

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. T. Kiguradze, д-р фіз.-мат. наук, акад. АН Грузії (Georgia); Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	Механіко-математичний факультет, просп. акад. Глушкова, 4 Е, Київ, Україна, 03127 ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 24.04.17 (протокол № 11)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	ВПЦ "Київський університет" (кімн. 43), б-р Т. Шевченка, 14, Київ, Україна, 01601 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

2(38)2017

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

CHIEF EDITOR	M.Gorodnii, Full Professor, Dr. Hab.
EDITORIAL BOARD	V. Samoylenko, Full Professor, Dr. Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, PhD (Secretary); V. Bavula (United Kingdom), Full Professor, Dr. Hab.; Y. Drozd, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Professor, Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. T. Kiguradze, Academician of NAS of Georgia, Dr. Hab.; B. Kiforenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Professor, Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Professor, Dr. Hab.; N. Leonenko (United Kingdom) Full Professor, Dr. Hab.; O. Limarchenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Mishura, Full Professor, Dr. Hab.; L. Mol'chenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. Parasyuk, Full Professor, Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Professor, Academician of NAS of Ukraine, Dr. Hab.; A. Petravchuk, Full Professor, Dr. Hab.; D. Silvestrov (Sweden), Full Professor, Dr. Hab.; A. Stanzhytskyi, Full Professor, Dr. Hab.; S. Trofimchuk (Chile), Full Professor, Dr. Hab.; V. Futorny (Brazil), Full Professor, Dr. Hab.; I. Shevchuk, Full Professor, Dr. Hab.
Address of Editorial board	Faculty of Mechanics and Mathematics, 4E Academician Glushkov avenue, Kyiv, 03127, Ukraine; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Approved	Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 24.04.17 (protocol № 11)
Attested	By Higher Attestation Commission. Decision of Presidium of HAC of Ukraine № 1-05/4 from 26.05.2010
Registered	Ministry of Justice of Ukraine Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09
Founder and publisher	National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv University Publishing and Printing Centre The certificate is added to registry ДК № 1103 from 31.10.02
Publisher's address	Kyiv University Publishing and Printing Center (off. 43), 14 Taras Shevchenko blv., Kyiv, 01601, Ukraine; ☎ (38044) 239 32 22; fax 239 31 28

ЗМІСТ

Верьовкіна Г. Інтерполяційні зображення деяких класів стохастичних процесів за прямокутною решіткою вузлів інтерполяції	6
Петрова Т. Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку $r \in (3, 4)$	9
Сербенюк С. Раціональні числа в термінах знакододатних рядів Кантора	11
Громик А., Конет І., Пилипчук Т. Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною	15
Аюбова Н., Курченко О. Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань	18
Безверхий О., Григор'єва Л. Застосування гамільтонового формалізму для дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів	23
Григоренко О., Єфімова Т., Коротких Ю. Осесиметричні вільні коливання нетонких циліндричних оболонок із неперервно неоднорідного матеріалу несиметричної будови	29
Хашемі М., Жук Я. Згинні коливання та дисипативний розігрів нанокompозитної балки при статичному і гармонічному навантаженнях	34
Лимарченко О., Семенович К. Динамічна взаємодія рідини з резервуаром на маятниковому підвісі за наявності рівномірного витікання	41
Мольченко Л., Федорченко Л., Васильєва Л. Напружено-деформований стан ортотропної зрізаної сферичної оболонки змінної жорсткості	44
Чернобай В. Концентрація напружень на еліптичній нанопорі за антиплоского зсуву	48
Василевич О., Василевич Л., Самойленко В. Підвищення ефективності викладання математичних дисциплін	53
Юрій Олексійович Митропольський – 100 років від дня народження	58
Мирослав Львович Горбачук (08.03.1938 – 08.01.2017)	61
Дмитро Іванович Мартинюк (11.03.1942 – 26.11.1996)	63
Міжнародна наукова конференція "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"	65

СОДЕРЖАНИЕ

Веревкина А. Интерполяционные представления некоторых классов стохастических процессов по прямоугольной решетке узлов интерполяции	6
Петрова Т. О поточечных интерполяционных оценках выпуклого приближения функций, которые имеют дробную производную произвольного порядка $r \in (3, 4)$	9
Сербенюк С. Рациональные числа в терминах знакопозитивных рядов Кантора	11
Громик А., Конет И., Пилипюк Т. Гиперболическая краевая задача в кусочно-однородном цилиндрически-круговом полупространстве с полостью	15
Аюбова Н., Курченко А. Оценивание параметра Хюрста дробного броуновского движения в модели реальных измерений	18
Безверхий О., Григорьева Л. Применение гамильтоновского формализма для исследования гармонических колебаний пьезокерамических цилиндров	23
Григоренко О., Ефимова Т., Коротких Ю. Осесимметричные свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородного материала несимметричного строения	29
Хашеми М., Жук Я. Изгибные колебания и диссипативный разогрев нанокompозитной балки при статической и гармонической нагрузках	34
Лимарченко О., Семенович К. Динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром на маятниковом подвесе при наличии равномерного истечения	41
Мольченко Л., Федорченко Л., Васильева Л. Напряженно-деформированное состояние ортотропной срезанной сферической оболочки переменной жёсткости	44
Чернобай В. Концентрация напряжений на эллиптической нанопоре при антиплоском сдвиге	48
Василевич Е., <u>Василевич Л.</u>, Самойленко В. Повышение эффективности преподавания математических дисциплин	53
Юрий Алексеевич Митропольский – 100 лет со дня рождения	58
Мирослав Львович Горбачук (08.03.1938 – 08.01.2017)	61
Дмитрий Иванович Мартынюк (11.03.1942 – 26.11.1996)	63
Международная научная конференция "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ"	65

CONTENTS

Verovkina G. The interpolation representation some classes of stochastic processes on the rectangular grid of interpolation knots.....	6
Petrova T. On pointwise estimates for convex polynomial approximation of function with fractional derivatives of arbitrary order $r \in (3, 4)$	9
Serbenyuk S. Rational numbers in terms of positive Cantor series	11
Gromyk A., Konet I., Pylypiuk T. Hyperbolic boundary value problem in piecewise-homogeneous cylindrically-circular halfspace with cavity	15
Aiubova N., Kurchenko O. Estimation of Hurst parameter of fractional brownian motion in model of real observation	18
Bezverhyi O., Grigoryeva L. Two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders under electrical loads	23
Grigorenko A., Efimova T., Korotkih Yu. Axisymmetric free vibrations of cylindrical medium – thickness shells made of a continuously inhomogeneous material with asymmetrical structure	29
Hashemi M., Zhuk Y. Flexural vibrations and dissipative heating of a nanocomposite beam under static and cyclic loading	34
Limarchenko O., Semenovych K. Dynamic interaction of liquid with the reservoir on pendulum suspension in the presence of uniform outflowing	41
Mol'chenko L., Fedorchenko L., Vasil'eva L. Stress-strain state orthotropic truncated spherical shell of variable stiffness.....	44
Chernobai V. Stress concentration on elliptical nano pore due to antiplane shear.....	48
Vasilevich O., Vasylevych L., Samoilenko V. Increasing effectiveness of teaching mathematical disciplines.....	53
Yuriy Alekseevich Mitropolsky – 100 years since the birth	58
Myroslav Lvovych Gorbachuk (08.03.1938 – 08.01.2017)	61
Dmytro Ivanovych Martynyuk (11.03.1942 – 26.11.1996)	63
International conference 'DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION'	65

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ПРЯМОКУТНОЮ РЕШІТКОЮ ВУЗЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Досліджуються інтерполяційні зображення деяких класів стохастичних процесів за прямокутною решіткою вузлів інтерполяції. Побудовано інтерполяційний ряд та доведено збіжність одержаного ряду до стохастичного процесу з імовірністю одиниця рівномірно в довільній обмеженій області зміни параметра.

Вступ. Одним з основних результатів теорії передачі інформації є теорема про представлення функції з обмеженим спектром у періодичній послідовності початкових моментів часу. Дані питання стосуються застосувань теореми Котельнікова – Шеннона [4] та її узагальнень. Отримані результати широко використовують у теорії зв'язку та інших галузях техніки, де неперервний випадковий сигнал можна замінити дискретним набором значень процесу та його похідних. Сучасні дослідження пов'язані з побудовою інтерполяційних поліномів, сплайн-апроксимації, поданням руху у 3D-моделюванні за допомогою інтерполяційних схем та іншими питаннями сучасної теорії передачі сигналу. Ця робота присвячена питанням побудови інтерполяційних зображень деяких класів стохастичних процесів за вузлами інтерполяції, що утворюють прямокутну решітку на площині.

Основна частина. Нехай $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in R^2$ – сепарабельний стохастичний процес з $M\xi(\vec{t}) = 0$, який має зображення вигляду

$$\xi(\vec{t}) = \int_{\Lambda^2} \prod_{i=1}^2 f_i(t_i, \lambda_i) Z(d\vec{\lambda}), \quad (1)$$

де Λ – деяка множина параметрів, $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, $Z(d\vec{\lambda})$ – така випадкова функція множин на $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, що

$$MZ(d\vec{\lambda}) = 0, \quad MZ(A_1, A_2) \cdot \overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2), \quad (2)$$

де F – комплексна функція множин, адитивна за всіма аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\vec{\lambda}, d\vec{\mu})| < +\infty. \quad (3)$$

Нехай функції $f_i(t_i, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$, такі, що кожна з них можна довизначити у комплексній площині відносно t_i до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma_i(\lambda_i)$ і такої, що

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sigma_i(\lambda_i) = \sigma_i < \infty, \quad (4)$$

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sup_{t_i \in R} |f_i(t_i, \lambda_i)| = L_{f_i} < \infty. \quad (5)$$

Властивості стохастичних процесів указанного вигляду досліджені Ядренком М. Й. у [5]. Справедлива така теорема.

Теорема. Нехай $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in R^2$ – сепарабельний стохастичний процес вигляду (1), що задовольняє умови (2) – (5).

Тоді з імовірністю одиниця виконується зображення

$$\xi(\vec{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) \omega_{k_1, k_2}(\vec{t}). \quad (6)$$

У формулі (6) величини

$$\xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) = \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2) \quad \text{та} \quad \omega_{k_1, k_2}(\vec{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$$

визначаються таким чином

$$\begin{aligned} \xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) &= \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\ &= \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) + \\ &+ \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) + \\
& + \frac{\partial \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2} \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) + \\
& + \frac{\partial \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) - \\
& - \frac{\partial^2 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1 \partial t_2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^2} \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^2 + \\
& + \frac{\partial^2 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^2} \frac{1}{2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^2 - \\
& - \frac{\partial^3 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1 \partial t_2^2} \frac{1}{2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^2 + \\
& + \frac{\partial^3 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^3} \frac{1}{9} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^3 + \\
& + \frac{\partial^3 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^3 - \\
& - \frac{\partial^4 \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1 \partial t_2^3} \frac{1}{6} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\alpha_1}{3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \sin \frac{\alpha_1}{3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \sin^4 \frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)}{\left(\frac{\alpha_1}{2} \right)^3 \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^4 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^4}. \tag{8}$$

У формулах (7), (8) вузли інтерполяції інтерполяційної формули (6) утворюють на площині прямокутну сітку

$$\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

де α_1, α_2 – довільні дійсні числа такі, що $\alpha_1 > \sigma_1$, $\alpha_2 > \sigma_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо результат із теорії цілих функцій. Нехай $f_1(t_1, \lambda_1)$ та $f_2(t_2, \lambda_2)$ задовольняють умови (4), (5). Тоді

$$f(\bar{t}, \bar{\lambda}) = \prod_{i=1}^2 f(t_i, \lambda_i) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}), \tag{10}$$

де функція $f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda})$ визначається аналогічно (7). Використовуючи [1]–[3], отримаємо оцінку залишку інтерполяційного ряду (10), а саме,

$$R_n(\bar{t}) = \sup_{\bar{\lambda} \in \Lambda^2} \left| f(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right| \leq G(\bar{t}) \frac{1}{n}, \quad (11)$$

де $G(\bar{t})$ – функція, що є обмеженою в довільній обмеженій області комплексної площини.

Розглянемо стохастичний процес

$$\xi_n(\bar{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}). \quad (12)$$

Згідно із зображенням (1) стохастичний процес (12) можна записати у вигляді

$$\xi_n(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \left(\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right) Z(d\bar{\lambda}). \quad (13)$$

Використовуючи зображення (1) та (13) отримаємо

$$M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2 \leq R_n^2(\bar{t}) \int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu})|. \quad (14)$$

Із нерівності (14), урахувавши умову (3) та оцінку (11), маємо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до стохастичного процесу $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in R^2$, у середньому квадратичному. Використовуючи сепарабельність процесу $\xi(\bar{t})$ та збіжність ряду $M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2$, одержимо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до стохастичного процесу $\xi(\bar{t})$ з імовірністю одиниця рівномірно відносно $\bar{t}$ в кожній обмеженій області зміни $\bar{t}$.

Висновки. Досліджено інтерполяційні зображення одного класу стохастичних процесів за вузлами інтерполяції, що складають прямокутну решітку на площині. Основним результатом статті є теорема про збіжність інтерполяційного ряду до стохастичного процесу з імовірністю одиниця рівномірно в довільній обмеженій області зміни параметра.

Список використаних джерел

1. Верьовкіна Г. В. Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів / Г. В. Верьовкіна, В. Н. Нагорний // Вісн. Київ. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 4. – С. 9–11.
2. Нагорний В. Н. Інтерполяційні зображення випадкових процесів за рівновіддаленими вузлами інтерполяції / В. Н. Нагорний // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. – 1990. – Вип. 32. – С. 82–85.
3. Нагорний В. Н. Одне інтерполяційне зображення випадкових процесів / В. Н. Нагорний // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. – 1986. – Вип. 28. – С. 128–130.
4. Хургин Я. И. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М., – 1962. – 220 с.
5. Ядренко М. О. Аналітичні випадкові поля // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка / М. О. Ядренко. – 1969. – Вип. 1. – С. 56–60.

Надійшла до редколегії 20.10.16

А. Веревкіна, канд. физ.-мат. наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Исследуются интерполяционные представления некоторых стохастических процессов по прямоугольной решетке узлов интерполяции. Получен интерполяционный ряд и доказана сходимость полученного ряда к стохастическому процессу с вероятностью единица равномерно в произвольной ограниченной области перемены параметра.

G. Verovkina, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE INTERPOLATION REPRESENTATION SOME CLASSES OF STOCHASTIC PROCESSES ON THE RECTANGULAR GRID OF INTERPOLATION KNOTS

Paper deals with some interpolation representations of stochastic processes on the rectangular grid of interpolation knots. The interpolation row is built. The convergence with probability 1 of the corresponding interpolation series to a stochastic process in any bounded domain of changes of parameter is proved.

УДК 517.5

Т. Петрова, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ**ПРО ПОТОЧКОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ,
ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ $r \in (3, 4)$** *Досліджується питання наближення опуклих функцій із простору Собольєва алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, який показує, що для опуклих функцій із простору Собольєва оцінка (1) не виконується.*

Вступ. Спочатку введемо основні позначення. Нехай $W^r[0,1]$ клас таких функцій f , що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь, де $D_{0+}^{r-1}f$ – лівостороння дробова похідна [1]. Будемо позначати через Π_n множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 – множину опуклих вниз на $[0,1]$ функцій.

У [5] Gorenzauz довів, що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$, для кожної функції $f \in W^r[0,1]$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться такий поліном $p_n \in \Pi_n$, що виконується оцінка

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c \cdot \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]. \quad (1)$$

DeVore і Yu у [3] поставили питання про те, чи має місце нерівність (1) при $r > 2$ для монотонного наближення. Негативну відповідь на це дали Gonska, Leviatan, Shevchuk, Wenz в [4], довівши теорему для випадку $r > 2, r \in \mathbb{N}$. Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$, в [1] доведено, що оцінка (1) також не виконується. У роботі [2] побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не має місця для класу функцій $W^r[0,1] \cap \Delta^2, r \in (2,3)$. Основним результатом цієї статті є теорема про те, що цей результат не можна поширити і на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^2$ з $r \in (3,4)$.

Основний результат.

Теорема. Нехай $r \in (3,4)$. Тоді для кожного n існує така функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$ справедлива одна з таких властивостей:

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \quad (2)$$

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \quad (3)$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$ і $m = [r] + 1 = 4$. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) + \frac{13b^4}{4}(1+x)^{-2b^{-1}+4} - \frac{25}{4}(1-x)^{b^{-1}+4}, & 0 \leq x \leq b, \\ b^4(x+7) + \frac{13b^4}{4}(1+x)^{-2b^{-1}+4} - \frac{25}{4}(1-x)^{b^{-1}+4}, & b < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{де } b = \frac{1}{468n^2}.$$

Легко бачити, що $f(0) > 0, f(1) \leq \frac{45b^4}{4}, f'(0) > -\frac{b^3}{12}, f'(1) > 0, f''(0) > 0, f''(1) > 0, f'''(0) < 0, f'''(b) < 0, f'''(1) < 0$ і $f^{(4)}(x) > 0$ при $x \in [0,b) \cup (b,1]$.

Оскільки $f^{(4)}(x) > 0$ при $x \in [0,b) \cup (b,1]$, то f''' зростає на кожному із проміжків $[0,b)$ та $(b,1]$, і з огляду на те, що $f'''(0) < 0, f'''(b) < 0$ і $f'''(1) < 0$, то $f'''(x) < 0$ при $x \in [0,1]$. Тоді f'' спадає і нерівності $f'' > 0$ і $f''(1) > 0$ спричиняють $f''(x) > 0, x \in [0,1]$. Отже $f \in W^m[0,1] \cap \Delta^2$.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 \cdot f(x)$. Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$. Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^2$. Нехай $x \in [b,1]$. Оскільки f' зростає і $f'(b) > 0$, то $\forall x \in [b,1]: f'(x) \geq 0$. Тоді, урахувавши, що $f''(x) \geq 0$ і $f(x) \geq 0, x \in [b,1]$, отримаємо $F''(x) = 8x^3 f'(x) + 12x^2 f(x) + x^4 f''(x) \geq 0$.

Нехай $x \in [0,b]$. З огляду на те, що $f'(0) < 0$ і $f'(b) > 0$, маємо $\exists x_0 \in (0,b): f'(x_0) = 0$. Тоді точка $x = x_0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$. Зауважимо, що $\forall x \in [0,b] f(x) \geq b$. Таким чином отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} F''(x) &= 8x^3 f'(x) + 12x^2 f(x) + x^4 f''(x) > -8x^3 \frac{b^3}{12} + 12x^2 f(x_0) = x^2 \left(-\frac{2}{3}xb^3 + 12f(x_0) \right) > \\ &> x^2 \left(-\frac{2}{3}b^4 + 12b^4 \right) = x^2 \frac{34}{3}b^4 \geq 0, x \in [0,b]. \end{aligned}$$

Ми довели, що $\forall x \in [0,1]: F''(x) \geq 0$. З останньої нерівності випливає, що $F \in \Delta^2$. За теоремою 2.3 із [6] маємо

$$D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \sum_{k=0}^3 \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt \text{ майже скрізь на } [0,1].$$

Оскільки $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, 1, 2, 3$, то $D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$ майже скрізь на $[0,1]$. Очевидно, що $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$,

така, що $\forall x \in [0,1]: |F^{(4)}(x)| \leq c$. Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-3}} = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \frac{x^{4-r}}{4-r} \leq \frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)}.$$

Таким чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$ і при цьому

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

є абсолютно неперервною. Отже $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$.

Нехай існує поліном q_N , який опуклий вниз і для якого умова (2) не виконується. Тоді для деякої сталої B маємо

$$|F(x) - q_N(x)| \leq B\varphi^r(x) \leq Bx^{r/2}, 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що $q_N(0) = F(0) = 0$ і $q'_N(0) = F'(0) = 0$. Тоді поліном q_N має вигляд $q_N(x) = x^2 \cdot h_{N_1}(x)$, де h_{N_1} поліном степеня $\leq N_1, N_1 \leq N$.

Розглянемо поліном $\tilde{q}_N(x) = q_N(x) + f'(0)x + f(0)$. Помітимо, що умова $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \tilde{q}_N(x)|}{\varphi^4(x)} = \infty$ не виконується і

$\tilde{q}_N(0) = f(0), \tilde{q}'_N(0) = f'(0)$. За нерівністю Маркова маємо

$$\frac{b^3}{18} < \frac{b^3}{12} - 38b^4 = |f'(0)| = |\tilde{q}'_N(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_N\|.$$

Очевидно, що $\|\tilde{q}_N\| = \max\{\tilde{q}_N(0), \tilde{q}_N(1)\}$. Нехай $\|\tilde{q}_N\| = \tilde{q}_N(1)$. Тоді

$$\frac{b^3}{18} \leq 2n^2 q_N(1) \quad \text{або} \quad q_N(1) > \frac{b^3}{36n^2}. \quad (4)$$

З іншого боку,

$$f(1) \leq \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} 9bn^2 = \frac{45b^3}{36n^2} 9 \frac{1}{468n^2} n^2 < \frac{45b^3}{36n^2}. \quad (5)$$

Із нерівностей (4) і (5) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$, більш того, $f(1) < \tilde{q}_N(1)$. Якщо $\|\tilde{q}_N\| = \tilde{q}_N(0)$, то маємо $\tilde{q}_N(1) \leq \tilde{q}_N(0) = f(0) < f(1)$ і також отримуємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$. Ми припускаємо, що $\tilde{q}_N(1) > 0$, бо у протилежному випадку твердження $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$ очевидне. Далі розглянемо $\tilde{q}_N(1) = q_N(1) + f'(0) + f(0)$. Припустимо, що $q_N(1) = f(1)$. Тоді

$$\tilde{q}_N(1) = f(1) + f'(0) + f(0) > f(1) \Leftrightarrow f(0) > -f'(0) \Leftrightarrow \frac{b^3}{12} < 42b^4.$$

Маємо суперечність. Таким чином $\tilde{q}_N(1) \neq f(1) = F(1)$.

Теорему доведено.

Висновки. У роботі побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не може поширюватися на клас функцій $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r \in (3,4)$.

Список використаних джерел

1. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // Пр. Інституту математики НАН України "Математика та її застосування. Теорія наближення функцій". – 2005. – № 35. – С. 107–112.
2. Петрова Т. О. Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісн. Київ. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2006. – № 4. – С. 113–118.
3. DeVore R. A. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R. A. DeVore, X. M. Yu // Constr. Approx. – 1985. – № 1. – P. 323–331.
4. Gonska H. H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H. J. Wenz // Constr. Approx. – 2000. – № 16. – P. 603–629.
5. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz // J. Approx. Theory. – 1994. – Vol. 77. – P. 31–41.
6. Samko S. G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev // Sci. Publ. – London, 1987.

Надійшла до редколегії 25.05.17

Т. Петрова, канд. физ.-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

О ПОТОЧЕЧНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОЦЕНКАХ ВЫПУКЛОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА $r \in (3,4)$

Исследуется вопрос приближения выпуклых функций из пространства Соболева алгебраическими полиномами. Построен контр-пример, который показывает, что для выпуклых функций из пространства Соболева оценка (1) не выполняется.

T. Petrova, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON POINTWISE ESTIMATES FOR CONVEX POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF ARBITRARY ORDER $r \in (3, 4)$

In this paper the question of approximation of convex function in Sobolev space by convex algebraic polynomial is considered. It is proved, that for convex functions in Sobolev space estimate (1) is not true, generally speaking.

УДК 511.72+517.5+517.13

С. Сербенюк, мол. наук. співроб.
Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: simon6@ukr.net

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА В ТЕРМІНАХ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ КАНТОРА

Стаття присвячена вивченню задання раціональних чисел рядами Кантора. Критерій раціональності для випадку довільної послідовності (q_k) сформульовано, деякі його наслідки розглянуто.

Вступ. Знакододатним рядом Кантора називається сума вигляду

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} + \dots, \quad (1)$$

де $Q \equiv (q_k)$ – фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, (Θ_k) – послідовність множин $\Theta_k \equiv \{0, 1, \dots, q_k - 1\}$, $\varepsilon_k \in \Theta_k$.

Факт запису дійсного числа $x \in [0; 1]$ у вигляді розкладу в ряд (1) позначається $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots}^Q$ і називається зображенням числа x знакододатним рядом Кантора (далі – зображенням).

Уперше поняття представлення чисел знакододатним рядом Кантора зустрічається в опублікованій у 1869 р. статті [1] Георга Кантора. У цій статті він починає досліджувати проблему задання раціональних чисел рядом (1), зокрема, формулює відповідний критерій для випадку періодичної послідовності (q_k) . У подальшому задачі знаходження критеріїв зображення раціональних чисел рядом Кантора (1) присвячено чимало праць багатьох учених з різних країн. Зокрема, відмітимо внесок таких учених у дослідженні цієї проблеми, як Diananda P. A., Oppenheim A., Erdős P., Hančl J., Straus E. G., Rucki P., Tijdeman R., Kuhapatanakul P., Laohakosol V., Mance B., Marques D., Pingzhi Yuan.

Зазначимо, що чимало праць [16, 5–8] присвячено дослідженню умов раціональності чи ірраціональності розкладів дійсних чисел у ряд Кантора вигляду (1), для якого послідовності (ε_k) , (q_k) є послідовностями цілих чисел (у деяких працях, наприклад, [7, 16, 4, 6, 13] на (q_k) накладається обмеження про те, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ справджується умова $1 < q_k \in \mathbb{Z}$), але досить багато статей присвячено дослідженню відповідної задачі як для розглядуваних у цій статті знакододатних рядів Кантора [1, 2, 12, 14], так і для рядів Кантора спеціального вигляду [9–11, 7], зокрема, – рядів Ахмеса [2, 3, 8].

У [2, 4–9, 14, 16] досліджувалися критерії раціональності (ірраціональності) зображення чисел розкладами в ряд Кантора, а в [4, 2, 7, 12, 14, 16] – достатні умови раціональності (ірраціональності). Зокрема, проблему задання раціональних та ірраціональних чисел за певних умов, що накладаються на послідовності (q_k) і (ε_k) , розглянуто в [1, 4–7, 12, 14, 16], у той час як результатів дослідження цієї задачі для випадку довільності послідовності (q_k) дуже мало [2, 7, 16].

До результатів інших вчених, найбільш схожих з отриманими в цій статті, можна віднести результати із [12, 6] (результати, подібні до твердження теореми 2 та із [2, 7, 16], в яких фігурує умова $\frac{\varepsilon_k}{q_k - 1} = \text{const}$ для всіх n , більших деякого n_0). На особливу увагу заслуговує стаття [2], в якій Р. Н. Diananda, А. Oppenheim довели такий критерій, формулювання якого є подібним до формулювання теореми 5 цієї статті.

Теорема 1. Необхідною і достатньою умовою того, що число x , представлене у вигляді розкладу в ряд (1), було раціональним, є існування чисел h, k , де $(h, k) = 1$, $0 \leq h \leq k$ та $N \in \mathbb{Z}$ таких, що умова $A_i = \frac{h}{k}(B_i - 1)$ виконується для всіх $i \geq N$.

У цій теоремі $x = X = A_0 + \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_1 B_2} + \dots + \frac{A_n}{B_1 B_2 \dots B_n} + \dots$, де $A_0 = \varepsilon_0$ – ціла частина числа x , $B_1 = q_1 q_2 \dots q_{i_1}$,

$$B_2 = q_{i_1+1} q_{i_2+1} \dots q_{i_1+i_2}, \dots, B_i \geq 2, 0 \leq A_i \leq B_i - 1, \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_{i_1}}{q_1 q_2 \dots q_{i_1}} = \frac{A_1}{B_1}.$$

Таким чином, задача формулювання критеріїв зображення раціональних чисел у вигляді розкладів у ряд (1) вважається відкритою з 1869 р. донині. Ця стаття присвячена формулюванню і доведенню критеріїв раціональності для випадку довільної послідовності (q_k) .

Оператор зсуву цифр. Оператором зсуву цифр представлення числа x знакододатним рядом Кантора (1) називається відображення σ , для якого виконується рівність:

$$\sigma(x) = \sigma\left(\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k}^Q\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_2 q_3 \dots q_k} \equiv q_1 \Delta_{0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n}^Q.$$

Зауважимо, що n -кратне застосування оператора σ до числа x веде до оператора σ^n , для якого

$$\sigma^n(x) = \sigma^n\left(\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}^Q\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_{n+1} q_{n+2} \dots q_k} \equiv q_1 q_2 \dots q_n \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{n} \varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2} \dots}^Q. \quad (2)$$

З останнього слідує, що

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{q_1 q_2 \dots q_i} + \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \sigma^n(x). \quad (3)$$

Детально поняття оператора зсуву вивчено в [15] для випадку знакозмінного ряду Кантора.

Критерій існування двох різних зображень раціонального числа. У цьому пункті йтиметься про задання чисел спеціального вигляду, а саме – чисел, які мають скінченне зображення рядом (1). Такі числа мають два різні зображення, тобто

$$\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{q_1 q_2 \dots q_i} \equiv \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} \varepsilon_m 000 \dots}^Q = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} [\varepsilon_m - 1] [q_{m+1} - 1] [q_{m+2} - 1] \dots}^Q.$$

Теорема 2. Раціональне число $\frac{p}{r} \in (0; 1)$ має два різні зображення тоді й тільки тоді, коли існує такий номер n_0 , що $q_1 q_2 \dots q_{n_0} : r$.

Доведення. Необхідність. Нехай

$$\frac{p}{r} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{q_1 q_2 \dots q_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{\varepsilon_1 q_2 q_3 \dots q_n + \varepsilon_2 q_3 \dots q_n + \dots + \varepsilon_{n-1} q_n + \varepsilon_n}{q_1 q_2 \dots q_n},$$

тоді

$$\varepsilon_n = \frac{p q_1 q_2 \dots q_n - r (\varepsilon_1 q_2 q_3 \dots q_n + \varepsilon_2 q_3 q_4 \dots q_n + \dots + \varepsilon_{n-1} q_n)}{r}.$$

Оскільки в останній рівності $\varepsilon_n \in N$, то вираз у правій частині також є натуральним числом. Ураховуючи, що $(p, r) = 1$, отримуємо $q_1 q_2 \dots q_n : r$.

Достатність. Нехай $(p, r) = 1$, $p < r$, та існує такий номер n_0 , що $q_1 q_2 \dots q_{n_0} : r$. Тоді

$$\frac{p}{r} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n_0}}{q_1 q_2 \dots q_{n_0}} + \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{q_1 \dots q_{n_0} q_{n_0+1}} + \dots = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_i}{q_1 q_2 \dots q_i} + t_{n_0},$$

де t_{n_0} – залишок ряду,

$$\frac{p}{r} = \frac{\varepsilon_1 q_2 q_3 \dots q_{n_0} + \varepsilon_2 q_3 \dots q_{n_0} + \dots + \varepsilon_{n_0}}{q_1 q_2 \dots q_{n_0}} + t_{n_0}.$$

Позначивши $\theta = \frac{q_1 q_2 \dots q_{n_0}}{r}$, отримаємо $p\theta = (\varepsilon_1 q_2 q_3 \dots q_{n_0} + \varepsilon_2 q_3 \dots q_{n_0} + \dots + \varepsilon_{n_0}) + q_1 q_2 \dots q_{n_0} t_{n_0}$. Оскільки ліва частина останньої рівності є натуральним числом, то і права частина також натуральне число. Звідси слідує, що $q_1 q_2 \dots q_{n_0} t_{n_0} = 0$ або $q_1 q_2 \dots q_{n_0} t_{n_0} = 1$. Тобто, $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n_0-1} \varepsilon_{n_0} 000 \dots}^Q$ у першому випадку і $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n_0-1} [\varepsilon_{n_0} - 1] [q_{n_0+1} - 1] [q_{n_0+2} - 1] \dots}^Q$ у другому. Теорему доведено.

Критерій раціональності. Основним результатом цієї статті є таке твердження.

Теорема 3. Число x , представлене у вигляді розкладу в ряд (1), є раціональним тоді й тільки тоді, коли існують такі $n \in Z_0$, $m \in N$, що виконується є рівність $\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x)$.

Доведення. Необхідність. Нехай маємо раціональне число $x = \frac{u}{v}$, де $u < v$, $(u, v) = 1$. Розглянемо послідовність $(\sigma^n(x))$, що породжена оператором зсуву цифр представлення (1) числа x :

$$\sigma^0(x) = x,$$

$$\sigma(x) = q_1 x - \varepsilon_1,$$

$$\sigma^2(x) = q_2 \sigma(x) - \varepsilon_2 = q_1 q_2 x - q_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots,$$

$$\sigma^n(x) = q_n \sigma^{n-1}(x) - \varepsilon_n = x \prod_{i=1}^n q_i - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j q_{j+1} q_{j+2} \dots q_n \right) - \varepsilon_n, \dots$$

Із (3) слідує рівність

$$\sigma^n(x) = \frac{uq_1q_2 \dots q_n - v(\varepsilon_1q_2q_3 \dots q_n + \varepsilon_2q_3 \dots q_n + \dots + \varepsilon_{n-1}q_n + \varepsilon_n)}{v} = \frac{u_n}{v}. \quad (4)$$

Оскільки $v = \text{const}$ та при $n \rightarrow \infty$ справджується умова $0 < \frac{u_n}{v} < 1$, то $u_n \in \{0, 1, \dots, v-1\}$. Отже, існує таке $m \in N$, що $u_n = u_{n+m}$. Більше того, існує така підпоследовательність (n_k) натуральних чисел, що $u_{n_k} = \text{const}$ для всіх $k \in N$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують такі $n \in Z_0$, $m \in N$, що $\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x)$. Тоді із (2) отримуємо

$$x \equiv \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n 000\dots}^Q + \frac{q_{n+1} \dots q_{n+m}}{q_{n+1} \dots q_{n+m} - 1} \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{n} \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \dots \varepsilon_{n+m} 000\dots}^Q.$$

Таким чином, можна сформулювати таке твердження.

Лема 1. Якщо існують такі $n \in Z_0$, $m \in N$, що $\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x)$, то число x є раціональним і виконується рівність

$$\sigma^n(x) = \frac{q_1q_2 \dots q_n q_{n+1} \dots q_{n+m}}{q_{n+1} \dots q_{n+m} - 1} \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{n} \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \dots \varepsilon_{n+m} 000\dots}^Q.$$

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Число x , представлене у вигляді розкладу в ряд (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують такі $n \in Z_0$, $m \in N$, що виконується рівність

$$\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{n} \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \dots}^Q = q_{n+1} \dots q_{n+m} \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{n+m} \varepsilon_{n+m+1}\varepsilon_{n+m+2} \dots}^Q.$$

Твердження теорем 3 і 4 є еквівалентними.

Деякі наслідки. Розглянемо простий випадок умови $\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x)$, коли $\sigma^n(x) = \text{const}$ для всіх $n \in Z_0$. Остання умова може справджуватися і для чисел x , відмінних від 0 та 1. Наприклад,

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} + \dots = \sigma^n(x) = \frac{1}{2}.$$

Сформулюємо критерій виконання умови $\sigma^n(x) = \text{const}$.

Лема 2. Якщо $\sigma^n(x) = x$ для всіх $x \in N$, то $\frac{\varepsilon_n}{q_n - 1} = \text{const} = x$.

Доведення. Нехай $\sigma^n(x) = \sigma^{n+1}(x) = \text{const}$. Тоді $\sigma^n(x) = q_{n+1}\sigma^n(x) - \varepsilon_{n+1}$. Звідки

$$\sigma^n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1} - 1} = \text{const}. \quad (5)$$

$$\text{Тобто, } x = \frac{\varepsilon_1}{q_1 - 1} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1(q_2 - 1)} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1q_2} + \frac{\varepsilon_3}{q_1q_2(q_3 - 1)} = \dots = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{q_1 \dots q_i} + \frac{\varepsilon_n}{q_1 \dots q_{n-1}(q_n - 1)} = \dots$$

Лему доведено.

Зауваження 1. Якщо $\sigma^n(x) = \text{const}$ для всіх $n \geq n_0$, де n_0 – фіксоване натуральне число, то з (3) слідує, що умова

$$\frac{\varepsilon_n}{q_n - 1} = \text{const} \text{ виконується для всіх } n > n_0. \text{ Крім того } x = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_i}{q_1q_2 \dots q_i} + \frac{1}{q_1q_2 \dots q_{n_0}} \cdot \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{q_{n_0+1} - 1}.$$

Лема 3. Нехай n_0 – фіксоване натуральне число. Умова $\sigma^n(x) = \text{const}$ виконується для всіх $n \geq n_0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varepsilon_n}{q_n - 1} = \text{const}$ для всіх $n > n_0$.

Доведення. Необхідність впливає з останньої леми.

Достатність. Нехай для всіх $n > n_0$ маємо $\text{const} = p = \frac{\varepsilon_n}{q_n - 1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1} - 1} = \dots = \frac{\varepsilon_{n+i}}{q_{n+i} - 1} = \dots$. Тоді, скориставшись рі-

вністю $\frac{\varepsilon_n}{q_n} = \frac{\varepsilon_n}{q_n - 1} - \frac{\varepsilon_n}{q_n(q_n - 1)}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma^n(x) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{q_{n+1} \dots q_i} = \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1} - 1} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}(q_{n+1} - 1)} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{q_{n+i+1} - 1} - \frac{\varepsilon_{n+i+1}}{q_{n+i+1}(q_{n+i+1} - 1)} \right) \prod_{j=n+1}^{n+i} \frac{1}{q_j} \right) = \\ &= p \left(1 - \frac{1}{q_{n+1}} \right) + p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{q_{n+i+1}} \right) \prod_{j=n+1}^{n+i} \frac{1}{q_j} \right) = p. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Очевидним наслідком наведених вище міркувань є таке твердження.

Твердження 1. Множина $\{x : \sigma^n(x) = x \forall n \in N, x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots}^Q\}$ є скінченною множиною порядку $\min_n q_n$, причому

$$x = \frac{\varepsilon}{q-1}, \text{ де } q = \min_n q_n \text{ та } \varepsilon \in \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Далі покажемо, що можна доволі легко обчислити значення елементів послідовності (ε_k) цифр числа $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots}^Q$, яке має властивість $\sigma^n(x) = x$ для $n = 1, 2, \dots$

Лема 4. Нехай маємо $q = \min_n q_n$ та фіксоване $\varepsilon \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Умова $\sigma^n(x) = x = \frac{\varepsilon}{q-1}$ виконується тоді і

тільки тоді, коли для зображення числа x знакододатним рядом Кантора справедлива умова $\frac{q_n-1}{q-1} \varepsilon = \varepsilon_n \in Z_0$ для

всіх $n \in N$.

Доведення. Необхідність випливає із твердження 1 і рівності (5).

$$\text{Достатність. Справді, нехай } \varepsilon_n = \frac{q_n-1}{q-1} \varepsilon, \text{ тоді } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{q_n-1}{q-1} \varepsilon}{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{\varepsilon}{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n-1}{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{\varepsilon}{q-1}.$$

Лему доведено.

Наслідок 1. Нехай n_0 – фіксоване натуральне число і $q_0 = \min_{n > n_0} q_n$, ε_0 – чисельник звичайного дроби

$$\frac{\varepsilon_{n_0+k}}{q_1 q_2 \dots q_{n_0} q_{n_0+1} \dots q_{n_0+k}}$$

в розкладі числа x у знакододатний ряд Кантора за умови, що $q_{n_0+k} = q_0$.

Рівність $\sigma^n(x) = \text{const}$ виконується для всіх $n \geq n_0$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $n > n_0$ виконується

$$\text{умова } \frac{q_n-1}{q_0-1} \varepsilon_0 = \varepsilon_n \in Z_0.$$

Повернемося до рівностей (4). Розглянемо питання про існування послідовності (n_k) такої, що $u_{n_k} = \text{const}$ для всіх $k \in N$ у (4). Нехай у розкладі раціонального числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність (n_k) така, що $\sigma^{n_k}(x) = \text{const}$. Останню умову можна записати таким чином:

$$\text{const} = \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{q_{n_1+1} \dots q_i} = \sum_{i=n_2+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{q_{n_2+1} \dots q_i} = \dots = \sum_{i=n_k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{q_{n_k+1} \dots q_i} = \dots$$

Очевидно, можна звести ряд Кантора (1) до ряду Кантора, для якого умова $\sigma^{n_k}(x) = \text{const}$ еквівалентна умові $\sigma^k(x) = \text{const}, k = 0, 1, \dots$ Тобто,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\varepsilon_j}{q_1 q_2 \dots q_j} + \frac{1}{q_1 \dots q_{n_1}} x',$$

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n_k+1} q_{n_k+2} q_{n_k+3} \dots q_{n_{k+1}} + \varepsilon_{n_k+2} q_{n_k+3} \dots q_{n_{k+1}} + \dots + \varepsilon_{n_k+1-1} q_{n_k+1} + \varepsilon_{n_k+1}}{(q_{n_1+1} \dots q_{n_2})(q_{n_2+1} \dots q_{n_3}) \dots (q_{n_k+1} \dots q_{n_{k+1}})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(\mu_1+1) \dots (\mu_k+1)}. \quad (6)$$

Саме для ряду Кантора (6) і виконується умова $\sigma^k(x') = \text{const}$ для всіх $k = 0, 1, \dots$

Підсумовуючи отримані результати, сформулюємо таке твердження.

Теорема 5. Число x , представлене у вигляді розкладу в ряд Кантора (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існує така підпослідовність (n_k) натуральних чисел, що для всіх $k = 1, 2, \dots$ виконуються умови:

$$1. \frac{\lambda_k}{\mu_k} = \frac{\varepsilon_{n_k+1} q_{n_k+2} \dots q_{n_{k+1}} + \varepsilon_{n_k+2} q_{n_k+3} \dots q_{n_{k+1}} + \dots + \varepsilon_{n_k+1-1} q_{n_k+1} + \varepsilon_{n_k+1}}{q_{n_k+1} q_{n_k+2} \dots q_{n_{k+1}} - 1} = \text{const};$$

$$2. \lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu} \lambda, \text{ де } \mu = \min_{k \in N} \mu_k \text{ та } \lambda - \text{число в чисельнику звичайного дроби із суми (6), знаменник якого дорівнює } (\mu_1+1)(\mu_2+2) \dots (\mu+1).$$

Нехай існують такі $n \in Z_0$, $m \in N$, що виконується теорема 2. Тоді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{q_1 q_2 \dots q_i} + \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_1 q_2 \dots q_{n+1}} + \dots + \frac{\varepsilon_{n+m}}{q_1 q_2 \dots q_{n+m}} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+m+j}}{q_1 q_2 \dots q_{n+m+j}} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{q_1 q_2 \dots q_i} + \frac{\varepsilon_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+m} + \dots + \varepsilon_{n+m-1} q_{n+m} + \varepsilon_{n+m}}{q_1 q_2 \dots q_n (q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+m})} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+m+j}}{q_1 q_2 \dots q_{n+m+j}}.$$

Для заданого початкового ряду (у першому рядку) справджується рівність $\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x)$, водночас для останнього ряду (у другому рядку) виконується умова $\sigma^n(x) = \sigma^{n+1}(x)$. Із теореми 3 слідує, що

$$\sigma^n(x) = \sigma^{n+m}(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}q_{n+2} \cdots q_{n+m} + \cdots + \varepsilon_{n+m-1}q_{n+m} + \varepsilon_{n+m}}{q_{n+1}q_{n+2} \cdots q_{n+m} - 1}.$$

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 6. Якщо число x , представлене у вигляді розкладу в ряд Кантора (1), є раціональним ($x = \frac{u}{v}$), то існують такі $n \in \mathbb{Z}_0$, $m \in \mathbb{N}$, що $q_1 q_2 \cdots q_n (q_{n+1} q_{n+2} \cdots q_{n+m} - 1) : v$.

Висновки. У цій статті наведено критерій володіння раціональним числом двома різними зображеннями знакододатним рядом Кантора. Достатня умова була доведена Г. Кантором, але мала більш громіздке доведення й інше формулювання.

Доведено критерій раціональності чисел, представлених у термінах знакододатних рядів Кантора. У доведенні цієї теореми та її наслідків використовується поняття оператора зсуву цифр представлення числа знакододатним рядом Кантора. Цей оператор неявно фігурував у спробах різних учених сформулювати критерій раціональності, але чіткого результату для ряду (1) у випадку довільної послідовності (q_k) у цих роботах так і не отримано.

Список використаних джерел

1. Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme / G. Cantor // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121–128.
2. Diananda P. A. Criteria for irrationality of certain classes of numbers II / P. H. Diananda, A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. – 1955. – 62, № 4. – P. 222–225.
3. Erdős P. On the irrationality of certain Ahmes series / P. Erdős, E. G. Straus // J. Indian. Math. Soc. – 1968. – 27. – P. 129–133.
4. Erdős P. On the irrationality of certain series / P. Erdős, E. G. Straus // Pacific J. Math. – 1974. – 55. – № 1. – P. 85–92.
5. Hančl J. A note to the rationality of infinite series I / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. – 1997. – 5. – № 1. – P. 5–11.
6. Hančl J. A note on a paper of Oppenheim and Šalát concerning series of Cantor type / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. – 2002. – 10. – P. 35–41.
7. Hančl J. On the irrationality of Cantor series / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Reine Angew. Math. – 2004. – 571. – P. 145–158.
8. Hančl J. On the irrationality of Cantor and Ahmes series / J. Hančl, R. Tijdeman // Publ. Math. Debrecen. – 2004. – 65. – № 3–4. – P. 371–380.
9. Hančl J. On the irrationality of factorial series / J. Hančl, R. Tijdeman // Acta Arith. – 2005. – 118. – P. 383–401.
10. Hančl J. On the irrationality of factorial series III / J. Hančl, R. Tijdeman // Indag. Mathem., N. S. – 2009. – 20. – № 4. – P. 537–549.
11. Hančl J. On the irrationality of factorial series II / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Number Theory. – 2010. – 130. – № 3. – P. 595–607.
12. Kuhapatanakul P. Irrationality of some series with rational terms / P. Kuhapatanakul, V. Laohakosol // Kasetsart J. (Natural Science). – 2001. – 35. – P. 205–209.
13. Mance B. Normal numbers with respect to the Cantor series expansion / B. Mance. – Dissertation. – The Ohio State University, 2010. – 290 p.
14. Oppenheim A. Criteria for irrationality of certain classes of numbers / A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. – 1954. – 61. – № 4. – P. 235–241.
15. Serbenyuk S. Representation of real numbers by the alternating Cantor series / S. Serbenyuk // arXiv:1602.00743v1. Режим доступу: <http://arxiv.org/pdf/1602.00743v1.pdf>
16. Tijdeman R. On the rationality of Cantor and Ahmes series / R. Tijdeman, Yuan Pingzhi // Indag. Math. (Natural Science). – 2002. – 13. – № 3. – P. 407–418.

Надійшла до редколегії 29.10.16

С. Сербенюк, мл. науч. сотр.

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТЕРМИНАХ ЗНАКОПОЗИТИВНЫХ РЯДОВ КАНТОРА

Статья посвящена изучению представления рациональных чисел рядами Кантора. Критерий рациональности для случая произвольной последовательности (q_k) сформулирован, некоторые его следствия рассмотрены.

S. Serbenyuk, junior researcher

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

RATIONAL NUMBERS IN TERMS OF POSITIVE CANTOR SERIES

The article is devoted to the investigation of representation of rational numbers by Cantor series. Criteria of rationality are formulated for the case of an arbitrary sequence (q_k) and some its corollaries are considered.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, доц.

Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

E-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРИ З ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

Вступ. Різноманітні прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових і початково-крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не лише в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й у неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 14].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 8–10].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач у необмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах одержано у працях [4, 5, 11, 12]. У цій статті, яка є логічним продовженням [6], ми пропонуємо інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі в напівобмеженому кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з циліндричною порожниною.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in (0; +\infty)\}$$

2π -періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь із частинними похідними гіперболічного типу другого порядку [13] вигляду

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

із початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z), \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = g_j(t, r, \varphi), \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k – деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0; \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}; \quad g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\}; \quad g(t, r, \varphi) = \{g_1(t, r, \varphi), g_2(t, r, \varphi), \dots, g_{n+1}(t, r, \varphi)\}; \quad g_0(t, \varphi, z) -$$

задані обмежені неперервні функції; $u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$ – шукана функція.

Основний результат. Вважаємо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [15, 16, 1]. Побудований за методикою, розвинутою в [6] для напівобмеженого кусково-однорідного циліндрично-кругового півпростору, методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0; +\infty)$ щодо змінної z [15], скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [16] та гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [1], єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5) визначають функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi+\infty} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} W_{jk}(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z) g_k(\tau, \rho, \alpha) \sigma_k \rho d\alpha d\rho d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi+\infty} W_{jr}(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\rho d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (6)$$

У формулах (6) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} G(t, \lambda, \sigma) K(z, \sigma) K(\xi, \sigma) V_j(r, \lambda) V_k(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda d\sigma \cos(m\varphi)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти $W_{jk}(t, r, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \varphi, z, 0)$ тангенціальної матриці Гріна (тангенціальні функції Гріна) та компоненти $W_{jr}(t, r, \varphi, z, \xi) = -a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, R_0, \varphi, z, \xi)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) розглянутої задачі, де $G(t, \lambda, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda, \sigma)t)}{\Delta(\lambda, \sigma)}$, $\Delta^2(\lambda, \sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2$.

Із використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}(t, r, \varphi, z)$, $W_{jr}(t, r, \varphi, z, \xi)$ безпосередньо перевіряємо, чи будуть функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, які визначені формулами (6), задовольняти рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) у сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (6) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (матриць впливу і матриць Гріна) задачі (1)–(5).

Методами із [2, 17] можна довести, що за відповідних умов на вихідні дані, формули (6) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_j(t, r, \varphi)$ задовольняють умови:

- 1) двічі неперервно диференційовані за кожною змінною;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні за змінною z на $(0; +\infty)$;
- 4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r) = r\sigma(r)$ на проміжку I_n^+ ;
- 5) справджують умови спряження, а функція $g_0(t, \varphi, z)$, двічі неперервно диференційована за кожною змінною, має обмежену варіацію за геометричними змінними, абсолютно сумовна за змінною z на півосі $(0; +\infty)$, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулою (6).

має обмежену варіацію за геометричними змінними, абсолютно сумовна за змінною z на півосі $(0; +\infty)$, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулою (6).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (6) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з циліндричною порожниною.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дозволяють виділяти із формул (6) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv \beta > 0$).

Зауваження 3. Параметр h дозволяє виділяти із формул (6) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площині $z = 0$ крайової умови 1-го роду ($h \rightarrow \infty$) та 2-го роду ($h \rightarrow +0$).

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (6) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_j(t, r, \varphi)$, $g_0(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 5. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 6. У випадку $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k , E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1, n}$), умови спряження (5) збігаються із класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 5, 6 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вимушених коливань процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі із циліндричною порожниною.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з циліндричною порожниною. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може використовуватись як у подальших теоретичних дослідженнях, так і у практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. Быблив О. Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 7. – С. 3–11.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Громик А. П. Інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі // А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділь. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 27–37.
5. Громик А. П. Інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною // А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділь. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. – Вип. 13. – С. 45–55.
6. Громик А. П. Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі // А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипук // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2017. – Вип. 1(37).
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998.

8. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016.
11. Конет І. М. Гіперболічна крайова задача для необмеженого кусково-однорідного циліндра / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2016. – Вип. 2(36). – С. 22–27.
12. Конет І. М. Гіперболічна крайова задача для необмеженого кусково-однорідного порожнистого циліндра // І. М. Конет, Т. М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділь. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Вип. 14. – С. 25–35.
13. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2006.
14. Сергиенко І. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991.
15. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : ИЛ, 1955.
16. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Гостехтеориздат, 1956.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 05.12.16

А. Громик, канд. техн. наук, доц.

Подольський державний аграрно-технічний університет, Каменець-Подільський, Україна,

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Каменець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Каменець-Подільський, Україна

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛОСТЬЮ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики в кусочно-однородном цилиндрически-круговом полупространстве с полостью.

A. Gromyk, PhD

Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky, Ukraine,

I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD

Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky, Ukraine

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS CYLINDRICALLY-CIRCULAR HALFSPACE WITH CAVITY

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise-homogeneous cylindrically-circular halfspace with cavity is constructed for the first time.

УДК 519.21

Н. Аюбова, асп., О. Курченко, д-р фіз.-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

E-mail: n.aiubova@gmail.com, olkurchenko@ukr.net

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ РЕАЛЬНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Отримано консистентну оцінку параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань. Побудовано неасимптотичні довірчі інтервали.

Вступ. Випадковий гауссів процес $\xi_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, із нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s, t) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0, 1)$.

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла в сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [4, 7, 8] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві – Бакстера забезпечують консистентність відповідних оцінок. Монографія [9] Пракаса Рао містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [3] досліджено моделі регресії з похибками вимірювання.

Реальне вимірювання значення випадкового процесу в точці здійснюється приладом, що має певну інерційність. Тому замість значення випадкового процесу $\xi(t)$ у момент часу t , прилад видає значення інтеграла $\int_A \xi(s) \varphi(s) ds$,

де A – деякий окіл точки t , $\varphi(s)$ – функція, що характеризує прилад [1].

У цій статті отримано консистентну оцінку параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями, які здійснювалися приладом, що має певну інерційність. Побудовано неасимптотичні довірчі інтервали для цієї оцінки.

Постановка задачі оцінювання. Розглянемо задачу оцінювання. Нехай $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\Delta > 1 + 2\delta$; $\varphi \in C([- \delta, \delta])$ – відома невід’ємна функція, $\varphi(x) = 0$ при $|x| > \delta$; $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(s) ds = 1$.

Нехай, далі, $\eta_k = \eta_{k,H} = \int_{k\Delta-\delta}^{k\Delta+\delta} \xi_H(s) \varphi(s - k\Delta) ds$, $k \in Z$. За спостереженнями випадкових величин η_k , $k \geq 0$, потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H .

Консистентна оцінка параметра Хюрста. Покладемо $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1} - \eta_k$, $k \in Z$. Зауважимо, що $(\xi_k, k \in Z)$ – стаціонарна гауссова випадкова послідовність із нульовим математичним сподіванням.

Лема 3.1. Функція $\kappa(H) = E\xi_{0,H}^2$, $H \in (0,1)$, неперервна і зростаюча на інтервалі $(0,1)$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \kappa(H) = E\xi_{0,H}^2 &= E \left(\int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-\Delta) dt - \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s) \varphi(s) ds \right)^2 = E \left(\int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-\Delta) dt \int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(s) \varphi(s-\Delta) ds - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-\Delta) dt \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s) \varphi(s) ds + \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(t) \varphi(t) dt \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s) \varphi(s) ds \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-\Delta) dt = \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(t+\Delta) \varphi(t) dt,$$

то

$$\kappa(H) = E \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt \int_{-\delta}^{\delta} (\xi_H(t+\Delta) \xi_H(s+\Delta) - 2\xi_H(t+\Delta) \xi_H(s) + \xi_H(t) \xi_H(s)) \varphi(s) ds.$$

Унаслідок теореми Фубіні, обчислення математичного сподівання можна виконати перед обчисленням подвійного інтеграла по квадрату $A = [-\delta, \delta]^2$. Обчислимо математичне сподівання підінтегрального виразу. Маємо

$$\begin{aligned} E(\xi_H(t+\Delta) \xi_H(s+\Delta) - 2\xi_H(t+\Delta) \xi_H(s) + \xi_H(t) \xi_H(s)) &= \\ = \frac{1}{2} (|t+\Delta|^{2H} + |s+\Delta|^{2H} - |t-s|^{2H} - 2(|t+\Delta|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s+\Delta|^{2H}) + |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) &= \\ = \frac{1}{2} (|s+\Delta|^{2H} - |s|^{2H} - (|t+\Delta|^{2H} - |t|^{2H})) + 2|t-s+\Delta|^{2H} - 2|t-s|^{2H}. \end{aligned}$$

Далі $\int_A \varphi(t) \varphi(s) (|s+\Delta|^{2H} - |s|^{2H} - (|t+\Delta|^{2H} - |t|^{2H})) dt ds = 0$ через антисиметрію підінтегрального виразу відносно змінних $t, s \in A$. Таким чином, $\kappa(H) = \int_A (|t-s+\Delta|^{2H} - |t-s|^{2H}) \varphi(t) \varphi(s) dt ds$. За допомогою цієї формули продов-

жимо функцію κ на відрізок $[0,1]$ і позначимо це продовження через $\tilde{\kappa}$. Неперервність функції $\tilde{\kappa}$ на відрізку $[0,1]$ впливає з теореми про неперервність інтеграла, залежного від параметра. При фіксованих $t, s \in A$ маємо $|t-s+\Delta| > 1$, $|t-s| < 1$, а тому функція $|t-s+\Delta|^{2H}$, $H \in (0,1)$, зростає відносно H на інтервалі $(0,1)$, тоді як функція $|t-s|^{2H}$, $H \in (0,1)$, спадає відносно H на цьому інтервалі. Таким чином, функція $|t-s+\Delta|^{2H} - |t-s|^{2H}$, $H \in (0,1)$ зростає відносно H на інтервалі $(0,1)$. Беручи до уваги невід’ємність функції φ , бачимо, що функція κ зростає на інтервалі $(0,1)$. Лему доведено.

Наслідок 1. Функція κ має обернену функцію, що неперервна і зростаюча на інтервалі $(0, \Delta^2)$.

Доведення. У доведенні леми 3.1 зазначено, що продовження $\tilde{\kappa}$ функції κ на відрізок $[0,1]$ неперервне на цьому відрізку. Оскільки $\tilde{\kappa}(0) = 0$, $\tilde{\kappa}(1) = \Delta^2$, то твердження наслідку випливає з теореми про існування та властивості оберненої функції.

Обернену функцію до функції κ позначимо через α :

$$\alpha = \kappa^{-1} : (0, \Delta^2) \rightarrow (0,1).$$

Приклад 1. Нехай $\varphi(t) = \frac{1}{2\delta}$, $t \in [-\delta, \delta]$. Обчислимо функцію $\tilde{\kappa}$ – неперервне продовження на відрізок $[0, 1]$ функції κ . Маємо

$$\tilde{\kappa}(H) = \frac{1}{4\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} dt \int_{-\delta}^{\delta} ((\Delta + t - s)^{2H} - |t - s|^{2H}) ds; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} dt \int_{-\delta}^{\delta} (\Delta + t - s)^{2H} ds &= \frac{1}{2H+1} \int_{-\delta}^{\delta} -(\Delta + t - s)^{2H+1} \Big|_{s=-\delta}^{s=\delta} dt = \frac{1}{(2H+1)(2H+2)} \left(-(\Delta + t - s)^{2H+2} \Big|_{t=-\delta}^{t=\delta} \Big|_{s=-\delta}^{s=\delta} \right) = \\ &= \frac{(\Delta - 2\delta)^{2H+2} - 2\Delta^{2H+2} + (\Delta + 2\delta)^{2H+2}}{(2H+1)(2H+2)}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} dt \int_{-\delta}^{\delta} |t - s|^{2H} ds &= 2 \int_{-\delta}^{\delta} dt \int_{-\delta}^t (t - s)^{2H} ds = \frac{2}{(2H+1)} \int_{-\delta}^{\delta} \left(-(t - s)^{2H+1} \Big|_{s=-\delta}^{s=t} \right) dt = \\ &= \frac{2}{2H+1} \int_{-\delta}^{\delta} (t + \delta)^{2H+1} dt = \frac{2}{(2H+1)(2H+2)} (t + \delta)^{2H+2} \Big|_{-\delta}^{\delta} = 2 \cdot \frac{(2\delta)^{2H+2}}{(2H+1)(2H+2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

При обчисленні останнього інтеграла використано симетрію підінтегральної функції відносно прямої $t = s$. Із рівностей (1), (2), (3) випливає, що

$$\tilde{\kappa}(H) = \frac{(\Delta - 2\delta)^{2H+2} - 2\Delta^{2H+2} + (\Delta + 2\delta)^{2H+2} - 2 \cdot (2\delta)^{2H+2}}{4\delta^2 (2H+1)(2H+2)}, \quad H \in [0, 1].$$

Покладемо $S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{k,H}^2$, $n \geq 1$.

Теорема 1. Для довільного $H \in (0, 1)$ маємо

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{k,H}^2 \rightarrow \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$. При цьому $S_{2^n} = S_{2^n,H} \rightarrow \kappa(H)$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Унаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності $(\xi_{k,H}, k \in \mathbb{Z})$ одержуємо

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\xi_{k,H}^2 = E\xi_{0,H}^2 = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_{n,H}$. Маємо

$$\text{Var} S_{n,H} = E(S_{n,H} - \kappa(H))^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k,j=0}^{n-1} \left(E(\xi_{k,H}^2 \xi_{j,H}^2) - E\xi_{k,H}^2 E\xi_{j,H}^2 \right).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, що мають сумісний гауссів розподіл із нульовим середнім значенням, справедлива така формула [2, с. 29]:

$$E(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) = E\eta_1 \eta_2 E\eta_3 \eta_4 + E\eta_1 \eta_3 E\eta_2 \eta_4 + E\eta_1 \eta_4 E\eta_2 \eta_3.$$

У цій формулі покладемо $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}$, $\eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$ і отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Var} S_{n,H} &= \frac{2}{n^2} \sum_{k,j=0}^{n-1} (E\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2 = \frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (E\xi_{k,H}^2)^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n-1} (E\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2 \right) = \\ &= \frac{2(\kappa(H))^2}{n} + \frac{4}{n^2} \sum_{0 \leq k < j \leq n-1} (E\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2. \end{aligned}$$

В останній сумі покладемо $l = j - k$. Враховуючи стаціонарність гауссової випадкової послідовності $(\xi_{k,H}, k \in \mathbb{Z})$, отримуємо рівність $(E\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2 = (E\xi_{0,H} \xi_{l,H})^2$. Обчислимо математичне сподівання $E\xi_{0,H} \xi_{l,H}$, $1 \leq l \leq n-1$. Знаходимо

$$\begin{aligned} E\xi_{0,H} \xi_{l,H} &= E((\eta_{1,H} - \eta_{0,H})(\eta_{l+1,H} - \eta_{l,H})) = \\ &= E \left(\left(\int_{\Delta-\delta}^{\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-\Delta) dt - \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s) \varphi(s) ds \right) \times \left(\int_{(l+1)\Delta-\delta}^{(l+1)\Delta+\delta} \xi_H(t) \varphi(t-(l+1)\Delta) dt - \int_{l\Delta-\delta}^{l\Delta+\delta} \xi_H(s) \varphi(s-l\Delta) ds \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left(\left(\int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(t+\Delta) \varphi(t) dt - \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s) \varphi(s) ds \right) \times \left(\int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(t+(l+1)\Delta) \varphi(t) dt - \int_{-\delta}^{\delta} \xi_H(s+l\Delta) \varphi(s) ds \right) \right) = \\
&= \int_A E \left(\left(\xi_H(t+\Delta) - \xi_H(t) \right) \left(\xi_H(s+(l+1)\Delta) - \xi_H(s+l\Delta) \right) \right) \varphi(t) \varphi(s) dt ds = \\
&= \frac{1}{2} \int_A \left(|(l-1)\Delta + s - t|^{2H} - 2|l\Delta + s - t|^{2H} + |(l+1)\Delta + s - t|^{2H} \right) \varphi(t) \varphi(s) dt ds,
\end{aligned}$$

де $A = [-\delta, \delta]^2$. Перестановка символу математичного сподівання та інтеграла по A обґрунтовується за допомогою теореми Фубіні. Перейдемо до мажорювання дисперсії випадкової величини $(\xi_{k,H}, k \in Z)$. При $l = 1, 2$ квадрат математичного сподівання $(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2$ оцінимо за допомогою нерівності Коші – Буняковського:

$$(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2 \leq E\xi_{0,H}^2 E\xi_{l,H}^2 = (E\xi_{0,H}^2)^2 = (\kappa(H))^2.$$

При $l \geq 3$ вираз $((l-1)\Delta + s - t)^{2H} - 2(l\Delta + s - t)^{2H} + ((l+1)\Delta + s - t)^{2H}$ дорівнює приросту другого порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x > 0$, на відрізку $[(l-1)\Delta + s - t, (l+1)\Delta + s - t]$. Тому існує така точка $\xi_{l,s-t} \in ((l-1)\Delta + s - t, (l+1)\Delta + s - t)$ [6, п. 122], що

$$((l-1)\Delta + s - t)^{2H} - 2(l\Delta + s - t)^{2H} + ((l+1)\Delta + s - t)^{2H} = f''(\xi_{l,s-t}) \Delta^2.$$

Оскільки для $s, t \in (-\delta, \delta)$: $(l-1)\Delta + s - t \geq (l-1)\Delta - 2\delta \geq (l-2)\Delta + 1$, то

$$\left| ((l-1)\Delta + s - t)^{2H} - 2(l\Delta + s - t)^{2H} + ((l+1)\Delta + s - t)^{2H} \right| = |2H(2H-1)| (\xi_{l,s-t})^{2H-2} \Delta^2 \leq \frac{|2H(2H-1)|}{((l-2)\Delta + 1)^{2-2H}} \Delta^2.$$

Отже,

$$(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2 \leq \frac{1}{4} \frac{(2H(2H-1))^2}{((l-2)\Delta + 1)^{4-4H}} \Delta^4, \quad l \geq 3.$$

Таким чином,

$$\text{Var} S_{n,H} \leq \frac{10(\kappa(H))^2}{n} + \frac{4}{n} \sum_{l=3}^{n-1} \frac{(2H(2H-1))^2 \Delta^4}{((l-2)\Delta + 1)^{4-4H}} = \frac{10(\kappa(H))^2}{n} + \frac{4\Delta^4 (2H(2H-1))^2}{n} \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{(i\Delta + 1)^{4-4H}}.$$

Для $n \geq 4$ розглянемо функцію

$$m_n(H) = \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{(i\Delta + 1)^{4-4H}}, \quad H \in (0, 1)$$

і оцінимо її зверху:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{(i\Delta + 1)^{4-4H}} \leq \frac{1}{(\Delta + 1)^{4-4H}} + \int_1^{n-2} \frac{dx}{(x\Delta + 1)^{4-4H}} = \frac{1}{(\Delta + 1)^{4-4H}} + \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta}^{(n-2)\Delta} \frac{dy}{(y+1)^{4-4H}} = \\
&= \frac{1}{(\Delta + 1)^{4-4H}} + \frac{1}{\Delta} \times \begin{cases} \frac{(y+1)^{4H-3}}{4H-3} \Big|_{\Delta}^{(n-2)\Delta}, & H \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ \ln(y+1) \Big|_{\Delta}^{(n-2)\Delta}, & H = \frac{3}{4}, \\ \frac{(y+1)^{4H-3}}{4H-3} \Big|_{\Delta}^{(n-2)\Delta}, & H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases} \leq \frac{1}{(\Delta + 1)^{4-4H}} + \frac{1}{\Delta} \times \begin{cases} \frac{(\Delta + 1)^{4H-3}}{3-4H}, & H \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ \ln n + \ln \Delta, & H = \frac{3}{4}, \\ \frac{(n\Delta)^{4H-3}}{4H-3}, & H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\text{Var} S_{n,H} \leq \frac{10(\kappa(H))^2}{n} + \frac{4(2H(2H-1))^2 \Delta^4}{n} m_n(H),$$

де

$$m_n(H) = \frac{1}{(\Delta+1)^{4-4H}} + \frac{1}{\Delta} \times \begin{cases} \frac{(\Delta+1)^{4H-3}}{3-4H}, & H \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ \ln n + \ln \Delta, & H = \frac{3}{4}, \\ \frac{(n\Delta)^{4H-3}}{4H-3}, & H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases} \quad (4)$$

З отриманої оцінки випливає, що для довільного $H \in (0, 1)$: $\text{Var}S_{n,H} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, тобто $S_{n,H} \rightarrow \kappa(H)$ у середньому квадратичному при $n \rightarrow \infty$, а, отже, і за ймовірністю. Крім того, неважко бачити, що для довільного $H \in (0, 1)$

ряд із дисперсій $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}S_{2^n, H}$ збіжний, звідки слідує, що $S_{2^n, H} \rightarrow \kappa(H)$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$ [5, с. 24].

Теорему доведено.

Зауваження. У доведенні теореми 1 отримано таку оцінку зверху дисперсії $\text{Var}S_{n,H}$:

$$\text{Var}S_{n,H} \leq \frac{10(\kappa(H))^2}{n} + \frac{4(2H(2H-1))^2 \Delta^4}{n} m_n(H),$$

де $m_n(H)$ визначено рівністю (4).

Покладемо $U_n = S_{2^n}$, $n \geq 1$;

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \alpha(x), & x \in (0, \Delta^2), \\ 1, & x \geq \Delta^2, \end{cases}$$

де $\alpha(x)$, $x \in (0, \Delta^2)$, – функція, що обернена до функції κ . Зауважимо, що функція β неперервна на $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Статистика $\theta_n = \beta(S_n)$, $n \geq 1$, – *консистентна оцінка параметра Хюрста H дробового броунівського руху. При цьому статистика $\tilde{\theta}_n = \beta(U_n)$, $n \geq 1$, – строго консистентна оцінка цього параметра.*

Доведення. Унаслідок теореми 1, $S_n \rightarrow \kappa(H)$ за ймовірністю та $U_n \rightarrow \kappa(H)$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$. Оскільки функція β неперервна на $\mathbb{R}$, то $\theta_n = \beta(S_n) \rightarrow \beta(\kappa(H)) = H$ за ймовірністю та $\tilde{\theta}_n = \beta(U_n) \rightarrow \beta(\kappa(H)) = H$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$. Теорему доведено.

Побудова довірчих інтервалів. Нехай $H^* \in (0, 1)$ – фіксоване число, параметр Хюрста $H \in (0, H^*]$. Через $(1-p)$ позначимо рівень довіри.

Теорема 3. Нехай

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{v_n(H^*)}{pn}},$$

де $v_n(H^*) = 10\kappa(H^*) + 4\sigma(H^*)\Delta^4 m_n(H^*)$, $\sigma(H^*) = \max\left(\frac{1}{16}, (2H^*(2H^*-1))^2\right)$, $H^* \in (0, 1)$, функція $m_n(H)$, $H \in (0, 1)$, визначена рівністю (4).

Тоді $P(\{H \in (a_n, b_n)\}) \geq 1-p$, де $a_n = \beta(S_n - \varepsilon_n)$, $b_n = \max(\beta(S_n + \varepsilon_n), H^*)$, тобто (a_n, b_n) – довірчий інтервал для параметра Хюрста H із рівнем довіри $1-p$.

Доведення. Унаслідок нерівності Чебишова, для довільного $\varepsilon > 0$, $P\{|S_{n,H} - \kappa(H)| > \varepsilon\} \leq \frac{\text{Var}S_{n,H}}{\varepsilon^2}$. Із доведення те-

ореми 1 та зауваження випливає, що $\text{Var}S_{n,H} \leq \frac{v_n(H^*)}{n}$, $H \in (0, H^*]$. Далі

$$P\{|S_n - \kappa(H)| > \varepsilon\} \leq \frac{v_n(H^*)}{n\varepsilon^2} \leq p \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq \sqrt{\frac{v_n(H^*)}{np}}.$$

Покладемо $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{v_n(H^*)}{np}}$. Тоді $P\{|S_n - \kappa(H)| \geq \varepsilon_n\} \leq p$, звідки

$$P\{|S_n - \kappa(H)| < \varepsilon_n\} = P\{S_n - \varepsilon_n < \kappa(H) < S_n + \varepsilon_n\} = P\{\beta(S_n - \varepsilon_n) < H < \beta(S_n + \varepsilon_n)\} \geq 1 - p,$$

тобто (a_n, b_n) – довірчий інтервал для параметра Хюрста H із рівнем довіри $1 - p$. Теорему доведено.

Висновки. У цій статті за спостереженнями випадкових величин η_k , $k \geq 0$, у моделі реальних вимірювань побудовано консистентну оцінку параметра Хюрста дробового броунівського руху та неасимптотичний довірчий інтервал (a_n, b_n) для цієї оцінки.

Список використаних джерел

1. Гельфанд И. М. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции. Вып. 4. / И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры. – 1961. – 471 с.
2. Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы / И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1970.
3. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків / О. Г. Кукуш, І. А. Ліхтарьов, С. В. Масюк та ін. – К.: ДІА. – 2015.
4. Курченко О. О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О. О. Курченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88–96.
5. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории / Дж. Ламперти. – К.: Вища шк., 1983.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969, 608 с.
7. Breton J. – C. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion / J. Breton // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
8. Kurchenko O. O. Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM / O. O. Kurchenko // Theory of Stochastic Processes. – 2002. – Vol. 8 (24). – P. 242–248.
9. Prakasa Rao B. L. S. Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes / Rao B. L. S. Prakasa. – John Wiley, Chichester, UK. – 2010.

Надійшла до редколегії 26.09.16

Н. Аюбова, асп., А. Курченко, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Получена консистентная оценка параметра Хюрста дробного броуновского движения в модели реальных измерений. Построены неасимптотические доверительные интервалы.

N. Aiubova, PhD graduate, O. Kurchenko, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ESTIMATION OF HURST PARAMETER OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION IN MODEL OF REAL OBSERVATION

Consistent estimation of Hurst parameter of fractional Brownian motion in model of real observations is obtained. Nonasymptotic confidence intervals are built.

УДК 539.3: 537.226.86:534.1

О. Безверхий, д-р физ.-мат. наук
Національний транспортний університет, Київ,
Л. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАНУ, Київ
E-mail: o_bezver@ukr.net, l_grigoryeva@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРІВ

Система рівнянь електропружності в циліндричній системі координат із застосуванням різницевої апроксимації по поздовжній координаті перетворюється до канонічної системи рівнянь гамільтонового типу відносно радіальної координати. Для інтегрування отриманої крайової задачі застосовується метод дискретної ортогоналізації. Розвинута методика використовується для порівняння гармонічних коливань циліндрів різної довжини, визначення їх резонансних частот, дослідження форм коливань.

Вступ. П'єзокерамічні тіла циліндричної форми широко застосовуються в технічних пристроях для перетворення електричного сигналу на механічний і навпаки, тобто як випромінювачі звуку (ультразвуку) та отримувачі сигналу. Звукові сигнали зазвичай виникають унаслідок навантаження елемента електричним сигналом, що змінюється за гармонічним законом. Максимальна амплітуда коливань (потужність сигналу) виникає на резонансних режимах роботи. У зв'язку з цим виникає необхідність у побудові надійного методу дослідження вимушених коливань п'єзоелементів циліндричної форми для визначення резонансних частот та форм вимушених коливань.

У цій роботі на основі гамільтонового формалізму [2, 3] досліджено гармонічні осесиметричні коливання п'єзокерамічних радіально поляризованих циліндрів обмеженої довжини при електричному навантаженні. Гамільтонів формалізм зіграв істотну роль для глибшого розуміння як математичної структури задач механіки, так і їх фізичного змісту, ураховуючи задачі механіки спряжених полів. Застосування гамільтонового формалізму до задач електропружності

проводилось у [5, 8]. У [8] система рівнянь гамільтонового типу застосовувалась для дослідження товщинних коливань п'єзокерамічних тіл із викривленими поверхнями. У [5] пропонується підхід до дослідження усталених коливань п'єзокерамічних циліндрів необмеженої довжини за допомогою процедури розділення змінних та визначено кількість резонансних частот на нижчих модах. У роботі [7] запропоновано наближений метод дослідження осесиметричних вільних коливань однорідних та шаруватих циліндрів на основі методу Рітца з елементами ряду Фур'є як апроксимуючих функцій.

Перевага цього підходу порівняно, скажімо, із варіаційно-різницевим методом [6] полягає в меншій кількості змінних та меншому порядку матриць, що обертаються. Для розв'язання задачі вздовж радіальної координати застосовано метод дискретної ортогоналізації та метод Рунге – Кутти четвертого порядку, тоді як різниці апроксимації [8] мають лише другий порядок. Ураховуючи зазначене вище, у [1] запропоновано варіаційно-сплайновий метод, який використовувався для тестування запропонованого в роботі методу.

Постановка задачі. Зв'язана система рівнянь електропружності описана в класичній літературі [4, 6]. Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань, $(f(r, z, t) = \text{Re } f^a(r, z) \exp i\omega t)$ у циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zz}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a = 0, \quad (1)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r D_r^a}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^a &= c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \quad \sigma_{zz}^a = c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\ \sigma_{rr}^a &= c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \quad \sigma_{zr}^a = c_{44}^E \left(\frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{42} \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \quad D_z^a = e_{42} \left(\frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\ D_r^a &= e_{31} \left(\frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система рівнянь доповнюється граничними умовами для механічних та електричних величин на граничній поверхні S :

$$u_S = u_S \vee \sigma_n = \sigma_n^o, \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi \vee D_n = D_n^o. \quad (5)$$

Далі верхні індекси "a", "E" і "K" опускаємо.

Розв'язувальна система рівнянь за типом гамільтонової. Зведемо систему рівнянь (1)–(3) до операторної системи диференціальних рівнянь по радіальній координаті відносно функцій $\bar{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\bar{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$, $\bar{D}_r = rD_r$, u_r , u_z , φ [1]. Після необхідних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right) u_r + (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{c_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{rc_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} = -\frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r}, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} &= -\left(c_{12} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(c_{11} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho \omega^2 r u_z^a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут використано позначення

$$c_{j3}^* = c_{j3} + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}, \quad e_{j3}^* = e_{j3} - c_{j3} \frac{e_{33}}{c_{33}}, \quad j = 1, 3; \quad \varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + \frac{e_{42}^2}{c_{44}}, \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}.$$

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , D_z , які не увійшли до системи (6), визначаються через основні функції σ_{rr} , u_z , D_r , u_r , σ_{rz} , φ формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ D_z &= \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr} - \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обчислення виконують у безрозмірних змінних

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{33}},$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{c_{33}}, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{R c_{33}}, \quad \bar{D}_r = \frac{\bar{D}_r}{R \sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{R \sqrt{c_{33}}}. \quad (8)$$

При "обезрозміренні" (8) вигляд рівнянь (6), (7) не зміниться. Надалі знаки безрозмірності будемо опускати.

Система диференціальних рівнянь із частинними похідними (6) не може розв'язуватись аналітично, у зв'язку з чим виникає необхідність застосування певних загальноприйнятих методів зниження розмірності задачі з подальшим застосуванням числових методів: розклад у ряди по зайвих просторових змінних (степеневі, тригонометричні), застосування методів операційного числення (перетворення Лапласа, Фур'є) із застосуванням чисельних обернених перетворень, апроксимації похідних наближеними виразами. Усі ці методи призводять до значного зростання кількості змінних за рахунок кількості членів ряду, що розглядаються, або кількості точок розбиття, і потребують дослідження збійності та стійкості розв'язку.

У нашому випадку приведемо розв'язувальну систему (6) до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою різницевих апроксимацій по осевій координаті.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < L$. Уведемо розбиття відрізка $(0, L)$ по осі z на інтервали точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ і у формулах (6) апроксимуємо похідні по z скінченними різницями. У результаті одержимо систему $6n$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{\sigma}_{rr,i}}{dr} = \left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right) u_{r,i} + (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z},$$

$$\frac{du_{z,i}}{dr} = \frac{\bar{\sigma}_{rz,i}}{rc_{44}} - \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta z},$$

$$\frac{d\bar{D}_{r,i}}{dr} = -\frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta z^2}, \quad \frac{du_{r,i}}{dr} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r},$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_{rz,i}}{dr} = -(c_{12} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - (c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) r \frac{u_{z,i+1} - 2u_{z,i} + u_{z,i-1}}{\Delta z^2} +$$

$$+ \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta z} - \rho \omega^2 r u_{z,i},$$

$$\frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Для зведення системи (9) до вигляду канонічних рівнянь Гамільтона необхідно розділити змінні на групи p_i, q_i та звести систему до вигляду

$$q'_i = R_{ik}(\xi) q_k + Q_{ik}(\xi) p_k, \quad p'_i = -P_{ik}(\xi) q_k - R_{ki}(\xi) p_k. \quad (10)$$

При цьому функція Гамільтона матиме вигляд

$$H = \frac{1}{2} (P_{ik} q_i q_k + 2R_{ik} p_i q_k + Q_{ik} p_i p_k). \quad (11)$$

Нехай

$$q_i = -\bar{\sigma}_{rr,i}, \quad q_{n+i} = u_{z,i}, \quad q_{2n+i} = -D_{r,i}, \quad p_i = u_{r,i}, \quad p_{n+i} = \sigma_{rz,i}, \quad p_{2n+i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Тоді з (9) маємо матриці R, Q, P , що відповідають (10), (11)

$$Q_{ii} = -\left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right), \quad Q_{i,n+i+1} = \frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{i,n+i-1} = \frac{-1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,n+i} = \frac{1}{rc_{44}},$$

$$Q_{n+i,i+1} = -\frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,i-1} = \frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,2n+i+1} = -\frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{n+i,2n+i-1} = \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{2n+i,n+i+1} = \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}},$$

$$Q_{2n+i,n+i-1} = \frac{-e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{2n+i,2n+i+1} = \frac{-\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2}, \quad Q_{2n+i,2n+i} = 2 \frac{\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2}, \quad Q_{2n+i,2n+i-1} = \frac{-\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2},$$

$$R_{i,i} = \frac{c_{13}^*}{rc_{33}^*}, \quad R_{i,n+i+1} = \frac{-1}{2\Delta z} (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}), \quad R_{i,n+i-1} = \frac{1}{2\Delta z} (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}), \quad R_{i,2n+i} = R_{2n+i,i} = -\frac{e_{13}^*}{r\varepsilon_{33}^*},$$

$$R_{n+i,i-1} = -(c_{12} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{1}{2\Delta z}, \quad R_{n+i,i+1} = (c_{12} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{1}{2\Delta z},$$

$$\begin{aligned}
 P_{i,i} &= -\frac{1}{rc_{33}^*}, \quad P_{i,n+i+1} = \frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, \quad P_{i,n+i-1} = -\frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, \quad P_{i,2n+i} = P_{2n+i,i} = \frac{e_{33}}{r\epsilon_{33}c_{33}^*}, \\
 P_{n+i,n+i+1} &= P_{n+i,n+i-1} = (c_{11} - \frac{c_{13}^*c_{13}}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\epsilon_{33}}) \frac{r}{\Delta z^2}, \quad P_{n+i,n+i} = -2(c_{11} - \frac{c_{13}^*c_{13}}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\epsilon_{33}}) \frac{r}{\Delta z^2} + \rho\omega^2 r, \\
 P_{n+i,2n+i+1} &= \frac{e_{13}^*}{2\Delta z \epsilon_{33}^*}, \quad P_{n+i,2n+i-1} = -\frac{e_{13}^*}{2\Delta z \epsilon_{33}^*}, \quad P_{n+i,i+1} = \frac{-c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, \quad P_{n+i,i-1} = \frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, \\
 P_{2n+i,2n+i} &= \frac{-c_{33}}{r\epsilon_{33}c_{33}^*}, \quad P_{2n+i,n+i+1} = -\frac{e_{13}^*}{2\Delta z \epsilon_{33}^*}, \quad P_{2n+i,n+i-1} = \frac{e_{13}^*}{2\Delta z \epsilon_{33}^*}. \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Матриці (13) мають симетричну блочну структуру, зручну для обчислювального процесу.

Таким чином отримано канонічну систему рівнянь типу Гамільтона, що описує електромеханічний стан п'єзокерамічних циліндрів зі змінними r , q_i , p_i (12), та характеристичною функцією $H(r, q_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, 3n$ (11).

Канонічні рівняння Гамільтона завдяки їх особливій формі отримали широке застосування в механіці, зокрема завдяки розвитку методу Якобі інтегрування рівнянь із частинними похідними першого порядку.

У задачі двох точок канонічні рівняння Гамільтона можна розв'язати аналітично. У більшості інших задач розв'язати рівняння аналітично не вдається. Однак, використовуючи методи загальної теорії збурень, можна будувати рішення у вигляді рядів. Знайдені таким чином рішення будуть справедливими на деякому інтервалі. При побудові повного рішення методом послідовних наближень можна, проводячи відповідні перетворення, на кожному етапі отримувати диференціальні рівняння, що є за формою, як і попередні, канонічними. У них як змінні виступають так звані постійні інтегрування, отримані в попередньому наближенні. Описана процедура може повторюватися стільки разів, скільки буде потрібно.

У нашому випадку, ураховуючи постановку граничних умов та порядок системи, завдяки сучасному рівню обчислювальних засобів зручніше застосовувати чисельне інтегрування системи. Користуючись формулами (7) і апроксимаціями необхідних величин із матеріальних залежностей (3), із граничних умов знаходять невідомі значення основних функцій на торцях $z = z_0 = 0$ і $z = z_{n+1} = L$. Граничні умови на циліндричних поверхнях записуємо в матричному вигляді, що дає змогу для інтегрування отриманої крайової задачі застосувати метод дискретної ортогоналізації. Порівняння результатів обчислень, отриманих за допомогою запропонованої методики та представлених у [1], де подібна задача розв'язувалася за допомогою варіаційних методів та сплайн апроксимацій, показало відхилення в межах 3 %. Порівняння розв'язків на різних сітках розбиття дозволило зупинитися на значеннях $n = 30 \div 100$ залежно від довжини циліндра, кількість ділянок ортогоналізації $k = 10$, на кожній із них бралось 5 точок для методу Рунге – Кутти.

Чисельні результати. Досліджується радіально поляризований попружнистий циліндр із кераміки PZT-4 з матеріальними характеристиками

$$\begin{aligned}
 c_{11}^E &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, \quad c_{12}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, \quad c_{13}^E = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, \quad c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, \\
 e_{31} &= -5,2 \text{ (Кл/м}^2\text{)}, \quad e_{33} = 15,1 \text{ (Кл/м}^2\text{)}, \quad \epsilon_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ (Ф/м)}, \quad \rho = 7500 \text{ (кг/м}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Внутрішній радіус циліндра R_0 , зовнішній R_1 , $R = R_1$, довжина L . При обчисленнях взято $R_0 / R_1 = 0,6$.

Розглянемо циліндр із жорстко защемленим торцем $z = 0$ та мембранно закріпленим [5] торцем $z = L$, торці електродовані та закорочені:

$$u_r(r, 0) = u_z(r, 0) = 0, \quad u_r(r, L) = \sigma_{zz}(r, L) = 0, \quad \varphi(r, 0) = \varphi(r, L) = 0.$$

Вважаємо, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(R_0, z) = \sigma_{rz}(R_0, z) = 0, \quad \sigma_{rr}(R_1, z) = \sigma_{rz}(R_1, z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладено різницю потенціалів, яка змінюється по гармонічному закону із частотою ω й амплітудою $2V_0$: $\varphi(R_0, z, t) = -V_0 \sin \omega t$, $\varphi(R_1, z, t) = V_0 \sin \omega t$.

Аналізуючи результати обчислень для циліндрів різної довжини (рис. 1), визначаємо власні частоти конкретних циліндрів на розглянутому інтервалі кругової частоти ω :

- при $L = R$ $\Omega = (1.33; 1.64)$;
- при $L = 2R$ $\Omega = (0.68; 1.16; 1.36; 1.44; 2.03; 2.21)$;
- при $L = 3R$ $\Omega = (0.45; 1.06; 1.25; 1.37; 1.48; 1.54; 1.76; 1.82; 2.16; 2.246; 2.44)$;
- при $L = 4R$ $\Omega = (0.34; 0.925; 1.111; 1.187; 1.205; 1.27; 1.346; 1.383; 1.64; 1.835; 1.95; 2.03; 2.243; 2.296)$.

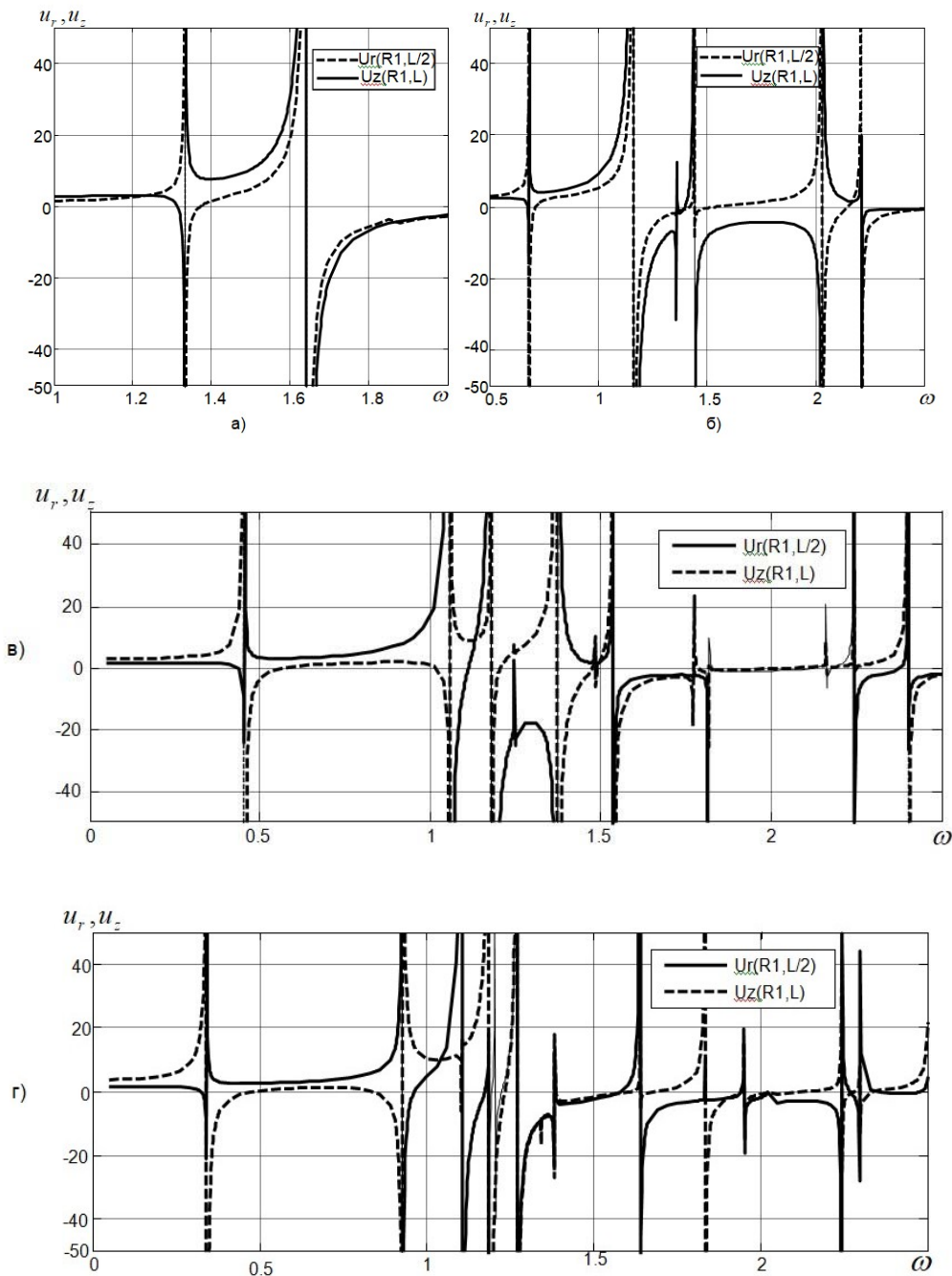


Рис. 1. Амплітудні значення радіальних та поздовжніх переміщень залежно від кругової частоти ω для циліндрів різної довжини: а) $L = R$, б) $L = 2R$, в) $L = 3R$, г) $L = 4R$

Бачимо, що зі зростанням довжини циліндра збільшується кількість резонансних частот на розглянутому інтервалі. Частота першого резонансу при цьому зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра. Друга частота зменшується також, але закономірність зміни не настільки очевидна. Завдяки рис. 1 можна виділити сильні та слабкі моди по радіальних та поздовжніх переміщеннях.

Для аналізу форм коливань на першому та другому резонансі розглянемо рис. 2 та 3, на яких зображено криві переміщень, нормовані по максимальному значенню відповідної характеристики. Із рис. 2 (а) бачимо, що максимум по радіальних переміщеннях на зовнішній поверхні зі зростанням довжини зміщується до закріплення. Поздовжні переміщення для циліндра $L = R$ змінюються зі значно більшою кривизною, ніж для інших циліндрів, криві для яких мало відрізняються між собою. Зазначимо, що на внутрішній поверхні на кривих поздовжніх переміщень на першому резонансі з'являється точка перегину, але зі зростанням довжини переміщення на зовнішній та внутрішній поверхнях прямують до однакових значень.

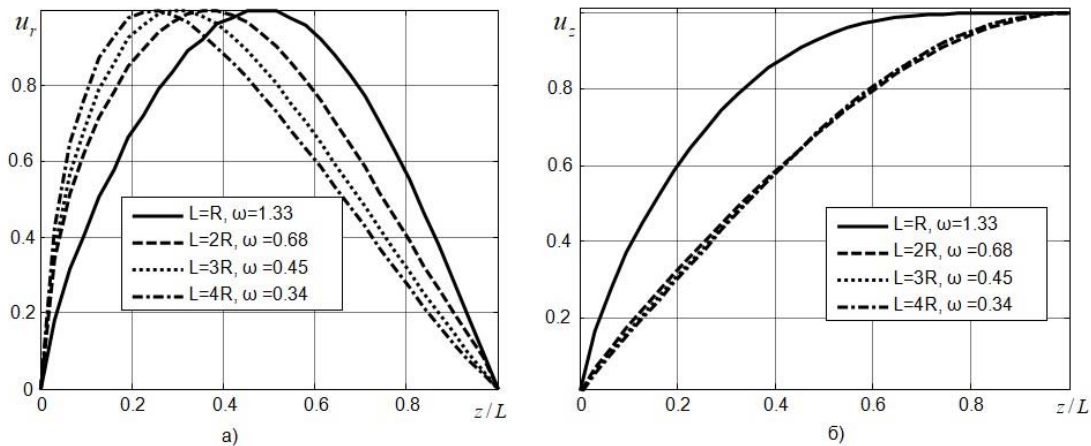


Рис. 2. Форми: а) – радіальних та б) – поздовжніх переміщень на першому резонансі на зовнішній поверхні $r = R_1$ для циліндрів різної довжини

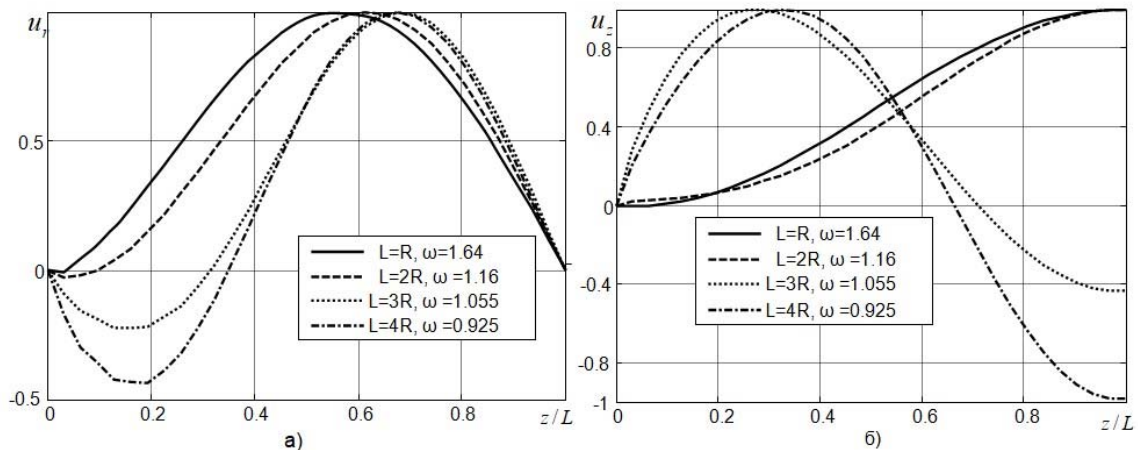


Рис. 3. Форми: а) – радіальних та б) – поздовжніх переміщень на другому резонансі на зовнішній поверхні $r = R_1$ для циліндрів різної довжини

Із рис. 3 (а) бачимо, що максимум по радіальних переміщеннях на другому резонансі міститься ближче до мембранно закріпленого торця, а саме в точках: $z = 0.58R$, $z = 1.23R$, $z = 2.03R$, $z = 2.7R$ для циліндрів $L = R$, $L = 2R$, $L = 3R$, $L = 4R$ відповідно, що збігається з результатами на внутрішній поверхні. Зміна форми і по радіальних, і по поздовжніх переміщеннях суттєвіша для циліндрів більшої довжини, тоді як для циліндрів $L = R$, $L = 2R$ криві практично не мають другого екстремуму, що пояснюється накладанням хвиль у радіальному та поздовжньому напрямках та їх співмірністю з розмірами п'єзоелемента.

Висновки. Система рівнянь електропружності в циліндричній системі координат із застосуванням скінченно-різницевого виразу для похідних по поздовжній координаті зводиться до системи рівнянь гамильтонового типу відносно радіальної координати. Отримана система рівнянь розв'язання задачі описується матрицями симетричної блочної структури, що спрощує обчислювальний процес. Розвинутий метод може бути застосований для дослідження установлених коливань радіально поляризованого циліндра, визначення резонансних частот, побудови форм коливань. Наведені чисельні результати для циліндра із жорстко закріпленим та мембранним торцем ілюструють залежність характеру коливного процесу від довжини циліндра. Установлено, що зі зростанням довжини циліндра кількість резонансів на розглянутому інтервалі зміни частот зростає, причому перший резонанс зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра. Аналіз кривих форм переміщень дозволяє зробити висновок, що на першому резонансі зі зростанням довжини циліндра максимум по радіальних переміщеннях зміщується з точки $z = L/2$ до перерізу $z \approx L/4$, кривизна переміщень по поздовжній координаті зменшується. На другому резонансі другий екстремум кривих переміщень стає суттєвим при $L > 2R$.

Список використаних джерел

1. Безверхий О. І. Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл / О. І. Безверхий, Л. О. Григор'єва // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 5–17.
2. Беленький І. М. Введение в аналитическую механику / И. М. Беленький. – М.: Высш. шк., 1964. – 324 с.
3. Валле-Пуссен Шарль Жан де ла. Лекции по теоретической механике. Т. 2. – Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссен. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
4. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5 томах. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / под общ. ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
5. Шульга В. М. Неосесимметричные электроупругие колебания полого цилиндра с радиальной осью симметрии физико-механических свойств // Прикл. механика. – 2005. – 41. – № 7. – С. 68–72.
6. Шульга Н. А. Колебания пьезокерамических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.

7. Kharouf N. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders / N. Kharouf, P. R. Heyliger // Journal of sound and vibration. – Vol. 174. – Issue 4, 21. – July 1994. – P. 539–561.
8. Shulga M. O Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation / M. O. Shulga, L. O. Grigoryeva // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2010. – P. 179–204.

Надійшла до редколегії 15.12.16

О. Безверхий, д-р физ.-мат. наук
Национальный транспортный университет, Киев, Украина,
Л. Григорьева, канд. физ.-мат. наук
Институт механики имени С. П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Система уравнений электроупругости в цилиндрической системе координат при применении разностных аппроксимаций по продольной координате сводится к канонической системе уравнений гамильтонова типа относительно радиальной координаты. Для интегрирования полученной краевой задачи применяется метод дискретной ортогонализации. Развита методика используется для сравнения гармонических колебаний цилиндров разной длины, определения их резонансных частот, исследования форм колебаний.

O. Bezverhyi, Full Doctor
National Transport University, Kyiv, Ukraine,
L. Grigoryeva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

TWO-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATIONS OF POLARIZED BY THICKNESS PIEZOCERAMIC CYLINDERS UNDER ELECTRICAL LOADS

We study two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders under electrical loads. The system of equations of electroelasticity in cylindrical coordinate system using difference approximations on the longitudinal coordinate is converted to canonical hamiltonian system of equations with respect to the radial coordinate. The resulting boundary value problem is integrated by discrete orthogonalization method. The developed methodology is used for comparing of harmonic oscillation of cylinders of different lengths, founding of their resonant frequencies, modes investigation.

УДК 539.3

О. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Єфімова, канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАН України, Київ,
Ю. Коротких, асист.
Київський національний університет будівництва та архітектури, Київ

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ

На базі уточненої теорії Тимошенка – Міндліна досліджуються вільні коливання нетонких циліндричних оболонок із неперервно неоднорідних матеріалів із несиметричною будовою відносно серединної поверхні. Вивчається вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних вільних коливаннях.

Постановка проблеми. Поява нових технологій в матеріалознавстві дозволила створити нові матеріали з прогнозованими властивостями, серед яких важливе місце займають функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) [5], які мають механічні властивості, що плавно змінюються в деякому напрямку. При цьому механічною моделлю таких матеріалів обирається модель ізотропного неоднорідного в напрямку зміни пружних властивостей матеріалу. Градієнтні матеріали можна використовувати в машинобудуванні, радіопромисловості, приладобудуванні, медицині тощо.

Загальні задачі теорії пружності тіл із гіпотетичних градієнтних матеріалів розглянуто у [2, 3]. Коливання товстостінних циліндрів із полімерних композиційних матеріалів із застосуванням тривимірної теорії пружності досліджувалися в [1]. Однак у зв'язку з суттєвою неоднорідністю матеріалу застосування тривимірної теорії пружності для задач динаміки тіл із ФГМ є проблематичним. У [4, 6–11] досліджувалися вільні коливання тіл циліндричної форми на базі різних теорій оболонок.

У цій роботі досліджуються питання можливості застосування уточненої теорії оболонок Тимошенка – Міндліна до задач про вільні коливання циліндричних оболонок із механічними параметрами, що плавно змінюються вздовж товщини, а також вплив різних законів зміни властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при радіально-поздовжніх осесиметричних коливаннях.

Вихідні співвідношення. Розглянемо задачу про вільні коливання кругових циліндричних оболонок із функціонально градієнтного матеріалу із градієнтом зміни пружних властивостей у напрямку, перпендикулярному до серединної поверхні оболонки. Застосуємо уточнену модель Тимошенка – Міндліна, яка базується на гіпотезі прямої лінії. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що прямолінійний елемент нормалі вихідної координатної поверхні при малих деформаціях зберігає свою довжину та прямолінійність, але не залишається перпендикулярним координатній поверхні. Згідно з прийнятою гіпотезою в системі координат γ, θ, z , пов'язаній із серединною поверхнею оболонки (γ – координата в напрямку нормалі серединної поверхні, $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$), малі переміщення точок можна записати у вигляді

$$u_\gamma(\gamma, \theta, z, t) = w(\theta, z, t), \quad u_\theta(\gamma, \theta, z, t) = v(\theta, z, t) + \gamma \psi_\theta(\theta, z, t), \quad u_z(\gamma, \theta, z, t) = u(\theta, z, t) + \gamma \psi_z(\theta, z, t). \quad (1)$$

де $u(\theta, z, t)$, $v(\theta, z, t)$, $w(\theta, z, t)$ – переміщення координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, z, t)$, $\psi_z(\theta, z, t)$ – функції, що характеризують незалежний повний поворот нормалі.

Відповідно до (1) вирази для деформацій набувають вигляду

$$\begin{aligned} e_{\theta}(\gamma, \theta, z, t) &= \varepsilon_{\theta}(\theta, z, t) + \gamma \kappa_{\theta}(\theta, z, t), \quad e_z(\gamma, \theta, z, t) = \varepsilon_z(\theta, z, t) + \gamma \kappa_z(\theta, z, t), \\ e_{\theta z}(r, \theta, z, t) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z, t) + 2\gamma \kappa_{\theta z}(\theta, z, t), \quad e_{\gamma\theta}(r, \theta, z, t) = \gamma_{\theta}(\theta, z, t), \quad e_{\gamma z}(r, \theta, z, t) = \gamma_z(\theta, z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенціальні деформації координатної поверхні, $\kappa_{\theta}, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – компоненти згинальної деформації, $\gamma_{\theta}, \gamma_z$ – кути повороту нормалі, що обумовлені поперечними зсувами. Зв'язок деформацій та переміщень серединної поверхні оболонки задається формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \\ \kappa_{\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_{\theta} &= \psi_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння руху мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_{\theta} = I_0 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_{\theta}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_{\theta} &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_{\theta} &= I_1 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_{\theta}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

причому $N_{z\theta} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$. Тут $N_z, N_{\theta}, N_{\theta z}, N_{z\theta}$ – тангенціальні зусилля, Q_{θ}, Q_z – перерізувальне зусилля, $M_{\theta}, M_z, M_{\theta z}, M_{z\theta}$ – згинальні та обертальні моменти, $\rho(\gamma)$ – густина матеріалу оболонки. Інерційні члени I_0, I_1, I_2 , що входять у рівняння (4), обчислюють з урахуванням наявності градієнта пружних властивостей:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \rho(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma. \quad (5)$$

Співвідношення пружності для циліндричних оболонок із функціонально градієнтного матеріалу з урахуванням відсутності симетрії пружних властивостей відносно серединної поверхні запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_{\theta} + K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_{\theta}, \quad N_{\theta} = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_{\theta} + K_{12}\kappa_z + K_{22}\kappa_{\theta}, \quad N_{z\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \kappa_{\theta z}, \\ M_z &= K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_{\theta} + D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_{\theta}, \quad M_{\theta} = K_{12}\kappa_z + K_{12}\kappa_{\theta} + D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_{\theta}, \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \\ Q_{\theta} &= K_2\gamma_{\theta}, \quad Q_z = K_1\gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (6)$$

де жорсткісні характеристики оболонки, що приведені до координатної поверхні, обчислюються за формулами:

$$\begin{pmatrix} C_{ij} \\ K_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} B_{ij}(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma, \quad (i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_{11}(\gamma) &= B_{22}(\gamma) = E(\gamma) / (1 - \nu^2(\gamma)), \\ B_{12}(\gamma) &= \nu(\gamma) E(\gamma) / (1 - \nu^2(\gamma)), \quad B_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \end{aligned}$$

E, G, ν – модулі пружності, зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно, які для градієнтного матеріалу з напрямком градієнта вздовж товщинної координати є функціями координати γ .

Зазначимо, що для симетричної відносно серединної поверхні будови матеріалу у співвідношеннях пружності (6) коефіцієнти $K_{ij}(\gamma)$ для $(i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}$, а в рівняннях руху (4) – інерційний коефіцієнт I_1 , дорівнюють нулю, і система рівнянь (3),(4),(6) значно спрощується.

На торцях $z = 0$ и $z = L$ розглядатимемо такі граничні умови:

$$1) \text{ контур, шарнірно опертий та вільний у напрямку твірної: } \frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_{\theta} = 0;$$

$$2) \text{ вільний контур: } N_z = 0, M_z = 0, Q_z = 0.$$

При розгляді осесиметричних вільних коливань (усі функції, що входять до рівнянь (3), (4), (6), не залежать від θ , а їх похідні по θ дорівнюють нулю: $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$) система рівнянь руху (4) розпадається на дві незалежні системи, одна з яких відповідає радіально-поздовжнім, а друга – крутильним коливанням. При цьому рівняння руху радіально-поздовжніх коливань запишуться у вигляді

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{1}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} - Q_z = I_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Спростуються рівняння зв'язку з переміщеннями серединної поверхні тангенціальних та згинальних деформацій серединної поверхні, а також кута повороту нормалі, обумовленого поперечними зсувами:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R^2} w, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9)$$

Необхідні співвідношення пружності з урахуванням розгляду радіально-поздовжніх коливань запишуться у вигляді

$$N_z = C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta, \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_z + K_{22}\kappa_\theta, \\ M_z = K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta + D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta, \quad M_\theta = K_{12}\kappa_z + K_{22}\kappa_\theta + D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, \quad Q_z = K_1\gamma_z. \quad (10)$$

Вважаємо, що всі точки циліндричної оболонки гармонічно коливаються із круговою частотою ω , тобто

$$\{u(z, t), w(z, t), \psi_z(z, t)\} = \{\bar{u}(z), \bar{w}(z), \bar{\psi}_z(z)\} e^{i\omega t} \quad (11)$$

(надалі знак $\sim$ опускається).

Запишемо систему рівнянь (8), (9), (10) з урахуванням (11) у переміщеннях:

$$C_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + K_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -I_0 \omega^2 u - C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + K_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} - I_1 \omega^2 \psi_z, \\ K_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + D_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -I_1 \omega^2 u - K_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} + K_1 \frac{dw}{dz} + K_1 \psi_z - I_1 \omega^2 \psi_z, \\ \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = \frac{C_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} + \frac{C_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w - \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz}, \quad (12)$$

яка після перетворень набуває вигляду

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{-D_{11}I_0 + K_{11}I_1}{\Delta} \omega^2 u + \frac{-D_{11}I_1\omega^2 + K_{11}I_2\omega^2 - K_{11}K_1}{\Delta} \psi_z + \\ + \frac{D_{11}K_{12} - D_{12}K_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{K_{11}K_{12} - D_{11}C_{12}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} - \frac{K_{11}K_1}{\Delta} \frac{dw}{dz}; \\ \frac{d\psi_z^2}{dz} = -\frac{C_{11}I_0\omega^2}{\Delta} u - \frac{C_{11}I_2\omega^2}{\Delta} \psi_z + \frac{K_1C_{11}}{\Delta R^2} \psi_z + \frac{-C_{11}K_{12}}{\Delta} \frac{dw}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{C_{11}K_1}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz}, \\ \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{C_{22}}{K_{11}} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{C_{12}}{K_{11}} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} - \frac{d\psi_z}{dz} - \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz}. \quad (13)$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) разом із відповідними умовами при $z=0$ і $z=L$ є задачею на власні значення.

Метод розв'язання. Увівши позначення $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\bar{\psi}_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}$, $\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial z}$, $\bar{Y} = \{u, \bar{u}, \psi_z, \bar{\psi}_z, w, \bar{w}\}^T$, систему (13) із відповідними граничними умовами можна представити у вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dz} = A(z, \omega) \bar{Y}, \quad (0 \leq z \leq L), \quad (14)$$

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(L) = \bar{0}, \quad (15)$$

де $A(z, \omega)$ – квадратна матриця порядку 6×6 , B_1 і B_2 – прямокутні матриці порядку 3×6 . Задачу (14) із відповідними граничними умовами (15) можна розв'язати із застосуванням методів дискретної ортогоналізації та покрокового пошуку [1].

Аналіз результатів. Розглянемо циліндричну оболонку з функціонально градієнтного двокомпонентного матеріалу, для якого зміна пружних властивостей відбувається вздовж товщинної координати. Для градієнтного матеріалу типу "метал – метал" пружні властивості вдається визначити за концентрацією вхідних матеріалів. Відповідний зв'язок між модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν та густиною ρ функціонально градієнтного матеріалу з відповідними параметрами матеріалів, що входять до композиції, визначимо формулами

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1, \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1, \quad \rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1, \quad (16)$$

де E_1, ν_1, ρ_1 та E_2, ν_2, ρ_2 – механічні параметри відповідно першого та другого матеріалів, V – концентрація другого з матеріалів композиції залежно від координати γ . Вважаємо, що ці залежності відповідають степеневому закону

зміни пружних властивостей ФГМ уздовж координати γ : $V = \left(\frac{2\gamma + h}{2h} \right)^m$.

У першу чергу розглядався ФГМ на основі композиції "алюміній – SiC". Пружні параметри матеріалів композиції наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Пружні параметри матеріалів композиції

	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³
Алюміній	70	0,3	2707
SiC	427	0,17	3100

У табл. 2 наведено перші п'ять частот $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної оболонки із ФГМ, які обчислено за тривимірною теорією пружності [1] та теорією Тимошенка – Міндліна для $m = 0,5$. Тут $\rho_0 = 1$ кг/м³, $G_0 = 1$ ГПа. Торці оболонки шарнірно обперті. Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 10l_0$, $h = 2l_0$.

Таблиця 2. Порівняння частот вільних коливань циліндричної оболонки за різними теоріями

Теорія	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
Тимошенка – Міндліна	3,1605	3,5005	4,6404	5,2606	6,5207
Тривимірна	3,3005	3,6605	4,8407	5,5506	6,8507

Аналізуючи результати, наведені в таблиці, можна зробити висновок про малу відмінність частот вільних коливань циліндричної оболонки з ФГМ по вказаних теоріях, а, отже, і про можливість застосування методики до розрахунків частот вільних осесиметричних коливань циліндричної оболонки з несиметричною будовою відносно координатної поверхні.

У табл. 3 наведено перші три частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}}$ вільних коливань указаної вище вільної по торцях циліндричної оболонки з ФГМ, що обчислені за теорією Тимошенка – Міндліна, для різних значень параметра m .

Таблиця 3. Перші три частоти $\bar{\omega}$ вільних коливань

$\bar{\omega} \backslash m$	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03160	0,02862	0,02481	0,02081	0,01860
$\bar{\omega}_2$	0,03181	0,02881	0,02543	0,02123	0,01901
$\bar{\omega}_3$	0,03262	0,02950	0,02588	0,02182	0,01983

Зазначимо, що при зростанні параметра m жорсткість матеріалу зростає, що приводить до зменшення частот.

Розглядалися коливання циліндричних оболонок з ФГМ, який є композицією нержавіючої сталі та нікелю. Властивості матеріалів залежно від температури визначаються за формулою [11]:

$$P = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3), \quad (17)$$

де коефіцієнти P_i для визначення властивостей матеріалів наведено у табл. 4.

Таблиця 4. Коефіцієнти для визначення властивостей матеріалів [11]

P_i	Нержавіюча сталь			Нікель		
	E , Н/м ²	ν	ρ , кг/м ³	E , Н/м ²	ν	ρ , кг/м ³
P_0	201.04×10^9	0.3262	8166	223.95×10^9	0.31	8900
P_{-1}	0	0	0	0	0	0
P_1	3.079×10^{-4}	-2.002×10^{-4}	0	-2.794×10^{-4}	0	0
P_2	-6.534×10^{-7}	3.797×10^{-7}	0	-3.998×10^{-9}	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0

У табл. 5 подано механічні параметри матеріалів для різних значень температур.

Таблиця 5. Властивості матеріалів при різних температурах

T , К	Нержавіюча сталь			Нікель		
	E , Н/м ²	ν	ρ , кг/м ³	E , Н/м ²	ν	ρ , кг/м ³
300	2.07788×10^{11}	0.317756	8166	2.05098×10^{11}	0.31	8900
400	2.04783×10^{11}	0.319895	8166	1.98778×10^{11}	0.31	8900
500	1.99150×10^{11}	0.324512	8166	1.92440×10^{11}	0.31	8900

У табл.6 наведено перші чотири частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної оболонки із ФГМ (ком-

позиція "нержавіюча сталь – нікель") за температури $T = 300$ К, які обчислено за теорією Тимошенка – Міндліна ($\rho_0 = 1$ кг/м³, $G_0 = 1$ ГПа). Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 4l_0$, $h = 2l_0$. Закон зміни властивостей уздовж товщинної координати є степеневим з $m = 0,5$.

Таблиця 6. Частоти вільних коливань циліндра з ФГМ при різних граничних умовах

Граничні умови	$\bar{\omega}_i$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
Шарнірне обпирання		0,02150	0,03524	0,03914	0,04164
Жорстке закріплення		0,02242	0,03776	0,04048	0,04276

Висновки. Із використанням уточненої теорії Тимошенка – Міндліна досліджено вільні осесиметричні коливання циліндричних оболонок середньої товщини з неперервно неоднорідного матеріалу з будовою, що є несиметричною відносно координатної поверхні. Обґрунтовано можливість застосування теорії для розрахунку частот коливань циліндричних оболонок із функціонально градієнтних матеріалів, пружні властивості яких змінюються за степеневим законом. При цьому розглянуто оболонки з ФГМ "Алюміній – SiC" та "нержавіюча сталь – нікель". В останньому випадку враховано зміни пружних властивостей за відповідного температурного режиму. Розглянуто коливання оболонок за різних граничних умов.

Список використаних джерел

1. О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально градиентных материалов / А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, А. А. Бровко, Л. Н. Горбач // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип.8. – С.92–99.
2. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Руцицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46. – № 2. – С. 3–14.
3. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости при зависимости упругих постоянных от радиальной координаты / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Руцицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46. – № 4. – С. 3–13.
4. Alinaghizadenand M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects clamped-clamped boundary conditions / M. R. Alinaghizadenand, M. R. Isvandzibaei. – World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2011. – 73. – 825–831.
5. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L. W. Byrd. – Applied Mechanics Reviews. – 2007. – 60. – 195–215.
6. Isvandzibaei M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions / M. R. Isvandzibaei, A. Jahani // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2010. – 45. – 152–157.
7. Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates / J. S. Kumar, B. S. Reddy, S. E. Reddy, K.V. Kumar Reddy // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2011. – 6. – № 10. – 105–111.
8. Loy C. T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C. T. Loy, K.Y. Lam, J. N. Reddy // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 1999. – 41. – 309–324.
9. Najafizadeh M. M. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support / M. M. Najafizadeh, M. R. Isvandzibaei. – Acta Mechanica. – 2007. – 191. – 75–91.
10. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions / S. C. Pradhan, C. T. Loy, K. Y Lam, J. N. Reddy // Appl. Acoustics. – 2000. – 61. – P. 11 – 129.
11. Loy C. T., Lam K.Y. and Reddy S.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // International Journal of Mechanical Sciences / C. T. Loy, K. Y Lam, J. N. Reddy 1999. – Vol. 41, P. 309-324.

Надійшла до редколегії 28.05.15

А. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Ефимова, канд. физ.-мат. наук
Институт механики имени С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
Ю. Коротких, ассист.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕТОНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

На базе уточненной теории Тимошенко – Миндлина исследуются свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов с несимметричным строением относительно срединной поверхности. Изучается влияние различных законов изменения механических свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при осесимметричных свободных колебаниях.

A. Grigorenko, Full Doctor, Prof., T. Efimova, PhD.
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
Yu. Korotkih, assistant
Kiev National University of Civil Engineering and Architecture, Kyiv, Ukraine

AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL MEDIUM – THICKNESS SHELLS MADE OF A CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS MATERIAL WITH ASYMMETRICAL STRUCTURE

Free axisymmetric vibrations of cylindrical medium – thickness shells made of a continuously inhomogeneous material with asymmetrical structure on the basis of Timoshenko – Mindlin theory are considered. The problems on applicability of the refined shell theory for shells made of material with continuously varying properties thru thickness coordinate and effect of different laws of properties change on dynamic characteristics of free axisymmetric vibration are investigated.

FLEXURAL VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF A NANOCOMPOSITE BEAM UNDER STATIC AND CYCLIC LOADING

Forced resonance vibrations and dissipative heating of viscoelastic beam made of polymeric nanocomposite reinforced by unidirectionally aligned nanofibers made of straight single-walled carbon nanotubes (CNTs) are investigated. Geometrical nonlinearity of the second order as well as temperature dependence of the complex moduli of nanocomposite materials are taken into account. To solve the coupled nonlinear problem of thermoviscoelasticity under cyclic loading, the quasi-linearization technique (for complex moduli determination) is used in combination with the discrete-orthogonalization method and iterative procedure. Orthogonal discretization is used at each iteration to integrate the complex-value analogues of beam motion equations. The explicit finite-difference scheme is used to solve the heat-conduction equation with a heating source caused by dissipation. The influence of the dissipative heating and nonlinearity of physical properties as well as geometrical nonlinearity on the dynamic characteristics, heating temperature and damping of the forced vibrations for the nanocomposite beam with different volume fraction of CNTs fibers under combined uniform transverse harmonic and static pressure are investigated.

Introduction. The polymeric composite elements are widely used in current engineering applications, but these elements are sensitive to various kinds of loading. Thus, the response of such structure elements to actual force and kinematic loading must be evaluated [1]. The forced vibration analysis of structural elements occupies an important place in the dynamics of deformable systems. Especially of nonlinear systems, the applied researches in this field show the need for a broader theoretical analysis in this field of engineering for new materials [1, 2].

There are several factors that influence the behavior of a structure under high level of dynamic loading (resonance vibrations). Some of them are inertia effects, non-linearity of material properties and the coupling of the mechanical and thermal fields [3]. In this situation, apart from purely mechanical fatigue failure, structural elements may undergo thermal failure, i.e., softening or even melting due to vibrational or self-heating, which occurs because of high hysteresis losses and low heat conductivity of polymer materials [4]. Indeed, the self-heating may alter the strength features of the structural element, and degrade its performance. The interaction of the mechanical and thermal fields in viscoelastic bodies is studied within the framework of a coupled thermomechanics [1–4]. Therefore, it is necessary to evaluate thermomechanical behavior of the material with taking into account the effects of physical and geometric nonlinearities. In recent years, the evaluation of both geometric and physical nonlinearity as well as their mutual influence on behavior of thin-walled structural elements has attracted increasing research efforts [5, 6]. It must be mentioned that, in general, to derive the governing equations of motion of thin-walled structural elements, the von Karman type of geometrically nonlinear strain–displacement relationships is the most widely used. It is well known that, the solution of the coupled problem of thermoviscoelasticity is more complicated especially in the case of long-term inelastic deformation, because of the necessity of storing a large body of data and performing extensive computations to take into account the deformation history. To overcome these difficulties in the specific case of harmonic loading, a simplified model of thermomechanically coupled processes was developed in [1, 3]. This model is based on the concept of complex moduli, and specified by a modified technique of equivalent linearization [3].

The main aim of this investigation is to use the simplified model of the behavior of viscoelastic nanocomposite beam under combined cyclic and static loading to give an approximate formulation to the coupled thermomechanical problem. In the framework of approximate formulation [1, 7], the laws governing the forced vibrations and self-heating for nanocomposite beam with unidirectionally aligned CNTs fibers under considered conditions are derived. Also, the influence of geometric and physical nonlinearity at the different volume fraction of CNTs fibers on the dynamic characteristics of the system is investigated over a wide range of amplitude, frequency and temperature. As mentioned earlier, the approximate formulation is based on concept of complex moduli, therefore, the overall macroscopic properties of nanocomposite material with unidirectionally aligned CNTs fibers under harmonic loading are obtained as complex moduli by using approximate approach for its constituents (CNTs fibers, polymeric matrix and interface) and the homogenization procedure based on the modified Mori – Tanaka method [8]. The prediction procedure of nanocomposite material properties under different conditions of frequency, amplitude and temperature are presented in our previous works [11–13].

Problem formulation. Let consider a one-layer rectangular cross section beam made of the nanocomposite with unidirectionally aligned CNTs fibers. The beam is referred to a Cartesian coordinate system $Oxyz$, so that, $0 < x < l$, $|y| = b/2$ and $|z| = h/2$ which l , b and h are length, width and thickness of beam, respectively. The axis of the beam coincides with the axis

Ox . The beam is subjected to bending by the transverse pressure $q^z(x, t) = q^0(x) + q'(x)\cos(\omega t)$ in the plane xOz , which consists of the constant components $q^0(x)$ and harmonic in time, t , excitation with amplitude $q'(x)$ and frequency ω , close to the resonance frequency. We assume that the strains are small, but the beam deflections are such that, it is necessary to take into account the squares of rotation angles in kinematic relations. Therefore, the equations of motion are also nonlinear. We also consider $u=u(x)$, $w=w(x)$ and $v=v(x)$ are displacements of point of middle surface along axes Ox , Oz and Oy , respectively. The beam has a uniform heat distribution $T=T(x)$ over the cross section of beam, and on the lateral surface heat exchange occurs with an environment having the temperature T_c . Also, the material of beam is considered viscoelastic nanocomposite so that, its inelastic response under monoharmonic loading is assumed as function of the intensity of the stress, frequency and temperature [11].

Under considered assumptions above, the displacement field of the Euler – Bernoulli beam theory (EBT) is given by $\bar{x} = u\hat{e}_x + v\hat{e}_y + w\hat{e}_z$ where $u = u(x) - zw_{,xx}(x)$, $v = 0$ and $w = w(x)$. Taking into account the von Karman nonlinearity, the strain component, ε_{xx} , will be as follow

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} (u(x) - zw_{,xx}(x)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x) \right)^2 = u_{,x}(x) - zw_{,xx}(x) + \frac{1}{2} w_{,x}(x)^2. \quad (1)$$

In the framework *EBT*, considering the effect of temperature and the van Karman nonlinearity the strain component, the stress component, σ_{xx} , is

$$\sigma_{xx} = E^* \varepsilon_{xx} = E^* \left(\varepsilon_x + z k_x - \alpha^C (T - T_C) \right), \quad k_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad V_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} V_x^2, \quad (2)$$

where E^* , k_x , V_x , ε_x and α^C are linear viscoelastic Young's operator, curvature, rotation angle, strain of point of middle surface along axis of the beam and coefficient of linear thermal expansion of nanocomposite material, respectively. By substituting Eq. (2), the integral quantities of force and momentum over the thickness of beam are presented as

$$N_x = b N_{xx} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = E^* A \varepsilon_x - E^* A \alpha^C (T - T_C), \quad M_x = b M_{xx} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E^* b h^3}{12} k_x. \quad (3)$$

Using Eq (3) the equations of curvature, rotation angle and strain of point of middle surface along axis of the beam in Eq. (1) can rewrite as follow

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C N_x - \frac{1}{2} V_x^2 + \alpha^C (T - T_C), \quad k_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{12}{b h^3} J^* M_x = D M_x \quad \text{and} \quad V_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4)$$

where $J^* = 1/E^*$ is the reverse operator; $C = J^*/A$ and $D = 12/bh^3 J^*$.

Under considerations above, the equations of nonlinear vibrations of the flexible beam in the Ox and Oz axes can be written as follows [18]

$$\frac{\partial^2 \hat{Q}_x}{\partial x^2} + A q^z = \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \hat{Q}_x + N_x V_x \quad \text{and} \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} = \hat{I}_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{where} \quad \hat{I}_0 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad (5)$$

where $\hat{Q}_x = Q_x - N_x V_x$. Also, ρ and Q_x are the density and crosscutting force, respectively. In present investigation, we consider the longitudinal vibration of beam is as quasi-static. Thus, the last equation of nonlinear vibration of beam in the Ox axis (Eqs. 5) can be written as $\partial N_x / \partial x = 0$.

With assuming that, the beam ends in the longitudinal direction are fastened rigidly and hingedly in the transverse direction, the mechanical boundary conditions have the form

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{for} \quad x = 0, l. \quad (6)$$

The energy balance equation for the beam, averaged over its cross section area and the period of vibrations, can be expressed as

$$C_v^C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda^C \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\chi P}{A} (T - T_C) + \langle \hat{D}' \rangle, \quad \text{where} \quad \langle \hat{D}' \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} \langle D' \rangle dz = \int_{-h/2}^{h/2} \langle s_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}} \rangle dz, \quad (7)$$

where C_v^C , λ^C and χ are the volumetric heat capacity, thermal conductivity of composite material and heat transfer coefficient, respectively. $P = 2(b + h)$ is perimeter of the beam cross section and $\langle \hat{D}' \rangle$ shows the volumetric rate of dissipation averaged over the cross section that can be expressed as function of components of complex strain and stress. In current study, we consider the initial and boundary thermal conditions as follow

$$T = T_0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad \text{and} \quad T = T_0(x) \quad \text{for} \quad x = 0, l. \quad (8)$$

It worth to mentioned that, in this study, the volumetric heat capacity, C_v^C , and the thermal expansion coefficients in the longitudinal direction, α^C , of polymeric composites are predicated based on the rule of mixture and also the thermal conductivity, λ^C , can be expressed by Halpin – Tsai model [14–17] as follow:

$$C_v^C = C_v^f V^f + C_v^M V^M, \quad \alpha^C = V^f \alpha^f + V^M \alpha^M, \quad \lambda^C = \lambda^M \left[\frac{1 + \zeta \eta V^f}{1 - \eta V^f} \right] \quad \text{and} \quad \eta = \left(\left(\frac{\lambda^f}{\lambda^M} \right) - 1 \right) / \left(\left(\frac{\lambda^f}{\lambda^M} \right) + \zeta \right), \quad (9)$$

where $\zeta = 1$.

Construction of the solution of the problem. As mentioned earlier, the solution of the coupled problem of thermoviscoelasticity is more complicated especially in the case of long-term inelastic deformation. To overcome these difficulties in the specific case of harmonic loading, in this section, an Approximate formulation is expanded based on [9, 10]. Let us develop the approximate solution of nonlinear Eqs. (4)–(8) as harmonic series in terms of time. In this solution, the variables w , V_x , $\hat{Q}_x$ and M_x which characterize the beam deflection are assumed as a single-mode approximation while the variables u , N_x , and ε_x which describe the plane deformation of the beam are considered in the second-mode harmonic approximation, so that, we pursue an approximate solution of the problem in the form

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u_1' \cos \omega t - u_1'' \sin \omega t + u_2' \cos 2\omega t - u_2'' \sin 2\omega t, \quad N_x = \bar{N} + N_1' \cos \omega t - N_1'' \sin \omega t + N_2' \cos 2\omega t - N_2'' \sin 2\omega t, \\ \varepsilon_x &= \bar{\varepsilon} + \varepsilon_1' \cos \omega t - \varepsilon_1'' \sin \omega t + \varepsilon_2' \cos 2\omega t - \varepsilon_2'' \sin 2\omega t, \quad w = \bar{w} + w' \cos \omega t - w'' \sin \omega t, \quad V_x = \bar{V}_x + V_x' \cos \omega t - V_x'' \sin \omega t, \\ \hat{Q}_x &= \bar{\hat{Q}}_x + \hat{Q}_x' \cos \omega t - \hat{Q}_x'' \sin \omega t, \quad M_x = \bar{M}_x + M_x' \cos \omega t - M_x'' \sin \omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

In the frame of approximate solution, the reverse operator J^* can be expressed in the complex quantity as form $J^*(t) = J^\infty + \text{Re}[\tilde{J} e^{ik\omega t}]$ for $k = 1, 2$, so that the equilibrium creep compliance under monotonic loading, J^∞ , depends on temperature, while, the components of complex creep compliance under harmonic loading, $\tilde{J} = J' - iJ''$, depend on amplitude of stress, frequency and temperature as follow

$$\bar{J} = J^\infty(T), \quad J_1'' = J_1''(\sigma, \omega, T) \quad \text{and} \quad J_2'' = J_2''(\sigma, 2\omega, T). \quad (11)$$

By substituting variables of Eq (10) in Eqs (4)–(8), the following system of nonlinear equations can obtained, so that,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dx} &= \bar{C}\bar{N} - \frac{1}{2}\bar{V}_x'^2 - \frac{1}{4}(V_x'^2 + V_x''^2) + \alpha(T - T_c), \quad \frac{du_l'}{dx} = C_l'N_l' - C_l''N_l'' - \bar{V}_x V_x', \quad \frac{du_l''}{dx} = -C_l''N_l' + C_l'N_l'' - \bar{V}_x V_x'', \\ \frac{du_2'}{dx} &= C_2'N_2' + C_2''N_2'' - \frac{1}{4}(V_x'^2 - V_x''^2), \quad \frac{du_2''}{dx} = -C_2''N_2' + C_2'N_2'' - \frac{1}{2}V_x'V_x'', \quad \frac{d\bar{w}}{dx} = -\bar{V}_x', \quad \frac{dw'}{dx} = -V_x', \quad \frac{dw''}{dx} = -V_x'', \\ \frac{d\bar{V}_x}{dx} &= \bar{D}_l\bar{M}_x', \quad \frac{dV_x'}{dx} = D_l'M_x' + D_l''M_x'', \quad \frac{dV_x''}{dx} = D_l'M_x'' - D_l''M_x', \quad \frac{d\bar{N}}{dx} = 0, \quad \frac{dN_l'}{dx} = 0, \quad \frac{dN_l''}{dx} = 0, \quad \frac{dN_2'}{dx} = 0, \\ \frac{dN_2''}{dx} &= 0, \quad \frac{d\bar{Q}_x}{dx} = -q^0 A, \quad \frac{dQ_x'}{dx} = -\rho A \omega^2 w' - q'A, \quad \frac{dQ_x''}{dx} = -\rho A \omega^2 w'', \quad \frac{d\bar{M}_x}{dx} = \bar{Q}_x + \frac{1}{2}(N_l'V_x' + N_l''V_x'') + \bar{N}\bar{V}_x', \\ \frac{dM_x'}{dx} &= \hat{Q}_x' + N_l'\bar{V}_x + \bar{N}V_x' + \frac{1}{2}N_2'V_x' + \frac{1}{2}N_2''V_x'', \quad \frac{dM_x''}{dx} = \hat{Q}_x'' + N_l''\bar{V}_x + \bar{N}V_x'' + \frac{1}{2}N_2''V_x' + \frac{1}{2}N_2'V_x'', \end{aligned} \quad (12)$$

where based on the Eq. (4), quantities $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{C}_k$ and $\bar{D}_k$ are defined in (13) in which, subscripts $k=1, 2$ show the frequency ω and 2ω , respectively.

$$\bar{C} = \frac{J^\infty}{A}, \quad \bar{D} = \frac{12}{bh^3}J^\infty, \quad \bar{C}_k = C_k' - iC_k'' = \frac{1}{A}(J_k' - iJ_k''), \quad \text{and} \quad \bar{D}_k = D_k' - iD_k'' = \frac{12}{bh^3}(J_k' - iJ_k''). \quad (13)$$

According to the Eq. (6), the boundary conditions are assumed as follows:

$$\bar{u} = u_l' = u_l'' = u_2' = u_2'' = 0, \quad \bar{w} = w' = w'' = 0 \quad \text{and} \quad \bar{M} = M_x' = M_x'' = 0 \quad \text{for} \quad x = 0, l. \quad (14)$$

In the framework approximate formulation, the dissipative function for considered beam is determined by substituting complex variables into (2) and then (7) as

$$\langle \hat{D} \rangle = \frac{\omega b}{2\lambda A} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}' \varepsilon_{xx}' - \sigma_{xx}'' \varepsilon_{xx}'') dz = \frac{\omega}{2\lambda A} \left[N_l' \varepsilon_{x,l}' - N_l'' \varepsilon_{x,l}'' + 2(N_2' \varepsilon_{x,2}' - N_2'' \varepsilon_{x,2}'') + M_x'' k_x' - M_x' k_x'' \right], \quad \text{where} \quad \varepsilon_{x,l}' = C_l'N_l' + C_l''N_l'', \quad (15)$$

$$\varepsilon_{x,l}'' = C_l'N_l'' + C_l''N_l', \quad \varepsilon_{x,2}' = C_2'N_2' + C_2''N_2'', \quad \varepsilon_{x,2}'' = C_2'N_2'' + C_2''N_2', \quad k_x' = D_l'M_x' + D_l''M_x'', \quad \text{and} \quad k_x'' = -D_l'M_x'' + D_l''M_x'.$$

As a result, we have a system of equations for the average functions represented in (7) and (12)–(15) that must be solved as integration system. Also, the nonlinear coupled thermomechanic problem represented by these equations are solved as two-point boundary value problem (BVP) for ordinary differential equations (ODEs) system. In this investigation, to solve the first-order differential equations system above, the solver based on finite difference method (FDM) is employed. Recognizing that, the linearized system of ordinary differential equations in each approximation variables are integrated by the method of discrete orthogonalization with using a typical program [19].

Numerical results and analysis.

Material properties. In order to predict the viscoelastic behavior of materials under monotonic and harmonic loading, an transversely isotropic nanocomposites system with unidirectionally oriented CNTs fibers is considered. As mentioned earlier, In general, temperature, amplitude of loading, frequency and volume fraction of nanofiber are assumed as controlling parameters. The complete review of studies on the constitutive equations of micro- and macromechanical model of nonlinear viscoelastic behavior of polymeric nanocomposite materials under monoharmonic deformation is presented in previous works [11–13]. In this study, we have used the complex moduli computed in [11], in which the numerical solutions was carried out in a wide range of amplitude of harmonic loading for different volume fraction (3, 5 and 10 percent of CNTs fibers). Also, temperature and frequency are considered 25, 50, 80 °C and 1, 50, 100 Hz, respectively. According to microstructural geometry of CNTs, the nanofiber aspect ratio for the transversely isotropic nanocomposites is chosen to be equal to 3.5.

Amplitude, frequency and temperature characteristics (steady-state response). A numerical analysis has been conducted for the beam with single layer made of epoxy nanocomposite with unidirectionally oriented CNTs fibers with the following physical parameters for epoxy resin and CNTs fibers [14–17]: $C_v^f = 0.629 \cdot 10^6$ J/m³ K, $C_v^M = 1.513 \cdot 10^6$ J/m³ K, $\lambda^f = 2000$ J/m K, $\lambda^M = 0.47$ J/m K, $\alpha^f = 45 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\alpha^M = 3 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\rho^f = 1680$ kg/m³, $\rho^M = 1214$ kg/m³ and $\chi = 20$ W /m² K. Moreover, the geometry of the beam is assumed $l=0.35$ m, $b=0.01$ m and $h=0.01$.

In this section, the main aim is studying of amplitude and temperature frequency characteristics of the nanocomposite beam under consideration conditions with taking into account the effects of nonlinear factors consist of geometrical and physically nonlinearity in the region of the first resonance. For this reason, we compare the solutions of the four problems, which are considered as follow: the first problem is a linear viscoelastic problem, in which the geometrical and physically nonlinearity aren't considered. Therefore, in this problem, the quadratic terms in (12) are ignored and also the properties of material are considered to be independent of temperature; the second problem is a nonlinear viscoelastic problem with taking into account the physically nonlinearity, in which thermomechanical coupling is considered; the third problem is a nonlinear viscoelastic problem with taking into account the geometrical nonlinearity, in which the properties of material are considered to be independent of temperature. Indeed, in this problem, the thermomechanical coupling is not considered; and finally, the fourth problem is a nonlinear viscoelastic problem with taking into account the geometrical nonlinearity and physically nonlinearity, so that it is called a completely nonlinear viscoelastic problem.

The effect of geometrical nonlinearity. To study the effects of geometrical nonlinearity on amplitude and temperature frequency characteristics in the vicinity of the first resonance, the results of solution of first and third problems are compared. By definition above, the material of beam in both of these problem is assumed viscoelastic and independent of temperature. The frequency dependencies of the amplitudes and stationary temperature in the region of the first resonance for different volume fraction (0, 3, 5 and 10 %) and constant amplitude of cyclic loading (70 kPa) are presented in Figs. 1 (a) and (b). In This figure, the maximum value of the normalized deflection, $w^* = \max(w'^2 + w''^2)^{0.5} / h$, $0 \leq x \leq l$ and dimensionless temperature, $T^* = T_{\max} / T_0$, along the beam for problem 1 and problem 3 are compared. Here, solid and dashed lines correspond to the results of solution of the linear viscoelastic problem (problem 1) and nonlinear viscoelastic problem with regard for geometric nonlinearity (problem 3), respectively.

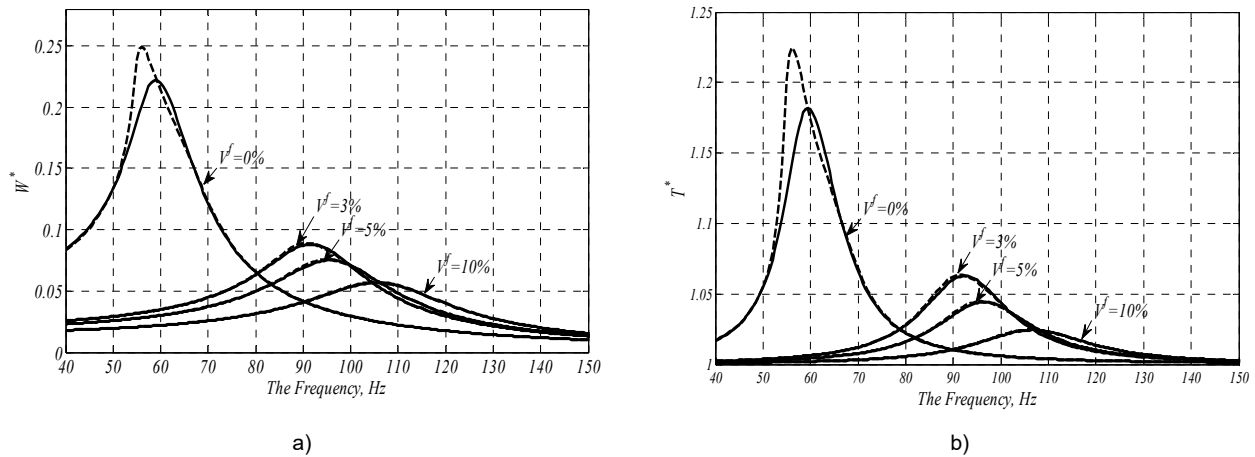


Fig. 1. The effects of geometrical nonlinearity on (a) amplitude-frequency characteristics and (b) temperature-frequency characteristics (comparison of the problem 1 and 3)

This figure shows the increase of volume fraction leads to shift of the region of the first resonance toward higher values of frequency, and also it is evident that, the influence of geometric nonlinearity on the amplitude and temperature-frequency characteristics becomes pronounced, with a decrease in the volume fraction of CNTs fiber. Also, the beam displays soft nonlinear behavior. Note that, the maximal deflection amplitudes and temperatures of the resonance frequencies for linear viscoelastic problem (solid lines) are somewhat lower than similar quantities of the resonance frequencies of the nonlinear viscoelastic problem (dashed lines). The effects of geometric nonlinearity are manifest to a greater extent with a reduction in the level of viscosity and an increase in the level of elasticity with increasing in volume fraction. Therefore, the low value of the maximum deflection amplitudes, w^* , can be limited to the linear formulation.

The effect of physically nonlinearity. In this investigation, to study the effects of thermomechanical coupling (TMC) and volume fraction on the amplitude of deflection and temperature frequency characteristics, third and fourth problems are considered. For this reason, the both of problems are solved at the different volume fraction of CNTs fibers and constant amplitude of cyclic loading. In Figs. 2 (a) and (b), the frequency dependencies of the maximum value of the dimensionless deflection, w^* , and the steady-state temperature, T^* , corresponding to the both of nonlinear viscoelastic problems (3 and 4) at the $q^i = 70$ kPa are presented. In this figure, the dot-dash lines show the results of solution of the completely linear elastic system (problem 1 with the physically linear elastic responses), also the solid and dashed lines correspond to the results of the nonlinear viscoelastic problem, in which TMC is not considered (problem 3) and the completely nonlinear viscoelastic problem (problem 4), respectively. A comparison of the curves of variation in the region of natural frequency for completely linear elastic problem (dot-dash lines) and nonlinear viscoelastic problem (solid and dash lines) reveals that, the effects of viscoelastic response of materials on the temperature and deflection–frequency responses become more profound for all amounts of volume fraction. In Fig. 2 (b), the presented results show with taking into account viscoelastic responses the stationary dimensionless temperatures, T^* , increase in the region of first resonance, while the temperatures of dissipative heating in elastic problems are equal zero. However, Fig. 2 (a) shows the amplitudes of dimensionless deflection, w^* , strongly decrease with considering viscoelastic responses.

From Figs. 2 (a) and (b) it follows that, the deflection amplitude and dissipative-heating temperature are maximum in neat polymer beam ($V^f = 0\%$) for both considered nonlinear viscoelastic problems (3 and 4), while they decrease with increasing volume fraction. Also, analysis of the curves in these figures show that, the effect of thermomechanical coupling is more significant in lower volume fraction of CNTs fiber. It is evident that, with taking into account physically nonlinearity (problem 4) leads to a decrease in the main amplitude of deflection in the region of first resonance frequency of the beam and formation of the amplitude-frequency characteristics and temperature-frequency characteristics of the soft type. However, with increase in volume fraction, this effect of physically nonlinearity and dependence of nanocomposite on temperature decrease. This is due to reducing of inelastic response and imaginary part of complex moduli with increasing volume fraction under constant amplitude loading.

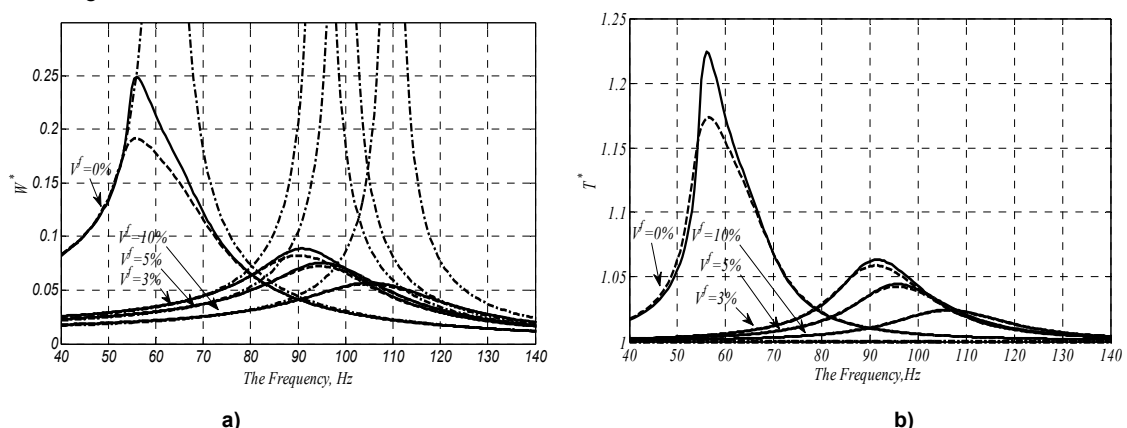


Fig. 2. The effects of thermomechanical coupling on (a) amplitude-frequency characteristics and (b) temperature-frequency characteristics (comparison of the completely linear elastic problem, problem 3 and 4)

The comparison the curves of Figs. 2 (a) and (b) for problems 3 and 4 and analysis of the interaction of two types of nonlinearity show the geometric nonlinearity becomes the more significant determining factor in the low volume fraction of CNTs fibers. It reveals that, with reduce inelastic behavior and increase strength of material, the interaction of two types of nonlinearity decreases. Therefore, the low value of the maximum deflection amplitudes corresponding to the high volume fraction may be limited to the linear formulation.

The effect of amplitude of loading. The frequency dependences of relative maximal amplitudes and temperatures of dissipative heating calculated in the vicinity of the main resonance frequency of vibrations for the different amplitudes of harmonic transverse pressure, $q^*=70, 90, 130$ and 160 kPa, are presented in Figs. 3 (a) and (b) for unidirectionally oriented nanocomposite beam with 3 % volume fraction of CNTs fiber. In this figure, the solid lines show the results of solution of the completely nonlinear viscoelastic problem (problem 4), in which the properties are considered to be dependent of temperature, and dashed lines correspond to the results of solution of the linear viscoelastic problem (problem 1), in which TMC is not considered. Analysis of the curves in these figures for complete nonlinear viscoelastic problem (solid lines) show the great influence of two nonlinearity factors on the frequency characteristics at the different amplitude of loading in the forced vibrations of the considered beam. It is necessary to mention that, the curves with dashed lines show the influence of viscoelastic response of material on frequency characteristics without considering the physically and geometrical nonlinearity effect in isothermal process. Also, the presented results in Figs. 3 (a) and (b) show the importance of studying the interaction of two types of nonlinearity to known the first resonance region and the type of nonlinearity behavior. According to the curves of amplitude and temperature frequency characteristics, the nonlinearity at resonance is of soft type under different amplitudes loading for nanocomposite beam with 3 % volume fraction of CNTs fibers. A comparison of the results presented in Figs. 3 (a) and (b) demonstrates that, with increasing amplitude of harmonic loading the effects of physically nonlinear viscoelastic responses will be pronounced and the level of viscosity and the amplitude of temperature of dissipative heating increase. In this situation, the role of thermomechanical coupling increases due to an increase in deflection of the beam. As mentioned earlier, the complex moduli or viscoelastic response of material depend on amplitude of stress or loading. As result, with increasing amplitude of loading, the leftward shift of the first resonance region is connected with thermal softening of the material and increasing viscoelastic response, so that, it indicates the predominant effect of TMC nonlinearity.

The effect of volume fraction on the stationary temperatures at critical loading. It is well known that, the certain cyclic-loading and heat-transfer conditions may lead to thermal fatigue failure due to material softening or even melting. This problem is important for many fields of engineering and technology which use nanocomposite materials.

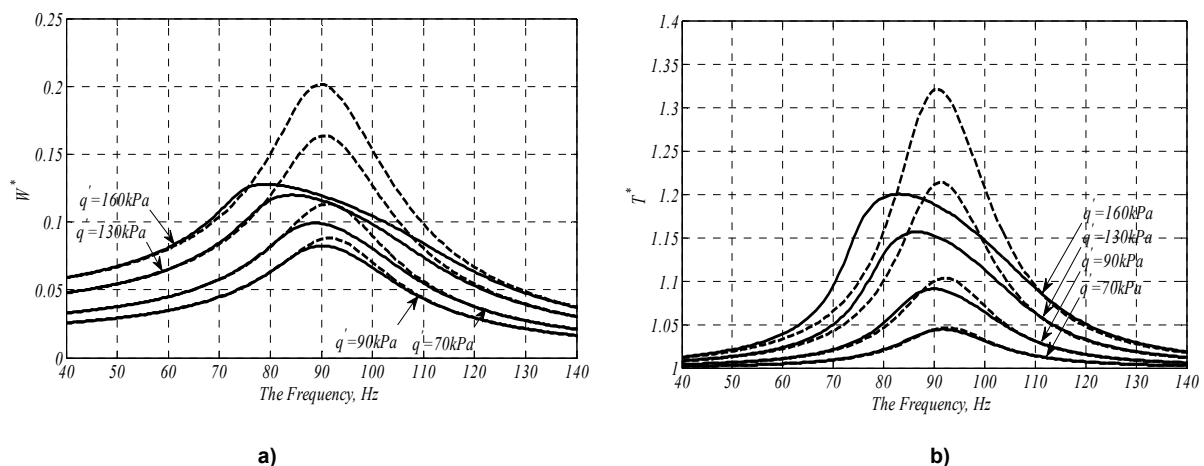


Fig. 3. The effects of amplitude of cyclic loading on (a) amplitude-frequency characteristics and (b) temperature-frequency characteristics under different amplitudes loading, $q^*=70, 90, 130$ and 160 kPa, for nanocomposite beam with 3 % volume fraction (comparison of problem 1 and 4)

To study critical value of amplitude of harmonic loading, q^* , we consider the nanocomposite beam with small deflection under small static loading, $q^0=10$ Pa and different harmonic loading. Fig. 4 (a) shows curves depicting the change in the maximum values of the stationary dimensionless temperatures of dissipative heating in relation to considered conditions for completely nonlinear viscoelastic problem (problem 4) at different volume fraction and constant frequency.

In this figure, q_1^*, q_2^*, q_3^* and q_4^* are the critical value of amplitude of harmonic loading which correspond to the neat polymer and nanocomposite beam with, 3, 5, and 10 % volume fraction of CNTs fibers at $f = 47.3$ Hz, which lie to the left of the first resonance frequency. In Fig. 4 (a), it is clearly evident that, with an increase in volume fraction at the constant frequency, the thermal instability occurs in high level of harmonic loading, $q_1^* < q_2^* < q_3^* < q_4^*$. It shows the physically nonlinear response of material plays a significant role, so that the level of viscosity decreases with an increase in volume fraction and also the thermal conductivity of the beam will be improved.

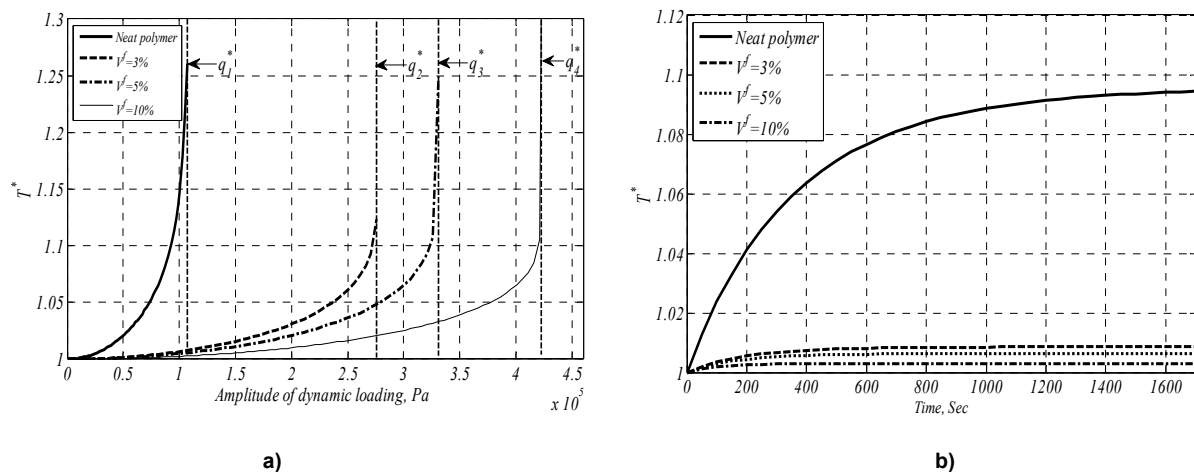


Fig. 4. The variation of the stationary temperature in complete nonlinear problem at different volume fraction and $f = 47.3$ Hz (a), the evolutions of the temperature over time at $f = 46$ Hz (b)

Nonsteady-state behavior (thermal instability). To solve the non-steady problem, the derivatives with respect to time in (7) is replaced by a difference approximation as $T(t + \Delta t) - T(t) / \Delta t$. Accordingly, in this investigation, we used an implicit scheme to solve the system of (7) and (12)–(15). The nonlinear boundary-value problem which arises at each time step is solved by the method of quasi-linearization with numerical approach. This is realized by the numerical method with a small incremental time step in the first stage of the process would have required a very small step with respect to the coordinate x . In this section, we restrict ourselves to examine non-steady state behavior of nanocomposite beam in the framework of completely nonlinear viscoelastic problem (problem 4).

Fig. 4 (b) shows curves of the evolutions of temperature over time for considered nanocomposite beam with different volume fraction of CNTs fiber under constant amplitude harmonic loading, $q' = 100$ kPa, at $f = 46$ Hz which lie to the left side and vicinity of first resonance frequency for neat polymer beam. According to these results, it is observed that, the self-heating temperature evolution of each polymeric nanocomposite beam grows until reaching the steady state. It is worth to emphasize that in all curves demonstrate the saturation type behavior of the temperature.

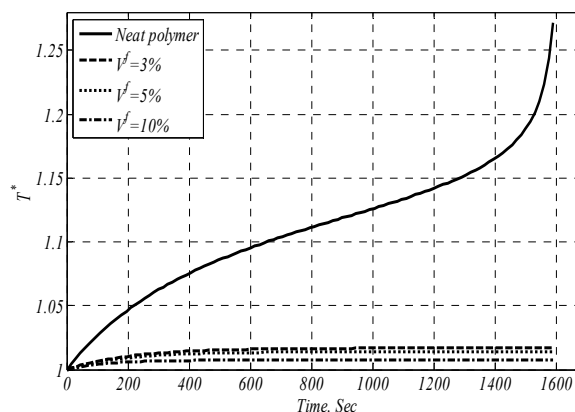


Fig. 5. The evolutions of the dimensionless temperature over time for, $q' = 155$ kPa

The temperature evolution for considered nanocomposite beam with various volume fractions at the constant high level amplitude of harmonic loading, $q' = 155$ kPa at $f = 37$ Hz are presented in Fig. 5. In this situation, the curves corresponding to the nanocomposite beam with neat polymer shows the self-heating temperature grows exponentially and finally rapid temperature growth occurs until the breakdown of the beam and the thermal failure occurs. It is important to note that, with an increase in volume fraction the thermal instability happens at the higher frequency. Also, it is apparent from this figure, the nanocomposite beam with $V^f=3, 5$ and 10% under considered conditions demonstrates the thermal equilibrium. It is worth to be mentioned, the fatigue process for neat polymer and nanocomposite beams, $V^f=3, 5$ and 10% may be presented by the evolution temperature in Fig. 5. In general, each curve with thermal instability can be separated into three phases, which will be explained as follow. In the first part a typical temperature growth is observed, which shows the changes in components of complex moduli and accompanies with the decrease of a storage modulus and increase of a loss modulus.

It is clearly evident in curves of Fig. 5 that, in this phase, with increasing volume fraction and decreasing deflection of beam (reduction of viscoelastic response), the temperature growth occurs slowly. In the second part, at the critical values of deformation conditions, after equalizing of amounts of dissipated and convection energy at the beginning of this phase the slight temperature growth may be observed. As mentioned earlier, the trend of temperature growth in this phase depend on deformation conditions such as amplitude of loading, frequency, geometric of beam and ability of element to transfer dissipative heating to surround media. According to the presented results in Fig. 5, for neat polymer, the trend of temperature growth shows the beam isn't able to transfer dissipative heating to surround media, so that the temperature grows in the beam. Accordingly, in this phase both mechanical and thermal destruction occurs for neat polymer while the results of solution for nanocomposite beams with adding

3, 5 and 10 % volume fraction of CNTs fibers into polymer show after equalizing of amounts of dissipated and convection energy at the beginning of the second phase the slight temperature growth is observed and ultimately the saturation type behavior of the temperature is demonstrated. Finally, in the third phase the self-heating temperature grows rapidly in a short time period until breakdown. It is evident from curves for beam with neat polymer. Research has shown that, the third phase started due to the initiation of cracks in the area of stress concentration and highest temperature [16].

Conclusion. We have presented the approximate formulation of the problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of a nanocomposite beam with unidirectionally oriented CNTs fibers with regard for geometric and physically nonlinearity. We have studied their influence on the dynamic characteristics and temperature of dissipative heating of the nanocomposite beam in the case of static and cyclic loads. We have shown that the effect of geometric nonlinearity on dynamic characteristics and temperature of dissipative heating reduce with increasing volume fraction. We have investigated the influence of volume fraction of nanofibers on the critical value of load amplitude, under which the temperature of vibration heating reaches the thermal instability point.

References

1. Karnaukhov V. G. Coupled thermo-viscoelastic problems / V. G. Karnaukhov. – Kiev : Naukova Dumka, [in Russian], 1982.
2. Chang T. P. Nonlinear vibration analysis of geometrically nonlinear shell structures / T. P. Chang, H. C. Chang // Mech. Research Commun. – 2000. – Vol. 27. – No. 2. – P. 173–180.
3. Coupled thermo-viscoplastic behaviour of bodies under harmonic load / I. K. Senchenkov, Y. A. Zhuk, G. A. Tabieva, O. P. Chervinko // International Applied Mechanics. – 1997. – Vol. 33. – No. 9. – P. 698–706.
3. Constable I., Williams J. G., Bums D.J. Fatigue and thermal softening of thermoplastics // J. Mech. Eng. Sci. – 1970. – Vol.12. – P. 20-29.
4. Senchenkov I. K. Thermal fatigue failure of a rectangular prism with a cut / I. K. Senchenkov, N. N. Yakimenko, and O. P. Chervinko // Numerical simulation and experiment, Teor. Prikl. Mekh. – 2004. – Vol. 39. – P. 42–47.
5. Merzlyakov V. A. Elastoplastic deformation of shells of revolution under nonaxisymmetric loading (review) / V. A. Merzlyakov, Yu. N. Shevchenko // Int. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 35. – No. 5. – P. 431–461.
6. Sansour C. Large viscoplastic deformations of shells. Theory and finite element formulation / C. Sansour, F. Kollmann // Comput. Mech. – 1998. – Vol. 21. – No. 21. – P. 512–525.
7. Senchenkov I. K. Modelling the Thermomechanical Behavior of Physically Nonlinear Materials Under Monoharmonic Loading / I. K. Senchenkov, Y. A. Zhuk, V. G. Karnaukhov // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40. – No. 9. – P. 30–34.
8. Mori T. Average stress in matrix, average elastic energy of materials with misfitting inclusions / T. Mori, K. Tanaka // Acta Metall. – 1973. – Vol. 21. – P. 571–574.
9. Karnaukhov V. G. Coupled Problems of the Theory of Viscoelastic Plates and Shells / V. G. Karnaukhov, I. F. Kirichok. – Kiev : Naukova Dumka, [in Russian], 1986.
10. Senchenkov I. K. Forced nonlinear vibrations and dissipative heating of a viscoelastic beam / I. K. Senchenkov, I. F. Kirichok // Int. Appl. Mech. – 1987. – Vol. 23. – No. 1. – P. 80–86.
11. Zhuk Y. A. Frequency and amplitude dependence of complex moduli of composite material reinforced with nanofibers / Y. A. Zhuk, // Journal of Phy. Math. Modeling & Inf. Tech. – 2016. – Vol. 23. – P. 92–107.
12. Hashemi M. Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials / M. Hashemi, Y. A. Zhuk // Bulletin of KNU. – 2016. – Vol. 35. – P. 53–57.
13. Hashemi M. A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading / M. Hashemi, Y. A. Zhuk // Bulletin of KNU. Phy. & Math. Sci. – 2015. – Vol. 4. – P. 67–73.
14. Zimme M. Through-Thickness Thermal Conductivity Prediction Study on Nanocomposites and Multiscale Composites / M. Zimme, X. Fan, J. Bao // Mater. Sci. & Applications. – 2012. – Vol. 3. – P. 131–138.
15. Budiansky B. Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites / B. Budiansky // J. Compos. Mater. – 1970. – Vol. 4. – P. 286–295.
16. Shen H. S. Thermal buckling and post buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells / H. S. Shen // Composites: Part B. – 2012. – Vol. 43. – P. 1030–1038.
17. Yang D. J. Thermal conductivity of multiwalled carbon nanotubes / D. J. Yang, Q. Zhang, G. Chen // Phys. Rev. – B 66, 165440.
18. Grigorenko Y. M. Numerical and Analytical Solution of the Problems of Shell Mechanics Based on Different Models [in Russian] / Y. M. Grigorenko, G. G. Vlaikov, A. Y. Grigorenko. – Akademperiodika, Kiev, 2006.
19. Stevens K. K. Transverse vibration of a viscoelastic column with initial curvature under periodic axial load / K. K. Stevens // Trudy Am. Obshch. Inzh. Mekh., Ser. E: Prikl. Mekh. – 1969. – Vol. 4. – P. 168–173.

Надійшла до редколегії 14.06.17

М. Хашемі, асп., Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ТА ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ НАНОКОМПОЗИТНОЇ БАЛКИ ПРИ СТАТИЧНОМУ І ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННЯХ

Досліджуються вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної балки з композитного полімерного матеріалу, армованого однонаправленими нановолокнами, виготовленими з одношарових карбонових нанотрубок. Враховується геометрична нелінійність конструкції (квадрати кутів повороту перерізу) та температурна залежність комплексних модулів нанокompозитного матеріалу. Для розв'язання зв'язаної нелінійної задачі термов'язкопружності при циклічному навантаженні використовується методика еквівалентної лінеаризації (для визначення комплексних модулів) у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації із застосуванням ітераційної процедури. На кожній ітерації методом ортогональної дискретизації розв'язуються комплексні аналоги рівнянь коливань балки. Для розв'язання задачі теплопровідності використовується явна схема методу скінченних різниць. Досліджено вплив дисипативного розігріву, фізичної та геометричної нелінійності на динамічні характеристики коливань, температуру вібророзігріву та демпфювання вимушених коливань нанокompозитної балки для різних значень об'ємного вмісту нановолокон при поперечному комбінованому статичному та гармонічному навантаженнях.

М. Хашемі, асп., Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИСИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ НАНОКОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ И ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКАХ

Исследуются вынужденные резонансные колебания и дисипативный разогрев вязкоупругой балки из композитного полимерного материала, армированного однонаправленными нановолокнами, изготовленными из однослойных углеродных нанотрубок. Учитывается геометрическая нелинейность конструкции (квадраты углов поворота сечения) и температурная зависимость комплексных модулей нанокompозитного материала. Для решения связанной нелинейной задачи термовязкоупругости при циклической нагрузке используется методика эквивалентной линейаризации (для определения комплексных модулів) в сочетании с методом дискретной ортогонализации с использованием итерационной процедуры. На каждой итерации методом ортогональной дискретизации решаются комплексные аналоги уравнений колебаний балки. Для решения задачи теплопроводности используется явная схема метода конечных разностей. Исследовано влияние дисипативного разогрева, физической и геометрической нелинейности на динамические характеристики колебаний, температуру виброразогрева и демпфирование вынужденных колебаний нанокompозитной балки для разных значений объемного содержания нановолокон при поперечной комбинированной статической и гармонической нагрузках.

УДК 532.595

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф., К. Семенович, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ РІДИНИ З РЕЗЕРВУАРОМ НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ ЗА НАЯВНОСТІ РІВНОМІРНОГО ВИТІКАННЯ

Досліджено задачу кутового руху циліндричного резервуара на маятниковому підвісі, частково заповненого рідиною, за наявності рівномірного витікання рідини. Вивчено динамічну взаємодію рідини з резервуаром і показано, що у випадку з витіканням спостерігаються істотні прояви нелінійних властивостей механічної системи, які не спостерігаються в задачі зі сталим об'ємом рідини.

Вступ. Задачі руху резервуарів з рідиною залишаються актуальними, починаючи з середини минулого століття. Динаміка рідини з вільною поверхнею представляє значну складність у теоретичному та обчислювальному аспектах, особливо при розгляді таких задач у сумісній постановці. При цьому із практичного погляду важливо розглянути випадок із витіканням рідини, оскільки експлуатація резервуарів зі змінним заповненням поширена в промисловості та транспорті. Вивчення й урахування особливостей динамічної взаємодії рідини з резервуаром при змінному заповненні дозволить розробити рекомендації для уникнення небезпечних режимів експлуатації конструкцій із рідиною. Метою цієї роботи є вивчення особливостей динамічної взаємодії рідини з резервуаром за наявності рівномірного витікання, а також порівняння з випадком сталого об'єму рідини.

Об'єкт дослідження. Розглянуто задачу про рух циліндричного резервуара, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, на маятниковому підвісі за наявності рівномірного витікання рідини через дно резервуара. У початковий момент часу резервуар є відхиленим від положення рівноваги на деякий кут, вільна поверхня рідини є горизонтальною. На рис. 1 наведено схематичне зображення механічної системи в початковий момент часу. Резервуар може коливатись лише в одній площині, дисипація в системі відсутня.

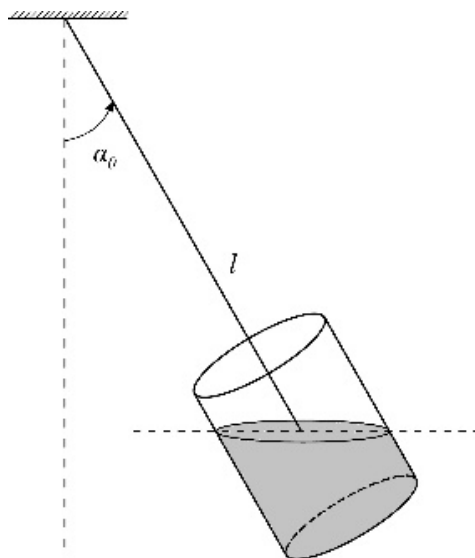


Рис. 1. Схематичне зображення механічної системи резервуар – рідина в початковий момент часу

Об'єм рідини не є сталим, відбувається рівномірне витікання через дно резервуара за законом $H = H_0 + t\Delta H$, де t – час, H – рівень заповнення рідиною резервуара, віднесений до радіуса основи резервуара R (індекс "0" відповідає початковому стану рідини), ΔH – швидкість зміни рівня рідини. Локальні ефекти витікання рідини не враховуються. Задачу розглянуто в сумісній постановці, що обумовило істотне ускладнення математичної моделі механічної системи. Перевагою цього підходу є можливість проаналізувати сили тиску рідини на стінки резервуара, що є предметом розгляду цієї статті.

Математична модель. Математичне формулювання задачі сумісного руху резервуара з рідиною складається з кінематичних та динамічних граничних умов, рівнянь руху та початкових умов. Розв'язок задачі побудовано на базі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з використанням підходу [1]. Розгляд кутового руху системи вимагає введення додаткового векторного потенціалу Стокса – Жуковського $\vec{\Omega}$ до виразу потенціалу швидкостей рідини. До кінематичних умов належать вимога нерозривності потоку в області, умова неперетікання на межі контакту резервуар – рідина та умова непротікання через вільну поверхню рідини (1). Таким чином маємо

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\vec{\Omega} = 0 \quad \text{в } \tau;$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \quad \text{на } \Sigma;$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot [\vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z, \quad \xi = z;$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S, \quad (1)$$

де τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня резервуара. Динамічні граничні умови та рівняння сумісного руху системи отримано з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського для функції Лагранжа механічної системи, яка для випадку кутового руху системи має такий вигляд:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} [\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} I_{\text{res}} \omega_i \omega_j + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\ & - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - \\ & - (M_r h_r + M_l h_l) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Постановку задачі можна одержати з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, доповненого кінематичними граничними умовами (1),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (3)$$

Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно забезпечити задовольнення кінематичних в'язей до початку розв'язання варіаційної задачі. Необхідність виконання цього етапу обумовлює вибір представлень шуканих величин так, щоб задовольнити кінематичні обмеження задачі. Алгоритм задовольнення кінематичних граничних умов задачі викладено в [1]. Після переходу до вільної системи рівняння руху одержують як рівняння Лагранжа другого роду для функції Лагранжа (2).

В узагальненій формі рівняння руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з нерухомою точкою підвісу відносно амплітудних параметрів коливань рідини a_i і параметрів кутового руху резервуара α_i можна подати так:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N} = q_r, \quad r = \overline{1, N+3}, \quad (4)$$

де N – кількість форм коливань рідини. Розмірність розв'язувальної системи рівнянь (4) мінімальна і збігається з кількістю ступенів вільності механічної системи, що вивчається.

Система рівнянь (4) є лінійною відносно других похідних від шуканих змінних, що дає можливість перетворити її до нормальної форми Коші і виконати інтегрування системи за часом методом Рунге – Кутти четвертого порядку. Коефіцієнти рівнянь (4) визначаються у квадратурах від форм коливань для довільного N . Наведені далі результати числових розрахунків отримано з урахуванням $N = 12$ форм коливань рідини відповідно до методики [1].

Особливості динамічної взаємодії рідини з резервуаром за наявності рівномірного витікання. Розглянемо рух циліндричного резервуара радіуса $R = 1$ м на маятниковому підвісі довжиною $l = 0.1R$, $l = R$. Вибір довжини підвісу обумовлений тим, що, як установлено у [2], при сталій масі рідини рух системи подібний до лінійного на малих довжинах маятникового підвісу. Узято довжини з діапазону, в якому прояви нелінійних властивостей системи послаблені, щоб виділити вплив на динаміку системи наявності витікання. Маса резервуара складає 10 % початкової маси рідини. У початковий момент часу резервуар відхилено від положення рівноваги на кут $\alpha_0 = \frac{\pi}{25}$.

Через дно резервуара відбувається рівномірне витікання рідини зі швидкістю $\Delta H = -0.05$. Досліджено випадки з різним рівнем початкового заповнення резервуара H_0 . На рис. 2–5 подано числові результати для задач із витіканням (тонка лінія на графіках) та зі сталим рівнем заповнення резервуара (товста лінія).

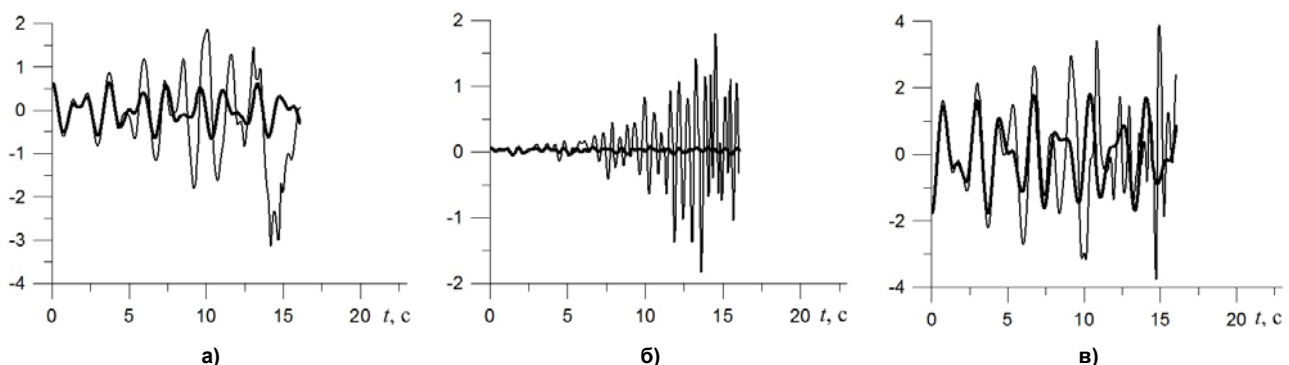


Рис. 2. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: горизонтальна R_x (а); вертикальна R_z (б), ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x (в), віднесені до маси системи, для $H_0 = R$, $l = 0.1R$

Із рис. 3 (б) при аналізі зміни в часі кута відхилення резервуара від вертикалі видно, що у випадку з витіканням зростає амплітуда коливань резервуара і зменшується частота коливань із часом, що узгоджується з теоремою про зміну моменту кількості руху і свідчить про адекватне відображення механічних властивостей системи на основі побудованої математичної моделі.

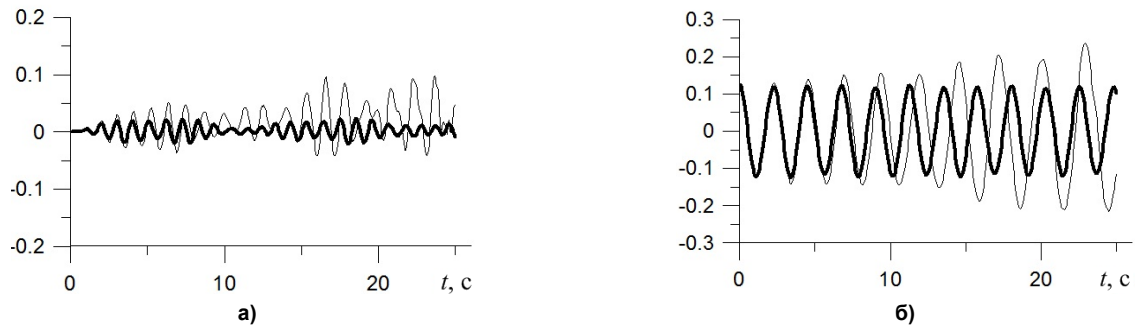


Рис. 3. Зміна в часі: амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини (а) та кута відхилення резервуара від вертикалі для $H_0 = 2R$, $l = 0,1R$ (б)

Для задач із витіканням характерним є зростання амплітуди першої осесиметричної форми порівняно з випадком сталого заповнення, яка є показником активізації нелінійних процесів у системі. Як відомо, ця форма може зазнати збурення лише в результаті нелінійного перерозподілу енергії між формами коливань. Як показує рис. 3 (а), ця форма також має суттєве зміщення середнього, що є проявом властивості нелінійних хвиль – перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини. Для випадку сталого заповнення цей ефект проявляється суттєво слабкіше.

Для аналізу силової взаємодії рідини з резервуаром вивчено зміну в часі складових сил тиску рідини на стінки резервуара за наявності витікання при різних рівнях початкового заповнення резервуара. Як видно з рис. 2, 4, 5, при витіканні відбувається зростання амплітуд горизонтальної складової сил тиску рідини на стінки резервуара R_x та ненульової складової головного моменту сил тиску M_x із часом, що відповідає теоретичним очікуванням і пояснюється зростанням амплітуди коливань резервуара зі зменшенням маси рідини. Витікання сприяє модуляції вертикальної складової сил тиску рідини R_z , її амплітуда із часом також зростає, присутні високочастотні складові. При сталому заповненні вертикальна складова сил тиску рідини практично відсутня для коротких підвісів, як видно з рис. 2, 4, 5 (б), що було детально показано у [2].

Також розглянуто задачу руху системи з витіканням для різних значень початкового заповнення резервуара. На рис. 2, 4 наведено випадки з початковим рівнем заповнення резервуара $H_0 = R$ та $H_0 = 2R$. Порівнюючи зміни в часі вертикальної складової R_z головного вектора сил тиску (рис. 2, 4 (б)), зазначимо, що прояви нелінійності протікання процесів при зміні рівня рідини значніші, ніж у випадку сталого рівня заповнення, незалежно від рівня початкового заповнення.

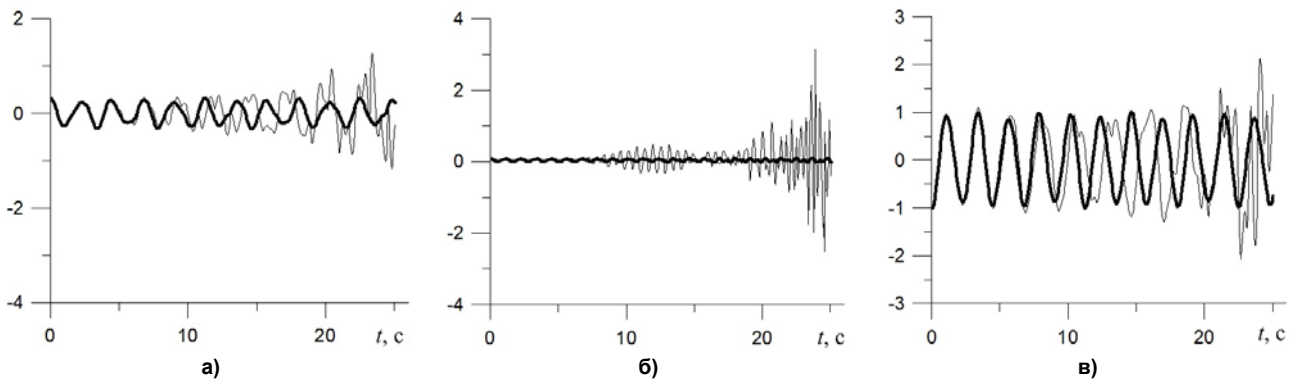


Рис. 4. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: горизонтальна R_x (а); вертикальна R_z (б), ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x (в), віднесені до маси системи, для $H_0 = 2R$, $l = 0,1R$

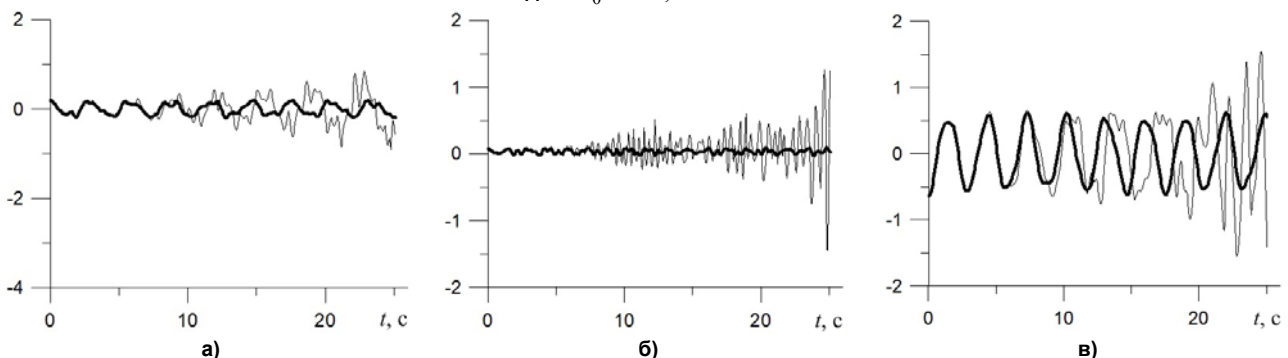


Рис. 5. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: (а) – горизонтальна R_x ; (б) – вертикальна R_z , (в) – ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x , віднесені до маси системи, для $H_0 = 2R$, $l = R$

Для перевірки коректності отриманих результатів числових розрахунків виконано обчислення зі зменшенням кроку інтегрування в 5 разів і встановлено, що зростання амплітуд, зокрема, першої осесиметричної форми коливань, не обумовлені накопиченням обчислювальної похибки.

Висновки. Досліджено динаміку системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі в сумісній постановці за наявності рівномірного витікання рідини через дно резервуара. Показано, що побудована математична модель адекватно відображає рух механічної системи при змінному заповненні резервуара.

Установлено, що наявність витікання рідини призводить до зростання внеску нелінійних механізмів у системі, зокрема, помітно зростає амплітуда вертикальної складової головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара, присутні значні модуляції.

Розглянуто задачу для різних рівнів початкового заповнення резервуара і показано, що прояви нелінійностей не пояснюються безпосередньо зниженням рівня рідини до певного граничного значення, а присутні за наявності витікання як такого.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В. В. Ясинский. – К.: Гнозис. – 2002. – 168 с.
2. Семенович К. О. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / К. О. Семенович, О. С. Лимарченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 67–70.

Надійшла до редколегії 10.05.17

О. Лимарченко, д-р техн. наук, К. Семенович, канд. физ.-мат. наук
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖИДКОСТИ С РЕЗЕРВУАРОМ НА МАЯТНИКОВОМ ПОДВЕСЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАВНОМЕРНОГО ИСТЕЧЕНИЯ

Исследована задача углового движения цилиндрического резервуара на маятниковом подвесе, частично заполненного жидкостью, при наличии равномерного истечения жидкости. Изучено динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром и показано, что в случае с истечением существенны проявления нелинейных свойств механической системы, чего не наблюдается в задаче с постоянным объемом жидкости.

O. Limarchenko, Full Doctor, K. Semenovych, PhD
 Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DYNAMIC INTERACTION OF LIQUID WITH THE RESERVOIR ON PENDULUM SUSPENSION IN THE PRESENCE OF UNIFORM OUTFLOWING

Problem of dynamics of cylindrical reservoir, partially filled with ideal liquid, on pendulum suspension in the case of uniform outflowing of liquid is considered within the framework of combined motion approach. Peculiarities of dynamic response of liquid are studied and compared with the case of constant volume of liquid.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук
 Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв,
 Л. Федорченко, канд. фіз.-мат. наук
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
 Email: fedorchenko555@gmail.com
 Л. Васильєва, канд. фіз.-мат. наук
 Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ЗРІЗАНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

У рамках розв'язування важливої задачі магнітопружності теорії гнучких ортотропних оболонок обертання сформульовано постановку крайової задачі. Запропоновано методику її розв'язування. Досліджено та проаналізовано вплив граничних умов на характеристики напружено-деформованого стану.

Вступ. Розвиток сучасного обладнання, призначеного для роботи під дією механічних та електромагнітних полів, вимагає використання теорії зв'язаних полів при дослідженні пружних тіл для оптимального проектування конструкцій у ядерній та авіаційній техніці [13,14]. Пружні тіла, які перебувають у нестационарному магнітному полі, часто знаходяться під дією стороннього електричного струму. Задачі магнітопружності з урахуванням дії стороннього струму на ортотропні оболонки є складними і мало дослідженими через те, що для розкриття ефектів зв'язаності полів і визначення напружено-деформованого стану необхідним є застосування нелінійної теорії [1,4,7,8].

У цій статті проведено аналіз впливу граничних умов зрізаної сферичної ортотропної оболонки з урахуванням ортотропної електропровідності на її напружено-деформований стан.

Постановка задачі. Розглядаємо гнучку ортотропну сферичну оболонку змінної товщини, у якій координатна поверхня має форму, замкнену в коловому напрямку. Припускаємо, що оболонка перебуває під дією нестационарного механічного й електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями, прийmemo, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм $J_{\theta CT}$ від зовнішнього джерела.

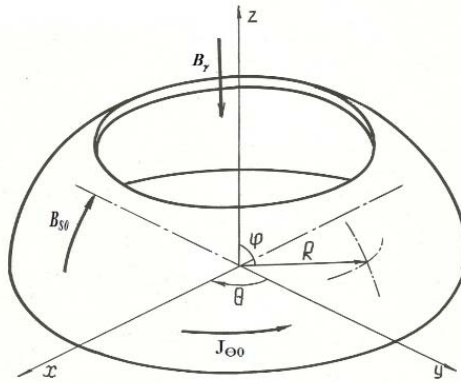


Рис.1. Зрізана сферична ортотропна оболонка

Пружні властивості матеріалу оболонки є ортотропними, головні напрямки пружності цієї оболонки збігаються з напрямками відповідних координатних ліній. Матеріал має скінченну електропровідність. Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , магнітної проникності μ_{ij} , діелектричної проникності ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Із певних міркувань щодо кристалічної структури матеріалу прийнято, що ці тензори мають діагональний вигляд [6].

При побудові рівнянь руху гнучких ортотропних оболонок у змінному магнітному полі використовують гіпотези Кірхгофа – Лява та гіпотези електромагнітопружності. Вважається, що єдиний механічний ефект електромагнітного поля проявляється через силу Лоренца.

Оболонку (рис. 1) віднесено до ортогональної криволінійної системи координат s, θ, γ . Координатні лінії $s = \text{const}, \theta = \text{const}$ є лініями головної кривизни серединної поверхні. Координата γ відраховується по нормалі до координатної поверхні. Товщина оболонки $h = h(s)$.

Ураховуючи діагональний вигляд тензорів і згідно роботам [5, 11, 12] розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних оболонок обертання має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w + \frac{w}{R_s} - \frac{1}{2} g_s^2, \\
 \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s + \frac{u}{R_s}, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} g_s, \\
 \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s - h J_{\theta CT} B_\gamma - \frac{1}{R_s} Q_s - \\
 &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\
 &\quad - 0.5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h [-0.5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial g_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] + Q_s + N_s g_s - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] g_s + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 g_s}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu_3 \sigma_2 \left[E_\theta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{\mu_1 h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут u, w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; g_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; R_s – головний радіус кривизни; φ – кут нормалі до серединної поверхні оболонки; $r(s)$ – радіус паралельного кола оболонки; ν_s, ν_θ – коефіцієнти Пуассона; e_s, e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_θ – дотична компонента напруженості електричного поля; B_γ

– нормальна складова магнітної індукції; B_s^+, B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; $J_{\theta CT}$ – складова густини стороннього електричного струму, σ_i – електрична провідність.

Ураховуючи геометрію сферичної оболонки, в (1) покладаємо $R_s = R_0 = R$, де R – радіус оболонки; $r = R \sin \varphi$, $\sin \varphi = \frac{s}{R}$, $\cos \varphi = \cos \frac{s}{R}$. Отримуємо розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку, яка описує напружено-деформований стан гнучкої струмопровідної ортотропної оболонки обертання з ортотропною електропровідністю в геометрично нелінійній постановці [16,17].

Методика розв'язання. Крайова задача розв'язується чисельно відповідно до методики, яка ґрунтується на основі послідовного застосування схеми Ньюмарка [18], методу квазілінеаризації [2] та методу дискретної ортогоналізації [3].

На першому кроці, у системі диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, щоб відокремити змінні за часом, використовуємо неявну схему Ньюмарка для інтегрування магнітопружних рівнянь.

На наступному кроці застосовуємо метод квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації. Спочатку, за початкове наближення за часом вибирають розв'язок лінійної задачі, на наступному етапі – обирають розв'язки, отримані на попередньому кроці. Така схема значно зменшує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання цієї задачі [15].

Для ефективного використання запропонованої методики нехтуємо скін-ефектами, які виникають по товщині ортотропної оболонки. Електромагнітний процес по координаті γ швидко виходить на режим, який близький до усталеного. Це веде до обмежень, які накладаються на характер зміни зовнішнього магнітного поля та на геометричні і електрофізичні параметри оболонки

$$\frac{2\tau_{\text{имп}}}{h^2\sigma\mu} > 1,$$

де τ – характерний час дії магнітного поля. У випадку невиконання цієї умови необхідно розглядати тільки рівняння руху ортотропної оболонки під дією магнітного тиску. При заміні похідних за часом скінченно-різницевиими співвідношеннями згідно зі схемою Ньюмарка необхідно враховувати зв'язок між кроком за часом і кроком інтегрування по просторовій змінній s [9].

Співвідношення кроків різничевої схеми за часом і просторової координатами обумовлюється критерієм стійкості Куранта [10], відповідно до якого крок сітки за часом не повинен перевищувати часу, протягом якого збурення, що поширюються з місцевою швидкістю звуку, пробігають відстань, яка дорівнює розміру кроку за просторовою координатою. Оскільки розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними восьмого порядку є змішаною системою гіперболо-параболічного типу, значення кроку за часом t потрібно вибирати з таких співвідношень:

$$\tau < \min \begin{cases} \frac{\Delta\alpha}{C_M}, \\ \frac{0.5(\Delta\alpha)^2\sigma\mu}{\rho^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\tilde{N}_M$ – швидкість поширення магнітопружних збурень; $\Delta\alpha$ – крок за просторовою координатою. Умова стійкості (2) – критерій Куранта для гіперболічного типу рівнянь, а умова (3) – для рівнянь параболічного типу.

Числовий приклад. Розглянемо задачу про напружено-деформований стан зрізаної сферичної ортотропної оболонки з кадмію змінної товщини $h = 8 \cdot 10^{-2} (1 + 0.2 \sin \frac{\pi s}{l})$ м (тут l – довжина дуги), яка перебуває під дією зовнішнього електричного струму $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$ А/м², а також нормальної складової механічного навантаження $P_\gamma = 1.3 \cdot 10^2 \sin \omega t$ Н/м² (ω – колова частота).

Для дослідження впливу крайових умов на напружено-деформований стан ортотропної сферичної оболонки розглянуто такі випадки:

- | | |
|---|---------------------|
| 1) $u = w = M_s = 0$, $B_\gamma = 0.5 \sin \omega t$ | при $S_0 = 0.4i$; |
| $u = w = M_s = 0$, $E_\theta = 0$ | при $S_N = 0.78i$; |
| 2) $u = w = \vartheta_s = 0$, $B_\gamma = 0.5 \sin \omega t$ | при $S_0 = 0.4i$; |
| $u = w = M_s = 0$, $E_\theta = 0$ | при $S_N = 0.78i$. |

Параметри оболонки і матеріалу взято такі:

$$S_0 = 0.4i ; S_N = 0.78i ; e_s = 8.1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 ; e_\theta = 2.82 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 ;$$

$$\nu_s = 0.3 ; \nu_\theta = 0.3 ; \rho = 8640 \text{ кг/м}^3 ; \mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} ;$$

$$\sigma_1 = 0.147 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} ; \sigma_2 = 0.147 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} .$$

Результати розв'язання розглянутої задачі подано нижче у вигляді графіків.

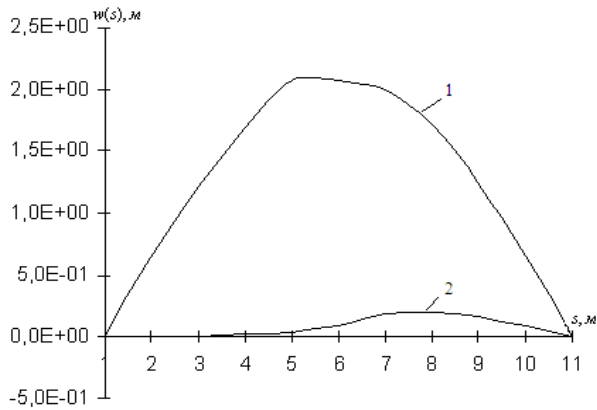


Рис. 2. Розподіл максимального прогину w вздовж меридіана s у момент часу $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ н}$:
1 – перший випадок, 2 – другий випадок

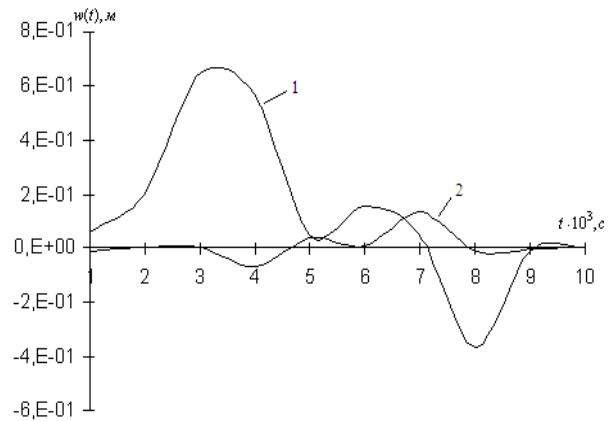


Рис. 3. Розподіл прогину w залежно від часу t при $s = 0.438 \text{ м}$: 1 – перший випадок, 2 – другий випадок

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Точки 1 – 11 за віссю s – це точки видачі результатів, які відповідають $s = 0.4; 0.438; 0.476; 0.514; 0.552; 0.590; 0.628; 0.666; 0.704; 0.742; 0.78$.

На рис. 2 показано розподіл максимального прогину w вздовж меридіана s у момент часу $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ н}$. Із рис. 2 видно, що найбільший прогин виникає у випадку граничних умов, де зліва і справа маємо жорстке закріплення. Абсолютне значення $w/h \approx 25.8$. Це свідчить про те, що прогин виходить за межі геометрично нелінійної теорії.

У випадку шарнірного закріплення зліва абсолютне значення $w/h \approx 4$. Значення прогину оболонки у першому випадку граничних умов, тобто де зліва і справа маємо жорстке закріплення, є значно більшим порівняно із другим випадком.

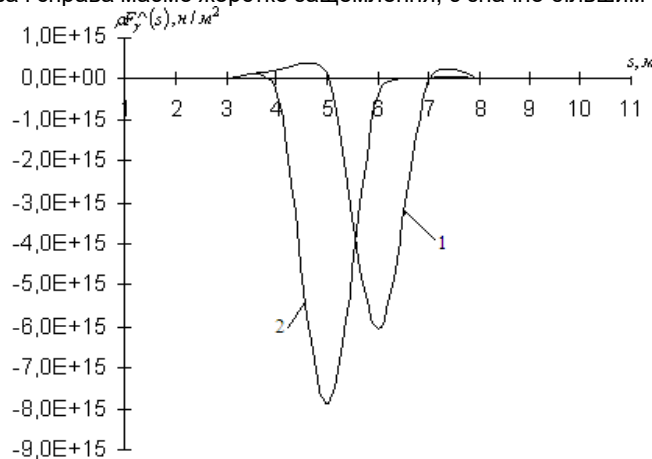


Рис. 4. Розподіл сили Лоренца ρF_γ^x уздовж меридіана s у момент часу $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ н}$:
1 – перший випадок, 2 – другий випадок

На рис. 3. наведено розподіл прогину $w(t)$. Максимальні значення прогину досягаються при $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ н}$, що відповідає результатам, зображеним на рис. 2.

На рис. 4. показано розподіл нормальної складової сили Лоренца ρF_γ^x при $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ н}$ уздовж меридіана s .

Максимальні значення сили Лоренца виникають при дії електромагнітного поля для оболонки із шарнірним закріпленням зліва при $s = 0.552 \text{ м}$, а для оболонки із жорстким закріпленням при $s = 0.59 \text{ м}$. Зміщення максимальних значень пояснюється дією інерційних сил.

Висновки. У цій статті проаналізовано вплив граничних умов на напружено-деформований стан ортотропної зрізаної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю, яка перебуває в нестационарному магнітному полі під дією стороннього електричного струму. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив способу закріплення ортотропної оболонки обертання на її напружено-деформований стан.

Список використаних джерел

1. Амбарцумян С. А. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин / С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Григоренко Я. М. Основы теории пластин та оболонок з елементами магнітопружності. Підручник / Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 403 с.
4. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – К.: Высш. шк., –1983. – 286 с.

5. Дресвянников В. И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей / В. И. Дресвянников // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32–47.
6. Келли А. Кристаллография и дефекты в кристаллах / А. Келли, Г. Гровс // – М.: Мир, 1974. – 496 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика / А. Зоммерфельд / М.: Изд-во иностр. л-ры., 1968. – 501 с.
8. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
9. Мольченко Л. В. Гибкие оболочки вращения в магнитном поле: монография [Электронный ресурс] / Л. В. Мольченко. – К., 2013. – 196 с. – Режим доступа: <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>.
10. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин // – М.: Наука, 1973. – 232 с.
11. Федорченко Л. М. Вплив фізичних властивостей матеріалу на напружений стан ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю / Л. М. Федорченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спец. Вип. – С. 267–270.
12. Федорченко Л. М. Деформування гнучкої ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю з діа- та парамагнітних матеріалів / Л. М. Федорченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2015. – Вип. 34. – С. 57–61.
13. Bian Yu-Hong. Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate / Yu-Hong Bian // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, № 1. – P. 108–120.
14. Green A. E. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates / A. E. Green, P. M. Naghdi // Phil. Trans. Roy. Soc. – London. – 1983. – A309. – P. 559–610.
15. Mol'chenko L. V. Influence of an Extraneous Electric Current on the Stress of an Annular Plate of Variable Rigidity / L. V. Mol'chenko // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37. – № 12. – P. 1607–1611.
16. Mol'chenko L. V. The stress state of a flexible orthotropic spherical shell subject to external current and mechanical force in a magnetic field / L. V. Mol'chenko, I. I. Loos // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49. – № 5. – P. 528–533.
17. Mol'chenko L. V. Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variable stiffness in a magnetic field / L. V. Mol'chenko, I. I. Loos, L. M. Fedorchenko // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52. – № 1. – P. 56–61.
18. Newmark N. M. Method of Computation for Structural Dynamics / N. M. Newmark // J. Eng. Mech. Div. Proc. (ASCE). – 1959. – 85. – № 7. – P. 67–97.

Надійшла до редколегії 30.11.16

Л. Мольченко, д-р физ.-мат. наук

Николаевский национальный университет имени В. А. Сухомлинского, Николаев, Украина,

Л. Федорченко, канд. физ.-мат. наук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,

Л. Васильева, канд. физ.-мат. наук

Николаевский национальный университет имени В. А. Сухомлинского, Николаев, Украина

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ СРЕЗАННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТИ

В рамках решения важной задачи магнитоупругости теории гибких ортотропных оболочек вращения сформулировано постановку граничной задачи. Предложено методику её решения. Исследовано и проанализировано влияние граничных условий на характеристики напряженно-деформированного состояния усеченной сферической оболочки.

L. Mol'chenko, Full Doctor

V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine,

L. Fedorchenko, PhD

Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine,

L. Vasil'eva, PhD

V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine

STRESS-STRAIN STATE ORTHOTROPIC TRUNCATED SPHERICAL SHELL OF VARIABLE STIFFNESS

As part of solving important task magnetoelasticity theory of flexible orthotropic shells of revolution formulated boundary problem statement. The method of the solution. Investigated and analyzed the influence of boundary conditions on the characteristics of the stress-strain state.

УДК 539.3

В. Чернобай, асп.

Інститут надтвердих матеріалів імені В. М. Бакуля НАН України, Київ

E-mail: volodymyr_mexanik@ukr.net

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА ЕЛІПТИЧНІЙ НАНОПОРІ ЗА АНТИПЛОСКОГО ЗСУВУ

Досліджено концентрацію напружень в антиплоско-деформованому пружному тілі з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока. Точний аналітичний розв'язок одержано методом мультипольних розвинень із використанням техніки комплексних потенціалів. Наведені чисельні результати параметричного аналізу задачі демонструють суттєву залежність концентрації напружень від розміру і форми пори. Асимптотичний аналіз напружень у випадку виродження тонкої пори у тріщину доводить, що поверхневі напруження усувають кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини.

Вступ. Характерною рисою наноструктурних (в т. ч. нанопористих) матеріалів є дослідно підтверджена (напр. [11, 13]) залежність їх пружної поведінки від характерного розміру неоднорідностей, зумовлена впливом поверхневої енергії вільних/міжфазних меж розділу фаз. Указаний вплив є вкрай слабким на макрорівні (і тому ним нехтують у класичній механіці), утім зростає зі збільшенням питомої міжфазної поверхні і стає суттєвим на нанорівні. Для його врахування в рамках континуального підходу зазвичай [15] використовується модель Гуртіна – Мердока [5, 6], згідно з якою поверхневі напруження залежать від пружних властивостей та геометрії (головним чином, кривизни) вільної чи міжфазної поверхні й обумовлюють так званий "розмірний" ефект макроскопічної жорсткості нанокомпозитів (напр. [3, 4, 12]).

Цікавим і практично важливим, але до цього часу вкрай мало дослідженим, є питання впливу поверхневої енергії на локальну концентрацію напружень, а отже і межу міцності наноструктурних матеріалів. Характер такого впливу є вельми своєрідним і відрізняється від звичних уявлень макрорівня. Так, згідно із [7], поверхневі напруження усувають відому з лінійної механіки руйнування кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини. Аналогічного висновку доходять і автори робіт [9, 10] на підставі розрахунку напружень в околі тонкої еліптичної пори. Утім, досі в літературі відсутні як теоретичне обґрунтування цього важливого для механіки руйнування факту, так і систематичне

дослідження концентрації напружень та їхньої поведінки в околі нанорозмірної пори. Робота [14] є ймовірно, єдиною (утім, безрезультатною) спробою асимптотичного аналізу вказаної проблеми. Метою цієї роботи є систематичний аналіз концентрації напружень при антиплоскому зсуві пружного тіла з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока.

Постановка крайової задачі. Розглянемо площину з однією еліптичною порою. Уведемо декартову систему координат Ox_1x_2 з початком у центрі еліпса й осями, орієнтованими уздовж його великої l_1 і малої l_2 півосей. Форма еліпса визначається співвідношенням сторін $e = l_2/l_1$, фокальна відстань $d = \sqrt{l_1^2 - l_2^2}$. Поруч із загальноживаною комплексною змінною $z = x_1 + ix_2$ введемо "еліптичну" комплексну змінну $\xi = \zeta + i\eta$, згідно із формулою

$$z = d \operatorname{ch} \xi = \frac{d}{2}(v + v^{-1}), \quad v = \exp \xi. \quad (1)$$

Координатна лінія $\zeta = \zeta_0$ визначає поверхню еліптичної пори L , $v_0 = \exp \zeta_0$. На поверхні пори функції $v^k = v_0^k \exp i k \eta$ залежать лише від кутової координати η , що робить комплексну змінну ξ зручною при розгляді областей з еліптичною межею. У крайньому випадку круглої ($e = 1$) пори, $d \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow \infty$, $v_0 d \rightarrow 2R$, $\eta \rightarrow \theta$ і $vd \rightarrow 2r \exp i\theta = 2z$, де r і θ – полярні координати. Інший крайній випадок – це нескінченно тонка ($e = 0$) пора (тріщина), де $d = l_1$ і $v_0 = 1$.

Постановка задачі про антиплоский зсув включає рівняння рівноваги

$$\partial \sigma_{13} / \partial x_1 + \partial \sigma_{23} / \partial x_2 = 0 \quad (2)$$

і закон Гука

$$\sigma_{i3} = 2\mu \varepsilon_{i3} = \mu \partial w / \partial \xi_i, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

для двох ненульових компонент тензора напружень σ_{13} та σ_{23} . Тут $w = w(x_1, x_2)$ – переміщення вздовж осі Ox_3 , μ – модуль зсуву. За вказаних умов переміщення w є гармонічною функцією, що уможливорює застосування до її пошуку методу комплексних потенціалів [2].

Гранична умова на поверхні пори L є частинним випадком моделі Гуртіна – Мердока [5; 6] і має такий вигляд (напр., [9, 10]):

$$\sigma_n + \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

де $\sigma_n = 2\mu \partial w / \partial n$, $\sigma_t = 2\mu \partial w / \partial t$ і $\sigma_t^s = 2(\mu^s - \tau^0) \partial w / \partial t$ – відповідно нормальне, дотичне і поверхневе напруження, μ^s та τ^0 – пружні константи поверхні розмірності [Н/м] згідно з [5, 10]. У термінах переміщень, умова (4) має вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{(\mu^s - \tau^0)}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Подамо переміщення w у вигляді $w = \operatorname{Re} \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – комплексний потенціал. Відповідне комплексне напруження $\sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu \overline{\varphi'(z)}$, а умова (5) набуває вигляду

$$\mu \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} = -(\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}.$$

Її перетворення з використанням умови Коші – Рімана $\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t}$ до $\mu \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t} = -(\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}$ і наступне інтегрування по t уздовж L дає аналогічний граничній умові третього роду вираз

$$\operatorname{Im} \varphi = -h \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial t} = h \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial n}, \quad (6)$$

де $h = (\mu^s - \tau^0) / \mu$.

Напружений стан площини з еліптичною порою відповідає заданому на нескінченності сталому напруженню $\sigma^\infty = \sigma_{13}^\infty + i\sigma_{23}^\infty = 2\mu \varepsilon^\infty$, де $\varepsilon^\infty = \varepsilon_{13}^\infty + i\varepsilon_{23}^\infty$. Із фізичних міркувань, при $z \rightarrow \infty$ маємо $w \rightarrow w^\infty$, де $w^\infty = \varepsilon_{13}^\infty x_1 + \varepsilon_{23}^\infty x_2 = \operatorname{Re}(\varepsilon^\infty z)$.

Аналітичний розв'язок. Згідно з [9], представимо комплексний потенціал $\varphi(z)$ рядом по еліптичних гармоніках:

$$\varphi = \sum_k (A_k + a_k) v^{-k}, \quad (7)$$

де $A_k \equiv 0$ для $k \leq 0$, $a_k = a_{-k} = \overline{\delta_{k1} d \varepsilon^\infty / 2}$ і δ_{ij} – символ Кронекера. На контурі L $v = v_0 \tau$, де $\tau = \exp i\eta$, також $\overline{v} = v_0 \tau^{-1}$. Зважаючи на те, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g_{11}^{-1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_{22}^{-1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

де $g_{11} = g_{22} = d^2 (\sin^2 \zeta + \sin^2 \eta)$ – метричні коефіцієнти еліптичної системи координат, з умови (6) отримаємо

$$\varphi - \overline{\varphi} = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} \right), \quad (8)$$

тут $\beta = ihg_{11}^{-1/2}$. З урахуванням очевидної тотожності $\partial v / \partial \eta = iv$ диференціювання у правій частині (8) є елементарним.

Інтегрування помноженої на τ^k ($k = 1, 2, \dots$) функціональної рівності (8) по періоду $0 \leq \eta \leq 2\pi$ дає нам нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$B_k + a_k v_0^{-k} - \overline{a_k} v_0^k = \sum_n n \left[(B_n + a_n v_0^{-n}) \beta_{k-n} - (\overline{B_n} + \overline{a_n} v_0^{-n}) \beta_{k+n} \right], \quad (9)$$

де $B_k = A_k v_0^{-k}$, а

$$\beta_k = \beta_{-k} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{11}^{-1/2} \exp(ik\eta) d\eta. \quad (10)$$

Визначення коефіцієнтів ряду (7) із системи (9) завершує побудову розв'язку.

Розглянемо два частинні випадки, коли розв'язок цієї задачі є елементарним: для простоти, покладемо $\varepsilon_{13}^\infty = 0$. Перший випадок відповідає еліптичній порі з вільною поверхнею ($h = 0$). Із (9) маємо $A_k \equiv 0$ для всіх k крім $A_1 = i\varepsilon_{23}^\infty v_0 d \chi \zeta_0$. Як легко перекоонатись, за такого вибору A_1 на поверхні пори $\text{Im} \varphi = 0$. Крім того, при $\eta = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \varepsilon_{23}^\infty l_1 (1 + e); \quad \frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty} g_{11}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta} = (1 + 1/e). \quad (11)$$

Враховуючи, що радіус кривизни еліпса в точці $z = l_1$ дорівнює $R = e^2 l_1$, маємо $\sigma_{t3} = \sigma_{23}^\infty (1 + \sqrt{l_1/R})$. При $R \rightarrow 0$, коли еліпс вироджується у тріщину, напруження очікувано зростають як $\sigma_{t3} \sim R^{-1/2}$ [2]. Важливо зазначити, що для довільного e потенціал φ та його похідна $\partial \varphi / \partial \xi = \frac{1}{2} (\partial \varphi / \partial \zeta - i \partial \varphi / \partial \eta)$ в околі та на поверхні пори є скінченними, тоді як $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$ при $e \rightarrow 0$, тобто метричний коефіцієнт є єдиним чинником сингулярності розв'язку задачі про тріщину.

Іншим простим випадком є кругла пора ($e = 1$), радіус кривизни якої є сталим: $g_{11}^{1/2} = R$. Із (10) маємо $\beta_k = -h^* \delta_{k0}$, де $h^* = h/R$ – безрозмірний параметр. Як наслідок, лише перше рівняння системи (9) є ненульовим: $B_1 = i\varepsilon_{23}^\infty R(1 - h^*) / (1 + h^*)$. Відповідно на поверхні пори маємо

$$w = \text{Re} \varphi = \varepsilon_{23}^\infty \frac{2}{1 + h^*} R \sin \theta, \quad \text{Im} \varphi = -\varepsilon_{23}^\infty \frac{2h^*}{1 + h^*} R \cos \theta. \quad (12)$$

За наявності поверхневих напружень ($h^* \neq 0$) уявна частина потенціалу $\text{Im} \varphi$ теж відмінна від нуля. Вираз напруження σ_{t3} при $\theta = 0$

$$\frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty R} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{2}{1 + h^*} \quad (13)$$

відрізняється від (11) лише виразом $(1 + h^*)$ у знаменнику і спадає від 2 до 0 при зростанні h (крива 1 на рис. 3).

Чисельний аналіз. У загальному випадку еліптичної пори з поверхневими напруженнями розв'язок задачі має форму ряду (7), коефіцієнти якого задовольняють нескінченну систему лінійних рівнянь (9). Її чисельний розв'язок із довільною точністю ε можна одержати методом редукції [1], тобто утриманням скінченної кількості $n_{\max}(\varepsilon)$ гармонік у (7) і такої самої кількості рівнянь у (9). Одержаний таким чином наближений розв'язок прямує до точного при $n_{\max} \rightarrow \infty$, утім швидкість збіжності суттєво залежить від вхідних параметрів задачі: вона зростає при наближенні до розглянутих вище "простих" випадків, а саме при (а) $h \rightarrow 0$ і (б) $e \rightarrow 1$ при довільному h . Для скінченного h збіжність сповільнюється при $e \rightarrow 0$, тому $n_{\max}$ має бути достатньо великим для одержання достовірних результатів. Деякі результати дослідження збіжності наведено в [9].

На рис. 1 показано розподіл нормального напруження σ_{n3} уздовж поверхні круглої (крива 1) та еліптичної пори з $e = 1/3$ (крива 2) та $e = 1/10$ (крива 3) для $h/l_1 = 1$. У випадку вільної поверхні ($h = 0$) згідно з умовою (5) $\sigma_{n3} = 0$ незалежно від форми пори. Характерно, що зі зменшенням e максимальне значення σ_{n3} зростає, а точка максимуму поступово зсувається від $\eta = \pi/2$ для круглої пори у бік зменшення η . На відміну від σ_{n3} , дотичне напруження σ_{t3} є ненульовим на поверхні пори навіть для $h = 0$ (криві 1 і 2 на рис. 2), при цьому його максимальне значення досягається при $\eta = 0$ і визначається формулою (11). За наявності поверхневих напружень (криві 3 і 4 на рис. 2) максимальне значення σ_{t3} зменшується (формула (13)), тоді як точка максимуму залишається незмінною. З огляду на вказане, у подальшому ми зосередимся на дослідженні концентрації напруження $\sigma_{t3} = \sigma_{23}$ у вершині еліпса ($\zeta = \zeta_0, \eta = 0$).

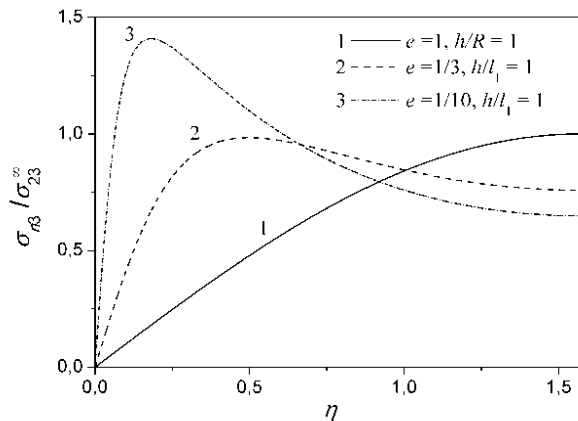


Рис. 1. Розподіл нормальних напружень навколо пори

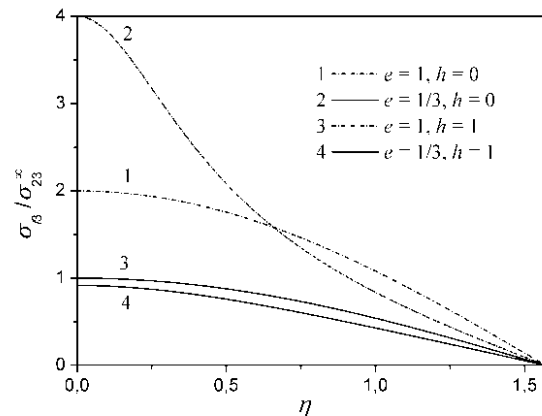


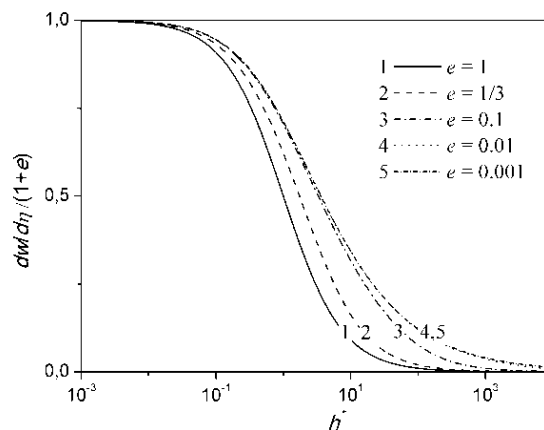
Рис. 2. Розподіл дотичних напружень навколо пори

Таблиця. $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^{\infty}$ як функція e і h^*

h^*	$e = 1.0$	$e = 0.5$	$e = 0.2$	$e = 0.1$	$e = 0.05$	$e = 0.02$
0	2.000	3.000	6.000	11.00	21.00	51.00
0.05	1.905	2.892	5.814	10.67	20.39	49.87
0.1	1.818	2.796	5.652	10.39	19.85	48.83
0.5	1.333	2.264	4.778	8.858	16.98	42.48
1.0	1.000	1.866	4.140	7.756	14.92	37.45

У таблиці подано значення коефіцієнта концентрації $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^{\infty}$ декількох значень параметра форми (співвідношення осей) еліптичної пори e і безрозмірного параметра $h^* = h/R$, де $R = e^2 l_1$ – радіус кривизни у вершині пори. Як видно з таблиці, вплив поверхневих напружень є слабким незалежно від форми пори при $h^* \ll 1$ і стає значним, коли h^* є порядку 1, що дозволяє говорити про критеріальну сутність цього параметра.

На рис. 3. наведено значення похідної $\partial w/\partial \eta$ в точці $z = l_1$ як функції h^* для ряду значень e при $\varepsilon_{23}^{\infty} = 1$. Згідно з (11), при $h = 0$ похідна пропорційна $(1+e)$: для забезпечення можливості порівняння, на графіках відповідно виконано масштабування. Для круглої пори (крива 1) згідно з формулою (13) $\partial w/\partial \eta \sim 1/(1+h^*)$. Для інших значень e (0.5, крива 2; 0.1, крива 3; 0.01, крива 4; 0.001, крива 5) залежності цілком подібні і, за необхідності, із достатньою для інженерних розрахунків точністю можуть бути апроксимовані виразом $1/[1+\alpha(h^*)^{\beta}]$. У контексті нашого дослідження важливим є те, що існує збіжність при $e \rightarrow 0$: так, крива 4 ($e = 0.01$) і крива 5 ($e = 0.001$) на рис. 3 практично збігаються.

Рис. 3. Залежність похідної $\partial w/\partial \eta$ від параметра h^*

З умови (2), переписаної у вигляді

$$\text{Im} \varphi = -h \frac{\sigma_{t3}}{2\mu} = -h g_{22}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (14)$$

і згаданої вище скінченності $\text{Im} \varphi$ на поверхні та в околі еліптичної пори (у т. ч. $e = 0$) скінченність напруження σ_{t3} у вершині тріщини є очевидною. Оскільки при $e \rightarrow 0$ $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$, то для $\partial w/\partial \eta$ при $h^* \rightarrow \infty$ з необхідністю справедлива асимптотика $\partial w/\partial \eta \sim (h^*)^{-1/2} = e \sqrt{l_1/h}$. Дійсно, апроксимація наведеної на рис 3 кривої 5 при великих h^* дає відповідно

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 1.243 (h^*)^{-1/2}, \quad \frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^{\infty}} = 1.243 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-1/2}, \quad (15)$$

що є підтвердженням достовірності чисельних результатів цієї роботи.

На завершення, порівняємо одержані нами дані з наявними в літературі аналогічними результатами. На рис. 4 показано розраховані згідно з (7)–(10) значення концентрації напруження σ_{I3} (світлі кружечки) на тонкій ($e = 0.001$) порі та їх апроксимація (15) (штрих-пунктирна крива). Тут же наведено дані роботи [7] (темні кружечки), де задачу для тріщини з поверхневими напруженнями зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння Коші першого порядку. Спостерігається суттєва розбіжність порівнюваних даних, імовірно причиною якої є зазначена у [8] некоректність використаного в [7] чисельного алгоритму.

У [10] задачу для нанорозмірного включення/пори еліптичної форми розв'язано методом конформного відображення. Наведені в [10] значення концентрації напруження σ_{I3} з $h/l_1 = 0.002$ для нанопори показано на рис. 5 чорними кружками. Тут же подано розраховані за (7)–(10) залежності $\sigma_{I3}(e)$ для $h/l_1 = 0$ (крива 1), 0.002 (крива 2) і 0.004 (крива 3),

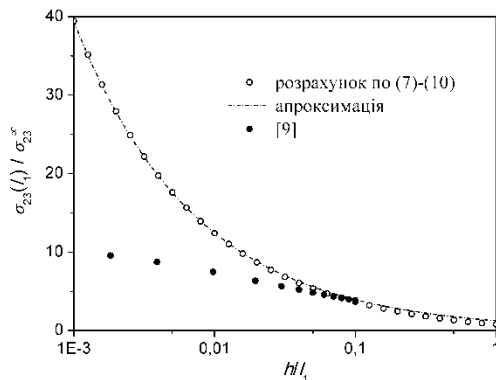


Рис. 4. Концентрація напружень σ_{I3} на тонкій нанопорі

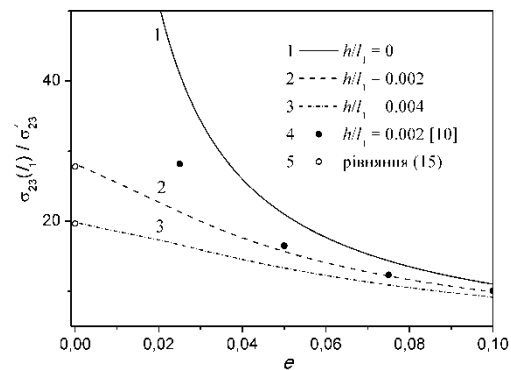


Рис. 5. Залежність концентрації напружень σ_{I3} від форми пори

а також асимптотичні значення згідно з формулою (15) – світлі кружечки. Маємо значне відхилення даних роботи [10] від кривої 2 для $e \leq 0.05$, найімовірнішою причиною якого є те, що ці дані одержано з урахуванням від 50 до 100 гармонік. Така кількість гармонік є явно недостатньою: як показує практика обчислень, для визначення концентрації σ_{I3} на тонкій ($e = 0.001$) порі з точністю 0.1 % необхідно врахувати до $n_{\max} = 5000$ членів ряду (7).

Висновки. Методом мультипольних розвинень із використанням техніки комплексних потенціалів одержано точний аналітичний розв'язок задачі про концентрацію напружень в антиплоско-деформованому пружному тілі з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока. Одержані результати свідчать про суттєву зміну напруженого стану в околі нанорозмірної еліптичної пори порівняно з макрорівнем: зокрема, асимптотичний аналіз показує, що поверхневі напруження усувають типову для макрорівня кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини.

Список використаних джерел

1. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Физматлит, 1962.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
3. Chen T., Dvorak G.J., Yu C.C. Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses / T. Chen, G. J. Dvorak, C. C. Yu // *Acta Mechanica*. – 2007. – 188. – P. 39–54.
4. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: Part I – theoretical framework / H. L. Duan, X. Yi, Z. P. Huang, J. Wang // *Mechanics of Materials*. – 2007. – 39. – P. 81–93.
5. Gurtin M. E. A continuum theory of elastic material surfaces / M. E. Gurtin, A. I. Murdoch // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1975. – 57. – P. 291–323.
6. Gurtin M. E. Surface stress in solids / M. E. Gurtin, A. I. Murdoch // *Int. J. Solids Struct.* – 1978. – 14. – P. 431–440.
7. Kim C. I. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution / C. I. Kim, P. Schiavone, C.-Q. Ru // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 2010. – 77. – 021011–1/7.
8. Kim C. I. A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects / C. I. Kim, P. Schiavone // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2013. – 18(1). – P. 59–66.
9. Kushch V. I. Longitudinal shear of elliptic nanofiber composite: local stress and effective stiffness / V. I. Kushch, V. S. Chernobai, G. S. Mishuris // *International Journal of Engineering Science*. – 2014. – Vol. 84. – P. 79–94.
10. Luo J. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity / J. Luo, X. Wang // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2009. – 28. – P. 926–934.
11. Miller R. E. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements / R. E. Miller, V. B. Shenoy // *Nanotechnology*. – 2000. – 11. – P. 39–147.
12. The effects of surface elasticity and surface tension on the transverse overall elastic behavior of unidirectional nanocomposites / S. G. Mogilevskaia, S. L. Crouch, A. La Grotta, H. K. Stolarski // *Composites Science and Technology*. – 2010. – 70. – P. 427–434.
13. Sharma P. Interfacial elasticity corrections to size-dependent strain-state of embedded quantum dots / P. Sharma, S. Ganti // *Phys. Stat. Sol.* – 2002. – 234. – R10–R12.
14. Wang G. F. Surface effects on the near-tip stresses for mode-I and mode-III cracks / G. F. Wang, X. Q. Feng, T. J. Wang, W. Gao // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – 75. – Art. 011001.
15. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials / J. Wang, Z. Huang, H. Duan et al. // *Acta Mechanica Sinica*. – 2011. – 24. – P. 52–82.

Надійшла до редколегії 02.09.16

В. Чернобай, асп.

Институт сверхтвердых материалов имени В. М. Бакуля НАН Украины, Киев, Украина

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ НАНОПОРЕ ПРИ АНТИПЛОСКОМ СДВИГЕ

Исследована концентрация напряжений в антиплоско-деформированном упругом теле с эллиптической порой, напряжения на поверхности которой соответствуют модели Гуртина – Мердока. Точное аналитическое решение получено методом мультипольных разложений с использованием техники комплексных потенциалов. Приведенные численные результаты анализа задачи демонстрируют существенную зависимость концентрации напряжений от размера и формы поры. Асимптотический анализ напряжений в случае выурожения тонкой поры в трещину доказывает, что поверхностные напряжения устраняют корневую особенность поля напряжений в вершинах трещины.

V. Chernobai, PhD graduate
V. Bakul Institute for superhard materials NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

STRESS CONCENTRATION ON ELLIPTICAL NANO PORE DUE TO ANTIPLANE SHEAR

Stress concentration in antiplane-deformed elastic solid containing an elliptical pore with surface stress corresponding to Gurtin – Murdoch model has been studied. Rigorous analytical solution has been obtained by the multipole expansion method using the technique of complex potentials. Numerical results show significant pore size and shape effect on the stress concentration. Asymptotic stress analysis in the case where pore degenerates into a crack proves that the surface stress eliminates the root singularity of stress field in the crack tip.

УДК 372.851

О. Василевич, канд. філол. наук, старш. викл.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Л. Василевич, канд. техн. наук, доц.
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ,
В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Розглядається питання про педагогічні методи викладання математичних дисциплін представникам соціогуманітарного напрямку в обсязі, що достатній для практичного і теоретичного використання в цих галузях знань математичних методів і понять фахівцями, які не мають глибокої математичної підготовки. Як один із можливих методів обговорюється педагогічна методика, в основі якої лежить використання народних прислів'їв, афоризмів та широковідомих висловлювань. Для низки тем і дисциплін із прикладної математики подано приклади народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловлювань та їх англійські аналоги, а також описано якісні результати внутрішньої оцінки ефективності цієї методики.

Вступ. Математика є потужним інструментом наукового дослідження різноманітних задач і проблем у багатьох галузях природознавства і техніки, біології, медицини, економіки та інших. Останнім часом математичні методи набувають усе більшого використання в різноманітних соціогуманітарних науках, зокрема, таких як соціологія, психологія, лінгвістика тощо. При дослідженні відповідних задач та їх математичних моделей різноманітні математичні методи і моделі активно використовуються як професійними математиками, так і фахівцями з відповідних галузей знань, яким для практичного застосування математичних методів потрібно оволодіти певними математичними поняттями, фактами (твердженнями) і методиками з тих розділів сучасної математики, які нині називають прикладною математикою.

Таких знань з основних понять і методів прикладної математики набувають частіше всього при прослуховуванні курсів лекцій із певних розділів прикладної математики та застосуванні отриманих знань при розв'язуванні конкретних задач. При цьому природно виникає проблема викладання математичного матеріалу в доступній, для майбутніх фахівців зі спеціальностей соціогуманітарного напрямку, формі та на зрозумілому їм рівні знань, у поєднанні з достатньо високим рівнем математичної строгості, тобто достатньо просто та дохідливо і водночас – сприйнятливо для математичної строгості відповідної математичної дисципліни.

У зв'язку з цим можна згадати про "Лезо Окками" [5] – методологічний принцип, суть якого полягає в тому, що "пояснення будь якого явища тим ближче до істинного, чим на меншій кількості гіпотез воно базується і чим більш широке коло явищ базується на цих гіпотезах". А. Ейнштейн переформулював цей принцип таким чином: "Усе слід спрощувати доти, поки це можливо, але не більш того", тобто при цьому потрібно розуміти різницю між "простотою" та "спрощенням". Згаданий вислів отримав назву "Лезо Ейнштейна". Методологічні принципи "Лезо Окками" і "Лезо Ейнштейна" відповідають і методиці Ньютона, згідно з якою потрібно "пояснити якомога більшу кількість фактів якомога меншою кількістю вхідних положень". Як показує практика, студенти краще засвоюють більш прості пояснення та ті пояснення, які використовують меншу кількість аргументів.

Мета цієї статті полягає в розгляді елементів педагогічної методики, що базується на використанні народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловів при викладанні математичних дисциплін. Пропонується при викладанні дисциплін із прикладної математики для досягнення простоти пояснень складних питань використовувати народні прислів'я, афоризми та широковідомі вирази, які відображають суть тих чи інших математичних сутностей (понять, методів, фактів), що викладаються, в дещо іншій, але можливо у простішій і зрозумілішій формі. При цьому також долається ще й такий недолік як "сухість" викладу математичного матеріалу, бо останнє часто породжує пасивність, а згодом і байдужість студентів у їх навчальній діяльності.

Основна частина. Основні елементи педагогічної методики, що базується на використанні народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих виразів видатних особистостей при викладанні математичних дисциплін, можна охарактеризувати так:

а) здійснюється аналіз тих чи інших тем певної навчальної дисципліни, відбираються ті поняття, твердження, методи тощо, які потребують досить складного математичного обґрунтування (пояснення), яке не може бути реалізоване з різних причин у рамках даного курсу (недостатня кількість навчальних годин, недостатня математична підготовка слухачів тощо);

б) проводиться пошук і відбір відповідних народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих виразів, з якими слухачка аудиторія або вже знайома, або може їх легко сприйняти;

в) при викладі відповідного навчального матеріалу використовуються ті чи інші крилаті вирази і дається їм відповідне трактування, що тісно пов'язано з навчальним матеріалом дисципліни;

г) слухачі залучаються до обговорення і трактування запропонованих крилатих виразів та пошуку нових еквівалентних їм висловлювань, які дають відповідне пояснення тих математичних понять, що розглядаються під час навчального процесу.

При цьому потрібно керуватися певними загальними положеннями, а саме: як математика, що дозволяє ефективно розв'язувати багато різноманітних задач із практики, так і народні прислів'я та крилаті вирази, в яких сконцентровано мудрість багатьох поколінь і видатних особистостей, указують на ефективні шляхи розв'язання багатьох практичних проблем у вигляді досить простих і зрозумілих рекомендацій. Так, зокрема, широковідоме прислів'я "Не клади гроші в одну кишеню" є по суті диверсифікацією ефективних способів зниження ризику управлінських рішень, і при цьому досить просто пояснює суть змішаних стратегій у навчальній дисципліні "Теорія ігор" як диверсифікацію дій.

Народним прислів'ям, афоризмам і висловлюванням, що стали широковідомими, властиві як глибокий зміст, так і досконала форма художнього відображення навколишньої дійсності. Такі висловлювання мають свою музично-словесну гармонію, що підсилює їх вплив на слухачів, а студентам і учням дає плідне підґрунтя, яке сприяє розвитку творчого сприйняття навчального матеріалу і формуванню позитивних емоційно-експресивних процесів.

Зауважимо, що в афоризмах, як у влучній і глибоко змістовній думці, повідомлення досягає високої концентрації та граничної лаконічності та загальності. Серед афоризмів можна також знайти багато таких, які досить добре відображають суть різних математичних понять, методів або фактів (тверджень). Як приклад можна розглянути широковідомий вислів (афоризм) "Чиніть з іншими так, як ви хочете, щоб люди чинили з вами" (Євангеліє від Матфея. 7:12), суть якого можна трактувати не лише як оптимальність за Парето безкоаліційних ігор, але й як конкретну методику їх знаходження.

Хоча за допомогою народних прислів'їв, афоризмів і широковедомих виразів не можна довести жодної математичної теореми або ж обґрунтувати ту чи іншу математичну теорію або методику, але такі висловлювання мають глибокий філософський зміст і опис життєвого досвіду. Вони в концентрованому вигляді дають можливість зробити висновки широкого рівня узагальнення, які студенти можуть легко сприйняти. Крім того, використання аналогій між немовби далекими між собою сутностями (поняттями, методами, твердженнями) і об'єктами, образність того чи іншого явища в народних прислів'ях, афоризмах і крилатих висловлюваннях видатних особистостей допомагає слухачам легше запам'ятати як окремі складові, так і той чи інший навчальний матеріал у цілому. Зауважимо також, що багато народних прислів'їв, афоризмів і широковедомих висловлювань допомагають сприймати цілком практичні проблеми з гумором, що, у свою чергу, допомагає підвищити ефективність процесу викладання складних математичних сутностей.

Приклади народних прислів'їв, афоризмів і широковедомих висловлювань та їх англomовних аналогів. Для окремих математичних дисциплін (теорія ігор, теорія прийняття рішень, фінансова математика, теорія нечітких множин) розглянемо приклади народних прислів'їв, афоризмів і широковедомих висловлювань [3] та їх англomовних аналогів [4], які можна ефективно використати при викладанні окремих навчальних тем:

Навчальна дисципліна "Теорія прийняття рішень"

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англomовних аналогів
Функції ризику	Той не козак, хто боїться собак! Ризик – шляхетна справа! Де наше не пропадало! Краще іноді падати, ніж ніколи не літати! Хто не ризикує, той не п'є шампанського! Що там холод, коли козак молод! Сміливість міста бере! Сміливого й куля не бере. Або полковник, або покійник. Хто не ризикує, той ризикує всім (Nothing venture, nothing gained).
Взаємозв'язок між основними категоріями прийняття рішень	Знання – сила! Час – це гроші (Time is money)! Хто не ризикує, той не виграє! Свої борги плати пізніше, а чужі збирай раніше! З усіх утрат втрата часу найтяжча (Григорій Сковорода).
Принцип своєчасності прийняття управлінських рішень	Дорога ложка до обіду (Slow help is no help). Куй залізо, поки гаряче (Strike while the iron is hot). На все свій час (Everything is good in its season). Подолати погані звички можна тільки сьогодні, а не завтра (Конфуцій).
Принципи управління ризиком	Сім разів відміряй, один раз відріж (Score twice before you cut once). Не той великий, хто ніколи не падав, а той великий, хто падав і вставав (Конфуцій). Береженого Бог береже (Although the sun shines, leave not thy cloak at home).

Закінчення

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англomовних аналогів
Прогнозування в задачах прийняття рішень	Нехай та мабуть до добра не доведуть (Авось да небось). Догадка коштує дешево, а неправильна здогадка – дорого. Жодна птиця не злетить занадто високо на власних крилах (No bird soars too high if he soars with his own wings).
Прийняття рішень шляхом голосування. Теорема Ерроу	Один розум добре, а два – краще! Скільки людей, стільки й думок (So many men, so many minds).
Актуальність задач прийняття рішень	Ваше благополуччя залежить від ваших власних рішень (Д. Рокфеллер) Долю потрібно творити, а не проклинати.
Класифікація ризиків і ризики управлінських рішень	Знаєш ризики, краще спиш! Якщо б знав, де впаду, – соломку б підстелив (Danger foreseen is half avoided).
Системний підхід в задачах прийняття рішень. Наявність зв'язків	Клацни кобилу в ніс – вона махне хвостом (Козьма Прутков).

Навчальна дисципліна "Теорія прийняття рішень" продовження

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англomовних аналогів
Вступ. Важливість дисципліни	Що наше життя? – Гра! (Опера "Пікова дама", лібретто М. І. Чайковського).
Принцип максимуму	З усіх бід вибирай найменшу (Better one-eyed than stone-blind).
Теорема про змішані стратегії	Не клади гроші в одну кишеню.
Теорема про активні стратегії	Не мечи бісер перед свинями.
Метод Брауна – Робінсон	Щоб вигравати, потрібно перш за все грати (А. Ейнштейн).
Безкоаліційні ігри. Рішення оптимальні за Парето	Чиніть з іншими так, як ви хочете, щоб люди ставилися до вас (Євангеліє від Матвія. 7:12).
Безкоаліційні ігри. Рішення оптимальні за Нешем	Разом легше й батька бити! Гуртом і батька легше бити, але краще разом робити добру справу!

Навчальна дисципліна "Фінансова математика"

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англomовних аналогів
Час як фактор у фінансових розрахунках	Час – це гроші (Time is money).
Відсотки	Гроші роблять гроші (Money makes money).
Інфляція	Жити на спроможність коштує сьогодні значне дорожче, ніж два роки тому.
Фінансовий аналіз інвестиційних проектів	Коли ви можете оцінити те, про що говорите, і виразити це кількісно, тоді ви щось про це знаєте, але коли ви не можете це оцінити та виразити кількісно, тоді ваші пізнання бідні й незадовільні (Уільям Томпсон).
Наукові результати нобеліантів у розвитку фінансової теорії	Будь сміливим, коли висовуєш гіпотези, та безжальним, коли їх спростовуєш (Імре Лакатос).

Навчальна дисципліна "Теорія нечітких множин"

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англomовних аналогів
Необхідність зміни парадигм. Поняття нечіткості	Нерозумна та людина, яка ніколи не змінює свого погляду (Уінстон Черчіль). Іди туди, не знаю куди! Принеси те, не знаю що! (народна казка). Скоріше "ні", ніж "так", але все можливо (нестандартна логіка).
Лінгвістична змінна	Навряд чи можна вважати, що мозок порівняно із сучасними обчислювальними машинами не має певних переваг. Головна з цих переваг, мабуть, – це здатність мозку оперувати з нечітко окресленими поняттями (Норберт Вінер). Поганий мир краще за гарну сварку (A bad compromise is better than a good lawsuit).

Поняття, метод, твердження, співвідношення, проблема	Приклади прислів'їв, афоризмів, висловлювань та їх англомовних аналогів
Системи підтримки прийняття рішень на основі нечіткої логіки	Якщо тебе запитують, що корисніше сонце або місяць? Відповідай місяць. Бо сонце світить вдень, коли й без того ясно, а місяць – уночі. Але, з іншого боку: сонце краще тим, що світить і гріє; а місяць тільки світить, та й то лише в місячну ніч (Козьма Прутков).
Порівняння нечітких множин, величин	Неможливо досягнути неосяжне (Козьма Прутков).
Фазифікація	Істина – посередині.

Для ілюстрації описаних вище елементів педагогічної методики розглянемо теорему про активні стратегії з теорії ігор [1, 2] і для її пояснення використаємо відомий вислів з Нагорної проповіді: "Не давайте того, що святе, псам і не кидайте перлів ваших перед свинями, щоб вони не потоптали їх ногами своїми і, обернувшись, не розтерзали вас". Суть цього вислову відображає відоме прислів'я "Не мечи бісер перед свинями".

Теорема про активні стратегії стверджує таке: якщо один з учасників матричної гри ($n \times m$) дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то це забезпечує йому максимальний середній виграш (або мінімальний середній програш), що рівний ціні гри, незалежно від того, які дії виконує інший гравець, якщо лише гравець не виходить за межі своїх активних стратегій, тобто користується будь-якою з них у чистому вигляді або змішує їх у будь-яких пропорціях, причому кількість активних стратегій кожного гравця, що входять в їх оптимальні змішані стратегії, не перевищує числа L , де $L = \min(m, n)$. Цю теорему можна легко пояснити на прикладі матричних ігор $2 \times n$ або $m \times 2$, які мають оптимальні рішення і в яких для кожного гравця кількість активних стратегій не перевищує $\min(2, n) = \min(m, 2) = 2$. Коли активні стратегії цієї гри знайдено, то ці матричні ігри перетворюються на матричні ігри 2×2 , методи розв'язування яких уже відомі. Іншими словами, навіть багато складних ігор можна звести до порівняно простих ігор і отримати їх розв'язок без залучення складного математичного апарату.

При розгляді згаданої теореми та тлумачення її змісту з використанням розглянутого вище виразу, із метою підвищення активності слухачів і активізації їх сприйняття навчального матеріалу, доцільно запропонувати слухачській аудиторії відповіді, наприклад, на такі питання:

- як дане прислів'я відображає суть теореми про активні стратегії?
- що в матричній грі, відповідно до даного прислів'я, можна вважати перлами?
- хто в даній матричній грі, відповідно до даного прислів'я, може вважатися свинею?

Можна також запропонувати слухачам навести приклад можливого застосування теореми про активні стратегії, що дасть можливість їм краще зрозуміти важливість і зміст теореми про активні стратегії.

Загальна схема методики викладання з використанням народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловлювань. Для згаданої вище методики можна виділити такі етапи:

а) спочатку розглядається матеріал певної математичної теми і даються приклади крилатих виразів, які передають суть навчального матеріалу. Потім лектор або ж студенти пояснюють, як відповідне народне прислів'я, афоризм чи крилатий вираз розкривають суть відповідного поняття, методу чи твердження;

б) студентам пропонуються індивідуальні завдання з пошуку і вибору відповідних народних прислів'їв або афоризмів, які пояснюють суть певних понять і тверджень, що розглянуті на занятті;

в) можна також запропонувати студентам написати коротке есе про автора відповідного афоризму та ознайомитися з його творчим доробком (біографією). У подальшому за такими есе можна заслухати доповідь із презентацією перед навчальною групою (курсом). При цьому самі студенти стають активними суб'єктами навчального процесу навчання, а не є лише його пасивними об'єктами. Їм надається можливість поділитися своїми новими знаннями, які вони отримали в результаті власного дослідження. У підсумку така діяльність у більшості випадків приводить до запам'ятовування на тривалий час матеріалу, що викладався;

г) зважаючи на складність сприйняття багатьох математичних сутностей непрофесійними математиками та використання згаданої методики, викладач формує у студентів парадигму: "Кожна проблема має рішення". Для закріплення у свідомості студентів тези про наявність альтернативних рішень, необхідно заохочувати як пошук оригінальних рішень і уточнюючих запитань від студентів, так і помилкові відповіді, бо це краще ніж пасивне мовчання. Таке заохочування можна здійснювати, використовуючи, наприклад, інструментарій кредитно-модульної системи;

д) при підготовці навчально-методичних посібників і розробок як епіграфи можна також використовувати народні прислів'я, афоризми та крилаті вирази видатних особистостей;

е) зазначимо, що при викладанні навчального матеріалу для іноземців також доцільно використовувати крилаті вирази на тих мовах, на яких ведеться виклад навчального матеріалу.

Результати внутрішньої оцінки ефективності вказаної методики показують, що при використанні цієї методики збільшується ефективність засвоєння навчального матеріалу із прикладної математики за рахунок підвищення мотивації студентів вивчати відповідні дисципліни та нові наукові теорії. Цьому також сприяють їх довіра до народної мудрості, авторитет авторів афоризмів, художня форма, простота і лаконічність прислів'їв, афоризмів та крилатих виразів.

Відбувається також зсув деяких парадигм студентів, що стосуються відношення до науки і наукової діяльності. На наш погляд, ця методика також сприяє вирішенню проблеми гуманітарного та психологічного аспектів викладання дисциплін математичного профілю: хоча майбутнім фахівцям соціогуманітарного профілю математику вчити набагато важче ніж дисципліни гуманітарного профілю, а навчання – це не лише приємна справа, а й важка робота, але все ж таки вивчення математики можна зробити більш простим та цікавим, і таким, що буде приносити студентам задоволення. Указану методику можна також застосовувати при викладанні інших навчальних дисциплін.

Висновки. Розглянуто питання про складові педагогічних методик викладання математичних дисциплін представникам соціогуманітарного напряму в обсязі, що достатній для практичного і теоретичного використання в цих галузях знань, математичних методів і понять фахівцями, які не мають глибокої математичної підготовки. Як один із можливих методичних засобів підвищення ефективності сприйняття і засвоєння при такому викладанні математичних понять і методів розглянуто педагогічну методику, в якій використано народні прислів'я, афоризми і широковідомі висловлювання. Для

деяких тем і дисциплін із прикладної математики подано приклади народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловлювань та їх англійські аналоги, а також якісні результати внутрішньої оцінки ефективності вказаної методики.

Список використаних джерел

1. *Вентцель Е.С.* Элементы теории игр / Е. С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 1961. – 68 с.
2. *Нейман Дж.* Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М. : Наука, 1970. – 708 с.
3. Прислів'я, приказки, афоризми. – К. : Верес, 2011. – 176 с.
4. *Райдайт Р.* Толковый словарь английских пословиц / Р. Райдайт, К. Уиттинг. – СПб. : Лань, 1997. – 250 с.
5. *Sober E.* Ockam's Razors / E. Sober. – Cambridge : Cambridge University Press, 2015. – 314 p.

Надійшла до редколегії 15.05.17

Е. Василевич, канд. філол. наук, старш. препод.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
Л. Василевич, канд. техн. наук, доц.
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна,
В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Рассматривается вопрос о педагогических методиках преподавания математических дисциплин представителям социо-гуманитарного направления в объеме, достаточном для практического и теоретического использования в этих областях знаний математических методов и понятий специалистами, которые не имеют глубокой математической подготовки. Как одно из возможных методических средств повышения эффективности восприятия и усвоения при таком преподавании математических понятий и методов рассматривается педагогическая методика, в основе которой лежит использование народных пословиц, афоризмов и широкоизвестных высказываний. Представлены примеры народных пословиц, афоризмов и широкоизвестных высказываний и их англоязычные аналоги, которые могут использоваться при изучении отдельных тем и дисциплин прикладной математики, а также качественные результаты внутренней оценки эффективности данной методики.

O.Vasilevich, PhD, ass. prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
L.Vasilevich, PhD, ass. prof.
Borys Grinchenko University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
V.Samoilenko, Full Doctor, prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

INCREASING EFFECTIVENESS OF TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES

The issue of pedagogical methods of teaching mathematical disciplines to representatives of the socio-humanitarian direction is considered in the volume sufficient for practical and theoretical use in these fields of knowledge of mathematical methods and concepts by specialists who do not have a deep mathematical preparation. As one of the possible methodological tools for increasing the effectiveness of perception and assimilation in such teaching of mathematical concepts and methods, a pedagogical technique based on the use of folk proverbs, aphorisms and well-known sentences is considered. Examples of folk proverbs, aphorisms and well-known sentences and their English-speaking counterparts are presented, which can be used in studying separate topics and disciplines in applied mathematics, as well as qualitative results of an internal evaluation of the effectiveness of this technique.

ЮРІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ МИТРОПОЛЬСЬКИЙ – 100 РОКІВ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ



3 січня 2017 р. виповнилося 100 років від дня народження всесвітньовідомого українського вченого, дійсного члена Національної академії наук України і Академії наук Радянського Союзу (нині Російська академія наук), іноземного члена Болонської академії наук, Героя України, Героя Соціалістичної Праці, заслуженого діяча науки УРСР, почесного доктора Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктора технічних наук, професора Юрія Олексійовича Митропольського, науково-педагогічна діяльність якого впродовж 40 років була тісно пов'язана з механіко-математичним факультетом Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Юрій Олексійович відіграв визначальну роль у розвитку всієї вітчизняної математики другої половини ХХ ст.

Юрій Олексійович народився 3 січня 1917 р. у родовому маєтку Чарнишів (тепер зруйнованому) – неподалік від селища Шишаки на Полтавщині. Його мати Віра Василівна – із відомого в Україні козацького роду, мала неабиякий художній талант (популярні нині художники Олекса та Володимир Сай доводяться їй правнуками). Батько, Олексій Савич, закінчив у 1906 р. юридичний факультет Петербурзького університету і мав диплом юриста, зробив стрімку військову кар'єру. З 1914 р. він – кадровий військовий, брав участь у Першій світовій війні і закінчив Першу світову полковником. Згодом, після створення РСЧА, служив у її лавах до 1926 р.

Після революції, у 1918 р., сім'я Митропольських перебралась до Києва. Тут у 1932 р. у консервному цеху (ще до завершення "семирічкі") і почалася трудова вахта малого Юрка.

У 1936 р. він вступив до 9-го класу Київської середньої школи № 70, після закінчення якої з відмінними оцінками у 1938 р. став студентом фізико-математичного факультету Київського державного університету, де в той час викладали відомі математики Б. Я. Букреев, Г. В. Пфейффер, В. Є. Дяченко та починали свою педагогічну діяльність видатні вчені М. М. Боголюбов і М. О. Лаврентьев. Під час навчання в університеті серйозно ставився до військових занять: ще у школі отримав значок "Ворошиловський стрелок" 2-го ступеня, а в університеті закінчив снайперські курси. Водночас Митропольський Ю. О. працював учителем математики в одній із середніх шкіл Києва.

Навчання в університеті перервала війна: 7 липня 1941 р. студента Митропольського було мобілізовано до лав РСЧА. У листопаді 1941 р., відповідно до наказу Міністра оборони СРСР, Юрій Олексійович отримав відпустку для завершення навчання в університеті і був зарахований на п'ятий курс Казахського університету, де він прослухав спецкурси, які читали відомі математики К. П. Персидський і С. І. Міхлін. Після завершення навчання в університеті у березні 1942 р. Юрія Олексійовича направили для навчання в Рязанське артилерійське училище у м. Талгар, після закінчення якого у квітні 1943 р. йому присвоїли звання лейтенанта і призначили командиром взводу артилерійської розвідки 800-го окремого розвідувального артилерійського дивізіону. Згодом Митропольського Ю. О. призначили начальником пункту обробки даних, що надходять від спостерігачів зі стереотрубами, та встановлення розташування ворожих цілей. На цій посаді, а потім на посаді ад'ютанта командира 137-ї артилерійської бригади 1-ї Ударної Армії Юрій Олексійович брав участь у визволенні міст Псков, Валга, Рига, у розгромі Курляндського угруповання. За бойові заслуги Митропольський Ю. О. нагороджений двома орденами Червоної Зірки, орденом Вітчизняної війни II ступеня і бойовими медалями.

Після демобілізації з лав Червоної армії в 1946 р., Юрій Олексійович вирішив вступити до аспірантури – таку раду йому дали ще під час навчання в Казахському університеті авторитетні професори. Він прийшов до Київського університету, щоб зустрітися з академіком Миколою Миколайовичем Боголюбовим, який у той час був деканом механіко-математичного факультету. Про цю доленосу у своєму житті зустріч Митропольський Ю. О. згадує так: "Зустрівся я з Миколою Миколайовичем у приміщенні школи на вул. Леніна (нині вул. Богдана Хмельницького), де у другу зміну читалися лекції для студентів КДУ. ... Микола Миколайович проходжувався коридором протягом години і розмовляв зі мною. Докладно розпитав про родину, про мої інтереси, які лекції я слухав в університеті Алма-Ати. Я сказав йому, що слухав курс теорії стійкості, який читав К. П. Персидський, і курс функціонального аналізу, який читав С. Г. Міхлін, та що С. Г. Міхлін і К. П. Персидський пропонували мені вступити до аспірантури". Підсумовуючи нашу розмову, Микола Миколайович сказав мені: "Юрію Олексійовичу, я згоден взяти Вас в аспірантуру, але мені здається, що для Вас буде краще поступити на роботу на посаду молодшого наукового співробітника в мій відділ в Інституті будівельної механіки АН УРСР. Для Вас це вигідно в усіх відношеннях – зарплата вища за аспірантську стипендію, а дисертацію Ви зможете написати і подати раніше".

Так розпочалась довготривала плідна наукова співдружність Юрія Олексійовича і Миколи Миколайовича. Роки навчання та наукової праці під керівництвом академіка М. М. Боголюбова – одного з фундаторів всесвітньовідомої Київської школи з нелінійної механіки, стали для Митропольського Ю. О. великою школою наукової творчості і життя.

У 1946 р. Юрія Олексійовича зарахували на посаду молодшого наукового співробітника відділу нелінійної механіки Інституту будівельної механіки АН УРСР (нині Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України), де він працював до 1950 р. Тут за допомогою асимптотичних методів Крилова – Боголюбова він почав досліджувати резонансні явища в нелінійних коливних системах із повільно змінними параметрами та за короткий час підготував і захистив кандидатську дисертацію на тему "Дослідження резонансних явищ в нелінійних системах зі змінними частотами" (1948 р.).

У 1951 р. Митропольський Ю. О. успішно захистив докторську дисертацію "Повільні процеси в нелінійних коливних системах із багатьма ступенями вільності" і був відряджений до Москви, де він протягом року працював у Лабораторії вимірювальних приладів АН СРСР (нині Національний дослідницький центр "Курчатовський інститут" РАН) у відділі М. М. Боголюбова.

З 1950 р. його подальша наукова діяльність нерозривно пов'язана з Інститутом математики НАН України, де він працював на посадах старшого наукового співробітника (1950–1953), завідувача відділу математичної фізики та теорії нелінійних коливань (1953–2001), заступника директора з наукової роботи (1956–1958), директора Інституту (1958–1988), почесного директора (1988–2008). Митропольський Ю. О. був першим директором і впродовж 1992–2008 рр. очолював Міжнародний математичний центр НАН України.

За час своєї більш як 60-річної наукової діяльності Митропольський Ю. О. отримав фундаментальні результати з теорії асимптотичних методів нелінійної механіки, якісних методів теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань. Характерною рисою наукової творчості Юрія Олексійовича був глибокий теоретичний аналіз, направлений на впровадження теоретичних результатів для розв'язання актуальних задач практики. Тим, хто обрав для себе шлях у науку, він говорив: "У науці немає теорії заради самої лише теорії. Пізнання природи має за мету підкорення її сил людині". Він був переконаний, що між фундаментальною математикою і прикладною меж немає і не повинно бути. Інакше це не математика, а гра у формули, позбавлена змісту. Математика єдина, і починається вона часто з математичного опису важливих задач науки і практики.

Уся його наукова діяльність підтвердила цей постулат. Результати Митропольського Ю. О. знайшли широке застосування при розв'язанні багатьох актуальних проблем і задач сучасної фізики, механіки, гідродинаміки, космічної навігації, ядерної фізики, приладобудування та ін. Загальновідомими стали "асимптотичний метод Крилова – Боголюбова – Митропольського" та "метод інтегральних многовидів Боголюбова – Митропольського".

Наукові результати Ю. О. Митропольського можна віднести до таких основних наукових напрямків:

- створення і математично строго обґрунтування алгоритмів побудови асимптотичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нестационарні коливні процеси;
- розвиток методу дослідження одночастотних процесів у коливних системах;
- дослідження систем нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливні процеси в гіроскопічних та сильно нелінійних системах;
- розвиток теорії інтегральних многовидів у нелінійній механіці;
- розвиток методу прискореної збіжності;
- розвиток теорії звідності диференціальних рівнянь із квазіперіодичними коефіцієнтами;
- розробка методу усереднення для рівнянь із повільно змінюваними параметрами, рівнянь із недиференційованими і розривними параметрами та ін.

Юрій Олексійович опублікував більше 750 наукових праць, серед яких більше 30 монографій. Одним із найсуттєвіших внесків у розвиток теорії нелінійних коливань є спільна з М. М. Боголюбовим монографія Митропольського Ю. О. "Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань" (Москва, 1965), яка стала вагомим підсумком довготривалого і плідного співробітництва авторів. Ця фундаментальна праця видавалася чотири рази значними тиражами і згодом була перевидана англійською, французькою, німецькою, японською і китайською мовами.

За видатний внесок у розвиток нелінійної механіки і теорії нелінійних диференціальних рівнянь та їх застосувань Митропольського Ю. О. обрано: у 1958 р. – членом-кореспондентом АН УРСР, у 1961 р. – дійсним членом АН УРСР, у 1984 р. – дійсним членом АН СРСР (нині Російська академія наук).

Педагогічна діяльність Юрія Олексійовича у вищій школі розпочалася у 1949 р. на механіко-математичному факультеті Київського університету і тривала до 1989 р. За цей час ним для студентів різних факультетів Київського університету (механіко-математичного, фізичного, геологічного) прочитано низку загальних і спеціальних курсів із вищої математики, теорії коливань, нелінійної механіки, теорії коливань систем із розподіленими параметрами, механіки тіл змінної маси, рівнянь математичної фізики, теорії спеціальних функцій, теорії поля, теорії інтегральних многовидів, теорії стійкості за Ляпуновим та ін. У цих курсах лекцій знайшла своє відображення висока педагогічна майстерність вченого-педагога, його лекції завжди були насичені новітніми ідеями і містили нові математичні результати.

Упродовж 1951–1953 рр. Митропольський Ю. О. завідував кафедрою інтегральних та диференціальних рівнянь.

Його наукові результати, монографії, лекції та наукові доповіді є яскравим свідченням широти знань Юрія Олексійовича з математики і механіки, глибини його досліджень.

У 1954 р. Митропольському Ю. О. присвоєно звання професора зі спеціальності "математична фізика", а 1994 р. Юрій Олексійович став соросівським професором.

Визнанням заслуг перед альма-матер стало присвоєння в 1999 р. Митропольському Ю. О. звання почесного доктора Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Виявляючи велику турботу про підготовку молоді змін математики, Юрій Олексійович протягом усієї своєї наукової і науково-педагогічної діяльності в Інституті математики і в Київському університеті приділяв значну увагу підготовці наукових кадрів вищої кваліфікації (кандидатів і докторів наук). Широка ерудиція, вміння пов'язати важливу практичну проблему із задачами математики і механіки, знайти її ефективне розв'язання приваблювали до нього обдаровану молодь, яка шукала застосування своїх творчих сил.

Митропольський Ю. О. підготував 100 кандидатів і 25 докторів фізико-математичних наук (у тому числі 12 кандидатів наук для В'єтнаму, Узбекистану, Грузії, Болгарії та Югославії і 7 докторів і професорів для В'єтнаму, Узбекистану та Югославії). Серед його вихованців – дійсні члени НАН України Самойленко А. М., Шарковський О. М., член-кореспондент НАН України Бойчук О. А., професори Гробов В. А., Рубанік В. П., Сенік П. М., Шестопа А. Ф., Кухта К. Я., Фодчук В. І., Худайбердієв Р., Мартинюк Д. І., Стефанович-Хедрик К. (Соціалістична Федеративна Республіка Югославія), Філлер З. Ю., Ликова О. Б., Нгуен Донг Ань (Соціалістична Республіка В'єтнам), Хома Г. П., Лопатін О. К., Стрижак Т. Г., Ткач Б. П., Нгуен Тієн Кхієм (Соціалістична Республіка В'єтнам), Носіров Ф. (Республіка Узбекистан), Березовський А. А., Самойленко В. Г., Курбанов І. (Республіка Узбекистан), Файзібаєв Е. (Республіка Узбекистан), Ле Суан Кан (Соціалістична Республіка В'єтнам). У подальшому, після 2008 р., успішно захистили докторські дисертації ще 5 учнів Юрія Олексійовича, серед яких: Белан Є. П., Швець О. Ю., Трофимчук С. І., Грод І. М., Журавльов В. П.

Юрію Олексійовичу належить ідея проведення літніх математичних наукових шкіл із метою ширшого залучення молоді до активного наукового пошуку та підвищення її ерудиції. З його ініціативи в 1963 р. Інститутом математики АН УРСР спільно з Математичним інститутом імені В. А. Стеклова АН СРСР проведено першу в Радянському Союзі літню математичну школу в Каневі.

Працюючи директором Інституту математики АН УРСР, Митропольський Ю. О. докладав багато зусиль для його розвитку. Завдяки діяльності Юрія Олексійовича в Інституті створено багато нових наукових відділів і лабораторій та підтримано розвиток нових напрямків у математиці. Діяльність Митропольського Ю. О. на посаді директора Інституту сприяла тому, що Інститут математики НАН України став провідним математичним центром не лише в Україні, а й на теренах колишнього Радянського Союзу.

З 1961 до 1963 р. Митропольський Ю. О. був головою бюро Відділення фізико-математичних наук АН УРСР, а з 1963 р. до 1993 р. – академіком-секретарем Відділення математики, механіки і кібернетики АН УРСР (з 1983 р. – Відділення математики НАН України), членом Президії АН УРСР, з 1993 р. – радником Президії НАН України. На цих посадах він віддавав багато сил науково-організаційній роботі, спрямованій на розвиток математики, механіки і кібернетики в Україні. Юрій Олексійович брав безпосередню участь у створенні Обчислювального центру АН УРСР, реорганізованого згодом в Інститут кібернетики НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України, Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Інститут геотехнічної механіки НАН України і НКА України, математичного відділення ФТІНТ НАН України та Міжнародного математичного центру НАН України.

Багато енергії Юрій Олексійович віддавав редакційно-видавничій діяльності. Він був одним з ініціаторів і відповідальним редактором видання у Києві повного зібрання праць академіка М. М. Крилова, вибраних праць у трьох томах академіка М. М. Боголюбова; з його ініціативи і за його редакції протягом 25 років (1961–1986) в Інституті математики АН УРСР видавалися збірки праць наукових семінарів. За редакцією Юрія Олексійовича систематично виходили у світ збірки праць математичних конференцій, у тому числі міжнародних, які проводив Інститут математики АН УРСР з 1961 по 1986 рік. Починаючи з 1952 р., він був членом редколегії, з 1958 р. – заступником відповідального редактора, а впродовж 1967–2008 рр. – головним редактором "Українського математичного журналу", який під його керівництвом став одним із найавторитетніших наукових видань із математики і його впродовж багатьох років перевидають англійською мовою. Митропольський Ю. О. був одним із засновників і головних редакторів журналу "Нелінійні коливання", який сьогодні перевидається англійською мовою за кордоном, членом редколегій вітчизняних журналів "Доповіді НАН України" (з 1961), "Вісник НАН України" (з 1971) та зарубіжних журналів "Nonlinear Analysis", "Nonlinear Dynamics", "International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation", "International Journal of Nonlinear Mechanics" та ін.

Наукова, науково-організаційна та педагогічна діяльність Митропольського Ю. О. високо оцінена Батьківщиною: у 2007 р. йому присвоєно звання Герой України із врученням ордена Держави, у 1986 р. – звання Героя Соціалістичної Праці із врученням ордена Леніна і золотої зірки "Серп і молот". За видатні заслуги в галузі теорії нелінійних коливань і нелінійних диференціальних рівнянь йому присуджено Ленінську премію (1965), премії НАН України імені М. М. Крилова (1969), імені М. М. Боголюбова (1993), імені М. О. Лаврентьєва (1999), срібну медаль імені М. В. Остроградського (2001), Золоту медаль імені О. М. Ляпунова АН СРСР (1986), Золоту медаль імені В. І. Вернадського НАН України (2006). Юрій Олексійович удостоєний звання "Заслужений діяч науки УРСР" (1967), звання лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки (1980, 1996), нагороджений орденом Жовтневої Революції (1971), орденом "Трудового Червоного Прапора" (1977), орденами князя Ярослава Мудрого V ступеня (1996), Богдана Хмельницького (2001), Ярослава Мудрого IV ступеня (2002), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради УРСР (1984), відзнакою НАН України "За наукові досягнення" (2006), медаллю "Ветеран праці" (1986) та багатьма іншими медалями. Він також нагороджений Почесною Грамотою "За особливі заслуги перед Київським національним університетом імені Тараса Шевченка" (2000) та удостоєний звання "Почесний Соросівський професор" (1995). Юрія Олексійовича обрано дійсним членом Наукового товариства імені Т. Г. Шевченка у Львові (1992) і дійсним членом Українського товариства "Інтелект нації" (1999), упродовж багатьох років він входив до складу наглядової ради Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ю. О. Митропольський користувався великим авторитетом і повагою як в Україні, так і за її межами. Його обрано іноземним членом однієї з найстаріших академій Європи – Болонської академії наук, іноземними членами якої свого часу були такі видатні вчені, як М. В. Ломоносов, П. Л. Чебишов, Д. І. Менделєєв, І. І. Мечников, Ф. Клейн, А. Ейнштейн, Ч. Дарвін, Н. Бор, М. Кюрі, Д. Гільберт, А. Пуанкаре, С. Лефшець. Юрій Олексійович був також відзначений іноземними нагородами: срібною медаллю Чехословацької академії наук "За заслуги перед наукою і людством" (1977), орденом Дружби народів (1984) і "Медаллю Дружби" (2000) В'єтнамської Соціалістичної Республіки.

Земний шлях Юрія Олексійовича завершився 14 червня 2008 р. На вшанування пам'яті Митропольського Ю. О. 18 грудня 2012 р. на будинку, де розташовано Інститут математики НАН України, відкрито меморіальну дошку, у 2008 р. Міжнародному математичному центру НАН України присвоєно ім'я Митропольського Ю. О. Згідно з Постановою Верховної Ради України № 1807-VIII від 22 грудня 2016 р., 100-річчя з дня народження Юрія Митропольського (1917–2008) віднесено до пам'ятних дат і ювілеїв у 2017 р. У червні 2017 р. проведено Міжнародну конференцію молодих математиків, яку присвячено 100-річчю від дня народження академіка НАН України Юрія Олексійовича Митропольського.

А. Самойленко, М. Перестюк, М. Городній, О. Лимарченко,
І. Парасюк, В. Самойленко, О. Станжицький

МИРОСЛАВ ЛЬВОВИЧ ГОРБАЧУК (08.03.1938 – 08.01.2017)

8 січня 2017 р. після тривалої хвороби відійшов у вічність видатний український математик, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Мирослав Львович Горбачук.

Народився Мирослав Львович 8 березня 1938 р. на Лемківщині, у селі Риботичі Перемишльського повіту (нині це територія Польщі) у селянській родині, яка мала семеро дітей. У 1945 р. під час операції "Вісла" сім'я змушена була переселитися в село П'яновичі Самбірського району Львівської області, де знайшла притулок у хаті місцевого священика.

У житті родини Горбачуків почесне місце займала музика: батько самотужки навчився грати на скрипці й разом з іншими музикантами грав на сільських святах, мати та й сам Мирослав гарно співали. Після закінчення П'яновицької семирічки під впливом батька він навіть зробив спробу вступити до Дрогобицького музичного училища, але не впорався з диктантом з російської мови. Продовжував навчання у середній школі сусіднього з П'яновичами села Бісковичі, куди ходив пішки, щодня долаючи 15 кілометрів.

У 1956 р. Мирослав Львович із медаллю закінчив школу і того ж року вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. Курсові і дипломну роботу виконував під керівництвом професора В. Е. Лянце. За його рекомендацією М. Л. Горбачук

у 1961 р. вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, у відділ математичного аналізу. Науковим керівником був Ю. М. Березанський, під впливом якого сформувалися наукові інтереси Мирослава Львовича. Велику роль у становленні молодого математика відіграли і роботи М. Г. Крейна, з якими він познайомився ще студентом, а також особисте знайомство з Марком Григоровичем, яке Мирослав Львович високо цінував. Воно відбулось під час навчання в аспірантурі, коли трапилась нагода зробити кілька доповідей на Одеському міському семінарі, яким керував М. Г. Крейн.

У 1965 р. М. Л. Горбачук захистив кандидатську дисертацію "Додатно визначені оператор-функції", а в 1973 р. докторську дисертацію "Деякі питання спектральної теорії диференціальних рівнянь у просторах вектор-функцій". Після закінчення аспірантури і до кінця життя він працював в Інституті математики НАН України, де обіймав посади старшого інженера, молодшого і старшого наукового співробітника у відділі математичного аналізу, завідував лабораторією диференціальних рівнянь із частинними похідними при цьому відділі, очолював відділ диференціальних рівнянь із частинними похідними, був головним науковим співробітником. У 2000 р. Мирослава Львовича обрано членом-кореспондентом НАН України.

Праці М. Л. Горбачука присвячено головним чином теорії операторів та різноманітним її застосуванням. У спектральній теорії операторів йому вдалося розв'язати давню проблему описання мовою граничних значень деяких класів розширень мінімального оператора, породженого диференціальним виразом у гільбертовому просторі, і дослідити структуру їх спектра. М. Л. Горбачук розробив загальний операторний підхід до теорії граничних значень розв'язків диференціальних рівнянь, що дозволило не тільки з єдиної точки зору поглянути на низку класичних результатів, зокрема, для гармонічних функцій, а й значно підсилити та уточнити їх. У теорії апроксимації він розвинув операторний підхід до отримання прямих та обернених теорем теорії наближень, завдяки якому вдалося одержати не лише ряд відомих результатів, а й цілу низку нових, а також дати точні апіорні оцінки похибки наближення розв'язків операторних рівнянь варіаційними методами. У теорії диференціальних рівнянь у банаховому просторі ним встановлено критерії розв'язності задачі Коші в різних класах аналітичних функцій та ознаки стійкості та стабілізації розв'язків на нескінченності. У галузі узагальнених функцій вчений розвинув теорію, в основу якої замість оператора диференціювання покладено довільний замкнений оператор у банаховому просторі. Мирослав Львович отримав й інші цінні результати в області функціонального та гармонічного аналізу, теорії операторів та теорії функцій, гідромеханіці. Його перу належать також роботи з історії математики. М. Л. Горбачук – автор трьох монографій (дві з яких англійською мовою) та близько 200 статей. Загалом математична творчість ученого вирізняється широтою тематики і глибиною отриманих результатів, які високо оцінено як вітчизняними, так й іноземними фахівцями.

М. Л. Горбачук – лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, премій НАН України імені М. М. Крилова та М. Г. Крейна.

Активну наукову роботу Мирослав Львович успішно поєднував з плідною педагогічною діяльністю. З 1965 до 2000 р. він працював за сумісництвом на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, неодноразово читав на найвищому науково-методичному рівні нормативний курс функціонального аналізу та низку спецкурсів, керував дипломниками та аспірантами. У 1982 р. отримав учене звання професора. У 1997–2011 рр. викладав у Національному технічному університеті України "КПІ". Читав також лекції для аспірантів в Інституті математики НАНУ. Натхненні лекції професора Горбачука завжди з теплою і вдячністю згадуватимуть усі, кому їх пощастило слухати. Підготував 7 докторів та 29 кандидатів наук, які працюють як в Україні, так і за кордоном.

М. Л. Горбачук проводив також велику науково-організаційну роботу. Він був президентом Київського (1993–2006 рр.) та Українського (2005–2012 рр.) математичних товариств, членом редколегій "Українського математичного журналу", "Українського математичного вісника", "Сучасної української енциклопедії", журналів "Methods of Functional Analysis and Topology" та "У світі математики", учасником декількох Міжнародних конгресів математиків та членом

оргокомітетів представницьких міжнародних наукових конференцій. Разом з Ю. М. Березанським та Ю. С. Самойленком керував Київським міським семінаром із функціонального аналізу, котрий займає визначне місце в математичному житті не лише Києва.

М. Л. Горбачук ніколи не був байдужий до долі України, завжди вболівав за її державність, мову, культуру, свої лекції читав виключно українською мовою. Був активним членом Народного Руху України та Товариства української мови імені Тараса Шевченка. Своєю патріотичною позицією Мирослав Львович істотно вплинув на формування світогляду людей, які його оточували.

Колеги і друзі знали й цінували Мирослава Львовича як видатного вченого, якому було притаманне романтичне ставлення до математики та глибокі знання й щирий інтерес до її історії, палкого патріота України, знавця й полум'яного пропагандиста української мови, непересічну та різнобічно освічену особистість, чудового сім'янина, чуйну та доброзичливу людину, спілкування з якою приносило і користь, і задоволення.

Світла пам'ять про Мирослава Львовича Горбачука назавжди залишиться в серцях його численних учнів, колег і друзів.

**А. Самойленко, М. Городній, М. Перестюк, О. Лимарченко,
В. Самойленко, І. Шевчук, О. Константинов, О. Нестеренко**

ДМИТРО ІВАНОВИЧ МАРТИНЮК (11.03.1942 – 26.11.1996)



11 березня 2017 р. виповнилося 75 років від дня народження відомого українського математика, доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії УРСР в галузі науки і техніки Мартинюка Дмитра Івановича, який майже 30 років працював на механіко-математичному факультеті.

Мартинюк Д. І. – відомий фахівець із теорії диференціальних рівнянь із відхиляючим аргументом, яскравий представник наукової школи Крилова – Боголюбова – Митропольського. Своїми науковими працями він зробив значний внесок у розвиток і формування в Україні теорії диференціально-різницевого рівнянь, різницевого рівнянь і теорії нелінійних коливань. Результати його праць мають як вагоме теоретичне значення, так і широке практичне застосування, зокрема, у теорії автоматизованого керування і теорії коливань механічних систем.

Мартинюк Д. І. народився 11 березня 1942 р. в селі Іванківці Дунаєвського району Хмельницької області в сім'ї колгоспників: його батько – Іван Дорофійович працював бухгалтером, а мама – Євдокія Филімонівна в тому ж колгоспі – на різних польових роботах, якій у тяжкі часи німецької окупації і повоєнні роки довелося самій виховувати і Дмитра, і його старшого брата Василя (народився у 1934 р.), бо їх батько загинув на фронті у 1942 р.

Середню освіту Дмитро Іванович здобував в Іванківській семирічній школі і Горичнянській середній школі. У 1957 р. вступив до Кам'янець-Подільського державного педагогічного інституту. Ще у студентські роки Мартинюк Д. І., як учасник наукового гуртка, виявив нахил до дослідницької роботи. Після закінчення інституту Дмитра Івановича зарахували на посаду асистента кафедри вищої математики фізико-математичного факультету рідного педінституту. Працюючи викладачем він брав активну участь у громадському житті: був членом профбюро і входив до художньої ради фізико-математичного факультету та редколегії інститутської багатотиражки.

У 1965 р. Мартинюк Д. І. вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, де під керівництвом академіка Ю. О. Митропольського почав займатися дослідженням диференціальних рівнянь із запізненням.

У подальшому, із 1 вересня 1967 р. і до останнього дня його життя – 27 жовтня 1996 р., науково-педагогічна діяльність Дмитра Івановича була пов'язана з механіко-математичним факультетом Київського державного університету імені Тараса Шевченка, де він працював на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь (асистент (1967–1968), старший викладач (1968–1969), доцент (1969–1983), професор (1983–1988, 1995–1996) і на кафедрі математичної фізики (завідувач кафедри (1988–1995)).

У 1967 р. Мартинюк Д. І. захистив кандидатську дисертацію на тему "Періодичні розв'язки нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізнілим аргументом", а в 1982 р. – докторську дисертацію на тему "Періодичні та квазіперіодичні розв'язки диференціально-різницевого і різницевого рівнянь".

На кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Дмитро Іванович читав курси лекцій із теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії інтегральних рівнянь, низку спеціальних курсів лекцій із різних розділів теорії звичайних диференціальних, диференціально-різницевого і різницевого рівнянь ("Аналітична теорія диференціальних рівнянь", "Якісна теорія диференціально-різницевого рівнянь", "Якісна теорія різницевого рівнянь", "Періодичні розв'язки динамічних систем"), а на кафедрі математичної фізики – курси лекцій "Рівняння математичної фізики", "Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу" та інші. Педагогічну діяльність він успішно поєднував із роботою з підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації: під його керівництвом захищено 9 кандидатських дисертацій. Серед його учнів К. Ільясов, В. Я. Данілов, В. І. Кравець, В. А. Данканич, А. І. Юрчик, В. Г. Паньков, Б. Х. Жанбусінова, В. А. Гроза, Г. В. Верьовкіна.

Мартинюк Д. І. активно займався науковою роботою. Його наукові дослідження стосувалися розвитку аналітичних методів аналізу систем нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням і різницевого рівнянь. Для нелінійних систем із запізненням він узагальнив відомий чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка, розвинув конструктивні методи побудови періодичних і квазіперіодичних розв'язків, довів теореми існування і розвинув конструктивні алгоритми побудови тороїдальних інваріантних многовидів. Для згаданих систем Мартинюк Д. І. вперше дослідив поведінку квазіперіодичних розв'язків нелінійних диференціально-різницевого і різницевого рівнянь в околі інваріантних тороїдальних многовидів, а також довів теореми про звідність нелінійних різницевого рівнянь на m -вимірному торі і теореми про існування інваріантних тороїдальних множин. Результати наукових досліджень Мартинюка Д. І. опубліковано в його більш, ніж 90 наукових працях, серед яких 6 монографій:

1. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1969. – 309 с. (спільно з Ю. О. Митропольським).

2. Лекции по теории устойчивости решений систем с последствием. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1971. – 177 с.

3. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К. : Наук. думка. – 1972. – 246 с.

4. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – К. : Вища шк. – 1979. – 247 с. (спільно з Ю. О. Митропольським).

5. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – К. : Наук. думка, 1984. – 216 с. (спільно з Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком).

6. Systems of evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients. – Dordrecht; Boston; London : Kluwer Acad. Publ. – 1993. – 296 p. (спільно з Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko).

Опубліковані Мартинюком Д. І. монографії і наукові статті внесли фундаментальний вклад у теорію диференціальних рівнянь. Його монографію "Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием" відзначено Державною премією УРСР у галузі науки і техніки за 1985 р.

Протягом багатьох років Мартинюк Д. І. був членом ученої ради механіко-математичного факультету, спеціалізованих рад із присудження наукових ступенів кандидата та доктора наук в Київському державному університеті імені Тараса Шевченка й Інституті математики АН України.

На згадку про наукову і науково-педагогічну діяльність професора Д. І. Мартинюка Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка і Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка провели у червні 2002 р., у червні 2012 р. і у травні 2017 р. міжнародні математичні конференції.

Дмитро Іванович користувався високим авторитетом серед своїх колег. Усім, хто його знав, він запам'ятався як щира, доброзичлива, скромна, порядна і чесна людина.

**А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, М. Ф. Городній, О. А. Бойчук, В. В. Кириченко,
І. О. Парасюк, О. М. Станжицький, В. Г. Самойленко, Ю. В. Теплінський, І. М. Конет,
В. Я. Данілов, В. І. Кравець, В. Г. Паньков, Г. В. Верьовкіна**

Міжнародна наукова конференція "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"

19–21 травня 2017 р. на базі кафедри математики фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка проведено міжнародну наукову конференцію, яку було присвячено 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942–1996) – відомого українського математика, фахівця з теорії диференціальних і різницевих рівнянь – випускника фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського державного педагогічного інституту.

Дмитро Іванович Мартинюк народився 11 березня 1942 р. в селі Іванківці Дунаєвського району Хмельницької області в сім'ї селян-колгоспників. У тому ж 1942 р. його батько загинув на фронті. Непростим було дитинство Дмитра Івановича, зазнав і голоду, і злиднів. Освіту здобув у Іванківській семирічній та в Горчичнянській середній школах. У 1957 р. вступив до Кам'янець-Подільського державного педагогічного інституту, після закінчення якого у віці 20 років залишився працювати асистентом кафедри математики. У 1965 р. вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, де під керівництвом академіка Ю.О. Митропольського почав досліджувати диференціальні рівняння з відхиленням аргументу запізненого типу. У жовтні 1967 р. успішно захистив дисертацію "Периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом" на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Із 1 вересня 1967 р. Дмитро Іванович зарахований асистентом кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка, у 1968 р. обійняв посаду старшого викладача, а в 1969 р. – доцента кафедри цієї ж кафедри. У 1982 р. Д. І. Мартинюк успішно захистив докторську дисертацію "Периодические и квазипериодические решения дифференциально-разностных и разностных уравнений". У 1983 р. його було обрано за конкурсом на посаду професора кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь. Працюючи на цій посаді, Дмитро Іванович читав загальний курс лекцій із теорії диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, диференціально-різницевого рівняння, різницевого рівняння. Його викладацька діяльність успішно поєднувалася з науковою роботою. Результати досліджень опубліковано в численних наукових статтях і у шести монографіях, які присвячені актуальним проблемам аналітичної та якісної теорії диференціально-різницевого і різницевого рівнянь. У 1985 р. наукові досягнення Д. І. Мартинюка відзначено Державною премією УРСР в галузі науки і техніки.

Із 1988 по 1995 р. професор Д. І. Мартинюк очолював кафедру математичної фізики механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка, поєднуючи в цей час плідну наукову роботу з педагогічною діяльністю. Він виховав 9 кандидатів наук і залишився для цих людей не тільки науковим керівником, але й мудрим наставником і чуйним товаришем. Протягом багатьох років Д. І. Мартинюк був членом Вченої ради механіко-математичного факультету, спеціалізованих вчених рад із присудження наукових ступенів кандидата і доктора наук у Київському державному університеті імені Т. Г. Шевченка й Інституті математики НАН України.

У 1995 р. у зв'язку з погіршенням стану здоров'я Дмитро Іванович за власним бажанням залишає посаду завідувача кафедри математичної фізики і повертається на кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь, де і працює до останнього дня свого життя – 27 жовтня 1996 р.

Організаторами цього річного наукового форуму були Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка і Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.

Організаційний комітет конференції очолювали директор Інституту математики НАН України, академік НАН України А. М. Самойленко, завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, академік НАН України М. О. Перестюк і ректор Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, доктор історичних наук, професор С. А. Копилов. Почесні обов'язки заступників голів конференції достойно виконували доктори фізико-математичних наук, професори І. М. Конет, Ю. В. Теплінський.

До складу оргкомітету увійшли академіки НАН України О. І. Луковський, В. Л. Макаров, члени-кореспонденти НАН України О. А. Бойчук, Б. Й. Пташник і В. Ю. Слюсарчук, доктори фізико-математичних наук, професори Я. Й. Бігун, Н. О. Вірченко, В. І. Герасименко, В. В. Городецький, М. Ф. Городній, В. М. Євтухов, М. І. Іванцов, С. Д. Івасишен, П. І. Каленюк, О. В. Капустян, І. І. Король, В. В. Маринець, І. О. Парасюк, Г. П. Пелюх, Р. І. Петришин, І. Д. Пукальський, В. Г. Самойленко, О. М. Станжицький, В. І. Ткаченко, І. М. Черевко, доктор технічних наук, професор В. А. Федорчук, кандидати фізико-математичних наук, доценти В. О. Гнатюк, В. І. Кравець, В. Г. Паньков, В. С. Щирба, А. І. Юрчик.

У роботі конференції взяли участь 2 академіки НАН України, 23 доктори наук, 21 кандидат наук, 12 аспірантів. Серед учасників конференції були представники США, Казахстану, Польщі і Словаччини.

Конференція розпочала свою роботу 19 травня в залі засідань вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Зі вступним словом і спогадами про професора Д. І. Мартинюка виступив академік НАН України А. М. Самойленко.

Із вітальним словом до учасників конференції звернувся проректор із наукової роботи Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, доктор фізико-математичних наук, професор І. М. Конет. Він також за дорученням вченої ради університету вручив атестат почесного професора Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України М. О. Перестюку.

Із цікавими і змістовними пленарними доповідями на конференції виступили академік НАН України М. О. Перестюк, доктори фізико-математичних наук, професори В. Г. Самойленко (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), А. К. Прикарпатський (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка), В. І. Герасименко (Інститут математики НАН України).

На конференції працювало дві секції: секція звичайних диференціальних рівнянь (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор І. М. Черевко) і секція диференціальних рівнянь із частинними похідними (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор В. В. Городецький), на яких виголошено 35 наукових доповідей.

20 травня учасники конференції відвідали с. Іванківці Дунаєвського району Хмельницької області і, вшановуючи світлу пам'ять професора Д. І. Мартинюка, поклали квіти на його могилу.

21 травня академік НАН України А. М. Самойленко підвів підсумки роботи конференції й оголосив про її закриття. Зі словами вдячності до організаторів конференції звернулися професори В. Є. Круглов і В. М. Євтухов (Одеський національний університет імені І. І. Мечникова) та доцент В. І. Кравець (Таврійський державний агротехнологічний університет).

Для учасників конференції організовано цікаву культурну програму, що включала екскурсію історичними місцями Кам'янця-Подільського, до Хотинської фортеці та до скельного монастиря у с. Бакота.

За матеріалами роботи конференції у видавництві "Аксіома" опубліковано збірник матеріалів конференції (відповідальні за випуск – І. М. Конет, Ю. В. Теплінський).

У пам'яті всіх, хто спілкувався з Д. І. Мартинюком, Дмитро Іванович залишився відкритою, чуйною, доброзичливою, доброю і скромною людиною, відданим товаришем, яскравим, мудрим педагогом і наставником, талановитим вченим.

А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, В. Г. Самойленко, І. М. Конет, Ю. В. Теплінський

Наукове видання



ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА
МЕХАНІКА

Випуск 2(38)

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,8. Наклад 300. Зам. № 217-8480.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М2.
Підписано до друку 04.12.17

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02