \neq 0$). Більше того, надамо в (4) коефіцієнтам рівняння такі числові значення: $a = 1, b = 1, c = -1$. Таким чином, маємо рівняння

$$x^2 + 2\epsilon x - c = 0. \quad (6)$$

Розв'язки рівняння (5) записуються за допомогою формул

$$x_+(\epsilon) = -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2}, \quad x_-(\epsilon) = -\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2}. \quad (7)$$

За допомогою методу малого параметра знайдемо асимптотичні розв'язки рівняння (6). Такі розв'язки шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots, \quad (8)$$

де коефіцієнти розкладу (8) є дійсними величинами.

Використовуючи стандартні ідеї і методи асимптотичного аналізу, отримуємо алгебраїчні рівняння для коефіцієнтів асимптотичного розкладу (8), з яких легко знаходимо асимптотичні розклади для обох розв'язків незбуреного (при $\epsilon = 0$) рівняння (6):

$$x_+(\epsilon) = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad x_-(\epsilon) = -1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \dots. \quad (9)$$

Ряди (9) є асимптотичними рядами Пуанкаре для функцій (7). Окрім того, виконується властивість

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_+(\epsilon) = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_-(\epsilon) = -1, \quad (10)$$

яка свідчить про те, що побудованим асимптотичним розв'язкам (7) притаманна властивість неперервності за малим параметром, оскільки при $\epsilon \rightarrow 0$ ці розв'язки прямують до відповідних значень незбуреного рівняння (6).

Порівняємо тепер отримані асимптотичні розклади (9) з відповідними степеневими рядами Тейлора за малим параметром для точних розв'язків рівняння (7). Для цього скористаємося формулою

$$(1 + \epsilon^2)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - \frac{\epsilon^8}{640} + \dots$$

і знайдемо степеневі ряди Тейлора для функцій (7). Маємо

$$x_+(\epsilon) = -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2} = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad x_-(\epsilon) = -\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2} = -1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad (11)$$

Отже, порівняння формул для асимптотичних розв'язків (9) рівняння (6) і рядів Тейлора (10) для функцій (7) свідчить про те, що із формул для побудованих асимптотичних розв'язків рівняння (6) з високою точністю можна знайти значення точних розв'язків (7) рівняння (6). Очевидно, що цей результат, як і співвідношення (10), має загальний характер, а не лише для випадку конкретно заданих числових коефіцієнтів рівняння (6), оскільки відповідні властивості є наслідком теореми про неперервну залежність розв'язків рівняння (6) від малого параметра, який міститься в цьому рівнянні регулярним чином. Окрім того, порівняння графіків для точних (формули (7)) та асимптотичних (формули (9)) розв'язків рівняння (6) додатково підтверджує досить високу точність побудованих асимптотичних розв'язків. Зокрема,

третє асимптотичне наближення $1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8}$ для точного розв'язку при всіх значеннях $\epsilon \in (0; 0,75)$ майже збігається

з відповідним точним розв'язком рівняння (6), а при значенні $\epsilon \approx 1$ це асимптотичне наближення і точний розв'язок рівняння (6) відрізняються менше, ніж на 5 %.

Зазначимо також, що для асимптотичних наближень і точного розв'язку $x_+(\epsilon)$ рівняння (6) виконуються такі нерівності:

$$1 - \epsilon < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} < -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2} < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

де у лівій частині нерівності спочатку записано (відповідно до порядку членів цієї нерівності) перше і третє асимптотичні наближення, а у правій частині нерівності (після виразу для точного розв'язку) – четверте і друге асимптотичні наближення для розв'язку рівняння (6). Іншими словами, асимптотичні наближення поступово (зверху та знизу) "підходять" до точного розв'язку.

Рівняння Дюфінга з малою нелінійністю. Розглянемо тепер задачу про знаходження асимптотичних розв'язків для рівняння вигляду (4). Для побудови рівномірно придатного асимптотичного розкладу для розв'язку рівняння (4) скористаємося асимптотичним методом Крилова–Боголюбова–Митропольського [6–8]. Цей метод дозволяє отримати асимптотичні розклади, які не містять так званих секулярних доданків [2], які, очевидно, погіршують збіжність відповідного асимптотичного ряду.

Як відомо [6], ідея методу Крилова–Боголюбова–Митропольського полягає в тому, що розв'язок будується у вигляді асимптотичного ряду, кожен доданок якого є функцією амплітуди і фази, що змінюються у часі, а отже, є розв'язками деяких диференціальних рівнянь. Відповідно до алгоритму цього методу асимптотичний розв'язок для рівняння (4) шукається у вигляді ряду

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (12)$$

де функції $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots$ є періодичними функціями змінної ψ з періодом 2π , причому ці функції задовольняють умову

$$\int_0^{2\pi} u_k(a, \psi) e^{\pm i\psi} d\psi = 0,$$

тобто не містять першої гармоніки за кутовою змінною ψ , а величини a, ψ як функції часу визначаються із системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \frac{d\psi}{dt} = 1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (13)$$

Для того, щоб отримати асимптотичний розв'язок (12), треба визначити функції $A_1(a), B_1(a), u_1(a), A_2(a), B_2(a), u_2(a, \psi), \dots$ таким чином, щоб вираз (12), у якому замість величин a, ψ записані функції від часу, які визначаються рівняннями (13), асимптотично задовольняв рівняння Дюфінга (4). У результаті нескладних математичних обчислень стандартним чином знаходимо друге асимптотичне наближення для розв'язку рівняння (4) у вигляді

$$x = a \cos \psi + \varepsilon \frac{a^3}{32} \cos 3\psi - \varepsilon^2 \frac{a^5}{1024} (21 \cos 3\psi - \cos 5\psi),$$

де функції $a(t), \psi(t)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{3a^3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256}. \quad (14)$$

У рівняннях (14) для функцій $a(t), \psi(t)$ сталі інтегрування a_0, ψ_0 вибираються з урахуванням початкових умов. Покладемо $a_0 = 1, \psi_0 = 0$. Тоді, проінтегрувавши рівняння (14), знаходимо друге асимптотичне наближення як функцію часової змінної у такому вигляді:

$$x = \cos \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t + \varepsilon \frac{1}{32} \cos 3 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t - \varepsilon^2 \frac{1}{1024} \left(21 \cos 3 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t - \cos 5 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t \right). \quad (15)$$

Отже, побудований таким чином асимптотичний розв'язок не містить сингулярних доданків і є асимптотичним рядом Пуанкаре за малим параметром.

Порівняльний аналіз асимптотичного і точного розв'язків рівняння Дюфінга. Проведемо порівняння значень для побудованого асимптотичного розв'язку (15) і точного розв'язку рівняння Дюфінга (4) за відповідних початкових умов. З цією метою скористаємося фазовим портретом рівняння Дюфінга у фазовій площині відповідної динамічної системи. Перший інтеграл для рівняння (4) має вигляд

$$I(x; \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - \varepsilon \frac{x^4}{2}. \quad (16)$$

Значення першого інтеграла (16) для конкретного розв'язку рівняння (4) дорівнює деякій сталій, яка для різних розв'язків рівняння (4) набуває різних дійсних значень і визначає відповідні цим розв'язкам лінії рівня на фазовій площині для динамічної системи, що відповідає рівнянню (4). Лінії рівня для першого інтеграла на рис. 1 зображені для значень сталої C , яку по чергово вибрано такою, що дорівнює 0.01; 0.05; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 15, а на рис. 2 – для значень сталої C , яку по чергово вибрано такою, що дорівнює 0.01; 0.05; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 15; 25; 40.

Зауважимо, що на рис. 1 і рис. 2 добре видно вплив малого параметра в рівнянні Дюфінга (4), який проявляється в тому, що окіл точки $x=0, y=0$, у якому розв'язки цього рівняння періодичні, а відповідні фазові криві замкнені, стає все більшим і більшим.

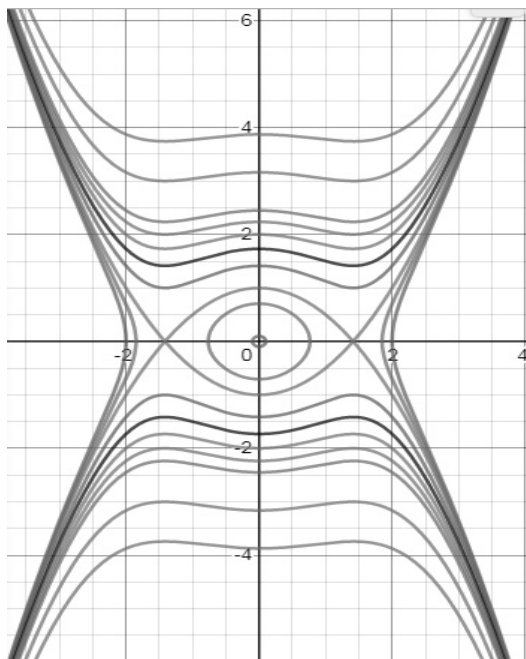
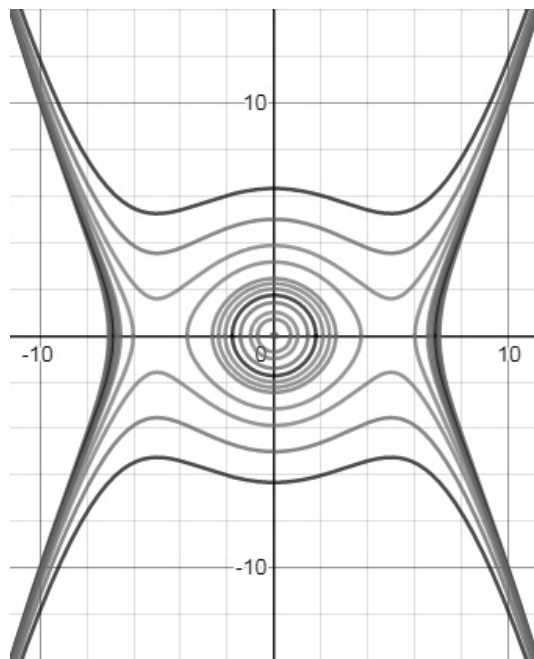
Порівняльний аналіз асимптотичного і точного розв'язків рівняння Дюфінга можна досить просто провести, порівнявши графіки цих розв'язків, які мають задовольняти однакові початкові умови. Для отримання графіків точних розв'язків рівняння (4) можна використати формулу (16) для першого інтеграла, вибравши належним чином значення

сталой C у виразі $I(x; \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - \varepsilon \frac{x^4}{2} = C_\varepsilon$. Це значення легко обчислюється за формулою (16), якщо задано конкретне значення малого параметра і початкові умови для розв'язку рівняння (4). Шукані початкові значення для функцій $x(t)$ та її похідної $\dot{x}(t) = y(t)$ при $t = 0$ можна отримати із формули (15). Дійсно, враховуючи формулу (15), знаходимо:

для випадку $\varepsilon = 0.5$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.01041, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.76034$;

для випадку $\varepsilon = 0.1$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.0029, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.95521$;

для випадку $\varepsilon = 0.04$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.00103, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.98197$.

Рис. 1. Фазовий портрет при $\varepsilon = 0.5$ Рис. 2. Фазовий портрет при $\varepsilon = 0.04$

Записані вище значення сталої C_ε обчислено за формулою $C_\varepsilon = x_0^2 - \varepsilon \frac{x_0^4}{2}$ при відповідних значеннях малого параметра.

Аналіз фазових кривих рівняння (4) і графіків відповідних їм асимптотичних розв'язків (15) при значеннях малого параметра $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ і $\varepsilon = 0.04$ показав, що ці розв'язки при значеннях малого параметра $\varepsilon = 0.1$ і $\varepsilon = 0.04$ практично збігаються, і відрізняються менше, ніж на 10 % при $\varepsilon = 0.5$, що підтверджує високу ефективність методу Крилова–Боголюбова–Митропольського.

Висновки. Для квадратного рівняння, що містить малий параметр регулярним чином, і рівняння Дюфінга з малою нелінійністю побудовано їхні асимптотичні розв'язки у вигляді асимптотичних за Пуанкаре рядів за малим параметром та проаналізовано властивості отриманих розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля. Продemonстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для систем з регулярним збуренням. Для квадратного рівняння проведено порівняльний аналіз ряду Тейлора для точних і отриманих асимптотичних розв'язків, а для рівняння Дюфінга з малою нелінійністю проведено порівняльний аналіз графіків точних і асимптотичних розв'язків з однаковими початковими умовами.

Список використаних джерел:

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
2. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе / Н. Г. де Брейн. – М.: изд-во иностран. лит-ры, 1965. – 248 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
5. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – М.: Наука, 1978. – 376 с.
6. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
7. Митропольский Ю.А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартинюк. – К.: Вища шк., 1979. – 248 с.
8. Mitropolsky Yu.A. On asymptotic solutions to delay differential equations with slowly varying coefficients / Yu.A. Mitropolsky, V.H. Samoilenko, G. Matarazzo // Nonlinear analysis, 2003. – Vol. 52. – P. 971–988.

Надійшла до редколегії 22.12.19

А. Верьовкина, канд. физ.-мат. наук, доц.,
И. Гапак, канд. физ.-мат. наук, ассист.,
В. Самойленко, д-р физ.-мат., проф.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Т. Телятник, студ.,
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Для квадратного уравнения, содержащего малый параметр регулярным образом, и уравнения Дюфинга с малой нелинейностью построены их асимптотические решения в виде асимптотических по Пуанкаре рядов по малому параметру и проанализированы свойства полученных решений, когда малый параметр стремится к нулю. Продemonстрирована суть теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра для систем с регулярным возмущением. Для квадратного уравнения проведен сравнительный анализ ряда Тейлора для точных решений и полученных асимптотических приближений, а для уравнения Дюфинга с малой нелинейностью проведен сравнительный анализ графиков точных и асимптотических решений с одинаковыми начальными условиями.

Ключевые слова: асимптотический анализ, метод малого параметра, регулярные возмущения, асимптотический ряд по Пуанкаре, уравнения Дюфинга.

G. Verovkina, Ph. D., assoc. prof.,
 I. Gapyak, Ph. D., assist. prof.,
 V. Samoilenko, Full Doctor, prof.
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 T. Telyatnik, stud.
 Boris Grinchenko University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF SOLUTIONS TO EQUATIONS WITH REGULAR PERTURBATION

For a quadratic equation containing a small parameter regularly, and for the Duffing equation with small nonlinearity, their asymptotic solutions are constructed in the form of asymptotic Poincaré series for a small parameter. The properties of the obtained asymptotic solutions when a small parameter tends to zero are analyzed. The sense of the theorem on the continuous dependence of the solution on the parameter for systems with regular perturbation is demonstrated. A Taylor series for the exact solution of the quadratic equation with small parameter is compared with its obtained asymptotic expansion. For the Duffing equation with small nonlinearity, we compare the graphs of the exact and asymptotic solutions under the same initial conditions.

Keywords: asymptotic analysis, small parameter method, regular perturbation, asymptotic series in Poincaré sense, the Duffing equation.

УДК 517.928

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.05.19-25>

С. Паффик, канд. фіз.-мат. наук
 Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
 E-mail: s.p.pafyk@npu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У НЕКРИТИЧНОМУ ТА КРИТИЧНОМУ СТІЙКИХ ВИПАДКАХ

Використовуючи асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь та їхніх систем, побудовано асимптотичний розв'язок крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь. Розглянуто некрітичний і критичний стійкі випадки. Для кожного з випадків знайдено відповідні асимптотичні оцінки.

Ключові слова: асимптотичні розв'язки, метод малого параметра, сингулярне збурення, двоточкова крайова задача, асимптотичні оцінки.

1. **Постановка задачі.** Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x + f(t; \varepsilon), \quad (1)$$

$$Mx(0; \varepsilon) + Nx(T; \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $t \in [0; T]$, ε – малий дійсний параметр, такий що $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$; $A(t; \varepsilon)$ – матриця n -го порядку, коефіцієнтами якої є дійсні або комплекснозначні функції; M і N – матриці n -го порядку зі сталими коефіцієнтами; $f(t; \varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ – задані n -вимірні вектори; $x(t; \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) матриця $A(t; \varepsilon)$ і вектор $f(t; \varepsilon)$ допускають на заданому відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε :

$$A(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), f(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2) вектор $d(\varepsilon)$ записується у вигляді асимптотичного ряду

$$d(\varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k d_k; \quad (4)$$

3) коефіцієнти $A_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, розвинень (3) нескінченно диференційовані на $[0; T]$;

4) матриця $A_0(t)$ має на відрізку $[0; T]$ n різних власних значень $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$;

5) $\det M \neq 0$.

При виконанні цих умов будемо досліджувати питання про існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2) і побудову її асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ у некрітичному та критичному стійких випадках.

2. **Асимптотика розв'язання крайової задачі в некрітичному стійкому випадку.** Припустимо, що окрім умов 1)–5), сформульованих у п. 1, виконується наступна:

6) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, i = \overline{1, n}, \forall t \in [0; T]$.

Із цієї умови випливає, що серед власних значень матриці $A_0(t)$ немає нульового, тобто спостерігається некрітичний випадок.

При виконанні умов 1) – 6) розглянемо питання побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у некрітичному стійкому випадку.

Згідно з [1, 4] загальний формальний розв'язок системи (1) можна записати у вигляді

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^n u_i(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau; \varepsilon) d\tau \right) c_i(\varepsilon) + \tilde{x}(t; \varepsilon), \quad (5)$$

де $u_i(t; \varepsilon)$, $\tilde{x}(t; \varepsilon)$ – n -вимірні вектори, а $\lambda_i(t; \varepsilon)$ – скалярні функції, які представляються у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра ε :

$$u_i(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k u_i^{(k)}(t), \lambda_i(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(t), i = \overline{1, n}, \tilde{x}(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \tilde{x}^{(k)}(t), \quad (6)$$

а $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, – довільні скалярні множники. Коефіцієнти розвинень (6) згідно з [4] визначаються за рекурентними формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(0)}(t) &= \lambda_i(t), u_i^{(0)}(t) = \varphi_i(t), \lambda_i^{(k)}(t) = -\left(g_i^{(k)}(t), \psi_i(t)\right), u_i^{(k)}(t) = H_i(t) b_i^{(k)}(t), \\ g_i^{(k)}(t) &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_i^{(j)}(t) u_i^{(k-j)}(t) - \sum_{j=1}^k A_j(t) u_i^{(k-j)}(t) + \frac{du_i^{(k-1)}(t)}{dt}, \\ \tilde{x}^{(k)}(t) &= A_0^{-1}(t) \left(\frac{d\tilde{x}^{(k-1)}(t)}{dt} - \sum_{i=1}^k A_i(t) \tilde{x}^{(k-i)}(t) - f_k(t) \right), i = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $A_0(t)$, а $\varphi_i(t)$ – відповідні власні вектори; $\psi_i(t)$ – елемент нуль-простору матриці $(A_0(t) - \lambda_i(t)E)^*$, спряженої до матриці $A_0(t) - \lambda_i(t)E$; $H_i(t)$ – матриця, узагальнено обернена до матриці $A_0(t) - \lambda_i(t)E$.

Використаємо рівність (5) для побудови формального розв'язання даної крайової задачі. Для цього запишемо $c_i(\varepsilon)$ у вигляді формальних рядів

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k c_i^{(k)}, i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Члени ряду (8) визначатимемо таким чином, щоб вектор-функція (5) формально задовольняла крайову умову (2). Підставивши (5) у (2), матимемо

$$M \sum_{i=1}^n u_i(0; \varepsilon) c_i(\varepsilon) + N \sum_{i=1}^n u_i(T; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \lambda_i(\tau; \varepsilon) d\tau \right) c_i(\varepsilon) + M\tilde{x}(0; \varepsilon) + N\tilde{x}(T; \varepsilon) = d(\varepsilon). \quad (9)$$

З умови 6) випливає, що другий доданок у лівій частині рівності (9) буде експоненціально малим при малих ε , якщо обмежитись будь-якою скінченною кількістю членів у відповідних розвиненнях для $u_i(T; \varepsilon)$ і $\lambda_i(t; \varepsilon)$. Тому відповідно до [2] знехтуємо цим доданком і для визначення $c_i(\varepsilon)$ замість (9), враховуючи умову 5), використовуватимемо рівняння

$$\sum_{i=1}^n u_i(0; \varepsilon) c_i(\varepsilon) = M^{-1} d(\varepsilon) - \tilde{x}(0; \varepsilon) - M^{-1} N \tilde{x}(T; \varepsilon).$$

Підставивши в останню рівність розвинення (6), (8) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях ε , дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$\sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^n c_i^{(j)} u_i^{(k-j)}(0) = M^{-1} d_k - \tilde{x}^{(k)}(0) - M^{-1} N \tilde{x}^{(k)}(T), k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Запишемо систему (10) у векторно-матричній формі. У результаті отримаємо

$$U^{(0)}(0) c^{(k)} = M^{-1} d_k - \tilde{x}^{(k)}(0) - M^{-1} N \tilde{x}^{(k)}(T) - \sum_{j=0}^{k-1} U^{(k-j)}(0) c^{(j)}, k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

де $c^{(k)} = \text{col}(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)})$ – n -вимірний вектор, а $U^{(k)}(0) = [u_1^{(k)}(0), u_2^{(k)}(0), \dots, u_n^{(k)}(0)]$ – квадратна матриця n -го порядку. Зокрема, $U^{(0)}(0) = [\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)]$.

Оскільки згідно з [3, 6] вектори $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ лінійно незалежні на $[0; T]$, а тому $\det U^{(0)}(0) \neq 0$. Отже, із рівності (11) отримаємо

$$c^{(k)} = \left(U^{(0)}(0) \right)^{-1} \left(M^{-1} d_k - \tilde{x}^{(k)}(0) - M^{-1} N \tilde{x}^{(k)}(T) - \sum_{j=0}^{k-1} U^{(k-j)}(0) c^{(j)} \right), k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

У результаті вдалося побудувати формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді (5), у якому члени рядів (6), (8) визначаються за рекурентними формулами (7), (12).

Покажемо тепер, що побудований формальний розв'язок (5) крайової задачі (1), (1) є асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \rightarrow 0$ її точного розв'язку. Із цією метою, перемноживши ряди (6), (8), якими зображуються вектори $u_i(t; \varepsilon), i = \overline{1, n}$, і множники $c_i(\varepsilon)$, та обірвавши утворені розвинення, а також розвинення, якими зображуються функції $\lambda_i(t; \varepsilon), i = \overline{1, n}$, і вектор $\tilde{x}(t; \varepsilon)$, на m -му члені, утворимо m -наближення:

$$x^{(m)}(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k c_i^{(j)} u_i^{(k-j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(\tau) \right) d\tau \right) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{x}^{(k)}(t). \quad (13)$$

За побудовою m -наближення (13) задовольняє систему (1) і крайову умову (2) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$. У цьому можна переконатися, підставивши вектор (13) у диференціальний вираз $L(x) = \varepsilon \frac{dx}{dt} - A(t; \varepsilon)x - f(t; \varepsilon)$ і взявши до уваги спосіб визначення коефіцієнтів $u_i^{(k)}(t)$, $\lambda_i^{(k)}(t)$, $\tilde{x}^{(k)}(t)$, $c_i^{(k)}$ відповідних розвинень (6), (8), які входять у (13), матимемо

$$L(x^{(m)}(t; \varepsilon)) = \varepsilon^{m+1} a(t, \varepsilon), d(\varepsilon) - Mx^{(m)}(0; \varepsilon) - Nx^{(m)}(T; \varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon), \quad (14)$$

де $a(t, \varepsilon)$ – деяка вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0; T]$, а $b(\varepsilon)$ – деякий обмежений вектор. Із рівностей (14) випливає, що

$$\varepsilon \frac{dx^{(m)}(t; \varepsilon)}{dt} = A(t; \varepsilon)x^{(m)}(t; \varepsilon) + f(t; \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} a(t; \varepsilon), Mx^{(m)}(0; \varepsilon) + Nx^{(m)}(T; \varepsilon) = d(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon). \quad (15)$$

Точний розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$x(t; \varepsilon) = x^{(m)}(t; \varepsilon) + y^{(m)}(t; \varepsilon), \quad (16)$$

де $y^{(m)}(t; \varepsilon)$ – нев'язка, яку необхідно оцінити за нормою. Підставивши (16) у (1), (2) і врахувавши (15), для нев'язки $y^{(m)}(t; \varepsilon)$ отримаємо крайову задачу

$$\varepsilon \frac{dy^{(m)}(t; \varepsilon)}{dt} = A(t; \varepsilon)y^{(m)}(t; \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} a(t; \varepsilon), My^{(m)}(0; \varepsilon) + Ny^{(m)}(T; \varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon). \quad (17)$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи (17) можна подати у вигляді

$$y^{(m)}(t; \varepsilon) = Y(t; \varepsilon)c(\varepsilon) + \varepsilon^m \int_0^t Y(t; \varepsilon)Y^{-1}(\tau; \varepsilon)a(\tau; \varepsilon)d\tau, \quad (18)$$

де $Y(t; \varepsilon) = U(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda(\tau; \varepsilon) d\tau \right)$ – фундаментальна матриця однорідної системи диференціальних рівнянь, яка відповідає системі (17); другий доданок формули (18) являє собою частинний розв'язок системи (17), знайдений методом варіації довільних сталих, $c(\varepsilon)$ – довільний сталий відносно t n -вимірний вектор; $\Lambda(t; \varepsilon) = \text{diag} \{ \lambda_1(t; \varepsilon), \lambda_2(t; \varepsilon), \dots, \lambda_n(t; \varepsilon) \}$, $U(t; \varepsilon) = [u_1(t; \varepsilon), u_2(t; \varepsilon), \dots, u_n(t; \varepsilon)]$.

Використовуючи асимптотичну формулу $Y(t; \varepsilon) = (U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right)$, у якій

$$U^{(m)}(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k U^{(k)}(t); \quad \Lambda^{(m)}(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Lambda^{(k)}(t),$$

зокрема

$$U^{(0)}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)], \quad \Lambda^{(0)}(t) = \text{diag} \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t) \},$$

рівність (18) можна представити у вигляді

$$y^{(m)}(t; \varepsilon) = (U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) c(\varepsilon) + \varepsilon^m \int_0^t \left((U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_\tau^t \Lambda^{(m)}(s; \varepsilon) ds \right) \left((U^{(m)}(\tau; \varepsilon))^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) a(\tau; \varepsilon) \right) d\tau. \quad (19)$$

Зазначимо, що матриця $U^{(m)}(t; \varepsilon)$ неособлива при досить малих ε завдяки неособливості матриці $U^{(0)}(t)$ при всіх $t \in [0; T]$ і неперервності елементів матриць $U^{(k)}(t), k = 1, 2, \dots$. При цьому, як показано в [5], $(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m))^{-1} = (U^{(m)}(t; \varepsilon))^{-1} + O(\varepsilon^m)$, а матриця $(U^{(m)}(t; \varepsilon))^{-1}$ рівномірно обмежена на відрізку $[0; T]$ при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Підставивши останній вираз у крайову умову (17), дістанемо

$$\begin{aligned} & \left(U^{(m)}(0; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) + (M^{-1}NU^{(m)}(T; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) \right) c(\varepsilon) = \varepsilon^m M^{-1}b(\varepsilon) - \\ & - M^{-1}N \varepsilon^m \int_0^T \left(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_t^T \Lambda^{(m)}(s; \varepsilon) ds \right) \left(\left(U^{(m)}(\tau; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) a(\tau; \varepsilon) d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки згідно з умовою 6) елементи матриці $\exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right)$ прямують до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ швидше, ніж ε^m , то $(M^{-1}NU^{(m)}(T; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) = O(\varepsilon^{m+1})$ і, отже, з останньої рівності можна отримати

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) &= \varepsilon^m \left(\left(U^{(m)}(0; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}) \right) M^{-1}b(\varepsilon) - \varepsilon^m \left(\left(U^{(m)}(0; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}) \right) \cdot \\ & \cdot M^{-1}N \int_0^T \left(U^{(m)}(0; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_t^T \Lambda^{(m)}(s; \varepsilon) ds \right) \left(\left(U^{(m)}(\tau; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) a(\tau; \varepsilon) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Підставивши (20) у (19), одержимо такий вираз для нев'язки $y^{(m)}(t; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t; \varepsilon) &= -\varepsilon^m \left(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) \left(\left(U^{(m)}(0; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) M^{-1}N \cdot \\ & \cdot \int_0^T \left(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_t^T \Lambda^{(m)}(s; \varepsilon) ds \right) \left(\left(U^{(m)}(\tau; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) a(\tau; \varepsilon) d\tau + \\ & + \varepsilon^m \left(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_t^T \Lambda^{(m)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) \left(\left(U^{(m)}(0; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) b(\varepsilon) + \\ & + \varepsilon^m \int_0^T \left(U^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_t^T \Lambda^{(m)}(s; \varepsilon) ds \right) \left(\left(U^{(m)}(\tau; \varepsilon) \right)^{-1} + O(\varepsilon^m) \right) a(\tau; \varepsilon) d\tau. \end{aligned}$$

Перейшовши в цій рівності до оцінок за нормою і врахувавши обмеженість усіх матричних і векторних функцій, які містяться в її правій частині, дістанемо, що $\|y^{(m)}(t; \varepsilon)\| \leq \varepsilon^m C$, де C – деяка стала, що не залежить від ε . Із цих міркувань випливає, що при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x(t; \varepsilon)$ такий, що $\|x(t; \varepsilon) - x^{(m)}(t; \varepsilon)\| \leq \varepsilon^m C$.

Таким чином, побудований нами формальний розв'язок задачі (1), (2) є асимптотичним розвиненням її точного розв'язку $x(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причому виконується асимптотична формула $x(t; \varepsilon) = x^{(m)}(t; \varepsilon) + O(\varepsilon^m)$. У результаті доведено таку теорему.

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1) – 6), то крайова задача (1), (2) при досить малих $\varepsilon > 0$ має єдиний розв'язок, що записується за допомогою асимптотичної формули

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \left(\sum_{j=0}^k c_i^{(j)} u_i^{(k-j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(\tau) \right) d\tau \right) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{x}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^m),$$

де вектори $u_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{x}^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots$, і функції $\lambda_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$, визначаються за рекурентними формулами (7), а числа $c_i^{(j)}$, $i = \overline{1, n}$, – за формулами (20).

3. Асимптотика розв'язання крайової задачі в критичному стійкому випадку. Розглянемо критичний випадок, припустивши, що замість умови 6) виконується наступна умова:

$$7) \operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, \forall t \in [0; T], i = \overline{1, n-1}, \lambda_n(t) \equiv 0.$$

У цьому випадку скориставшись $(n-1)$ -ми розв'язками однорідної системи вигляду (6), що відповідають ненульовим власним значенням матриці $A_0(t)$, а розв'язок, що відповідає нульовому власному значенню, побудуємо у вигляді ряду

$$x_n(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k u_n^{(k)}(t). \quad (21)$$

Для визначення коефіцієнтів цього ряду підставимо його в однорідну систему диференціальних рівнянь $\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x$, яка відповідає неоднорідній системі (1). Прирівнявши в одержаному співвідношенні вирази при однакових степенях ε , дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$A_0(t)u_n^{(0)}(t) = 0, A_0(t)u_n^{(k)}(t) = b_n^{(k)}(t), \quad (22)$$

де

$$b_n^{(k)}(t) = \frac{du_n^{(k)}(t)}{dt} - \sum_{i=1}^k A_i(t)u_n^{(k-i)}(t), k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

Оскільки згідно з умовою 7) $\det A_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$, то з рівняння (22) знайдемо

$$u_n^{(0)}(t) = \alpha_0(t)\varphi(t), \quad (24)$$

де $\varphi(t)$ – власний вектор матриці $A_0(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню, а $\alpha_0(t)$ – скалярна функція, яка підлягає визначенню. При $k = 1$ друге рівняння (22) з урахуванням (23) і (24) набуває вигляду

$$A_0(t)u_n^{(1)}(t) = \frac{d\alpha_0(t)}{dt}\varphi(t) + \alpha_0(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} - \alpha_0(t)A_1(t)\varphi(t).$$

Остання система буде сумісною тоді і тільки тоді, коли вектор, який розташований у правій її частині, буде ортогональним до вектора $\psi(t)$ – елемента нуль-простору матриці $A_0^*(t)$, спряженої до матриці $A_0(t)$, тобто

$$\left(\frac{d\alpha_0(t)}{dt}\varphi(t) + \alpha_0(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} - \alpha_0(t)A_1(t)\varphi(t), \psi(t) \right) = 0. \quad (25)$$

Оскільки нульове власне значення матриці $A_0(t)$ просте, то йому згідно з [4] відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1, а тому $(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0, \forall t \in [0; T]$. Звідси вектор $\psi(t)$ визначатимемо таким чином, щоб $(\varphi(t), \psi(t)) = 1$. Ураховуючи цю рівність, умова сумісності (25) набуде вигляду

$$\frac{d\alpha_0(t)}{dt} + \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} - A_1(t)\varphi(t), \psi(t) \right) \alpha_0(t) = 0.$$

Позначивши $g(t) = \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} - A_1(t)\varphi(t), \psi(t) \right)$, звідси знайдемо

$$\alpha_0(t) = \exp \left(\int_0^t g(\tau) d\tau \right). \quad (26)$$

Тепер друге рівняння (22) при $k = 1$ розв'язне, і з нього отримаємо $u_n^{(1)}(t) = A_0^+(t)b_n^{(1)}(t) + \alpha_1(t)\varphi(t)$, де $A_0^+(t)$ – матриця, узагальнено обернена до матриці $A_0(t)$, а функцію $\alpha_1(t)$ знайдемо з умови розв'язності другого рівняння (22) при $k = 2$.

Якщо $u_n^{(j)}(t)$ відомі при $j < k$ і виражаються формулою $u_n^{(j)}(t) = A_0^+(t)b_n^{(j)}(t) + \alpha_j(t)\varphi(t)$, то для знаходження $\alpha_s(t)$ використаємо умову сумісності другого рівняння (22) при $k = s + 1$. Взявши до уваги, що

$$b_n^{(s+1)}(t) = \frac{d\alpha_s(t)}{dt}\varphi(t) + \alpha_s(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} - \alpha_s(t)A_1(t)\varphi(t) + \frac{d}{dt}(A_0^+(t)b_n^{(s)}(t)) - A_1(t)A_0^+(t)b_n^{(s)}(t) - \sum_{i=2}^{s+1} A_i(t)u_n^{(s+1-i)}(t),$$

відповідну умову сумісності дістанемо у вигляді неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} - g(t)\alpha_s(t) = \sum_{i=2}^{s+1} (A_i(t)u_n^{(s+1-i)}(t), \psi(t)) + (A_1(t)A_0^+(t)b_n^{(s)}(t), \psi(t)) - \left(\frac{d}{dt}(A_0^+(t)b_n^{(s)}(t)), \psi(t) \right),$$

розв'язавши яке, визначимо функцію $\alpha_s(t)$. Тоді за формулою

$$u_n^{(s)}(t) = A_0^+(t)b_n^{(s)}(t) + \alpha_s(t)\varphi(t) \quad (27)$$

знайдемо вектор-функцію $u_n^{(s)}(t)$.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) тепер будемо шукати у вигляді

$$x(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau; \varepsilon) d\tau \right) c_i(\varepsilon) + \varepsilon^{-1} u_n(t; \varepsilon) + \varepsilon^{-1} \tilde{x}(t; \varepsilon), \quad (28)$$

де скалярні множники $c_i(\varepsilon), i = \overline{1, n}$, зображуються у вигляді розвинень (8), а вектор $\tilde{x}(t; \varepsilon)$ записується у вигляді ряду

$$\tilde{x}(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \tilde{x}^{(k)}(t). \quad (29)$$

Члени $\tilde{x}^{(k)}(t), k=0,1,\dots$, ряду (29) визначаються за такими формулами:

$$\tilde{x}^{(0)}(t) = C_0(t) \varphi(t), \tilde{x}^{(k)}(t) = A_0^+(t) g^{(k)}(t) + C_k(t) \varphi(t), k=1,2,\dots, \quad (30)$$

де $g^{(k)}(t) = -f^{(k)}(t) + \frac{d\tilde{x}^{(k-1)}(t)}{dt} - \sum_{i=1}^k A_i(t) \tilde{x}^{(k-i)}(t), k=1,2,\dots$, а $C_k(t), k=0,1,\dots$, – скалярні функції, які визначаються з умови сумісності $(g^{(k+1)}(t), \psi(t)) = 0, k=0,1,\dots$.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (8) підставимо вираз (28) у крайову умову (2). Знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0; \varepsilon) c_i(\varepsilon) + M u_n(0; \varepsilon) c_n(\varepsilon) + M \tilde{x}(0; \varepsilon) + N u_n(T; \varepsilon) c_n(\varepsilon) + N \tilde{x}(T; \varepsilon) = \varepsilon d(\varepsilon).$$

Підставивши в цю рівність відповідні розвинення для $u_i(0; \varepsilon), c_i(\varepsilon), i=\overline{1, n}, u_n(T; \varepsilon), \tilde{x}(T; \varepsilon), d(\varepsilon)$ і прирівнявши вирази при однакових степенях ε , приходимо до нескінченної системи рівнянь

$$M \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{(j)} u_i^{(k-j)}(0) + M c_n^{(j)} u_n^{(k-j)}(0) + N c_n^{(j)} u_n^{(k-j)}(T) = d_{k-1} - M \tilde{x}^{(k)}(0) - N \tilde{x}^{(k)}(T), k=0,1,\dots$$

Запишемо останні системи у векторно-матричній формі. У результаті отримаємо

$$W^{(0)} c^{(k)} = d_{k-1} - M \tilde{x}^{(k)}(0) - N \tilde{x}^{(k)}(T) - \sum_{j=1}^k W^{(k-j)} c^{(j)}, k=0,1,\dots, \quad (31)$$

де $c^{(j)} = \text{col}(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \dots, c_n^{(j)})$ – n -вимірний вектор, а $W^{(k)} = [Mu_1^{(k)}(0), \dots, Mu_{n-1}^{(k)}(0), Mu_n^{(k)}(0) + Nu_n^{(k)}(T)]$ – квадратна матриця n -го порядку. Зокрема, $W^{(0)} = [M\varphi_1(0), \dots, M\varphi_{n-1}(0), M\varphi_n(0) + N\varphi_n(T)]$.

Припустимо тепер, що, крім 1) – 5), 7), виконується ще одна умова:

$$8) \det W^{(0)} \neq 0.$$

При виконанні умови 8) рівняння (31) однозначно розв'язні, і з них дістанемо

$$c^{(k)} = (W^{(0)})^{-1} \left(d_{k-1} - M \tilde{x}^{(k)}(0) - N \tilde{x}^{(k)}(T) - \sum_{j=1}^k W^{(k-j)} c^{(j)} \right), k=0,1,\dots, \quad (32)$$

Отже, за допомогою рекурентних формул можна послідовно визначити будь-які вектори $c^{(k)}, k=0,1,\dots$. Асимптотичний характер побудованого в такий спосіб формального розв'язку (28) доводиться аналогічно до попереднього випадку, який розглянуто в п. 4. При цьому асимптотична оцінка відповідної нев'язки $y^{(m)}(t; \varepsilon)$ на один порядок погіршилася у зв'язку з наявністю в (28) від'ємного степеня ε : $\|y^{(m)}(t; \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{m-1}$, де C – константа, яка не залежить від ε .

Отже, і в даному випадку за виконання умов 1) – 5), 7), 8) крайова задача (1), (2) при достатньо малих ε має єдиний розв'язок, який записується за допомогою асимптотичної формули

$$x^{(m)}(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k c_i^{(j)} u_i^{(k-j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(\tau) \right) d\tau \right) + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \left(\sum_{j=0}^k c_n^{(j)} u_n^{(k-j)}(t) \right) + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{x}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{m-1}). \quad (33)$$

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді теореми 2.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1) – 5), 7), 8), то крайова задача (1), (2) при досить малих $\varepsilon > 0$ має єдиний розв'язок, який записується за допомогою асимптотичної формули (33), де вектор-функції $u_i^{(k)}(t), i=\overline{1, n}, k=\overline{0, m}$, знаходяться за формулами (7), (24), (27), $\tilde{x}^{(k)}(t), k=\overline{0, m}$, – за формулою (30), скалярні функції $\lambda_i^{(k)}(t), i=\overline{1, n-1}, k=\overline{0, m}$, – за формулами (7), а числа $c_i^{(j)}, i=\overline{1, n}, j=\overline{0, m}$, – за формулою (32).

Список використаних джерел:

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Высшая шк., 1990. – 208 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М. І. Шкіль. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.

5. Шкиль Н. И. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – К. : Высшая шк., 1991. – 207 с.
6. Gohberg I. Matrix polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – Philadelphia, 2009. – 410 p.

Надійшла до редколегії 08.06.19

С. Пафук, канд. физ.-мат. наук
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКРИТИЧЕСКИХ И КРИТИЧЕСКИХ СТОЙКИХ СЛУЧАЯХ

Используя асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и их систем, построено асимптотическое решение краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрены не критический и критический устойчивые случаи. Для каждого из случаев найдены соответствующие асимптотические оценки.

Ключевые слова: асимптотические решения, метод малого параметра, сингулярное возмущение, двухточечная краевая задача, асимптотические оценки.

S. Pafyk, Ph. D.
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF A TWO-POINT EDGE-BASED PROBLEM FOR A LINEAR SINGULARLY DISTURBED SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN NONCRITICAL AND CRITICAL STABLE CASES

Using asymptotic methods in the theory of differential equations and their systems, an asymptotic solution of the boundary value problem for a linear singularly perturbed system of differential equations is constructed three are. Considered non-critical and critical resistant cases. For each of the cases, the corresponding asymptotic estimates were found.

Keywords: asymptotic solutions, small parameter method, singular perturbation, two-point boundary value problem, asymptotic estimates.

УДК 519.6, 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.06.25-30>

І. Гап'як, канд. фіз.-мат. наук, асист.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: igaryak@gmail.com

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ГРАНУЛЬОВАНИХ ГАЗІВ

Для систем частинок із дисипативною взаємодією розглянуто кінетичне рівняння типу Больцмана для гранульованих газів, яке є узагальненням класичного рівняння Больцмана. Побудовано чисельний розв'язок задачі Коші для такої кінетичної рівняння та досліджено його стійкість.

Ключові слова: кінетичне рівняння Больцмана, гранульовані гази, чисельні розв'язки, обчислювальні схеми.

Вступ. Класичне кінетичне рівняння Больцмана має фундаментальне значення в сучасній математичній фізиці [3, 5, 9]. Воно знаходить застосування як у класичних задачах теорії рідин і газів, так і при моделюванні масової поведінки великого скупчення однорідних мікрооб'єктів довільної природи [2]. Але для багатьох важливих практичних питань, пов'язаних із дослідженням динаміки частинок, взаємодія яких супроводжується втратою енергії, таке рівняння виявляється непридатним. Подібні ситуації набувають значення при розгляданні динаміки гранульованих середовищ, які включають у себе велику кількість явищ у самоорганізованих структурах: утворення великомасштабних кластерів (зоряні хмари, планетарні кільця), ударних хвиль тощо [10]. У зв'язку з цим виникає потреба будувати і вивчати властивості не тільки аналітичних розв'язків, які існують на скінченних інтервалах часу, а й чисельних розв'язків відповідних узагальнень рівняння Больцмана, у яких такі ефекти спостерігаються.

Одним із таких узагальнень є кінетичне рівняння Больцмана для гранульованих газів [4], яке відрізняється від свого класичного прототипу наявністю спеціального параметра (коефіцієнта відновлення), який відповідає за середній ступінь дисипації протягом одного акту міжчастинкової взаємодії. Незважаючи на те, що дисипативне рівняння Больцмана має широке практичне застосування, його розв'язки зазвичай шукають за допомогою прямого імітаційного моделювання методами Монте-Карло. Як добре відомо, результати, що отримані такими методами, містять суттєві стохастичні "забруднення", які значно спотворюють розв'язок і унеможливають його практичне використання в більшості прикладних задач. Водночас класичне рівняння Больцмана та чисельні методи його розв'язання добре вивчені [8] і можуть бути частково перенесені на дисипативний випадок, зважаючи на їхню спорідненість. Часткові результати містяться в [6].

Опишемо процедуру побудови чисельного розв'язку задачі Коші для кінетичного рівняння Больцмана з дисипативною взаємодією та просторово-однорідним інтегралом зіткнень, яке було отримано В.І. Герасименком та М.С. Боровченковою у [4] і наведемо приклади чисельної реалізації для окремих частинних випадків коефіцієнта відновлення.

1. Рівняння типу Больцмана для гранульованих газів. Для гранульованих систем частинок припускається, що середня довжина вільного пробігу гранул значно більша за їхній типовий розмір і динаміка таких систем визначається дисипативною природою короткодіючої взаємодії між гранулами. Тому розглядаємо систему нефіксованої кількості

пружних куль одиничної маси з діаметром $\sigma > 0$, що рухаються у двовимірному просторі. Кожна пружна куля характеризується фазовими координатами $(q_i, v_i) = x_i, i \geq 1$, координатою q_i і швидкістю v_i . Дисипативна динаміка такої системи описана в [4].

При непружних зіткненнях відповідні ефекти дисипації моделюються за допомогою коефіцієнта відновлення α ($0 < \alpha < 1$), який характеризує ступінь непружності, а саме: $g'_{i,j} \cdot \omega = -\alpha(g \cdot \omega)$, де $g_{i,j} = v_i - v_j$ – відносна швидкість i та j частинок до взаємодії, v_i, v_j – відповідні абсолютні швидкості i та j частинок до взаємодії та $g'_{i,j} = v'_i - v'_j$ – відносна швидкість тієї ж пари частинок після взаємодії; v'_i, v'_j – відповідні абсолютні швидкості i та j частинок після взаємодії; ω – одиничний вектор, що характеризує кут розсіювання i -ї частинки, що рухається з відносною швидкістю g .

Зазвичай коефіцієнт відновлення вважається фізичною сталою, хоча насправді він пов'язаний з відносною швидкістю таким чином, що зіткнення на близьких швидкостях будуть майже пружними. При побудові чисельного розв'язку кінетичного рівняння Больцмана для гранульованих газів будемо вважати, що $\alpha = \text{const}$. Задача Коші для кінетичного рівняння Больцмана з дисипативною взаємодією твердих куль має такий вигляд:

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t} + v \nabla_q F_1(t) = I(F_1(t), F_1(t)), \quad (1)$$

$$F_1(0, q, v) = F_1^0(q, v), \quad (2)$$

де $F_1(t) = F_1(t, q, v)$ – інтегрована, нерівноважна функція розподілу з координатами q і швидкостями v , фізичний зміст якої полягає в тому, що вираз $F_1(t, q, v) dq dv$ визначає ймовірність того, що існує пружна куля в околі dq та dv з координатою q і швидкістю v у момент часу t , $I(F_1(t), F_1(t))$ – інтеграл зіткнень, який визначений у [4].

Розглянемо просторово-однорідний інтеграл зіткнень. Визначимо інтеграл зіткнень через його дію на тестову функцію $\psi \in C_0^\infty(R^2)$, де C_0^∞ – простір неперервно-диференційованих функцій з компактним носієм [6], за допомогою формули

$$\int_{R^2} I(F_1, F_1)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{R^2} \int_{R^2} \int_{S^1} B(\omega, g) F_1(v) F_1(v_1) [\psi(v') + \psi(v'_1) - \psi(v) - \psi(v_1)] d\omega dv_1 dv, \quad (3)$$

де $S^1 = \{\omega \in R^2 \mid |\omega| = 1, \omega \cdot (v - v_1)\}$, $B(\omega, g)$ – ядро інтеграла зіткнень (ядро розсіювання), яке задає механізм взаємодії.

У випадку реальних газів вираз для $B(\omega, g)$ може бути досить складним. Фактично ця функція містить у собі всі характерні ефекти взаємодії частинок, повне урахування яких не завжди можливе. Тому найчастіше обмежуються певними спрощеними моделями, які у більшості випадків не призводять до значних помилкових відхилень у чисельних розв'язках. Розглянемо випадок, коли ядро описується формулою

$$B(\omega, g) = C_\lambda |g|^\lambda, \quad \text{де } C_\lambda > 0 \text{ – певна стала.} \quad (4)$$

Вираз (4) узагальнює два відомих випадки: максвеллівський газ, коли $\lambda = 0$, і газ, який складається із твердих куль, коли $\lambda = 1$.

2. Побудова обчислювальної схеми. Для побудови наближеного розв'язку для задачі Коші (1), (2) на часовому відрізку $[0, T]$, де $T > 0$ скористуємося схемою розщеплення, яку запропоновано в [8] для класичного рівняння Больцмана. Для цього введемо до розгляду два оператори A і B , які визначено таким чином:

$$A(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla_q u,$$

$$B(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} - I(\xi, \xi).$$

Утворимо далі рівномірне з кроком Δt розбиття (сітку) $\{t_m\}_{m=0}^M$ часового проміжку $[0, T]$, на кожному кроці якого замість задачі Коші (1), (2) будемо розглядати таку пару задач:

$$A(u) = 0, \quad (5)$$

$$u(t, q, v) = u_0(q, v), \quad (6)$$

$$B(\xi) = 0, \quad (7)$$

$$\xi(t, q, v) = \xi_0(q, v). \quad (8)$$

При цьому кажуть, що задача Коші (5), (6) відповідає транспортній фазі процесу, а задача Коші (7), (8) – релаксацийній.

Ідея методу розщеплення полягає в тому, що кожна з цих задач розв'язується окремо. Одразу зазначимо, що коректність такого розщеплення визначається тим, як саме будуть поєднані розв'язки транспортного та релаксацийного етапів. Позначимо через $S_A^{\Delta t}$ і $S_B^{\Delta t}$ однокрокові оператори розв'язку для задач Коші (5), (6) та (7), (8), відповідно.

Позначимо за допомогою $S_A^{\Delta t} u_0$ наближене значення розв'язку задачі Коші (5), (6) у момент часу Δt , а за допомогою $S_B^{\Delta t} \xi_0$ – наближене значення розв'язку задачі Коші (7), (8) у момент часу Δt .

Найпростіша схема полягає в поєднанні, на кожному кроці розв'язання задач Коші (5), (6) та (7), (8):

$$F_1(t^{m+1}) = S_B^{\Delta t} S_A^{\Delta t} F_1(t^m).$$

Легко перекоонатися, що така схема поєднання задач Коші (5), (6) та (7), (8) завжди даватиме наближений розв'язок задачі Коші (1), (2) порядку якого не більший одиниці. З метою покращення властивостей апроксимації зазвичай обирають більш складні схеми. Наприклад, для другого порядку апроксимації можна використовувати процедуру симетричного розщеплення за Стренґом [11]:

$$F_1(t^{m+1}) = S_A^{\Delta t/2} S_B^{\Delta t} S_A^{\Delta t/2} F_1(t^m). \quad (9)$$

Розглянемо спочатку транспортну задачу Коші (5), (6). Очевидно, що це звичайна задача Коші для рівняння перенесення, розв'язок якої може бути представлений аналітично: $u(t, q, v) = u_0(q - vt, v)$. Проста структура розв'язку обумовлена насамперед відсутністю граничних умов. У загальному випадку, при моделюванні динаміки газів у замкненій просторовій області, необхідно враховувати ефекти відбиття від її стінок, для чого треба задати відповідні крайові умови. У цій статті ми розглядаємо еволюцію частинок у всьому просторі, а тому крайові умови відсутні.

Більш складного підходу до знаходження чисельного розв'язку потребує задача Коші (7), (8). Зазвичай розв'язок таких задач шукають як результат розкладання за певним базисом, як правило ортогональним, за функціями від просторових змінних з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для такого розв'язання, ґрунтуючись на методах Фур'є–Гальоркіна, можна записати систему звичайних диференціальних рівнянь відносно вказаних коефіцієнтів, для розв'язку якої зазвичай використовується відповідний чисельний метод, зазвичай це метод Рунге–Кутти або його варіації. Оскільки цей підхід подібний методам, які використовуються при вивченні спектральних задач, що виникають у теорії інтегральних рівнянь, то відповідні чисельні методи називають *спектральними*. Точність таких методів (спектральна точність) залежить лише від точності розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь і кількості базисних елементів, що входять у розв'язання шуканої функції.

Перед побудовою розв'язку релаксаційної задачі (6) зробимо одне зауваження. Згідно з означенням (2) інтеграл зіткнень береться по необмеженій області всіх можливих швидкостей. Але, оскільки початкова умова обирається майже цілком зосередженою на скінченній області двовимірної площини, а початкова функція розподілу близька до максвеллівської функції розподілу, то шукану функцію можна вважати такою, яка зосереджена на компактному носії. Формально для цього достатньо перевизначити початкову умову, визначивши її нулем на тій частині площини, на якій її значеннями можна знехтувати, але додатково слід забезпечити неперервність такої функції. Зрозуміло, що з часом початкова область може розширюватися, але для обмежених часових інтервалів на це можна не звертати уваги. Така можливість обґрунтовується такою теоремою [6].

Теорема 1. Нехай $\text{supp}[\xi(t, q, v)] \subset U(0, r)$, де $U(0, r)$ – диск радіуса $r > 0$ із центром у початку координат, тоді

$$1) \text{supp}[I(\xi, \xi)(t, q, v)] \subset U(0, \sqrt{2}r);$$

$$2) \int_{R^2} I(\xi, \xi)(\eta) \psi(\eta) d\eta = \frac{C_1}{2} \int_{U(0, \sqrt{2}r)} \int_{U(0, 2r)} \int_{S^1} |g| \xi(\eta) \xi(\eta - g) [\psi(\eta') - \psi(\eta)] d\omega dg d\eta,$$

де $\eta - g \in U(0, (2 + \sqrt{2})r)$ і $\eta' \in U(0, (1 + \alpha + \sqrt{2})r)$.

Фактично теорема 1 стверджує, що у випадку функцій розподілу зосереджених на деякому диску скінченних розмірів, значення інтеграла зіткнень не зміниться, якщо межі інтегрування "обрізати" відповідно до розмірів носія функції. При цьому сам інтеграл зіткнень є функцією з компактним носієм відносно швидкісної змінної.

Зауважимо, що носій функції ξ по змінній v повністю належить диску радіуса r із центром у початку координат.

Завдяки теоремі 1 функцію $\xi(t)$ можна вважати визначеною на квадраті $[-V, V]^2$, де $V \geq (3 + \sqrt{2})R$, і періодично продовжити за межі цього квадрата. Дійсно, твердження теореми гарантує, що такий вибір виключає можливість перетинання відрізків періодичності і позбавляє похибок, що можуть виникнути внаслідок нашарування періодів.

Нехай $k = (k_1, k_2)$ – мультиіндекс (цілочисловий вектор), для якого введемо звичайні (евклідові) означення скалярного добутку і норми. Під записом $k = -N \dots N$ будемо розуміти, що всі k_i пробігають значення з діапазону $-N \dots N$ одночасно. Апроксимуємо функцію ξ частинною сумою ряду Фур'є ξ_N за тригонометричним базисом:

$$\xi_N(t, v) = \sum_{k=-N}^N \tilde{\xi}_k(t) e^{ik \cdot v},$$

де

$$\tilde{\xi}_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} \xi(t, v) e^{-ik \cdot v} dv.$$

Підставимо це зображення в задачу (6) і запишемо визначальну умову методу Гальоркіна – умову ортогональності нев'язки до базисних функцій:

$$\int_{[-\pi, \pi]^2} \left(\frac{\partial \xi_N}{\partial t} - I(\xi_N, \xi_N) \right) e^{ik \cdot v} dv = 0.$$

Враховуючи властивість ортогональності тригонометричного базису, після деяких математичних перетворень отриману умову можна переписати в такий спосіб:

$$\frac{\partial \hat{\xi}_k}{\partial t} = \sum_{r+s=k}^N \hat{\xi}_r \hat{\xi}_s (\hat{B}(r,s) - \hat{B}(s,s)), \quad (10)$$

де модальні коефіцієнти $\hat{B}(r,s)$ визначаються згідно з теоремою 1, у якій на місце тестових функцій для слабого представлення інтеграла зіткнень (2) послідовно підставлено відповідні функції тригонометричного базису:

$$\hat{B}(r,s) = \frac{C_1}{2} \int_{U(0,2\beta\pi)} \int_{S^1} |g| \exp \left(-ig \cdot s + i \frac{1+\alpha}{4} (r+s) \cdot (g - |g| \omega) \right) d\omega dg.$$

Перепишемо вираз для $\hat{B}(r,s)$, відокремивши вкладені інтеграли:

$$\hat{B}(r,s) = \frac{C_1}{2} \int_{U(0,2\beta\pi)} |g| \exp \left(ig \cdot r \frac{1+\alpha}{4} - ig \cdot s \frac{3-\alpha}{4} \right) f_0(|g|, r+s, \alpha) dg,$$

де $f_0(|g|, r+s, \alpha) = \int_{S^1} \exp \left(-i |g| \omega \cdot (r+s) \frac{1+\alpha}{4} \right) d\omega$. Оскільки $\int_{S^1} \exp(-iq \cdot \omega) d\omega = 2 \int_0^\pi \cos(|q| \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(|q|)$, де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, то $f_0(|g|, r+s, \alpha) = 2\pi J_0 \left(\frac{1+\alpha}{4} |g| |r+s| \right)$ і, відповідно:

$$\hat{B}(r,s) = C_1 \pi \int_{U(0,2\beta\pi)} |g| \exp \left(ig \cdot r \frac{1+\alpha}{4} - ig \cdot s \frac{3-\alpha}{4} \right) J_0 \left(\frac{1+\alpha}{4} |g| |r+s| \right) dg.$$

Переходячи в останньому виразі до полярних координат, матимемо

$$\begin{aligned} \hat{B}(r,s) &= C_1 \pi \int_0^{2\beta\pi} \rho^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos \left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)| \rho}{4} \right) \cos \theta d\theta \right] J_0 \left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4} \right) d\rho = \\ &= 2C_1 \pi^2 \int_0^{2\beta\pi} \rho^2 J_0 \left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)| \rho}{4} \right) J_0 \left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4} \right) d\rho = \\ &= 2C_1 \pi^2 (2\beta\pi)^3 \int_0^1 \rho^2 J_0 \left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)| \rho}{4} \right) J_0 \left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4} \right) d\rho. \end{aligned}$$

Нехай $C_1 = (2\pi^2 (2\beta\pi)^3)^{-1}$, $\mu = |r(1+\alpha) - s(3-\alpha)|/4$, $\sigma = |r+s|(1+\alpha)/4$, тоді остаточний вираз для модальних коефіцієнтів набуває форми

$$\hat{B}(r,s) = \int_0^1 \rho^2 J_0(\mu\rho) J_0(\sigma\rho) d\rho. \quad (11)$$

Формула (11) замінює багатократну апроксимацію інтеграла зіткнень набором відносно простих одновимірних інтегралів. Кожний із цих інтегралів може бути попередньо обчислений і збережений ще до початку основного обчислювального циклу. Далі на кожному часовому перерізі достатньо звертатися до утвореного таким чином масиву для побудови і подальшого розв'язання основної системи (10).

Зауважимо, що при $\alpha = 1$ отримані формули збігаються з результатами для звичайного рівняння Больцмана [8].

3. Швидкість алгоритму та стійкість чисельного розв'язку. Швидкість алгоритму значною мірою обумовлена складністю обчислення інтеграла (2). У розглянутих нами випадках, зважаючи на зроблені припущення, інтеграл вдається згрупувати у відносно прості формули, завдяки чому швидкодія цілком визначається можливостями обраної реалізації методу Рунге–Кутти, а також складністю формування системи (10), яке потребує на кожному кроці $O(N^{2d})$ одиниць часу [6]. У більш загальних ситуаціях із нетривіальним ядром розсіяння подібні спрощення зазвичай недосяжні.

Для обґрунтування стійкості побудованого розв'язку, очевидно, достатньо показати, що стійкою є дискретизація інтеграла зіткнень. Щоб сформулювати основний результат, введемо деякі позначення. Нехай P^N – лінійна оболонка, натягнута на підмножину тригонометричного базису до N -го степеня включно:

$$P^N = \text{span}\{e^{ik \cdot \xi} \mid -N \leq k_j \leq N, j = 1, 2\}.$$

Нехай далі $\mathfrak{R}_N : L^2([-\pi, \pi]^2) \rightarrow P^N$ – оператор ортогонального проектування на P^N , узгоджений зі скалярним добутком у $L^2([-\pi, \pi]^2)$. Символом $I_N^B(\xi, \xi)$ позначимо інтеграл зіткнень, межі інтегрування в якому скорочені до розмірів диска $U(0, 2\beta\pi)$. Додатково будемо розглядати такий об'єкт: $I_N^B = \mathfrak{R}_N I_N^B(\xi_N, \xi_N)$. Справедливе таке твердження [8].

Теорема 2. Нехай $f \in L^2([-\pi, \pi]^2)$. Тоді справджується оцінка

$$\|I_N^B(\xi, \xi) - I_N^B(\xi_N, \xi_N)\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)} \leq C \left(\|\xi - \xi_N\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)} + \frac{\|I_N^B(\xi_N, \xi_N)\|_{H_p^r([-\pi, \pi]^2)}}{N^r} \right), \forall r \geq 0,$$

де $H_p^r([-\pi, \pi]^2)$ – підпростір соболевського простору $H^r([-\pi, \pi]^2)$, що складається з періодичних функцій, а стала C залежить від $\|\xi\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)}$.

Нерівність, сформульована в теоремі 2, фактично є умовою неперервної інтеграла зіткнень від підінтегральної функції. Оскільки задача (6) додатково містить лише лінійний оператор диференціювання, апроксимація якого методом Рунге–Кутти стійка, то можна стверджувати [1], що відповідний розв'язок задачі (6), а отже, і задачі Коші (1), (2), умовно стійкий де умова стійкості визначається характером залежності коефіцієнта C від $\|\xi\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)}$.

Зауважимо, що для випадку, коли кожний оператор $S_A^{\Delta t}$ і $S_B^{\Delta t}$ забезпечує не менш ніж другий порядок точності, можна показати, що схема (10) гарантує також другий порядок точності за часом для задачі Коші (1), (2) [11].

У розглядуваному випадку розв'язок транспортної задачі (5), (6) точний, а тому взагалі знімається питання щодо порядку наближення. Апроксимація інтеграла зіткнень має спектральну точність, завдяки чому порядок релаксаційного етапу визначається порядком чисельного методу для відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Таким чином, при використанні методу Рунге–Кутти четвертого порядку, як найбільш поширеного, метод розщеплення для задачі Коші (1), (2) буде завжди давати щонайменше другий порядок апроксимації.

4. Результати. Для тестування алгоритму було розглянуто декілька тестових прикладів для різних значень коефіцієнта відновлення: $\alpha = 0,3$ (рис. 1), $\alpha = 0,5$ (рис. 2) та $\alpha = 0,7$ (рис. 3). В усіх випадках розглядалася безрозмірна задача Коші (1), (2), для якої значення визначальних параметрів бралися порядку одиниці. За початкову умову обиралося деяке збурення нормованого максвеллівського розподілу. Основна мета тестування полягала в тому, щоб визначити еволюцію функції розподілу гранульованого газу, яку моделює побудований чисельний розв'язок, протягом трьох одиниць часу $t = 0.5, t = 1.1, t = 1.8$. Усі розв'язки показали однакову типову поведінку, приклади яких зображено на рис. 1–3.

5.

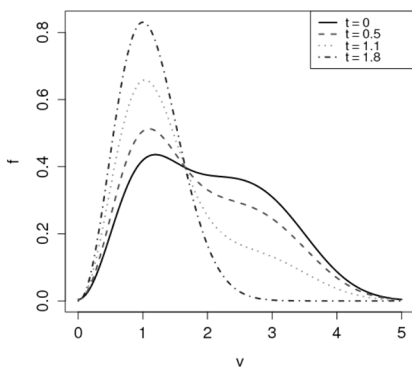


Рис. 1

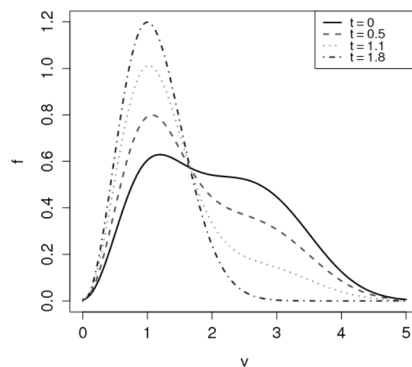


Рис. 2

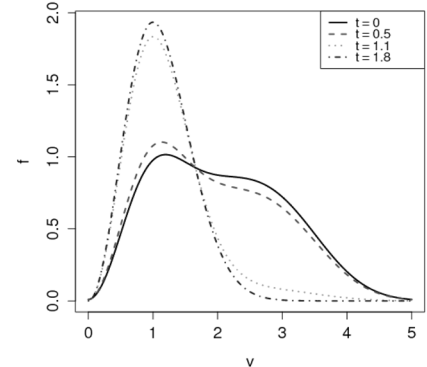


Рис. 3

Із наведених графіків бачимо, що розв'язок наближається до деякої граничної конфігурації. Це узгоджується із загальною властивістю розв'язків кінетичного рівняння Больцмана про те, що розв'язки цього рівняння прямують з часом до рівноважного стану і виконується відома H -теорема.

Результати моделювання показали також, що у випадках малих чисел Кнудсена на релаксаційному етапі ми отримуємо погано обумовлену задачу. Це може призводити до значного спотворення розв'язку. Деякі сучасні адаптації методу Рунге–Кутти [7] дозволяють покращити результат для таких випадків, але на даний час це питання ще відкрите.

Зауважимо, що при побудові чисельного розв'язку класичного рівняння Больцмана використовується така сама слабка форма інтеграла зіткнень (2), що і в дисипативному випадку [8].

Висновки. У цій статті побудовано алгоритм пошуку чисельного розв'язку кінетичного рівняння типу Больцмана для гранульованих газів (1) і за певних умов обґрунтовано його стійкість. Для задачі Коші для кінетичного рівняння типу Больцмана з дисипативною взаємодією частинок зроблена процедура розщеплення на два етапи: вільномолекулярної течії і просторово-однорідної релаксації. Обидві фази опрацьовано незалежно одна від одної й отримано чисельні розв'язки.

Наведені чисельні результати показують можливості розглянутих методів. Встановлено, що у випадку поганої обумовленості множини параметрів, наприклад, коли число Кнудсена, або коефіцієнт відновлення відрізняються від інших параметрів на порядки, система звичайних диференціальних рівнянь, до якої зводиться процедура апроксимації інтеграла зіткнень, стає жорсткою і не може бути розв'язана звичайними методами. Розробка більш "делікатних" методів залишається відкритою проблемою і вимагає подальших досліджень.

Список використаних джерел:

1. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Резибуа П. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов / П. Резибуа, М. де Ленер. – М. : Мир, 1980. – 424 с.
3. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / К. Черчиньяни. – М. : Мир, 1978. – 496 с.
4. Borovchenkova M.S. On the non-Markovian Enskog equation for granular gases / M.S. Borovchenkova, V.I. Gerasimenko // J. of Phys. A: Mathematical and Theoretical., 2014. – Vol. 47, N 3. – Article ID 035001.
5. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations / C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

6. Filbet F. Accurate Numerical Methods for the Collisional Motion of (Heated) Granular Flows / F. Filbet, L. Pareschi, G. Toscani // J. of Computational Phys., 2005. – Vol. 202. – P. 216–235.
7. Pareschi L. Implicit-Explicit Runge–Kutta Schemes for Stiff Systems of Differential Equations / L. Pareschi, G. Russo // Recent Trends in Numerical Analysis. – 2000. – P. 269–288.
8. Pareschi L. Numerical Solution of the Boltzmann Equation I: Spectrally Accurate Approximation of the Collision Operator / L. Pareschi, G. Russo // SIAM J. on Numerical Analysis, 2000. – Vol. 37, N 4. – P. 1217–1245.
9. Petrina D.Ya. Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy / D.Ya. Petrina. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008. – 400 p.
10. Toscani G. The Large-Time Behavior of Nonconservative Evolution Equations / G. Toscani // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. Seconda Università di Napoli, 2005. – Vol. 16. – P. 145–320.
11. Strang G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes / G. Strang // SIAM J. on Numerical Analysis, 1968. – Vol. 5(3). – P. 506–517.

Надійшла до редколегії 24.12.19

И. Гапьяк, канд. физ.-мат. наук, ассист.
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ ГАЗОВ

Для систем частиц с диссипативной взаимодействием рассмотрено обобщение классического уравнения Больцмана, а именно, кинетическое уравнение типа Больцмана для гранулированных газов. Построено численное решение задачи Коши для такого кинетического уравнения и исследована его устойчивость.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, гранулированные газы, многочисленные развязки, вычислительные схемы.

I. Gapyak, Ph. D., assist. prof.
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE BOLTZMANN KINETIC EQUATION FOR GRANULAR GASES

For a system of particles with a dissipative interaction we consider the Boltzmann type kinetic equation for granular gases. A numerical solution of the Cauchy problem for the Boltzmann type kinetic equation is constructed in two dimensional space and its stability is investigated.

Keywords: the Boltzmann kinetic equation, granular gases, numerical solutions, computing schemes.

УДК 532.59

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.07.30-35>

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
 М. Луньова, асп.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
 імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна
 E-mail: oavramenko777@gmail.com, luneva.mariya@ukr.net

МОДУЛЯЦІЙНА СТІЙКІСТЬ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Присвячено задачі про поширення слабконелінійних хвильових пакетів уздовж поверхонь контакту в тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою". Отримано умову розв'язності задачі в наближенні третього порядку, виведено еволюційне рівняння у формі нелінійного рівняння Шредінгера та умову модуляційної стійкості його розв'язків. Для розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю, представлено діаграму стійкості та її аналіз.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна систем, хвильові пакети, модуляційна стійкість, нелінійне рівняння Шредінгера.

Вступ. Аналіз умов стійкості внутрішніх хвиль у рідких системах різної густини викликають великий інтерес як у теоретичному, так і практичному плані, а дослідження хвильових процесів у рідинах та їхніх загальних властивостей на сьогодні залишається актуальним. Уперше нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для слабконелінійних хвиль з дисперсією було отримане Бенні та Ньюеллом. НРШ для хвиль скінченної глибини було виведено Хасімото і Оно методом багатьох масштабів. Нелінійне рівняння еволюції у формі НРШ для різних двовимірних слабконелінійних гідродинамічних систем ідеальної рідини скінченної глибини були отримані в [3], [10] за допомогою того ж методу. Згодом Томас та ін. [14] вивели НРШ для поверхневих хвиль скінченної глибини з вихорами.

Найфе в статті [13] провів достатньо повний та розгорнутий аналіз хвильового руху і системі "півпростір–півпростір", методом багатомасштабних розвинень до третього порядку виведено еволюційне рівняння Шредінгера. Аналогічні дослідження про поширення хвильових пакетів у двохшарових гідродинамічних системах представлені у ряді праць, зокрема, для випадку "півпростір – шар з твердою кришкою" – у [4], для випадку "шар з твердим дном – шар з твердою кришкою" – у [5], для випадку "шар з твердим дном – шар" – у [6, 8]. Аналогічні підходи застосовані для дослідження поширення хвильових пакетів у тришаровій системі "шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою" у працях [11, 12]. Задача про поширення внутрішніх хвиль у тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою" розглядалася у [1, 7, 9], де отримано дисперсійне рівняння та його розв'язки, побудовано три лінійні наближення слабконелінійної задачі, отримано умову розв'язуваності задачі другого наближення, досліджено енергетичні характеристики та форму хвильових пакетів на поверхнях контакту.

Ця стаття є продовженням згаданих вище досліджень. Тут виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів та отримано умову модуляційної стійкості розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю.

1. Постановка задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів на поверхні нев'язкої нестисливої рідини під впливом сили тяжіння. Вважається, що хвилі поширюються вздовж осі x , а вертикальна вісь z спрямована в напрямку протилежному до напрямку дії сили тяжіння. Гідродинамічна система (рис. 1) складається з нижнього півпростору, середнього шару та верхнього шару з твердою кришкою $z = h_2 + h_3$. Середній шар обмежений поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = h_2 + \eta_2(x, t)$.

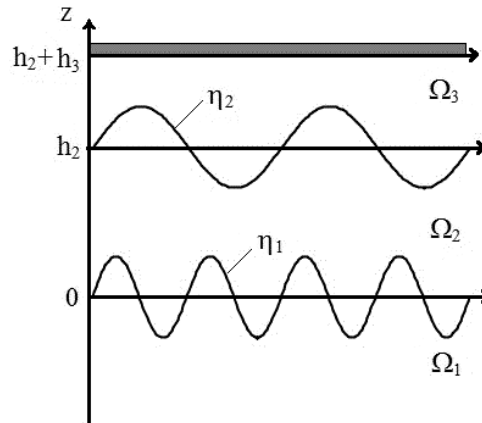


Рис 1. Схематичне зображення гідродинамічної системи "півпростір – шар – шар з твердою кришкою"

У безрозмірних величинах, введених за допомогою товщини внутрішнього шару h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a нижньої поверхні контакту та прискорення вільного падіння g , рух рідини описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta_1(x, t), j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = h_2 + \alpha \eta_2(x, t), j = 2, 3, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_1 + 0.5 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right) - 0.5 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ - T_1 \left[1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta_1(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \alpha \eta_2 (\rho_2 - \rho_3) + h_2 (\rho_2 - \rho_3) + 0.5 \rho_2 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right) - 0.5 \rho_3 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ - T_2 \alpha \left[1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = h_2 + \alpha \eta_2(x, t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2 + h_3, \quad (6)$$

$$|\overline{\varphi_1}| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

де φ_j ($j = 1, 2, 3$) потенціали швидкостей в областях Ω_j ; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – значення густини у відповідному шарі; T_1 та T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, відповідно; t – час; α – коефіцієнт нелінійності.

Використавши метод багатомасштабних розвинень до третього порядку [13],

$$\eta_i(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{in}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3,$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$ ($k = 0, 1, 2$), було отримано постановки для трьох перших наближень задачі та проведені дослідження у перших двох наближеннях [1, 7, 9].

Наведемо потрібні для подальшого дослідження співвідношення.

Відхилення поверхонь контакту

$$\eta_{11} = A(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i\theta},$$

$$\eta_{21} = \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} \left(A(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i\theta} \right), \quad (8)$$

де $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$ і $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – обвідна хвильового пакета на нижній поверхні контакту та її комплексно спряжена, $\theta = kx_0 - \omega t_0$, k та ω – хвильове число та частота центру хвильового пакету.

Умова розв'язності другого наближення

$$V_1 A_{t_1} + V_2 A_{t_2} = 0, \quad (9)$$

де V_i ($i=1,2$) коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$; A_{x_1} , A_{t_1} – частинні похідні обвідної хвильового пакета.

2. Еволюційне рівняння та модуляційна стійкість його розв'язку. Підставивши отримані раніше розв'язки задач першого та другого наближення в рівняння для третього наближення, отримаємо задачу у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_{13_{x_0 x_0}} + \Phi_{13_{zz}} &= \left[-2\omega A_{x_2} - 2iA_{t_1 x_1} + \frac{i\omega}{k}(2kz-1)A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta+kz} + cc + NST, \\ \Phi_{23_{x_0 x_0}} + \Phi_{23_{zz}} &= \left[-K_1 A_{x_2} - 2iK_2 A_{t_1 x_1} + \frac{i}{k} K_3 A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta} + cc + NST, \\ \Phi_{33_{x_0 x_0}} + \Phi_{33_{zz}} &= \left[-2K_4 A_{x_2} - 2iK_5 A_{t_1 x_1} + \frac{i}{k} K_6 A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta} + cc + NST, \\ \eta_{13_{t_0}} - \Phi_{13_z} &= -A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_7 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \eta_{13_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_8 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \eta_{23_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -\frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_9 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \eta_{23_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -\frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_{10} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \rho_1 \Phi_{13_{t_0}} - \rho_2 \Phi_{23_{t_0}} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13_{x_0 x_0}} &= (i\omega K_{11} A_{t_2} - K_{12} A_{t_1 t_1} + K_{13} A_{t_1 x_1} + 2ikT_1 A_{x_2} + T_1 A_{x_1 x_1}) e^{i\theta} + \\ &+ K_{14} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \rho_2 \Phi_{23_{t_0}} - \rho_3 \Phi_{33_{t_0}} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23_{x_0 x_0}} &= \left(i\omega K_{15} A_{t_2} - K_{16} A_{t_1 t_1} + K_{17} A_{t_1 x_1} + \right. \\ &+ 2ik \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{x_2} + \left. \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{x_1 x_1} \right) e^{i\theta} + \\ &+ K_{18} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \Phi_{33_z} &= 0 \text{ при } z=h_2+h_3, \\ \Phi_{13} &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

де K_i ($i=\overline{1,18}$) – коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$, отримані в пакеті символьних обчислень і тут не наводяться; NST – несекулярні доданки; cc – тут і далі, комплексно спряжені величини до попередніх виразів.

Розв'язки третього наближення, записані через невизначені коефіцієнти $B_{ij}^{(3)}$, $C_{ij}^{(3)}$, $D_{ij}^{(3)}$, $E_{ij}^{(3)}$, $F_{ij}^{(3)}$, $G_{ij}^{(3)}$, мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_{13} &= \left(B_{10}^{(3)} + B_{11}^{(3)} \cdot z + B_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta+kz} + \left(B_{20}^{(3)} + B_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta+2kz} + B_{30}^{(3)} e^{3i\theta+3kz} + cc, \\ \Phi_{23} &= \left(C_{10}^{(3)} + C_{11}^{(3)} \cdot z + C_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta+k(h_2-z)} + \left(C_{20}^{(3)} + C_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + C_{30}^{(3)} e^{3i\theta+3k(h_2-z)} + \\ &+ \left(D_{10}^{(3)} + D_{11}^{(3)} \cdot z + D_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta-k(h_2-z)} + \left(D_{20}^{(3)} + D_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + D_{30}^{(3)} e^{3i\theta-3k(h_2-z)} + cc, \\ \Phi_{33} &= E_{11}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh k(h_2 + h_3 - z) \cdot e^{i\theta} + E_{21}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh 2k(h_2 + h_3 - z) \cdot e^{2i\theta} + \\ &+ \left(E_{10}^{(3)} + E_{12}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z)^2 \right) \cosh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + E_{20}^{(3)} \cosh 2k(h_2 + h_3 - z) e^{2i\theta} + E_{30}^{(3)} \cosh 3k(h_2 + h_3 - z) e^{3i\theta} + cc, \quad (11) \\ \eta_{13} &= F_0^{(3)} + F_1^{(3)} e^{i\theta} + F_2^{(3)} e^{2i\theta} + F_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc, \\ \eta_{23} &= G_0^{(3)} + G_1^{(3)} e^{i\theta} + G_2^{(3)} e^{2i\theta} + G_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc. \end{aligned}$$

Підставивши вирази для невідомих функцій (11) у (10), із перших трьох рівнянь знайдемо коефіцієнти $B_{11}^{(3)}$, $B_{12}^{(3)}$, $C_{11}^{(3)}$, $C_{12}^{(3)}$, $D_{11}^{(3)}$, $D_{12}^{(3)}$, $E_{11}^{(3)}$, $E_{12}^{(3)}$. Урахувавши ці значення, після прирівнювання виразів в правих і лівих частинах при $e^{i\theta}$ отримано систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $B_{10}^{(3)}$, $C_{10}^{(3)}$, $D_{10}^{(3)}$, $E_{10}^{(3)}$, $F_1^{(3)}$, $G_1^{(3)}$:

$$\begin{aligned} -kB_{10}^{(3)} &= b_1, \\ k e^{kh_2} C_{10}^{(3)} - k e^{-kh_2} D_{10}^{(3)} &= b_2, \\ k C_{10}^{(3)} - k D_{10}^{(3)} - i\omega G_1^{(3)} &= b_3, \\ k \sinh(kh_3) E_{10}^{(3)} - i\omega G_1^{(3)} &= b_4, \\ -i\rho_1 \omega B_{10}^{(3)} + i\rho_2 \omega e^{kh_2} C_{10}^{(3)} + i\rho_2 \omega e^{-kh_2} D_{10}^{(3)} + (\rho_1 - \rho_2 + T_1 k^2) F_1^{(3)} &= b_5, \\ -i\rho_2 \omega C_{10}^{(3)} - i\rho_2 \omega D_{10}^{(3)} + i\rho_3 \omega \cosh(kh_3) E_{10}^{(3)} + (\rho_2 - \rho_2 + T_2 k^2) G_1^{(3)} &= b_6, \end{aligned} \quad (12)$$

де $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – вільні члени, які залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$.

Система лінійних рівнянь (12) несумісна, її умова розв'язності має вигляд

$$W_1 A_{t_2} + W_2 A_{x_2} + W_3 A_{x_1 x_1} + W_4 A^2 \bar{A} = 0, \quad (13)$$

де W_i ($i = \overline{1,4}$) коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$.

Групова швидкість $\omega' = d\omega / dk$ отримана із дисперсійного співвідношення [1], з урахуванням чого умова розв'язності (9) задачі другого наближення набуває вигляду

$$A_t + \omega' A_{x_1} = 0. \quad (14)$$

Аналогічно, умова розв'язності (13) третього наближення має вигляд

$$A_{t_2} + \omega' A_{x_2} - \frac{1}{2} i \omega'' A_{x_1 x_1} = i A^2 \bar{A}. \quad (15)$$

Частинні похідні A_t, A_x, A_{xx} запишемо у вигляді сум за степенями параметра нелінійності

$$A_t = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{t_n} + O(\alpha^3), \quad A_x = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{x_n} + O(\alpha^3), \quad A_{xx} = \alpha^2 A_{x_1 x_1} + O(\alpha^3), \quad (16)$$

де похідні A_{t_n} та A_{x_n} визначають внесок членів порядку α^n у загальне значення похідних A_t та A_x .

Помножимо співвідношення (14) та (15) на α та α^2 , додамо одне до одного отримані вирази та, враховуючи (16), отримаємо шукане еволюційне рівняння обвідної на нижній поверхні контакту. Маємо:

$$A_t + \omega' A_x - \frac{1}{2} i \omega'' A_{xx} = i \alpha^2 I A^2 \bar{A}. \quad (17)$$

Враховуючи співвідношення (8) та використовуючи рівняння (17), нескладно отримати еволюційне рівняння на верхній поверхні контакту

$$A_t + \omega' A_x - \frac{1}{2} i \omega'' A_{xx} = i \alpha^2 J A^2 \bar{A}, \quad (18)$$

де

$$J = \frac{\rho_2^2 \omega^4}{\left(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + \left(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3 \right) \sinh kh_2 \right)^2} I \quad (19)$$

Здійсимо перехід до системи, що рухається з груповою швидкістю, використавши заміну $t = \zeta$ і $\xi = x - \omega't$. При цьому еволюційне рівняння (17) набуде вигляду

$$A_\zeta - \frac{1}{2} i \omega'' A_{\xi\xi} = i \alpha^2 I A^2 \bar{A} \quad (20)$$

Зазначимо, що еволюційне рівняння (17) має розв'язок, який залежить лише від часу, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю [2]:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i \alpha^2 a^2 I \zeta), \quad (21)$$

де a – стала. Такий розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера раніше вже розглядався у статтях [4, 5, 6, 13] для різних двошарових гідродинамічних систем. Умови модуляційної стійкості на нижній та верхній поверхнях контакту для даної гідродинамічної системи мають вигляд

$$I \omega'' < 0, \quad (22)$$

$$J \omega'' < 0. \quad (23)$$

Зазначимо, що враховуючи рівність (19), при дослідженні модуляційної нестійкості хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту можна обмежитись лише розглядом умови (22). Чисельний аналіз знакосталості величин I та ω виявив наступне. Величина ω є від'ємною на всій області дослідження, а I змінює знак залежно від параметрів системи. Знайдено криві, при переході через які величина I змінює знак. На рис. 2 зображено діаграму модуляційної стійкості розв'язку (21). Області модуляційної стійкості (МС) та модуляційної нестійкості (МН) побудовані в системі (ρ_3, k) для фізично прийнятних значень $0 < \rho_3 < \rho_2$ та $0 < k < 1,4$, значення густини нижнього півпростору $\rho_1 = 1$ та густини середнього шару $\rho_2 = 0,9$.

При $h_3 = 0,5$ виявлено три криві, що розділяють площину (ρ_3, k) на дві області МС та три області МН (рис. 2а). Перша вузька область МС1, що обмежена кривими "1" і "2", відповідає капілярним хвилям. Друга область МС2, що обмежена кривими "1", "2" і "3", відповідає як капілярним, так і гравітаційним хвилям та розділяє дві області модуляційної нестійкості МН2 і МН3. Третя область модуляційної нестійкості МН1 виявлена для хвильових чисел більших за одиницю і ця область відділяється від МС1 та МС2 кривою "2".

На рис. 2, б представлено діаграму стійкості при $h_3 = 1,5$. Виявлено дві криві, які розділяють площину (ρ_3, k) на дві області модуляційної нестійкості (МН1 для капілярних хвиль та МН2 для капілярно-гравітаційних), а також дві області модуляційної стійкості МС1 і МС2. Область модуляційної нестійкості для капілярно-гравітаційних хвиль при $h_3 = 1,5$ утворилась у результаті злиття двох областей модуляційної нестійкості МН2 та МН3 при меншому значенні товщини верхнього шару $h_3 = 0,5$ (рис. 2, а).

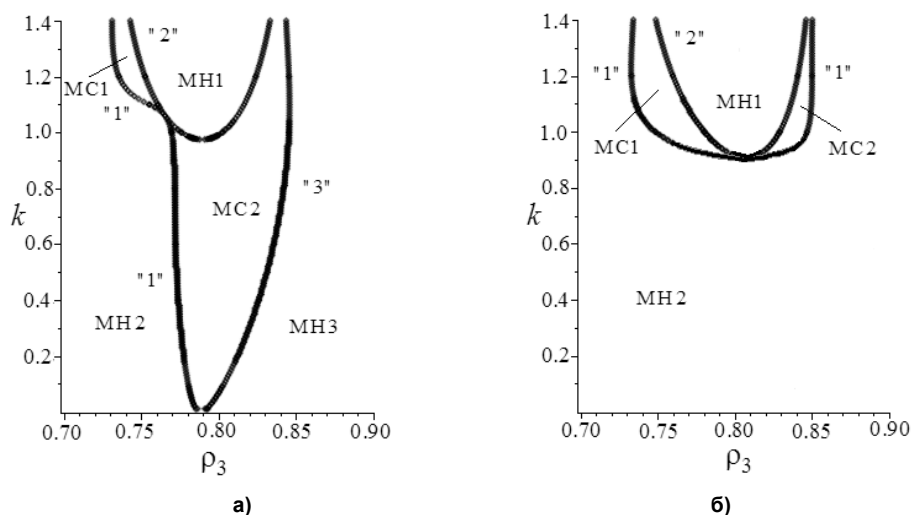


Рис. 2. Діаграми стійкості при значенні товщини верхнього шару а) $h_3 = 0,5$, б) $h_3 = 1,5$

Висновки. Розглянуто слабконелінійну задачу поширення хвильових пакетів у системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою". Виведено еволюційні рівняння поширення хвильових пакетів вздовж поверхонь контакту у вигляді нелінійних рівнянь Шредінгера. Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площині "густина верхнього шару – хвильове число", при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару.

Список використаних джерел:

1. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою / О.В. Авраменко, В.В. Наратовий, М.В. Луньова, І.Т. Селезов // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2017. – 60, № 4. – С. 137–151.
2. Гуртовий Ю.В. Математичне моделювання нормальної і аномальної дисперсії хвильового пакету / Ю.В. Гуртовий // Наукові записки. Серія : Математичні науки, 2016. – С. 39–44.
3. Седлецький Ю.В. Нелінійне рівняння Шредінгера вищого порядку для стоксових хвиль на поверхні рідини довільної глибини / Ю.В. Седлецький // Укр. фіз. журн., 2003. – Т. 48, № 1. – С. 82–95.
4. Селезов І.Т. Еволюція нелінійних волнових пакетів з урахуванням поверхневого натяження на поверхні контакту / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2001. – 44, № 2. – С. 113–122.
5. Селезов І.Т. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка, 2006. – 8(90). – С. 60–65.
6. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий, В.В. Наратовий // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2016. – 52, № 1. – С. 72–83.
7. Avramenko O. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semiinfinite hydrodynamic system / O. Avramenko, M. Lunyova // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2018. – 2/5 (92). – P. 26–33.
8. Avramenko O.V. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System / O.V. Avramenko, V.V. Naratoviy, I.T. Selezov // J. of Mathemat. Sci., 2018. – 229 (3). – P. 241–252.
9. Avramenko O.V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid / O.V. Avramenko, M.V. Lunyova V.V. Naratoviy // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2017. – 5/5 (89). – P. 58–66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941.
10. Choi W. Nonlinear evolution equations for two-dimensional surface waves in a fluid of finite depth / W. Choi // J. of Fluid Mechanics, 1995. – 295. – P. 381–394.
11. Hurtoviy Yu. Analysis of conditions for the propagation of internal waves in a three-layer finite-depth liquid / Yu. Hurtoviy, V. Naratoviy, V. Bohdanov // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2018. – 3/5 (93). – P. 37–46.
12. Naratoviy V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system/ V. Naratoviy, D. Kharchenko // Waves in Random and Complex Media, 2019. – <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17455030.2019.1699674>.

13. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface / A.H. Nayfeh // Trans. ASME., Ser. E., 1976. – 43, № 4. – P. 584–588.
 14. Thomas R. A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity / R. Thomas, C. Kharif, M. Manna // Physics of Fluids, 2012. – 24(12). – 127102. doi:10.1063/1.4768530.

Надійшла до редколегії 17.12.19

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
 М. Лунёва, асп.
 Центральноукраинский государственный педагогический университет
 имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Статья посвящена проблеме распространения слабонелинейных волновых пакетов вдоль поверхностей контакта в трёхслойной гидродинамической системе "полупространство – слой – слой с твёрдой крышкой". Получено условие разрешимости проблемы в приближении третьего порядка, выведено эволюционное уравнение в форме нелинейного уравнения Шредингера и условие модуляционной устойчивости его решений. В случае баланса между дисперсией и нелинейностью получено решение, представлена диаграмма его устойчивости и её анализ.

Ключевые слова: трехслойная гидродинамическая систем, волновые пакеты, модуляционная устойчивость, нелинейное уравнение Шредингера.

O. Avramenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.,
 M. Lunyova, Ph. D. stud.
 Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

MODULATION STABILITY OF WAVE PACKETS IN A THREE-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM

The article is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave-packets along contact surfaces in a three-layer hydrodynamic system "half space – layer – layer with rigid lid". The condition of solvability of the problem in the third-order approximation is obtained, the evolution equation is derived in the form of a nonlinear Schrödinger equation and the modulation stability condition for its solutions is obtained. The stability diagram and its analysis are presented for the solution which takes place in the case of the balance between dispersion and non-linearity.

Keywords: three-layer hydrodynamic systems, wave packets, modulation stability, nonlinear Schrödinger equation.

УДК 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.08.35-40>

В. Самойленко, д-р физ.-мат. наук, проф.,
 Ю. Самойленко, д-р физ.-мат. наук,
 М. Орлова, студ.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 E-mail: valsamyul@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА НЕНУЛЬОВОМУ ФОНІ

Побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром першого степеня при старшій похідній для випадку ненульового фону. Наведено алгоритм відшукування такого асимптотичного розв'язку і продемонстровано його застосування на прикладі рівняння Кортевега–де Фріза з конкретно заданими змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: рівняння Кортевега–де Фріза, сингулярне збурення, змінні коефіцієнти, асимптотичні розв'язки, солітоноподібні розв'язки.

Вступ. Рівняння Кортевега–де Фріза на сьогодні є одним із найбільш відомих нелінійних рівнянь із частинними похідними [11]. Це рівняння використовується при вивченні математичних моделей різних явищ і процесів, серед яких поширення хвиль у рідинах [17], коливання в ангармонічній решітці [16], хвильові процеси в біологічних системах [6], передача сигналів у телекомунікаційних системах тощо. Значний інтерес науковців до даного рівняння викликають, зокрема, ще й тим, що рівняння Кортевега–де Фріза є цікавим об'єктом для дослідження, оскільки володіє розв'язками з надзвичайно різноманітними властивостями, серед яких солітонні, квазіперіодичні, періодичні та інші типи розв'язків [18]. Більше того, саме при дослідженні рівняння Кортевега–де Фріза було запропоновано метод оберненої задачі розсіювання [9], який став потужним інструментом вивчення нелінійних рівнянь сучасної теоретичної і математичної фізики [2, 8, 10]. Разом з тим значний інтерес становлять рівняння зі змінними коефіцієнтами, оскільки такі рівняння використовуються при моделюванні процесів у середовищах зі змінними характеристиками та малою дисперсією, для вивчення яких чи не єдиним ефективним методом дослідження є асимптотичний аналіз [5, 7, 12, 13].

У даній статті розглядається рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній вигляду

$$\varepsilon u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (1)$$

де коефіцієнти рівняння записуються за допомогою асимптотичних рядів

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x, t), \quad b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x, t), \quad (2)$$

функції $a_k(x, t)$, $b_k(x, t) \in C^\infty(R \times [0, T])$, $k \geq 0$, $T > 0$, ε – малий параметр.

Для рівняння (1) будуються асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки, які за своєю структурою близькі до солітонних розв'язків [14].

1. Основні поняття і позначення. Нехай $S = S(\mathbf{R})$ – простір швидко спадних функцій, тобто таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел $m, n \geq 0$ виконується умова [3, 12]:

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^\infty(0, T; S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0; T]$ функцій $u(x, t)$, для яких при довільних цілих $m, k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u \right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2 \right)^m \left(D_t^k u \right)^2 dx < \infty.$$

Аналогічно [3, 12, 15] позначимо через $G_1 = G_1(R \times [0; T] \times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо змінних (x, t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0; T]$ виконуються умови:

1) справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K;$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$, що

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \left(f(x, t, \tau) - f^-(x, t) \right) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R \times [0; T] \times R) \subset G_1$ – простір функцій $f = f(x, t, \tau) \in G_1$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x, t) на кожному компакт $K \subset R \times [0; T]$ виконується умова $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f(x, t, \tau) = 0$.

Означення 1 [3, 12]. Функція $u = u(x, t, \varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N \geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \left[u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau) \right] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \quad (3)$$

де $\varphi(t) \in C^{(\infty)}([0; T])$ – скалярна дійсна функція, функції $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, – нескінченно диференційовні (у точках $t = 0$, $t = T$ розглядаються відповідно ліва і права похідні); $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$, $V_j(x, t, \tau) \in G_1$ $j = \overline{1, N}$.

Функція $x - \varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x, t, \varepsilon)$.

Опишемо алгоритм побудови асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (1) для загального випадку та для випадку, коли коефіцієнти (1) мають конкретний вигляд.

2. Алгоритм побудови асимптотичних розв'язків та його обґрунтування. При розробці алгоритму побудови асимптотичного розв'язку для заданого рівняння насамперед треба визначити вигляд (зображення) такого розв'язку. У випадку рівняння (1) асимптотичний розв'язок шукається у вигляді [3]

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (4)$$

де

$$Y_N(x, t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} \left[u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau) \right], \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Зауважимо, що асимптотичний розклад проводиться за дробовими степенями малого параметра. Функція

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} u_j(x, t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (4), а функція

$$V_N(x, t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} V_j(x, t, \tau)$$

– сингулярною частиною асимптотики (4). При цьому, очевидно, $Y_N = U_N + V_N$.

Визначення коефіцієнтів асимптотичного розкладу (4) виконується з використанням загальних ідей теорії асимптотичних методів. При цьому спочатку визначається регулярна частина, а згодом – сингулярна частина асимптотики (4).

2.1. Регулярна частина асимптотики. Члени регулярної частини асимптотики визначаються як розв'язки системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для функцій $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, 2N}$, вигляду

$$a_0(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 = 0, \quad (5)$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x,t)u_j(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} = f_j(x,t,u_0,u_1,\dots,u_{j-1}), \quad j = \overline{1, 2N}, \quad (6)$$

де функції $f_j(x,t,u_0,u_1,\dots,u_{j-1})$, $j = \overline{1, 2N}$, у правій частині (6) визначаються рекурентним чином. Зокрема,

$$\begin{aligned} f_1(x,t,u_0) &= -a_1(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} - b_1(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ f_2(x,t,u_0,u_1) &= -a_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_2(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} - b_1(x,t)u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} - \\ &\quad - b_0(x,t)u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - b_2(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} - b_1(x,t)u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

Функції $u_j(x,t)$, $j = \overline{0, 2N}$, можна знайти послідовно, інтегруючи диференціальні рівняння (5), (6). Дійсно, оскільки рівняння (5) є квазілінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними, а інші рівняння в (6) – лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, то їхні розв'язки можна знайти, наприклад, за допомогою методу характеристик [1]. Тому вважатимемо регулярну частину асимптотики (4) відомою.

2.2. Визначення членів сингулярної частини асимптотики. Доданки сингулярної частини асимптотики (4) визначаються із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\varphi'(t) - b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau}\varphi'(t) - b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau}(V_0 V_j)\right) = F_j(x,t,\tau), \quad (8)$$

де функції $F_j(x,t,\tau) = F_j(t, V_0(x,t,\tau), \dots, V_{j-1}(x,t,\tau), u_0(x,t), \dots, u_j(x,t))$, визначаються рекурентно після визначення функцій регулярної частини асимптотики $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $\dots$, $u_j(x,t)$, $V_0(x,t,\tau)$, $V_1(x,t,\tau)$, $\dots$, $V_{j-1}(x,t,\tau)$, $j = \overline{1, 2N}$.

Процедура визначення сингулярної частини асимптотики має декілька етапів. Спочатку функції сингулярної частини асимптотики визначаються на кривій розриву $\varphi = \varphi(t)$, яка априорі вважається відомою. Потім визначається звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi = \varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x = \varphi(t)$ у деякий окіл цієї кривої таким чином, щоб доданки сингулярної частини асимптотики побудованого розв'язку належали простору G_1 .

Для визначення сингулярної частини асимптотики на кривій розриву, тобто функцій $v_j = v_j(t, \tau) = V_j(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j = \overline{0, N}$, маємо диференціальні рівняння з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi, t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau}\varphi'(t) - b_0(\varphi, t)\left[u_0(\varphi, t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial \tau}\right] = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi, t)\frac{\partial v_j}{\partial \tau}\varphi'(t) - b_0(\varphi, t)\left[u_0(\varphi, t)\frac{\partial v_j}{\partial \tau} + v_j\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + v_0\frac{\partial v_j}{\partial \tau}\right] = F_j(t, \tau), \quad (10)$$

де функції $F_j(t, \tau) = F_j(t, V_0(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau), u_0(x, t), \dots, u_j(x, t))|_{x=\varphi(t)}$, у правій частині рівнянь (10) визначаються рекурентно після визначення функцій $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $\dots$, $u_j(x, t)$, $V_0(x, t, \tau)$, $V_1(x, t, \tau)$, $\dots$, $V_{j-1}(x, t, \tau)$, $j = \overline{1, 2N}$.

Розв'язок рівняння (9) можна отримати в наочному вигляді:

$$v_0(t, \tau) = -3\frac{A(\varphi, t)}{b_0(\varphi, t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi, t)}}{2}(\tau + c_0(t))\right), \quad (11)$$

де $\varphi = \varphi(t)$, і використано позначення

$$+12\tau\cosh^{-3}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right) - 24\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right). \quad (12)$$

Тут і далі припускається виконання умови про те, що $A(\varphi, t) > 0$, де $c_0(t)$ – стала інтегрування.

Справедливі такі твердження, які використовуються при математичному обґрунтуванні описаного вище алгоритму.

Лема 1. Якщо $A(\varphi, t) > 0$, то розв'язок рівняння (9) у просторі G_1^0 є функція вигляду (11).

Лема 2. Якщо $F_j(t, \tau) \in G_1^0$, $j = \overline{1, 2N}$, то розв'язок рівнянь (12) існує у просторі G_1 тоді і лише тоді, коли виконуються умови [4]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t, \tau)v_0(t, \tau)d\tau = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Леми 1 і 2 використовуються не лише для обґрунтування алгоритму побудови асимптотичних розв'язків рівняння (2), але й для визначення кривої розриву, про яку згадувалося вище.

Розглянемо умову ортогональності (13) при $j = 1$, тобто для функції

$$F_1(t, \tau) = a_0(\varphi, t) \frac{\partial v_0}{\partial t} + C \neq 1 \ b_1(\varphi, t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} v_0 + \tau b_{0x}(\varphi, t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} v_0.$$

Зауважимо, що функція $F_1(t, \tau) \in G_1^0$.

Враховуючи умову ортогональності (13), при $j = 1$ знаходимо звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi(t)$:

$$15a_0(\varphi, t)b_0(\varphi, t) \frac{d}{dt} A(\varphi, t) + \left[(10a_{0x}(\varphi, t)b_0(\varphi, t) - 36a_0(\varphi, t)b_{0x}(\varphi, t)) \varphi' + \right. \\ \left. + 10b_0^2(\varphi, t)u_{0x}(\varphi, t) + 3(b_0^2(\varphi, t))_x u_0(\varphi, t) - 5a_0(\varphi, t)(b_0^2(\varphi, t))_t \right] A(\varphi, t) = 0. \quad (14)$$

За досить загальних припущень щодо функцій $a_0(x, t)$, $b_0(x, t)$ для коефіцієнтів диференціального рівняння (14) виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, а тому це рівняння має розв'язок. Позначимо

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t, \tau) d\tau + E_j(t).$$

Тут функція $E_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, – стала інтегрування, яка визначається з умови $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} E_j(t, \tau) = 0$. Справедлива лема.

Лема 3. Якщо $F_j(t, \tau) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$, і виконується умова (13), то $v_j(t, \tau) \in G_1^0$, $j = \overline{1, 2N}$, тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0, \quad j = \overline{1, 2N}. \quad (15)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10) можна записати, використовуючи метод варіації довільної сталої, у вигляді

$$v_j(t, \tau) = \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \Phi_j(t, \tau_1) v_{0\tau}(t, \tau_1) d\tau_1 + c_1 \right) v_{0\tau}(t, \tau) \int_{\tau_0}^{\tau} v_{0\tau}^{-2}(t, \tau_1) d\tau_1 - \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \Phi_j(t, \tau_1) v_{0\tau}(t, \tau_1) \int_{\tau_0}^{\tau_1} v_{0\tau}^{-2}(t, \xi) d\xi d\tau_1 + c_2 \right) v_{0\tau}(t, \tau), \quad (16)$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

2.3. Обґрунтування асимптотики. Доведено таке твердження.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення:

- 1) функції $a_k(x, t)$, $b_k(x, t) \in C^{(\infty)}(R \times [0; T])$, $k \geq 0$;
- 2) справедлива нерівність $A(\varphi, t) > 0$, для функції $\varphi(t)$, що задовольняє рівняння (17);
- 3) функції $F_j(t, \tau) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$, і виконуються умови (13), (15).

Тоді асимптотичний однофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (31) має вигляд

$$Y_N(x, t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} [u_j(x, t) + v_j(t, \tau)], \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (17)$$

і цей розв'язок задовольняє на множині $R \times [0; T]$ рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^N)$, а при $\tau \rightarrow \pm\infty$ функція (17) задовольняє рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{N+1/2})$.

3. Рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами для випадку, коли $a_0(x, t) = 1$, $a_1(x, t) = t^2$, $b_0(x, t) = 1$, $b_1(x, t) = x^2 + t^2$. Побудуємо асимптотичні розв'язки рівняння (1), коли його коефіцієнти мають вигляд

$$a(x, t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon t^2, \quad b(x, t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon (x^2 + t^2). \quad (18)$$

Асимптотичний розв'язок рівняння (1), (18) шукаємо у вигляді (4). Оскільки доданки регулярної частини асимптотики задовольняють рівняння (5), (6), то як регулярні члени асимптотики покладемо $u_0(x, t) = 1$, $u_1(x, t) = 1$.

3.1. Головний член асимптотичного солітоноподібного розв'язку. Головний доданок сингулярної частини асимптотики – функція $v_0(t, \tau)$, визначається формулою

$$v_0(t, \tau) = -3 \frac{A(\varphi, t)}{b_0(\varphi, t)} \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi, t)}}{2} (\tau + c_0(t)) \right), \quad (19)$$

де $c_0(t)$ – стала інтегрування, $\varphi = \varphi(t)$ – функція, що визначає криву розриву. Нагадаємо, що ця функція має задовольняти умову

$$A(\varphi, t) = -a_0(\varphi, t)\varphi'(t) + b_0(\varphi, t)u_0(\varphi, t) > 0. \quad (20)$$

Нехай надалі стала інтегрування $c_0(t) = 0$. Тоді крива розриву визначається із рівняння (14), яке набуває вигляду $\frac{d}{dt}(A(\varphi(t), t)) = 0$. Звідки знаходимо, що при початковій умові $\varphi(0) = 0$ крива розриву має вигляд $\varphi(t) = (1-C)t$, де $C \neq 1$ – довільна константа.

Головний член сингулярної частини асимптотики вигляду (4) визначається за допомогою формули

$$v_0(t, \tau) = -3 \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t), t)} \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} \tau \right) = -3C \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = -3C \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \frac{x - (1-C)t}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (21)$$

Очевидно, що функція $v_0(t, \tau) \in G_1^0$.

3.2. Побудова першого члена сингулярної частини асимптотики. Побудуємо перший доданок сингулярної частини. Ураховуючи вираз для функції

$$F_1(t, \tau) = a_0(\varphi(t), t) \frac{dv_0}{dt} + \frac{\partial v_0}{\partial \tau},$$

знаходимо

$$\Phi_1(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_1(t, \tau) d\tau + E_1(t) = a_0(\varphi(t), t) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\tau} v_0 d\tau + v_0(t, \tau) + E_1(t) = v_0(t, \tau) + E_1(t).$$

Оскільки $v_0(t, \tau) \in G_1^0$, то можна покласти $E_1(t) = 0$, де $E_1(t)$ – є стала інтегрування. Тоді

$$\begin{aligned} v_1(t, \tau) &= \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \Phi_1(t, \tau_1) v_{0\tau}(t, \tau_1) d\tau_1 + c_1 \right) v_{0\tau}(t, \tau) \int_{\tau_0}^{\tau} v_{0\tau}^{-2}(t, \tau_1) d\tau_1 - \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \Phi_1(t, \tau_1) v_{0\tau}(t, \tau_1) \int_{\tau_0}^{\tau_1} v_{0\tau}^{-2}(t, \xi) d\xi d\tau_1 + c_2 \right) v_{0\tau}(t, \tau) = \\ &= -\frac{1}{16} \cosh^{-5} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) - \frac{3}{32} \cosh^{-7} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) - \\ &- 3 \cosh^{-6} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) - \frac{45}{16} \tau \cosh^{-7} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) + \\ &+ 3 \cosh^{-6} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) + \frac{1}{16} \cosh^{-3} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) + \cosh^{-4} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) + \\ &+ \frac{15}{16} \tau \cosh^{-5} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) - \cosh^{-4} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) + \\ &+ 12 \tau \cosh^{-3} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right) - 24 \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{C}}{2} \tau \right). \end{aligned}$$

Отже, асимптотичний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$Y_1(x, t, \tau) = u_0(x, t) + v_0(t, \tau) + \sqrt{\varepsilon} (u_1(x, t) + v_1(t, \tau)), \quad \tau = \frac{x - (1-C)t}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{де стала } C > 0, \quad C \neq 1. \quad (22)$$

Продемонструємо графічно відповідні асимптотичні розв'язки для випадку $C = 2$.

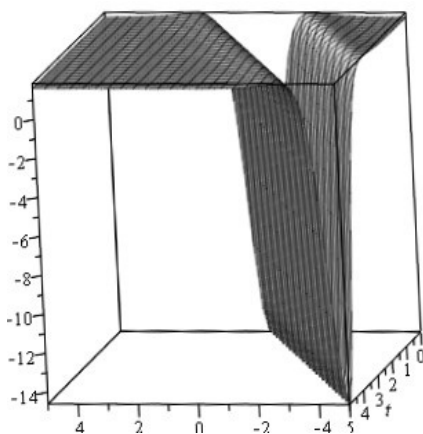


Рис. 1. Розв'язок (22) при $\varepsilon = 0,36$

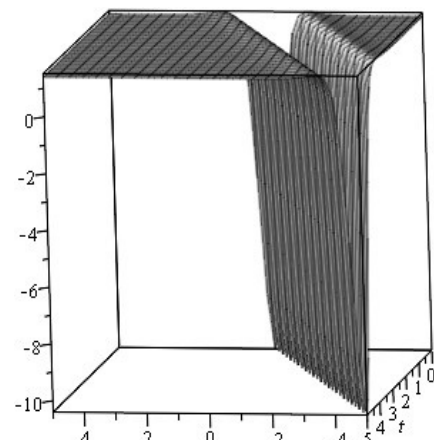


Рис. 2. Розв'язок (22) при $\varepsilon = 0,16$

Висновки. У даній статті розглянуто задачу про побудову асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами ε малим параметром першого степеня при старшій похідній для випадку ненульового фону. Наведено алгоритм побудови такого асимптотичного розв'язку в загальному випадку та продемонстровано його використання для випадку конкретно заданих змінних коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. Головатий Ю.Д. Диференціальні рівняння / Ю.Д. Головатий, В.М. Кирилич, С.П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2011. – 470 с.
2. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза / С.П. Новиков // Функци. анализ и его прилож., 1974. – Т. 8, № 3. – С. 54–66.
3. Самойленко В.Г. Асимптотичні розв'язки для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега–де Фриза зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журн., 2005. – Т. 57, № 1. – С. 111–124.
4. Самойленко В.Г. Існування розв'язку неоднорідного рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. вісн., 2012. – Т. 9, № 2. – С. 237–245.
5. Ablowitz M.J. Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons / M.J. Ablowitz. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2011. – 348 p.
6. Davydov A.S. Solitons in biology / A.S. Davydov // Physica Scripta, 1979. – Vol. 20, № 2. – P. 307–315.
7. Dobrokhotov S.Yu. Hugoniot–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equation / S.Yu. Dobrokhotov // Rus. J. Math. Phys., 1999. – Vol. 6, № 2. – P. 137–173.
8. Egorova I. On Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with step-like finite gap initial data I. Schwartz-type perturbations / I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl // Nonlinearity, 2009. – Vol. 22. – P. 1431–1457.
9. Korteweg–de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solutions / C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura // Comm. Pure Appl. Math., 1974. – Vol. 27. – P. 97–133.
10. Hirota R. Exact solutions of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solutions / R. Hirota // Phys. Rev. Lett., 1971. – Vol. 27. – P. 1192–1194.
11. Korteweg D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, de G. Vries // Philos. Mag., 1895. – № 39. – P. 422–433.
12. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov – Providence : American Math. Society, 2001. – 243 p.
13. Samoilenko V. Asymptotic soliton-like solutions to the singularly perturbed Benjamin–Bona–Mahony equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // J. of Math. Phys., 2019. – Vol. 60, № 1. – P. 011501–011513.
14. Asymptotic solutions of soliton type of the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and singular perturbation / V.H. Samoilenko, V.O. Limarchenko, V.S. Vovk, K.S. Zaitseva // Mathematical Modeling and Computing, 2019. – Vol. 6, № 2. – P. 374–385.
15. Samoilenko V.Hr. On Cauchy problem for Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and small parameter / V.Hr. Samoilenko, Yu. Samoilenko // Collection of papers "Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics". – Siedlce : Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2011. – P. 128–135.
16. Toda M. Waves in nonlinear lattice / M. Toda // Suppl. Theory Phys., 1970. – № 45. – P. 174–200.
17. Whitham G.B. Nonlinear dispersive waves / G.B. Whitham // Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1965. – № 283. – P. 238–261.
18. Zabusky N.J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // Phys. Rev. Lett., 1965. – Vol. 15. – P. 240–243.

Надійшла до редколегії 18.12.19

В. Самойленко, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Ю. Самойленко, д-р физ.-мат. наук,

М. Орлова, студ.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА НЕНУЛЕВОМ ФОНЕ

Построены асимптотические однофазовые солитоноподобные решения уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром первой степени при старшей производной для случая ненулевого фона. Предложен алгоритм нахождения такого асимптотического решения и продемонстрировано его применение на примере уравнения Кортевега–де Фриза с конкретными заданными переменными коэффициентами.

Ключевые слова: уравнения Кортевега–де Фриза, сингулярное возмущение, переменные коэффициенты; асимптотические решения; солитоноподобные развязки.

V. Samoilenko, Full Doctor, prof.,

Yu. Samoilenko, Full Doctor,

M. Orlova, stud.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC SOLUTIONS TO THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS AT NON-ZERO BACKGROUND

Problem on studying asymptotic one-phase soliton-like solutions to the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and a small parameter of the first degree at the highest derivative is considered for the case of non-zero background. There is given an algorithm of constructing the solutions for general case. The algorithm is demonstrated for the equation with some given variable coefficients.

Keywords: the Korteweg–de Vries equation, singular perturbation, variable coefficients, asymptotic solutions, soliton like solutions.

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.09.40-47>

Н. Гук, д-р физ.-мат. наук,

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро, Україна

E-mail: natalyuguk29@gmail.com**ОСОБЛИВОСТИ ВАРИАЦІЙНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН**

Розглянуто задачу ідентифікації жорстких включень у матеріалі пружної пластини за результатами вимірювання деформації. Задачу сформульовано як обернену задачу теорії тонких пластин. Варіаційне формулювання враховує функціонал повної енергії пластини та додаткову умову, що визначає близькість розрахованого за допомогою математичної моделі та спостережуваного станів пластини. Пошук розв'язку оберненої задачі здійснено у два етапи: визначається місцерозташування включень; уточнюються значення фізико-механічних параметрів включень з використанням градієнтного методу.

Ключові слова: тонкі пластини, обернені задачі, ідентифікація жорстких включень, пружна пластини, деформація.

Вступ. При дослідженні фізичних явищ або об'єктів емпіричними методами досить часто виникають обставини, при яких відсутня можливість безпосереднього вимірювання деяких характеристик об'єкта дослідження. Виконання експерименту може бути пов'язане з технічними і матеріальними труднощами, однак майже завжди є можливість шляхом спостереження отримати будь-які додаткові відомості про досліджуваний об'єкт, за якими можливо зробити

висновки щодо невідомих характеристик та властивостей досліджуваного об'єкта або процесу. У такій постановці задача полягає у визначенні причин за отриманими в результаті спостережень або експериментів наслідками. Такі задачі належать до класу обернених задач.

Розв'язання оберненої задачі передбачає визначення невідомих властивостей об'єкта дослідження або процесу за його спостережуваними непрямыми характеристиками. Особливістю більшості обернених задач є їхня некоректність [1], [4], [5], яка пов'язана або з неможливістю побудови оберненого оператора математичної моделі – обернений оператор найчастіше виявляється необмеженим, або суттєвим впливом похибки вимірювань на похибку відновлення властивостей об'єкта – отримані розв'язки виявляються нестійкими. Для побудови стійких розв'язків зазвичай використовується регуляризуючі процедури для некоректно поставлених задач або умовно-коректна постановка оберненої задачі, що ґрунтується на залученні додаткової інформації про шуканий розв'язок [5]. Одним із способів умовно-коректної постановки оберненої задачі є її варіаційне формулювання із застосуванням методу квазіобернення [1], [5]. Застосування такого підходу дозволяє звести обернену задачу до задачі мінімізації середньоквадратичного відхилення між розрахунковими, отриманими з використанням математичної моделі прямої задачі, і спостережуваними значеннями характеристик об'єкта.

Для отримання наближеного розв'язання варіаційної задачі в такій постановці використовуються числові методи, які застосовуються в екстремальних задачах. Зокрема, можливе використання методу градієнтного спуску у функціональному просторі моделі в поєднанні зі спеціальними методами регуляризації. Однак для пошуку розв'язків таких задач завжди необхідне багаторазове обчислення функціоналу-нев'язки при виконанні кожної ітерації. Окрім того, нелінійні функціонали зазвичай мають численні локальні мінімуми, тому метод розв'язання задачі мінімізації має містити алгоритм вибору глобального мінімуму серед множини субоптимальних мінімумів.

Методи градієнтного спуску мають добру швидкість у задачах з невеликою кількістю параметрів моделі, однак стають громіздкими і нестійкими при збільшенні кількості параметрів. Основними складнощами при їхній реалізації є необхідність коректного визначення часткових похідних за наявності шуму у вимірних даних та неоднозначність інтерпретації нуля похідної, який може вказувати як на мінімум, так і на точку перегину функції за параметром. У зв'язку із цим виникають проблеми із формулюванням критерію зупинки алгоритмів. Проблема наявності субоптимальних розв'язків у більшості методів градієнтного спуску зазвичай не розглядається в загальному вигляді, тобто використання цих методів в їхньому початковому вигляді для виконання глобальної мінімізації нелінійного функціоналу-нев'язки неможливе. Усе це зумовлює обчислювальні складнощі при розв'язанні обернених задач ідентифікації моделей.

У даній роботі запропоновано підхід, при якому обернена задача визначення місця розташування жорстких включень у пластині за результатами спостереження за її деформацією формулюється з використанням варіаційних принципів теорії пружності для розв'язання прямої задачі, а додаткова умова, що забезпечує близькість вимірних в експерименті та розрахункових значень фізичних полів, приєднується до функціоналу прямої задачі з використанням множників Лагранжа.

Постановка задачі. Розглядається обернена задача теорії тонкостінних систем, в якій у прямокутній пластині необхідно визначити місцерозташування жорстких включень, розміри яких значно менше за розміри пластини, по відомим (вимірним) значенням деформацій в деяких точках, розташованих на її граничних поверхнях.

Особливістю такої постановки задачі є те, що визначення параметрів моделі відбувається із використанням результатів вимірювань характеристик напружено-деформованого стану, значення яких швидко зменшуються при віддаленні від місця розташування дефекту. Тому звичайні підходи, пов'язані з використанням середньоквадратичного відхилення розрахункових та вимірних значень характеристик напружено-деформованого стану, призводять до розбіжних ітераційних процесів.

Математична модель задачі. Розглядається прямокутна тонка пластина, яка займає просторову область $\Omega = \{X \mid X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3\}$ (область Ω може бути й багатозв'язною) обмежену контуром Γ , і перебуває під дією експлуатаційного навантаження. Деформований стан пластини описується вектор-функцією переміщень $\bar{U}(X, H^1(X)) \equiv (\bar{u}_i(X, H^1(X)), \bar{w}(X, H^1(X)))$ і залежить від функції невідомих оберненої задачі $H^1(X)$. Вектор-функція переміщень складається із переміщень точок серединної поверхні пластини $\bar{u}_i(X, H^1(X))$, $i = 1, 2$ у напрямках ξ_1, ξ_2 та нормальних переміщень $\bar{w}(X, H^1(X))$.

Для формулювання задачі ідентифікації введено функцію $H^1(X)$, що характеризує наявність у матеріалі пластини жорстких включень. Зв'язок між функціями $\bar{U}(X, H^1(X))$ та $H^1(X)$ для пружного деформування пластини описано нелінійною системою рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[C_1^{ijq}(H^1) \left(\frac{\partial u_q}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_q} \right) \right] + V_j(X) &= 0; \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left(C_2^{ijq}(H^1) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i \partial \xi_q} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(C_1^{ijq}(H^1) \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_q} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_q} \right) \right) + V(X) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При побудові математичної моделі деформування пластини враховано гіпотези Кірхгофа–Лява та нелінійні співвідношення теорії В. В. Новожилова у припущенні про мализну деформацій і квадратів кутів повороту порівняно з одиницею

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_j} \right]; \quad \chi_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_j} \right), \quad (2)$$

де $C_1^{ijpq}(H^1)$, $C_2^{ijpq}(H^1)$ – функції, що описують жорсткість пластини на розтягування-стискання та згинальну жорсткість; $V_j(X)$, $V(X)$ – проекції функції навантаження на відповідні осі; $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{\chi}_{ij}$ – складові тангенціальної та згинальної деформацій, $i, j, t, q = 1, 2$.

Введено безрозмірні змінні: $\xi_1 = \bar{\xi}_1/\hat{a}$; $\xi_2 = \bar{\xi}_2/\hat{b}$; $X = (\xi_1, \xi_2)$, безрозмірні функції: $u_1 = \hat{u}_1/\hat{a}$; $u_2 = \hat{u}_2/\hat{b}$; $w = \hat{w}/\hat{h}$; $C_1^{ijpq}(H^1(X)) = \hat{C}_1^{ijpq}(H^1(X))/\hat{E}_0\hat{h}$; $C_2^{ijpq}(H^1(X)) = \hat{C}_2^{ijpq}(H^1(X))/\hat{E}_0\hat{h}^3$; $V(X) = \hat{V}(X)(1-\nu^2)\hat{a}/\hat{E}_0\hat{h}^2$; $\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}$, $\chi_{ij} = \hat{a}\hat{\chi}_{ij}$, де $(\hat{\cdot})$ – відповідні розмірні функції; $2\hat{a}$, $2\hat{b}$, $\hat{h}$ – лінійні розміри і товщина пластини; $\hat{E}_0(X)$, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\varepsilon = \hat{h}^2/\sqrt{12}\hat{a}^2$ – параметр.

Зв'язок між деформаціями та тангенціальними зусиллями T_{ij} , згинальними, крутними моментами M_{ij} сформульовано з використанням узагальненого закону Гука:

$$T_{ij} = C_1^{ijkl}(H^1)\varepsilon_{kl}; \quad M_{ij} = \varepsilon C_2^{ijkl}(H^1)\chi_{kl}. \quad (3)$$

Безрозмірні функції T_{ij} , M_{ij} введено співвідношеннями $T_{ij} = \hat{T}_{ij} \hat{a} (1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^2$, $M_{ij} = \hat{M}_{ij} \hat{a} (1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^3$.

З огляду на симетричну щодо товщини будову пластини вважатимемо модуль Юнга $\hat{E}(x_1, x_2, x_3)$ парною функцією ξ_3 , тоді функції, що описують жорсткість пластини на розтягування-стискання $C_1^{ijkl}(H^1)$ та вигінну жорсткість $C_2^{ijkl}(H^1)$ обчислюються у такий спосіб:

$$C_1^{ijpq}(H^1) = \int_{-h/2}^{h/2} D^{ijpq}(X, H^1) dx_3, \quad C_2^{ijpq}(H^1) = \int_{-h/2}^{h/2} D^{ijpq}(X, H^1) (x_3)^2 dx_3,$$

тут та далі $i, j, t, q = 1, 2$; якщо $i \neq j$, тоді $t \neq q$, і позмінно $t = 1, q = 2$; $t = 2, q = 1$.

За наявності жорстких включень, розташованих у точках X_k , $k = \overline{1, K}$ пластини, залежність пружних характеристик системи від параметрів моделі $H^1(X)$ враховано у такий спосіб:

$$D^{1111}(X, H^1) = \frac{E_0(X) + \sum_k (E_k(X) - E_0(X))H^1(X)}{(1-\nu^2)};$$

$$D^{1122}(X, H^1) = \frac{\left(E_0(X) + \sum_k (E_k(X) - E_0(X))H^1(X) \right) \nu}{(1-\nu^2)};$$

$$D^{1212}(X, H^1) = \frac{E_0(X) + \sum_k (E_k(X) - E_0(X))H^1(X)}{2(1+\nu)},$$

де $E_k(X)$, $k = \overline{1, K}$ – модуль Юнга k -го включення.

Сформульовано умови на зовнішніх контурах області Ω :

$$w|_{\Gamma} = w^* \text{ або } Q_{ii}|_{\Gamma} = Q_{ii}^*; \quad u_i|_{\Gamma} = u_i^* \text{ або } T_{ij}|_{\Gamma} = T_{ij}^*; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_i}|_{\Gamma} = \frac{\partial w^*}{\partial \xi_i} \text{ або } M_{ij}|_{\Gamma} = M_{ij}^*, \quad (4)$$

де $\hat{Q}_{ij}$ – поперечні сили, $Q_{ij} = \hat{Q}_{ij} \hat{a} (1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^2$; u_i^* , w^* , $\frac{\partial w^*}{\partial \xi_i}$, T_{ij}^* , M_{ij}^* , Q_{ij}^* – задані значення відповідних функцій на зовнішньому контурі пластини Γ , $i, j = 1, 2$.

Сформульованій крайовій задачі (1) – (4) відповідає варіаційна постановка: при фіксованій функції параметрів моделі $H^1(X)$ необхідно знайти таку вектор-функцію $U(X)$, що

$$U(X) = \arg \min_{\bar{U}} J(U(H^1(X))), \quad U \in \bar{U}, \quad (5)$$

де $J(U(H^1(X)))$ – функціонал повної енергії системи, що розглядається.

Геометричні співвідношення (2), узагальнений закон Гука (3), крайові умови (4) приєднуються до функціонала $J(U(X), H^1(X))$ за допомогою множників Лагранжа. З умов стаціонарності отриманого функціоналу, визначаючи невідомі множники Лагранжа, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
J(U(H^1(X))) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(C_1^{ijpq}(H^1) \varepsilon_{ij}(X) \varepsilon_{pq}(X) + \varepsilon^2 C_2^{ijpq}(H^1) \chi_{ij}(X) \chi_{pq}(X) \right) d\Omega - \int_{\Omega} (V_1(X) u_1 + V_2(X) u_2 + V(X) w) d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \left(T_{11}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{11}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] + T_{22}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{22}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] + \right. \\
& + T_{12}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{12}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right] + \varepsilon^2 \left(M_{11}(\xi_1, \xi_2) \left[\chi_{11}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] + \right. \\
& + M_{22}(\xi_1, \xi_2) \left[\chi_{22}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] + M_{12}(\xi_1, \xi_2) \left[\chi_{12}(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] \left. \right) d\xi_1 d\xi_2 - \\
& - \int_{\Gamma_i} \left(\tilde{T}_\tau^* u^\tau + \tilde{T}_m^* u^m + \tilde{M}_m^* \frac{\partial w}{\partial m} + \tilde{Q}^* w \right) d\Gamma_i + \int_{\Gamma_j} \left(\tilde{T}_\tau (u^\tau - u^{\tau*}) + \tilde{T}_m (u^m - u^{m*}) + \tilde{Q} (w - w^*) + \tilde{M}_m \left(\frac{\partial w}{\partial m} - \frac{\partial w^*}{\partial m} \right) \right) d\Gamma_j, \quad (6)
\end{aligned}$$

де V_1, V_2, V – проекції зовнішніх навантажень; m, τ – орти нормалі та дотичної до границі Γ ; m^i, m_i, τ^i, τ_i – коваріантні й контраваріантні складові орта нормалі й орта дотичної до границі Γ ; $u^m = u_i m^i$; $u^\tau = u_i \tau^i$ – проекції переміщень на m і τ ; $\tilde{T}_m = T_{ij} m^i m^j$, $\tilde{T}_\tau = T_{ij} \tau^i \tau^j$ – зовнішні нормальне і дотичне до границі Γ зусилля; $\tilde{M}_m = M_{ij} m^i m^j$ – проекція згинального моменту на m ; $\tilde{Q} = \tau^i \frac{\partial}{\partial \tau_i} (\tau_j m_k M^{jk})$ – поперечне зусилля, що прикладене до границі Γ .

В отриманому функціоналі (6) незалежно варіюються всі невідомі функції задачі в області Ω і на контурах пластини.

Розв'язання оберненої задачі передбачає визначення невідомих функцій $H^1(X)$ за результатами спостережень за напружено-деформованим станом пластини, отриманими шляхом вимірювання в точках пластини γ_p характерних параметрів напружено-деформованого стану σ_p^* , $p = \overline{1, P}$.

Умову близькості напружено-деформованого стану пластини, що визначається з умов стаціонарності функціоналу (7), і спостережуваного стану сформульовано у такий спосіб:

$$\sigma(U(H^1(X))) \Big|_{U=U_{\gamma_p}} - \sigma_p^* = 0, \quad p = \overline{1, P}, \quad (7)$$

де $\sigma(U(H^1(X))) \Big|_{U=U_{\gamma_p}}$ – обчислене за математичною моделлю значення вектор-функції $\sigma(U(H^1(X)))$ у точках γ_p .

Для порівняння можливих станів пластини у гільбертовому просторі $L_{2\Omega}$ при фіксованій вектор-функції $H^1(X)$ було застосовано метрику:

$$\rho_{L_{2\Omega}}^2 = \int_{\Omega} \left[C_1^{ijpq}(H^1(X)) (\varepsilon_{ij}(H^1(X)) - \varepsilon_{ij}^*) (\varepsilon_{pq}(H^1(X)) - \varepsilon_{pq}^*) + \varepsilon C_2^{ijpq}(H^1(X)) (\chi_{ij}(H^1(X)) - \chi_{ij}^*) (\chi_{pq}(H^1(X)) - \chi_{pq}^*) \right] d\Omega. \quad (8)$$

Виходячи з вигляду метрики (8), найбільш інформативною для спостереження за станом пластини є вектор-функція узагальнених деформацій $\sigma(U, H^d(X)) = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$, $i, j = 1, 2$, значення компонент якої отримуються з нелінійних геометричних співвідношень (2) шляхом підстановки в них компонент вектор-функції переміщень $U(H^1(X))$.

Спостережувані значення деформацій $\sigma_p^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}^T$, $p = \overline{1, P}$ отримуються з показників датчиків вимірювання деформацій, які встановлено на поверхні пластини. Сформульована у такий спосіб обернена задача визначення жорстких включень у пластині полягає у визначенні пари $(U(X), H^1(X))$, що доставляє мінімум функціоналу (6) та задовольняє рівність (7). Побудована обернена задача (6), (7) є задачею оптимізації з обмеженнями типу рівностей.

Метод розв'язання оберненої задачі. Для побудови розв'язку оберненої задачі здійснюється перехід до дискретної моделі пластини з використанням скінченно-елементної апроксимації. Для опису невідомих функцій задачі введено сітки, невідомим функціям ставляться у відповідність вектори, компоненти яких є вузловими значеннями функцій задачі [2]. На області Ω введено:

– сітку з вузлами $X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$, $n = \overline{1, N}$ для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач. Функції $U(H^1(X))$, $\sigma(U(H^1(X)))$, $H^1(X)$ подаються у вигляді векторів: $\{U_n\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{H_n^1\}$;

– сітку з вузлами $X_p = (\xi_{1p}, \xi_{2p})$, $p = \overline{1, P}$ для опису координат точок вимірювання компонент вектора деформацій $\{\sigma_p^*\}$, слід зазначити, що вузли X_p обираються з числа X_n .

Невідомі функції задачі на елементі задано для локальної системи координат за допомогою апроксимацій через вузлові значення. Після введеної дискретизації область Ω може бути зображено у вигляді сукупності прямокутних підобластей $\Omega_n(X_n)$, де вузол $X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$ відповідає лівому верхньому куту підобласті Ω_n . За умов

$$\bigcup_n \Omega_n = \Omega; \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j$$

сукупність підобластей $\Omega_n(X_n)$ є розбиттям множини Ω на підмножини.

Для визначення невідомих оберненої задачі введено характеристичні функції підмножин Ω_i у вигляді

$$H_n^1(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_n \in \Omega_n^1 \\ 0, & \text{якщо } X_n \in \Omega \setminus \Omega_n^1 \end{cases}; \quad n = \overline{1, N}. \quad (9)$$

На підставі теорії оптимального розбиття множин [3] задачу визначення невідомих функцій оберненої задачі $H^1(X)$ сформульовано як задачу оптимального розбиття множин у такий спосіб: необхідно знайти таку вектор-функцію $(U^*(H^*(X)))$, що доставляє мінімум функціоналу (6) за умов (7) на множині $\overline{H}$, яка складається з R можливих розв'язків задачі:

$$\begin{aligned} \overline{H} = \left\{ H^1(X) = \left(H^1(X), \dots, H^R(X) \right); \quad H^l(X) = \left\{ H_i^l(X) \right\}, \quad l = \overline{1, R}, \quad i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. H_i^l(X) = 0 \vee 1, \quad H_i^l(X) \cdot H_j^l(X) = 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{i=1}^N H_i^l(X) = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Додаткові умови (7) та (10) приєднаємо до функціоналу (6) за допомогою множників Лагранжа, тоді для отримання розв'язку оберненої задачі необхідно знайти вектор $W = \{U(H^1), \Psi\}$, $W \in \overline{W}$ з умови

$$W = \arg \min_{W \in \overline{W}} h(W),$$

$$h(U(H^1(X)), \Psi) = J(U(H^1(X))) + \int_{\Omega} \phi_0(X) \left(\sum_{i=1}^N H_i^1(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^P \lambda_p \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(H^1(X_p)) - \sigma_{ijp}^*) d\Omega, \quad (11)$$

де $J(U(H^1(X)))$ – функціонал (6); $\Psi = (\phi_0(X), \lambda)$, $\Psi \in \overline{\Psi}$; $\phi_0(X)$ – дійсна функція, яку визначено на області Ω ; $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P\}$, $p = \overline{1, P}$ – P -вимірний вектор дійсних чисел, $\lambda \in \overline{\Lambda}$; $\overline{\Psi} = L_{2\Omega} \times \overline{\Lambda}$; $\overline{W} = \overline{U} \times \overline{\Psi}$; $\overline{U}$, $\overline{\Psi}$ – множини, що є областями визначення невідомих задач.

Показано, що сідлова точка функціоналу (11) збігається з розв'язком сформульованої крайової задачі, а вектор невідомих оберненої задачі отримано у вигляді

$$H_n^{1*}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y_n(U) + \phi_0^*(X) + \lambda_n^* \sigma_{ijn} \geq 0 \\ 1, & \text{якщо } Y_n(U) + \phi_0^*(X) + \lambda_n^* \sigma_{ijn} < 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Доданок $Y_n(U)$ будується з доданків функціоналу (6), що залежать від $H^1(X)$. Для їхнього визначення здійснюється підстановка скінченно-елементних апроксимацій невідомих функцій задачі у функціонал (6). Після виконання процедур інтегрування, варіювання та підсумовування матриць елементів отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь N -го порядку:

$$M(U) - V = 0, \quad (13)$$

де $M(U)$ – матриця жорсткості системи, яка містить нелінійні складові.

Для розв'язання нелінійної системи (13) застосовується ітераційний метод продовження за параметром навантаження $t^{(r)} = t^{(r-1)} + \Delta t$, $0 \leq t \leq 1$, складові проекції поверхневої сили зображуються в такий спосіб: $V_i^{(r)} = t^{(r)} \cdot \overline{V}_i$, $i = \overline{1, 3}$, де Δt – крок методу продовження; r – номер кроку. Тоді система (13) на r -му кроці методу продовження за параметром набуває вигляду

$$A^{(r)}(U^{(r-1)}) \Delta U^{(r)} = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t), \quad (14)$$

де $A^{(r)}(U^{(r-1)}) = \left\{ \frac{\partial M}{\partial U} \right\} \Big|_{U^{(r-1)}}$ – лінеаризована матриця жорсткості системи; $U^{(r)} = U^{(r-1)} + \Delta U^{(r)}$; $\Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t)$ – приріст правої частини системи при зміні номера кроку r .

Алгоритм розв'язання оберненої задачі. Сформулюємо процедуру розв'язання оберненої задачі на r -му кроці методу продовження за параметром у вигляді ітераційного процесу, що складається із двох етапів: визначення місця розташування жорсткого включення та ідентифікації його пружних властивостей.

Для виконання процедури першого етапу побудовано алгоритм:

1. Задати початкові значення $H^{(0)} = \{H_n^{(0)}\}$, $\{\lambda_n^{(0)}\}$, $n = \overline{1, N}$; $l = 1$, де l – номер кроку внутрішнього ітераційного процесу.

2. Отримати спостережувані значення деформацій $\{\sigma_{ijp}^*\}$, $p = \overline{1, P}$.

3. Обчислити значення U , $Y_n^{(l)}(U)$ при заданих $H^{(l)}$, $\{\lambda_n^{(l)}\}$ із розв'язання системи (14).

4. У внутрішньому ітераційному процесі визначити значення $\phi_0^{(l)}(X)$ та $\{\lambda_n^{(l+1)}\}$.

Якщо умова $\|\lambda^{(l+1)} - \lambda^{(l)}\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ виконується, то покласти $\phi_0^*(X) = \phi_0^{(l)}(X)$, $\{\lambda_n^*\} = \{\lambda_n^{(l+1)}\}$ і перейти до кроку 5; інакше – $l = l + 1$, перейти до кроку 3.

5. Обчислити значення $H_n^*(X)$ за формулою (13), побудувати вектор $\{H_n^*(X)\}$.

Побудований за допомогою алгоритму бінарний вектор невідомих оберненої задачі $\{H_n^*(X)\}$ визначає місце розташування областей пластини, де присутні жорсткі включення.

На другому етапі відбувається ідентифікація пружних властивостей включення з розв'язання задачі мінімізації функціоналу (8) з використанням методу Ньютона–Рафсона.

Для побудови розв'язку за початкове наближення $\tilde{H}^{(0)}(X)$ обирається вектор $\{H_n^*(X)\}$, отриманий на попередньому етапі, у якому компоненти $H_n^*(X)$, що набули значення 1, замінюються значеннями модуля Юнга включення. Далі компоненти вектора $\tilde{H}(X)$ визначаються у такий спосіб:

$$\tilde{H}^{(s)} = \tilde{H}^{(s-1)} - \left(G^T \cdot G\right)^{-1} G^T \Delta(\tilde{H}^{(s-1)}), \quad (15)$$

де $G = G(X_p, \tilde{H}) = \left[\frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H})}{\partial \tilde{H}_n} \right]$ – матриця градієнта вектора нев'язки $\Delta(X_p, \tilde{H}) = (\sigma_{ij}(X_p, \{\tilde{H}_n\}) - \sigma_{ij}^*(X_p))$, яка ви-

значається чисельно з використанням різницевого аналога, S – номер кроку ітераційного процесу другого етапу.

Збіжність ітераційної процедури (15) методу Ньютона–Рафсона забезпечується вибором близького до дійсного розв'язку оберненої задачі початкового наближення, яке визначається на першому етапі процесу ідентифікації згідно з (12).

Аналіз результатів обчислювального експерименту. Для дослідження переваг запропонованого підходу було проведено порівняння результатів розробленої двоетапної процедури ідентифікації місця розташування та модуля пружності включень у тонкій пластині з результатами, отриманими з використанням класичного підходу, коли розв'язок оберненої задачі відшукується шляхом мінімізації функціоналу середньоквадратичного відхилення розрахованих і спостережуваних значень деформацій пластини. Для мінімізації зазначеного функціоналу можна використовувати метод Ньютона–Рафсона.

Розглянуто прямокутну тонку пластину ($a/b = 1$, $a/h = 100$, $\tilde{E}^{(0)} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$), яка перебуває під дією нормальної розподіленого навантаження. На кромках $\xi_1 = \pm 1$ пластини реалізовані умови жорсткого защемлення, кромки $\xi_2 = \pm 1$ – вільні, модель пластини наведено на рис. 1. У пластині розташовано 2 жорстких включення: включення 1 ($a_{\text{вкл1}}/a = 20$, $\tilde{E}_1^* = 1.4 \cdot 10^6$ МПа, $\nu = 0.3$), включення 2 ($a_{\text{вкл2}}/a = 40$, $\tilde{E}_2^* = 1.0 \cdot 10^6$ МПа, $\nu = 0.3$). Місцезнаходження включень задано координатами лівого нижнього та правого верхнього кутів включень: для включення 1 – $A(0.2; 0.3)$, $B(0.3; 0.4)$; для включення 2 – $C(-0.6; -0.45)$, $D(-0.5; -0.4)$.

Спостережувані значення деформацій $\sigma_p^* = \{\varepsilon_{ijp}^*, \chi_{ijp}^*\}^T$ було отримане з розв'язання прямих задач деформування пластини з включеннями, пружні властивості яких відомі, з використанням пакета прикладних програм, що здійснює скінченно-елементний розрахунок. Як початкове наближення для опису місцерозташування включень у пластині було обрано області, у яких спостерігалось відхилення значень спостережуваних функцій від відповідних значень функцій, що описують деформування пластини без включення (рис. 2). Для ідентифікації включень у розглянутій пластині було застосовано два підходи: класичний варіаційний підхід щодо розв'язання обернених задач та запропонований в даній роботі.

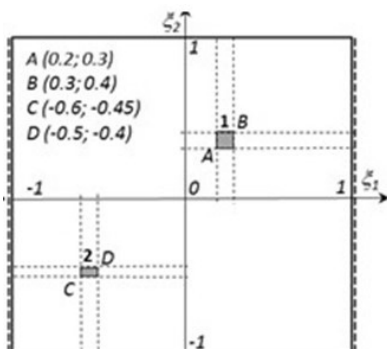


Рис. 1. Модель пластини

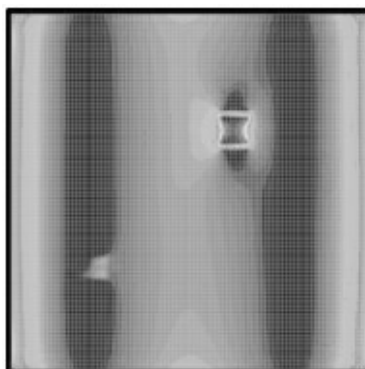


Рис. 2. Початкове наближення



Рис. 3. Результат ідентифікації місцерозташування включень

Спочатку ідентифікацію включень виконано із застосуванням класичного варіаційного підходу, який зазвичай використовується при розв'язанні обернених задач і передбачає мінімізацію відхилення між розрахунковими, отриманими з використанням математичної моделі прямої задачі, і спостережуваними значеннями характеристик об'єкта (8). Для застосування вказаного підходу виконано апроксимацію невідомих параметрів включень. Апроксимація виконувалась на сітці скінченних елементів у такий спосіб: номери елементів, у яких спостерігались відхилення, було обрано як компонент вектора невідомих оберненої задачі. Таким чином, вектор невідомих оберненої задачі складався із початкових значень модулів Юнга $\bar{E}_1^0$, $\bar{E}_2^0$, заданих для відповідних елементів скінченно-елементної сітки. Уточнення компонент вектора невідомих оберненої задачі відбувалось в ітераційній процедурі методу Ньютона–Рафсона. У табл. 1 наведено результати виконання ітераційної процедури для характерних елементів пластини, частина яких належить включенню, а частина – пластині (відповідну ознаку наведено у табл. 1).

Таблиця 1

Ітераційний процес мінімізації функціоналу-нев'язки (8)

Номер елемента	Ознака	Початкове наближення $\cdot 10^6$ МПа	Результат 2 ітерації $\cdot 10^6$ МПа	Результат 5 ітерації $\cdot 10^6$ МПа	Результат 8 ітерації $\cdot 10^6$ МПа	Дійсні значення $\cdot 10^6$ МПа	Відхилення, %
264	належить пластині	0,6	0,16	0,42	0,38	0,2	90,0
265	належить пластині	0,6	0,43	0,63	1,1	0,2	450,0
266	належить пластині	0,6	0,83	1,12	0,8	0,2	300,0
267	належить пластині	0,6	0,11	0,26	0,4	0,2	100,0
285	належить пластині	0,6	0,57	0,48	1,1	0,2	450,0
286	належить включенню 1	0,6	0,37	0,93	1,3	1,4	7,1
287	належить включенню 1	0,6	0,76	1,31	1,1	1,4	21,4
288	належить пластині	0,6	0,43	0,92	1,2	0,2	500,0
327	належить пластині	0,6	0,25	0,73	0,4	0,2	100,0
328	належить пластині	0,6	0,19	0,46	0,8	0,2	300,0
329	належить пластині	0,6	0,54	0,81	1,1	0,2	450,0

З аналізу результатів, наведених у табл. 1, можна бачити, що використання методу локальної оптимізації до функціоналу-нев'язки (8) не дозволило отримати результат ідентифікації жорстких включень у пластині. На ітераціях спостерігалися коливання значень компонент вектора невідомих. У загальному випадку обчислювальний процес був розбіжним, похибки ідентифікації пружних характеристик істотно змінювалися від ітерації до ітерації.

За результатами проведеного обчислювального експерименту можна стверджувати, що використання підходу, що ґрунтується на мінімізації функціоналу-нев'язки, при довільному виборі початкового наближення задовільний результат ідентифікації модулів пружності включень можна отримати лише у випадку, коли вдається "вгадати" початкове наближення, тобто характер розподілу та рівень значень пружних характеристик обирається близьким до дійсних значень.

Застосування запропонованого підходу здійснювалось у два етапи. Початкове наближення обиралось таким самим чином, як і для попереднього способу розв'язання задачі. На першому етапі визначалась область розташування включень у пластині з розв'язання задачі (11). На рис. 3 наведено картину напружено-деформованого стану пластини після визначення місцерозташування включень у пластині з використанням (12). Слід зазначити,

що порівняно із початковим наближенням області, у яких розташовані включення, значно зменшились та наблизились до дійсних розмірів включень.

На другому етапі виконано ідентифікацію пружних властивостей включень, у табл. 2 наведено результат виконання ітераційної процедури методу Ньютона–Рафсона. Похибка відновлення пружних властивостей включень не перебільшує 4,5 %, матеріалу пластини – 6,5 %. При застосуванні двохетапного підходу після визначення місцезнаходження включень обернена задача ідентифікації пружних властивостей розв'язується на компактній множині, що забезпечує стійкість процедури методу локальної оптимізації.

Таблиця 2

Ітераційний процес визначення пружних властивостей включень

Номер елемента	Ознака	Відновленні значення $\cdot 10^6$ МПа	Дійсні значення $\cdot 10^6$ МПа	Відхилення, %
285	належить пластині	0,205	0,200	2,5
286	належить включенню 1	1,433	1,400	2,3
287	належить включенню 1	1,463	1,400	4,5
288	належить пластині	0,190	0,200	5,0
327	належить пластині	0,187	0,200	6,5
328	належить пластині	0,193	0,200	3,5
329	належить пластині	0,206	0,200	3,0

Висновки. Побудовано модель деформування спостережуваної тонкої пластини з включеннями, геометричні та фізичні параметри яких невідомі. При розробці математичної моделі нелінійного деформування пластини застосовано варіаційні принципи теорії пружності. Сформульовано функціонал енергії пластини, до якого приєднано додаткову умову, що визначає близькість дійсного і спостережуваного станів пластини, а невідомі параметри моделі описано за допомогою характеристичних функцій. Застосовано числовий метод і побудовано ітераційний алгоритм, виконано скінченно-елементну апроксимацію функцій задачі, лінеаризацію за допомогою методу продовження за параметром навантаження та застосовано теорію оптимального розбиття множин для визначення параметрів моделі. Виконано порівняння результатів ідентифікації жорстких включень у пластині, отриманих за допомогою розробленого підходу та класичного варіаційного підходу щодо формулювання обернених задач.

Список використаних джерел:

- 1 Ватульян А.О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел / А.О. Ватульян // Докл. Академии наук, 2008. – Т. 422, № 2. – С. 182–184
- 2 Гук Н. А. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине / Н.А. Гук, Н.И. Степанова // Восточно-Европейский журн. передовых технологий, 2016. – Т. 2, № 7 (80). – С. 4–9.
- 3 Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 562 с.
- 4 Постнов В.А. Использование метода Ньютона для решения задач идентификации балочных систем / В.А. Постнов, Г.А. Тумашик // Проблемы прочности и пластичности, 2006. – № 68. – С. 86–94.
- 5 Тихонов А. Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М. : Машиностроение, 1990. – 263 с.
- 6 Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 562 с.

Надійшла до редколегії 09.12.19

Н. Гук, д-р физ.-мат. наук

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепр, Украина

ОСОБЕННОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Рассматривается задача идентификации жестких включений в материале упругой пластины по результатам измерений деформаций. Задача формулируется как обратная задача теории тонких пластин. Вариационная формулировка учитывает функционал полной энергии пластины и дополнительное условие, определяющее близость вычисленного с использованием математической модели и наблюдаемого состояний пластины. Поиск решения обратной задачи осуществляется в два этапа: определяется местоположение включений; уточняются значения физико-механических параметров включений с использованием градиентного метода.

Ключевые слова: тонкие пластины, обратные задачи, идентификация жестких включений, упругая пластина, деформация.

N. Guk, Full Doctor

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

FEATURES OF VARIATIONAL FORMULATION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE THIN PLATE THEORY

The problem of identification of hard inclusions in the material of an elastic plate by the results of strain measurements is considered.

The problem is formulated as the inverse problem of the theory of thin plates. The variation formulation contains the functional of the total energy of the plate and an additional condition that determines the proximity of the plate calculated using the mathematical model and the observed states. The search for a solution to the inverse problem is carried out in two stages: the location of the inclusions is determined; the values of the physical and mechanical parameters of the inclusions are specified using the gradient method.

Keywords: the Korteweg-de Vries equation, singular perturbation, variable coefficients, asymptotic solutions, soliton like solutions.

УДК 539.595

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.10.48-51>О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,
М. Сапон, асп.Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: olelim2010@yahoo.com**АНАЛІЗ ВПЛИВУ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ ТРУБОПРОВОДУ
З РІДИНОЮ НА РОЗВИНЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

Побудовано математичну модель сумісного руху пружного трубопроводу, по якому тече рідина. Трубопровід здійснює обертання навколо поздовжньої осі. Для різних швидкостей течії рідини й обертання трубопроводу визначено особливості динамічної поведінки системи. Показано, що в системі коливання розвиваються навколо прямолінійного і двох альтернативних положень динамічної рівноваги. Дано характеристику явищам, що спостерігаються при переході до коливань відносно альтернативних положень.

Ключові слова: тонкі пластини, обернені задачі, ідентифікація жорстких включень, пружна пластина, деформація.

Вступ. Дослідження задач про сумісний рух трубопроводу з рідиною, що закріплений на деякій основі й обертається в поздовжньому до трубопроводу напрямку, має важливе теоретичне і практичне значення. Зокрема, становить інтерес аналіз впливу кутової швидкості обертання основи на поведінку системи при різних швидкостях течії рідини в трубопроводі. Подібні задачі на практиці зустрічаються при розрахунках міцності та стійкості до зовнішніх впливів різних механізмів, зокрема, бурових установок, у конструкціях яких наявні такі елементи. У працях [1, 5] розглядалися схожі задачі, що стосувалися ряду актуальних технічних проблем, які виникають у газовидобувній галузі, зокрема, при бурінні свердловин та експлуатації трубопроводів. Задачі з трубопроводами, що обертаються, досліджені значно менше, ніж задачі, коли основа нерухома [2–4]. Математичні моделі таких систем досить складні, оскільки нелінійні. У цій статті отримано результати для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем. Показано, що при обертанні трубопроводу ускладнюються прояви нелінійностей і може спостерігатися перехід до коливань навколо альтернативних положень рівноваги.

Математична модель системи. Розглядається механічний об'єкт, що складається з трубопроводу довжиною l , який моделюється як балка кругового поперечного перерізу зі згинаючою жорсткістю EJ і площею поперечного перерізу F . Трубопровід встановлено на основі, що обертається з кутовою швидкістю Ω . По трубопроводу тече ідеальна однорідна нестислива рідина із заданою поздовжньою швидкістю течії V і внутрішнім тиском P . Лінійні густини рідини і трубопроводу відповідно будуть ρ і μ . Поперечні коливання трубопроводу описуються функцією $u(t, x)$, де t – час, а x – поздовжня координата трубопроводу. Чисельне моделювання проводиться для випадку, коли трубопровід з одного боку консольно закріплений, а з другого боку, його кінець вільний. Загальний вигляд системи наведено на рис. 1.

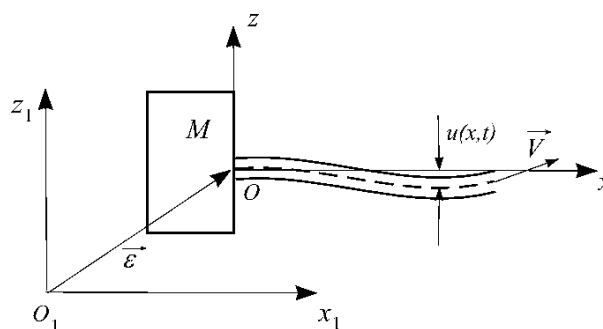


Рис. 1. Загальний вигляд системи

Припускається [5], що колильний рух трубопроводу, спричинений деформацією, відбувається лише в меридіональній площині. Для аналізу динаміки трубопроводу з рідиною використовуємо мішаний ейлерово-лагранжевий опис руху елементів системи, що викладений у роботах [4, 5] і метод модальної декомпозиції. Враховуючи, що компонента швидкості, що зумовлена обертанням трубопроводу, перпендикулярна меридіональній площині, у якій відбувається деформаційний рух системи, функція Лагранжа системи набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ V^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \omega^2 u^2 + \frac{7}{2} V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4V \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{13}{8} V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \omega^2 u^2 \right\} dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx - \frac{1}{2} PF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Наведемо фізичну характеристику кожного члена функції Лагранжа. У першому рядку наведено вираз кінетичної енергії рідини. Перший член цього виразу відповідає кінетичній енергії, зумовленій швидкістю заданого повздовжнього руху рідини, другий – швидкістю, викликану деформаційним рухом трубопроводу в поперечному напрямку, третій член відповідає кінетичній енергії обертального руху рідини разом з трубопроводом, четвертий і частина шостого членів відповідають лінійній і нелінійній складові руху частинок рідини по криволінійних ділянках трубопроводу (надалі це дає відцентрову силу), п'ятий член відповідає кінетичній енергії руху, що зумовлює дію сили Коріоліса, частина шостого і сьомий члени відповідають кінетичній енергії, зумовленій конвективною складовою швидкості руху частинок рідини. У другому і третьому рядках наведено члени, що відповідають кінетичній і потенціальній енергії пружного трубопроводу. Перші два члени другого рядка – це кінетична енергія руху пружного трубопроводу (лінійна і нелінійна складові) викликана деформаційним рухом. Третій член другого рядка – кінетична енергія, зумовлена обертальним рухом; останній член другого рядка і перший член третього рядка відповідають потенціальній енергії згинної деформації (лінійна і нелінійна складові); другий член третього рядка відповідає потенціальній енергії повздовжнього стискання-розтягу трубопроводу; останній член відповідає потенціальній енергії трубопроводу, зумовленій внутрішнім тиском рідини.

Далі виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича для побудови дискретної моделі системи. Представимо поперечні коливання трубопроводу у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i(t) A_i(x),$$

де N – кількість форм коливань, які враховуються моделлю, $A_i(x)$ – форми коливань трубопроводу з нерухомою рідиною, $c_i(t)$ – амплітудний параметр коливань за i -ю формою. Форми коливань просто знаходяться з відповідної лінійної задачі на власні значення [2, 4]. Після проведення інтегрування у функції Лагранжа по просторовій змінній одержимо дискретний варіант функції Лагранжа і на основі методики рівнянь Лагранжа другого роду виведемо рівняння руху системи в амплітудних параметрах $c_i(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) + \omega^2 c_r - \\ & - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Введені в рівняннях індексні величини є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно. При якісному аналізі системи рівнянь (1) звернемо увагу насамперед на наявність у правій частині другої похідної від амплітудного параметра. Оскільки цей член входить до рівняння нелінійно, то його можна виключити через лінійне наближення цієї системи рівнянь. Третій член у правій частині рівняння відповідає силі Коріоліса. Вона посилює або послаблює вплив сил пружності залежно від фази руху. Ця сила на лінійному рівні впливає на перерозподіл енергії між формами коливань, що має більш суттєвий вплив, ніж аналогічний механізм, що виникає при прояві нелінійних механізмів. Головним у цих рівняннях є протидія сил пружності і відцентрових сил, які виникають через рух рідини по викривлених ділянках трубопроводу.

Аналіз результатів моделювання. Проаналізовано результати моделювання коливань трубопроводу при швидкості руху рідини $V = 1$ м/с для різних частот обертання трубопроводу. У початковий момент часу прийнято $c_2(0) = 0,01$. На рис. 2 наведено динаміку переміщень вільного кінця трубопроводу. Криві відповідають варіантам значень частот обертання ($\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 12\pi$; $\omega_3 = 15\pi$; $\omega_4 = 17\pi$; $\omega_5 = 20\pi$). Для повільного обертання (криві 1-2) відбуваються коливання відносно прямолінійного стану рівноваги трубопроводу. При збільшенні частоти обертання частота коливань трубопроводу зменшується. При подальшому збільшенні частоти обертання (криві 3-4) відбувається перехід до коливань навколо альтернативного положення рівноваги і збільшення амплітуди та частоти коливань, що зумовлено тим, що критична швидкість течії рідини стає меншою від заданої швидкості потоку рідини. У таких режимах проявляється перехід до коливань з великою амплітудою, і коливання відносно альтернативного положення рівноваги стають нестійкими – коливання будуть відбуватися по чергово відносно різних станів рівноваги (крива 5). Зазначимо також, що в околі переходу до коливань відносно альтернативного положення рівноваги підсилюється вплив вищих гармонік, який у докритичному режимі і при подальшому збільшенні амплітуд коливань непомітний.

На рис. 3 і 4 наведено результати чисельного моделювання системи рівнянь (1) для інших значень швидкостей течії рідини, відповідно $V = 5$ м/с і $V = 10$ м/с. Нумерація кривих на цих рисунках відповідає значенням індексів частот обертання $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 12\pi$; $\omega_3 = 15\pi$; $\omega_4 = 17\pi$; $\omega_5 = 18\pi$ для $V = 5$ м/с і $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 5\pi$; $\omega_3 = 10\pi$; $\omega_4 = 12\pi$; $\omega_5 = 15\pi$ для $V = 10$ м/с. Як помітно з рисунків, у цілому картина розвинення динамічних процесів для всіх трьох випадків зміни частоти обертання подібна.

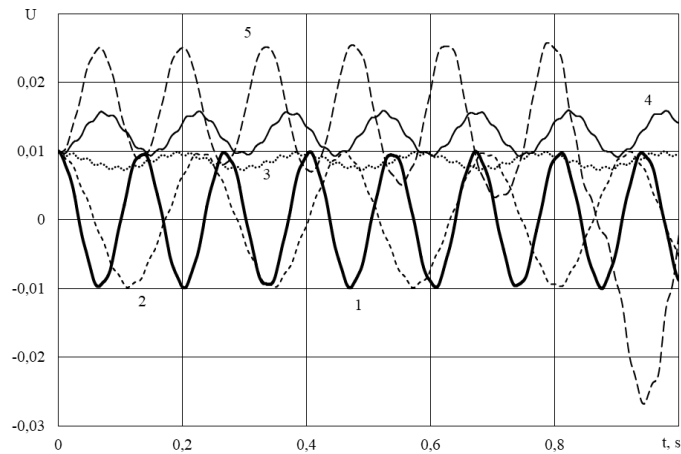


Рис. 2. Коливання кінця трубопроводу за різних значень частот обертання при швидкості рідини $V = 1$ м/с

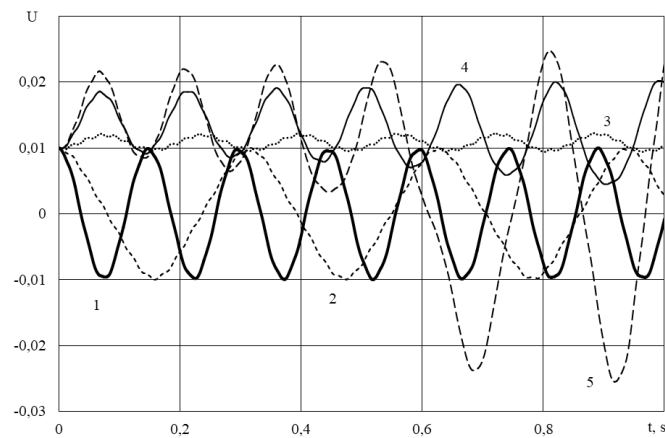


Рис. 3. Коливання кінця трубопроводу за різних значень частот обертання при швидкості рідини $V = 5$ м/с

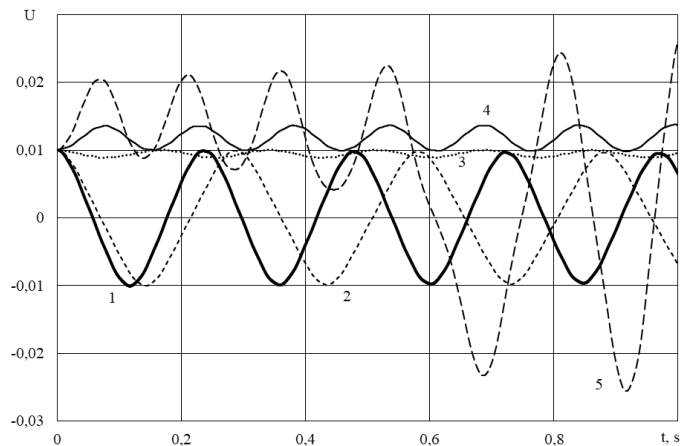


Рис. 4. Коливання кінця трубопроводу за різних значень частот обертання при швидкості рідини $V = 10$ м/с

Головним фактором, який визначає динамічну поведінку системи в цьому випадку є умова $V > V_{кр}^1$ і ступінь наближення швидкості течії рідини до критичної швидкості, яка залежить від швидкості обертання за формулою

$$V_{кр}^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{7\rho} \left(\frac{EJN_1\chi_1^4}{\beta_{11}^2} + PF - \omega^2 \frac{(\rho + \mu)N_1}{\beta_{11}^2} \right)}.$$

Фактично за умови $V > V_{кр}^1$ здійснюється перехід до коливань навколо альтернативного положення рівноваги через втрату стійкості прямолінійної форми рівноваги. Отже, для докритичних швидкостей відбуваються коливання за всіма формами навколо прямолінійного рівноважного стану, а після критичної швидкості коливання за першою формою (на відміну від всіх форм, починаючи з другої) відбуваються відносно альтернативного динамічного положення

рівноваги. Встановлено, що в безпосередній близькості цього переходу проявляються високочастотні збурення, які при подальшому збільшенні різниці між швидкістю течії та її критичним значенням швидкості зникають. Водночас при подальшому збільшенні частоти обертання, тобто й зменшенні критичного значення швидкості, амплітуди коливань трубопроводу збільшуються і коливання навколо альтернативного положення рівноваги втрачають стійкість. Надалі коливання можуть відбуватися таким чином, що в різні моменти часу коливання будуть розвиватися навколо трьох положень рівноваги: двох симетричних альтернативних положень рівноваги і прямолінійного рівноважного положення. Зауважимо, що для всіх діапазонів розвинення динамічних процесів спостерігається спільна тенденція – при збільшенні швидкості обертання частота коливань трубопроводу в докритичному діапазоні швидкостей течії зменшується, а в закритичному діапазоні – збільшується.

Висновки. У роботі досліджено динамічну поведінку системи трубопроводу з рідиною та основи, що здійснює обертальний рух. Створено модель системи та отримано результати моделювання для різних частот обертання основи трубопроводу. Виконано аналіз результатів для різних швидкостей течії рідини. У результаті аналізу можна зробити висновок про подібність зміни динамічної поведінки системи при зміні частот обертання для різних значень швидкості рідини в трубопроводі. Окремо варто вказати на значну відмінність поведінки системи для коливань навколо прямолінійного й альтернативного положення рівноваги та значний прояв вищих гармонік в околі переходу до коливань навколо альтернативного положення рівноваги. Оцінено швидкість переходу до коливань навколо альтернативного положення рівноваги та характер впливу вищих гармонік залежно від значень швидкості рідини.

Список використаних джерел:

1. Гуляев В.И. Динамика перекачивания выпуклого долота по криволинейной поверхности дна скважины / В.И. Гуляев, П.З. Луговой, Л.В. Шевчук // Прикладная механика, 2017. – Т. 53, № 4. – С. 94–105.
2. Ibrahim R.A. Overview of Mechanics of Pipes Conveying Fluids – Part I: Fundamental Studies / R.A. Ibrahim // J. of Pressure Vessel Technology, 2010. – N 132. – P. 034001–0340032.
3. Ibrahim R.A. Mechanics of Pipes Conveying Fluids – Part II: Applications and Fluidelastic Problems / R.A. Ibrahim // J. of Pressure Vessel Technology, 2011. – N 133. – P. 024001–0240030.
4. Limarchenko V.O. Vibrations of pipeline with liquid on combinational vibration excitation / V.O. Limarchenko // Nonlinear Oscillations, 2013. – Vol. 16, N 3. – P. 367–373.
5. Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O.S. Limarchenko, V.O. Limarchenko, M. Majid, A.P. Timokhin // Опір матеріалів і теорія споруд, 2015. – N 94. – P. 96–106.

Надійшла до редколегії 12.12.19

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,
М. Сапон, асп.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ НА РАЗВИТИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Построена математическая модель совместного движения упругого трубопровода, по которому течет жидкость. Трубопровод совершает вращение вокруг продольной оси. Для различных скоростей течения жидкости и вращения трубопровода определены особенности динамического поведения системы. Показано, что в системе колебания развиваются вокруг прямолинейного и двух альтернативных положений динамического равновесия. Дана характеристика явлениям, наблюдаемым при переходе к колебаниям относительно альтернативных положений.

Ключевые слова: тонкие пластины, обратные задачи, идентификация жестких включений, упругая пластина, деформация.

O. Limarchenko, Full Dr.,
M. Sapon, Ph. D. graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF ANGULAR SPEED OF ROTATION OF A PIPELINE WITH LIQUID ON THE DEVELOPMENT OF DYNAMIC PROCESSES

The article deals with construction of a mathematical model of combined motion of a rigid pipeline conveying liquid. The pipeline performs rotation about the longitudinal axis. For different velocities of liquid flow and pipeline rotation we determine special features of the system dynamic behavior. It was shown that oscillations in the system are developed near rectilinear and two alternative positions of dynamic equilibrium. Characteristics of phenomena manifested on transition to oscillations relative to alternative states are given.

Keywords: thin plates, inverse problems, identification of hard inclusions, elastic plate, deformation.

УДК 539.595

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.11.51-54>

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,
Ю. Слюсарчук, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: julija0711@gmail.com

АНАЛІЗ СИЛОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ РІДИНИ І СФЕРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА ПРИ ЗБУДЖЕННІ РУХУ СИСТЕМИ ПЕРІОДИЧНОЮ СИЛОЮ

У системі резервуар–рідина з вільною поверхнею розглянуто силову взаємодію рідини з резервуаром при вібраційному збудженні руху резервуара періодичною силою для частот у дорезонансному, білярезонансному і зарезонансному діапазонах. Досліджено особливості впливу геометричної форми резервуара на розвинення динамічних процесів. Для дослідження поведінки системи розглянуто варіанти циліндричного та сферичного резервуарів.

Ключові слова: динаміка рідини, вібраційне періодичне збурення, силова взаємодія, хвильові процеси.

Вступ. Метою цієї статті є аналіз силової взаємодії системи в різних діапазонах зміни частот та дослідження впливу геометричної форми резервуара на динаміку хвильових процесів. Актуальність задач нелінійної динаміки коливних процесів рідини з вільною поверхнею пов'язана з рядом проблем, що виникають при розробці конструкцій, які

містять рідину. Такі конструкції широко використовуються в авіаційній і космічній інженерії, у хімічній промисловості, при транспортуванні рідини. У випадку великої маси рідини її хвильові рухи можуть негативно впливати на рух всієї конструкції або транспортного засобу. Тому необхідно досліджувати процеси, які відбуваються в системі резервуар–рідина. При розгляді таких задач необхідно враховувати вплив силової взаємодії резервуара з рідиною на розвиток динамічних процесів і на вихід системи на усталений режим коливань.

На основі нелінійної математичної моделі динаміки сумісного руху резервуара з рідиною вивчається зміна в часі головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). Для порівняння розглядаються випадки циліндричного та сферичного резервуарів, які частково заповнені ідеальною рідиною. Проводиться аналіз випадків дорезонансного, білярезонансного та зарезонансного діапазонів зміни частот. Показано, що силова взаємодія відбувається за наявності модуляції та супергармонік. Вихід на усталений режим коливань не відбувається. Експериментальні дослідження [3, 5] показали, що спостерігається значне збудження вищих гармонік спектра з періодами, що не кратні періоду зовнішнього збудження. Також це свідчать про те, що поведінка системи різна у згаданих вище діапазонах частот.

Математична модель. Розглядаються нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному та сферичному резервуарах. Далі використовуються такі позначення: τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному рухах; Σ_0 і Σ – межі контакту рідини зі стінками резервуара у збуреному та незбуреному станах; $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини; $\vec{\epsilon}$ – вектор, що описує поступальний рух резервуара, $r = f(z)$ – рівняння твірної тіла обертання, яка описує геометричну форму стінки резервуара.

Вважається, що рідина є ідеальною, однорідною, нестисливою і в початковий момент часу її рух безвихровий; вплив поверхневого натягу на коливання рідини незначний, а резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

При математичному формулюванні задачі враховуються такі умови:

1) умова нерозривності потоку в об'ємі рідини τ :

$$\Delta\varphi = 0 \text{ у } \tau;$$

2) умова неперетікання на межі контакту тіло–рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі $\vec{n}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma;$$

3) умова неперетікання на вільній поверхні рідини S :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } S;$$

4) динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\epsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S.$$

Отже, задача складається з кінематичних умов 1) – 3) та динамічної граничної умови 4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [2]. Кінематичні граничні умови необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу. Після досягнення виконання кінематичних умов за методикою [2] отримується варіаційна задача для вільної системи, для якої записуються рівняння Лагранжа другого роду.

Нелінійна дискретна модель динаміки сумісного руху тіла з рідиною з вільною поверхнею записується в амплітудних параметрах a_i і має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\epsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_i, t), r = \overline{1, N+3}.$$

де ϵ_i – параметри поступального руху резервуара, p_{rn} – квадратна матриця, а q_r – вектор розмірності N (кількість ступенів вільності руху вільної поверхні рідини). Вирази для p_{rn} та q_r записуються через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей $\dot{a}_j$.

Аналіз чисельних результатів. Розглянемо сумісний рух резервуара з рідиною під дією зовнішньої періодичної сили $Y = A \sin(\omega t)$. Рух відбувається лише в горизонтальній площині. Проаналізуємо прояв силової взаємодії рідини з резервуаром на інтервалі часу до 100 періодів коливань за першою формою й оцінимо можливість виходу системи на режим усталених коливань. Розглядатимемо реакції силової взаємодії резервуара та рідини в горизонтальному напрямку. Аналізуватимемо і порівнюватимемо числові результати для циліндричних та сферичних резервуарів.

Поведінка системи досліджується при частотах $0.75\omega_N$, $1.02\omega_N$ та $1.25\omega_N$. Тут ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуара, яка залежить від співвідношення їхніх мас складових компонент. Силі амплітуди вибрані так, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні були в діапазоні $0.15R - 0.2R$, де R – радіус вільної поверхні рідини. Під час чисельних розрахунків використано, що маса резервуара становить 0.2 маси рідини. Рівень заповнення резервуара рідиною становить $H = R$ для випадку циліндричного резервуара і $H = 0.5R$ для випадку сферичного резервуара. У досліджуваній системі прийнято $R = 1$ м. Чисельне інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (1) здійснювалось за нульових початкових умов. Розрахунки свідчили про стійкість інтегрування системи за методом Рунге–Кутта.

На рис. 1–6 показано зміну в часі силової взаємодії резервуара та рідини по осі Ox для сфери (рис. 1, 3, 5) та для циліндра (рис. 2, 4, 6). Рис. 1, 2 відповідають частоті $0.75\omega_N$; рис. 3, 4 відповідають частоті $1.02\omega_N$; рис. 5, 6 відповідають частоті $1.25\omega_N$. Спільною рисою для всіх розглянутих випадків є те, що на достатньо тривалому проміжку часу не відбувається вихід системи на усталений режим коливань. В усіх випадках спостерігається модуляція коливань та вагомий вплив вищих гармонік.

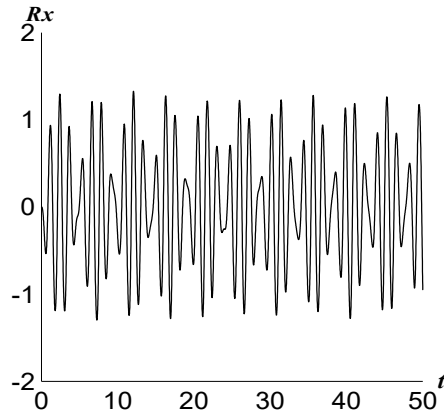


Рис. 1. Зміна силової взаємодії сферичного резервуара і рідини по осі Ox для дорезонансного випадку

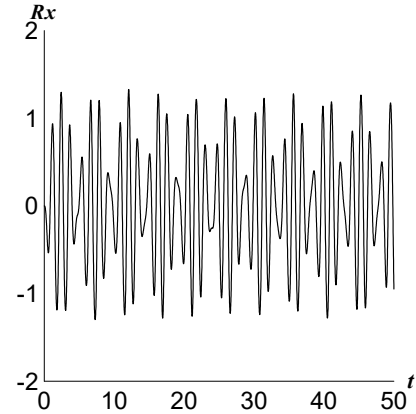


Рис. 2. Зміна силової взаємодії циліндричного резервуара і рідини по осі Ox для дорезонансного випадку

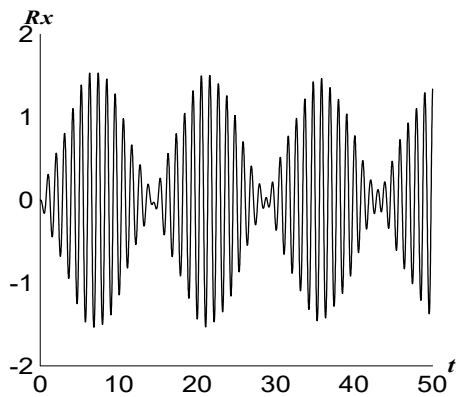


Рис. 3. Зміна силової взаємодії сферичного резервуара і рідини по осі Ox для білярезонансного випадку

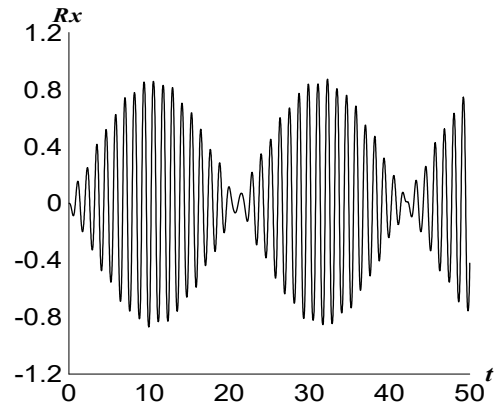


Рис. 4. Зміна силової взаємодії циліндричного резервуара і рідини по осі Ox для білярезонансного випадку

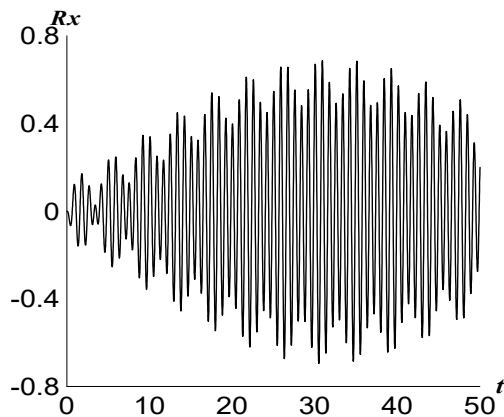


Рис. 5. Зміна силової взаємодії сферичного резервуара і рідини по осі Ox для зарезонансного випадку

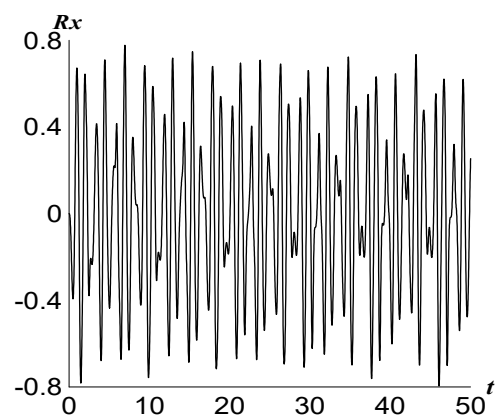


Рис. 6. Зміна силової взаємодії циліндричного резервуара і рідини по осі Ox для зарезонансного випадку

У випадку коливань системи в дорезонансному діапазоні з частотою $0.75\omega_N$ (рис. 1, 2) процес зміни силової взаємодії відбувається при чітко вираженій модуляції, при цьому зустрічаються супергармоніки та двогорбі піки. У випадку білярезонансної області спостерігається строга модуляційна періодичність (рис. 3, 4). Амплітуда коливань дещо збільшена порівняно з попереднім випадком. Залежно від ступеня близькості до резонансної частоти період модуляції може вагомо збільшитися і на окремих ділянках коливання можуть тривалий час відбуватися з майже усталеною амплітудою. Для частоти збудження в зарезонансному діапазоні з частотою $1.25\omega_N$ (рис. 5, 6) помітно, що процес зміни силової взаємодії відбувається за наявності модуляції (яка вже не така чітка) і за наявності супергармонік.

При аналізі особливостей прояву геометричної форми резервуара зазначимо, що якісна картина поведінки системи в до- і білярезонансних режимах подібна, а в зарезонансному режимі коливань наявні вагомі відмінності. Однією з причин цього ефекту є те, що розташування частот у циліндричному резервуарі більш цільне порівняно з випадком сферичного резервуара при обраній глибині заповнення рідиною. Фактично у випадку циліндричного резервуара в зарезонансному діапазоні спостерігається режим подвійної модуляції, яка в подібному діапазоні для сферичного резервуара відсутня. Тобто прояв модуляційних ефектів у випадку сферичного резервуара є меншим, ніж для циліндричного резервуара. Отримані режими якісно повністю узгоджуються за своїм характером з даними експериментів, що описані в [3, 5].

Висновки. Проаналізовано силову взаємодію резервуара з рідиною з вільною поверхнею для випадків, коли частота зовнішнього збурення менша за резонансну, близька до резонансної та більша за резонансну. Розглянуто резервуари циліндричної та сферичної форм. Встановлено, що в усіх трьох частотних діапазонах спостерігається модуляція коливань та вплив вищих гармонік. Це свідчить про відсутність виходу на режим усталених коливань системи.

Список використаних джерел:

1. Губська В.В. Силовая взаимодействие резервуара у формі усеченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі / В.В. Губська Лимарченко О.С. Кудзіновська І. // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка, 2014. – 2(32). – С. 29–32
2. Лимарченко О.С. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О.С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В.В. Ясинский. – Киев : Гнозис, 2002. – 304 с.
3. Faltinsen O.M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O.M. Faltinsen, O.F. Rognbakke, A.N. Timokha // Physics of fluids, 2006. – Vol. 18, № 1. – P. 012103.
4. Konstantinov O. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems / O. Konstantinov, O. Limarchenko, K. Semenovich // Math. Model. Comput., 2015. – 2(1). – С. 48–57.
5. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // Internat. J. of Recent Trends in Engineering, 2009. – Vol. 1, №. 6. – P. 1–5

Надійшла до редколегії 13.12.19

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,

Ю. Слюсарчук, асп.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

АНАЛИЗ СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ И СФЕРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

В системе резервуар–жидкость со свободной поверхностью рассматривается силовое взаимодействие жидкости с резервуаром при вибрационном возбуждении движения резервуара периодической силой для частот в дорезонансном, околорезонансном и внерезонансном диапазонах. Исследуются особенности влияния геометрической формы резервуара на разложения динамических процессов. Для исследования поведения системы рассматриваются варианты цилиндрического и сферического резервуаров.

Ключевые слова: динамика жидкости, вибрационное периодическое возмущение, силовое взаимодействие, волновые процессы.

O. Limarchenko, Full Dr.

Y. Sliusarchuk, Ph. D. graduate

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ANALYSIS OF POWER INTERACTION OF A LIQUID AND A SPHERICAL RESERVOIR WHEN SYSTEM MOTION IS EXCITED BY A PERIODIC FORCE

Interaction of a reservoir with a free-surfaced liquid for vibration disturbance of the reservoir motion by a periodic force in a below-resonance, near-resonance and above-resonance ranges of frequencies is considered. Specific features of the effect of geometric shape of the reservoir on the development of dynamic processes are analyzed. For studying the system dynamics we consider variants of cylindrical and spherical reservoirs.

Keywords: dynamics of fluid, vibration periodic perturbation, force interaction, wave processes.

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.12.55-55>**ВОЛОДИМИР ВАСИЛЬОВИЧ ШАРКО**
(25.09.1949 – 07.10.2014)

25 вересня 2019 р. виповнилося 70 років від дня народження видатного українського математика, засновника Київської топологічної школи, доктора фізико-математичних наук, професора, член-кореспондента НАН України Шарка Володимира Васильовича, наукова і педагогічна діяльність якого була тісно пов'язана з механіко-математичним факультетом.

Народився Володимир Васильович в смт Отинія (нині смт Отинія) Коломийського району Івано-Франківської області в родині службовців. Його батько – Василь Іванович Шарко, до Другої світової війни працював учителем математики в старших класах середньої школи в м. Ізюм Харківської області, що вплинуло на подальші вподобання Володимира. У 1959 р. його батьки переїхали до м. Станіслав (нині м. Івано-Франківськ).

Після закінчення середньої школи № 5 у м. Івано-Франківську майбутній вчений вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, а по завершенню навчання – до аспірантури Інституту математики АН УРСР (науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор Трохимчук Ю.Ю.). У 1976 р. Шарко В.В. в Інституті математики захистив кандидатську дисертацію, а в 1987 р. у Математичному інституті ім. В.А. Стеклова АН СРСР – докторську дисертацію за спеціальністю "Геометрія і топологія". З 1976 року і до кінця життя Володимир Васильович працював в Інституті математики, де послідовно обіймав посади молодшого, старшого і провідного наукового співробітника. У 2001 р. він очолив новостворений відділ топології, а в 2007 р. його призначили заступником директора Інституту з наукової роботи.

Наукові інтереси Володимира Васильовича, окрім топології, стосувалися також алгебри, функціонального аналізу, теорії функцій, теорії динамічних систем та ін. Він опублікував близько 100 наукових праць. Його монографія про структуру гладких функцій на многовидах перевидана англійською мовою в США. Вже у своїх перших наукових працях він суттєво розвинув теорію Морса, розробивши новий апарат в алгебраїчній К-теорії і застосувавши його до вивчення алгебраїчних характеристик неоднорозв'язних многовидів. Згодом його наукові дослідження з топології тісно поєднувалися з теорією динамічних систем. Спільно з академіком РАН Фоменко А.Т. він знайшов оцінки для числа замкнених орбіт гамільтонових систем на многовидах. Шарко В.В. описав структуру гладких функцій і векторних полів з ізольованими особливостями на поверхнях і отримав умови їхньої топологічної еквівалентності. Подальші його наукові дослідження були пов'язані з застосуванням методів некомутативної геометрії до проблем алгебраїчної топології та якісної теорії векторних полів на многовидах. Зокрема, він ввів нові L^2 -інваріанти гільбертових комплексів, за допомогою яких отримав точні значення мінімального числа замкнених орбіт відповідного індексу для векторних полів Морса–Смейла, причому ці числа виявились гомотопічними інваріантами многовиду.

Наукові досягнення Володимира Васильовича відзначено Державною премією України в галузі науки і техніки (2006), преміями НАН України імені М.М. Крилова (2005), імені О.М. Лаврентьева (2010) та Республіканською премією для молодих вчених імені Миколи Островського (1980).

У 2006 р. Шарка В.В. обрали член-кореспондентом НАН України.

У 1987 р. Володимир Васильович розпочав викладацьку роботу на механіко-математичному факультеті КДУ імені Т.Г. Шевченка. Працюючи професором кафедри геометрії (за сумісництвом), для студентів механіко-математичного факультету він викладав курси лекцій з диференціальної геометрії і топології, низку спеціальних курсів, а також започаткував нормативний курс із сучасної топології. При цьому навіть найскладніший матеріал він розповідав у доступній формі, з великою кількістю прикладів та ілюстрацій. За його ініціативи на кафедрі геометрії розпочалися активні наукові студії з сучасної топології. Двадцять його вихованців успішно захистили дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Він був також науковим консультантом п'яти своїх учнів, які успішно захистили докторські дисертації з топології (Пришляк О.О. (2005), Плахта Л.П. (2008), Панков М.О. (2008), Максименко С.І. (2011), Полулях Є.О. (2018)).

Шарко В.В. приділяв багато уваги науково-організаційній роботі. Він виконував обов'язки заступника академіка-секретаря відділення математики НАН України, заступника головного редактора Українського математичного журналу, члена редколегій таких наукових видань, як: "Методи функціонального аналізу та топології", "Праці Міжнародного геометричного центру", "Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка". Він неодноразово організовував міжнародні конференції з геометрії та топології (м. Київ, м. Одеса), математичні школи із сучасних проблем теорії функцій та топології (с. Кацивели), з лекціями на яких виступали всесвітньо відомі математики академіки Арнольд В.І., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Протягом майже 30-ти років Володимир Васильович керував щотижневим науковим семінаром з топології, який мав важливе значення для становлення Київської математичної школи з топології.

Шарка В.В. вирізняли висока культура, інтелігентність і надзвичайна доброзичливість. Він любив спорт, був добре обізнаний з питаннями історії, художньою літературою, любив класичну музику і часто відвідував концерти та вистави. Володимир Васильович мав великий авторитет серед своїх колег і студентів.

На вшанування 70-ти річчя від дня його народження та на згадку про наукову й науково-педагогічну діяльність Шарка В.В. у вересні 2019 року в м. Києві відбулася Міжнародна математична конференція "Теорія Морса та її застосування" (<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/sharko70>).

Городній М.Ф., Лимарченко О.С., Максименко С.І., Парасюк І.О., Пришляк О.О., Самойленко В.Г.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ
для авторів "Вісника Київського національного університету
імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;
- лист (або е-лист) за підписом автора/авторів, де вони засвідчують, що робота, подана ними в журнал, не опублікована (ніде, в ніякому вигляді, іншою мовою і т. д.) і що робота не подана у інші видання, іншими виданнями не розглядається і не прийнята до друку.

Вимоги до оформлення та якості друківаного примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися таких умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS Office WORD 2003**, не новіше, (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;
- поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріал статті має бути поданий у такій послідовності:
 - класифікаційний індекс Універсальної десятикової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
 - відомості про авторів, що містять такі елементи перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку); (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація, резюме (**українською, російською та англійською**, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, окрім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, "Стаття надійшла до редколегії 09.11.05". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожен абрєвіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абрєвіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (напр., [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
- усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;
- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості рисунків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях набирають лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:		
Text	Times New Roman		Full	9 pt	
Function	Times New Roman		Subscript/Superscript	7 pt	
Variable	Times New Roman	italic	Sub-Subscript/Superscript	6 pt	
L.C.Greek	Symbol		Symbol	14 pt	
U.C.Greek	Symbol		Sub-Symbol	9 pt	
Vector-matrix	Times New Roman	bold			
Number	Times New Roman				

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за **кириличною абеткою**, потім – **латинською**.

Пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовки бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передують рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті таким чином:

відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Назва, Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором).

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил може бути підставою для відхилення статті.

Редакція звертає увагу авторів на необхідність дотримання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА
МЕХАНІКА

Випуск 1(40)

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та електронні носії не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 6,7. Наклад 300. Зам. № 219-9572.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 30.01.20

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка 14, м. Київ, 01030

☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28

e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua

http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02