

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) та індексуються Google Scholar. Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

| | |
|--------------------------------|---|
| ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР | М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф. |
| РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ | В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula, д-р фіз.-мат. наук, проф. (United Kingdom); Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. Т. Kiguradze, д-р фіз.-мат. наук, академік АН Грузії (Georgia); Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko, д-р фіз.-мат. наук, проф. (United Kingdom); О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, д-р фіз.-мат. наук, проф., академік НАН України; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Sweden); О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Chile); V. Futorny, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Brazil); І. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф. |
| Адреса редколегії | Механіко-математичний факультет, просп. акад. Глушкова, 4 Е Київ, 03127, Україна ☎ (38044) 259 05 42 E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua |
| Затверджено | Вченою радою механіко-математичного факультету 17.12.18 (протокол № 5) |
| Атестовано | Міністерством освіти і науки України. Поновлено в переліку наукових фахових видань України МОН України 04.04.18 |
| Зареєстровано | Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09 |
| Засновник та видавець | Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02 |
| Адреса видавця | ВПЦ "Київський університет" (кімн. 43) 6-р Т.Шевченка, 14, Київ, 01601, Україна ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28 |

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

1(39)/2018

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH Database (zbMATH)" (<http://www.emis.de/ZMATH>) and indexed in Google Scholar. A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

| | |
|-----------------------------------|--|
| CHIEF EDITOR | M. Gorodnii, Full Professor, Dr. Hab. |
| EDITORIAL BOARD | V. Samoilenko, Full Professor, Dr. Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, PhD (Secretary); V. Bavula, Full Professor, Dr. Hab. (United Kingdom); Y. Drozd, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Professor, Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Professor, Dr. Hab.; I.T. Kiguradze, Academician of NAS of Georgia, Dr. Hab. (Georgia); B. Kiforenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Professor, Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Professor, Dr. Hab.; N. Leonenko, Full Professor, Dr. Hab.; O. Limarchenko, Full Professor, Dr. Hab. (United Kingdom); Y. Mishura, Full Professor, Dr. Hab.; L. Mol'chenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. Parasyuk, Full Professor, Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Professor, Dr. Hab., Academician of NAS of Ukraine; A. Petravchuk, Full Professor, Dr. Hab.; D. Silvestrov, Full Professor, Dr. Hab. (Sweden); A. Stanzhytskyi, Full Professor, Dr. Hab.; S. Trofimchuk, Full Professor, Dr. Hab. (Chile); V. Futorny, Full Professor, Dr. Hab. (Brazil); I. Shevchuk, Full Professor, Dr. Hab. |
| Address of Editorial board | Faculty of Mechanics and Mathematics, 4E Acad. Glushkova Avenue Kyiv, 03127, Ukraine; ☎ (38044) 259 05 42 E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua |
| Approved | Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 17.12.18 (protocol № 5) |
| Attested | By Ministry of Education and Sciences (MES) of Ukraine. Decision of MES of Ukraine to include in list as professional from 04.04.18 |
| Registered | Ministry of Justice of Ukraine. Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09 |
| Founder and publisher | Taras Shevchenko National University, Kyiv University Publishing and Printing Centre. The certificate included in the State Register ДК № 1103 from 31.10.02 |
| Address of publisher | Kyiv University Publishing and Printing Centre (off. 43), 14 Taras Shevchenko blv., Kyiv, 01601, Ukraine; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; fax 239 31 28 |

© Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv University Publishing and Printing Centre, 2018

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Ф. Асроров Існування інтегральних множин одного класу диференціальних рівнянь з імпульсним впливом | 6 |
| К. Геселева Колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв'язання крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь | 9 |
| В. Герасименко, В. Кречко Асимптотика розв'язку ієрархії квантових рівнянь ББГ'КІ в границі самоузгодженого поля..... | 15 |
| А. Громик, І. Конет, Т. Пилипюк Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару..... | 19 |
| А. Громик, І. Конет, Т. Пилипюк Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з порожниною | 25 |
| І. Мацак, О. Скуржанський Граничні теореми для екстремальних значень довжини черги в системах масового обслуговування | 28 |
| Б. Кіфоренко, Я. Ткаченко, І. Василь'єв Оптимізація переходів між близькими еліптичними орбітами зі сталою малою тягою..... | 36 |
| Б. Кіфоренко, Я. Ткаченко, І. Василь'єв Оптимальні переходи між близькими еліптичними орбітами з обмеженою малою тягою | 42 |
| І. Киричок, Я. Жук, С. Круць Врахування деформації поперечного зсуву при вимушених коливаннях гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором | 48 |
| М. Сухорольський, В. Достойна, О. Веселовська Система функцій, біортогональна з многочленами, спорідненими з многочленами Чебишова..... | 53 |
| До 80-річчя від дня народження Анатолія Михайловича Самойленка..... | 60 |

СОДЕРЖАНИЕ

Ф. Асоров

Существование интегрального множества одного класса дифференциальных уравнений с импульсным возмущением 6

К. Геселева

Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения краевых задач для дифференциально-функциональных уравнений 9

В. Герасименко, В. Кречко

Асимптотика решения иерархии квантовых уравнений ББГКИ в границе самосогласованного поля 15

А. Громик, И. Конет, Т. Пилипюк

Гиперболическая краевая задача для кусочно-однородного цилиндрически-кругового шара 19

А. Громик, И. Конет, Т. Пилипюк

Гиперболическая краевая задача для кусочно-однородного цилиндрически-кругового шара с полостью 25

И. Мацак., А. Скуржанский

Предельные теоремы для предельных значений длины очереди в системах массового обслуживания 28

Б. Кифоренко, Я. Ткаченко, И. Васильев

Оптимизация переходов между близкими эллиптическими орбитами с постоянной малой тягой 36

Б. Кифоренко, Я. Ткаченко, И. Васильев

Оптимальные переходы между близкими эллиптическими орбитами с малой ограниченной тягой 42

И. Киричок, Я. Жук, С. Круць

Учет деформации поперечного сдвига при вынужденных колебаниях гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором 48

М. Сухорольский, В. Достойная, О. Веселовская

Система функций, биортогональных с многочленами, родственными многочленам Чебышева 53

К 80-летию со дня рождения Анатолия Михайловича Самойленко 60

CONTENTS

| | |
|---|----|
| F. Asrorov Existence of integral quantities of one class of differential equations with impulsive effects | 6 |
| K. Geseleva Collocation and collocation-iterative methods for solving boundary value problems for differential-functional equations..... | 9 |
| V. Gerasimenko, V. Krechko Mean-field asymptotic behavior of solution of the quantum bbgky hierarchy..... | 15 |
| A. Gromyk, I. Konet, T. Pylypiuk Hyperbolic boundary-value problem for a piecewise homogeneous cylindrically circular layer | 19 |
| A. Gromyk, I. Konet, T. Pylypiuk Hyperbolic boundary-value problem for a piecewise homogeneous cylindrically circular layer with cavity | 25 |
| I. Matsak, A. Skurzhanskyi Limit theorems for extreme values of queue length in the theory of queues..... | 28 |
| I. Kirichok, Y. Zhuk, S. Kruts Accounting for shear deformation for forced vibrations of flexible viscoelastic beam with piezoelectric sensor and actuator | 36 |
| B. Kiforenko, Ya. Tkachenko, I. Vasil'ev Optimization of transfers between close elliptic orbits with a constant small thrust..... | 42 |
| B. Kiforenko, Ya. Tkachenko, I. Vasil'ev Optimal transfers between close elliptic orbits with a low bounded thrust | 48 |
| M. Sukhorolsky, V. Dostoyna, O. Veselovska The system of functions biorthogonal to polynomials related to the Chebyshev polynomials..... | 53 |
| To the 80 anniversary from the date of a birth of Anatoly Samoylenko..... | 60 |

ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

В термінах власних чисел матриці правої частини системи та параметрів, що задають імпульсні збурення доведено існування функції Гріна-Самойленка та асимптотичної стійкості інтегральної множини систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

ВСТУП. Багатьом еволюційним процесам у фізиці, техніці, біології, економіці протягом свого розвитку властиві короточасні впливи. При математичному описі таких процесів часто тривалістю збурення зручно знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або як їх ще називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Зростання інтересу до таких систем останнім часом пов'язано насамперед із запитом новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи зайняли дуже помітне місце і інтенсивно розвиваються, розширюючи коло своїх додатків в різномірних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних завдань. Математичною моделлю еволюційних процесів з короточасними збуреннями може служити система диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотних коливань [1, 3, 7] та диференціальними рівняннями з імпульсними збуреннями [2, 4, 6, 8].

У даній роботі досліджуються в термінах власних чисел матриці правої частини системи та параметрів, що задають імпульсні збурення, доведено існування функції Гріна-Самойленка та асимптотичної стійкості інтегральної множини системи.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x + f(t, \varphi), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{S}^m$, $\mathcal{S}^m - m$ -вимірний тор; $a(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$, $P(t, \varphi)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π -періодичні за φ_v , $v = \overline{1, m}$, обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}^m$. Матричні і векторні функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по $i \in Z$ і $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathcal{S}^m$. Послідовність моментів імпульсного збурення $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \rightarrow -\infty$ при $i \rightarrow -\infty$ і $\tau_i \rightarrow +\infty$ при $\tau_i \rightarrow +\infty$. Вважаємо також, що рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ існує скінченна границя

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p < \infty. \quad (2)$$

Функція $a(t, \varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по φ , рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$, тобто

$$\|a(t, \varphi_1) - a(t, \varphi_2)\| \leq l \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \quad (3)$$

Припустимо також, що функції $f(t, \varphi)$ і $I_i(\varphi)$ задовольняють рівність

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in \mathcal{S}^m} \|f(t, \varphi)\| + \sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathcal{S}^m} \|I_i(\varphi)\| = m.$$

Використовуючи [1,3,4,8], вводимо поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інтегральні множини диференціальних рівнянь для імпульсних систем і вкажемо достатні умови існування інтегральної множини.

Умова (3) гарантує, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi)$$

породжує неавтономну динамічну систему на торі \mathcal{S}^m , яку розв'язки якої будемо позначати $\varphi_t(\tau, \varphi)$.

Поряд із системою (1) розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)), \quad t \neq \tau_i, \quad (5)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)).$$

Нехай $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ – матрицант відповідної однорідної системи. З неперервної залежності $\varphi_t(\tau, \varphi)$ від параметрів $\tau \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{S}^m$ випливає, що матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ від цих параметрів залежить неперервним чином.

Лемма. Для будь-яких $t, s, \tau, \sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{S}^m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau, \varphi_t(\sigma, \varphi)) = \Omega_s^t(\sigma, \varphi)$.

Нехай $C(t, \varphi)$ – неперервна 2π – періодична по кожній компоненті $\varphi, v = \overline{1, m}$, кусково-неперервна по $t \in R$, з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi)C(s, \varphi_s(t, \varphi)), & s \leq t \\ -\Omega_s^t(t, \varphi)[E - C(s, \varphi_s(t, \varphi))], & s > t \end{cases} \quad (6)$$

і назвемо $G(t, s, \varphi)$ функцією Гріна-Самойленко даної задачі, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, s, \varphi)\| ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau_i + 0, \varphi)\| \leq K \quad (7)$$

для всіх $t, s \in R$, $\varphi \in \mathfrak{S}^m$ і деяких $K \geq 1$.

Припустимо, що моменти імпульсного впливу τ_i такі, що для всіх $i \in Z$ виконується нерівність

$$\tau_{i+1} - \tau_i > \theta > 0. \quad (8)$$

Розглянемо вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi)f(s, \varphi_s(t, \varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_i + 0, \varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)).$$

Враховуючи (8) і (7), одержимо

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi)f(s, \varphi_s(t, \varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_i + 0, \varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)) \right\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|f(t, \varphi)\| + \frac{2K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|I_i(\varphi)\|.$$

Покладемо

$$u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi)f(s, \varphi_s(t, \varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_i + 0, \varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)). \quad (9)$$

Функція $u(t, \varphi)$ – 2π -періодична за $\varphi, v = \overline{1, m}$ неперервна за $\varphi \in \mathfrak{S}^m$ і кусково-неперервна за $t \in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (1) функції $a(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$, $P(t, \varphi)$ – неперервні за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π – періодичні за $\varphi, v = \overline{1, m}$, обмежені при всіх $t \in R, \varphi \in \mathfrak{S}^m$. Функція $a(t, \varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця за φ рівномірно відносно $t \in R$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені за i матриці і вектори, $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathfrak{S}^m$. Для послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ виконується оцінка (8). Нехай також існує функція Гріна-Самойленка $G(t, s, \varphi)$. Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x = u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi)f(s, \varphi_s(t, \varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_i + 0, \varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathfrak{S}^m,$$

причому

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|u(t, \varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|f(t, \varphi)\| + \frac{2K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|I_i(\varphi)\|. \quad (10)$$

У цьому випадку, коли матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ системи рівнянь (6) задовільняє оцінку

$$\|\Omega_s^t(\tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)} \quad (11)$$

для будь-яких $t \geq s \in R, \tau \in R, \varphi \in \mathfrak{S}^m$ і деяких $K \geq 1, \gamma > 0$, існує функція Гріна-Самойленка наступного вигляду

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi), & s < t, \\ 0, & s \geq t. \end{cases} \quad (12)$$

((12) випливає з (6), якщо в (6) покласти $G(s, \varphi_s(\tau, \varphi)) = E$). Інтегральну множину системи рівнянь (1) подамо у вигляді

$$x = u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^t G(t, s, \varphi)f(s, \varphi_s(t, \varphi))ds + \sum_{\tau_i < t} G(t, \tau_i + 0, \varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathfrak{S}^m. \quad (13)$$

Теорема 2. Припустимо, що система рівнянь (1) задовольняє умови теореми 1. Нехай також матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ системи рівнянь (6) задовольняє нерівності (11). Тоді система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину (13) і ця множина задовольняє оцінку

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|u(t, \varphi)\| \leq K_0 \left[\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|f(t, \varphi)\| + \sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \|I_i(\varphi)\| \right], \quad (14)$$

де

$$K_0 = \frac{K}{\gamma} + K \sup_{t \in R} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}.$$

Відмітимо, що в припущенні існування кінцевої границі (3) величина $\sup_{t \in R} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена.

Вкажемо деякі умови, які забезпечують матрицанту $\Omega_\gamma^t(\tau, \varphi)$ оцінку (11). Ці умови можна отримати з наступного твердження, яке являє собою аналог нерівності Важевського для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом [4].

Теорема 3. Для будь-якого розв'язку $x(t, x_0), x(\tau, x_0) = x_0$, лінійної системи з імпульсним впливом (6) при $t \geq \tau$ виконується нерівність

$$\prod_{\tau < \tau_i < t} \lambda_i e^{\int_{\tau}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \|x_0\| \leq \|x(t, x_0)\| \leq \prod_{\tau < \tau_i < t} \Lambda_i e^{\int_{\tau}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \|x_0\|, \quad (15)$$

де λ_i та Λ_i – відповідно найменше та найбільше власні числа матриці

$$\hat{P}(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) = \frac{1}{2} \left(P(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) + P^T(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) \right),$$

P^T – транспонована по відношенню до $P(t)$ матриця, λ_i^2 і Λ_i^2 – відповідно найменше та найбільше з власних чисел матриці

$$(E + B_i^T(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi_0)))(E + B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))), \quad i = 1, 2, \dots \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Доведення. Якщо $x(t, x_0) = 0$, то нерівність (15) виконується. Нехай $x(t, x_0) = x(t)$ – нетривіальний розв'язок системи рівнянь (6). Тоді при $t \neq \tau_i$ маємо

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{dx}{dt}, x(t) \right\rangle = 2 \langle P(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) x(t), x(t) \rangle = 2 \langle \hat{P}(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) x(t), x(t) \rangle. \quad (16)$$

Оскільки матриця $\hat{P}(t, \varphi_i(\tau, \varphi))$ симетрична, то

$$\lambda(t) \langle x(t), x(t) \rangle \leq \langle \hat{P}(t, \varphi_i(\tau, \varphi)) x(t), x(t) \rangle \leq \Lambda(t) \langle x(t), x(t) \rangle, \quad (17)$$

де $\lambda(t)$ та $\Lambda(t)$ – відповідно найменше та найбільше з власних чисел матриці $\hat{P}(t, \varphi_i(\tau, \varphi))$. Тому з (16) при $t \neq \tau_i$ маємо

$$2\lambda(t) \|x(t)\|^2 \leq \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq 2\Lambda(t) \|x(t)\|^2. \quad (18)$$

Таким чином, якщо $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$, то з (18) випливають нерівності

$$e^{\int_{\tau_i}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \|x(\tau_i + 0)\|^2 \leq \|x(t)\|^2 \leq e^{\int_{\tau_i}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \|x(\tau_i + 0)\|^2. \quad (19)$$

Оскільки $x(\tau_i + 0) = (E + B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)))x(\tau_i)$, то

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2 &\leq \|x(\tau_i + 0)\|^2 = \langle (E + B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)))x(\tau_i), (E + B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)))x(\tau_i) \rangle = \\ &= \langle (E + B_i^T(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))), (E + B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)))x(\tau_i), x(\tau_i) \rangle \leq \Lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2. \end{aligned}$$

Враховуючи цю нерівність, з (19) при $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ отримуємо оцінку

$$\lambda_i^2 e^{\int_{\tau_i}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \|x(\lambda_i)\|^2 \leq \|x(t)\|^2 \leq \Lambda_i^2 e^{\int_{\tau_i}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \|x(\lambda_i)\|^2, \quad (20)$$

За допомогою методу математичної індукції з (20) при всіх $i = 1, 2, \dots$ отримуємо співвідношення

$$\prod_{\tau < \tau_i < t} \lambda_i^2 e^{\int_{\tau}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \|x_0\|^2 \leq \|x(t, x_0)\|^2 \leq \prod_{\tau < \tau_i < t} \Lambda_i^2 e^{\int_{\tau}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \|x_0\|^2. \quad (21)$$

З цієї нерівності випливає оцінка (15). Теорему доведено.

З цієї теореми легко вивести наступне твердження.

Теорема 4. Нехай у системі рівнянь (6) для матриць B_i виконується співвідношення

$$\inf_i |\det(E + B_i)| \geq \delta > 0, \quad (22)$$

а моменти часу τ_i такі, що існує межа скінченні границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i(\tau, t)}{t} = p. \quad (23)$$

Нехай найбільше з власних чисел матриці

$$\hat{P}(t, \varphi) = \frac{1}{2} \left(P(t, \varphi) + P^T(t, \varphi) \right)$$

задовольняє нерівність

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathfrak{S}^m} \Lambda(t, \varphi) \leq \alpha, \quad (24)$$

а найбільше з власних чисел матриці $(E + B_i^T(\varphi))(E + B_i(\varphi))$ – нерівність

$$\sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathcal{S}^m} \Lambda_i^2(\varphi) \leq \beta^2.$$

Якщо

$$\alpha + p \ln \beta < 0, \quad (25)$$

то матрицант системи рівнянь (6) допускає оцінку (11).

Доведення. При виконанні нерівності (25) будь-який розв'язок рівнянь (6) відповідно до попередньої теореми задовольняє оцінку вигляду

$$\|x(t, x_0)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \|x_0\|, \quad t \geq \tau,$$

де як γ можна взяти будь-яке додатне число, для якого виконується нерівність $0 < \gamma < |\alpha + p \ln \beta|$. Отже, і матрицант

$\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ рівнянь (6) можна оцінити так само, тобто нерівністю (11).

Аналогічно можна впевнитись, що справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Нехай матриці $P(t, \varphi)$ та $B_i(\varphi)$ такі, що

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathcal{S}^m} \max_{\|x\|=1} \langle P(t, \varphi)x, x \rangle \leq \alpha,$$

$$\sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in \mathcal{S}^m} \max_{\|x\|=1} \langle (E + B_i(\varphi))x, (E + B_i(\varphi))x \rangle \leq \beta^2,$$

і число p визначено, згідно рівності

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p.$$

Якщо $\alpha + p \ln \beta < 0$, то матрицант системи рівнянь (6) задовольняє нерівність (11).

ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

Список використаних джерел

1. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекеца П.В., Асроров Ф.А. Интегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. Ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип. 23. С. 125–132.
6. Perestyuk N.O., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A.M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 05.04.18

Ф. Асроров, канд.физ.-мат.наук, ст.науч. сотр.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В терминах собственных чисел матрицы правой части системы и параметров, задающие импульсные возмущения доказано существование функции Грина-Самойленко и асимптотической устойчивости интегрального множества систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

F. Asrorov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

EXISTENCE OF INTEGRAL QUANTITIES OF ONE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE EFFECTS

In terms of eigenvalues of the matrix of the right-hand side of the system and parameters that give impulse disturbances the existence of the Green-Samoilenko function and the asymptotic stability of the integral set of systems of differential equations with impulse action are proved.

УДК 517.927

К. Геселева, асп.
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський
geseleva1702@gmail.com

КОЛОКАЦІЙНИЙ ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто наближені методи розв'язання крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь, серед яких метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи. Досліджено умови збіжності цих методів. Запропоновано обчислювальні схеми методів.

© Геселева К., 2018

ВСТУП. Крайові задачі для диференціально-функціональних рівнянь ще недостатньо вивчені. У сучасній літературі відчувається необхідність у дослідженнях методів розв'язання таких задач. Побудувати точні розв'язки даних задач можна лише в окремих випадках [1,3]. Тому актуальним є питання дослідження наближених методів розв'язання цих задач. У цій статті до одного типу задачі для диференціально-функціонального рівняння застосовуються метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи та розглянуто умови їх збіжності.

Нехай потрібно знайти функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння

$$(Ly)(x) = y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) + p(x)y''(h(x)) + r(x)y'(h(x)) + s(x)y(h(x)) = f(x), x \in [a, b], \tag{1}$$

та крайові умови

$$U_1[y] = \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, U_2[y] = \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0, \tag{2}$$

$$y(x) = 0, x \in (h(a), a). \tag{3}$$

До крайової задачі (1)–(3) заміною

$$f(x) = \begin{cases} g(x) - p(x)\varphi''(h(x)), x \in (a, c), c = h^{-1}(a), \\ g(x), x \in (c, b), \end{cases}$$

зводиться крайова задача

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &= g(x), x \in (a, b), \\ U_1[y] &= U_2[y] = 0, \\ y(x) &= \varphi(x), x \in (h(a), a). \end{aligned}$$

Надалі вважаємо, що:

Коефіцієнти $c(x), d(x), p(x), r(x), s(x)$ – визначені й обмежені на відрізку $[a, b], g(x) \in L_2(a, b), \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0, h(x)$ – диференційовна на (a, b) функція і $h'(x) \geq l, x - h(x) \geq \sigma > 0$, та $p(x) \neq 0$ при $x \in (a, c), c = h^{-1}(a)$;

Крайову задачу (1)–(3) за допомогою заміни

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = u(x), U_1[y] = U_2[y] = 0, \tag{4}$$

можна звести до інтегро-функціонального рівняння таким чином.

Коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$ підбираються так, щоб крайова задача (4) мала єдиний розв'язок при кожній функції $u(x) \in L_2(a, b)$. Його можна знайти в явному вигляді порівняно легко, при цьому виконуються рівності

$$p(x)a(h(x)) - r(x) = 0, p(x)b(h(x)) - s(x) = 0, x \in (a, c). \tag{5}$$

Тоді запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\begin{aligned} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + p(x)\{y''(h(x)) + a(h(x))y'(h(x)) + b(h(x))y(h(x))\} = \\ = f(x) + g(x)y'(x) + k(x)y(x) + l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)), \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} a(x) - g(x) &= c(x), b(x) - k(x) = d(x), \\ l(x) &= p(x)a(h(x)) - r(x), m(x) = p(x)b(h(x)) - s(x). \end{aligned}$$

При вказаному вище виборі коефіцієнтів $a(x)$ і $b(x)$, по-перше, існує функція $G(x, t)$ така, що єдиний розв'язок задачі (4) записується формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)u(t)dt, x \in (a, b), \tag{7}$$

і, по-друге, враховуючи умови (5), маємо

$$\begin{aligned} (By)(x) &= g(x)y'(x) + k(x)y(x) + l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)) = \\ &= g(x)y'(x) + k(x)y(x) + \begin{cases} 0, x \in (a, c), \\ l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)), x \in (c, b). \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

На основі формул (4), (7), (8) рівняння (6) можна записати у наступному вигляді

$$u(x) + p(x)u(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt, x \in (a, b),$$

де, очевидно

$$\begin{aligned} K(x, t) &= (BG)(x, t) = g(x)G'_x(x, t) + k(x)G(x, t) + \\ &+ \begin{cases} 0, x \in (a, c), c = h^{-1}(a), \\ l(x)G'_x(h(x), t) + m(x)G(h(x), t), x \in (c, b), t \in (a, b), \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

Причому, за умов (3) і (5) при $x \in (h(x), a)$

$$u(x) = y''(x) + \frac{r(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y'(x) + \frac{s(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y(x) = 0. \quad (10)$$

Таким чином, ми показали, що крайова задача (1)-(3) рівносильна інтегро-функціональному рівнянню

$$u(x) + p(x)u(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad x \in (a,b), \quad (11)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in (h(a), a).$$

Рівносильність розуміється у наступному сенсі: якщо $y(x)$ – розв'язок задачі (1)-(3), то функція $u(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ – розв'язок рівняння (11), і навпаки, якщо $u(x)$ – розв'язок рівняння (11), то функція $y(x)$, знайдена з задачі (4) є, розв'язок крайової задачі (1)-(3).

Слід зазначити, що при зроблених припущеннях 1, 2 та властивостях функції Гріна з формули (9) впливає справедливості співвідношення

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt = K^2 < \infty,$$

а отже інтегральний оператор K

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt, \quad \forall v(x) \in L_2(a,b),$$

відображає простір $L_2(a,b)$ в себе і є цілком неперервним.

Таким чином, крайова задача (1)-(3) еквівалентна інтегро-функціональному рівнянню (11), розв'язок якого можна знайти [4]. Зі сказаного вище випливає твердження.

Теорема 1. Крайова задача (1)-(3) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли рівняння (11) має єдиний розв'язок для довільної функції $\forall f(x) \in L_2(a,b)$.

Рівняння (11) заміною $v(x) = (G^{-1}Su)(x)$, де оператори G, S відповідно мають вигляд [5]

$$(Gv)(x) = \begin{cases} y(x), x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ y(x) - q(x)y(h(x)), x \in (c,b), \end{cases} \quad (Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ v(x) - q(x)v(h(x)), x \in (c,b), \end{cases}$$

зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором $T = G^{-1}KS^{-1}G$, де

$$(Tv)(x) = \int_a^b T(x,t)v(t)dt,$$

тоді, якщо одиниця – регулярне значення цього інтегрального оператора, то крайова задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $y^*(x) \in L_2(a,b)$.

Метод послідовних наближень

Суть методу стосовно задачі (1)-(3) полягає в тому, що маючи деяке початкове наближення, наступні наближення шукаємо з крайової задачі

$$(Ay_k)(x) = f(x) + (Ay_{k-1})(x) - (Ly_{k-1})(x), \quad x \in (a,b), \quad (12)$$

$$U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, \quad y_k(x) = 0, \quad x \in (h(a), a), \quad (13)$$

де

$$(Ay)(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + p(x)\{y''(h(x)) + a(h(x))y'(h(x)) + b(h(x))y(h(x))\}, \quad (14)$$

причому коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$, як вже зазначалось вище, підбираються таким чином, щоб задача (4) мала єдиний розв'язок для кожної функції $u(x) \in L_2(a,b)$.

Нехай

$$y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), \quad U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, \quad (15)$$

Тоді з умови однозначного визначення розв'язку задачі маємо

$$y_k(x) = \int_a^b G(x,t)u_k(t)dt, \quad x \in [a,b], \quad (16)$$

$$y_k(h(x)) = \int_a^b G(h(x),t)u_k(t)dt, \quad x \in [c,b]. \quad (17)$$

Оскільки співвідношення (16), (17) виконується при будь-якому k , то підставляючи їх у (12), (13) і враховуючи формули (15), (14), (9), отримаємо

$$u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_{k-1}(t)dt, \quad x \in (a,b), \quad (18)$$

$$u_k(x) = 0, \quad x \in (h(a), a).$$

Звідси випливає, що метод послідовних наближень (12), (13) розв'язання крайової задачі зводиться до методу послідовних наближень (18) розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11) [3].

Теорема 2. Метод послідовних наближень (12), (13) збігається, тоді і тільки тоді, коли власні значення інтегрального оператора $(Tv)(x)$ лежать в середині одиничного круга з центром в початку координат.

Зауважимо, що ця теорема має місце, якщо $\rho < 1$, де $\rho^2 = \int_a^b \int_a^b T^2(x,t) dx dt < \infty$.

Колокаційний метод

Згідно колокаційного методу, наближений розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати з допоміжної задачі

$$(Ly_n)(x) = f(x), U_1[y_n] = U_2[y_n] = 0, x \in (a, b), \tag{19}$$

$$y_n(x) = 0, x \in (h(a), a), \tag{20}$$

де

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \eta_j(x). \tag{21}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$f(x_i) - (Ly)(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \tag{22}$$

де оператор L знаходиться з формули (1), а $x_i \in [a, b]$ – вузли колокації.

В описаному алгоритмі система функцій $\{\eta_i(x)\}$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} (A\eta_i)(x) = \xi_i(x), & x \in (a, b), & i = \overline{1, n}, \\ U_1[\eta_i] = U_2[\eta_i] = 0, & \eta_i(x) = 0, & x \in (h(a), a), \end{cases} \tag{23}$$

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & x \in (a, c), & i = \overline{1, n}, \\ \varphi_i(x) + q(x)\varphi_i(h(x)), & x \in (c, b), \end{cases} \tag{24}$$

де оператор A має вигляд (14), $|q(x)| \leq \bar{q} < \infty$, – задана система лінійно незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

Підставляючи вираз (21) в формулу (22) і виконавши нескладні перетворення, для визначення коефіцієнтів a_j отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j = b_i, \quad i = \overline{1, n},$$

в якій

$$\beta_{ij} = (L\eta_j)(x_i), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad b_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

Алгоритм (19)-(22) можна звести до колокаційного методу розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11) [2]. Дійсно, введемо нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, які можна знайти з наступних формул

$$\eta_l''(x) + a(x)\eta_l'(x) + b(x)\eta_l(x) = \xi_l(x), U_l[\eta_l] = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = 1, 2. \tag{26}$$

На основі даної заміни з урахуванням формули (21) неважко переконатися в виконанні співвідношення

$$y_n''(x) + a(x)y_n'(x) + b(x)y_n(x) = u_n(x), U_l[y_n] = 0, \quad l = 1, 2, \tag{27}$$

де

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \xi_j(x). \tag{28}$$

Беручи до уваги ці заміни, за допомогою формул (21), (14) отримати ріності

$$(Ay_n)(x) = u_n(x) + p(x)u_n(h(x)), \quad x \in (a, b), \tag{29}$$

$$y_n(x) = \int_a^b G(x,t)u_n(t)dt. \tag{30}$$

Оскільки, з формул (1), (14), (8) впливає наступна рівність

$$(Ay_n)(x) - (Ly_n)(x) = (By_n)(x), \quad x \in (a, b), \tag{31}$$

то підставивши (30), (27) у співвідношення (19), (22) і враховуючи при цьому формули (14), (31), (10), (29) і (28), отримаємо

$$u_n(x) + p(x)u_n(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt, \quad x \in (a, b), \tag{32}$$

$$u_n(x) = 0, \quad x \in (h(a), a),$$

$$r_n(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \tag{33}$$

$$r_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt - u_n(x) - p(x)u_n(h(x)). \quad (34)$$

Тепер видно, що співвідношення (32)-(34) характеризують колокаційний метод розв'язання інтегро-функціонального рівняння (11).

Колокаційно-ітеративний метод

Суть методу стосовно задачі (1)-(3) полягає в тому, що виходячи з початкового наближення, наступні наближення шукаються з допоміжної задачі

$$(Ay_k)(x) = f(x) + (Ay_k)(x) - (Lz_k)(x), \quad x \in (a,b), \quad (35)$$

$$U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, \quad y_k(x) = 0, \quad x \in (h(a), a), \quad (36)$$

в якій

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), w_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), \quad (37)$$

а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ визначаються з умови

$$f(x_i) - (Lz_k)(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (38)$$

В описаному алгоритмі оператор A має вигляд (14), а система функцій $\{\eta_i(x)\}$ знаходиться з формули (23), де як і раніше, $|q(x)| \leq \bar{q} < \infty$, – задана система лінійно незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

На основі формул (37) та (38) для визначення невідомих параметрів отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (39)$$

де β_{ij} мають вигляд (25),

$$b_i^k = f(x_i) - (Ly_{k-1})(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (40)$$

Алгоритм (35)-(38) можна звести до колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11). Дійсно, якщо здійснити заміну

$$y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), \quad U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, \quad (41)$$

і ввести нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, визначену за допомогою формули (26), неважко перекопати у виконанні наступного співвідношення

$$w_k''(x) + a(x)w_k'(x) + b(x)w_k(x) = \alpha_k(x), \quad U_1[w_k] = U_2[w_k] = 0, \quad (42)$$

де

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \xi_j(x). \quad (43)$$

Враховавши ці заміни, за допомогою формул (37), (14) довести істинність наступних співвідношень

$$(Az_k)(x) = u_{k-1}(x) + p(x)u_{k-1}(h(x)) + \alpha_k(x) + p(x)\alpha_k(x), \quad (44)$$

$$y_k(x) = \int_a^b G(x,t)u_k(t)dt, \quad w_k(x) = \int_a^b G(x,t)\alpha_k(t)dt. \quad (45)$$

Звідси випливає, що функцію $z_k(x)$, яка визначається формулою (37), можна записати у вигляді

$$z_k(x) = \int_a^b G(x,t)\{u_{k-1}(t) + \alpha_k(t)\}dt.$$

Позначимо

$$v_k(x) = u_{k-1}(x) + \alpha_k(x), \quad (46)$$

Тоді

$$z_k(x) = \int_a^b G(x,t)v_k(t)dt. \quad (47)$$

Оскільки, з формул (1), (14), (8) випливає, що

$$(Az_k)(x) - (Lz_k)(x) = (Bz_k)(x), \quad x \in (a,b), \quad (48)$$

і відповідно

$$r_k(x) = f(x) - (Lz_k)(x) = f(x) + (Bz_k)(x) - (Az_k)(x), \quad (49)$$

то підставляючи заміни (41), (45), (47) у співвідношення (35), (38) і враховуючи при цьому формули (14), (48), (10), (45), (49) та (46), отримуємо

$$u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)v_k(t)dt, \quad x \in (a,b), \quad (50)$$

$$r_k(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{51}$$

$$r_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)v_k(t)dt - v_k(x) - p(x)v_k(h(x)). \tag{52}$$

Якщо врахувати початкову умову $u_k(x) = 0, x \in (h(a), a)$, то можна побачити, що алгоритм (50)–(52), (46) та (43) характеризує колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11).

Обчислювальна схема

Безпосередньо обчислювати за допомогою формул (35)–(38) дещо незручно, тому пропонується одна із можливих обчислювальних схем, рівносильна початковому алгоритму. Перед тим, як описати схему, зауважимо, що в процесі обчислень за формулами (25) і (40) слід користуватися очевидними співвідношеннями

$$(L\eta_i)(x) = (A\eta_i)(x) - (B\eta_i)(x), \tag{53}$$

$$f(x) - (Ly_{k-1})(x) = f(x) + (By_{k-1})(x) - (Ay_{k-1})(x), \tag{54}$$

а систему рівнянь (39) доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$. Обчислення, як завжди, можна розділити на допоміжні й основні.

Допоміжні обчислення: задаємо систему лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x)\}, i = \overline{1, n}$, розв'язуємо допоміжні рівняння (24), (23), у результаті отримуємо системи функцій $\{\eta_j(x)\}, \{\xi_j(x)\}$, будуємо нову систему функцій

$$K_j(x) = (B\eta_j)(x), j = \overline{1, n}, \tag{55}$$

далі знаходимо елементи матриці Λ з формули

$$\beta_{ij} = \xi_j(x_i) - K_j(x_i), j = \overline{1, n}. \tag{56}$$

Знаходимо обернену матрицю Λ^{-1} , а початкове наближення визначаємо з рівнянь

$$\begin{aligned} u_0(x) + p(x)u_0(h(x)) &= s_0(x), \quad x \in (a, b), \\ u_0(x) &= 0, \quad x \in (h(a), a), \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{cases} y_0''(x) + a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x) = u_0(x), & x \in (a, b), \\ U_1[y_0] = U_2[y_0] = 0, \end{cases} \tag{58}$$

де s_0 – деяка задана функція з $L_2(a, b)$.

Основні обчислення: виходячи з відомих функцій $y_{k-1}(x)$ та $s_{k-1}(x)$ знаходимо функцію

$$v_k(x) = f(x) + (By_{k-1})(x), \tag{59}$$

та нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - s_{k-1}(x), \tag{60}$$

обчислюємо вектор $b_k = \{b_1^k, b_2^k, \dots, b_n^k\}$, де

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i), i = \overline{1, n}, \tag{61}$$

складаємо рівняння $\Lambda a_k = b_k$ і знаходимо його розв'язок

$$a_k = \Lambda^{-1}b_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}, \tag{62}$$

утворюємо функцію

$$s_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^n a_j^k K_j(x). \tag{63}$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо з рівняння

$$\begin{aligned} u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) &= s_k(x), \quad x \in (a, b), \\ u_k(x) &= 0, \quad x \in (h(a), a), \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{cases} y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), & x \in (a, b), \\ U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Беручи до уваги формули (14), (48), (53) і (54) можна встановити рівносильність обчислювальної схеми (56)–(65) й алгоритму (35)–(38).

ВИСНОВКИ. До одного типу крайової задачі для диференціально-функціонального рівняння застосовано методи побудови наближених розв'язків, такі як метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вайникко Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г.М. Вайникко // Диференц. уравнения. – 1965. –1, № 2. – С. 244–254.
 2. Геселева К.Г. Колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з малою не лінійністю // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кмянець-Подільський: Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 19–26. – ISSN 2308-5878.

3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.

4. Лучка А.Ю. Крайова задача для дифференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова її розв'язку проекційним методом / А.Ю. Лучка // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 11–16.

5. Поселюжна В.Б., Колокаційно-итеративний метод розв'язування дифференціальних та інтегральних рівнянь / В.Б. Поселюжна, Л.М. Семчишин – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

Надійшла до редколегії 30.10.17

К. Геселева, аспірант

Каменець-Подольський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрены приближенные методы решения краевых задач для дифференциально-функциональных уравнений, метод последовательных приближений, коллокационный и коллокационно-итеративный методы. Исследованы условия сходимости этих методов. Предложено вычислительные схемы методов.

K. Geseleva, PhD graduate

Kamyanets-Podilskyi Ivan Ogiienko National University, Kamyanets-Podilsky

COLLOCATION AND COLOCATION-ITERATIVE METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Approximate methods for solving boundary value problems for differential-functional equations are considered in this paper, method of successive approximations, collocation and collocation-iterative methods. The conditions of convergence of these methods are investigated. The computational schemes of methods are proposed.

УДК 517.956.223

В. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, проф., В. Кречко, асп.

Інститут математики НАН України, Київ

e-mail: gerasym@imath.kiev.ua, vi.kre4ko@gmail.com

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ІЄРАХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББГГКІ В ГРАНИЦІ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

Розглянуто проблему побудови асимптотичної границі самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрахії квантових рівнянь ББГГКІ та встановлено властивість поширення кореляцій станів квантових систем багатьох частинок в такій границі.

ВСТУП. В останній час спостерігається значний прогрес у дослідженні проблеми строгого обґрунтування квантових кінетичних рівнянь. Зокрема це стосується нелінійного рівняння Шредінгера та рівняння Гросса – Пітаєвського, якими описується колективна поведінка квантових систем багатьох частинок [2]–[4], [12], [13], [16], наприклад, Бозе газу та його конденсату. Основний підхід до виведення таких кінетичних рівнянь ґрунтується на дослідженні скейлінгової границі середнього (самоузгодженого) поля [12] розв'язку ієрахії квантових рівнянь ББГГКІ (Боголюбов – Борн – Грін – Кірквуд – Івон) для послідовності маргінальних операторів густини побудованого методами теорії збурень [15].

Мета цієї статті полягає у побудові асимптотичної границі самоузгодженого поля для непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрахії квантових рівнянь ББГГКІ [8], [10] та дослідження властивості поширення початкових кореляцій стану для квантових систем багатьох частинок.

НЕПЕРТУРБАТИВНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІЄРАХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББГГКІ. Нехай простір $\mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_n^{\otimes n})$ – простір послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ ядерних операторів, $f_0 \in \mathbb{C}$ визначених на просторі Фока \mathcal{F}_n з такою нормою: $\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}_{1, \dots, n} |f_n(1, \dots, n)|$, де символом $\text{Tr}_{1, \dots, n}$ позначено частинні сліди оператора $f_n \equiv f_n(1, \dots, n) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначеного на n -частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^{\otimes n}$. Підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями позначимо $\mathcal{L}_0^1(\mathcal{F}_n)$ [14].

На просторі $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначено однопараметричне відображення

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n^*(t) f_n \doteq e^{-itH_n} f_n e^{itH_n}, \quad (1)$$

де самоспряжений оператор $H_n = \sum_{j=1}^n K(j) + \epsilon \sum_{j_1 < j_2=1}^n \Phi(j_1, j_2)$ – гамільтоніан системи n частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана [2], тобто оператор $K(j)$ – оператор кінетичної енергії j частинки, Φ – оператор парного потенціалу взаємодії, $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметер і використано систему одиниць де $\hbar = 2\pi\hbar = 1$ – постійна Планка, $m=1$ – маса частинок. Обернену групу операторів до групи $\mathcal{G}_n^*(t)$ будемо позначати $(\mathcal{G}_n^*)^{-1}(t) = \mathcal{G}_n^*(-t) = \mathcal{G}_n(t)$.

На просторі $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ відображення (1): $t \rightarrow \mathcal{G}^*(t) = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{G}_n^*(t)$, утворює сильно неперервну ізометричну групу операторів, яка зберігає позитивність та самоспряженість операторів. На підпросторі $\mathcal{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$ інфінітезимальний генератор \mathcal{N}_n^* групи операторів (1) визначається в сенсі сильної збіжності простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_n)$ таким оператором

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{G}_n^*(t) f_n - f_n) = \mathcal{N}_n^* f_n \doteq \sum_{j=1}^n \mathcal{N}^*(j) f_n + \epsilon \sum_{j_1 < j_2=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, j_2) f_n, \tag{2}$$

де оператор $\mathcal{N}^*(j)$ – генератор рівняння фон Неймана у випадку еволюції системи невзаємодіючих частинок; оператор $\mathcal{N}_{\text{int}}^*$ визначається такою формулою: $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, j_2) f_n \doteq -i(\Phi(j_1, j_2) f_n - f_n \Phi(j_1, j_2))$.

Еволюція всіх можливих станів квантових систем багатьох частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана, описується за допомогою послідовності маргінальних операторів густини $F(t) = (I, F_1(t, 1), \dots, F_s(t, 1, \dots, s), \dots)$, які є непертурбативним розв'язком задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ і зображуються такими розкладами в ряд [8], [10]:

$$F_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) F_{s+n}^{0, \epsilon}(1, \dots, s+n), \quad s \geq 1, \tag{3}$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ ряду (3) – кумулянт $(1+n)$ -го порядку груп операторів (1), який визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) = \sum_{P: (\{Y\}, X \setminus Y) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} \mathcal{G}_{|\theta(X_i)|}^*(t, \theta(X_i)), \tag{4}$$

де використано такі позначення: $Y \equiv (1, \dots, s)$, $X \setminus Y \equiv (s+1, \dots, s+n)$ та $\{Y\}$ – множина, яка складається з одного елементу $Y = (1, \dots, s)$ множини індексів, \sum_P – сума за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(\{Y\}, X \setminus Y)$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \subset (\{Y\}, X \setminus Y)$, які взаємно не перетинаються, та відображення декластеризації θ визначається формулою: $\theta(\{Y\}, X \setminus Y) = X$.

Оскільки для кумулянтів (4) груп операторів (1) на просторі $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ справедлива така оцінка: $\|\mathfrak{A}_{1+n}(t) f_{s+n}\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} \leq n! e^{n+2} \|f_{s+n}\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}$, для початкових станів $F^{0, \epsilon} \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ ряд (3) є збіжним за нормою простору $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ за умови, що $\alpha > e$, та справедлива нерівність [10]

$$\|F(t)\|_{\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)} \leq c_\alpha \|F(0)\|_{\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)},$$

де $c_\alpha = e^2(1 - \frac{e}{\alpha})^{-1}$. Параметр α може бути інтерпретований, як величина обернено пропорційна середній кількості частинок.

Для початкових станів $F(0) \in \mathcal{L}_{\alpha, 0}^1 \subset \mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ послідовність (3) є сильним розв'язком задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ та для довільних початкових станів з простору $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathcal{F}_H)$ – це слабкий розв'язок [10]. У випадку початкових станів, які задовольняють умову хаосу, тобто $F_s^{0, \epsilon} = \prod_{i=1}^s F_1^{0, \epsilon}(i)$, $s \geq 1$, ряд (3) існує за такої умови на середнє значення числа частинок: $\|F_1^{0, \epsilon}\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} < e^{-1}$.

Зауважимо, що непертурбативний розв'язок (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ може бути перетворено до ряду теорії збурень внаслідок застосування аналогів рівнянь Дюамеля до кумулянтів (4) груп операторів [6].

ГРАНИЦЯ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ МАРГІНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ГУСТИНИ. Встановимо асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ в скейлінговій границі самоузгодженого поля.

Для маргінальних операторів густини (3) справедлива така гранична теорема.

Теорема 1. Нехай для початкових станів $F_s^{0, \epsilon} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$, $s \geq 1$, існує така границя

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\epsilon^s F_s^{0, \epsilon}(1, \dots, s) - f_s^0(1, \dots, s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0. \tag{5}$$

Тоді у випадку обмеженого потенціалу взаємодії для довільного інтервалу часу існує границя самоузгодженого поля маргінальних операторів густини (3)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\epsilon^s F_s(t, 1, \dots, s) - f_s(t, 1, \dots, s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \quad s \geq 1, \tag{6}$$

де граничний оператор $f_s(t)$ зображується розкладом у такий ряд

$$f_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \prod_{j_1=1}^s \mathcal{G}_{j_1}^*(t - t_1, j_1) \sum_{i_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, s+1) \prod_{l_1=1}^{s+1} \mathcal{G}_{l_1}^*(t_1 - t_2, l_1) \dots \tag{7}$$

$$\prod_{j_n=1}^{s+n-1} \mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n, j_n) \sum_{i_n=1}^{s+n-1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_n, s+n) \prod_{l_n=1}^{s+n} \mathcal{G}_1^*(t_n, l_n) f_{s+n}^0.$$

Якщо $f^0 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, то ряд (7) існує і збігається за нормою простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ за умови: $t < t_0 \equiv (2\|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)})^{-1}$.

Зауважимо, що граничні маргінальні оператори густини (7) є розв'язком задачі Коші для граничної ієрархії квантових рівнянь ББГКІ

$$\frac{d}{dt} f_s(t) = \sum_{i=1}^s \mathcal{N}^*(i) f_s(t) + \sum_{i=1}^s \Gamma_{s+1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, s+1) f_{s+1}(t), \tag{8}$$

$$f_s(t)|_{t=0} = f_s^0, \quad s \geq 1, \tag{9}$$

відомої як ієрархія квантових рівнянь Власова [6].

Доведення наведених тверджень ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд маргінальних операторів густини (3).

Дійсно, доведемо почленну збіжність рядів (3) та (7).

Для кумулянта першого порядку $\mathfrak{A}_1(t, \{1, \dots, s\})$ асимптотично збурених груп операторів (1) у випадку обмеженого потенціалу взаємодії справедлива рівність [14]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \left(\mathcal{G}_s^*(t, 1, \dots, s) - \prod_{j=1}^s \mathcal{G}_1^*(t, j) \right) (1, \dots, s) \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \tag{10}$$

яка є наслідком виконання для груп операторів (1) рівняння Дюамеля

$$\left(\mathcal{G}_s^*(t, 1, \dots, s) - \prod_{l=1}^s \mathcal{G}_1^*(t, l) \right) f_s = \epsilon \int_0^t d\tau \prod_{l=1}^s \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-\tau, l) \sum_{i < j=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, j) \mathcal{G}_s^*(\tau) f_s, \tag{11}$$

де $f_s \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$. Дійсно, оскільки рівняння (11) справджується для $f_s \in \mathcal{L}_0^1(\mathcal{H}_s) \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$ і, враховуючи, що $\mathcal{L}_0^1(\mathcal{H}_s)$ – підпростір простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$, рівність (11) справедлива і для довільних $f_s \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$, група операторів $\mathcal{G}_s^*(t)$ є ізометричною та оператор $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, j)$ є обмеженим. Інтеграл в рівнянні (11) існує в сенсі сильної збіжності, і підінтегральний вираз $\prod_{l=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-\tau, l) \sum_{i < j=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, j) \mathcal{G}_s^*(\tau)$ для кожного оператора $f_s \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$ є сильно неперервним за τ і отже є інтегрованим. Таким чином, справедливості рівності (10) є наслідком оцінки

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{G}_s^*(t, 1, \dots, s) - \prod_{l=1}^s \mathcal{G}_1^*(t, l) \right) f_s \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} &\leq \epsilon \int_0^t d\tau \left\| \prod_{l=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-\tau, l) \sum_{i < j=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, j) \mathcal{G}_s^*(\tau) f_s \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} \leq \\ &\leq \epsilon t s (s-1) \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \|f_s\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} \end{aligned}$$

Відповідно, для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) довільного порядку виконуються такі рівності

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\epsilon^n} \frac{1}{n!} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) f_{s+n} - \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{j=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-t_1, j) \sum_{i_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, s+1) \prod_{j_1=1}^{s+1} \mathcal{G}_1^*(t_1-t_2, j_1) \dots \right. \\ \left. \dots \prod_{j_{n-1}=1}^{s+n-1} \mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n, j_{n-1}) \sum_{i_n=1}^{s+n-1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_n, s+n) \prod_{j_n=1}^{s+n} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) f_{s+n} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} = 0. \end{aligned}$$

Внаслідок збіжності рядів (3) та (7) на скінченному проміжку часу залишки цих рядів можуть бути обмежені як завгодно малими числами для достатньо великих значень $n = n_0$ незалежно від параметру ϵ . Тоді згідно рівностей (10), (15) для кожного числа n має місце почленна збіжність цих рядів. Єдиність послідовності граничних операторів (7) є наслідком рівномірної збіжності в границі самоузгодженого поля.

ВЛАСТИВІСТЬ ПОШИРЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ХАОСУ. Як відомо [12], розв'язок задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (8), (9) задовольняє умову поширення початкового хаосу [1], яка означає відсутність кореляцій між частинками у початковому стані, тобто у випадку системи багатьох частинок, які задовольняють статистиці Максвелла – Больцмана, початковий стан визначається послідовністю

$$F(t)|_{t=0} = F^{(c)} \equiv \left(I, F_1^{0, \epsilon}(1), \dots, \prod_{i=1}^s F_1^{0, \epsilon}(i), \dots \right). \tag{12}$$

У цьому випадку кореляції станів не народжуються в процесі еволюції системи. Доведемо зазначену властивість для границі самоузгодженого поля послідовності (3).

Для цього визначимо маргінальні кореляційні оператори за допомогою кластерних розкладів [6] маргінальних операторів густини (3):

$$F_1(t, 1) = G_1(t, 1), \tag{13}$$

$$F_s(t, 1, \dots, s) = \prod_{i=1}^s F_1(t, i) + \sum_{\substack{P: \{1, \dots, s\} = \cup_i X_i, \\ |P| \neq s}} \prod_{X_i \subset P} G_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 2,$$

де використано позначення аналогічні до прийнятих у формулі (4). Тоді для початкових станів (12) послідовність маргінальних кореляційних операторів визначається такими розкладами в ряд [6]:

$$G_1(t, 1) = F_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^{0, \epsilon}(i), \quad (14)$$

$$G_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathfrak{A}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^{0, \epsilon}(i), \quad s \geq 2,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{s+n}(t)$ розкладів в ряд (14) є кумулянтю ($s+n$)-го порядку груп операторів (1).

Внаслідок виконання рівності (10), для довільного інтервалу часу маємо

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\epsilon^n} \mathfrak{A}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) f_{s+n} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} = 0, \quad s \geq 2. \quad (15)$$

Нехай

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon F_1^{0, \epsilon} - f_1^0 \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} = 0. \quad (16)$$

Тоді границя самоузгодженого поля послідовності (12) також задовольняє умову хаосу, тобто граничний стан визначається послідовністю $f^{(c)} \equiv (I, f_1^0(1), \dots, \prod_{i=1}^s f_1^0(i), \dots)$.

Тоді згідно рівності (15) для маргінальних кореляційних операторів (14) справедливі такі рівності

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon^s G_s(t) \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \quad s \geq 2, \quad (17)$$

та аналогічно до теореми 1 для одночастинкового оператора густини маємо

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon F_1(t, 1) - f_1(t, 1) \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} = 0,$$

де граничний оператор визначається таким розкладом в ряд

$$f_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_1^*(t - t_i, i_1) \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \prod_{j=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \dots$$

$$\prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_n - t_n, i_n) \sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i).$$

Ряд (18) є сильно збіжним за умови: $t < t_0 \equiv \left(2 \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \|f_1^0\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} \right)^{-1}$.

Внаслідок кластерного розкладу (13) та згідно рівностей (17) за умови (16) встановлюємо властивість поширення початкового хаосу в границі самоузгодженого поля для послідовності (3)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon^s F_s(t, 1, \dots, s) - \prod_{j=1}^s f_1(t, j) \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \quad (19)$$

де оператор $f_1(t)$ визначається розкладом в ряд (18).

Зауважимо, що доведення отриманих результатів ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд (14). Отримані результати можуть бути поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів.

Відзначимо також, що внаслідок властивості поширення початкового хаосу (19) з ієрархії квантових рівнянь Власова (8) можна встановити, що граничний одночастинковий оператор, який визначається розкладом в ряд (18), задовольняє квантове кінетичне рівняння Власова [2]. Зокрема, для чистих станів, тобто $f_1(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ або в термінах

ядра такого оператора $f_1(t, q, q') = \psi(t, q) \psi^*(t, q')$ квантове кінетичне рівняння Власова зводиться до рівняння Хартрі

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = -\frac{1}{2} \Delta_q \psi(t, q) + \int dq' \Phi(q - q') |\psi(q')|^2 \psi(t, q).$$

Якщо ядро потенціалу взаємодії $\Phi(q) = \delta(q)$ є мірою Дірака, то кінетичне рівняння Хартрі редукується до нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = -\frac{1}{2} \Delta_q \psi(t, q) + |\psi(t, q)|^2 \psi(t, q).$$

Таким чином, за наведених вище умов справедливе таке твердження

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon^s F_s(t) - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|^{\otimes s} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0,$$

де $|\psi(t)\rangle$ – розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю.

ВИСНОВКИ. У данній статті, використовуючи властивості кумулянтів (4) асимптотично збурених груп операторів (1) квантових систем багатьох частинок [11], описано асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ в скейлінговій границі самоузгодженого поля. Встановлено, що в такому наближенні еволюція стану системи описується за допомогою розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (8), (9).

Для початкових станів квантових систем статистично незалежних частинок (12) в границі самоузгодженого поля встановлено асимптотичну поведінку послідовності маргінальних кореляційних операторів (14), якою описується процес поширення початкового хаосу (19) за допомогою розв'язку (18) квантового кінетичного рівняння Власова.

Зауважимо, також що в [5] встановлено асимптотичну поведінку станів квантових систем багатьох частинок в скейлінговій границі самоузгодженого поля в інший спосіб, а саме: на основі ієрархії дуальних квантових рівнянь ББГКІ для послідовності маргінальних спостережуваних. Зокрема, такий підхід дає можливість побудови квантових кінетичних рівнянь з урахуванням кореляцій початкових станів [7], [11].

Аналогічно статті [9], наведені результати можуть бути поширені на системи багатьох ферміонів і бозонів та також на квантові системи багатьох частинок з кулонівським потенціалом взаємодії [17].

Список використаних джерел

1. Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations, the Netherlands: Springer, 2012.
2. Erdős L., Schlein B., Yau H.-T. Derivation of the cubic nonlinear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems. *Invent. Math.* 167, (3), 2007, 515–614.
3. Erdős L., Schlein B., Yau H.-T. Derivation of the Gross–Pitaevskii equation for the dynamics of Bose–Einstein condensate. *Ann. of Math.* 172, 2010, 291–370.
4. Fröhlich J., Graffi S., Schwarz S. Mean-field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons. *Commun. Math. Phys.* 271, 2007, 681–697.
5. Gerasimenko V.I. Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit, *Kinet. Relat. Models*, 4, (1), 2011, 385–399.
6. Gerasimenko V.I., Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. (In: *Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications*. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2013.) — P. 233–288.
7. Gerasimenko V.I. On the description of quantum correlations by means of a one-particle density operator. *Proc. Inst. Math. NASU*, v.14, No.1, pp. 116–127, 2017.
8. Gerasimenko V.I., Krechko V.V. On non-perturbative solution of quantum BBGKY hierarchy. *Proc. Inst. Math. NASU*, v.13, No.2, pp. 7–26, 2016.
9. Gerasimenko V.I., Polishchuk D.O. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles. *Math. Methods Appl. Sci.*, 34, (1), 2011, 76–93.
10. Gerasimenko V.I., Shtyk V.O. Initial-value problem of the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles. *Ukrainian Math. J.*, 58, (9), 2006, 1175–1191.
11. Gerasimenko V.I., Tsvir Zh.A. On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states. *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 391, (24), 2012, 6362–6366.
12. Golse F. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit, In: *Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity*, *Lect. Notes Appl. Math. Mech.*, 3, Springer, 2016, 1–144.
13. Golse F., Mouhot C., Paul T. On the mean-field and classical limits of quantum mechanics. *Commun. Math. Phys.* 343, 2016, 165–205.
14. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1995.
15. Petrina D.Ya. *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics*. Continuous Systems. Kluwer, 1995.
16. Pezzotti F., Pulvirenti M. Mean-field limit and semiclassical expansion of quantum particle system. *Ann. Henri Poincaré*. 10, 2009, 145–187.
17. Porta M., Rademacher S., Saffirio C., Schlein B. Mean field evolution of fermions with Coulomb interaction. *J. Stat. Phys.*, 166, (6), 2017, 1345–1364.

Надійшла до редколегії 21.09.17

В. Герасименко, д-р физ.-мат. наук, проф., В. Кречко, асп.
Институт математики НАН Украины, Киев

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ИЕРАРХИИ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ББГКИ В ГРАНИЦЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В работе рассмотрена проблема построения асимптотического предела самосогласованного поля непертурбативного решения задачи Коши для иерархии квантовых уравнений ББГКИ и установлено свойство распространения корреляций состояний квантовых многочастичных систем в этом пределе.

V. Gerasimenko, Full Doctor., Prof., V. Krechko, PhD student
Institute of mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

MEAN-FIELD ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION OF THE QUANTUM BBGKY HIERARCHY

The problem of the construction of a mean-field (self-consistent field) asymptotic behavior of a non-perturbative solution of the Cauchy problem of the quantum BBGKY hierarchy is considered and the property of the propagation of state correlations for many-particle systems is established.

УДК 517.946

А. Громик, канд.техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГИПЕРБОЛИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРИДНОГО ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОГО ШАРУ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару.

ВСТУП. Теорія початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, хімії, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для рівнянь і систем рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [3], Митропольського Ю.О., Хоми Г.П., Громяка М.І. [13], Самойленка А.М., Ткача Б.П. [15], Смирнова М.М. [17], Чернятина В.А. [19] та інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні і наближені) крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 16].

Виявляється, що для досить широкого класу лінійних крайових і мішаних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків є метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4, 8, 9].

Гіперболічні крайові задачі в необмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових областях розглянуто у працях авторів [5, 6, 10, 11].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано єдиний точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, R_{n+1} = +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in (-l_1; l_2), l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_1 + l_2 \neq 0\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку гіперболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi); \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (4)$$

та умовами спряження [8]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, p_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ – деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}; \quad g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\}; \quad w^1(t, r, \varphi) = \{w_1^1(t, r, \varphi), w_2^1(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^1(t, r, \varphi)\};$$

$$w^2(t, r, \varphi) = \{w_1^2(t, r, \varphi), w_2^2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^2(t, r, \varphi)\}; \quad - \text{задані обмежені неперервні функції};$$

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\} \text{ – шукана функція.}$$

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [8, 18, 12].

До задачі (1)–(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [8]:

$$\Lambda_s[f(z)] = \int_{-l_1}^{l_2} f(z) v_s(z+l_1) dz \equiv f_s, \quad (6)$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \equiv f(z), \quad (7)$$

$$\Lambda_s \left[\frac{d^2 f}{dz^2} \right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0) \left(-\frac{df}{dz} + p_1 f \right) \Big|_{z=-l_1} + v_s(l) \left(\frac{df}{dz} + p_2 f \right) \Big|_{z=l_2}, \quad l = l_1 + l_2. \quad (8)$$

У формулах (6)-(8) бере участь спектральна функція (ядро перетворення) $v_s(z+l_1) = \frac{\gamma_s \cos \gamma_s(z+l_1) + p_1 \sin \gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}$, квадрат норми якої $\|v_s(z+l_1)\|^2 = \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z+l_1) dz = \frac{l}{2} + \frac{(p_1+p_2)(\gamma_s^2 + p_1 p_2)}{2(\gamma_s^2 + p_1^2)(\gamma_s^2 + p_2^2)}$.

При цьому $v_s(0) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}$, $v_s(l) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_2^2}}$, $\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додат-

них коренів трансцендентного рівняння $\operatorname{ctg} \gamma l = \frac{\gamma^2 - p_1 p_2}{\gamma(p_1 + p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s за формулою (6) внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, \varphi); t > 0; r \in I_n^+; \varphi \in [0; 2\pi)\}$ 2π -періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{js}}{\partial t^2} - \left[a_{ij}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_{js} + (a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2) u_{js} = \Phi_{js}(t, r, \varphi); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (9)$$

з початковими умовами

$$u_{js} \Big|_{t=0} = g_{js}^1(r, \varphi); \quad \frac{\partial u_{js}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{js}^2(r, \varphi); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (10)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^p u_{1s}}{\partial r^p} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^p u_{n+1,s}}{\partial r^p} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad p = 0, 1, \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_{ks} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,s} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де $\Phi_{js}(t, r, \varphi) = f_{js}(t, r, \varphi) + a_{zj}^2 v_s(0) w_j^1(t, r, \varphi) + a_{zj}^2 v_s(l) w_j^2(t, r, \varphi)$, $j = \overline{1, n+1}$.

До задачі (9) – (12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на проміжку $[0; 2\pi)$ до кутової змінної φ [18]:

$$F_m[g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi \equiv g_m, \quad l - \text{уявна одиниця}, \quad (13)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \quad (14)$$

$$F_m \left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \quad (15)$$

де $\operatorname{Re}(\dots)$ – дійсна частина виразу (\dots) щодо φ ; $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$; $k = 1, 2, 3, \dots$

Інтегральний оператор F_m за формулою (13) внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)-(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r); t > 0; r \in I_n^+\}$ розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку з оператором Бесселя

$$\frac{\partial^2 u_{jms}}{\partial t^2} - a_{ij}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm}^2}{r^2} \right) u_{jms} + (a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2) u_{jms} = \Phi_{jms}(t, r); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad v_{jm} = \frac{a_{\varphi j} m}{a_{rj}}, \quad (16)$$

з початковими умовами

$$u_{jms} \Big|_{t=0} = g_{jms}^1(r); \quad \frac{\partial u_{jms}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jms}^2(r); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (17)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^p u_{1sm}}{\partial r^p} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^p \tilde{u}_{n+1,sm}}{\partial r^p} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad p = 0, 1, \quad (18)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_{ksm} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,sm} \right]_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

До одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Бесселя на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_{(n)}[f(r)] = \int_0^{+\infty} f(r)V(r, \lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (20)$$

$$H_{(n)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \quad (21)$$

$$H_{(n)}[B_{(m)}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r, \lambda)\sigma_k r dr. \quad (22)$$

У формулах (20)–(22) беруть участь величини і функції:

$$V(r, \lambda) = \sum_{k=1}^n V_k(r, \lambda)\Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r) + V_{n+1}(r, \lambda)\Theta(r - R_n); \quad V_1(r, \lambda) = \Delta_n J_{\nu_{1m}}(q_1 r); \quad \Delta_n = \prod_{k=1}^n \Delta^k \equiv \prod_{k=1}^n \frac{2c_{2k}}{\pi R_k} \neq 0;$$

$$V_{k+1}(r, \lambda) = \prod_{j=k+1}^n \Delta^j [\omega_{(\nu_m); 2}^{(k)}(\lambda) J_{\nu_{k+1, m}}(q_{k+1} r) - \omega_{(\nu_m); 1}^{(k)}(\lambda) N_{\nu_{k+1, m}}(q_{k+1} r)]; \quad V_{n+1}(r, \lambda) = \omega_{(\nu_m); 2}^{(n)}(\lambda) J_{\nu_{n+1, m}}(q_{n+1} r) - \omega_{(\nu_m); 1}^{(n)}(\lambda) (q_{n+1} r)];$$

$J_\nu(x)$ – циліндрична функція Бесселя 1-го роду ν -го порядку; N_ν – циліндрична функція Бесселя 2-го роду ν -го порядку;

$$a_k \equiv a_{zk}, \quad q_k \equiv q_k(\lambda^2) = q_k^{-1}(\lambda^2 + \gamma_k^2)^{1/2}; \quad \gamma_k \geq 0; \quad k = \overline{1, n+1}, \quad (\nu_m) \equiv (\nu_m)_{n+1} = (\nu_{1m}, \nu_{2m}, \dots, \nu_{n+1, m});$$

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^n \sigma_k \Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r) + \sigma_{n+1} \Theta(r - R_n); \quad \sigma_k = \frac{1}{a_k^2} \frac{c_{1k} \cdot c_{1, k+1} \cdots c_{1n}}{c_{2k} \cdot c_{2, k+1} \cdots c_{2n}}; \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2}; \quad J_{\nu, \alpha}(x) = x^{-\alpha} J_\nu(x);$$

$$N_{\nu, \alpha}(x) = x^{-\alpha} N_\nu(x); \quad u_{\nu_{km}; ij}^{k1}(q_p R_k) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k} \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k \right) J_{\nu_{km}, 0}(q_p R_k) - R_k^2 q_p^2 \alpha_{ij}^k J_{\nu_{km+1}, 1}(q_p R_k);$$

$$u_{\nu_{km}; ij}^{k2}(q_p R_k) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k} \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k \right) N_{\nu_{km}, 0}(q_p R_k) - R_k^2 q_p^2 \alpha_{ij}^k N_{\nu_{km+1}, 1}(q_p R_k); \quad i, j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}; \quad p = \overline{1, n+1};$$

$$\Psi_{(\nu_{km}, \nu_{k+1, m}); ij}^k(q_k R_k, q_{k+1} R_k) = u_{\nu_{km}; i1}^{ki}(q_k R_k) u_{\nu_{k+1, m}; 22}^{kj}(q_{k+1} R_k) - u_{\nu_{km}; 21}^{ki}(q_k R_k) u_{\nu_{k+1, m}; 12}^{kj}(q_{k+1} R_k); \quad k = \overline{1, n};$$

$$\omega_{(\nu_m) 2; p}^{(1)}(q_1 R_1, q_2 R_1) \equiv \Psi_{(\nu_{1m}, \nu_{2m}); 1p}^1(q_1 R_1, q_2 R_1) \equiv \omega_{(\nu_m) 2; p}^{(1)}(\lambda); \quad p = 1, 2;$$

$$\omega_{(\nu_m) k+1; j}^{(k)}(\lambda) = \omega_{(\nu_m) k+1; j}^{(k)}(q_1 R_1, q_2 R_1, \dots, q_k R_k, q_{k+1} R_k) = \Psi_{(\nu_{km}, \nu_{k+1, m}); 1j}^k(q_k R_k, q_{k+1} R_k) \omega_{(\nu_m) k; 2}^{(k-1)}(q_1 R_1, q_2 R_1, \dots, q_{k-1} R_{k-1}, q_k R_{k-1}) -$$

$$- \Psi_{(\nu_{km}, \nu_{k+1, m}); 2j}^k(q_k R_k, q_{k+1} R_k) \omega_{(\nu_m) k; 1}^{(k-1)}(q_1 R_1, q_2 R_1, \dots, q_{k-1} R_{k-1}, q_k R_{k-1}); \quad k = \overline{2, n}; \quad j = 1, 2; \quad (k) = 123 \dots k;$$

$$(\nu_m); k = (\nu_{1m}, \nu_{2m}, \dots, \nu_{km}); \quad \Omega(\lambda) = \lambda \left\{ [\omega_{(\nu_m); 1}^{(n)}(\lambda)]^2 + [\omega_{(\nu_m); 2}^{(n)}(\lambda)]^2 \right\}^{-1}$$

та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{rk}^2 \Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r) B_{\nu_{km}} + a_{r, n+1}^2 \Theta(r - R_n) B_{\nu_{n+1, m}}, \quad \text{де } B_{\nu_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{km}^2}{r^2} - \text{класичний диференціальний оператор Бесселя, } \theta(x) - \text{одична функція Гевісайда.}$$

Запишемо диференціальні рівняння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_{1s}^2 \right) u_{1sm} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_{2s}^2 \right) u_{2sm} \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r, n+1}^2 B_{\nu_{n+1, m}} + q_{n+1, s}^2 \right) \tilde{u}_{n+1, sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1sm}(t, r) \\ \Phi_{2sm}(t, r) \\ \dots \\ \Phi_{n+1, sm}(t, r) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1sm}(t,r) \\ u_{2sm}(t,r) \\ \dots \\ u_{n+1,sm}(t,r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1sm}^1(r) \\ g_{2sm}^1(r) \\ \dots \\ g_{n+1,sm}^1(r) \end{bmatrix}; \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_{1sm}(t,r) \\ u_{2sm}(t,r) \\ \dots \\ u_{n+1,sm}(t,r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1sm}^2(r) \\ g_{2sm}^2(r) \\ \dots \\ g_{n+1,sm}^2(r) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda) \sigma_2 r dr & \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2 \right) \tilde{u}_{j sm}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\Phi}_{j sm}(t, \lambda), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{j sm}(t, \lambda) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{j sm}^1(\lambda); \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{j sm}(t, \lambda) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{j sm}^2(\lambda), \tag{27}$$

де $\tilde{u}_{j sm}(t, \lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} u_{j sm}(t, r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr$; $j = \overline{1, n+1}$, $\tilde{F}_{j sm}(t, \lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} F_{j sm}(t, r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr$, $j = \overline{1, n+1}$,

$\tilde{g}_{j sm}^p(\lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} g_{j sm}^p(r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr$; $j = \overline{1, n+1}$; $p = 1, 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі (1)–(5), що $\max\{q_{1s}^2, q_{2s}^2, \dots, q_{n+1,s}^2\} = q_{1s}^2$ і покладемо всюди $\alpha_j^2 = q_{1s}^2 - q_{js}^2$; $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{sm}(t, \lambda)}{dt^2} + \Delta_s^2(\lambda) \tilde{u}_{sm}(t, \lambda) = \tilde{\Phi}_{sm}(t, \lambda), \tag{28}$$

$$\tilde{u}_{sm}(t, \lambda) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{sm}^1(\lambda); \frac{d \tilde{u}_{sm}(t, \lambda)}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{sm}^2(\lambda), \tag{29}$$

де $\tilde{u}_{sm}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{j sm}(t, \lambda)$, $\tilde{F}_{sm}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{F}_{j sm}(t, \lambda)$, $\tilde{g}_{sm}^p(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{j sm}^p(\lambda)$; $p = 1, 2$; $\Delta_s^2(\lambda) = \lambda^2 + a_{z1}^2 \gamma_s^2 + \chi_1^2$.

Відомо [5], що єдиним розв'язком задачі Коші (28), (29) є функція

$$\tilde{u}_{sm}(t, \lambda) = G_s(t, \lambda) \tilde{g}_{sm}^2(\lambda) + \frac{d}{dt} G_s(t, \lambda) \tilde{g}_{sm}^1(\lambda) + \int_0^t G_s(t - \tau, \lambda) \tilde{\Phi}_{sm}(\tau, \lambda) d\tau, \tag{30}$$

де функція Коші $G_s(t, \lambda) = \frac{\sin(\Delta_s(\lambda)t)}{\Delta_s(\lambda)}$.

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором ($H_{(n)} \circ H_{(n)}^{-1} = H_{(n)}^{-1} \circ H_{(n)} = I$), то оператор $H_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ 0 \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ 0 \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{sm}(t, \lambda)]$, де функція $\tilde{u}_{sm}(t, \lambda)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$u_{j sm}(t, r) = \int_0^{+\infty} \tilde{u}_{sm}(t, \lambda) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda; \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (32)$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{j sm}(t, r)$, визначених за формулами (32), обернені оператори Λ_s^{-1} та F_m^{-1} і, виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_2} E_{jk}(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \times \\ \times \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ + \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} [W_{jk}^1(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) w_k^1(\tau, \rho, \alpha) + W_{jk}^2(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) w_k^2(\tau, \rho, \alpha)] \sigma_k \rho d\alpha d\rho d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (33)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_m G_s(t, \lambda) V_j(r, \lambda) V_k(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1) \|v_s(z+l_1)\|^{-2} \cos(m\varphi); \quad j, k = \overline{1, n+1} \quad \text{матриці}$$

впливу (функції впливу) $E(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, компоненти $W_{jk}^1(t, r, \rho, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, -l_1)$ нижньої тангенціальної матриці Гріна (нижні тангенціальні функції Гріна) $W^1(t, r, \rho, \varphi, z)$ та компоненти $W_{jk}^2(t, r, \rho, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, l_2)$ верхньої тангенціальної матриці Гріна (верхні тангенціальні функції Гріна) $W^2(t, r, \rho, \varphi, z)$ розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}^p(t, r, \rho, \varphi, z)$, $p = 1, 2$, безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені за формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [20].

Єдиність розв'язку (33) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)-(5).

Методами з [2, 20] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^p(r, \varphi, z)$, $w_j^p(t, r, \varphi)$, $p = 1, 2$, задовольняють умови:

- 1) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r) = r\sigma(r)$ на осі I_n^+ ;
- 4) справджують умови спряження, то гіперболічна початково-крайова задача (1)-(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі.

Зауваження 2. Параметри p_j ($j = 1, 2$) дозволяють виділяти з формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1$, $z = l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 2-1, 2-2).

Зауваження 3. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням Даламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 4. Якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k , E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1, n}$) умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 3, 4 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)-(5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука. 1978. – 352 с.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
3. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. – М.: ИЛ, 1961. – 122 с.
4. Громик А.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. – 200 с.

5. Громик А.П. Интегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 27–37.
6. Громик А.П. Интегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 45–55.
7. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
8. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
10. Конет І.М. Гіперболічна крайова задача для необмеженого кусково-однорідного циліндра / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2016. – Вип. 2(36). – С. 22–27.
11. Konet I. Hyperbolic boundary value problem for unlimited piecewise-homogeneous hollow cylinder / I. Konet, T. Pylypiuk // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Вип. 14. – С. 91–101.
12. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя / М.П. Ленюк // Інтервальні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 2, ч. 1. – С. 89–101.
13. Митропольський Ю.А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома, М.И. Громьяк. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.
14. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
15. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А.М. Самойленко, Б.П. Ткач. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
16. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
17. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1962. – 292 с.
18. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.
19. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 112 с.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

Надійшла до редколегії 14.10.17

А. Громик, канд. техн. наук, доцент, И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский,
Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОГО СЛОЯ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики для кусочно-однородного цилиндрически-кругового слоя.

A. Gromyk, PhD, I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICALLY CIRCULAR LAYER

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for piecewise-homogeneous cylindrically-circular layer is constructed for the first time.

УДК 517.946

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГИПЕРБОЛИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОВО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧНО-КРУГОВОГО ШАРУ З ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з порожниною.

ВСТУП. Відомо, що різноманітні прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [5, 10].

Для досить широкого класу лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті

зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 6–8].

У цій статті, яка є логічним продовженням [4], ми пропонуємо інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з циліндричною порожниною.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in (-l_1; l_2), l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_1 + l_2 \neq 0\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [9].

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi); \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, p_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ – деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0; \quad |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}; \quad g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\}; \quad w^1(t, r, \varphi) = \{w_1^1(t, r, \varphi), w_2^1(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^1(t, r, \varphi)\};$$

$$w^2(t, r, \varphi) = \{w_1^2(t, r, \varphi), w_2^2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^2(t, r, \varphi)\}; \quad g_0(t, \varphi, z) - \text{задані обмежені неперервні функції};$$

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\} - \text{шукана функція.}$$

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Вважаємо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [6, 11, 1].

Побудований за методикою, розвинутою в [4] для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару, методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [6], скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [11] та гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [1], єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5) визначають функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \quad (6)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} [W_{jk}^1(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z) w_k^1(\tau, \rho, \alpha) + W_{jk}^2(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z) w_k^2(\tau, \rho, \alpha)] \sigma_k \rho d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} W_{jr}(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\rho d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

У формулах (6) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon_m G_s(t, \lambda) V_j(r, \lambda) V_k(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1) \|v_s(z+l_1)\|^{-2} \cos(m\varphi); \quad j, k = \overline{1, n+1}$$

матриці впливу (функції впливу) $E(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, компоненти $W_{jk}^1(t, r, \rho, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, -l_1)$ нижньої тангенціальної матриці Гріна (нижні тангенціальні функції Гріна) $W^1(t, r, \rho, \varphi, z)$, компоненти $W_{jk}^2(t, r, \rho, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, l_2)$ верхньої тангенціальної матриці Гріна (верхні тангенціальні функції Гріна) $W^2(t, r, \rho, \varphi, z)$ та компоненти $W_{jr}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = -a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, R_0, \varphi, z, \xi)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) $W(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ розглянутої задачі, де функція Коші (розв'язуюча функція) $G_s(t, \lambda) = \frac{\sin(\Delta_s(\lambda)t)}{\Delta_s(\lambda)}$, $\Delta_s^2(\lambda) = \lambda^2 + a_{z1}^2 \gamma_s^2 + \chi_1^2$.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}^p(t, r, \rho, \varphi, z)$, $p = 1, 2$, $W_{jr}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, які визначено формулами (6), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [12].

Єдиність розв'язку (6) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) задачі (1)–(5).

Методами з [2, 12] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (6) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладених вище міркувань є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^p(r, \varphi, z)$, $w_j^p(t, r, \varphi)$, $p = 1, 2$, задовольняють умови:

5) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;

6) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;

7) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r) = r\sigma(r)$ на осі I_n^+ ;

8) справджують умови спряження, а функція $g_0(t, \varphi, z)$ – двічі неперервно диференційовна за кожною змінною і має обмежену варіацію за геометричними змінними, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (6).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (6) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі з циліндричною порожниною.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дозволяють виділяти з формул (6) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv \beta > 0$).

Зауваження 3. Параметри p_j ($j = 1, 2$) дозволяють виділяти з формул (6) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1, z = l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 2-1, 2-2).

Зауваження 4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням Даламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. Якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1, n}$), умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі з циліндричною порожниною.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з циліндричною порожниною. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. Быблив О.Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси / О.Я. Быблив, М.П. Ленюк // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 7. – С. 3–11.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Громик А.П. Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2018. – Вип. 1(39). – С. 19.

5. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998.
 6. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001.
 7. Конет І.М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013.
 8. Конет І.М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016.
 9. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 2006.
 10. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991.
 11. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат, 1956.
 12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 14.10.17

А. Громик, канд. техн. наук, доцент, И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук
 Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский,
 Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

**ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ**

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики для кусочно-однородного цилиндрически-кругового слоя с полостью.

A. Gromyk, PhD, I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
 Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
 Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

**HYPERBOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS
 CYLINDRICALLY CIRCULAR LAYER WITH CAVITY**

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for piecewise-homogeneous cylindrically-circular layer with cavity is constructed for the first time.

УДК 519.21

І. Мацак, д-р фіз.-мат. наук, О. Скуржанський, студ.
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
 e-mail: ivanmatsak@univ.kiev.ua, alexskurz97@gmail.com

**ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ
 В СИСТЕМАХ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

Вивчається асимптотика екстремальних значень регенеруючих випадкових послідовностей. Як наслідки встановлюються граничні теореми для максимальної довжини черги в системах масового обслуговування. За допомогою імітаційного моделювання знаходяться оцінки швидкості збіжності.

Вступ. Розглянемо m -каналну систему масового обслуговування (СМО) на інтервалі $0 \leq t < \infty$. Нехай $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n, \dots$ випадкові моменти нахождення заявок в СМО. Припустимо, що $\tau_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1$ – це незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу $F(x) = P(\tau_n < x), F(0+) = 0$. І нехай час обслуговування заявки одним каналом $\eta_n, n \geq 0$ також н. о. р. в. в., $G(x) = P(\eta_n < x), G(0+) = 0$. Тобто в загальноприйнятих позначеннях це СМО типу (GI/G/m) (див. [1; 3; 5]).

Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. Через $Q(t)$ позначимо довжину черги в момент часу t , а $\bar{Q}(t) = \sup_{1 \leq s \leq t} Q(t)$

Нехай

$$Q_k = Q(t_k - 0), \bar{Q}_n = \max_{1 \leq k \leq n} Q_k \tag{1}$$

тобто Q_k – це довжина черги в системі безпосередньо перед надходженням k -ї заявки, а \bar{Q}_n – максимальна довжина черги, яка спостерігалась в моменти $(t_k - 0), k = 1, 2, \dots, n$.

У [2, с. 248–249; 10–14] досліджувалась асимптотична поведінка величин $\bar{Q}(t)$ та \bar{Q}_n . При цьому основна увага приділялась випадку з лінійним нормуванням цих величин. Але, як виявилось, далеко не завжди при лінійному нормуванні $\bar{Q}(t)$ та \bar{Q}_n існує невідроджений граничний розподіл.

У [4] для дослідження асимптотики $\bar{Q}(t)$ запропоновано інший підхід, при якому використовувались нелінійні перетворення часу. Так наприклад для класичної СМО (M/M/m) (та деяких інших) в [4] отримано рівності вигляду:

$$\lim_{u \in N, u \rightarrow \infty} P(\bar{Q}(t^*) \geq u) = 1 - e^{-\frac{x}{a_T}}, x \geq 0, \tag{2}$$

де $t^* = \frac{x}{q(u)}$, $q(u)$ – ймовірність перевищення рівня u процесом $Q(t)$ на одному циклі регенерації, a_T – середня тривалість циклу регенерації.

У даній статті наводиться кілька асимптотичних рівностей типу (2) для екстремальних значень регенеруючих випадкових послідовностей. Аналогічна рівність буде також отримана для рекурентних та ергодичних ланцюгів Маркова. Далі ці результати будуть застосовані для дослідження максимальної довжини черги \bar{Q}_n . Окрім того, за допомогою імітаційного моделювання на персональному комп'ютері (ПК) ми спробуємо оцінити швидкість збіжності в граничних теоремах такого типу.

Екстремуми регенеруючих випадкових послідовностей. Допоміжні лемми

Означення 1. Під циклом будемо розуміти пару $L = (T, \xi(n))$, в якій T – дискретна в. в., $T \in \{1, 2, \dots\}$, а $(\xi(n), 0 \leq n < T)$ – випадкова послідовність із значеннями в R^1 . В. в. T та послідовність $(\xi(n))$ ($\xi(n)$) у загальному випадку між собою залежні. І нехай $L_i = \{T_i, \xi_i(n)\}$, $i \geq 1$ – нескінченна послідовність копій циклу L . Визначимо послідовність (X_n) формулою:

$$X_n = \xi_i(n - S_{i-1}), n \in [S_{i-1}, S_i] \text{ де } S_i = T_1 + \dots + T_i, S_0 = 0.$$

Будемо називати (X_n) регенеруючою випадковою послідовністю, точки S_i – моментами регенерації, а проміжок $[S_{i-1}, S_i)$ – i -тим періодом регенерації.

Наведене вище означення фактично співпадає з означенням регенеруючого випадкового процесу, коли час змінюється дискретно (див. [7], ч. II, гл.2).

Позначимо

$$Z_n = \max_{0 \leq j < n} X_j, Y_k = \max_{S_{k-1} \leq j < S_k} X_j. \quad (3)$$

Зрозуміло, що (Y_n) , $k \geq 1$, – це послідовність н. о. р. в. в. Будемо вважати, що

$$\begin{aligned} \forall u \in R^1 \quad q(u) = P(Y_k \geq u) > 0, \\ q(u) \downarrow 0 \text{ при } u \uparrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

Далі всюди $[z]$ – це ціла частина числа z .

Лема 1. Нехай (X_n) , $n \geq 0$ – регенеруюча випадкова послідовність, $a_T = ET_k < \infty$, $n^* = \left\lceil \frac{xa_T}{q(u)} \right\rceil$. Тоді для $x \geq 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(Z_{n^*} \geq u) = 1 - e^{-x}. \quad (5)$$

Доведення лемми 1 фактично повторює доведення теореми 1 із [4], де розглядається випадок регенеруючого процесу з неперервним часом.

Лема 2. Нехай $X(t)$, $t \geq 0$ – регенеруючий випадковий процес з моментами регенерації S_0, S_1, S_2, \dots . І нехай $(t_n = t_n(\omega))$, $n \geq 1$ – деяка зростаюча випадкова послідовність. Покладемо

$$(X_n = X(t_n)), n \geq 0, \quad \theta_k = \sum_{S_{k-1} \leq t_i < S_k} 1, \quad \tilde{L}_k = \{\theta_k, (X_i, S_{k-1} \leq t_i < S_k)\}, k \geq 1.$$

Якщо $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_k, \dots$ послідовність н. о. р. в. векторів, $a = E\theta_k$, $q(u) = P(\max_{S_{k-1} \leq t_j < S_k} X_j \geq u)$ задовольняє умову (4),

$$n^* = \left\lceil \frac{xa}{q(u)} \right\rceil, \text{ то виконується рівність (5).}$$

Лема 2 – є наслідком лемми 1, якщо помітити, що (X_n) регенеруюча випадкова послідовність з моментами регенерації $0, \theta_1, \theta_1 + \theta_2, \dots, \theta_1 + \dots + \theta_k, \dots$.

Далі для нас важливим буде випадок, коли послідовність (X_n) набуває лише цілі невід'ємні значення (стани X_n) і існують стаціонарні ймовірності

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(X_n = k) = p_k > 0, k \geq 0. \quad (6)$$

Позначимо через $\gamma_k(t)$ число попадань в стан k послідовності (X_n) при $n \in [0, t)$.

Лема 3. Нехай (X_n) , $n \geq 0$ – регенеруюча випадкова послідовність, $P(X_n \in \{0, 1, 2, \dots\}) = 1$, T_i – тривалість i -го періоду регенерації, $i \geq 1$. Якщо для деякого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ існує границя (6) і $E\gamma_k(T_1) = c_k < \infty$, то

$$a_T = ET_1 = \frac{c_k}{p_k}.$$

Лема 3 безпосередньо впливає із відомих результатів (див. Лему 2 та Зауваження 2 у [4]).

Гранична теорема для екстремальних значень ланцюга Маркова

Нехай (X_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ – ланцюг Маркова, $P(X_n \in \{0, 1, 2, \dots\}) = 1$, з матрицею перехідних ймовірностей $P = \|p_{ij}\|$. Будемо казати, що (X_n) задовольняє умову (А), якщо він є рекурентним та ергодичним, тобто для будь-

якого $k \geq 0$ існують стаціонарні ймовірності (6), причому $p_k = \frac{1}{a_k} > 0, k = 0, 1, 2, \dots$, де a_n – середній час повернення в стан k ([9 с. 384–385], [5 с. 75]). У [5] такі ланцюги називаються сильно ергодичними. Окрім того вважаємо, що $P(X_0 = 0) = 1, p_{00} = 0$. Позначимо через $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$ послідовні моменти попадання ланцюга (X_n) в стан 0. За зазначених нами умов ланцюг $(X_n), n = 0, 1, 2, \dots$ є регенеруючою послідовністю з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$. Максимальне значення ланцюга (Z_n) та ймовірність $q(u)$ визначимо рівностями (3), (4).

Лема 4. Нехай $(X_n), n > 0$, – ланцюг Маркова, який задовольняє умову (A), $P = \|p_{ij}\|$ – матриця перехідних ймовірностей ланцюга (X_n) . Тоді

$$q(u) = \sum_{k=1}^{u-1} p_{0,k} v_k + \tilde{p}_{0,u} \tag{7}$$

де $(v_k), k = \overline{1, u-1}$, задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} v_1 &= \tilde{p}_{1,u} + \sum_{j=1}^{u-1} v_j p_{1,j}, \\ &\dots \\ v_k &= \tilde{p}_{k,u} + \sum_{j=1}^{k-1} v_j p_{k,j}, 1 < k < u-1, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} v_{u-1} &= \tilde{p}_{u-1,u} + \sum_{j=1}^{u-1} v_j p_{u-1,j}, \\ \tilde{p}_{i,u} &= \sum_{j \geq u} p_{i,j}, i = 0, 1, 2, \dots, u-1 \end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. Введемо новий ланцюг Маркова $(\tilde{X}_n), n > 0$ наступним чином: (\tilde{X}_n) має стани $0, 1, \dots, u$ та ймовірності переходів $\tilde{p}_{i,j}$, де $\tilde{p}_{i,j} = p_{i,j}$ при $i, j = 0, 1, 2, \dots, u-1, (i, j) \neq (0, 0), \tilde{p}_{i,u}$ задаються рівністю (9) при $i = 0, 1, 2, \dots, u-1, \tilde{p}_{0,0} = \tilde{p}_{u,u} = 1$, тобто стани 0 та u для ланцюга (\tilde{X}_n) , поглинаючі.

Безпосередньо з означення впливає еквівалентність подій:

$$\{Y_1 \geq u\} \sim \{(X_n) \text{ на інтервалі } [0, S_1] \text{ досягає рівня } u\}.$$

Тому розписуючи за формулою повної ймовірності 1-й крок ланцюга (X_n) , отримаємо рівність (7). Причому величина v_k у рівності (7) – це ймовірність поглинання станом u ланцюга (\tilde{X}_n) , за умови, що він стартує із стану $k, k = 0, 1, 2, \dots, u-1$. Далі переходимо до ланцюга (\tilde{X}_n) при умові, що він стартує із стану k , і ще раз застосуємо формулу повної ймовірності. У результаті отримаємо систему лінійних рівнянь (8).

Теорема 1. Нехай ланцюг Маркова (X_n) задовольняє умову (A), стаціонарна ймовірність p_0 визначена у рівності (6), Z_n та $q(u)$ задаються рівностями (3), (4) та (7) – (9) відповідно $n^* = \left\lceil \frac{x}{p_0 q(u)} \right\rceil$. Тоді при $x \geq 0$.

$$\lim_{u \in N, u \rightarrow \infty} P(Z_{n^*} \geq u) = 1 - e^{-x}. \tag{10}$$

Доведення. Як було зазначено вище, $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$ – моменти регенерації ланцюга (X_n) . Слід також врахувати, що $\gamma_0(T_1) = \gamma_0(S_1) = 1$ м. н., а отже $c_0 = E\gamma_0(S_1) = 1$. Звідси за лемою 3 маємо $a_T = ET_1 = \frac{1}{p_0}$. Тому рівність (10) негайно впливає із лем 1,3,4.

Розглянемо один приклад ланцюга Маркова, який описує процес випадкового блукання і який тісно пов'язаний із процесами загибелі та розмноження. Нехай (X_n) має стани $0, 1, 2, \dots$, а матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

$$P = \|P_{i,j}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \mu_1 & 0 & \lambda_1 & \dots & \dots \\ 0 & \mu_2 & 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}, \text{ де } 1 > \lambda_i > 0, \lambda_i + \mu_i = 1, i \geq 1 \tag{11}$$

Покладемо

$$\theta_0 = 1, \theta_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, k = 1, 2, \dots, \alpha_0 = 1, \prod_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\lambda_i}, k = 1, 2, \dots$$

Припустимо, що

$$\sum_{k \geq 1} \theta_k < \infty. \tag{12}$$

Нехай

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \alpha_k \right)^{-1}, \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \right)^{-1} > 0. \quad (13)$$

Тоді із леми 4 та теореми 1 випливає, що для ланцюга Маркова (X_n) виконується рівність (10) з $q(u)$ та p_0 , які визначені рівностями (13).

Максимальна довжина черги в системах масового обслуговування

Так само, як і в [4], ми розглянемо кілька прикладів відомих СМО. На відміну від [4], тут буде досліджуватися асимптотична поведінка максимальної довжини черги \bar{Q}_n . Наша мета – отримати асимптотичне співвідношення вигляду:

$$\lim_{u \in N, u \rightarrow \infty} P(\bar{Q}_n^* \geq u) = 1 - e^{-x}. \quad (14)$$

де $n^* = \left\lceil \frac{x}{p_0 q(u)} \right\rceil$, p_0 – стаціонарна ймовірність попадання послідовності Q_n в стан 0, а $q(u)$ – ймовірність перевищення рівня u послідовністю Q_n на інтервалі між двома послідовними попаданнями в 0.

Приклад 1. СМО (М/М/м), $1 \leq m < \infty$.

Якщо в СМО загального типу (G1/G/m) виберемо $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x > 0$, то ми прийдемо до класичної системи (М/М/м). Добре відомо ([1], [3], [5]), що довжина черги $Q(t)$ для такої системи буде процесом загибелі та розмноження з параметрами

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mu_0 = 0, \quad \mu_k = \begin{cases} k * \mu, & 1 \leq k \leq m \\ m * \mu, & k > m \end{cases}.$$

Нехай Q_n задається рівністю (1). Тоді (Q_n) – це вкладений ланцюг Маркова в процес $Q(t)$. На параметри λ та μ накладемо умову

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1 \quad (15)$$

При виконанні умови (15) існують [1; 3; 5] стаціонарні ймовірності, для яких при $k = 0, 1, 2, \dots$ маємо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Q(t) = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k) = p_k > 0, \\ p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k m^k}{k!} p_0, & 1 \leq k \leq m, \\ \frac{\rho^k m^m}{m!} p_0, & k > m, \end{cases} \\ p_0 = \left(\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k m^k}{k!} + \frac{\rho^m m^m}{m! \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)} \right)^{-1} \quad (16)$$

Теорема 2. Нехай для СМО (М/М/м) виконується умова (15), значення p_0 задається рівністю (16),

$$n^* = \left\lceil \frac{x m!}{p_0 m^m (1 - \rho) \rho^u} \right\rceil. \quad (17)$$

Тоді при $x \geq 0$ має місце рівність (14).

Доведення. Без обмежень загальності можна вважати, що в момент $S_0 = t_0 = 0$ надійшла заявка в порожню систему, $S_1 = t_{i_1}, S_2 = t_{i_2}, \dots$. Тут $S_k = t_{i_k}$ – це перший момент надходження заявки в порожню систему після k -го періоду зайнятості. Тоді (S_k) , $k \geq 0$, – моменти регенерації процесу $Q(t)$, а $t_0 = 0, i_1, i_2, \dots$ задають моменти регенерації ланцюга (Q_n) .

Ланцюг Маркова (Q_n) задовольняє умову (А) і можна скористатися теоремою 1. Залишається знайти величину $q(u)$ – ймовірність перевищення рівня u на одному циклі регенерації. Задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь типу (7). Але простіше застосувати один відомий результат. Так у [4] для процесу $Q(t)$ отримана рівність:

$$\tilde{q}(u) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq S_1} Q(s) \geq u\right) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{k!}{(\rho m)^k} + \frac{m! \left(\left(\frac{1}{\rho}\right)^u - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{m+1}\right)}{m^m \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)}\right)^{-1} \text{ де } u > m$$

Тоді при $u \rightarrow \infty$ маємо

$$\tilde{q}(u) \sim \frac{m^m (1-\rho) \rho^{u-1}}{m!}$$

Залишається помітити, що

$$\sup_{0 \leq s < S_1} Q(s) - 1 = \max_{0 \leq t_j < S_1} Q_j \text{ м.н.} \tag{18}$$

Тобто $q(u) = \tilde{q}(u+1) \sim \frac{m^m (1-\rho) \rho^u}{m!}$

Звідси та з теореми 1 одержуємо співвідношення (14), де n^* задається рівністю (17).

Зауваження 2. Якщо у прикладі 1 $m = \infty$, тобто маємо (необмежене число каналів обслуговування [4]), то для

будь-яких $\lambda > 0, \mu > 0$ і $\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{\mu}$ виконується рівність

$$q(u) = \tilde{q}(u+1) = \left(\sum_{k=0}^u \frac{k!}{k! \tilde{\rho}^k}\right)^{-1}, \quad p_0 = e^{-\tilde{\rho}}$$

А отже рівність (14) має місце при

$$n^* = \left\lceil x e^{\tilde{\rho}} \sum_{k=0}^u \frac{k!}{k! \tilde{\rho}^k} \right\rceil$$

Приклад 2. СМО (M/G/1).

Це одноканальна СМО, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ , а час обслуговування η має довільний розподіл $G(x)$. Припустимо, що $E\eta = b < \infty$ і

$$\rho = \lambda b < 1 \tag{19}$$

Позначимо через (t'_n) послідовність моментів часу, коли канал закінчує обслуговування чергової заявки, а $Q'_n = Q(t'_n + 0), n \geq 1$.

Відомо [1; 5], що (Q'_n) вкладений ланцюг Маркова для процесу $Q(t)$. За умови (19) існують стаціонарні ймовірності станів [1; 5 с. 471– 472]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Q(t) = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q'_n = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{20}$$

і

$$p_0 = 1 - \rho$$

Припустимо, що в момент $S_0 = 0$ система порожня, а S_0, S_1, S_2, \dots – це послідовні моменти звільнення системи після відповідного періоду зайнятості. Зрозуміло, що $Q(t)$ буде регенеруючим процесом з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$

Покладемо $d_k = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dG(x)$, $D = \sum_{i=k+1}^{\infty} d_i$, $\tilde{q}(u) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq S_1} Q(s) \geq u\right)$.

У [4] встановлено, що $\tilde{q}(u) = q_1$, де (q_k) – розв'язок наступної системи лінійних рівнянь при $r = u$

$$\begin{aligned} q_{r-1} &= D_0 + d_0 q_{r-2}, \\ q_{r-2} &= D_1 + d_0 q_{r-3} - d_1 q_{r-2}, \\ &\dots \\ q_1 &= D_{r-2} + \sum_{i=1}^{r-2} d_i q_i. \end{aligned} \tag{21}$$

Якщо (Q_n) визначається рівністю (1), то в даному прикладі також виконується рівність (18), а отже

$$q(u) = P\left(\max_{0 \leq t_j < S_1} Q_j \geq u\right) = \tilde{q}(u+1) \tag{22}$$

Із означення послідовностей (t_n) та (t'_n) випливає, що на одному циклі регенерації число заявок, які надійшли в систему, співпадає з числом виконаних заявок, тобто

$$\chi'_n = \sum_{S_{k-1} \leq t'_n < S_k} 1 = \sum_{S_{k-1} \leq t_n < S_k} 1 = \chi_k \text{ м.н.}$$

(Q'_n) – ланцюг Маркова, а S_0, S_1, S_2, \dots – це послідовні моменти попадання його в стан 0. Тому, [9], враховуючи (20), маємо

$$p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{E\chi'_k} = \frac{1}{E\chi_k} \quad 23$$

Зрозуміло, що послідовність $(0, \chi_1, \chi_1 + \chi_2, \dots)$ задає моменти регенерації для (Q_n) . Тому із лем 1, 3 та рівностей (20)–(23) випливає наступне твердження.

Теорема 3. Нехай для СМО (M/G/1) виконується умова (19), $q(u) = q_1$, а (q_k) задаються рівностями (21) при $r = u + 1$, $n^* = \left\lceil \frac{x}{(1-\rho)q(u)} \right\rceil$. Тоді при $x \geq 0$ має місце рівність (14).

Приклад 3. СМО(G/M/1).

Це одноканальна СМО, на яку поступає рекурентний потік заявок (t_n) , $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $F(x) = P(\tau_k < x)$ – довільна функція розподілу, а $G(x) = P(\eta_k < x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$. Нехай Q_n визначається рівністю (1). Тоді це буде вкладений ланцюг Маркова в процес $Q(t)$.

Покладемо

$$d_k^* = \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} dF(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* x^k, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Припустимо, що

$$E\tau_k = a_\tau < \infty \quad \text{і} \quad \rho = \frac{1}{a_\tau \mu} < 1. \quad (24)$$

Відомо [5, с. 477-478; 8], що існують стаціонарні ймовірності станів для ланцюга (Q_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k) = p_k = (1 - \beta_0) \beta_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де β_0 – єдиний розв'язок рівняння

$$h(\beta_0) = \beta_0, \quad (0 < \beta_0 < 1) \quad (25)$$

Ймовірність $q(u)$ досягнення рівня u на одному циклі регенерації визначається із системи лінійних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} q_1 &= d_0^* q_2, \\ q_2 &= d_0^* q_3 + d_1^* q_2, \\ &\dots \\ q_k &= d_0^* q_{k+1} + d_1^* q_k + \dots + d_{k-1}^* q_2, \\ q_{r-1} &= d_0^* + d_1^* q_{r-1} + \dots + d_{r-2}^* q_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Теорема 4. Нехай для СМО (G/M/1) виконується умова (24), β_0 визначається рівністю (25), $q(u) = q_1$, а (q_k) задаються рівностями (26) при $r = u + 1$, $n^* = \left\lceil \frac{x}{(1-\beta_0)q(u)} \right\rceil$. Тоді при $x \geq 0$ має місце рівність (14).

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню попередніх тверджень і базується на результатах роботи [4]. Тому ми його опускаємо.

Аналіз швидкості збіжності за допомогою методу Монте-Карло

Задача аналітичної оцінки швидкості збіжності у рівностях типу (2), (14) здається досить важкою. У даному розділі робиться спроба знаходження такої оцінки методом Монте-Карло (метод імітаційного моделювання).

Розглянемо СМО типу (M/G/1). І нехай $\Delta = \Delta(u) = P^*(u) - 1 + e^{-\frac{x}{a_T}}$, $P^*(u) = P(\bar{Q}(t^*) \geq u)$, де a_T, t^* визначені в рівності (2).

Будемо оцінювати величину Δ для двох важливих випадків:

- η має експоненційний розподіл, тобто $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$;
- $\eta = D = \text{const}$ м. н., тобто $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq D, \\ 1, & x > D. \end{cases}$

При цьому будемо використовувати так зване швидке імітаційне моделювання, яке має ряд переваг перед звичайним методом Монте-Карло. Подібні методи імітаційного моделювання використовувались раніше І. М. Коваленком та його учнями для розрахунку характеристик високонадійних систем (див., наприклад [6]).

Алгоритм швидкого імітаційного моделювання СМО (М/Г/1)

Аналогічно звичайному імітаційному моделюванню, будемо проводити N експериментів. Під час кожного будемо рахувати деяку відносну ймовірність P_j ($P_j = \hat{P}^*(u)$ – оцінка $P^*(u)$ в j -тому експерименту). Відповіддю буде середнє по усіх експериментах. Розглянемо j -ту ітерацію.

Нехай в. в. τ – час до надходження чергової заявки (має показниковий розподіл з параметром λ), а η – час обслуговування. Зрозуміло, що систему має сенс розглядати в моменти надходження заявок чи закінчення обслуговування заявок. В інші моменти часу, грубо кажучи, нічого не відбувається.

Ми будемо рухатись по точкам (t_k) , де $t_k - k$ -тий момент закінчення обслуговування або надходження нової заявки. І нехай $Q_k = Q(t_n + 0)$ – черга в момент $t_k + 0$. В момент часу $t_0 = 0$ покладемо $P_j = 1, Q'_0 = 0$ (черга відсутня).

Розглянемо момент часу t_k у нашій послідовності подій. Якщо $Q'_0 = 0$, то покладемо $P_j = P_j P(\tau < t^* - t_k)$ і моделюємо в. в. $\tilde{\tau} = (\tau | \tau < t^* - t_k)$ та η . Якщо $\tilde{\tau} + \eta \geq t^* - t_k$ (час вийшов), то закінчуємо ітерацію. Кінцеве $P_j = P_j * P(v_k \geq u - 1 - Q'_k)$, де v_k – пуассонівська в. в. з параметром $\lambda(t^* - t_k - \tilde{\tau})$. Якщо $\tilde{\tau} + \eta < t^* - t_k$, то моделюємо m_k – кількість заявок, яка надійде за час обслуговування η . Нехай $m_k \geq u - 1 - Q'_k$. Тоді закінчуємо ітерацію, шукана ймовірність – P_j . Інакше збільшуємо чергу $Q'_k = Q'_k + m_k$ і переходимо до нової точки $t_{k+1} = t_k + \eta + \tilde{\tau}$.

Якщо ж $Q'_k > 0$, то моделюємо тільки η і перевіряємо умову $\eta \geq t^* - t_k$. Якщо виконується, то покладемо $P_j = P_j * P(v_k \geq u - Q'_k)$ де v_k – пуассонівська в. в. з параметром $\lambda(t^* - t_k - \tilde{\tau})$, і закінчуємо ітерацію. У противному випадку ($\eta < t^* - t_k$) моделюємо як вказано вище. Якщо $m_k \geq u - Q'_k$, то закінчуємо ітерацію і шукана ймовірність – P_j . Інакше – збільшуємо чергу $Q'_k = Q'_k + m_k - 1$ і переходимо до нової точки $t_k = t_k + \eta$.

Числові результати

В таблицях подано результати обчислень на ПК, які характеризують швидкість збіжності у формулі (2).

1) СМО (М/М/1): $G(x) = 1 - e^{-\mu x}, x > 0; \lambda = 1, \mu = 2, N = 4 * 10^5$.

Таблиця 1

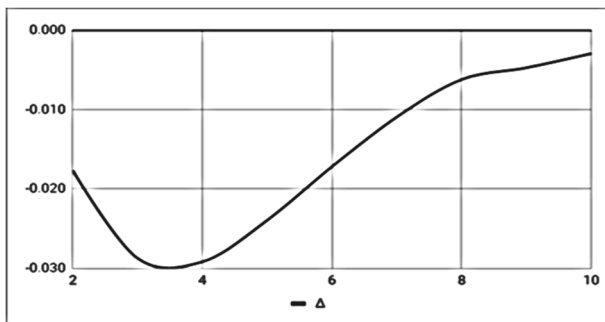
| u | t^* | Δ | $q(u)$ |
|-----|-----------|----------|---------|
| 2 | 0.30780 | -0.01765 | 0.33333 |
| 3 | 0.71810 | -0.02872 | 0.14286 |
| 4 | 1.53880 | -0.02916 | 0.06667 |
| 5 | 3.18020 | -0.02393 | 0.03226 |
| 6 | 6.46300 | -0.01717 | 0.01587 |
| 7 | 13.02850 | -0.01091 | 0.00787 |
| 8 | 26.15960 | -0.00619 | 0.00392 |
| 9 | 52.42170 | -0.00470 | 0.00196 |
| 10 | 104.94610 | -0.00291 | 0.00098 |

а)

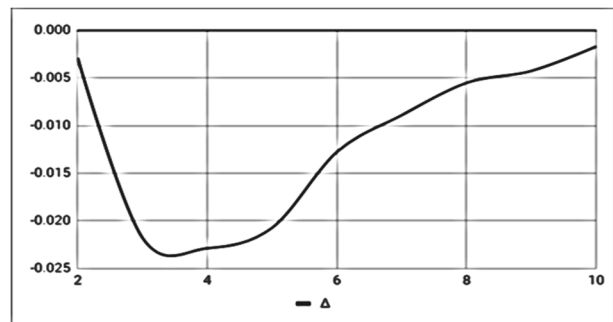
| u | t^* | Δ | $q(u)$ |
|-----|-----------|----------|---------|
| 2 | 0.63216 | -0.00289 | 0.33333 |
| 3 | 1.47505 | -0.02179 | 0.14286 |
| 4 | 3.16082 | -0.02288 | 0.06667 |
| 5 | 6.53235 | -0.02073 | 0.03226 |
| 6 | 13.27542 | -0.01276 | 0.01587 |
| 7 | 26.76157 | -0.00890 | 0.00787 |
| 8 | 53.73386 | -0.00551 | 0.00392 |
| 9 | 107.67845 | -0.00425 | 0.00196 |
| 10 | 215.56761 | -0.00169 | 0.00098 |

б)

Основні характеристики при зміні u для а) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.05$ та б) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.1$ у випадку М/М/1



а)



б)

Рис. 1. Графіки залежності Δ від u для а) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.05$

та б) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.1$ у випадку М/М/1 $\min_{u \geq 2} (\Delta(u)/uq(u)) = -0.29763$

2) СМО (М/Д/1): $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq D, \\ 1, & x > D. \end{cases} \lambda = 1, D = 0.5, N = 4 * 10^5;$

Таблиця 2

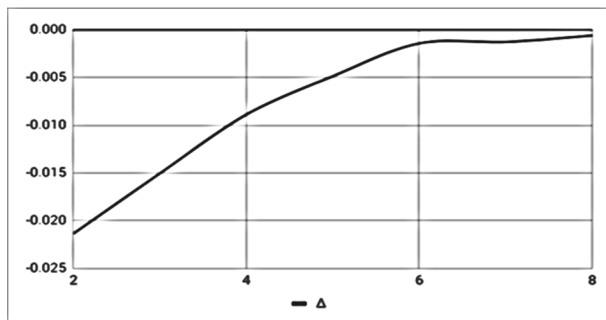
| u | t^* | Δ | $q(u)$ |
|-----|-----------|----------|---------|
| 2 | 0.26072 | -0.02135 | 0.39347 |
| 3 | 0.79238 | -0.01504 | 0.12947 |
| 4 | 2.67338 | -0.00887 | 0.03837 |
| 5 | 9.36316 | -0.00485 | 0.01096 |
| 6 | 32.97978 | -0.00141 | 0.00311 |
| 7 | 116.00965 | -0.00126 | 0.00088 |
| 8 | 407.67056 | -0.00057 | 0.00025 |

а)

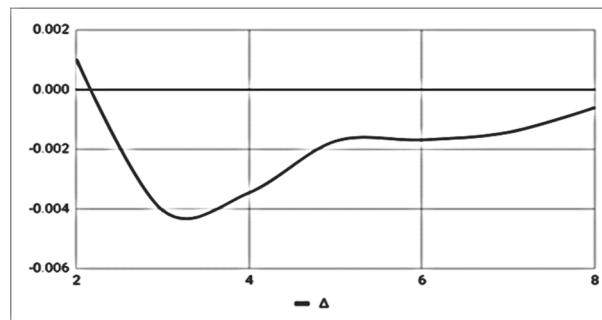
| u | t^* | Δ | $q(u)$ |
|-----|-----------|----------|---------|
| 2 | 0.53555 | 0.00102 | 0.39347 |
| 3 | 1.62761 | -0.00406 | 0.12947 |
| 4 | 5.49134 | -0.00346 | 0.03837 |
| 5 | 19.23269 | -0.00173 | 0.01096 |
| 6 | 67.74310 | -0.00169 | 0.00311 |
| 7 | 238.29307 | -0.00144 | 0.00088 |
| 8 | 837.38782 | -0.00060 | 0.00025 |

б)

Основні характеристики при зміні u для а) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.05$ та б) $P = 1 - e^{-x/a_T} = 0.1$ у випадку M/D/1



а)



б)

Рис. 2. Графіки залежності Δ від u для а) $P = 1 - e^{-x/a_T}$ та б) $P = 1 - e^{-x/a_T}$ у випадку M/D/1 $\min_{u \geq 2} (\Delta(u)/uq(u)) = -0.29991$

Зауваження 3.(i) У всіх наших розрахунках (див. табл. вище) виконувалась умова $\Delta(u) \leq 0$, починаючи з деякого $u \geq U_0$ тобто

$$P(\bar{Q}(t^*) \geq u) \leq 1 - e^{-\frac{x}{a_T}}, \quad u \geq U_0. \quad (27)$$

Природне буде припущення, що нерівність (28) в практично важливих випадках завжди виконується для СМО (M/G/1), коли функція розподілу $G(x)$ має досить легкий хвіст.

(ii) Із відомих результатів [11] випливає, що

$$P(\bar{Q}(t^*) \geq u) \approx 1 - (1 - q(u))^{\frac{t^*}{a_T}}. \quad (28)$$

Елементарна оцінка $(1 - \frac{1}{y})^y \leq e^{-1}$, $y \geq 2$, показує, що

$$1 - (1 - q(u))^{\frac{t^*}{a_T}} \geq 1 - e^{-\frac{x}{a_T}}, \quad (29)$$

Тут $t^* = \frac{x}{q(u)}$.

Для СМО (M/G/1) нерівності (27), (29) дозволяють зробити висновок: оцінка (28) дає гірше наближення ніж співвідношення (2).

(iii) Деякі інтуїтивні міркування дозволяють висунути гіпотезу, що $\Delta(u) \leq kuq(u)$, де k абсолютна константа.

Імітаційне моделювання, як нам здається, не суперечить цій гіпотезі. Максимальне значення k у проведених нами розрахунках не перевищувало 0.3.

Зрозуміло, що проведені обчислення на стандартному персональному комп'ютері носять попередній характер. Для остаточних висновків, звичайно, слід провести значно більш широкі розрахунки і на більш потужному комп'ютері.

Висновок. Для регенеруючих випадкових послідовностей знайдена асимптотика екстремальних значень. Як наслідок встановлюється ряд граничних теорем для максимальної довжини черги в системах масового обслуговування.

Список використаних джерел

1. Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем, Вища школа, Киев, 1987.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. Наука, Москва, 1984. – 304 с.
3. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания, Наука, Москва, 1966.
4. Закусило О.К., Мацак І.К. Про екстремальні значення деяких регенеруючих процесів. Теорія Ймовірн. Мат.Статист., 2017, № 97, с. 58–71.
5. Карлин С. Основы теории случайных процессов, Мир, Москва, 1971. – 536 с.
6. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. – М.: Радио и связь, 1988. – 176 с.
7. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления, Советское радио, Москва, 1967. – 300 с.
8. Такач Л. Некоторые вероятностные задачи в телефонии, Математика, период.сб.первод. 4(1960), – № 6, – с. 93–144.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей, т. 1 – Мир, Москва, 1967. – 499 с.

10. Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes, J.Appl. Prob., v. 7,1970, – p. 99–113.
11. Asmussen S. Extreme values theory for queues via cycle maxima, Extremes, v. 1, 1998, – p. 137–168.
12. Cohen J.W. Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, v.4, 1968, – p. 83–98.
13. Iglehart D.L. Extreme values in the GI/G/1 queue, Ann. Math. Statist., v. 43, 1972, – p. 627–635.
14. Serfozo R.F. Extreme values of birth and death processes and queues, Stochastic processes and their applications, 27, 1988, – p. 291–306.

Надійшла до редколегії 29.05.18

И. Мацак., д-р физ.-мат. наук, А. Скуржанский, студ.
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изучается асимптотика экстремальных значений регенерирующих случайных последовательностей. Как следствие получены предельные теоремы для максимальной длины очереди в системах массового обслуживания. С помощью имитационного моделирования находятся оценки скорости сходимости.

I. Matsak, Dr. of Phys. Math. O.Sci., A. Skurzhanyskiy, a student
 Taras Shevchenko National University of Kyiv

LIMIT THEOREMS FOR EXTREME VALUES OF QUEUE LENGTH IN THE THEORY OF QUEUES

Asymptotic of extreme values of regenerating random sequences is considered. As a result, limit theorems are obtained for the maximum queue length in queuing systems. Estimates of the rate of convergence are found, using simulation modeling.

УДК 629.7.076.6

Б. Кіфоренко, д.-р. фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко, канд. фіз.-мат. наук,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ,
 І. Василь'єв, канд. фіз.-мат. наук,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
 e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net, e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДОВ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБИТАМИ ЗІ СТАЛОЮ МАЛОЮ ТЯГОЮ

Розв'язано задачу про оптимальний перехід міжорбітального транспортного апарату (МТА) з рушійною системою малої сталої тяги між близькими еліптичними орбітами протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. Метою оптимізації є отримання максимуму маси корисного вантажу МТА при заданій його початковій масі. На прикладах конкретних маневрів проведено оцінку впливу величини сталої тяги на значення маси корисного вантажу у порівнянні з випадком використання ідеально керованої рушійної системи.

ВСТУП. Електроракетні рушійні системи (ЕРС) відносяться до класу рушійних систем малої тяги і мають важливі переваги перед традиційними рідинними та твердопаливними ракетними двигунами. Висока швидкість витікання реактивного струменя забезпечує малу витрату робочої речовини на одиницю тяги, а використання електростатичної та магнітної взаємодії між конструкцією двигуна та реактивним струменем – кращу керованість та здатність неперервно функціонувати протягом тривалого часу. З огляду на вказане ці двигуни вважаються перспективними маршовими рушіями для МТА, призначених для доставки великих космічних конструкцій з низької монтажною орбіти на віддалені орбіти в навколопланетному просторі та міжпланетні орбіти, хоча і при значному збільшенні тривалості міжорбітального переходу.

Найбільш суттєві результати в розробці методів розв'язання проблеми сумісної оптимізації параметрів двигуна, керування рухом та перехідних траєкторій в процесі розв'язання єдиної варіаційної задачі отримані при використанні математичної моделі ідеально керованої ЕРС. Реальні ж двигуни мають обмежений діапазон зміни величин тяги та швидкості ракетного струменя. При цьому нелінійність рівнянь руху центру мас МТА суттєво ускладнює розв'язання відповідної двоточкової крайової задачі [2, 7]. У цій статті пропонується алгоритм обчислення розв'язку вказаної задачі на ПЕОМ для моделі ЕРС: постійної за величиною тяги. З використанням розробленого алгоритму досліджено вплив максимальної тяги двигуна на величину корисного вантажу при виконанні елементарних маневрів МТА в центральному гравітаційному полі за час одного оберту навколо центру тяжіння.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Рушійна система МТА складається з двигуна, що генерує реактивну тягу P , та джерела енергії для живлення двигуна. Модель ідеально керованої рушійної системи базується на відсутності обмежень на величину тяги двигуна та на припущенні пропорційності мас її складових максимальній потужності джерела N_0

$$M_v = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \quad (1)$$

де M_v – маса джерела енергії, M_γ – маса двигуна, а α та γ – їх питомі маси [1]. При цьому використання рівняння зміни маси МТА у формі

$$\dot{M} = -\frac{M^2 \vec{W}^2}{2N_\Gamma} \quad (2)$$

дозволяє проблему максимізації маси корисного вантажу МТА, що виконує довільний маневр, розділити на дві незалежні задачі – масову та траєкторну. У рівнянні (2) \vec{W} – вектор реактивного прискорення, а N_Γ – поточне значення потужності, підведеної до двигуна.

Траєкторна задача полягає у визначенні програми реактивного прискорення \vec{W} , яка забезпечує перехід з початкового положення в кінцеве з мінімальним значенням функціоналу

$$J = (1 + \varepsilon) \int_0^T \bar{W}^2 dt,$$

де T – час виконання маневру, а $\varepsilon = \gamma/\alpha$.

Масова задача полягає у визначенні оптимальних мас складових МТА та має аналітичний розв'язок

$$M_\pi = M_0 (\sqrt{\Phi} - 1)^2, \quad M_\gamma = \frac{M_0 \varepsilon (\sqrt{\Phi} - \Phi)}{1 + \varepsilon},$$

$$M_v = \frac{M_0 (\sqrt{\Phi} - \Phi)}{1 + \varepsilon}, \quad M_F = M_0 \sqrt{\Phi}, \quad \Phi = \frac{\alpha r^{*2}}{2T^{*3}} J,$$

де M_π – маса корисного вантажу, M_0 – початкова маса МТА, M_F – маса витраченої за час виконання маневру робочої речовини, r^* – характерний лінійний розмір, T^* – характерний час, який дорівнює періоду обертання по круговій орбіті радіуса r^* , розділеному на 2π .

Проте модель ідеально керованої рушійної системи не дозволяє враховувати особливості реальних ЕРД, наприклад, сталість по модулю (для двигунів сталої тяги), або обмеженість тяги (для будь-якого реального двигуна).

В даній статті дослідимо задачу максимізації маси корисного вантажу МТА з рушійною системою сталої (за модулем) тяги. В цьому випадку керування рухом МТА відбувається за рахунок зміни напрямку тяги та вмикання і вимикання двигуна. Отже рівняння зміни маси (2) запишемо у формі

$$\dot{M} = -\frac{P_c^2 \delta}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0], \quad (3)$$

де P_c – значення сталої тяги, δ – керуюча функція, яка дорівнює 1 при увімкненому (активна дуга перехідної траєкторії) та 0 при вимкненому двигуні (пасивна дуга перехідної траєкторії). У подальшому всі співвідношення записані в безрозмірній формі.

До наведених вище характерних величин додаються початкова маса МТА M_0 , максимальна потужність джерела енергії N_0 та P^* – гравітаційна сила, що діє на матеріальну точку масою M_0 на відстані r^* від гравітаційного центру. При такому виборі характерних величин співвідношення (3) у безрозмірній формі матимуть вигляд

$$\frac{dm}{dt} = -\zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{P_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1]. \quad (4)$$

Тут $\zeta = T^* K^2 \alpha (r^*)^{-4}$, K – гравітаційна стала планети.

Починаючи з формули (4), безрозмірні значення мас, тяги та потужності позначаються відповідними малими літерами.

Моделювати рух центру мас МТА будемо за допомогою рівнянь руху в оскулюючих змінних з наступним набором орбітальних параметрів: $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ – натуральний логарифм кутового моменту (тут a – велика піввісь), e – ексцентриситет, ω – кутова відстань перицентра до висхідного вузла, I – кут нахилу площини орбіти, Ω – довгота висхідного вузла, E – ексцентрична аномалія. У цьому випадку вказані безрозмірні рівняння руху мають вигляд [3]

$$\frac{dx_j}{dt} = \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, \quad (5)$$

$$\frac{dE}{dt} = F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3},$$

де $\bar{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, W_k , $k = \overline{1, 3}$, – проєкції вектора реактивного прискорення на радіальний, трансверсальний та нормальний до площини орбіти напрямки, а коефіцієнти F_{jk} визначаються за формулами

$$F_{11} = 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E};$$

$$F_{23} = 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)} \sin E;$$

$$F_{33} = -ctg I \left(\frac{\sin \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E \right); \quad (6)$$

$$F_{41} = F_{42} = 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33};$$

$$F_{60} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta) (1 - e \cos E)}; \quad F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad F_{62} = -\frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)} \sin E;$$

$$F_{63} = 0.$$

Записані у формі (5) рівняння руху не дають змогу врахувати сталість модуля вектора тяги. Для подолання цієї незручності введемо напрямні косинуси c_k , $k = \overline{1,3}$, та виразимо складові вектора реактивного прискорення через поточну масу МТА та відповідні проекції вектора тяги

$$W_k = p_c \delta c_k / m, \quad k = \overline{1,3}. \quad (7)$$

За властивістю напрямних косинусів на величини c_k , $k = \overline{1,3}$, накладено обмеження

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \quad (8)$$

Отже, співвідношення (4), (5) та (7) дозволяють записати математичну постановку задачі оптимального керування про перехід МТА з заданої початкової орбіти на задану кінцеву за фіксований час T з максимальною масою корисного вантажу m_π . Позначивши через \bar{x}_0 та \bar{x}_1 орбітальні параметри початкової та кінцевої орбіти, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\zeta \frac{1}{m} \frac{p_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(0) = m_0, \quad m_\pi = m(T) - m_v(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{1}{m} \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p_c \delta c_k, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \frac{1}{m} \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p_c \delta c_k, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, \quad E(0) = E_0, \\ \sum_{k=1}^3 c_k^2 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Відповідно до вибору характерних величин маємо $m(0) = m_0 = 1$. Задача (9) являє собою нелінійну задачу оптимального керування, яка полягає у визначенні законів зміни у часі напрямних косинусів c_k , $k = \overline{1,3}$, та поточної потужності двигуна n_Γ , функції δ , що визначає розподіл активних та пасивних дуг вздовж перехідної траєкторії, та маси джерела енергії m_v , які забезпечують максимум маси корисного вантажу. В [6] описано метод, який дозволяє будувати оптимальні траєкторії переходів між віддаленими орбітами протягом багатьох обертів навколо гравітаційного центру для МТА з ідеально керованою рушійною системою, який може бути розповсюджений на випадок оптимізації перельотів МТА з рушійною системою сталої тяги. Цей метод базується на розв'язку задачі про оптимальний перехід між близькими орбітами протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. Тому у даній статті знайдено розв'язок оптимізаційної задачі про такий перехід для МТА з рушійною системою сталої тяги, який слугуватиме базою для розв'язування задач про переходи між довільними орбітами, а також може мати і цілком самостійне значення, наприклад, для задач корекції орбіт.

Для близьких орбіт можемо записати

$$\bar{x}(T) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}$$

де $\bar{\Delta} = [\Delta_\vartheta, \Delta_e, \Delta_\omega, \Delta_J, \Delta_\Omega]$ – вектор малих приростів відповідних орбітальних параметрів. Як і в [4 – 6] розкладемо в ряд праві частини рівнянь руху зі співвідношень (8) в околі початкової орбіти. Приймаючи до уваги малість величин $\bar{\Delta}$ та p_c (ЕРД – двигуни малої тяги), відкинемо члени другого і вище порядків малості. Після переходу від незалежної змінної t до незалежної змінної E отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m} \frac{p_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - m_v(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p_c \delta c_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ \sum_{k=1}^3 c_k^2 &= 1, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (10)$$

де $\hat{F}_E = 1/F_{60}(E, \bar{x}_0)$, $F_E = \exp(J_0) \hat{F}_E$.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ. Для знаходження оптимальних керувань задачі (10) використаємо принцип максимуму Понтрягіна. Побудуємо гамільтоніан

$$H = -\psi_m \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{p_c^2 \delta}{m} + \frac{p_c F_E \delta}{m} [\psi_1 F_{12} c_2 + \psi_2 (F_{21} c_1 + F_{22} c_2) + \psi_3 (F_{31} c_1 + F_{32} c_2 + F_{33} c_3) + \psi_4 F_{43} c_3 + \psi_5 F_{53} c_3], \quad (11)$$

де ψ_m та ψ_j , $j = \overline{1,5}$, система спряжених функцій, які визначаються з системи рівнянь

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial m}, \quad \frac{d\psi_j}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Дослідивши функцію H (11) на максимум з врахуванням обмеження (8) за допомогою метода множників Лагранжа, отримаємо

$$n_{\Gamma} = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, k = \overline{1, 3}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & B \leq 0, \\ 1, & B > 0, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$A_1 = \Psi_2 F_{21} + \Psi_3 F_{31}, \quad A_2 = \Psi_1 F_{12} + \Psi_2 F_{22} + \Psi_3 F_{32}, \quad A_3 = \Psi_3 F_{33} + \Psi_4 F_{43} + \Psi_5 F_{53}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad (14)$$

$$B = -\Psi_m \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} \frac{p_c^2}{2} + \frac{p_c F_E}{m} A.$$

З математичної постановки задачі (10) випливає, що гамільтоніан (11) не залежить від компонентів фазового вектора x_j , тому згідно з другим рівнянням в (12) спряжені функції ψ_j будуть сталими, які позначимо

$$\psi_j = \lambda_j. \quad (15)$$

Функція ψ_m у відповідності до співвідношень (10)–(12), визначається з рівняння

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p_c F_E}{m^2} A \delta, \quad (16)$$

яке для доповнене однозначної розв'язності потрібно доповнити початковою, або кінцевою умовою. Таку кінцеву умову знайдемо з умов трансверсальності, завдяки тому що маса m в кінцевій точці не задана, а знаходиться з умови максимуму маси корисного вантажу. Ця умова має вигляд

$$\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1. \quad (17)$$

Формули (13) – (16) дозволяють звести задачу оптимального керування (10) до крайової задачі з параметром m_v вигляду

$$\frac{dm}{dE} = -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} \frac{p_c^2 \delta}{2}, \quad m(E_0) = 1, \quad (18)$$

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p_c \delta \frac{A_k}{A}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta},$$

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p_c F_E}{m^2} A \delta, \quad \psi_m(E_0 + 2\pi) = 1,$$

Розв'язавши задачу (18) чисельно методом стрільби при фіксованому значенні параметра m_v , знаходимо невідомі сталі λ_j , $j = \overline{1, 5}$, та $\psi_m(E_0)$ і відповідне значення маси корисного вантажу $m_{\pi} = m(E_0 + 2\pi) - (1 + \epsilon)m_v$, тобто отримаємо значення маси корисного вантажу, як функцію $m_{\pi} = m_{\pi}(m_v)$. Оптимальне значення безрозмірної маси джерела енергії m_v знаходимо з умови максимуму функції $m_{\pi} = m_{\pi}(m_v)$ чисельним методом золотого перерізу. Початкові наближення λ_j^0 , $j = \overline{1, 5}$ $\psi_m^0(E_0)$ приймаємо рівними відповідним величинам, отриманим із розв'язку задачі з ідеально керованим двигуном.

ЗАДАЧА З ІДЕАЛЬНО КЕРОВАНИМ ДВИГУНОМ. При оптимізації перельотів МТА з моделлю ідеально керованого двигуна, як правило, за керування вибирають компоненти вектора реактивного прискорення. Зручність такого підходу описана вище. Однак нам для знаходження початкових наближень для випадку двигуна сталої тяги необхідно мати розв'язок задачі з ідеально керованим двигуном, де керуваннями будуть величина тяги p та напрямні косинуси c_k . У цьому випадку співвідношення (10) матимуть вигляд

$$\frac{dm}{dE} = -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} \frac{p^2}{2n_{\Gamma}}, \quad n_{\Gamma} \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_{\pi} = m(E_0 + 2\pi) - m_v(1 + \epsilon) \rightarrow \max,$$

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p c_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Згідно з принципом максимуму складаємо гамільтоніан

$$H = -\Psi_m \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_{\Gamma}} + \frac{p F_E}{m} [\Psi_1 F_{12} c_2 + \Psi_2 (F_{21} c_1 + F_{22} c_2) + \Psi_3 (F_{31} c_1 + F_{32} c_2 + F_{33} c_3) + \Psi_4 F_{43} c_3 + \Psi_5 F_{53} c_3]. \quad (20)$$

З умови максимуму гамільтоніана H стосовно керувань p, c_k, n_{Γ} знаходимо

$$n_{\Gamma} = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, k = \overline{1, 3}, \quad p = \frac{m_v}{\zeta} \frac{1}{\Psi_m m} \exp(\vartheta_0) A, \quad (21)$$

де величини A_k, A визначаються формулами (14).

З системи рівнянь для спряжених функцій (12) отримуємо рівняння для ψ_m

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p F_E A}{m^2}, \quad (22)$$

а функції ψ_j , як і в попередньому випадку, лишаються сталими $\psi_j = \lambda_j$. За допомогою останнього співвідношення в (21) виключимо A з рівняння (22). Тоді маємо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} p^2 \frac{\psi_m}{m}. \quad (23)$$

Приймаючи до уваги перше рівняння в (19), запишемо рівняння (23) у вигляді $\frac{d\Psi_m}{dE} = -2 \frac{dm}{dE} \frac{\Psi_m}{m}$, інтегруючи яке, знаходимо

$$m^2 \Psi_m = c_m = \text{const.} \tag{24}$$

Підставимо знайдені вирази для керувань (21) в рівняння руху з системи (19). Отримаємо

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk} \frac{A_k}{c_m}, \tag{25}$$

де $F_E^* = \exp(\vartheta_0) F_E$. Множник A_k / c_m подамо в явному вигляді у відповідності до (14)

$$\frac{A_1}{c_m} = \frac{\lambda_2}{c_m} F_{21} + \frac{\lambda_3}{c_m} F_{31}, \quad \frac{A_2}{c_m} = \frac{\lambda_1}{c_m} F_{12} + \frac{\lambda_2}{c_m} F_{22} + \frac{\lambda_3}{c_m} F_{32}, \quad \frac{A_3}{c_m} = \frac{\lambda_3}{c_m} F_{33} + \frac{\lambda_4}{c_m} F_{43} + \frac{\lambda_5}{c_m} F_{53},$$

звідки, впливає можливість, не втрачаючи загальності, константу c_m у формулі (24) покласти рівною 1. Тому $\Psi_m = m^{-2}$. Тепер рівняння зміни маси (перше рівняння в (19)) набуде вигляду $\frac{dm}{dE} = -\frac{1}{2} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* m^2 A^2$. Звідси випливає

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m^2} = -\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* A^2 dE. \tag{26}$$

Позначимо

$$J_p = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* A^2 dE.$$

Легко бачити, що

$$J_p = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \sum_{j=1}^5 \left(\lambda_j \frac{dx_j}{dE} \right) dE, \tag{27}$$

звідки знаходимо

$$J_p = \frac{1}{2} \bar{\lambda} \bar{\Delta}, \tag{28}$$

де $\bar{\lambda}$ – вектор з компонентами $\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]$. Інтегруючи рівняння (26) з врахуванням позначення (27) знайдемо вираз для маси корисного вантажу

$$m_\pi = \frac{m_0}{1 + m_0 J_p} - m_v (1 + \varepsilon). \tag{29}$$

Для знаходження невідомих λ_j проінтегруємо систему рівнянь руху (25). Завдяки тому, що праві частини не залежать від фазового вектора, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих λ_j , яка має розв'язок

$$\bar{\lambda}(m_v) = \left(\int_{E_0}^{E_0+2\pi} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) \right)^{-1} \bar{\Delta}, \tag{30}$$

де матриця $\Phi(E, \bar{x}_0, m_v)$ визначається наступним чином

$$\Phi(E, \bar{x}_0, m_v) = \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}^T(E, \bar{x}_0),$$

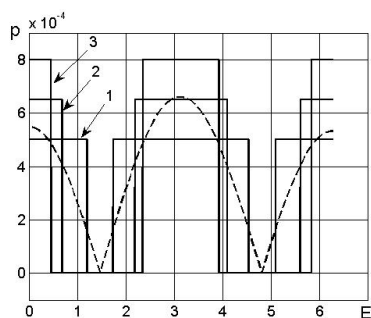
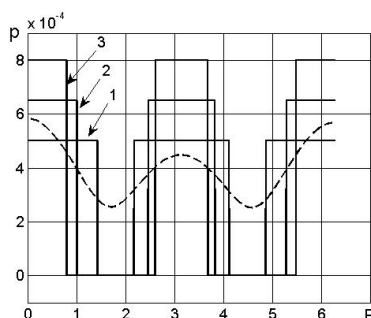
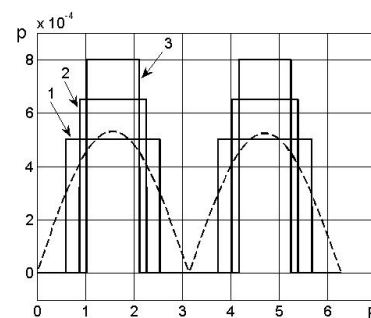
$$\hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \bar{x}_0) & F_{22}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \bar{x}_0) & F_{32}(E, \bar{x}_0) & F_{33}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, співвідношення (28)–(30) визначають масу корисного навантаження m_π , як функцію m_v , максимум якої знаходимо методом золотого перерізу.

АНАЛІЗ ЗАЛЕЖНОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МТА ВІД ВЕЛИЧИНИ СТАЛОЇ ТЯГИ ДВИГУНА ПРИ ВИКОНАННІ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ МАНЕВРІВ. Під елементарним маневром розуміємо маневр, при якому відбувається мала зміна лише одного з параметрів орбіти протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. На рис. 1–3 подано оптимальні програми величини тяги при виконанні елементарних маневрів: зміни кута нахилу початкової орбіти на величину $\Delta l = 0.002$ – рис. 1; ексцентриситету – на величину $\Delta e = 0.004$ – рис. 2; довготи висхідного вузла – на величину $\Delta \Omega = 0.002$ – рис. 3. Штрихові лінії ілюструють оптимальні програми величини тяги для МТА з ідеально керованою рушійною системою, а суцільні лінії – для МТА з рушійною системою сталої тяги при різних значеннях p_c . (криві 1 відповідають $p_c = 5.0 \cdot 10^{-4}$, криві 2 – $p_c = 6.5 \cdot 10^{-4}$, криві 3 – $p_c = 8.0 \cdot 10^{-4}$). Питомі маси складових рушійних систем прийнято

наступними: $\alpha = 20$ кг/КВт, $\gamma = 1.5$ кг/КВт. Параметри початкової орбіти: велика піввісь $a = 6878.245$ км, ексцентриситет $e = 0.1$, кутова відстань перицентра до вузла $\omega = 0$, кут нахилу $I = 57^\circ$, довгота висхідного вузла $\Omega = 0^\circ$.

Аналіз отриманих чисельних результатів свідчить про зменшення тривалості активних дуг перехідних траєкторій при збільшенні величини сталої максимальної тяги двигуна. Як і очікувалось, маса корисного вантажу m_π для будь якого маневру найбільша у МТА з ідеально керованим двигуном. Маса корисного вантажу МТА з реальним ракетним двигуном сталої тяги зменшується зі збільшенням рівня тяги, на відміну від оптимального значення маси джерела енергії m_v . Збільшення m_v при збільшенні рівня тяги p_c зумовлене необхідністю зменшення витрати робочої речовини (див. перше рівняння в (10)). Оптимальне ж значення m_v забезпечує балансування вказаної необхідності з безпосереднім зменшенням $m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - (1 + \varepsilon)m_v$ при зростанні m_v .

Рис. 1. Програми тяги при зміні I Рис. 2. Програми тяги при зміні e Рис. 3. Програми тяги при зміні Ω

Оптимальні параметри МТА для вказаних вище маневрів і рушійних систем наведено в таблиці.

Таблиця

Оптимальні параметри МТА

| | $\Delta I = 0.002$ | $\Delta e = 0.004$ | $\Delta \Omega = 0.002$ |
|---------------------------|--|--|--|
| Ідеально керований двигун | $m_\pi = 0.943020$ $m_v = 0.026113$ | $m_\pi = 0.946790$ $m_v = 0.024410$ | $m_\pi = 0.950899$ $m_v = 0.022549$ |
| $p_c = 5.0 \cdot 10^{-4}$ | $m_\pi = 0.940023$ $m_v = 0.028367$ | $m_\pi = 0.942444$ $m_v = 0.028893$ | $m_\pi = 0.948127$ $m_v = 0.023880$ |
| $p_c = 6.5 \cdot 10^{-4}$ | $m_\pi = 0.937733$ $m_v = 0.028643$ | $m_\pi = 0.937475$ $m_v = 0.028796$ | $m_\pi = 0.943307$ $m_v = 0.026154$ |
| $p_c = 8.0 \cdot 10^{-4}$ | $m_\pi = 0.932798$ $m_v = 0.030903$ | $m_\pi = 0.920435$ $m_v = 0.055949$ | $m_\pi = 0.938114$ $m_v = 0.028526$ |

Висновки і перспективи. Отримані результати можуть мати, як самостійне значення, наприклад, для задач утримання космічного апарату в околі заданої орбіти, так слугувати базою для розробки алгоритмів керування рухом МТА з двигунами сталої тяги для перельотів між віддаленими орбітами.

Список використаних джерел

- Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
- Кифоренко, Б.Н., Васильев И.Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. – 2011 – 49, № 5. – С. 436–452.
- Кифоренко, Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62–76.
- Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Некоторые оптимальные околоэллиптические маневры космических аппаратов с двигателем постоянной мощности и аккумулятором энергии // Проблемы управления и информатики. – 2003 – № 1. – С. 84–100.
- Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Оптимизация перелетов космического аппарата между отдаленными орбитами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 93–100.
- Кифоренко Б.М., Ткаченко Я.В. Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів в сильному центральному гравітаційному полі // Збірник праць інституту математики національної академії наук України. – 2015 – 12, № 3. – С. 60–72.
- Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. – 2004. – 42, № 3. – С. 260–279.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.18

Б. Кифоренко, д-р. физ.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев,
И. Васильев, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ БЛИЗКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ С ПОСТОЯННОЙ МАЛОЙ ТЯГОЙ

Решена задача об оптимальном переходе межорбитального транспортного аппарата (МТА) с двигательной системой малой постоянной тяги между близкими эллиптическими орбитами в течение одного оборота вокруг гравитационного центра. Целью оптимизации является получение максимума массы полезного груза МТА при заданной его начальной массе. На примерах конкретных маневров проведена оценка влияния величины постоянной тяги на значение массы полезного груза по сравнению со случаем использования идеально управляемой двигательной системы.

B. Kiforenko, Full Doctor, prof., Ya. Tkachenko, PhD,
S.P. Timoshenko institute of mechanics of NASU, Kyiv
I. Vasil'ev, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

OPTIMIZATION OF TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTIC ORBITS WITH A CONSTANT SMALL THRUST

The problem of the optimal transfers of the orbital transport vehicle (OTV) with a small constant thrust system between close elliptical orbits during one revolution around the gravitational center was solved. The goal of optimization is to obtain the maximum mass of the payload of the OTV at a given initial mass. On the examples of particular maneuvers, the effect of the value of the constant thrust on the value of the payload mass was estimated in comparison with the case of using an ideally controlled propulsion system.

УДК 629.7.076.6

Б. Кіфоренко, д.-р. фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ,
І. Василь'єв, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net, e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

ОПТИМАЛЬНІ ПЕРЕХОДИ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБИТАМИ З ОБМЕЖЕНОЮ МАЛОЮ ТЯГОЮ

Запропоновано методику знаходження оптимальних програм тяги та мас складових міжорбітального транспортного апарату (МТА), які забезпечують максимальну масу корисного вантажу МТА з електроракетною рушійною системою (ЕРС) обмеженої тяги при виконанні перельотів між близькими еліптичними орбітами. Проведено оцінку впливу обмеженості тяги на величину маси корисного вантажу та на оптимальні програми тяги.

ВСТУП. Міжорбітальний транспортний апарат (МТА) – це космічний апарат призначений для доставки корисного вантажу з заданої початкової орбіти на іншу цільову орбіту. Однією з найважливіших задач сучасної космонавтики є задача про максимальне збільшення відсотку маси корисного навантаження в початковій масі МТА, причому таким чином, щоб переліт між заданими орбітами був здійсненим. Успішне розв'язання задач такого типу вимагає визначення в рамках єдиної варіаційної постановки оптимальних співвідношень між масами компонентів МТА, оптимальних керувань та оптимальних траєкторій перельоту.

Електроракетна рушійна система (ЕРС) складається з двох основних модулів: електроракетного (електрореактивного) двигуна малої тяги та джерела енергії, що живить двигун. Застосування ЕРС в якості маршової рушійної системи дозволяє суттєво збільшити масу корисного вантажу МТА порівняно з випадком традиційної рідинної, або твердопаливної маршової рушійної системи. Також важливою перевагою ЕРС є можливість регулювання в широких межах величини тяги і швидкості реактивного струменя. Це дозволило для теоретичних досліджень використовувати модель ідеально керованої ЕРС, для якої величини тяги і потужності двигуна вважаються незалежними керуваннями, та тяга не обмежена зверху. У даній статті для класу маневрів, що полягають в переміщенні корисних вантажів між близькими еліптичними орбітами, запропоновано методику отримання програм тяги та співвідношень між масами складових МТА, які забезпечують максимізацію маси корисного вантажу при врахуванні обмеженості тяги ЕРС.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Рух МТА моделюємо рухом матеріальної точки змінної маси в центральному ньютонівському гравітаційному полі, на яку окрім гравітаційної сили діє генерована рушійною системою тяга. Поточну орбіту МТА описуватимемо за допомогою оскулюючих параметрів: натурального логарифму кутового моменту $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ (тут a – велика піввісь), ексцентриситету e , кутової відстані перицентра до висхідного вузла ω , кута нахилу площини орбіти I , довготи висхідного вузла Ω . Поточне положення МТА на орбіті визначатимемо величиною ексцентричної аномалії E . Тоді рівняння руху МТА матимуть вигляд [3]

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -q, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, m – поточна маса МТА, q – поточне значення витрати робочої речовини двигуна, w_k , $k = \overline{1, 3}$, – проекції вектора реактивного прискорення на радіальний, трансверсальний та нормальний до площини орбіти напрямки, а коефіцієнти F_{jk} визначаються формулами

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; \\ F_{23} &= 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)} \sin E; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= -\operatorname{ctg} I \left(\frac{\sin \omega}{1-e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E \right); \\
 F_{41} = F_{42} &= 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1-e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33}; \\
 F_{60} &= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta)(1-e \cos E)}; \quad F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1-e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \quad F_{62} = -\frac{2-e \cos E}{e(1-e \cos E)} \sin E; \\
 F_{63} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Рівняння (1) записані у безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до характерної величини r^* , час t віднесено до T^* – періоду обертання по круговій орбіті радіуса r^* , розділеного на 2π , масу m віднесено до початкової маси МТА M_0 . Зазначимо, що надалі безрозмірні маси, потужності, прискорення, тяга та витрата робочої речовини позначаються малими літерами, а їх розмірні величини – відповідними великими літерами.

Величина секундної масової витрати робочої речовини визначається вибором моделі рушійної системи, що складається з джерела енергії масою M_v та безпосередньо двигуна масою M_γ , які пропорційні максимальній потужності джерела N_0 [1]

$$M_v = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \tag{3}$$

де α та γ – їх питомі маси. В моделі ідеально керованого двигуна обмеження на його тягу P не накладаються, а секундна витрата робочої речовини визначається формулою [1]

$$Q = \frac{M^2 \bar{W}^2}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0]. \tag{4}$$

Основною особливістю реальних електроракетних двигунів, яку не враховує модель ідеально керованого двигуна, є обмеженість тяги. Тому, для більш адекватного описування можливостей реальних двигунів, використаємо модель двигуна обмеженої тяги, для якої співвідношення (3) лишається в силі, а (4) набудуть вигляду

$$Q = \frac{p^2}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0], \quad P \in [0; P_{\max}], \tag{5}$$

де P_{\max} – максимальне значення тяги. До наведених вище характерних величин додамо максимальну потужність джерела енергії N_0 та P^* – гравітаційну силу, що діє на матеріальну точку масою M_0 на відстані r^* від гравітаційного центру, та перепишемо формули (5) у безрозмірній формі

$$q = \frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}]. \tag{6}$$

Тут ζ – сталий в часі коефіцієнт, який дорівнює $\zeta = r^{*2} \alpha T^{*-3}$. Позначимо $\varepsilon = \gamma / \alpha$. Тоді, як випливає з (3), можемо записати масу двигуна через масу джерела енергії рушійної системи

$$m_\gamma = \varepsilon m_v. \tag{7}$$

У рівняннях руху (1) замінимо компоненти вектора реактивного прискорення їхніми виразами через тягу

$$w_k = p c_k / m, \quad k = \overline{1,3} \tag{8}$$

де c_k , $k = \overline{1,3}$, – напрямні косинуси, для яких має місце рівність

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \tag{9}$$

Беручи до уваги співвідношення (1) та (6)–(9), можемо записати математичну постановку задачі про знаходження програм величини $p(t)$ і напрямку тяги $c_k(t)$ та значення безрозмірної маси m_v джерела енергії рушійної системи, які забезпечують максимальну масу корисного вантажу m_π при перельоті з заданого початкового положення E_0 на початковій орбіті з орбітальними параметрами \bar{x}_0 в задане положення E_1 на кінцевій орбіті з параметрами \bar{x}_1 , маємо:

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad m(0) = 1, \quad m_\pi = (m(T) - m_v(1 + \varepsilon)) \rightarrow \max, \\
 \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p c_k / m, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1, \\
 \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p c_k / m, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, E(0) = E_0, \quad E(T) = E_1 \\
 n_\Gamma &\in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}], \quad \sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Тут безрозмірне значення маси МТА в початковий момент часу дорівнює 1 завдяки вибору характерних величин.

Задача (10) являє собою нелінійну задачу оптимального керування з параметрами. Існуючі підходи пошуку чисельного розв'язку таких задач [2, 8, 9] для успішного отримання результату вимагають задання початкових наближень, доволі близьких до шуканого розв'язку. У загальному випадку не існує алгоритмів знаходження таких початкових наближень. У даній статті для окремого класу маневрів, а саме для перельотів між близькими еліптичними орбітами протягом одного оберту, запропоновано процедуру подолання вказаних недоліків та отримання розв'язку, використовуючи загально відомі чисельні методи.

Очевидно, що в разі перельотів між близькими орбітами компоненти вектора приростів оскулюючих параметрів орбіти $\bar{\Delta} = [\Delta_\vartheta, \Delta_e, \Delta_\omega, \Delta_I, \Delta_\Omega] = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ будуть малими величинами. Оскільки ЕРС відноситься до класу рушійних систем малої тяги, то малими будуть і величини pc_k/m що дозволяє розкласти в ряд рівняння руху в околиці початкової орбіти, відкинути члени другого і вище порядків малості і перейти від незалежної змінної t до незалежної змінної E [4–6]. Тоді, для однооберткових перельотів співвідношення (10) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - m_\nu(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) pc_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ n_\Gamma &\in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}], \quad \sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

де $\hat{F}_E = 1/F_{60}(E, \bar{x}_0)$, $F_E = \exp(\vartheta_0) \hat{F}_E$.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РОБОТОЮ РУШІЙНОЇ СИСТЕМИ. Згідно з принципом максимуму Л.С. Понтрягіна складемо гамільтоніан задачі (11)

$$H = -\psi_m \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{p^2}{m_\nu 2n_\Gamma} + \frac{pF_E}{m} \sum_{j=1}^5 \psi_j \left[\sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) c_k \right]. \tag{12}$$

Спряжені функції ψ_m та ψ_j визначаються з рівнянь

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial m}, \quad \frac{d\psi_j}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \tag{13}$$

Як видно з (12), гамільтоніан H не залежить від фазових змінних x_j , тому функції ψ_j є константами, що підлягають визначенню. Рівняння для визначення ψ_m має вигляд

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{pF_E}{m^2} \sum_{j=1}^5 \psi_j \left[\sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) c_k \right]. \tag{14}$$

Вирази для керувань p, n_Γ, c_k знаходимо з умови максимуму функції H (див. формулу (12)), з врахуванням обмежень, які містяться в третьому рядку формул (11)

$$n_\Gamma = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad p = \begin{cases} B, & B \leq p_{\max}, \\ p_{\max}, & B > p_{\max}, \end{cases} \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \psi_2 F_{21}(E, \bar{x}_0) + \psi_3 F_{31}(E, \bar{x}_0), \quad A_2 = \psi_1 F_{12}(E, \bar{x}_0) + \psi_2 F_{22}(E, \bar{x}_0) + \psi_3 F_{32}(E, \bar{x}_0), \\ A_3 &= \psi_3 F_{33}(E, \bar{x}_0) + \psi_4 F_{43}(E, \bar{x}_0) + \psi_5 F_{53}(E, \bar{x}_0), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad B = \frac{m_\nu}{\zeta} \frac{1}{\psi_m m} \exp(\vartheta_0) A. \end{aligned} \tag{16}$$

Співвідношення (15) та (16) дозволяють переписати рівняння (14) в значно простішій формі

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{pF_E}{m^2} A. \tag{17}$$

З умов трансверсальності отримуємо кінцеву умову для ψ_m [7]

$$\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1. \tag{18}$$

Зафіксуємо значення параметру m_ν . Тепер необхідно знайти шість невідомих сталих, а саме $\psi_j, j = \overline{1, 5}$, та $\psi_m(E_0)$, з крайової задачі, яка впливає з формул (11), (17), (18)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{p^2}{2}, \quad m(E_0) = 1, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p \frac{A_k}{A}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ \frac{d\psi_m}{dE} &= \frac{pF_E}{m^2} A, \quad \psi_m(E_0 + 2\pi) = 1, \end{aligned} \tag{19}$$

де значення p, A_k, A визначаються згідно зі співвідношеннями (15) та (16). Вказані вище невідомі знаходимо, розв'язуючи задачу (19) методом стрільби, задаючи початкові наближення $\psi_j^0, j = \overline{1, 5}$ та $\psi_m^0(E_0)$.

Отримавши розв'язок задачі (19), знаходимо масу корисного вантажу МТА, як функцію параметра m_v ,

$$m_{\pi}(m_v) = m^{E_0+2\pi}(m_v) - (1+\varepsilon)m_v, \quad (20)$$

де через $m^{E_0+2\pi}(m_v)$ позначено знайдену при розв'язанні крайової задачі (19) кінцеву масу МТА. Оптимальне значення m_v , яке відповідає максимуму функції (20), знаходимо за допомогою чисельних методів оптимізації.

ПОЧАТКОВІ НАБЛИЖЕННЯ. Вказані вище початкові наближення $\psi_{j,j=\overline{1,5}}^0$ та $\psi_m^0(E_0)$, які забезпечують збіжність чисельного процесу пошуку розв'язку можна знайти з задачі, в котрій обмеження на тягу зверху не накладаються. У цьому випадку згідно з формулами (15), (16) тяга p дорівнює

$$p = \frac{m_v}{\zeta} \frac{1}{\psi_m m} \exp(\vartheta_0) A. \quad (21)$$

Зі співвідношення (21) випливає, що

$$A = \frac{\zeta}{m_v} \exp(-\vartheta_0) p \psi_m m. \quad (22)$$

Підставимо значення A , отримане в (22), в диференціальне рівняння для ψ_m (див. останнє рівняння в (19)). Після елементарних перетворень отримуємо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} p^2 \frac{\psi_m}{m}. \quad (23)$$

Порівнюючи праві частини першого рівняння в (19) та рівняння (23), знаходимо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -2 \frac{dm}{dE} \frac{\psi_m}{m}.$$

Це диференціальне рівняння має перший інтеграл

$$\psi_m m^2 = c_m = \text{const}. \quad (24)$$

Згідно з (21) та (24), рівняння зміни орбітальних параметрів в (19) подамо у вигляді

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk} \frac{A_k}{c_m}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (25)$$

де $F_E^* = \exp(\vartheta_0) F_E$. Введемо нову систему невідомих сталих $\lambda_j = \psi_j / c_m$. Тоді систему (25) можемо переписати у вигляді

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) \hat{A}_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \lambda_2 F_{21}(E, \bar{x}_0) + \lambda_3 F_{31}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A}_2 &= \lambda_1 F_{12}(E, \bar{x}_0) + \lambda_2 F_{22}(E, \bar{x}_0) + \lambda_3 F_{32}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A}_3 &= \lambda_3 F_{33}(E, \bar{x}_0) + \lambda_4 F_{43}(E, \bar{x}_0) + \lambda_5 F_{53}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A} &= \sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2}, \end{aligned}$$

У рівняннях (26) праві частини не залежать від фазових змінних, що дозволяє проінтегрувати їх в елементарних функціях, і, врахувавши початкові та кінцеві умови, отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих $\lambda_j, j = \overline{1,5}$,

$$\bar{\lambda}(m_v) = \left(\int_{E_0}^{E_0+2\pi} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) \right)^{-1} \bar{\Delta}, \quad (27)$$

де матриця $\Phi(E, \bar{x}_0, m_v)$ визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) &= \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}^T(E, \bar{x}_0), \\ \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) &= \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \bar{x}_0) & F_{22}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \bar{x}_0) & F_{32}(E, \bar{x}_0) & F_{33}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$F_E^*(E, \bar{x}_0) = \exp(\vartheta_0) F_E(E, \bar{x}_0).$$

Легко бачити, що $A_k = c_m \hat{A}_k$. Тоді згідно з (21) та значенням константи c_m тяга дорівнюватиме

$$p = \frac{m_v}{\zeta} m \exp(\vartheta_0) \hat{A}. \quad (28)$$

Підставимо (28) в перше рівняння в співвідношень (19). Тепер рівняння зміни маси набуде вигляду

$$\frac{dm}{dE} = -\frac{1}{2} \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) m^2 \hat{A}^2. \tag{29}$$

Рівняння (29) – це диференціальне рівняння з розділеними змінними, яке має розв'язок

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m^2} = -\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \hat{A}^2 dE. \tag{30}$$

Позначимо

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \hat{A}^2 dE.$$

Легко бачити, що

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \sum_{j=1}^5 \left(\lambda_j \frac{dx_j}{dE} \right) dE.$$

Тому, після визначення вектора невідомих $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]$ величину $J_p(m_v)$ можна обчислити за простою формулою

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \vec{\lambda} \vec{\Delta}. \tag{31}$$

З рівняння (30) знаходимо кінцеве значення маси МТА

$$m^{E_0+2\pi}(m_v) = \frac{1}{1+J_p}. \tag{32}$$

Тоді у відповідності до (20) маса корисного вантажу дорівнює

$$m_{\pi}(m_v) = \frac{1}{1+J_p(m_v)} - m_v(1+\varepsilon). \tag{33}$$

Оптимальне значення m_v , яке максимізує масу корисного вантажу (29), знаходимо методом золотого перерізу. За допомогою формули (27) обчислюємо оптимальні значення констант $\lambda_j, j = \overline{1,5}$, які виберемо за початкові наближення $\psi_j^0, j = \overline{1,5}$. Для знаходження початкового наближення $\psi_m^0(E_0)$ використаємо формули (24), (32) та граничну умову $\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1$. Маємо

$$\psi_m^0(E_0) = \left(\frac{1}{1+J_p} \right)^2. \tag{34}$$

АНАЛІЗ ЗАЛЕЖНОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МТА ВІД ВЕЛИЧИНИ МАКСИМАЛЬНОЇ ТЯГИ ДВИГУНА.

Розглянемо два маневри, які полягають у доставці максимальної маси корисного вантажу з початкової еліптичної орбіти на дві різні орбіти, близькі до початкової орбіти, за один оберт. Параметри початкової орбіти: велика піввісь $a = 6878.245$ км, ексцентриситет $e = 0.1$, кутова відстань перицентра до вузла $\omega = 0$, кут нахилу $I = 57^\circ$, довгота висхідного вузла $\Omega = 0^\circ$. При маневрі 1 відбувається збільшення параметрів початкової орбіти ϑ, e, I на величини: $\Delta\vartheta = 0.001, \Delta e = 0.001$ та $\Delta I = 0.002$. При маневрі 2 збільшуються параметри ϑ та Ω на величини $\Delta\vartheta = 0.002, \Delta\Omega = 0.002$. При розрахунках за характерний лінійний розмір r^* вибрано велику піввісь початкової орбіти. Питомі маси складових рушійних систем вибрано наступними: $\alpha = 20$ кг/КВт, $\gamma = 1.5$ кг/КВт.

На рис. 1–2 представлено оптимальні програми величини тяги при виконанні вказаних маневрів. Штрихові лінії відповідають випадку відсутності обмеження на тягу (ідеально керована рушійна система). Криві 1–3 ілюструють оптимальні програми величини тяги при обмеженнях $p_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}, p_{\max} = 5.2 \cdot 10^{-4}, p_{\max} = 5.5 \cdot 10^{-4}$.

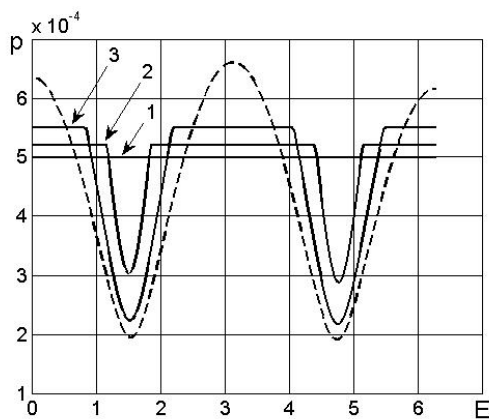


Рис. 1. Програми тяги для маневру 1

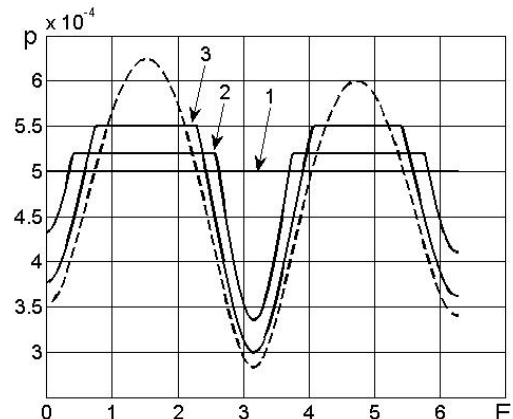


Рис. 2. Програми тяги для маневру 2

Зрозуміло, що для будь-якого маневру існує граничне обмеження на тягу \bar{p}_{\max} , при якому зберігається здійсненість маневру. Іншими словами, для того, щоб маневр залишався здійсненним обмеження на тягу зверху p_{\max} повинно бути більше деякої величини \bar{p}_{\max} .

Як видно з рисунків для маневрів, що розглядаються величина $\bar{p}_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}$.

Оптимальні параметри МТА для вказаних вище маневрів і рушійних систем подано в таблиці.

Таблиця

Оптимальні параметри МТА

| | Маневр 1 | Маневр 2 |
|--------------------------------|--|--|
| Ідеально керований двигун | $m_{\pi} = 0.937357$ $m_{\nu} = 0.028664$ | $m_{\pi} = 0.936036$ $m_{\nu} = 0.029258$ |
| $p_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}$ | $m_{\pi} = 0.934182$ $m_{\nu} = 0.030601$ | $m_{\pi} = 0.934181$ $m_{\nu} = 0.030611$ |
| $p_{\max} = 5.2 \cdot 10^{-4}$ | $m_{\pi} = 0.934983$ $m_{\nu} = 0.029322$ | $m_{\pi} = 0.935250$ $m_{\nu} = 0.029487$ |
| $p_{\max} = 5.5 \cdot 10^{-4}$ | $m_{\pi} = 0.936613$ $m_{\nu} = 0.028900$ | $m_{\pi} = 0.935829$ $m_{\nu} = 0.029317$ |

Як і очікувалось, використання моделі ідеально керованої рушійної системи дозволяє отримати верхню оцінку ефективності максимізації маси корисного вантажу МТА при заданому значенні його початкової маси та фіксованих питомих параметрах модулів ЕРС. Результати, що наведені в таблиці, свідчать, що обмеженість тяги рушійної системи, за умови здійсненності маневру, несуттєво впливає на значення максимальної маси корисного вантажу МТА. Проведена оптимізація великої кількості різноманітних переходів між близькими орбітами підтвердила цей факт.

Висновки. При виконанні оптимальних перельотів між близькими еліптичними орбітами модель ідеально керованої ЕРС цілком придатна для оцінки маси корисного навантаження МТА. Також вона необхідна для знаходження початкових наближень, що дозволяють будувати оптимальні програми тяги при використанні ЕРС обмеженої тяги.

Список використаних джерел

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
2. Кифоренко, Б.Н., Васильев И.Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. – 2011 – 49, № 5 – С. 436–452.
3. Кифоренко, Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстрейшему межорбитальному переходу с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62–76.
4. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Некоторые оптимальные околоэллиптические маневры космических аппаратов с двигателем постоянной мощности и аккумулятором энергии // Проблемы управления и информатики. – 2003 – № 1. – С. 84–100.
5. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Оптимизация перелетов космического аппарата между удаленными орбитами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 93–100.
6. Кифоренко Б.М., Ткаченко Я.В. Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів в сильному центральному гравітаційному полі // Збірник праць інституту математики національної академії наук України. – 2015 – 12, № 3. – С. 60–72.
7. Летов А.М. Динамика полета и управления. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
8. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. – 2004. – 42, № 3. – С. 260–279.
9. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. – 2008. – 46, № 2. – С. 136–147

Надійшла до редколегії 05.04.18

Б. Кифоренко, д.-р. физ.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко, канд. физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев,
И. Васильев, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ БЛИЗКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ С МАЛОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

Предложена методика нахождения оптимальных программ тяги и масс модулей межорбитального транспортного аппарата (МТА), обеспечивающие максимальную массу полезного груза МТА с электроракетной двигательной системой ограниченной тяги при выполнении перелетов между близкими эллиптическими орбитами. Проведена оценка влияния ограниченности тяги на величину массы полезного груза и на оптимальные программы тяги.

B. Kiforenko, Full Doctor, prof., Ya. Tkachenko PhD,
S. P. Timoshenko, institute of Mechanics of NASU, Kyiv
I. Vasil'ev, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

OPTIMAL TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTIC ORBITS WITH A LOW BOUNDED THRUST

A method for finding the optimal thrust programs and masses of the components of the orbital transport vehicle (OTV), which provide the maximum payload weight of an OTV with an electric propulsion system of bounded thrust when flying between close elliptical orbits is developed. The influence of the thrust limitation on the value of the payload mass and on the optimal thrust programs was evaluated.

УДК 539.3

І. Киричок, д-р фіз.-мат. наук
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ,
 Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф., С. Круць, аспірант
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
 y.zhuk@i.ua

ВРАХУВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ПРИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАННЯХ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРОМ І АКТУАТОРОМ

На основі уточнених рівнянь електромеханіки в'язкопружних шаруватих балок представлена постановка і числовий розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання гнучкої в'язкопружної балки та їх активне демпфірування п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні деформації поперечного зсуву. Досліджено вплив умов механічного закріплення країв балки, геометричної нелінійності та деформації поперечного зсуву на амплітудно-частотні характеристики та електричні показники сенсора при вимушених коливаннях балки та можливість активного демпфірування згинної моди коливань за допомогою п'єзоелектричних актуатора і сенсора.

Вступ. У даній статті на основі уточнених рівнянь електромеханічної поведінки шаруватих балок, які враховують ефекти деформації поперечного зсуву, інерції обертання нормального елемента й геометричної нелінійності, розв'язано задачу про вимушені резонансні коливання балки з пасивного (без п'єзоефекту) в'язкопружного матеріалу з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при різних умовах закріплення країв. Досліджено вплив крайових умов, поперечного зсуву і геометричної нелінійності на електромеханічні частотні характеристики системи.

Постановка задачі. Розглянемо тришарову гнучку балку ширини b і довжини ℓ . Середній шар товщини h_0 виготовлено з пасивного трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, а нижній та верхній шари товщини h_1 і h_2 – з однакової п'єзокераміки з протилежною товщинною поляризацією. Вважаємо, що п'єзосар h_1 характеризується п'єзомодулем $+d_{31}$ і виконує роль актуатора, а п'єзосар h_2 – п'єзомодулем $-d_{31}$ і є сенсором. Балку віднесено до прямокутної системи координат xuz , таким чином, що $0 \leq \delta \leq \ell$, $|y| \leq b/2$, $|z| \leq h_0/2$. Поверхні п'єзосарів покриті нескінченно тонкими електродами. На внутрішніх електродах задано електричні потенціали $\phi_{1,2}(\pm h_0/2) = 0$, а їх зовнішні поверхні електродовані на ділянках $s = b\Delta_x$, $\Delta_x = x_1 - x_0$, $x_0 \geq 0$, $x_1 \leq \ell$. При цьому на зовнішній поверхні п'єзосенсора h_2 виконуються наступні електричні граничні умови:

$$\iint_S^2 D_z ds = 0, \quad (x_0 \leq x \leq x_1); \quad {}^2D_z = 0 \quad (0 \leq x \leq x_0, x_1 \leq x \leq \ell), \quad (1)$$

де D_z – нормальна складова вектора електричної індукції в п'єзосарі.

Балку навантажено поверхневим тиском $q_z = q'_0 \cos \omega t$, який змінюється в часі за гармонічним законом з амплітудою q'_0 і коловою частотою ω , що є близькою до резонансної частоти. Для підсилення або гасіння механічних коливань з тією самою частотою у фазі чи у протифазі відповідно до електродованої ділянки S актуатора підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою $V_a = \phi_1(-h_0/2 - h_1) - \phi_1(-h_0/2)$. Через гармонічне деформування балки на розімкнених електродах ділянки S сенсора виникає різниця електричних потенціалів $V_s = \phi_2(h_0/2 + h_2) - \phi_2(h_0/2)$, яка обчислюється на основі розв'язку задачі електромеханіки та крайових умов (1) або визначається експериментально. Торці балки шарнірно або жорстко закріплені.

Для моделювання електромеханічної поведінки балки вважаємо справедливими гіпотези С.П. Тимошенка про механічні змінні по всьому пакету шарів. Ці гіпотези враховують деформацію поперечного зсуву та інерцію повороту нормального елемента [2]. Відносно електричних величин вважаємо, що складовими ${}^{1,2}D_x$ і ${}^{1,2}D_y$ вектора електричної індукції можна знехтувати, а нормальна складова $D_z = \text{const}$ в п'єзосарах не залежить від товщинної координати [3]. При цьому рівняння електростатики задовольняються тотожно, а складові ${}^{1,2}E_x$ і ${}^{1,2}E_y$ вектора електричної напруженості знаходяться з визначальних рівнянь ${}^{1,2}D_x = 0$, ${}^{1,2}D_y = 0$. Геометричну нелінійність враховуємо збереженням квадрату кута повороту у співвідношеннях Коші й нелінійної складової в рівняннях руху. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [4], які у випадку гармонічного деформування матеріалу зводяться до множення комплексних величин $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$.

Тоді тривимірні визначальні рівняння поляризованої вздовж осі z п'єзокераміки [3] для п'єзосарів актуатора h_1 і сенсора h_2 можна записати у такому вигляді

$${}^m\sigma_x = c_{11}^E * \varepsilon_x \mp b_{31} * {}^mE_z; \quad {}^m\sigma_{xz} = c_{44}^E * e_{xz}; \quad {}^mD_z = \mp b_{31} * \varepsilon_x + b_{33} * {}^mE_z; \quad {}^mE_z = -d\phi_m / dz; \quad (2)$$

$$c_{11}^E = 1 / s_{11}^E; \quad b_{31} = d_{31} / s_{11}^E; \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2 / s_{11}^E; \quad c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T); \quad m = 1, 2,$$

де $s_{kk}^E = s'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^s)$, $d_{ik} = d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^e)$ – в'язкопружні податливості, п'єзомодулі та діелектричні проникності п'єзокераміки; mE_z – нормальна складова електричної напруженості в п'єзосарах. Для в'язкопружного

матеріалу пасивного шару h_0 виконуються перші два співвідношення з (2), в яких необхідно покласти $c_{11}^E = E$, $c_{44}^E = G_{13}$, $b_{31} = 0$ (E і G_{13} – в'язкопружні модулі Юнга і поперечного зсуву). Далі знак * опускаємо.

Нелінійні співвідношення Коші записуються так:

$$\varepsilon_x = e_x + z\kappa_x, \quad e_x = \partial u / \partial x + \vartheta_x^2 / 2, \quad \kappa_x = \partial \psi_x / \partial x, \quad e_{xz} = \psi_x - \vartheta_x, \quad \vartheta_x = -\partial w / \partial x \quad (3)$$

де u і w – поздовжнє і поперечне переміщення, ψ_x – кут повороту початково недеформованого нормального елемента.

Інтегруючи третю і четверту рівності в (2) за змінною z , з урахуванням прийнятих електростатичних крайових умов, отримаємо

$${}^m\sigma_x = (c_{11}^E + \gamma_{33})\varepsilon_x \mp \gamma_{31} {}^mD_z; \quad {}^m\sigma_{xz} = c_{44}^E(\psi_x - \vartheta_x); \quad {}^mD_z = -b_{33}V_{a,s} / h_{1,2} \pm b_{31}(e_x \mp \tilde{h}_{1,2}\kappa_x) \quad (4)$$

$$(\gamma_{31} = b_{31} / b_{33}; \gamma_{33} = \gamma_{31}b_{31}; \tilde{h}_{1,2} = (h_0 + h_{1,2}) / 2; m = 1, 2).$$

Задовольняючи 2D_z з (4) електричній інтегральній умові (1) на електродованих поверхнях сенсора, знаходимо амплітуду різниці електричних потенціалів

$$V_s = -\frac{\gamma_{31}h_2}{\Delta_x} \int_{x_0}^{x_1} (e_x + \tilde{h}_2\kappa_x) dx. \quad (5)$$

Підстановка V_s з (5) в перше співвідношення (4) для сенсора приводить до інтегро-диференціального виразу для ${}^2\sigma_x$, що значно ускладнює побудову співвідношень для зусиль і моментів досліджуваної балки. Тому для їх побудови в залежностях (4) для ${}^2\sigma_x$ приймаємо другу умову з (1), яка на ділянці Δ_x виконується наближено.

Вводячи замість напружень статично еквівалентні зусилля й моменти $(N_x, Q_x, M_x) = b \int (\sigma_x, \sigma_{xz}, z\sigma_x) dz$ по всьому пакету шарів балки з врахуванням (3) і (4), отримуємо співвідношення

$$N_x = C_{11}e_x + K_{11}\kappa_x + N_E; \quad Q_x = k_s C_{44}(\psi_x - \vartheta_x); \quad M_x = K_{11}e_x + D_{11}\kappa_x + M_E, \quad (6)$$

в яких

$$C_{11} = bh_0 [E + c_{11}^E(\delta_1 + \delta_2) + \gamma_{33}\delta_2]; \quad C_{44} = bh_0 [G_{13} + c_{44}^E(\delta_1 + \delta_2)];$$

$$K_{11} = bh_0 [(c_{11}^E + \gamma_{33})(1 + \delta_2)\delta_2 - c_{11}^E(1 + \delta_1)\delta_1] / 2; \quad \delta_k = h_k / h_0;$$

$$D_{11} = bh_0^3 [E + c_{11}^E(\delta_{13} + \delta_{23}) + \gamma_{33}(\delta_{23} + \delta_1^3)] / 12;$$

$$N_E = bb_{31}V_a; \quad M_E = -bh_0(1 + \delta_1)b_{31}V_a / 2; \quad \delta_{k3} = 4\delta_k^3 + 6\delta_k^2 + 3\delta_k, \quad k = 1, 2;$$

k_s – коефіцієнт зсуву [2].

Рівняння коливальних гнучкої балки мають вигляд

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} + Fq_z - \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - \tilde{Q}_x - N_x \vartheta_x - \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

з граничними умовами при шарнірному закріпленні країв балки

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, l) \quad (8)$$

– при жорсткому їх защемленні

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \psi_x = 0 \quad (x = 0, l). \quad (9)$$

У рівняннях (7) використано такі позначення: $\tilde{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$, $F = bH$, $H = h_0(1 + \delta_1 + \delta_2)$, $\rho_1 = bh_0(\rho_0 + \rho_1\delta_1 + \rho_1\delta_2)$, $\rho_2 = bh_0^3(\rho_0 + \rho_1\delta_{13} + \rho_1\delta_{23}) / 12$; ρ_0 і ρ_1 – питомі густини матеріалів.

Побудова розв'язку задачі. При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння (3), (6) і (7) відносно шуканих u , w , ψ_x , N_x , \tilde{Q}_x , M_x з точністю до квадратичних членів запишемо у наступному вигляді:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} = -Fq_z + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \tilde{Q}_x + N_x \psi_x - J_{SD}(\tilde{Q}_x N_x) + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_{CK}(N_x - N_E) - J_{DK}(M_x - M_E) - \frac{1}{2} \psi_x^2 + J_{SD}(\psi_x \tilde{Q}_x); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = -J_{DK}(N_x - N_E) + J_D(M_x - M_E); \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_x + J_{SD} \tilde{Q}_x,$$

де $J_C = 1/C_{11}$; $J_D = 1/[D_{11}(1 - \nu_{KC}\nu_{KD})]$; $J_{CK} = J_C + J_D \nu_{KC}^2$; $J_{DK} = J_D \nu_{KC}$; $\nu_{KC} = K_{11}/C_{11}$; $\nu_{KD} = K_{11}/D_{11}$; $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

При гармонічних навантаженнях вигляду $q_z = q'_0 \cos \omega t - q''_0 \sin \omega t$ ($q'_0 = 0$), нехтуючи перехідними процесами, наближений розв'язок нелінійних рівнянь (10) будемо у вигляді гармонічних рядів за часовою змінною [3]. Обмежимося побудовою розв'язку в одночастотному наближенні для змінних $A = \{w, \psi_x, \tilde{Q}_x, M_x\}$, що характеризують згин балки, утримуючи в рядах члени розвинення до другої гармоніки включно для змінних $B = \{u, N_x\}$ плоского деформування балки. Тоді маємо

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad B = B + \sum_{k=1}^2 (B' \cos k\omega t - B'' \sin k\omega t). \quad (11)$$

На основі підходу [3] й припущень (11) диференціальні рівняння (10) з частинними похідними зводяться до системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь порядку $n=18$ відносно коефіцієнтів розвинення (11). Лінеаризуючи отриману систему рівнянь методом квазілінеаризації [3], з врахуванням крайових умов (8) і (9) приходимо до послідовності лінійних крайових задач

$$\frac{d\bar{Y}^{n+1}}{dx} = A(J(k\omega), \bar{Y}^n) \bar{Y}^{n+1} + \bar{F}(q, N_E, M_E, \bar{Y}^n), \quad (12)$$

$$B_1 \bar{Y}^{n+1}(0) = 0, \quad B_2 \bar{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\bar{Y} = \{u', u'', u', u'', w', w'', \psi'_x, \psi''_x, N'_x, N''_x, N'_x, N''_x, \tilde{Q}'_x, \tilde{Q}''_x, M'_x, M''_x, u, N_x\}$ – вектор-стовпчик шуканих функцій; A і \bar{F} – квадратна матриця n -го порядку системи диференціальних рівнянь і вектор-стовпчик її правих частин відповідно, елементи яких тут не записуємо через їх громіздкість; B_1, B_2 – прямокутні матриці, які визначаються крайовими умовами (8) або (9).

Розв'язок лінійної крайової задачі (12) на кожному наближенні виконано за допомогою стійкого числового методу дискретної ортогоналізації [2] із використанням процедури продовження за параметром частоти навантаження і стандартної програми розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. В якості початкового наближення ($n=0$) використано розв'язок геометрично лінійної задачі.

Для активного демпфірування вимушених коливань балки розглянемо два способи визначення величини амплітуди електричного потенціалу актуатора V_a , що компенсує такі коливання [6]. Згідно першого способу, коли тиск сталої амплітуди відомо $q'_0 = q_0$, то маємо

$$|V_a| = k_a(\Delta_x) q_0. \quad (13)$$

За невідомого механічного навантаження показник V_a визначається на основі показника сенсора V_s через залежність оберненого зв'язку

$$|V_a| = G_{as} |V_s|. \quad (14)$$

У рівностях (13), (14) величини k_a, G_{as} є коефіцієнтами керування. Значення k_a, G_{as} , що відповідають максимальному гасінню коливань балки, визначаються формулами $k_a = \left| w^1_{q \max} \right| / \left| w^1_{E \max} \right|$ і $G_{as} = \left| V^1_a \right| / \left| V^1_s \right|$, де $\left| w^1_{q \max} \right|$ і $\left| w^1_{E \max} \right|$ – максимальні амплітуди прогину, які отримано при розв'язанні еталонних задач на частоті лінійного резонансу при $q_0 = 1$ Па, $V_a = 0$ В і при $q = 0$ Па, $V_a = 1$ В відповідно. Величини $\left| V^1_a \right|$ і $\left| V^1_s \right|$ визначаються із розв'язку задачі при $q_0 = 1$ Па на основі формул (14) і (5). Протифазність підведеного до актуатора електричного потенціалу для демпфірування коливань балки враховується за законом $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

Результати розрахунків та їх аналіз. Числові розрахунки проведено для балки з пасивного полімера з такими комплексними характеристиками [5]: $\overset{k}{E} = \overset{k}{E}' + i \overset{k}{E}''$; $\overset{k}{E}' = E(k\omega)^p$, $\overset{k}{E}'' = E' \beta(k\omega)^q$, $G_{13} = 0,025 E$, ($k = 1, 2$); $\overset{0}{E} = 0,308 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\beta = 0,16$; $q = -0,145$, $p = 0,076$; $\rho_0 = 2770$ кг/м³, $\lambda = 0,45$ Вт/(м² °К). П'єзошари актуатора і сенсора виготовлено з п'єзокераміки ЦТСтБС – 2 [1] з параметрами $s'_{11} = 12,5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $s'_{44} = 39,7 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $d'_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/м, $\epsilon'_{33} = 2100 \epsilon_0$, $d'_{15} = 4,5 \cdot 10^{-10}$ Кл/м, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\epsilon'_{11} = 18,5 \cdot 10^2 \epsilon_0$, $\rho_1 = \rho_2 = 7520$ кг/м³, $\delta^s_{11} = 0,0016$, $\delta^s_{44} = 0,0014$, $\delta^d_{31} = 0,004$, $\delta^d_{15} = 0,0035$, $\delta^e_{33} = 0,0035$, $\delta^e_{11} = 0,005$, $\lambda = 0,47$ Вт/(м² °К). Товщина п'єзошарів $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м. Коефіцієнт поперечного зсуву $k_s = 5/6$ [2].

З огляду на вид навантаження в балці реалізуються переважно згинні коливання. Тому розрахунки проведено для частот навантаження, що близькі до першого резонансу згинної моди коливань. На рис. 1 і рис. 2, відповідно, для шарнірного та жорсткого закріплення торців балки з параметрами $\ell = 0,04$ м, $h_0 = b = 0,02$ м представлено залежності амплітуди максимальних прогинів $\tilde{w}_q = \left| w^1_{q \max} \right| \cdot 10^7$ м і електричного показника сенсора $\tilde{V}_s = \left| V^1_s \right| \cdot 10^3$ В при пове-

рхневому тиску з амплітудою $q_0 = 1$ Па ($V_{\dot{a}} = 0$ В), а також амплітуди прогинів $\tilde{w}_E = |w_{E\max}^1| \cdot 10^5$ м при підводі до актуатора різниці електричного потенціалу $V_{\dot{a}} = 1$ В ($q_0 = 0$ Па) і компенсуючого одиничне механічне навантаження показника актуатора $\tilde{V}_{\dot{a}} = |V_{\dot{a}}^1| \cdot 10^2$ В від параметру п'єзоактивної області $\tilde{\Delta}_x = \Delta_x / \ell$ з центром в точці максимальних прогинів $x = 0,5\ell$. Тут суцільні криві відповідають розв'язку задачі при класичній постановці на резонансних частотах $\omega_r = 532$ с⁻¹ (рис. 1) і $\omega_r = 1236$ с⁻¹ (рис. 2), а штрихові – при врахуванні деформації поперечного зсуву на частотах $\omega_r = 518$ с⁻¹ і $\omega_r = 1096$ с⁻¹.

З аналізу кривих на рис. 1, 2 випливає, що врахування деформації зсуву призводить до зменшення першої резонансної частоти згинних коливань балки і підвищення еталонних динамічних характеристик при механічному і електричному навантаженнях. Умови закріплення країв балки якісно трансформують наведені на рис. 1, 2 характеристики і суттєво змінюють оптимальні розміри п'єзоактуатора, що реалізує при електричному навантаженні найбільші прогини балки а, отже, й максимальне гасіння її механічно збуджуваних коливань. Найбільш ефективними є актуатори з параметром електродування поверхні п'єзосарів $\tilde{\Delta}_x = 1$ при шарнірному (рис. 1) і $\tilde{\Delta}_x = 0,55$ при жорсткому закріпленні країв балки. Врахування деформації поперечного зсуву практично не впливає на параметр $\tilde{\Delta}_x$.

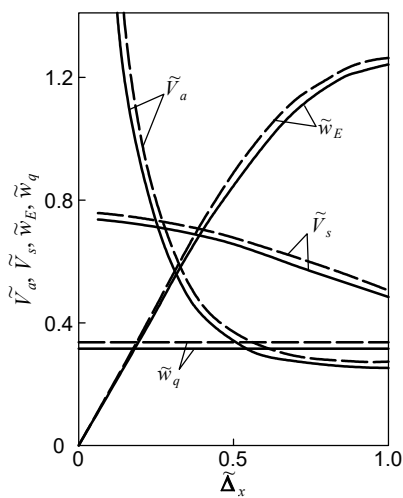


Рис. 1

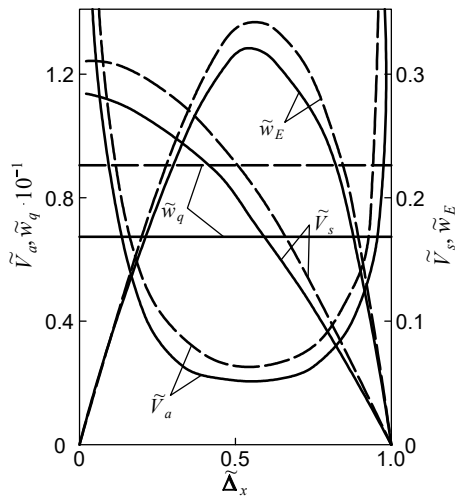


Рис. 2

На рис. 3а,б і рис. 4а,б представлено графіки частотних залежностей параметру максимальних амплітуд прогину \tilde{w} і електричного показника сенсора $|V_s|$ при шарнірному (рис. 3а, 4а) і жорсткому (рис. 3б, 4б) закріпленні країв балки з геометричними розмірами $\ell = 0,2$ м, $h_0 = b = 0,01$ м для найбільш ефективних параметрів Δ_x сенсора і актуатора. Криві 1–4 розраховані з врахуванням деформації поперечного зсуву для амплітуд навантаження $q_0 = (0,25; 0,5; 1,0; 1,5) \cdot 10^6$ Па, відповідно. Штрих-пунктирні криві 1, 2 розраховані при спільній протифазній дії на балку механічного q_0 і компенсуючого його електричного V_a навантаження з амплітудами $q_0 = 0,25 \cdot 10^6$ Па, $V_a = 165,3$ В (крива 1) і $q_0 = 0,5 \cdot 10^6$ Па, $V_a = 322,3$ В (крива 2). При цьому компенсуюче значення показників V_a розраховувалось згідно формул (13) і (14). Їх співпадіння підтверджує правомірність використання формули (14) за невідомого механічного навантаження.

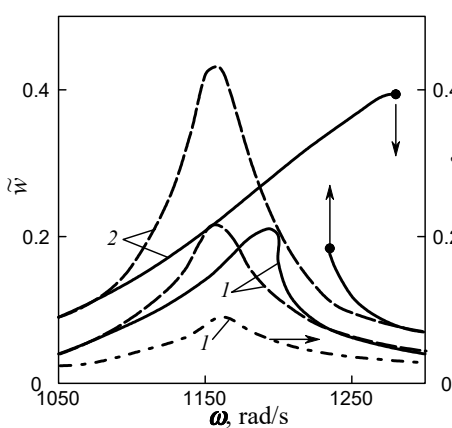


Рис. 3а

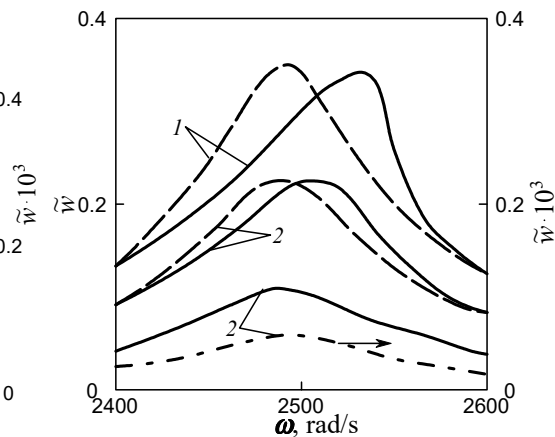


Рис. 3б

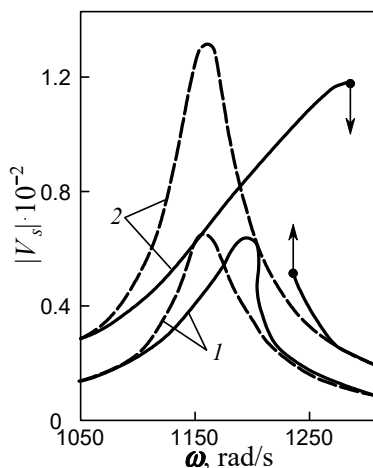


Рис. 4а

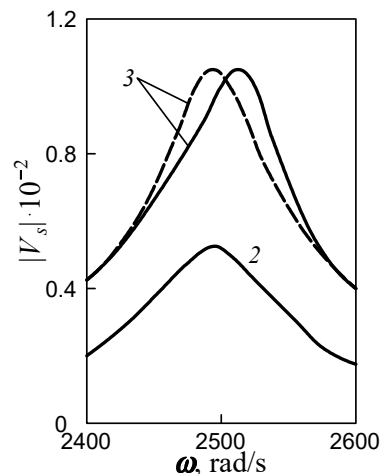


Рис. 4б

Аналіз суцільних кривих на рис. 3, 4 показує, що врахування геометричної нелінійності, що супроводжується формуванням амплітудно-частотних характеристик жорсткого типу, проявляється більшою мірою при коливаннях шарнірно опертої (рис. 3а, 4а), ніж жорстко защемленої балки (рис. 3б, 4б). Так, наприклад, з порівняння кривих 2 випливає, що при навантаженні $q_0 = 0,5 \cdot 10^6$ Па врахування геометричної нелінійності призводить до трансформації лінійних частотних характеристик в нелінійні для шарнірно опертої балки і не змінює їх при жорсткому защемленні її країв. Штрих-пунктирні криві на рис. 3 показують, що амплітуди механічних коливань балки при поданні на електроди актуатора компенсуючих електричних потенціалів зменшуються майже на три порядки. При цьому вплив геометричної нелінійності не проявляється.

Висновки. Розглянуто постановку і числове розв'язання задачі про вимушені резонансні коливання в'язкопруної балки з п'єзоелектричним сенсором і актуатором при врахуванні деформації поперечного зсуву і геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. Для найбільш енергомісткої першої моди згинних коливань балки досліджено вплив умов механічного закріплення, деформації зсуву і геометричної нелінійності на частотні залежності максимальних амплітуд прогину, електричні показники сенсора при моногармонічному навантаженні. Показано, що умови закріплення балки суттєво впливають на розміри ефективного п'єзоактуатора, який здійснює максимальне гасіння вимушених коливань. Врахування деформації поперечного зсуву зменшує резонансну частоту балки і не впливає на розміри ефективного актуатора. Геометрична нелінійність проявляється при навантаженнях, що викликають відносні прогини $\bar{w} \geq 0,1$, і спричиняє трансформацію частотних лінійних характеристик в нелінійні жорсткого типу. Показано можливість активного демпфірування балки п'єзоактуатором з використанням електричного показника сенсора за невідомого навантаження.

Список використаних джерел

1. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – Том 20, № 7. – С. 70–74.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка. – 1981. – 516 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка. – 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы / Прикл. механика, сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – М.: Мир. 1969. – № 4. – С. 168–173.
6. Karnaukhov V.G., Kyrychok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // International Applied Mechanics. – 2017. – Volume 53, 1. – P. 9–74.

Надійшла до редколегії 07.11.18

И. Киричок, д-р физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев,
Я. Жук, д-р физ.-мат. наук, проф., С.Круць, аспирант
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРОМ И АКТУАТОРОМ

На основании уточненных уравнений электромеханики вязкоупругих слоистых балок представлена постановка и численное решение задачи о вынужденных резонансных колебаниях гибкой вязкоупругой балки и их активном демпфировании пьезоэлектрическими сенсором и актуатором при учете деформации поперечного сдвига. Исследовано влияние условий механического закрепления краев балки, геометрической нелинейности и деформации поперечного сдвига на амплитудно-частотные характеристики и электрические показатели сенсора при вынужденных колебаниях балки и возможность активного демпфирования изгибной моды колебаний с помощью пьезоэлектрических актуатора и сенсора.

I. Kirichok, Full Doctor
Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv
Y. Zhuk, Full Doctor, Prof., S.Kruts, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ACCOUNTING FOR SHEAR DEFORMATION FOR FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE VISCOELASTIC BEAM WITH PIEZOELECTRIC SENSOR AND ACTUATOR

Statement of the problem on forced resonance vibration and active control of flexible viscoelastic beam containing piezoelectric sensor and actuator with taking account for shear deformation is elaborated on the base of refined theory of electromechanics. Influence of mechanical end fixing conditions, shear deformation accounting and geometrical nonlinearity on frequency characteristics and electric parameter of sensor are investigated for the case of forced vibration of the beam. Possibility of active damping of the beam flexural vibration mode by means of piezoelectric sensor and actuator is studied.

УДК: 517.53

М. Сухорольський, докт. фіз.-мат. наук, проф.,
В. Достойна, магістр прикладної математики та інформатики,
О. Веселовська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Національний університет "Львівська політехніка", Львів

СИСТЕМА ФУНКЦІЙ, БІОРТОГОНАЛЬНА З МНОГОЧЛЕНАМИ, СПОРІДНЕНИМИ З МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБИШОВА

Для многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова, побудовано асоційовані функції, біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини. Встановлено умови, за яких аналітичні функції розкладаються в ряди за розглядуваною системою многочленів. Розглянуто приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

ВСТУП. Властивості ортогональних систем многочленів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, у [4, 5, 6]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексних областях. У [4] розглянуто деякі властивості многочленів Чебишова у комплексній площині, а також розвинення аналітичних функцій за системою многочленів Чебишова першого роду у комплексних областях. Властивості многочленів Лежандра та їхніх похідних, а також розвинення аналітичних функцій у ряди за ними в комплексних областях вивчалися в [7], [8], відповідно.

У даній статті досліджується система многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова. Побудовано функції, що біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини, та розглянуто клас аналітичних функцій, які розкладаються в ряди за цією системою многочленів. Розглянуто також приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

Позначимо через $T_n(z)$, $U_n(z)$ многочлени Чебишова комплексної змінної першого та другого роду відповідно. Ці функції можна явно записати за допомогою формул [1, с.186]:

$$T_0(z) = 1, \quad T_n(z) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k}{n-k} z^{n-2k} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k z^{n-2k} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Нехай $Q_n(z)$ – многочлени комплексної змінної, які визначаються співвідношенням

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (z + t\sqrt{z^2 - 1})^n dt. \quad (3)$$

У [9] знайдено явні вирази для многочленів $Q_n(z)$ вигляду

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k^n z^{n-2k} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (4)$$

де $A_k^n = \frac{(-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k}{n+1}$.

Із (4) легко можна отримати формули для многочленів $Q_n(z)$ у випадках парних і непарних значень n :

$$Q_{2n}(z) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^k z^{2n-2k} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} 2^{2j} C_{n+j}^{2j} z^{2j}, \quad (5)$$

$$Q_{2n+1}(z) = \frac{1}{2n+2} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} 2^{2j+1} C_{n+j+1}^{2j+1} z^{2j+1}. \tag{6}$$

Враховуючи співвідношення (1), (2) та (4) маємо такі рекурентні співвідношення

$$U_n(z) = (n+1)Q_n(z), \tag{7}$$

$$T'_{n+1}(z) = (n+1)^2 Q_n(z). \tag{8}$$

Функції, що асоційовані з многочленами $Q_n(z)$

Розглянемо однозначну аналітичну у крузі $|z| < R$, $1 < R \leq \infty$, функцію $f(z)$ комплексної змінної. Її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{9}$$

Знайдемо формальне розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Для цього підставимо у рівність (9) вирази для степенів z^n через многочлени $Q_n(z)$ [9]. Маємо:

$$z^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_k^n Q_{n-2k}(z), \tag{10}$$

$$z^{2n} = \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j}^{2n} Q_{2j}(z), \tag{11}$$

$$z^{2n+1} = \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j}^{2n+1} Q_{2j+1}(z), \tag{12}$$

де $\alpha_k^n = \frac{1}{2^n} \frac{(n-2k+1)^2 C_n^k}{n-k+1}$, $\alpha_{n-j}^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2j+1)^2 C_{2n}^{n-j}}{n+j+1}$, $\alpha_{n-j}^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2j+2)^2 C_{2n+1}^{n-j}}{n+j+2}$. Тоді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_k^n Q_{n-2k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j}^{2n} Q_{2j}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j}^{2n+1} Q_{2j+1}(z).$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_{2j}(z) \sum_{n=j}^{\infty} \alpha_{n-j}^{2n} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} + \sum_{j=0}^{\infty} Q_{2j+1}(z) \sum_{n=j}^{\infty} \alpha_{n-j}^{2n+1} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_{2j}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2k+2j} \frac{f^{(2k+2j)}(0)}{(2k+2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} Q_{2j+1}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2k+2j+1} \frac{f^{(2k+2j+1)}(0)}{(2k+2j+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2k+m} \frac{f^{(2k+m)}(0)}{(2k+m)!}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$L_m(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2k+m} \frac{f^{(2k+m)}(0)}{(2k+m)!}. \tag{13}$$

Враховавши співвідношення (13), отримаємо розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(f) Q_m(z).$$

Розглянемо функції $\omega_n(z)$, що асоційовані з многочленами $Q_n(z)$ [3, с.120],

$$\omega_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2k+n} \frac{1}{z^{2k+n+1}}, \tag{14}$$

де $\alpha_k^{2k+n} = \frac{(n+1)^2 C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)}$.

Використовуючи означення (14), запишемо функції $\omega_n(z)$ для випадку парних і непарних значень індексів n :

$$\omega_{2m}(z) = (2m+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+2m}^k}{2^{2k+2m} (k+2m+1)} \frac{1}{z^{2k+2m+1}} = (2m+1)^2 \sum_{l=m}^{\infty} \frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l} (l+m+1)} \frac{1}{z^{2l+1}}, \tag{15}$$

$$\omega_{2m+1}(z) = (2m+2)^2 \sum_{l=m}^{\infty} \frac{C_{2l+1}^{l-m}}{2^{2l+1} (l+m+2)} \frac{1}{z^{2l+2}}. \tag{16}$$

Теорема 1. Функції $\omega_m(z)$, що асоційовані з многочленами $Q_n(z)$, аналітичні в області $|z| > 1$.

Доведення. Використовуючи асимптотичну формулу $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$, $n \rightarrow \infty$, знайдемо асимптотичну оцінку для коефіцієнтів ряду (14):

$$\alpha_k^{2k+n} = \frac{(n+1)^2 (2k+n)!}{2^{2k+n} (k+n+1) k! (k+n)!} \sim \frac{(n+1)^2 (2k+n)^{2k+n}}{2^{2k+n} k^k (k+n)^{k+n} (k+n+1)} = \frac{(n+1)^2 \left(1 + \frac{n}{2k}\right)^{2k+n}}{(k+n+1) \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{k+n}} \sim \frac{(n+1)^2}{k+n+1} \quad (17)$$

Звідси випливає, що для довільного фіксованого значення n існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha_k^{2k+n}} = 1,$$

тому ряд в (14) збігається в області $|z| > 1$.

Зауважимо, що коефіцієнти $L_m(f)$ можна подати у вигляді контурних інтегралів

$$L_m(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \omega_m(z) dz,$$

де γ – додатно орієнтоване коло $|z| = q$ ($1 < q < R$).

Наслідок 1. Функції $\overline{\omega}_n(z)$, $\overline{\omega}_n(z)$, що асоційовані з многочленами $U_n(z)$ та $T'_{n+1}(z)$ відповідно, аналітичні в області $|z| > 1$ і мають вигляд

$$\overline{\omega}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1) C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)} \frac{1}{z^{2k+n+1}}, \quad \overline{\omega}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)} \frac{1}{z^{2k+n+1}}.$$

Нехай $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ – символ Кронекера.

Означення 1. Система асоційованих функцій $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ називається біортогональною із системою много членів $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, якщо справджуються умови

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} V_n(z) \omega_k(z) dz = \delta_{nk},$$

де γ – додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функцій $\omega_k(z)$.

Теорема 2. Система асоційованих функцій $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ біортогональна із системою много членів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ вздовж замкнутого контура γ , що охоплює круг $|z| \leq 1$, тобто виконуються рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_n(z) \omega_m(z) dz = \delta_{nm}, \quad (18)$$

де функції $\omega_m(z)$ визначені співвідношенням (14).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок парних значень індексів m, n . Підставивши вирази (5) та (15) у ліву частину рівності (18), отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_{2n}(z) \omega_{2m}(z) dz = \frac{(2m+1)^2}{2n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} 2^{2j} C_{n+j}^{2j} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l} (l+m+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^{2l-2j+1}}.$$

Звідси, на підставі відомого результату [2, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$$

де L – довільний замкнений додатно орієнтований контур, що охоплює точку a , одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_{2n}(z) \omega_{2m}(z) dz = \frac{(2m+1)^2}{2n+1} \sum_{j=m}^n (-1)^{n-j} \frac{C_{n+j}^{2j} C_2^{j-m}}{j+m+1}.$$

Аналогічно, враховуючи вирази (6) та (16), для непарних значень індексів m, n знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_{2n+1}(z) \omega_{2m+1}(z) dz = \frac{(2m+2)^2}{2n+2} \sum_{j=m}^n (-1)^{n-j} \frac{C_{n+j+1}^{2j+1} C_2^{j-m}}{j+m+2}.$$

Використавши комбінаторні тотожності [9]

$$\frac{(2m+1)^2}{2n+1} \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{n-k} C_{n+k}^{2k} C_{2k}^{k-m}}{k+n+1} = \delta_{nm}, \quad \frac{(2m+2)^2}{2n+2} \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{n-k} C_{n+k+1}^{2k+1} C_{2k+1}^{k-m}}{k+n+2} = \delta_{nm},$$

отримаємо рівності (18).

Твердження 1. Система многочленів $Q_n(z)$ ортогональна з вагою $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ на відрізку $[-1;1]$, тобто виконуються рівності

$$\frac{2}{\pi(n+1)^2} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) \omega(x) dx = \delta_{nm}. \tag{19}$$

Доведення випливає з ортогональності многочленів $U_n(z)$ та співвідношення (7).

Теорема 3. Асоційовані функції $\omega_n(z)$ мають інтегральне зображення

$$\omega_n(z) = \frac{2}{\pi(n+1)^2} \int_{-1}^1 Q_n(x) \frac{\sqrt{1-x^2}}{z-x} dx. \tag{20}$$

Доведення. Запишемо для многочлена $Q_n(x)$ інтегральну формулу Коші

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_n(z)}{z-x} dz,$$

де γ – контур, який є межею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Підставивши дану формулу у співвідношення (19), одержимо

$$\frac{2}{\pi(n+1)^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_n(z)}{z-x} dz \right) Q_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \delta_{nm}.$$

Змінюючи у лівій частині останньої рівності порядок інтегрування, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_n(z) \frac{2}{\pi(n+1)^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{Q_m \sqrt{1-x^2}}{z-x} dx \right) dz = \delta_{nm}.$$

Звідси на підставі співвідношень (18) приходимо до зображення (20).

Позначимо через D_R – область, межею якої є еліпс Γ_R , що визначається рівнянням

$$z = \frac{1}{2} (R e^{i\varphi} + R^{-1} e^{-i\varphi}) \quad (R > 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi). \tag{21}$$

Теорема 4. Мас місце розвинення

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) \omega_n(t), \tag{22}$$

яке рівномірно збігається для $t \in \bar{D}_\rho^\infty, z \in \bar{D}_r^0$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty, \rho > \max\{1, r\}, \bar{D}_\rho^\infty$ – замикання області, що містить нескінченно віддалену точку, межею якої є еліпс Γ_ρ , \bar{D}_r^0 – замикання області, що містить нульову точку, межею якої є еліпс Γ_r .

Доведення. Підставивши у праву частину рівності (22) вирази (15) та (16) для асоційованих функцій, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) \omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 Q_{2n}(z) \sum_{l=n}^{\infty} \frac{C_{2l}^{l-n}}{2^{2l} (l+n+1) t^{2l+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^2 Q_{2n+1}(z) \sum_{l=n}^{\infty} \frac{C_{2l+1}^{l-n}}{2^{2l+1} (l+n+2) t^{2l+2}}.$$

Змінивши в двох останніх сумах порядок сумування та врахувавши співвідношення (11) та (12), матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) \omega_n(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{t^{2l+1}} \frac{1}{2^{2l}} \sum_{n=0}^l \frac{(2n+1)^2 C_{2l}^{l-n}}{n+l+1} Q_{2n}(z) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{t^{2l+2}} \frac{1}{2^{2l+1}} \sum_{n=0}^l \frac{(2n+2)^2 C_{2l+1}^{l-n}}{n+l+2} Q_{2n+1}(z) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{t^{2l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l+1}}{t^{2l+2}} = \frac{1}{t} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t} \right)^m = \frac{1}{t} \frac{1}{1 - \frac{z}{t}} = \frac{1}{t-z}. \end{aligned}$$

Покажемо, що ряд в (22) рівномірно збіжний для $t \in \bar{D}_\rho^\infty, z \in \bar{D}_r^0$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty, \rho > \max\{1, r\}$.

Врахувавши оцінку

$$|Q_n(z)| \leq R^n, \quad z \in \bar{D}_R, \tag{23}$$

для многочленів $Q_n(z)$ з [9], отримаємо

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) \omega_n(t) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(z)| |\omega_n(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 r^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)} \frac{1}{|t|^{2k+n+1}}. \quad (24)$$

На підставі асимптотичних рівностей (17) ряд у правій частині нерівності (24) еквівалентний ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 r^n \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+1) |t|^{2k+n+1}}.$$

Останній ряд оцінюється рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{r}{|t|} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|t|^{2k+1}} = \frac{|t|}{|t|^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{r}{|t|} \right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{r}{|t|} \right)^n,$$

який збігається при $r < \rho$. Звідси випливає, що ряд (22) збігається рівномірно у зазначених множинах.

Розвинення аналітичних функцій за системою многочленів $Q_n(z)$

Теорема 5. Нехай функція $f(z)$ комплексної змінної однозначна та аналітична в області D_R , межею якої є еліпс Γ_R ($1 < R \leq \infty$) з рівнянням (21), і обмежена на Γ_R . Тоді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) Q_n(z) \quad (25)$$

і ряд в (25) рівномірно збіжний в замиканні області \bar{D}_ρ , що обмежена еліпсом Γ_ρ , де $1 \leq \rho < R$.

Доведення. Оскільки степеневий ряд (9) рівномірно збігається в крузі $\{z : |z| \leq r\}$, $r < R$, то

$$\frac{|f^{(2j+m)}(0)|}{(2j+m)!} \leq \frac{K}{r^{2j+m}}, \quad K = \text{const}. \quad (26)$$

Враховувавши співвідношення (13) та нерівності (23), (26), отримаємо оцінку

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) Q_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |L_n(f)| |Q_n(z)| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)} \frac{1}{r^{2k}}.$$

Останній ряд на підставі асимптотичних рівностей (17) еквівалентний ряду

$$K \sum_{m=s}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k+n+1} \frac{1}{r^{2k}}.$$

Мажорантним рядом для останнього є збіжний при $R < r$ ряд $K \frac{r^2}{r^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^n$. Звідси випливає рівномі-

рна збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) Q_n(z)$ у зазначеній області.

Нехай a позначає комплексну сталу.

Приклад 1. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{a-z}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0) = \frac{s!}{a^{s+1}}$, то із співвідношення (13) одержимо

$$L_n(f) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n} (k+n+1)} \frac{1}{a^{2k+n+1}} = \omega_n(a).$$

Підставляючи вираз для $L_n(f)$ в (25), маємо

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z) \quad (|a| > |z|).$$

Приклад 2. Розкласти функцію $f(z) = \frac{a}{a^2 - z^2}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки для многочленів $Q_n(z)$ виконується співвідношення $Q_n(-z) = (-1)^n Q_n(z)$ і має місце рівність

$$\frac{1}{(a-z)(a+z)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z} \right),$$

то, використовуючи приклад 1, знаходимо

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega_n(a) Q_n(z) \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \omega_n(a) Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки при $n = 2k$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_{2k}(a) Q_{2k}(z) \quad (|a| > |z|).$$

Приклад 3. Розкласти функцію $\frac{z}{a^2 - z^2}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Використовуючи рівність $\frac{z}{a^2 - z^2} = \frac{a+z-a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a-z} - \frac{a}{a^2 - z^2}$, приклади 1 та 2, матимемо

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \omega_n(a) Q_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) \omega_n(a) Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки при $n = 2k + 1$, тому

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+1}(a) Q_{2k+1}(z) \quad (|a| > |z|).$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(z) = e^{az}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0) = a^s$, то із співвідношення (13) знаходимо

$$\begin{aligned} L_n(f) &= (n+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n}} \frac{a^{2k+n}}{(k+n+1)(2k+m)!} = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n} = \\ &= \frac{2(n+1)^2}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2j+n+1} = \frac{2(n+1)^2}{a} I_{n+1}(a), \end{aligned}$$

де $I_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – модифіковані функції Бесселя першого роду. Тому

$$e^{az} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 I_{n+1}(a) Q_n(z). \tag{27}$$

Із (27) можна отримати розвинення за многочленами $Q_n(z)$ тригонометричних, а також гіперболічних функцій.

Приклад 5. Розкласти функцію $f(z) = \sin az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $\sin az = \frac{1}{2i}(e^{iaz} - e^{-iaz})$, то

$$\sin az = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) (n+1)^2 I_{n+1}(ia) Q_n(z) = -\frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 I_{2k+2}(ia) Q_{2k+1}(z).$$

Враховуючи, що

$$I_n(ia) = iJ_n(a), \tag{28}$$

де $J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – функції Бесселя першого роду, знаходимо

$$\sin az = -\frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 i^{2k+2} J_{2k+2}(ia) Q_{2k+1}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2)^2 J_{2k+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 5. Розкласти функцію $f(z) = \cos az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Маємо

$$\cos az = \frac{1}{2}(e^{iaz} + e^{-iaz}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) (n+1)^2 I_{n+1}(ia) Q_n(z) = \frac{2}{ia} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^2 I_{2k+1}(ia) Q_{2k}(z).$$

Враховуючи співвідношення (28), одержимо

$$\cos az = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^2 J_{2k+1}(a) Q_{2k}(z).$$

Приклад 6. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{sh} az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}(e^{az} - e^{-az})$, то

$$\operatorname{sh} az = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) (n+1)^2 I_{n+1}(a) Q_n(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 I_{2k+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 7. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{ch} az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Маємо

$$\operatorname{ch} az = \frac{1}{2}(e^{az} + e^{-az}) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) (n+1)^2 I_{n+1}(a) Q_n(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^2 I_{2k+1}(a) Q_{2k}(z).$$

Зауважимо, що на основі співвідношень (7) та (8) можна отримати наступні розклади:

$$\begin{aligned} e^{az} &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) I_{n+1}(a) U_n(z) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(a) T'_{n+1}(z), \\ \sin az &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2) J_{2k+2}(a) U_{2k+1}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+2}(a) T'_{2k+2}(z), \\ \cos az &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) J_{2k+1}(a) U_{2k}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(a) T'_{2k+1}(z), \\ \operatorname{sh} az &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) I_{2k+2}(a) U_{2k+1}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+2}(a) T'_{2k+2}(z), \\ \operatorname{ch} az &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) I_{2k+1}(a) U_{2k}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1}(a) T'_{2k+1}(z). \end{aligned}$$

ВИСНОВКИ. Методи розвинення функцій у степеневі ряди та в ряди за ортогональними многочленами і іншими ортогональними функціями однієї чи декількох змінних широко використовують при вивченні математичних моделей у фундаментальних та прикладних науках. Не менш перспективним є метод розкладу функцій за біортогональними системами функцій у комплексних областях. За певних умов для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею. Відшукання коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності і вони виражаються через похідні функцій, які розкладаються в ці ряди. Актуальною задачею є розвиток математичного апарату побудови та дослідження властивостей біортогональних систем функцій стосовно до розвинення функцій у ряди за цими системами.

У даній роботі побудовано асоційовані функції, біортогональні на замкнених кривих комплексної площини з многочленами, що споріднені з многочленами Чебишова. Встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти в ряди за цією системою многочленів. Розглянуто приклади розкладів функцій в ряди за даною системою многочленів у комплексних областях. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першими похідними многочленів Чебишова першого роду комплексних змінних.

Список використаних джерел

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
2. Жевержев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.
3. Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
6. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.
7. Сухорольский М.А. Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній області // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 3–14.
8. Сухорольський М.А., Достойна В.В. Розклад аналітичних у крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 687. – С. 105–121.
9. Сухорольський М.А., Достойна В.В., Веселовська О.В. Многочлены, споріднені з многочленами Чебишова // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – 15. – С. 35–41.

Надійшла до редколегії 07.04.18

М. Сухорольский, докт. физ.-мат. наук, проф.,
В. Достойная, магистр прикладной математики и информатики,
О. Веселовская, канд. физ.-мат. наук, доцент.
 Национальный университет "Львівська політехніка", Львов

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ, БИОРТОГОНАЛЬНЫХ С МНОГОЧЛЕНАМИ, РОДСТВЕННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШОВА

Для многочленов комплексной переменной, родственных с многочленами Чебышова, построены ассоциированные функции, биортогональные с ними на замкнутых кривых комплексной плоскости. Получены условия, при которых аналитические функции представляемы в виде рядов по рассматриваемой системе многочленов. Рассмотрены примеры таких разложений. Получены разложения в ряды некоторых функций по многочленам Чебышова второго рода и первым производным многочленов Чебышова первого рода в комплексных областях.

М. Sukhorolsky, Full Doctor, Professor,
V. Dostoyna, Master in Applied Mathematics and Informatics,
O. Veselovska, PhD in Mathematics and Physics, Associate Professor
 National University "Lvivska Politechnika", Lviv

THE SYSTEM OF FUNCTIONS BIORTOGONAL TO POLYNOMIALS RELATED TO THE CHEBYSHOV POLYNOMIALS

For polynomials of a complex variable that are related to the Chebyshev polynomials, associate functions biorthogonal with them on closed curves of the complex plane are constructed. The conditions of expansion of analytical functions into series by polynomials under consideration are established. The examples of such expansions are given. Expansions of some functions into the series by Chebyshev polynomials of the second genus and the first derivatives of Chebyshev polynomials of the first genus of complex variables are obtained.

ДО 80 – РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА

2 січня 2018 року виповнилося 80 років Почесному доктору Київського національного університету імені Тараса Шевченка, дійсному члену Національної академії наук України, видатному українському математику Анатолію Михайловичу Самойленку, педагогічна діяльність якого більше 50 років пов'язана з механіко-математичним факультетом.

Народився Анатолій Михайлович в селі Потіївка на Житомирщині, в родині Михайла Григоровича і Марії Василівни. Його батько був ветеринарним лікарем, учасником Великої вітчизняної війни, а мати присвятила своє життя вихованню дітей – Володимира, Віталія і Анатолія. Після закінчення середньої школи в місті Малин Анатолій вступає на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка. Невдовзі серйозне захоплення математикою вносить корективи у подальші життєві плани юнака і він приймає рішення продовжити навчання уже на механіко-математичному факультеті. Він із захопленням поринає у світ математики і успішно навчається – на четвертому і п'ятому курсах є Ленінським стипендіатом. Із вдячністю Анатолій Михайлович згадує своїх вчителів: професорів Б.В. Гнеденка, Л.А. Калужніна, Ю.М. Березанського, Г.М. Положія, М.М. Назарова, Ю.О. Митропольського, Й.З. Штокала, Б.Я. Букреева та багатьох інших. У 1960 році А.М. Самойленко з відзнакою закінчує університет і за запрошенням академіка Ю.О. Митропольського вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР.

Вибір теми дисертації – "Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з «нерегулярною» правою частиною" – був повністю закономірним, бо саме в цей час бурхливо розвивається, набираючи світового авторитету, Київська школа з нелінійної механіки, фундаторами якої були всесвітньо відомі академіки АН СРСР і АН УРСР М.М. Крилов і М.М. Боголюбов.

Після закінчення аспірантури у 1963 році А.М. Самойленко протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН УРСР, спочатку на посаді молодшого наукового співробітника, а з 1965 року – старшого наукового співробітника. Через чотири роки після успішного захисту кандидатської дисертації, у 1967 році Анатолій Михайлович блискуче захищає докторську дисертацію на тему "Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем" і стає наймолодшим в Україні доктором наук. З 1987 року А.М. Самойленко – завідувач відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики АН УРСР, з 1988 року – директор цього провідного математичного центру, яким він керує уже більше 30 років.

Наукові досягнення Анатолія Михайловича не можуть не вражати своєю фундаментальністю і широко відомі фахівцям з диференціальних рівнянь, теорії нелінійних коливань, теорії функцій і математичної фізики. Він по праву вважається основоположником цілої низки важливих напрямів сучасної математики. Його основні наукові інтереси стосуються складних і актуальних проблем якісної і аналітичної теорії звичайних диференціальних рівнянь і нелінійної механіки, дослідження яких бере свій початок ще з класичних праць А. Пуанкаре і О.М. Ляпунова. У зв'язку з цим слід згадати перш за все про праці Анатолія Михайловича, які присвячені вивченню поведінки інтегральних кривих на інваріантних тороїдальних многовидах загального вигляду та в їх околах, розробці теорії збурень тороїдальних многовидів, створенню нових і розвитку класичних асимптотичних методів нелінійної механіки, побудові теорії багаточастотних коливань. Під впливом праць видатних математиків А.Н. Колмогорова, В.І. Арнольда, М.М. Боголюбова і Ю. Мозера у середині 60-х минулого століття А.М. Самойленко проводить глибокі дослідження актуальних задач теорії багаточастотних нелінійних коливань, що пов'язані із класичною проблемою малих знаменників. За допомогою методу послідовної заміни змінних із прискороною збіжністю та техніки згладжування вченому вдалося отримати низку важливих пріоритетних результатів, що стосуються скінченно диференційованих неконсервативних систем нелінійної механіки, і, зокрема, довести теореми про випрямлення майже паралельного векторного поля на торі довільної розмірності, про існування лінеаризуючого дифеоморфізму в околі тороїдального многовиду, що заповнюється квазіперіодичною траєкторією, про звідність (у сенсі Ляпунова) лінійних квазіперіодичних систем із майже постійними коефіцієнтами та про міру множини таких систем. Зазначимо, що техніка побудови звідного перетворення лінійної квазіперіодичної системи за допомогою методу прискороеної збіжності згодом знайшла своє ефективне застосування при вивченні структури спектру одновимірного стаціонарного оператора Шредінгера з квазіперіодичним потенціалом. Ці та інші результати вченого відображені в монографії "Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике" (Київ, Наукова думка, 1969, співавтори – М.М. Боголюбов, Ю.О. Митропольський [Англійський переклад: "Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics", Berlin – New York, Springer – Verlag, 1976]).

Значну увагу у своїх наукових працях Анатолій Михайлович приділив актуальним проблемам теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Йому належить розробка ефективного методу дослідження задачі про збереження інваріантних торів при малих збуреннях. В основу свого оригінального підходу А.М. Самойленко поклав введене ним поняття функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі, яке у сучасній математичній літературі відоме як "функція Гріна – Самойленка", яка виявилася ефективним засобом аналізу багатьох питань теорії динамічних систем (дискретних, імпульсних, злічених), систем у банаховому просторі, диференціальних рівнянь із запізненням і задач математичної фізики. Говорячи про переваги цього підходу, слід звернути увагу на такі обставини: на відміну від традиційних методів теорії збурень використання функції Гріна при розв'язанні задачі про збереження інваріантного многовиду дозволяє уникнути введення в його околі координат, що зводять незбурену систему до системи зі сталими коефіцієнтами, та довести не лише теореми про існування стійких і гіперболічних інваріантних торів, а й вивчити їх гладкість.

Характерною рисою наукової діяльності вченого є розробка нових ефективних конструктивних методів дослідження. Зокрема, Анатолій Михайлович розвинув і обґрунтував наближений проективно-ітеративний метод відшукування інваріантних торів за допомогою збіжної послідовності тригонометричних поліномів, який знайшов застосування при вивченні багатьох складних задач теорії нелінійних динамічних систем.

Завершенням циклу праць, що стосуються згаданих вище проблем, стала фундаментальна монографія вченого "Элементы математической теории многочастотных колебаний" (Москва, Наука, 1987 [Англійський переклад.: "Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations", Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991]).

Досліджуючи поведінку траєкторій динамічної системи в околі її інваріантного тороїдального многовиду, Анатолій Михайлович знайшов досить загальні умови існування дифеоморфізму, що пов'язує таку систему із відповідної канонічною формою. Виявилось, що остання має структуру лінійного (однорідного) розширення динамічної системи, що індукується системою на її інваріантному многовиді. У зв'язку із цими дослідженнями поведінки траєкторій слід згадати тонкий результат ергодичного характеру: у випадку квазіперіодичної обмотки інтегральне середнє від довільної неперервної функції вздовж траєкторій нелінійного розширення системи на торі прямує до інтегралу за ергодичною мірою на торі. Вчений разом зі своїми учнями розробив змістовну теорію, яка пояснює, яким чином пов'язані між собою такі істотні характеристики розширень, як властивість експоненціальної дихотомії та розщеплення, наявність (знакозмінної) функції Ляпунова та існування функції Гріна-Самойленка. Ці результати було підсумовано у монографії "Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова" (Київ, Наукова думка, 1990, співавтори – Ю.О. Митропольський, В.Л. Кулик [Англійський переклад: "Dichotomies and stability in non-autonomous linear systems", London – New York, Taylor & Francis, 2003]).

Розглядаючи внесок А.М. Самойленка у теорію динамічних систем слід також згадати про його результати, що стосуються вивчення інваріантних множин динамічних систем, які породжені автономними диференціальними рівняннями, за допомогою функцій Ляпунова. Аналізуючи другий метод Ляпунова, дослідник помітив, що у випадку знакосталості функції Ляпунова, за певних умов її нулі утворюють інваріантно стійку множину. Однією з таких умов виявилось припущення про компактність нулів знакосталої функції у досліджуваній області. Знакосталу функцію із такою властивістю її нулів вчений назвав знаковизначеною у даній області, розширивши тим самим поняття знаковизначеної функції Ляпунова, для якої множина нулів складається лише з однієї точки – початку координат. У термінах таких функцій та їх похідних вдалося описати як глобально, так і локально інваріантні множини, та дослідити їх стійкість. При цьому виникла природна задача: які умови гарантують те, що локально інваріантна множина або її частина є глобально інваріантною? Анатолій Михайлович успішно розв'язав цю задачу, показавши, що такими умовами є аналітичність правих частин системи і знаковизначеної функції, яка описує локально інваріантну множину.

Заслужують також на особливу увагу результати вченого, які стосуються принципу зведення – методу, що дозволяє звести дослідження стійкості інваріантної множини до вивчення її стійкості для початкових даних із деякого многовиду, що містить дану множину. У випадку, коли інваріантна множина є точкою, вказана задача була розв'язана відомим математиком В.А. Пліссом, а отриманий ним результат має назву "принцип зведення у теорії стійкості". А.М. Самойленко отримав аналогічний результат для більш загального випадку, коли досліджувана інваріантна множина не обов'язково одноточкова, а лежить на множині нулів деякої знакосталої функції і при цьому множина нулів є лише локально інваріантною.

Одне з центральних місць в дослідженнях Анатолія Михайловича посідають проблеми багаточастотних коливань. У цьому напрямі йому належить низка глибоких результатів із розробки асимптотичних методів для коливних систем з малим збуренням та побудови перетворень, які зводять слабо нелінійну багаточастотну коливну систему до нормальної форми як в нерезонансному, так і в резонансному випадках. А.М. Самойленко довів теореми про існування у системах такого типу інваріантних тороїдальних многовидів, які породжуються так званими квазістаціонарними станами відповідними нормалізованих систем, і отримав таким чином узагальнення класичної теореми М.М. Боголюбова про обґрунтування методу усереднення на нескінченному проміжку часу. Ці результати вивели вченого в число безсумнівних світових лідерів у цьому напрямі досліджень. Ще один напрям досліджень Анатолія Михайловича з теорії нелінійних коливань стосується вивчення резонансних явищ у багаточастотних системах із повільно змінними параметрами, де ним отримані тонкі оцінки осциляційних інтегралів, що виникають при вивченні процесу проходження траєкторією системи резонансних підмножин фазового простору. Саме за допомогою різних варіантів оцінок такого типу вченому і його учням вдалося отримати нові глибокі результати з обґрунтування методу усереднення в коливних системах з числом частот більше двох. Ці та пов'язані з ними інші результати вченого стали основою для монографій "Математические проблемы нелинейной механики" (Київ, Вища школа, 1987, співавтор – Ю.О. Митропольський), "Багаточастотні коливання нелінійних систем" (Київ, Інститут математики НАН України, 1998, співавтор – Р.І. Петришин [Англійський переклад: "Multi-frequency oscillations of nonlinear systems", Dordrecht – Boston – London, Kluwer Academic Publishers, 2004]), "Математичні аспекти теорії нелінійних коливань" (Київ, Наукова думка, 2004, співавтор – Р.І. Петришин).

Із дослідженнями Анатолія Михайловича і його учнів справедливо пов'язують виникнення і формування у 70-х–80-х роках минулого століття теорії диференціальних систем з імпульсною дією. Публікації саме авторів наукової школи А.М. Самойленка заклали основу для систематичного вивчення багатьох питань, що стосуються якісної і аналітичної теорії імпульсних систем. Результати досліджень з теорії імпульсних систем відображені у монографії "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием" (Київ, Вища школа, 1987, співавтор – М.О. Перестюк). Ця монографія стала першою у світовій літературі книгою, в якій систематично викладено основні результати з теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Згодом, у 1995 році, доповнена новими результатами монографія була перевидана англійською мовою ("Impulsive differential equations", Singapore, World Scientific, 1995).

Ще одним яскравим прикладом фундаментальності досліджень вченого є його результати з чисельно-аналітичних методів знаходження періодичних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь. У 1965 році ним запропоновано метод, який у сучасній літературі відомий як "чисельно-аналітичний метод Самойленка". Цей метод дозволяє процес пошуку періодичного розв'язку умовно розбити на два етапи. Спочатку за допомогою деякої модифікації методу Пікара будується послідовність періодичних функцій, що залежать від параметру, який відіграє роль загального початкового значення для кожної функції із цієї послідовності. Одночасно конструюється і деяка послідовність відображень фазового простору для досліджуваної системи. Граничне, так зване визначальне, відображення, якщо воно існує, має таку саму властивість, а його нуль якраз і є початковим значенням для шуканого періодичного розв'язку.

Таким чином, другий етап чисельно-аналітичного методу полягає у розв'язанні визначальної системи рівнянь для знаходження початкового значення шуканого періодичного розв'язку. Обґрунтовуючи свій метод, Анатолій Михайлович отримав умови існування точного періодичного розв'язку та його наближень в термінах обертання векторного поля, яке породжено наближенням визначальним відображенням.

У подальшому цей метод одержав значний розвиток і знайшов застосування при дослідженні нелінійних крайових задач у багатьох працях як самого автора, так і його учнів, а відповідні результати знайшли своє втілення у монографіях "Численно-аналитические методы исследования периодических решений" (Київ, Вища школа, 1976, співавтор – М.Й. Ронто [Англійський переклад: "Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions", Moscow, Mir Publishing, 1979]), "Численно-аналитические методы исследования краевых задач" (Київ, Наукова думка, 1985, співавтор – М.Й. Ронто [Англійський переклад: "Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems", Singapore, World Scientific, 2000]), "Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными" (Київ, Наукова думка, 1992, співавтор – Б.П. Ткач).

Ідеї та методи А.М. Самойленка виявилися настільки глибокими і універсальними, що знайшли своє успішне застосування при вивченні багатьох задач теорії різницевих, диференціально-функціональних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, диференціальних рівнянь у банахових просторах, стохастичних диференціальних рівнянь. Так, використання функції Гріна-Самойленка дозволило вченому разом із учнями побудувати загальну теорію інваріантних тороїдальних многовидів систем різницевих рівнянь і рівнянь із запізнюючим аргументом. У циклі статей і в монографіях "Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами" (Київ, Наукова думка, 1984, співавтори – Ю.О. Митропольський, Д.І. Мартинюк [Англійський переклад: "Systems of evolution equations with periodic and quasi periodic coefficients", Dordrecht – Boston – London, Kluwer Academic Publishers Group, 1993]), "Обобщенно-обратные операторы и нетеровые краевые задачи" (Київ, Інститут математики НАН України, 1995, співавтори – О.А. Бойчук, В.Ф. Журавльов), "Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems" (Utrecht – Boston, VSP, Brill Academic Publishers, 2004, співавтор – О.А. Бойчук), переконливо продемонстровано високу ефективність чисельно-аналітичного методу як засобу розв'язання не лише періодичних, але і багатоточкових крайових задач для широкого кола рівнянь, у тому числі, рівнянь із запізненням, різницевих, інтегро-диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь, рівнянь з імпульсною дією, рівнянь з частинними похідними, нетерових задач, тощо. Тут варто згадати про результати вченого, що стосуються умов існування глобальних двосторонніх розв'язків систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами і відхиленням аргументу. Як відомо, на відміну від звичайних лінійних рівнянь, такі системи можуть і не мати визначених на всій осі розв'язків. Дослідження задачі про існування таких розв'язків Анатолій Михайлович здійснив вельми оригінальним методом, пов'язавши дане питання із можливістю побудови за вихідною системою з відхиленням аргументу відповідної лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами, всі розв'язки якої є розв'язками вихідної системи.

Суттєвим є внесок А.М. Самойленка в теорію диференціальних і різницевих рівнянь у банахових просторах, зокрема, просторах обмежених числових послідовностей. Ним спільно з учнями отримано низку фундаментальних результатів з теорії інваріантних тороїдальних многовидів рівнянь такого типу, а також для нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, розв'язано відому задачу про звідність для злічених систем диференціальних рівнянь з періодичними, квазіперіодичними і майже періодичними коефіцієнтами, закладено основи теорії напівінваріантних многовидів для вироджених злічених систем різницевих рівнянь, розроблено методу побудови періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь в абстрактних банахових просторах. Результати з даного напрямку викладено у монографіях "Счетные системы дифференциальных уравнений" (Київ, Інститут математики НАН України, 1993, співавтор – Ю.В. Теплінський [Англійський переклад: "Countable systems differential equations", Utrecht – Boston, VSP, Brill Academic Publishers, 2003]), "Elements of mathematical theory of evolutionary equations in Banach spaces" (Singapore, World Scientific, 2013, співавтор – Ю.В. Теплінський).

Результати Анатолія Михайловича знайшли широке застосування у теорії стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема, при розвитку теорії якісних властивостей таких рівнянь, важливим аспектом якої є питання, що стосуються інваріантних множин. Оскільки розв'язками стохастичних рівнянь є випадкові процеси, то важливо вказати умови існування детермінованих інваріантних поверхонь, на яких із ймовірністю одиниця лежать траєкторії розв'язків. Отримані раніше результати іншими дослідниками в основному стосувалися або ж випадкових інваріантних множин, або ж детермінованих інваріантних поверхонь, які, по суті є першими інтегралами системи, що приводило до досить жорстких обмежень на коефіцієнти рівнянь. Застосування, аналогічно детермінованому випадку, апарату функцій Ляпунова призвело до нових результатів у цьому напрямку. Так, зокрема, було отримано досить загальні умови, при яких нулі таких функцій описують інваріантні множини. Досліджено також стійкість інваріантних множин в різних ймовірнісних сенсах. Узагальнивши поняття функції Гріна-Самойленка та ввівши її стохастичний аналог, вчений спільно зі своїми учнями побудував теорію стохастичних розширень динамічних систем на торі, що описують коливні процеси, амплітуда яких піддається випадковим збуренням. Основним об'єктом дослідження, як і в детермінованому випадку, є випадковий інваріантний тор, для якого у лінійному випадку отримано інтегральне зображення за допомогою стохастичного інтегралу Іто. Останнє дало можливість знайти умови існування інтегрального зображення випадкового інваріантного тору, дослідити його стійкість у різних ймовірнісних сенсах, вивчити його диференційованість за кутовою змінною. Методом лінеаризації отримано також умови існування випадкових інваріантних торів нелінійних стохастичних розширень. В термінах квадратичних форм методом, який запропонував Анатолій Михайлович, отримано умови експоненціальної дихотомії лінійних стохастичних систем Іто. Зауважимо, що подібні результати раніше були відомі лише для стохастичних систем зі сталими чи періодичними коефіцієнтами. Дуже ефективно виявилася в теорії стохастичних рівнянь ідея вченого, яка запропонована ним для отримання умов існування двосторонніх розв'язків імпульсних систем. За її допомогою і у поєднанні з методом усереднення побудовано обмежений у середньому квадратичному розв'язок нелінійної стохастичної системи, який визначено на всій осі. Зазначимо, що класичні теореми про існування розв'язків для стохастичних систем гарантують їх продовження лише в одну сторону. Ці та інші результати включені до монографії "Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями" (Київ, Наукова думка, 2009, співавтор – О.М. Станжицький [Англійський переклад: "Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations", Singapore, World Scientific, 2011]).

Результати і наукові праці А.М. Самойленка, що згадані вище, – лише частина наукових досягнень вченого. Наукові досягнення Анатолія Михайловича суттєво збагатили математичну науку фундаментальними результатами у різних напрямках і розділах математики. Підтвердженням високого професіоналізму А.М. Самойленка як математика є його вміння швидко розбиратися у суті нових для нього задач, знаходити оригінальні шляхи їх розв'язання, його здатність утримувати у полі своєї активної творчої уваги широкий діапазон проблем сучасної математики. Талант і досвід Анатолія Михайловича, як вченого і організатора науки, лідера Київської математичної школи яскраво відображаються у його вмінні одночасно керувати дослідницькою роботою відразу у кількох напрямках. Він зарекомендував себе не тільки, як видатний вчений, але й вмілий організатор науки: з 2005 року А.М. Самойленко – академік-секретар Відділення математики НАН України. За його ініціативи та при безпосередній участі в якості голови оргкомітету проведено велику кількість авторитетних міжнародних конференцій, серед яких Українські математичні конгреси (2001, 2009), в кожному з яких взяли участь більш, ніж півтисячі математиків, як українських, так і закордонних. А.М. Самойленко є головним редактором авторитетних наукових видань "Український математичний журнал", "Нелінійні коливання", "Український математичний вісник", "Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка", членом редколегій журналів "Доповіді Національної академії наук України", "У світі математики", "Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics", "Miskolc Mathematical Notes", "Georgian Mathematical Journal", "International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations" та багатьох інших.

Творче кредо Анатолія Михайловича: "Сутність вченого – його праці і учні" підтверджено його плідною науковою і науково-педагогічною діяльністю. Загальна кількість наукових публікацій вченого складає понад шістьсот і містить більше 30 монографій і 15 підручників та навчальних посібників, багато з яких перевидано іноземними мовами. Ці праці є високо цитованими, адже кількість цитувань праць академіка становить майже 10 тисяч (згідно наукометричної бази Google Scholar). Учнями Анатолія Михайловича захищено 35 докторських і 85 кандидатських дисертацій. Серед його учнів дійсні члени і члени-кореспонденти Національної академії наук, Академії наук Вищої школи України, національних академій Казахстану, Таджикистану, професори Чилі, В'єтнаму, Сирії, Йорданії, Пакистану, Болгарії, та Польщі. Ці творчі досягнення не можуть не викликати захоплення.

Наукові досягнення А.М. Самойленка отримали визнання наукової спільноти: у 1978 році Анатолія Михайловича обрано членом-кореспондентом АН УРСР, а у 1995 року – дійсним членом (академіком) Національної академії наук України. Математичний талант і неабиякі організаційські здібності Анатолія Михайловича здобули йому заслужений авторитет і повагу колег. Він є також дійсним членом Європейської академії наук (2002), член-кореспондентом Accademia Peloritana dei Pericolanti (Мессіна, Сіцилія, 2006), іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011), Почесним академіком АН Вищої школи України (2016). Анатолія Михайловича обрано Почесним доктором Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (2004), Почесним професором Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (2006), Почесним професором Слов'янського державного педагогічного університету (2006), Почесним професором Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (2007), Почесним доктором Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2008), Почесним доктором Ужгородського національного університету (2010).

Анатолій Михайлович ніколи не поривав зв'язків з рідним університетом. У 1965 році він почав викладати на механіко-математичному факультеті, протягом 1974–1987 років очолював кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь. Саме в цей час на кафедрі істотно активізується науково-дослідницька робота, підготовка кандидатів і докторів наук, а організований ним науковий семінар з диференціальних рівнянь стає відомим не тільки в Україні, але й далеко за її межами. Володіючи яскравим лекторським талантом, Анатолій Михайлович завжди справляв незабутнє враження на слухачів своїм вмінням чітко, ясно і емоційно викладати матеріал нормативних і розроблених ним оригінальних лекційних курсів. Настільними книгами для студентів, викладачів і науковців багатьох закладів вищої освіти є підручники і навчальні посібники з диференціальних рівнянь, які підготовлено за його активної участі. На особливу увагу заслуговує також педагогічна діяльність професора А.М. Самойленка у Національному технічному університеті України "КПІ" та інших закладах вищої освіти України. Він неодноразово виступав з лекціями і науковими доповідями у провідних університетах і наукових центрах багатьох країн.

Багаторічна наукова, педагогічна і громадська діяльність А.М. Самойленка відмічена високими нагородами. Він нагороджений орденами Дружби народів (1984), "За заслуги" III ступеня (2003), "Князя Ярослава Мудрого" V ступеня (2008), IV ступеня (2013), III ступеня (2018), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987), удостоєний почесного звання "Заслужений діяч науки і техніки України" (1998) і звання "Соросівський професор" (1996), удостоєний звань лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії імені Миколи Островського (1968), премій Національної академії наук України імені М.М. Крилова (1981), М.М. Боголюбова (1998), М.М. Лаврентьєва (2000), М.В. Остроградського (2004), премії імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2005), нагороджений медаллю Малої академії наук України "200 років з дня народження Тараса Григоровича Шевченка" (2014), медаллю Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова "За наукові досягнення" (2015).

Анатолій Михайлович повний творчих задумів і оригінальних ідей. Колектив механіко-математичного факультету щиро бажає йому міцного духовного і фізичного здоров'я, нових успіхів, яскравої і плідної діяльності на славу математики.

М. Перестюк, О. Бойчук, М. Городній, О. Капустян, І. Парасюк, В. Самойленко, О. Станжицький

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ**для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
Математика. Механіка"**

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS Office WORD 2003**, не новіше, (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;
- поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
 - класифікаційний індекс Універсальної десятикової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
 - відомості про авторів, що містять такі елементи перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного спів-автора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку); (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація, резюме (українською, російською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, "**Стаття надійшла до редколегії 09.11.05**". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожен аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретних сторінок – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках

ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не по-давати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

- усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;
- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

| Define Style: | | | Define Size: | |
|---------------|-----------------|--------|---------------------------|-------|
| Text | Times New Roman | | Full | 9 pt |
| Function | Times New Roman | | Subscript/Superscript | 7 pt |
| Variable | Times New Roman | italic | Sub-Subscript/Superscript | 6 pt |
| L.C.Greek | Symbol | | Symbol | 14 pt |
| UC.Greek | Symbol | | Sub-Symbol | 9 pt |
| Vector-matrix | Times New Roman | bold | | |
| Number | Times New Roman | | | |

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія ($^{\circ}C$), Фаренгейта ($^{\circ}F$), Реомюра ($^{\circ}R$);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max , min), значення величин (opt), сталості величин ($const$, $idem$), знаків границь (Lim , lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg , ln , log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовков бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передуює рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вчитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Названіе, Автор**. У полі **Заметка** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**МАТЕМАТИКА
МЕХАНІКА**

Випуск 1(39)

Оригінал-макет виготовлено ПВЦ "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,7. Наклад 300. Зам. № 218-9027.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 27.12.18

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
<http://vpc.univ.kiev.ua>
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02