

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Sushansky (Poland), д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Ф. Улітко, чл.-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; e-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 16.06.16 (протокол № 11)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

36/2016

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

CHIEF EDITOR	M. Gorodnii, Full Professor, Dr. Hab.
EDITORIAL BOARD	V. Samoilenko, Full Professor, Dr. Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, PhD (Secretary); V. Bavula (United Kingdom), Full Professor, Dr. Hab.; Y. Drozd, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Professor, Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Professor, Dr. Hab.; B. Kiforenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Professor, Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Professor, Dr. Hab.; N. Leonenko (United Kingdom) Full Professor, Dr. Hab.; O. Limarchenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Mishura, Full professor, Dr. Hab.; L. Mol'chenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. Parasyuk, Full Professor, Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Professor, Academician of NAS of Ukraine, Dr. Hab.; A. Petravchuk, Full Professor, Dr. Hab.; D. Silvestrov (Sweden), Full Professor, Dr. Hab.; A. Stanzhytskyi, Full Professor, Dr. Hab.; V. Sushansky (Poland), Full Professor, Dr. Hab.; S. Trofimchuk (Chile), Full Professor, Dr. Hab.; <u>A. Ulitko</u> , Acad-Corr of NAS of Ukraine, Full Professor, Dr. Hab.; V. Futorny (Brazil), Full Professor, Dr. Hab.; I. Shevchuk, Full Professor, Dr. Hab.
Address of Editorial board	03127, Kyiv-127, Acad. Glushkova Avenue, 4E, Faculty of Mechanics and Mathematics; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Approved	Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 16.06.16 (protocol № 11)
Attested	By Higher Attestation Commission. Decision of Presidium of HAC of Ukraine № 1-05/4 from 26.05.2010
Registered	Ministry of Justice of Ukraine Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09
Founder and publisher	Taras Shevchenko National University of Kyiv, Publishing and printing center "Kyiv University" The certificate included in the State Register ДК № 1103 from 31.10.02
Address of publisher	01601, Kyiv-601, Taras Shevchenko blv., 14, Off. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; fax 239 31 28

ЗМІСТ

С. Безкрила Про оцінки типу Джексона – Стечкіна для кусково q -опуклого наближення функцій	6
О. Лопотко Інтегральне зображення пари мішаних додатно визначених функцій двох змінних	10
М. Приймак Функції із змінним періодом	14
Є. Вакал, Ю. Вакал, Л. Вакал Найкраща апроксимація ядра інтегрального рівняння фредгольма з використанням генетичного алгоритму	17
І. Конет, Т. Пилипюк Гіперболічна крайова задача для необмеженого кусково-однорідного циліндра	22
М. Яременко Квазілінійні еліптичні системи з сингулярними коефіцієнтами	27
М. Сєров, Н. Ічанська Про конформну інваріантність нелінійних еволюційних багатовимірних рівнянь	35
І. Боднарчук Асимптотична поведінка м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності	40
І. Василь'єв, Б. Кіфоренко, Я. Ткаченко Оптимальний переліт з малою кутовою дальністю між віддаленими компланарними орбітами	43
О. Жук, Я. Жук Визначення радіаційної сили, що діє в рідині на тверду рухому кулю	46
Г. Сулим, Н. Оліярник, Л. Піскозуб, Я. Пастернак Поздовжній зсув біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування	51
Л. Василевич Функції належності модифікованих термів лінгвістичних змінних та їх аналіз	55
Овсієнко Сергій Адамович (01.05.1953 – 25.01.2016)	60

СОДЕРЖАНИЕ

С. Бескрылая Об оценках типа Джексона – Стечкина для кусочно q -выпуклого приближения функции	6
О. Лопотко Интегральное представление пары смешанных чётно-положительно определённых функций двух переменных	10
М. Приймак Функции с изменяющимся периодом	14
Е. Вакал, Ю. Вакал, Л. Вакал Наилучшая аппроксимация ядра интегрального уравнения фредгольма с использованием генетического алгоритма	17
И. Конет, Т. Пилипок Гиперболическая краевая задача для неограниченного кусочно-однородного цилиндра	22
Н. Яременко Квазилинейные эллиптические системы с сингулярными коэффициентами	27
М. Серов, Н. Ичанская О конформной инвариантности нелинейных эволюционных многомерных уравнений	35
И. Боднарчук Асимптотическое поведение мягкого решения стохастического уравнения теплопроводности	40
И. Васильев, Б. Кифоренко, Я. Ткаченко Оптимальный перелет с малой угловой дальностью между удаленными компланарными орбитами	43
О. Жук, Я. Жук Определение радиационной силы, действующей в жидкости на твердую движущуюся сферу	46
Г. Сулим, Н. Оліярник, Л. Піскозуб, Я. Пастернак Продольный сдвиг биматериала с межфазной трещиной с учетом фрикционного проскальзывания	51
Л. Василевич Функции принадлежности модифицированных термов лингвистических переменных и их анализ	55
Овсиенко Сергей Адамович (01.05.1953 – 25.01.2016)	60

CONTENTS

S. Bezkrlya On Jackson – Stechkin type estimates for piecewise q -convex approximation of functions.....	6
O. Lopotko The integral representation for pair mix even positively definite functions of two variables.....	10
M. Pryjmak Functions with variable period.....	14
E. Vakal, Yu. Vakal, L. Vakal Best approximation for a kernel of fredholm integral equation with using genetic algorithm	17
I. Konet, T. Pylypiuk Hyperbolic boundary value problem for the unlimited piecewise homogeneous cylinder	22
M. Yaremenko Quasi-linear elliptic system with singular coefficients	27
M. Serov, N. Ichanska From the conformal invariance of nonlinear evolutionary many dimension equations.....	35
I. Bodnarchuk Asymptotic behavior of the mild solution of a stochastic heat equation.....	40
I. Vasil'ev, B. Kiforenko, Ya. Tkachenko Optimal transfer with low angle distance between far coplanar orbits	43
O. Zhuk, Y. Zhuk Determination of radiation force acting on the moving rigid sphere in liquid.....	46
H. Sulym, N. Oliyarnyk, L. Piskozub, Ya. Pasternak Longitudinal shear of the bimaterial with interfacial crack with taking into account the frictional slippage.....	51
L. Vasylevych Membership functions of modified terms of linguistic variables and their analysis	55
Ovsienko Sergiy Adamovitch (01.05.1953 – 25.01.2016)	60

**ПРО ОЦІНКИ ТИПУ ДЖЕКСОНА – СТЕЧКІНА
ДЛЯ КУСКОВО q -ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ**

Посилено контрприклад, який показує, що для кускового q -опуклого ($q \geq 4$) наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стечкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

1. Вступ. Основні означення та формулювання. Нехай $C[a, b]$ – простір неперервних на відрізьку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцій f з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

$C^r[a, b]$ позначає простір r разів неперервно диференційованих на відрізьку $[a, b]$ функцій.

Нехай $Y_s[a, b]$, $s \in \mathbb{N}$, – набір з $(s+2)$ -ох точок $y_i \in [a, b]$, $a = y_{s+1} < \dots < y_1 < y_0 = b$.

Якщо $q \in \mathbb{N}$, то $\Delta^q(Y_s[a, b])$ – це множина функцій $f \in C[a, b]$, таких, що $f^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для парних i та $f^{(q)}(x) \leq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для непарних i . Функції $f \in \Delta^q(Y_s[a, b])$ називаються кусково q -опуклими.

Нехай $W^r[a, b]$ – соболевський клас функцій $f \in AC^{r-1}[a, b]$, таких що $\|f^{(r)}\|_{[a,b]} \leq 1$, де $r \in \mathbb{N}$ і $\|g\|_{[a,b]} := \text{ess sup}_{x \in [a,b]} |g(x)|$. Якщо $g \in C[a, b]$, то $\|g\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$. Коли $[a, b] = [-1, 1]$, позначаємо $Y_s := Y_s[-1, 1]$ (також $\Delta^q(Y_s) = \Delta^q(Y_s[-1, 1])$), $W^r := W^r[-1, 1]$ і $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1, 1]}$. Нехай $Y_1^* = \{-1, 0, 1\}$.

Нехай \mathbf{P}_n – простір алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$. Для $f \in \Delta^q(Y_s[a, b])$ позначимо

$$E_n^q(f, Y_s, [a, b]) := \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^q(Y_s[a, b])} \|f - P_n\|_{[a,b]}$$

величину найкращого кусково q -опуклого наближення многочленами.

У роботі [1] побудовано контрприклад, який показує, що для кусково q -опуклого ($q \geq 4$) наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стечкіна з похідною $r \geq q$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають.

Теорема 1 ([1] Ющенко). Для будь-яких $q \geq 4$, $r \geq q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \geq 0$, такої, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap C^r[a, b]$ така, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s, [a, b]) n^{r-q+3} = +\infty.$$

У роботі побудовано новий контрприклад, який посилює результат роботи [1] та узагальнює на випадок $q \geq 4$ теорему 1.6 роботи [2]. Основним результатом роботи є

Теорема 2. Для будь-яких $q \geq 3$, $r \geq q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \geq 0$, такої, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s) \cap W^r$ така, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s) n^{r-q+2} = +\infty. \tag{1}$$

Контрприклад для інших пар (q, r) , $q \geq 3$, побудовані в роботі [2].

2. Доведення теореми 2. Нехай надалі $r, q \in \mathbb{N}$, $r \geq q \geq 3$. Зауважимо, що сталі c_*, c_i, \tilde{c}_i залежать лише від q, r і s .

Лема 1 [2]. Для функції $F_{q+1}(x) = \frac{|x| x^{q-2}}{(q-1)!}$ існує стала $c_3 \in (0, 1)$ така, що

$$n E_n^{(q)}(F_{q+1}, Y_1^*) \geq c_3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через S функцію, яка має властивості: а) $S \in C^\infty(\mathbb{R})$, б) $S - \frac{1}{2}$ – монотонна непарна функція,

$$c) S(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 0, & \text{якщо } x \leq -1. \end{cases}$$

Покладемо $s_0 := 1$, $s_j := \|S^{(j)}\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |S^{(j)}(x)|$, $j \in \mathbb{N}$. Помітимо, що з b) випливає, що $\int_{-1}^1 S(x) dx = 1$, а для функції $S_\lambda(x) := S\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$, маємо

$$\|S_\lambda^{(j)}\|_{[-\lambda, \lambda]} = \lambda^{-j} s_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$f_n^{(q-1)}(x) := S_{\lambda_n}(x - 2\lambda_n), \quad \lambda_n := \frac{c_3}{8n},$$

тоді

$$f_n(x) = \frac{1}{(q-2)!} \int_0^x (x-t)^{q-2} f_n^{(q-2)}(t) dt.$$

Лема 2. Справедливі співвідношення для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \in \Delta^{(q)}(Y_1^*),$$

$$nE_n^{(q)}(f_n, Y_1^*) \geq c_5, \quad (2)$$

$$\|f_n^{(j)}\| = \left(\frac{8n}{c_3}\right)^{j-q+1} s_{j-q+1} =: (c_6 n)^{j-q+1} s_{j-q+1}, \quad j \geq q-1,$$

$$\|f_n^{(q-2)}\| < 1,$$

$$\|f_n\| < 1.$$

Доведення. Всі співвідношення легко встановлюються безпосередньою перевіркою, крім (2). Доведемо(2). Для цього позначимо

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0, \end{cases} \quad \text{і } G(x) := \frac{1}{(q-2)!} \int_0^x (x-t)^{q-2} g(t) dt = \begin{cases} \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} 0 \leq G(x) - f_n(x) &= \frac{1}{(q-2)!} \int_0^x (x-t)^{q-2} (1 - f_n^{(q-1)}(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{(q-2)!} \int_0^x (1 - f_n^{(q-1)}(t)) dt = \frac{1}{(q-2)!} \int_0^{3\lambda_n} (1 - f_n^{(q-1)}(t)) dt = \frac{2\lambda_n}{(q-2)!}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Звідки $\|f_n - G\| \leq \frac{2\lambda_n}{(q-2)!}$. Оскільки $2G(x) = \frac{x^{q-2}|x|}{(q-1)!} + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} = F_{q+1}(x) + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}$, то, за лемою 1,

$$nE_n^{(q)}(f_n, Y_1^*) \geq nE_n^{(q)}(G, Y_1^*) - n\|f_n - G\| \geq \frac{c_3}{2} - \frac{2\lambda_n n}{(q-2)!} = \frac{c_3}{2} - \frac{2c_3}{8(q-2)!} \geq \frac{c_3}{2} - \frac{c_3}{4} = \frac{c_3}{4} =: \widetilde{c}_5, \quad n \geq q-1.$$

З властивостей функцій S випливає, що f_n не є алгебраїчним многочленом, тому можна взяти $c_5 := \min\{\widetilde{c}_5, nE_n^{(q)}(f_n, Y_1^*) \mid 1 \leq n \leq q-2\}$. Нерівність (2) доведена.

Наслідок. Для будь-яких $r \geq q \geq 3$ і $n \in \mathbb{N}$ існує функція $f = f_n \in \Delta^q(Y_1^*) \cap W^r$ така, що

$$n^{r-1} E_n^{(q)}(f, Y_1^*) \geq c(r).$$

З властивостей функції f_n і леми 2 випливає наступна лема.

Лема 3. Нехай $r \geq q$, і для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $b \in (0, 1]$ позначимо $\lambda_{n,b} := b\lambda_n$, та $f_{n,b}(x) := Af_n\left(\frac{x}{b}\right)$, де

$$A = b^r \|f_n^{(r)}\|^{-1} = \frac{c_6^{q-r-1} b^r}{s_{r-q+1} n^{r-q+1}}.$$

Для функції $f_{n,b}$ справедливі співвідношення

$$f_{n,b}(x) = 0, \quad x \leq \lambda_{n,b}, \quad (3)$$

$$f_{n,b}^{(q)}(x) = 0, \quad x \geq 3\lambda_{n,b}, \quad f_{n,b} \in \Delta^{(q)}(Y_1^*),$$

для кожного многочлена $P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^{(q)}(Y_1^*)$ має місце оцінка

$$\|f_{n,b} - P_n\|_{[-b,b]} \geq \frac{Ac_5}{n} =: \frac{c_7 b^r}{n^{r-q+2}},$$

$$\|f_{n,b}^{(j)}\| = \frac{(c_6 n)^{j-q+1}}{b^j} A s_{j-q+1} = \left(\frac{b}{c_6 n}\right)^{r-j} \frac{s_{j-q+1}}{s_{r-q+1}}, \quad j \geq q-1, \quad (4)$$

зокрема,

$$\|f_{n,b}^{(r)}\| = 1, \quad (5)$$

і для довільного $\lambda > 0$

$$\|f_{n,b}^{(j)}\|_{[-\lambda,\lambda]} \leq \lambda^{q-1-j} \|f_{n,b}^{(q-1)}\| = \frac{c_6^{q-1-r} b^{r-q+1}}{s_{r-q+1} n^{r-q+1}} \lambda^{q-1-j} =: \frac{c_8 b^{r-q+1}}{n^{r-q+1}} \lambda^{q-1-j}, \quad j = 0, \dots, q-2. \quad (6)$$

Лема 4. Нехай $r \geq q \geq 3$. Для кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \geq 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f_* \in \Delta^q(Y_1^*) \cap W^r$ для якої

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n n^{r-q+2} E_n^{(q)}(f_*, Y_1^*) = +\infty. \quad (7)$$

Доведення. Спочатку визначимо за індукцією послідовність $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ додатних чисел. Нехай $n_1 = 2$, $b_1 = 1$ і припустимо, що n_{k-1} вже вибрано. Тоді покладемо $b_k := \lambda_{n_{k-1}, b_{k-1}}$ і візьмемо $n_k > k^2 n_{k-1}$ таким великим, що має місце нерівність $\alpha_{n_k} b_k^r > k$.

Тепер доведемо, що шукану функцію можна визначити у вигляді збіжного ряду

$$f_*(x) = \sum_{k=1}^\infty f_{n_k, b_k}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Дійсно, згідно (4) і (6) для $0 \leq j \leq r-1$ справедлива оцінка

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_{n_k, b_k}^{(j)}\| \leq c_* \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n_k} \leq c_* \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < 2c_* < \infty. \quad (8)$$

Отже,

$$f_*^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^\infty f_{n_k, b_k}^{(j)}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad 1 \leq j \leq r-1, \quad (9)$$

та $f_* \in C^{r-1}[-1, 1]$.

Зауважимо, що $3\lambda_{n_k, b_k} < \lambda_{n_{k-1}, b_{k-1}}$ для всіх натуральних k . Тому якщо $r > q$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує такий окіл O_{x_0} точки x_0 , що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (9) рівні нулю, крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k, b_k}^{(r-1)}(x)$. Отже, можемо продиференціювати почленно цей ряд, тоді отримуємо, що $f_*^{(r)}$ неперервна на $[-1, 1] \setminus \{0\}$ і з (5) маємо, що $\|f_*^{(r)}\| = 1$. Таким чином, приходимо до висновку, що $f_* \in W^r$.

Аналогічно, якщо $r = q$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує такий окіл O_{x_0} точки x_0 , що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (9), крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k, b_k}^{(r-1)}(x)$, або рівні нулю або є сталими, причому ряд з цих сталих, згідно (8), є збіжним. Отже, сума ряду (9) рівна сумі $f_{n_k, b_k}^{(r-1)}(x)$ і сталої. Тому $f_* \in W^r$.

І нарешті, для всіх $r \geq q$ зі зазначеного вище випливає, що $f_*^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in (0, 1]$, отже, $f_* \in \Delta^{(q)}(Y_1^*)$.

Покажемо, що для цієї функції виконується співвідношення (7). З цією метою зафіксуємо $k \geq 1$ і розглянемо многочлен $P_{n_k} \in \mathbf{P}_{n_k} \cap \Delta^{(q)}(Y_1^*)$. Тоді

$$\|f_* - P_{n_k}\| \geq \|f_* - P_{n_k}\|_{[-b_k, b_k]} = \left\| \sum_{m=k}^\infty f_{n_m, b_m} - P_{n_k} \right\|_{[-b_k, b_k]} = \left\| (f_{n_k, b_k} - P_{n_k}) + \sum_{m=k+1}^\infty f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \geq$$

$$\geq \left\| (f_{n_k, b_k} - P_{n_k}) \right\|_{[-b_k, b_k]} - \left\| \sum_{m=k+1}^\infty f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \geq c_7 \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} - \left\| \sum_{m=k+1}^\infty f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]}.$$

Тепер

$$b_m = b_{m-1} \lambda_{n_{m-1}} = \frac{c_3}{8} \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}} =: c_9 \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}},$$

так, що

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} &= \sum_{m=k+1}^{\infty} \left\| f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \leq c_8 b_k^{q-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_m^{r-q+1}}{n_m^{r-q+1}} = c_8 c_9^{r-q+1} b_k^{q-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_{m-1}}^{r-q+1}}{(n_{m-1} n_m)^{r-q+1}} \leq \\ &\leq c_8 c_9^{r-q+1} b_k^{q-1} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n_m^{r-q}} \leq \frac{c_8 c_9^{r-q+1}}{k} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} \leq \frac{c_7}{2} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}}, \end{aligned}$$

для всіх $k \geq k_0 := 2c_8 c_9^{r-q+1} / c_7$. Отже, для всіх $k \geq k_0$ справедливо виконується нерівність

$$\alpha_{n_k} n_k^{r-q+2} E_{n_k}^{(q)}(f_*, Y_1^*) \geq \frac{c_7}{2} k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Таким чином, нерівність (7) доведено.

Зауваження. Для всіх $j \geq q$, $f_*^{(j)}(x) \equiv 0$, $x \notin [0, 1/2]$. Звідси випливає, що f_* є многочленом степеня не вище $q-1$ на проміжку $(\frac{1}{2}, 1]$, а отже, функцію f_* можна продовжити цим многочленом на проміжок $(1, +\infty)$. Крім того, із співвідношення (3) випливає, що ряд, за допомогою якого визначено функцію f_* , збігається при всіх $x \leq 0$, причому його сума рівна нулю. Тому можна вважати, що $f_*(x) = 0$, $x \leq 0$.

Тепер доведемо теорему 2. Візьмемо довільний набір точок Y_s і визначимо b так:

$$b := \begin{cases} \min\{1 - y_1, y_1 - y_2\}, & \text{якщо } s > 1, \\ 1 - |y_1|, & \text{якщо } s = 1. \end{cases}$$

Покладемо

$$f(x) := b^r f_* \left(\frac{x - y_1}{b} \right), \quad x \in [-1, 1].$$

Тоді $f \in \Delta^{(q)}(Y_s) \cap W^r$ і ми доведемо, що ця функція задовольняє співвідношення (1). Дійсно, помітимо, що

$$f_*(u) = b^{-r} f(bu + y_1).$$

Візьмемо будь-який $P_{n_k} \in \mathbf{P}_{n_k} \cap \Delta^{(q)}(Y_s^*)$ і визначимо $Q_n(u) := b^{-r} P_n(bu + y_1)$.

Тоді $Q_n \in \Delta^{(q)}(Y_1^*)$. Отже, $\|f - P_n\| \geq \|f - P_n\|_{[y_1 - b, y_1 + b]} = b^r \|f_* - Q_n\| \geq b^r E_n^{(q)}(f_*, Y_1^*)$, так ми отримуємо, що

$$E_n^{(q)}(f, Y_s) \geq b^r E_n^{(q)}(f_*, Y_1^*).$$

З леми 4 випливає співвідношення (1) і завершує доведення.

Висновки. Посилено контрприклад, який показує, що для кускового q -опуклого ($q \geq 4$) наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стечкина є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ющенко Л. П. Негативні результати у кусково-опуклому наближенні вищих порядків // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2009. – № 22. – с. 8–10.
2. Leviatan D., Shevchuk I. A. Jackson type estimates for piecewise q -monotone approximation, $q \geq 3$, are not valid // Pure and Applied Functional Analysis. – 2016. – Vol. 1, № 1. – P. 85–96.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.16

Бескрылая С., ассист.
НПУ имени М. П. Драгоманова, Киев

ОБ ОЦЕНКАХ ТИПА ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА ДЛЯ КУСОЧНО q -ВЫПУКЛОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Усилено контрпример, показывающий, что для кусочно q -выпуклого ($q \geq 4$) приближения алгебраическими многочленами неравенство типа Джексона – Стечкина является неверным даже с константой, зависящей от приближаемой функции.

Bezkrlyla S., assist.
Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv

ON JACKSON – STECHKIN TYPE ESTIMATES FOR PIECEWISE q -CONVEX APPROXIMATION OF FUNCTIONS

The contrexample wish proves that for the q -coconvex ($q \geq 4$) approximation by the algebraic polynomials, the Jackson – Stechkin estimates are invalid even with a constant which depends on the function is strengthen.

УДК: 517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук
Національний лісотехнічний університет України, Львів

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРИ МІШАНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Одержано інтегральне зображення пари мішаних функцій двох змінних, для яких ядро $\frac{1}{2}[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)]$, $x_i, y_i \in R^1, i = 1, 2$, додатно визначено.

ВСТУП. У [3] М. Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x, y), x, y \in R^1$. Згодом Ю. М. Березанський в [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x, y), x, y \in R^1$, за допомогою власних функцій диференціальних операторів, який полягає у введенні за ядром $K(x, y), x, y \in R^1$ гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, що розглядаються у цьому просторі. При цьому рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У монографії [2], застосовуючи цю методу, доведено теорему про інтегральне зображення парних додатно визначених (п.д.в.) функцій скінченної кількості змінних. У [4, 5] побудовано інтегральні зображення для пари парних додатно визначених (п.п.д.в.) функцій однієї та двох змінних. У даній статті доведено теорему для пари парних мішаних додатно визначених у сукупності (п.п.м.д.в.с.) функцій двох змінних, пов'язаних з оператором $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (j = 1, 2)$.

ОЗНАЧЕННЯ Пару мішаних парних, дійсних, неперервних функцій $k_1(x), k_2(x), (x \in R^2)$, чому для яких $k_1(x_1, 0) = k_2(x_1, 0)$, називатимемо додатно визначеними в сукупності (п.м.п.д.в.с.), якщо для довільної фінітної функції виконується нерівність

$$\int_{R^2} \int_{R^2} \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] u(y) u(x) dx dy \geq 0 \tag{1}$$

Іншими словами, неперервне ядро $K(x, y) = \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)]$ має бути додатно визначеним.

Теорема. Кожні (п.м.п.д.в.с.) функції $k_1(x), k_2(x)$, які задовольняють оцінку $|k_1(x)| \leq C e^{N|x|^2}$; $|k_2(x)| \leq C e^{N|x|^2}, N > 0, x \in R^2$ допускають зображення

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(x_1; 0) + k_2(x_1; x_2)] &= \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) + \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + \\ &+ \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) + \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(x_1; x_2) + k_2(x_1; 0)] &= \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) - \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + \\ &+ \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) - \int_{R^1 \times R^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2), \end{aligned} \tag{3}$$

де $d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2), d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2)$ – борелівські невід'ємні міри. Навпаки, функції вигляду (2), (3) є (п.м.п.д.в.с.) функціями.

Доведення. За функціями $k_1(x), k_2(x)$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2(R^2, dx)$

$$(u, v)_{H_k} = \int_{R^2} \int_{R^2} K(x, y) u(y) v(x) dx dy. \tag{4}$$

Після проведення факторизації й поповнення, відносно (4), одержимо гільбертовий простір H_k .

Позначимо $A_j, j = 1, 2$, – мінімальний оператор у просторі $H_0 = L_2(R^2; dx)$, який відповідає виразу

$L_1^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; j = 1, 2$. Кожний із операторів $A_j, j = 1, 2$, допускає продовження оснащення з $D = C_0^\infty(R^2)$. Звуження

$A_j^*, j = 1, 2$, на D збігається з відображенням $u \rightarrow L^{(j)+} u$, де $u \in C_0^\infty(R^2)$, у просторі H_k . За оператори $B_j, j = 1, 2$,

(див. [2; гл. VIII, с. 702–703]) можна взяти оператори $u \rightarrow L^{(j)+}u$, де $u \in C_0^\infty(R^2)$, які діють у просторі $H_+^{(j)} = L_2(R^j; p^j(x_j)dx_j)$, де $p(x)$ вибираємо так, щоб $\int_{R^2} K(x;x)/p(x)dx < \infty$. Функцію операторів C_j в H_+

виконуватимуть оператори вигляду $u \rightarrow L^{(j)+}u$, де $u \in D(C_1) = H_+^{(1)} \otimes C_0^\infty(R^1)$ і $D(C_1) = C_0^\infty(R^1) \otimes H_+^{(1)}$. Оскільки комутативність $K(x,y)$ і A_j еквівалентна ермітовості C_j в H_k , то можна обмежитися перевіркою ермітовості C_j в H_k , тобто рівності

$$\langle L^{(j)+}u; v \rangle = \langle u, L^{(j)+}v \rangle (u, v \in C_0^\infty(R^2)), j = 1, 2. \quad (5)$$

Для гладкого додатно визначеного ядра $K(x,y)$ рівність (5) виконується.

Перевіримо (5) для довільного додатно визначеного ядра $K(x,y)$. Цю перевірку достатньо здійснити на функціях вигляду $u(x_1)u(x_2)$, оскільки вони щільні у $L_2(R^2; dx)$. Нехай $j = 2$. Введемо допоміжні парні функції

$$f_1(t) = \int_{R^1} \int_{R^1} k_1(x_1 + y_1, t) u(y_1) v(x_1) dx_1 dy_1 \quad \text{і} \quad f_2(t) = \int_{R^1} \int_{R^1} k_2(x_1 + y_1, t) u(y_1) v(x_1) dx_1 dy_1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \langle L^{(2)+}u, v \rangle &= \int_{R^1} \int_{R^1} f_1(x_2 + y_2) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} u(y_2) u(x_2) dx_2 dy_2 + \int_{R^1} \int_{R^1} f_2(x_2 - y_2) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} u(y_2) u(x_2) dx_2 dy_2 = \\ &= \int_{R^1} f_1(y_2) \left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} u(y_2 - x_2) u(x_2) dx_2 \right) dy_2 + \int_{R^1} f_2(y_2) \left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} u(y_2 + x_2) u(x_2) dx_2 \right) dy_2 = \\ &= \int_{R^1} \int_{R^1} f_1(x_2 + y_2) u(y_2) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_2) dx_2 dy_2 + \int_{R^1} \int_{R^1} f_2(x_2 - y_2) u(y_2) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_2) dx_2 dy_2 = \langle u, L^{(2)+}v \rangle. \end{aligned}$$

Отже $K(x,y)$ комутує з $-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $j = 1, 2$, причому $C_1 < 0$. Дійсно, якщо розглянути допоміжну функцію

$$f(t) = \int_{R^1} \int_{R^1} [k_1(t, x_2 - y_2) + k_2(t, x_2 + y_2)] u(y_2) u(x_2) dx_2 dy_2,$$

$$\begin{aligned} \text{то} \quad \langle C_1 u, u \rangle &= - \int_{R^1} \int_{R^1} f(x_1 + y_1) u''(y_1) u(x_1) dx_1 dy_1 = - \int_{R^1} \left(\int_{R^1} f(t) u''_1(t - x_1) dt \right) \bar{u}(x_1) dx_1 = \\ &= - \int_{R^1} \left(\int_{R^1} f(t) u''_1(t - x_1) dt \right) \bar{u}(x_1) dx_1 = - \int_{R^1} f(t) \left(\int_{R^1} u''_1(t - x_1) u(x_1) dx_1 \right) dt = \\ &= \int_{R^1} u''_1(t - x_1) \bar{u}(x_1) dx_1 = \left[u(x_1) u'_1(t - x_1) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{R^1} u'_1(t - x_1) u'(x_1) dx_1 = - \int_{R^1} f(t) \left(\int_{R^1} u'_1(t - x_1) u'(x_1) dx_1 \right) dt = \\ &= - \int_{R^1} \int_{R^1} f(x_1 + z_1) u'(z_1) u'(x_1) dx_1 dz_1 \leq 0, \end{aligned}$$

Отже $C_1 < 0$.

Тепер для ядра $K(x,y)$ можна застосувати теорему 4.3 [2; с. 708–709] і одержати таке зображення

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] = \int_{R^2} \Omega_\lambda(x, y) d\rho(\lambda) = \int_{R^1 \times R^1} \sum_{\alpha, \beta \in A} X_\alpha(x, \lambda) \overline{X_\beta(y, \lambda)} d\sigma_{\alpha\beta}, \quad (x, y \in R^2), \quad (6)$$

$$\text{де} \quad -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda, \quad -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda, \quad d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2} \Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial y_1^{\beta_1} \partial y_2^{\beta_2}}(0; 0) d\rho(\lambda),$$

$$X_\alpha(x, \lambda) = X_{\alpha_1}^{(1)}(x_1, \lambda_1) X_{\alpha_2}^{(2)}(x_2, \lambda_2), \quad X_0^{(j)}(x_j, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda_j} x_j, \quad X_1^{(j)}(x_j, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_j} x_j}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2,$$

A – паралелепіпед з цілочисленними вершинами $\alpha_1 = 0, 1, \alpha_2 = 0, 1$.

Якщо тепер зробимо (6) заміну $x_1 = -x_1, y_1 = -y_1$ і додамо отриману рівність до (6), а потім в одержаній рівності зробимо заміну $x_2 = -x_2, y_2 = -y_2$ і додамо отриману рівність до попередньої, то отримаємо таке зображення

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] &= \int_{R^1 \times R^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1; \lambda_2) + \\ &+ \int_{R^1 \times R^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2}{\lambda_2} \cdot \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\sigma_{0101}(\lambda_1; \lambda_2) + \int_{R^1 \times R^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1}{\lambda_1} \cdot \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \times \end{aligned}$$

$$\times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1; \lambda_2) + \int_{R^1 \times R^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\sigma_{1111}(\lambda_1; \lambda_2). \quad (7)$$

Якщо у (7) покласти $y_1 = x_1, y_2 = x_2$, то одержимо (2), а якщо у (7) покласти $x_1 = y_1, y_2 = -x_2$ то одержимо (3).

Однозначність мір у (2) і (3), за умови, що $k_1(x), k_2(x)$ задовольняють оцінку, випливає з того, що замикання в H_k операторів $C_j, j = 1, 2$, самоспряжене і комутирує.

Останнє твердження теореми доводимо наступним чином. Спочатку доведемо, що із (2) і (3), якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \geq 0$ випливає нерівність (1). Дійсно, у цьому випадку елементарне ядро має вигляд

$$\Omega_\lambda(x, y) = ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos \sqrt{\lambda_2}x_2 \cos \sqrt{\lambda_2}y_2 + ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \sin \sqrt{\lambda_2}x_2 \sin \sqrt{\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos \sqrt{\lambda_2}x_2 \cos \sqrt{\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 \sin \sqrt{\lambda_2}x_2 \sin \sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1|, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = \lambda_2, \quad \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1| \lambda_2,$$

а міри у (2) і (3) – такий вигляд:

$$d\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) = \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda), \quad d\rho_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \lambda_2 d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_3(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = |\lambda_1| d\rho(\lambda), \quad d\rho_4(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = |\lambda_1| \lambda_2 d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у вигляді

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1; 0) + k_2(x_1; x_2)] = \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 d\rho(\lambda), \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1; x_2) + k_2(x_1; 0)] = \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 \cos \sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda). \quad (9)$$

Із (8) і (9) знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; 0) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] + \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; 0)] = \\ & = \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1 + y_1) d\rho(\lambda) + \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1 + y_1) \cos \sqrt{\lambda_2}(x_2 - y_2) d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

Враховуючи рівність

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; 0) + k_2(x_1 + y_1; 0)] = \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1 + y_1) d\rho(\lambda)$$

і переходячи до мір $d\rho_1(\lambda), d\rho_2(\lambda), d\rho_3(\lambda), d\rho_4(\lambda)$, знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] = \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos \sqrt{\lambda_2}x_2 \cos \sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda) + \\ & + \int_{R^1 \times R^1_+} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}x_2 \sin \sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2} d\rho_2(\lambda) + \int_{R^1 \times R^1_+} \frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|} \cos \sqrt{\lambda_2}x_2 \cos \sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda) + \\ & + \int_{R^1 \times R^1_+} \frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|} \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}x_2 \sin \sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2} d\rho_4(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

За допомогою (10) перевіряємо (1).

Доведемо тепер нерівність (1), якщо в (2) і (3) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. У цьому випадку елементарне ядро має такий вигляд

$$\Omega_\lambda(x, y) = ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 + ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2,$$

і

$$\Omega_\lambda(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1|, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = \lambda_2, \quad \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1| |\lambda_2|,$$

а міри (2) і (3) – відповідно

$$d\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) = \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \lambda_2 d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_3(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = |\lambda_1| d\rho(\lambda), \quad d\rho_4(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = |\lambda_1| \lambda_2 d\rho(\lambda);$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у вигляді:

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1; 0) + k_2(x_1; x_2)] = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 ch\sqrt{-\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda), \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1; x_2) + k_2(x_1; 0)] = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 d\rho(\lambda). \quad (12)$$

Із (11) і (12) знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; 0) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] + \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; 0)] = \\ & = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} (x_1 + y_1) ch\sqrt{-\lambda_2} (x_2 + y_2) d\rho(\lambda) + \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} (x_1 + y_1) d\rho(\lambda) \end{aligned}$$

Враховуючи рівність $\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; 0) + k_2(x_1 + y_1; 0)] = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} (x_1 + y_1) d\rho(\lambda)$ і переходячи до мір $d\rho_1(\lambda)$,

$d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 ch\sqrt{-\lambda_1} y_1 ch\sqrt{-\lambda_2} x_2 ch\sqrt{-\lambda_2} y_2 d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) + \\ & + \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 ch\sqrt{-\lambda_1} y_1 \frac{sh\sqrt{-\lambda_2} x_2 sh\sqrt{-\lambda_2} y_2}{|\lambda_2|} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + \int_{R^1 \times R^1} \frac{sh\sqrt{-\lambda_1} x_1 sh\sqrt{-\lambda_1} y_1}{|\lambda_1|} ch\sqrt{-\lambda_2} x_2 ch\sqrt{-\lambda_2} y_2 d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) + \\ & + \int_{R^1 \times R^1} \frac{sh\sqrt{-\lambda_1} x_1 sh\sqrt{-\lambda_1} y_1}{|\lambda_1|} \frac{sh\sqrt{-\lambda_2} x_2 sh\sqrt{-\lambda_2} y_2}{|\lambda_2|} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2). \quad (13) \end{aligned}$$

За допомогою (13) перевіряємо (1).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $k_2(x_1, x_2) = 0$, то оператори $C_1 < 0$, $C_2 \geq 0$ і одержимо зображення для звичайних мішаних парних функцій $k_2(x_1; x_2) = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 \cos\sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda_1 \lambda_2)$.

Зауваження 2. Якщо $k_1(x_1, x_2) = 0$, то оператори $C_1 < 0$, $C_2 < 0$ і одержимо зображення [2, с. 711] для парних функцій. $k_2(x_1; x_2) = \int_{R^1 \times R^1} ch\sqrt{-\lambda_1} x_1 ch\sqrt{-\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda_1 \lambda_2)$

ВИСНОВКИ. Доведено теорему, яка є узагальненням теореми 4.5 [2, с. 711] і приклада 5 [2, с. 712] для парних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березанский Ю. М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1956. – 108. №3. – С. 893–896.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. Думка, 1965. – 798 с.
3. Крейн М. Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. // Докл. АН СССР. – 1946. – 53, №1. – с. 3–6.
4. Лопотко О. В. Интегральное зображення парних додатно визначених функцій однієї змінної // Укр. мат. Журнал. – 2010. – 62, т. № 2. – С. 281–284.
5. Лопотко О. В. Интегральное зображення парних додатно визначених функцій двох змінних // Укр. мат. журнал. – 2011. – 63, т. № 6. – С. 844–853.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.16

Лопотко О., канд. физ.-мат. наук
Национальный лесотехнический университет Украины, г. Львов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРЫ СМЕШАННЫХ ЧЁТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Получено интегральное представление для пары смешанных четно-положительно определенных функций двух переменных, для которых ядро

$$\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)], \quad x_i, y_i \in R^1, \quad i = 1, 2, \quad \text{положительно определено.}$$

Lopotko O., PhD
Ukrainian University Forest of Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATION FOR PAIR MIX EVEN POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The integral representation is obtained for mix even positively definite functions of two variables. Kernel $\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)]$,

$x_i, y_i \in R^1, \quad i = 1, 2$ is positively definite.

УДК 517.51

М. В. Приймак, д-р. техн. наук, проф.
Тернопільський нац. техн. ун-т імені Івана Пулюя, Тернопіль
e-mail: Kaf_KN@tu.edu.te.ua

ФУНКЦІЇ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Дано означення функції із змінним періодом як узагальнення періодичної функції. Розглянуто приклади таких функцій та досліджено їх властивості. Побудовано ортогональну систему тригонометричних функцій із змінним періодом.

1. Вступ. Багато явищ і процесів пов'язано із сигналами, яким властива певна повторюваність їх кількісних характеристик, причому період такої повторюваності не є сталим, а певним чином змінюється. Прикладами таких сигналів є електрокардіограми, які отримано під час чи після дії певних фізичних навантажень; власні обертання планет при входженні в поле тяжіння інших космічних тіл; звук сирени швидкої допомоги чи інших спеціальних транспортних засобів; перехідні режими в певних технічних пристроях, що функціонують в умовах зовнішніх ритмічних впливів, тощо. При математичному описі подібних сигналів може використовуватися поняття функції із змінним періодом [4]. У даній статті дано означення періодичної функції із змінним періодом, розглянуто основні властивості такого типу функцій, вивчено ортогональність системи тригонометричних функцій із змінним періодом.

2. Означення і основні властивості функції із змінним періодом. Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ називається функцією зі змінним періодом $T(x) > 0$, якщо для всіх $x \in I$ та $x + T(x) \in I$ виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (1)$$

У частинному випадку, коли $T(x) = T = \text{const}$, $f(x)$ є періодичною функцією з періодом T .

Нехай надалі змінний період $T(x)$ є диференційовною функцією. Тоді похідна $T'(x) \geq -1$. Ця властивість випливає з наступного. Нехай точки x і $x + \Delta x$, $\Delta x > 0$, належать області визначення I . Розглянемо точки $x + T(x)$ і $x + \Delta x + T(x + \Delta x)$, які також (без втрати загальності) належать області I . Оскільки $x < x + \Delta x$, то аналогічна нерівність повинна виконуватися і для точок $x + T(x)$ і $x + \Delta x + T(x + \Delta x)$, тобто $x + T(x) < x + \Delta x + T(x + \Delta x)$. Звідси знаходимо $T(x + \Delta x) - T(x) > -\Delta x$. Тоді, розділивши цю нерівність на Δx та перейшовши до границі, отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} = T'(x) \geq -1. \quad (2)$$

Значення $T(x)$ в (1) розглядається при зростанні незалежного аргументу x . З іншого боку, очевидно, що для функції $f(x)$ зі змінним періодом $T(x)$ рівність $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$ у загальному випадку не виконується. Тому, записуючи аналог рівності (1) для значення незалежного аргументу, яке менше ніж x , потрібно визначити функцію $T^-(x)$, для якої має місце рівність $f(x) = f(x - T^-(x))$, звичайно, вважаючи, що величини x і $x - T^-(x)$ належать області визначення функції $f(x)$. Величину $T^-(x)$ природно також вважати змінним періодом функції $f(x)$. При цьому для $T(x)$ і $T^-(x)$ не складно отримати рівності $T(x) = T^-(x + T(x))$, $T^-(x) = T(x - T^-(x))$, які встановлюють взаємозв'язок між змінними періодами функції $f(x)$.

Приклад 1. Функції із змінним періодом зустрічаються при вивченні диференціального рівняння Ейрі $y'' - xy = 0$, розв'язками якого є так звані функції Ейрі. Зауважимо, що асимптотична поведінка однієї із таких функцій на дійсній осі описується формулою [3, с.939, 940]:

$$v(x) = \frac{|x|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-3/2}\right) \right] \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

з якої видно, що ця функція сильно осцилює при $|x| \gg 1$.

Приклад 2. Многочлени Чебишева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n = 1, 2, \dots$, також можна розглядати як приклади функцій зі змінним періодом, оскільки такі многочлени можна записати як тригонометричні функції вигляду $\cos g(x)$, де функція $g(x) = n \arccos x$ має область визначення $I = [-1, 1]$. Використовуючи вигляд функції $g(x) = n \arccos x$, можна легко знайти диференціальне рівняння для многочленів T_n . Дійсно, оскільки $g'(x) = n(1-x^2)^{-1/2}$, $g''(x) = nx(1-x^2)^{-3/2}$, то маємо диференціальне рівняння

$$n(1-x^2)^{-1/2} y'' - nx(1-x^2)^{-3/2} y' + \left(n(1-x^2)^{-1/2} \right)^3 y = 0,$$

з якого після деяких скорочень можна отримати відоме рівняння для функцій Чебишева вигляду

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (3)$$

Зауважимо, що в теорії ортогональних многочленів диференціальне рівняння (12) виводиться іншим способом. Наприклад, в [5] для отримання многочленів Чебишева і відповідного їм диференціального рівняння використовується диференціальне рівняння Пірсона для вагової функції $h(t)$:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1(x)}{q_0 + q_1(x) + q_2(x)}.$$

Приклад 3. В якості функцій із змінним періодом можна також розглянути функції вигляду $\sin x^\alpha$, $\cos x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $x \in I$, область визначення I кожної з яких функцій залежить від значення α , парності функції і може бути одним із інтервалів $[0, \infty)$ або $(-\infty, \infty)$. У подальшому вважаємо $I = [0, \infty)$. Легко помітити, що для функцій $\sin x^\alpha$, $\cos x^\alpha$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$, їх змінні періоди $T_\alpha(x)$ та $T_\alpha^-(x)$ визначаються формулами

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \geq 0, \quad T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \geq T(0).$$

Приклад 4. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} = \sin x^{-1} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

завичай розглядають [6, с. 106] лише як приклад функції, для якої точка $x=0$ є точкою розриву другого роду. Оскільки дана функція в околі точки $x=0$ набуває всі значення з проміжку $[-1;1]$, тобто при $x \rightarrow 0$ (зліва і справа) функція $f(x)$ "коливається" між -1 до 1 , не прямуючи ні до скінченої, ні до нескінченої границі, то її також можна розглядати в якості прикладу функції зі змінним періодом.

3. Система тригонометричних функцій зі змінним періодом. Як і у випадку класичних тригонометричних функцій природно виникає питання про існування ортогональних систем функцій зі змінним періодом.

Теорема 1. Система тригонометрична функцій

$$\sin mx^\alpha, \cos mx^\alpha, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

зі змінним періодом $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, $x \geq 0$, є ортогональною із ваговою функцією $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ в просторі $L_2(x, x + T_\alpha(x); \rho)$, причому норма кожної із цих функцій системи (4) рівна $\sqrt{\pi}$.

Зауважимо, що інтервал ортогональності $[x, x + T_\alpha(x)]$ не є сталим, а змінюється відповідно до значення періоду $T_\alpha(x)$ в точці x .

Доведення властивості ортогональності системи функцій проводиться за допомогою безпосередніх обчислень, є дещо громіздким, а тому тут не подається.

Зауважимо, що у частинному випадку, коли $\alpha = 1$, система (4) переходить у класичну систему тригонометричних функцій $\sin mx$, $\cos mx$, $m = 1, 2, \dots$, а періоди $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ і $T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}$ набувають сталих значень $T_1(x) = T_1^-(x) = T = 2\pi$. Відповідно інтервалом ортогональності $[x, x + T_\alpha(x)]$ є довільний відрізок довжини 2π .

4. Узагальнення поняття тригонометричних функцій зі змінним періодом. Узагальненням тригонометричних функцій $\sin x^\alpha$, $\cos x^\alpha$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, є функції вигляду

$$\sin g(x), \cos g(x), \quad x \in I, \quad (5)$$

де $g(x)$ – неперервна, строго зростаюча (спадна), кусково диференційована функція, причому в області визначення $I = (a, b)$ її варіація $V_a^b(g) \gg 2\pi$. Область визначення I залежить від функції $g(x)$ і в кожному конкретному випадку визначається окремо. Для того, щоб виявити інші умови, яким повинна задовольняти функція $g(x)$ в (5), спочатку розглянемо питання про змінний період $T_g(x)$ функцій $\sin g(x)$ та $\cos g(x)$. Очевидно, період $T_g(x)$ має задовольняти рівність $\sin[g(t + T_g(x))] = \sin[g(x) + 2\pi]$, звідки легко знаходимо

$$g[x + T_g(x)] = g(x) + 2\pi. \quad (6)$$

Якщо для функції $g(x)$ існує обернена функція $g^{-1}(\bullet)$, то з (6), отримуємо співвідношення $x + T_g(x) = g^{-1}[g(x) + 2\pi]$, тобто змінний період можна записати у явному вигляді за допомогою формули

$$T_g(x) = -x + g^{-1}[g(x) + 2\pi]. \quad (7a)$$

Іншими словами, за умови існування оберненої функції $g^{-1}(\bullet)$, для функцій вигляду (5) їх змінний період можна записати в явному вигляді.

Властивість змінного періоду, що описується формулою (2), має очевидно місце для $T_g(x)$ і у випадку функцій вигляду (5). При цьому, якщо вважати, що крім функції g диференційовною є також і обернена функція $g^{-1}(\bullet)$, то з

(7а) отримуємо нерівність $T'_g(x) = -1 + (g^{-1}[g(x) + 2\pi])' > -1$ або

$$(g^{-1}[g(x) + 2\pi])' > 0. \tag{8}$$

З останньої нерівності випливає, що крім диференційованості функцій g і g^{-1} , вони мають задовольняти рівність (8).

Аналогічно (7а) можна вивести формулу

$$T_g^-(x) = x - g^{-1}[g(x) - 2\pi]. \tag{7б}$$

Величини в (7а) і (7б) є також змінними періодами функції $\cos g(x)$.

Має місце твердження.

Теорема 2. Нехай функція $g(x), x \in I = (a, b)$, є неперервною, строго зростаючою і кусково диференційовною, та нехай для неї існує обернена функція $g^{-1}(\bullet)$, яка теж є неперервною і кусково диференційовною, причому похідна $(g^{-1}[g(x) + 2\pi])' > 0$, а варіація $V_a^b \gg 2\pi$. Тоді система функцій

$$\sin mg(x), \cos mg(x), x \in I, m = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

є ортогональною із ваговою функцією $\rho(x) = g'(x)$ в просторі $L_2(x, x + T_g(x); \rho)$, $x \in I, x + T_g(x) \in I$,

де $T_g(x) = -x + g^{-1}[g(x) + 2\pi]$ – змінний період системи функцій (9), а норма кожної із функцій цієї системи рівна $\sqrt{\pi}$.

Доведення цієї теореми проводиться за допомогою прямих обчислень, а тому опускається.

Стосовно теорем 1, 2 зауважимо, що як і в класичному випадку тригонометричних поліномів становить інтерес вивчення питання про повноту системи тригонометричних функцій зі змінним періодом, питання про наближення функцій зі змінним періодом відповідними рядами Фур'є, трансформація спектру функцій зі змінним періодом при переході від системи тригонометричних функцій зі змінним періодом до системи функцій зі сталим періодом і навпаки, та інші.

5. Диференціальне рівняння для тригонометричних функцій із змінним періодом. Для функцій зі змінним періодом можна вивести відповідне диференціальне рівняння. Дійсно, нехай $g(x)$ – строго зростаюча (спадна) і двічі неперервно диференційовна функція, для якої існує обернена функція $g^{-1}(\bullet)$ і яка теж є неперервно диференційовною, причому похідна $(g^{-1}[g(x) + 2\pi])' > 0$. Тоді функції

$$y = \sin g(x), y = \cos g(x), x \in I, \tag{10}$$

задовольняють однорідне диференціальне рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' - \frac{g''}{g'} y' + (g')^2 y = 0, \tag{11а}$$

яке для зручності можна подавати у вигляді

$$g' y'' - g'' y' + (g')^3 y = 0. \tag{11б}$$

З даного диференціального рівняння для функцій (10) у випадку, коли $g(t) = x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0$, тобто для функцій $y = \sin x^\alpha$ і $y = \cos x^\alpha$, знаходимо диференціальне рівняння $y'' - \frac{\alpha-1}{x} y' + (\alpha x^{\alpha-1})^2 y = 0$ або тотожне йому

$txy'' - (\alpha-1)y' + \alpha^2 x^{2\alpha-1} y = 0$, аналіз якого дозволяє вивчати властивості згаданих функцій.

ВИСНОВКИ. Дано означення функції зі змінним періодом, розглянуто приклади таких функцій і їх основні властивості, отримано твірне диференціальне рівняння, побудовано ортогональну систему тригонометричних функцій зі змінним періодом розглянуто особливості простору, що породжується такою системою. Результати статті можуть знайти застосування при вивченні емпіричних функцій зі змінним періодом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Василенко Я. П., Дмитроца Л. П., Приймак М. В. Клас функцій із змінним періодом // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. – №1105. – Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2014. – Випуск 24. – С. 21–32.
2. Лузин Н. Н. Собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР. – 508 с.
3. Математическая энциклопедия, т. 5. – М.: Сов. энцикл., 1985. – 1248 с.
4. Приймак М. В., Боднарчук І. О., Лупенко С. А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – № 2. – С. 143–152.
5. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. – 416 с.
6. Фролов Н. А. Теория функций действительного переменного. М., 1961. – 172 с.

Приймак М., д-р техн. наук
Тернопольський нац. техн. ун-т імені Івана Пулюя, Тернопіль

ФУНКЦИИ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПЕРИОДОМ

Дано определение функции с переменным периодом как обобщение периодической функции. Рассмотрены примеры таких функций, исследованы их свойства. Построена ортогональная система тригонометрических функций с изменяющимся периодом.

Pryjmak M., Full Doctor
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, Ternopil

FUNCTIONS WITH VARIABLE PERIOD

The definitions of functions with variable period as a generalization of periodic function are given. Examples of such functions are considered and their properties are investigated. Orthogonal of trigonometric functions with variable period is constructed here.

УДК 519.6

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Л. Вакал, канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
e-mail: jvakal@gmail.com

НАЙКРАЩА АПРОКСИМАЦІЯ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З ВИКОРИСТАННЯМ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Для розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду з ядром довільного вигляду запропоновано неперервний генетичний алгоритм для найкращої (середньоквадратичної, рівномірної) апроксимації ядра сумами скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від однієї змінної. Показано, що запропонований алгоритм є ефективним засобом апроксимації ядер.

ВСТУП. Інтегральні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів і явищ. Вони виникають у багатьох областях науки і техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії масо- і теплоперенесення, біомеханіці, геофізиці, астрономії тощо. Зокрема, до інтегральних рівнянь Фредгольма II роду приводять задачі про вимушені поперечні коливання струни, задачі оптимальної лінійної фільтрації за наявності білого шуму, визначення інтенсивності народження частинок в атмосфері під впливом світлового потоку тощо. [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

де $K(x,t)$ – задана неперервна в квадраті $Q(a,b) = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ функція, яка називається ядром рівняння, $f(x)$ – задана неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, $y(x)$ – шукана функція (розв'язок рівняння).

Одним з найбільш розповсюджених методів наближеного розв'язання рівняння (1) є метод вироджених ядер [1, 6, 9]. Ядро $\tilde{K}(x,t)$ називається виродженим, якщо воно є сумою скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від одного аргументу

$$\tilde{K}(x,t) = \sum_{k=1}^n z_k A_k(x) B_k(t), \quad (2)$$

де $A_1(x), \dots, A_n(x)$ і $B_1(x), \dots, B_n(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ та лінійно незалежні між собою функції, z_1, \dots, z_n – константи. Якщо ядро інтегрального рівняння (1) є виродженим, то його розв'язок, який позначимо $\tilde{y}(x)$, можна знайти в явному вигляді

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k A_k(x). \quad (3)$$

Невідомі коефіцієнти c_1, \dots, c_n визначаються з системи лінійних рівнянь [6]

$$c_k - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} c_j = f_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де

$$f_k = \int_a^b B_k(t) f(t) dt, \quad \alpha_{kj} = \int_a^b B_k(t) A_j(t) dt.$$

Якщо визначник системи (4) не дорівнює нулю, тобто λ не є характеристичним числом ядра $K(x,t)$, то система (4) має єдиний розв'язок. Відповідно інтегральне рівняння (1) з виродженим ядром (2) теж має єдиний розв'язок $\tilde{y}(x)$, який визначається за формулою (3) [4].

Розв'язок рівняння (1) з довільним ядром $K(x,t)$ можна апроксимувати розв'язком рівняння з виродженим ядром $\tilde{K}(x,t)$, яке підбирається так, щоб $|K(x,t) - \tilde{K}(x,t)| < \varepsilon$ в області $Q(a,b)$. Якщо побудувати достатньо

близьке до $K(x,t)$ вироджене ядро $\tilde{K}(x,t)$, то розв'язавши рівняння з ядром $\tilde{K}(x,t)$, ми отримаємо розв'язок $\tilde{y}(x)$, близький до розв'язку $y(x)$ рівняння з ядром $K(x,t)$ і тією самою правою частиною [9].

Слід зазначити, що при заданій точності ε заміни ядра $K(x,t)$ скінченною сумою (2) можна чекати тим меншою похибки розв'язку δ , чим більш віддаленим буде параметр λ від власного значення ядра $K(x,t)$. Навпаки, чим ближче буде λ до власного значення, тим більш точною має бути заміна ядра $K(x,t)$ на вироджене, щоб можна було сподіватися отримати розв'язок $y(x)$ з потрібною точністю. [9].

Існують різні способи побудови вироджених ядер, близьких до даного [1, 3, 5, 6, 9]. Для побудови ядра $\tilde{K}(x,t)$ можна скористатися, наприклад, частковою сумою розкладу функції $K(x,t)$ в ряд Тейлора, відрізком однократного чи подвійного ряду Фур'є або застосувати інтерполювання функції $K(x,t)$ по одній чи обох змінних.

По суті, задача побудови вироджених ядер, близьких до даного, є задачею наближення заданої в області $Q(a,b)$ функції двох змінних $K(x,t)$ за допомогою білінійної комбінації (2) функцій, що залежать тільки від однієї змінної (кількість і вигляд функцій $A_k(x)$ та $B_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, можна вибирати). Тому для побудови вироджених ядер можна застосовувати найкращу (рівномірну, середньоквадратичну) апроксимацію функції $K(x,t)$ [3, 8].

Задача найкращої апроксимації полягає у знаходженні для функції K з деякого класу такої функції \tilde{K} у більш вузькому класі, щоб у заданій області величина відхилення $\|\Delta\| = \|K - \tilde{K}\|$ була б мінімально можливою. Величина відхилення (похибка апроксимації) служить характеристикою точності наближення і залежить від вибраної норми. На практиці найчастіше застосовують квадратичну (або середньоквадратичну) та чебишовську норми.

Якщо область $Q(a,b)$ покрита сіткою $\{(x_i, t_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$ з m вузлів, то величина відхилення $\|\Delta\|$ у випадку використання чебишовської (рівномірної) норми визначається як

$$\|\Delta\| = \max_{i=1,m} |K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i)|, \quad (5)$$

а у випадку середньоквадратичної норми –

$$\|\Delta\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i))^2}{m}}. \quad (6)$$

Функція \tilde{K} , на якій досягається мінімум норми (5) чи (6) в області апроксимації, називається найкращим чебишовським або найкращим середньоквадратичним апроксимантом відповідно.

Найкращі апроксиманти (рівномірні та середньоквадратичні) наближають ядра інтегральних рівнянь з більшою точністю, ніж, наприклад, часткові суми рядів Тейлора, проте на практиці останні використовуються значно частіше. Головною перешкодою для широкого застосування найкращих апроксимантів є складність і громіздкість відповідних алгоритмів чебишовського і середньоквадратичного наближення у випадку функцій декількох аргументів, а також їх недостатня реалізація у загальнодоступних математичних пакетах [7].

Тому актуальним є створення ефективних і водночас досить простих алгоритмів для знаходження виродженого ядра, близького до даного, на основі мінімізації чебишовського (5) або середньоквадратичного відхилення (6). З цієї точки зору перспективним є підхід, що ґрунтується на застосуванні апарату генетичних алгоритмів [2].

Генетичні алгоритми (ГА) – це новітній ефективний інструмент розв'язання складних оптимізаційних задач. Ідея ГА полягає в комп'ютерній організації еволюційного процесу створення, модифікації та відбору кращих розв'язків (в термінах ГА – особин) з метою появи нових, більш прийнятних варіантів розв'язання задачі. Кожна особина в ГА кодується у вигляді хромосоми, в генах якої зберігається інформація про відповідні параметри розв'язку. Оцінку якості закодованого в хромосомі розв'язку служить значення функції пристосованості.

Пошук найкращих розв'язків у генетичних алгоритмах здійснюється одразу з цілої множини точок – популяції особин, а не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації. Генетичні алгоритми прості в реалізації, використовують тільки значення функції пристосованості і не потребують іншої інформації про поведінку функції, відносно стійкі до попадання в локальні оптимуми і можуть застосовуватися для різних класів задач [10].

У статті пропонується генетичний алгоритм для найкращої (рівномірної, середньоквадратичної та ін.) апроксимації функцій двох змінних за допомогою функцій вигляду (2).

ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. Схема стандартного ГА складається з таких основних кроків:

- 1) створення початкового покоління популяції особин;
- 2) оцінювання особин за значенням функції пристосованості;
- 3) моделювання еволюційного процесу: вибір батьків, схрещування для отримання нащадків, мутація нащадків, формування нового покоління популяції;
- 4) перевірка критерію закінчення алгоритму, і в разі його невиконання повернення до кроку 2. Якщо критерій завершення алгоритму виконано, то здійснюється відбір найкращої особини (з найбільшим або найменшим значенням функції пристосованості).

Можливі різні варіанти реалізації стандартної схеми ГА, які відрізняються формою представлення хромосом (бінарне чи дійсне кодування), операторами схрещування, мутації та селекції, процедурами вибору батьків для схрещування, критеріями закінчення алгоритму тощо [10]. Вибір того чи іншого варіанту реалізації стандартних

складових при розробці ГА для розв'язання конкретної задачі залежить, зокрема, від особливостей предметної області, структури даних та ін.

Позначимо S_j – j -у хромосому, $j = \overline{1, N}$, де N – число особин популяції. Кожна хромосома $S_j = (s_1^j, \dots, s_n^j)$ складається з n генів. Ген s_k^j відповідає деякому значенню параметра z_k апроксиманта $\tilde{K}(x, t)$. В ГА для апроксимації ядра інтегрального рівняння сумами вигляду (2) пропонується використовувати дійсне кодування хромосом, коли гени s_k^j напряду подаються у вигляді дійсних чисел. Такі алгоритми називаються неперервними ГА.

Неперервний генетичний алгоритм, що пропонується для найкращої апроксимації ядра інтегрального рівняння (1) виродженим ядром вигляду (2), має такі особливості реалізації схеми стандартного ГА.

1. Початкове покоління популяції формується з особин (хромосом) S_j , $j = \overline{1, N}$, гени яких s_k^j , $k = \overline{1, n}$ – це випадкові числа з заданого інтервалу (за умовчанням обирається інтервал $[-1, 1]$). Слід зазначити, що границі цього інтервалу мають значення лише на кроці ініціалізації, у подальшій еволюції простір пошуку ϵ , взагалі кажучи, необмеженим.

2. Значення функції пристосованості Fit для кожної хромосоми S_j , $j = \overline{1, N}$, обчислюються за формулою

$$Fit(S_j) = \Delta(S_j), \quad (7)$$

де

$$\Delta(S_j) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| K(x_i, t_i) - \sum_{k=1}^n s_k^j A_k(x_i) B_k(t_i) \right| \quad (8)$$

у випадку чебишовської норми (5) та

$$\Delta(S_j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \left(K(x_i, t_i) - \sum_{k=1}^n s_k^j A_k(x_i) B_k(t_i) \right)^2}{m}} \quad (9)$$

у випадку середньоквадратичної норми (6).

Чим ближче значення функції (7) до нуля, тим краще пристосованою є особина і тим ближче закодовані в її генах значення параметрів z_k до оптимальних. Слід додати, що за цим алгоритмом можна знаходити найкращу

апроксимацію ядра $K(x, t)$ у випадку використання інших норм, наприклад $\|\Delta\| = \sum_{i=1}^m |K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i)|$. Для цього потрібно лише відповідним чином змінити формулу для обчислення $\Delta(S_j)$.

3. На кроці моделювання еволюційного процесу батьківські особини визначаються за процедурою парного турнірного відбору. З поточної популяції випадковим чином вибираються дві особини, і та з них, значення функції пристосованості якої менше, заноситься у проміжний масив. Ця операція повторюється n разів, після чого у створенні нащадків бере участь кожна пара сусідніх особин з проміжного масиву.

Для схрещування застосовується лінійний кросовер: у батьків $S_1 = (s_1^1, \dots, s_n^1)$ і $S_2 = (s_1^2, \dots, s_n^2)$ створюються три нащадки $D_1 = (d_1^1, \dots, d_n^1)$, $D_2 = (d_1^2, \dots, d_n^2)$ і $D_3 = (d_1^3, \dots, d_n^3)$ за правилом

$$d_k^1 = \frac{s_k^1 + s_k^2}{2}, \quad d_k^2 = \frac{3s_k^1 - s_k^2}{2}, \quad d_k^3 = \frac{3s_k^2 - s_k^1}{2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Результати розрахунків показали, що в задачах апроксимації цей кросовер за ефективністю переважає більшість операторів схрещування.

Мутація нащадків у алгоритмі не проводиться, оскільки при застосуванні лінійного кросовера значення гена нащадка може виходити за межі значень батьківських генів.

У нове покоління включаються лише N найкращих особин (тобто особин з найменшими значеннями функції пристосованості) з розширеної популяції батьків та їхніх нащадків.

4. Алгоритм завершує роботу, якщо виконується одна з умов: 1) значення функції пристосованості найкращої особини покоління менше заданої величини η , 2) досягнуто максимальне число поколінь p_{\max} . Якщо задати $\eta = 0$, то буде знайдено апроксимацію ядра сумою заданого числа добутків $A_k(x) B_k(t)$ з мінімально можливою за p_{\max} поколінь похибкою наближення.

Зазначимо, що оскільки ГА базується на ймовірнісному підході, то прийнятний розв'язок можна отримати лише за наявності достатнього числа запусків алгоритму.

Описаний алгоритм може бути реалізований за допомогою проблемно-орієнтованих мов програмування (Pascal, C, C++) або засобами систем комп'ютерної математики (Matlab, Mathcad та ін.). Зокрема, в системі Matlab існує спеціальний пакет Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox для створення і налаштування генетичних алгоритмів.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. Як зазначено вище, розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (1) буде близьким до розв'язку $\tilde{y}(x)$ рівняння з виродженим ядром і тією самою правою частиною, якщо вироджене ядро $\tilde{K}(x, t)$ є достатньо близьким до ядра $K(x, t)$. Для оцінки близькості цих розв'язків використовується теорема про рівномірну апроксимацію [11]. Згідно з теоремою, якщо $\max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t) - \tilde{K}(x, t)| < \epsilon$, $R_K(x, t; \lambda)$ і $R_{\tilde{K}}(x, t; \lambda)$ – резольвенти відповідних ядер і λ не є власним значенням цих ядер, то існує така константа $\beta = \beta(\lambda, H_f, H_K, H_{\tilde{K}})$, що

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \beta \epsilon. \tag{10}$$

Тут $H_f = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, $H_K(\lambda) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b R_K(x, t; \lambda) dt \right|$, $H_{\tilde{K}}(\lambda) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b R_{\tilde{K}}(x, t; \lambda) dt \right|$.

Константа β може бути обчислена за формулою

$$\beta = |\lambda| \cdot (1 + |\lambda| H_{\tilde{K}}(\lambda)) \cdot (1 + |\lambda| H_K(\lambda)) \cdot (b - a) \cdot H_f. \tag{11}$$

Для практичного застосування зручно користуватися наступною оцінкою для величин $B_K(\lambda)$ і $B_{\tilde{K}}(\lambda)$. Якщо $K(x, t) \leq M$ в квадраті $Q(a, b)$ і $|\lambda|$ – менше радіусів збіжності резольвентних рядів, тоді

$$\left| \int_a^b R_K(x, t; \lambda) dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{1 - |\lambda|M(b-a)} = B_K(\lambda).$$

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ. Проведено серію обчислювальних експериментів по розв'язуванню інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з використанням запропонованого генетичного алгоритму для найкращої (середньоквадратичної, рівномірної) апроксимації ядер. Виконано порівняння отриманих розв'язків з точними розв'язками рівнянь, а також з наближеними розв'язками, знайденими іншими способами (наприклад, із застосуванням апроксимації ядра частковою сумою ряду Тейлора).

Наведемо два приклади розв'язання інтегральних рівнянь з використанням запропонованого ГА.

Приклад 1. Знайти методом вироджених ядер наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)y(t) dt = e^x - x, \tag{12}$$

застосовуючи для апроксимації ядра $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ многочлен найкращого середньоквадратичного наближення вигляду $\tilde{K}(x, t) = z_1 x^2 t + z_2 x^3 t^2 + z_3 x^4 t^3$, та оцінити точність отриманого розв'язку.

Для знаходження оптимальних значень невідомих параметрів z_1, z_2, z_3 застосовано ГА з такими налаштуваннями: число генів $n = 3$, розмір популяції $N = 100$, максимальна кількість поколінь $p_{\max} = 300$, $\eta = 0$, число вузлів сітки $m = 441$ (крок 0,05 по кожному аргументу), число запусків алгоритму 10.

У результаті роботи ГА було знайдено, що найкращим наближенням для ядра $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ є многочлен

$$\tilde{K}(x, t) = 1,00923x^2t + 0,443055x^3t^2 + 0,26401x^4t^3, \tag{13}$$

при цьому середньоквадратична похибка апроксимації дорівнює 0,00021.

Далі замість інтегрального рівняння (12) розв'язуємо рівняння з виродженим ядром (13). Згідно з формулою (3) його розв'язком є функція $\tilde{y}(x) = e^x - x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4$. Коефіцієнти c_i знаходимо з системи лінійних рівнянь (4): $c_1 = 0,4987$, $c_2 = -0,16455$, $c_3 = -0,05057$. Тоді наближеним розв'язком інтегрального рівняння (12) є функція

$$\tilde{y}(x) = e^x - x - 0,50459x^2 - 0,14769x^3 - 0,06601x^4. \tag{14}$$

Для порівняння апроксимуємо ядро $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ сумою перших 3-х членів розкладу в ряд Тейлора

$$\bar{K}(x, t) = x^2t + \frac{x^3t^2}{2} + \frac{x^4t^3}{6}. \tag{15}$$

У цьому випадку наближений розв'язок інтегрального рівняння (12) має вигляд [1]

$$\bar{y}(x) = e^x - x - 0,50102x^2 - 0,16713c_2x^3 - 0,0422c_3x^4. \tag{16}$$

Оскільки відомий точний розв'язок $y(x) = 1$ інтегрального рівняння (12) [1], то можна порівняти точність наближених розв'язків (14) і (16). Як видно з табл. 1, розв'язок (14), для знаходження якого застосовувалась найкраща середньоквадратична апроксимація ядра $K(x, t)$, досить добре узгоджується з точним розв'язком рівняння. Абсолютна похибка $\delta_1 = 0,0000681$ наближеного розв'язку (14) є на два порядки меншою, ніж похибка $\delta_2 = 0,00832$ розв'язку (16), який одержано з використанням відрізка ряду Тейлора для апроксимації функції $K(x, t)$.

Таблиця 1

Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння (12)

Значення x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Розв'язок $\tilde{y}(x)$	0,9999319	0,9999479	1,0000102	0,9999492	0,9999956
Розв'язок $\bar{y}(x)$	0,9999581	0,9998950	1,0002331	1,0021920	1,0083211
Похибка $\delta_1 = \tilde{y} - y $	0,0000681	0,0000521	0,0000102	0,0000508	0,0000044
Похибка $\delta_2 = \bar{y} - y $	0,0000419	0,0001050	0,0002331	0,0021920	0,0083211

Приклад 2. Знайти методом вироджених ядер наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(xt) y(t) dt = \cos x, \quad (17)$$

застосовуючи для апроксимації ядра $K(x, t) = \cos(xt)$ многочлен найкращого рівномірного наближення вигляду

$$\tilde{K}(x, t) = z_1 + z_2 x^2 t^2 + z_3 x^4 t^4, \quad (18)$$

та оцінити точність знайденого розв'язку.

Для визначення найкращих значень параметрів z_1, z_2, z_3 функції (18) застосовувався ГА з такими ж налаштуваннями, як і в прикладі 1. Були отримані наступні результати: $z_1 = 0,9999582$, $z_2 = -0,4992427$, $z_3 = 0,0396285$, похибка апроксимації $0,0000418$. Отже, многочлен для наближеної заміни ядра $K(x, t) = \cos(xt)$ рівняння (17) має вигляд

$$\tilde{K}(x, s) = 0,9999582 - 0,4992427 x^2 t^2 + 0,0396285 x^4 t^4. \quad (19)$$

Далі знаходимо розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром (19). Ним є функція

$$\tilde{y}(x) = \cos x + 0,8022936 - 0,1206231 x^2 + 0,0054869 x^4. \quad (20)$$

Оскільки точний розв'язок інтегрального рівняння (17) невідомий, то для оцінки похибки наближеного розв'язку (20) застосовуємо формули (10) і (11). У нашому випадку $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \cos x$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0,0000418$ і $M = 1$.

Обчислюємо значення величин $H_f, H_K, H_{\tilde{K}}$: $H_f = 1$, $H_K\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $H_{\tilde{K}}\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Далі за формулою (11) знаходимо константу $\beta = 2$. Остаточо маємо таку оцінку для похибки наближеного розв'язку рівняння (17):

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq 0,0000836.$$

Для порівняння апроксимуємо ядро $K(x, t) = \cos(xt)$ інтегрального рівняння (17) сумою перших 3-х членів розкладу в ряд Тейлора

$$\bar{K}(x, t) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 t^2 + \frac{1}{4!} x^4 t^4. \quad (21)$$

Як видно з рис. 1, многочлен найкращого рівномірного наближення (19) апроксимує ядро $K(x, t) = \cos(xt)$ зі значно меншою похибкою, ніж сума (21). Крім того, многочлен (19) забезпечує гарне наближення ядра в усій області $Q(0, 1)$, в той час як використання часткової суми ряду Тейлора (21) дає значну похибку поблизу точки $x = 1, t = 1$.

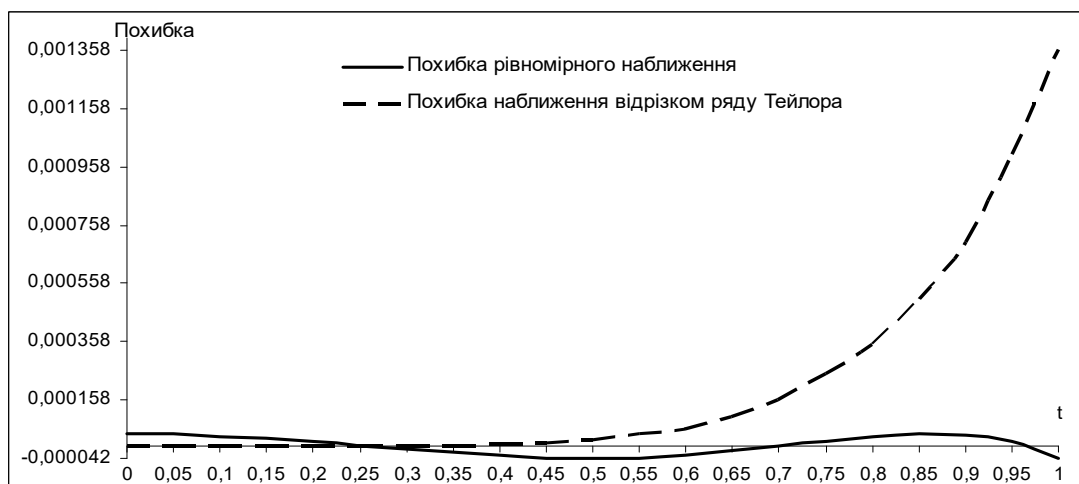


Рис. 1. Графіки похибок апроксимації ядра інтегрального рівняння (17) при $x = 1$

Розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром (21) має вигляд.

$$\bar{y}(x) = \cos x + 0,8023542 - 0,1208175 x^2 + 0,0057694 x^4. \quad (22)$$

Оцінимо точність цього розв'язку. Оскільки

$$\max_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \cos x - \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 t^2 + \frac{1}{4!} x^4 t^4 \right) \right| < \varepsilon = \frac{1}{6!} \approx 0,00139,$$

то для похибки наближеного розв'язку (22) має місце оцінка

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x) - \bar{y}(x)| \leq 0,0028.$$

Отже, похибка розв'язку (20), для знаходження якого застосовувалась найкраще рівномірне наближення ядра $K(x, t)$, є значно меншою (в 33 рази), ніж похибка розв'язку (22), отриманого з використанням для апроксимації $K(x, t)$ відрізка ряду Тейлора.

ВИСНОВКИ. При розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма II роду методом вироджених ядер використання найкращих середньоквадратичних або чебишовських наближень для апроксимації ядер довільного вигляду дозволяє отримати більш точні розв'язки цих рівнянь, ніж при застосуванні інших видів наближень (зокрема, наближень частковими сумами рядів Тейлора). В роботі запропоновано неперервний генетичний алгоритм для найкращої апроксимації ядра інтегрального рівняння як функції двох змінних за допомогою суми скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від однієї змінної. Пошук найкращих розв'язків в ГА здійснюється одразу з цілої множини точок, а не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації. Алгоритм простий в реалізації та може застосовуватися для розв'язання інших подібних задач. Отримані результати обчислювальних експериментів дають підстави вважати, що запропонований ГА є ефективним засобом апроксимації ядер інтегральних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.2 – М.: Наука, 1966. – 640 с.
2. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2013. – № 12. – С. 20–26.
3. Вакал Л. П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2011. – № 10. – С. 78–84.
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2009. – Вип. 2. – С.24–32.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141–148.
8. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 672 с.
10. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом "Астраханский университет", 2007. – 87 с.
11. Zemyan S. M. The classical theory of integral equations: a concise treatment. – Secaucus: Birkhauser Boston Inc., 2012. – 344 p.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.16

Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Вакал Л., канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ

НАИЛУЧШАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Для решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с ядром произвольного вида предложен непрерывный генетический алгоритм для наилучшей (среднеквадратической, равномерной) аппроксимации ядра суммами конечного числа произведений функций, зависящих только от одной переменной. Показано, что предложенный алгоритм является эффективным средством аппроксимации ядер.

Vakal E., PhD, Vakal Yu., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
Vakal L., PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv

BEST APPROXIMATION FOR A KERNEL OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATION WITH USING GENETIC ALGORITHM

A continuous genetic algorithm for the best (mean-square, uniform) approximation of a kernel by sum of a finite number of one-variable functions products is proposed for solving Fredholm integral equation of the second kind with a general kernel. It is shown that the proposed algorithm is an effective mean for kernels approximation.

УДК 517.947

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
e-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГИПЕРБОЛИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі для необмеженого кусково-однорідного циліндра.

ВСТУП. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численным застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [4], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Гром'яка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розв'язків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (гіперболічних, параболічних, еліптичних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6, 12].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [5, 7, 8].

У цій статті методом гібридних інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для необмеженого кусково-однорідного циліндра.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, R_{n+1} = R < +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in (-\infty; +\infty)\} \quad 2\pi - \text{періодичного}$$

щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [10],

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k – деякі невід'ємні сталі; причому

$$\alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \quad \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0; \quad c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}; \quad g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\}; \quad g(t, \varphi, z) - \text{задані обмежені неперервні функції};$$

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\} - \text{шукана функція.}$$

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [14, 15, 2].

До задачі (1)–(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-i\sigma z) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (6)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \exp(i\sigma z) d\sigma \equiv g(z), \quad (7)$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (8)$$

Інтегральний оператор F за формулою (6) внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, \varphi); t > 0; r \in I_n^+; \varphi \in [0; 2\pi)\} \quad 2\pi$ -періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \tilde{u}_j + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_j = \tilde{f}_j(t, r, \varphi, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (9)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r, \varphi, \sigma); \quad \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r, \varphi, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (10)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1} \Big|_{r=R} = \tilde{g}(t, \varphi, \sigma); \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (12)$$

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m [g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi \equiv g_m, \quad i - \text{"уявна"} \text{ одиниця}, \quad (13)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{\text{Re}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \quad (14)$$

$$F_m \left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m [g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \quad (15)$$

де $\text{Re}(\dots)$ – дійсна частина виразу (\dots) щодо φ ; $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2; k = 1, 2, 3, \dots$

Інтегральний оператор F_m , який діє за формулою (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r); t > 0; r \in I_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm}^2}{r^2} \right) \tilde{u}_{jm} + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm} = \tilde{f}_{jm}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad v_{jm} = a_{\varphi j} m / a_{rj}, \quad (16)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r, \sigma); \quad \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (17)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m} \Big|_{r=R} = \tilde{g}_m(t, \sigma); \quad (18)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1,m} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

До задачі (16)–(19) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо змінної r [2]:

$$H_{sn} [f(r)] = \int_0^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (20)$$

$$H_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (21)$$

$$H_{sn} [B_{(m)}[f(r)]] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}, \quad (22)$$

$$R_0 = 0, \quad R_{n+1} = R.$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані в [2], спектральна функція $V(r, \lambda_s)$, вагова функція $\sigma(r)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя $B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) B_{v_{km}}$, де $B_{v_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{km}^2}{r^2}$ – диференціальний оператор Бесселя, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r_1}^2 B_{v_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r_2}^2 B_{v_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m} \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r_{n+1}}^2 B_{v_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{f}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^1(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(r, \sigma) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^2(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(r, \sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{z_j}^2 \sigma^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор H_{sn} , який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\dots] = \left[\int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \right] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(t, \sigma), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^2(\lambda_s, \sigma), \tag{27}$$

де

$$\tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad \tilde{f}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{f}_{jm}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm}^k(\lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm}^k(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad k = 1, 2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma) \tilde{u}_m = \tilde{f}_m(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(t, \sigma), \tag{28}$$

$$\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d \tilde{u}_m}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma), \tag{29}$$

де $\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma); \quad \tilde{f}_m(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma),$

$$\tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^1(\lambda_s, \sigma), \quad \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^2(\lambda_s, \sigma); \quad \Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z_1}^2 \sigma^2 + \lambda_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (28), (29) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) &= \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \times \\ &\times \left[\tilde{f}_m(\tau, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(t, \sigma) \right] d\tau. \end{aligned} \tag{30}$$

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} та H_{sn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор H_{sn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1}[\dots] = colon \left(\sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}, \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}, \dots, \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \right) \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $[\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma)]$, де функція $\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma) \right] \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \left[\tilde{f}_m(\tau, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(\tau, \sigma) d\tau \right] \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (32)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma)$, визначених формулами (32), обернені оператори F^{-1} та F_m^{-1} і, виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z - \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z - \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \times \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z - \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{j,r}(t - \tau, r, \varphi - \alpha, z - \xi) g(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad (33)$$

$j = \overline{1, n+1}$, які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)} \cos(\sigma z) d\sigma \frac{V_j(r, \lambda_s) V_k(\rho, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \right) \cos(m\varphi) \quad \text{матриці впливу (функції}$$

впливу) та компоненти $W_{j,r}(t, r, \varphi, z) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j,n+1}(t, r, R, \varphi, z)$ радіальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z)$ і радіальних функцій Гріна $W_{j,r}(t, r, \varphi, z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (33) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)–(5).

Методами з [3, 17] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$ задовольняють умови:

- двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
- мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty; +\infty)$;

справджують умови спряження, а функція $g(t, \varphi, z)$ задовольняє умови 1–3, то гіперболічна початково-крайова задача (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі (1)–(5) в ізотропному необмеженому кусково-однорідному циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти із формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r = R$ крайові умови 1-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 0, \beta_{22}^{n+1} = 1$), 2-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} \equiv h > 0$).

Зауваження 3. Аналіз розв'язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^k(r, \varphi, z)$, ($k = 1, 2$), $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j^2 \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1, n}$), умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 (при $f_j(t, r, \varphi, z) \equiv 0$) розглянута гіперболічна крайова задача є математичною моделлю вільних коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.
2. Быблив О. Я., Ленюк М. П. Интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики // Вычисл. и прикл. математика. – К., 1988. – Вып. 65. – С. 24–34.
3. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
4. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: ИЛ, 1961.
5. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
6. Дейнека В. С., Сергиенко І. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004.
8. Конет І. М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013.
9. Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громьяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991.
10. Перестюк М. О., Маринец В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006.
11. Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1992.
12. Сергиенко І. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
13. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1962.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956.
16. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во МГУ, 1991.
17. Шилев Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Конет І., д-т фіз.-мат, наук, проф., Пилипук Т., канд, фіз.-мат, наук
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (функций влияния и функций Грина) впервые построено интегральное представление точного аналитического решения гиперболической краевой задачи для неограниченного кусочно-однородного цилиндра.

Konet I., Full Doctor, Prof., Pylypiuk T., PhD
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE UNLIMITED PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence functions and Green's functions) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem for unlimited piecewise homogeneous cylinder is constructed for the first time.

УДК 517.9

М. Яременко, канд. фіз.-мат. наук
Міжнародний математичний центр НАН України
e-mail: math.kiev@gmail.com

КВАЗІЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ СИСТЕМИ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянуто квазілінійні еліптичні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними у всьому евклідовому просторі, встановлено нові більш слабкі умови існування розв'язку таких систем в певному класі функцій та його єдиність (результати нові у випадку лінійних систем та квазілінійного рівняння $N = 1$).

Вступ. Стаття присвячена дослідженню умов існування розв'язку квазілінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь з вимірними коефіцієнтами, тобто встановленню обмежень на не лінійність, за яких система буде мати розв'язок і дослідженню єдиності такого розв'язку в певному класі функцій [9].

Методи дослідження подібних систем є подібними до тих, що застосовуються для розгляду одного рівняння (у нашому випадку при $N = 1$) але у випадку системи розглядається не скалярний простір, а векторний, тобто всі означення, теореми і леми повинні бути переформульовані в нових термінах з відповідними змінами. При цьому поняття спряженого елемента набуває дещо іншого змісту, навіть поняття узагальненого розв'язку можна формулювати по різному [9].

При дослідженні квазілінійних систем (або рівнянь у випадку $N = 1$, який допускається в даній статті, але за умов $l > 2$) важливими є результати які стосуються відповідних лінійних систем (або рівнянь).

При дослідженні подібних задач основна увага зосереджується на двох напрямках: по-перше, це – умови росту, по-друге, умови щодо сингулярності.

Найкращими з відомих результатів (з невеликими змінами щодо сингулярностей), які стосуються квазілінійних рівнянь та систем, є результати які сформульовано в [9 с. 465]. Але це зовсім не означає, що умови згаданої вище праці не були покращені для певних класів рівнянь, навпаки, таких робіт досить багато [5–8].

На відміну від квазілінійних рівнянь та систем, в лінійному випадку вдалося значно покращити результати, що задані вище, і одержати майже необхідні умови щодо коефіцієнтів. Оскільки ці умови важливі для розуміння наших результатів. То коротко опишемо сучасний стан проблеми у випадку одного лінійного рівняння.

Розглядається рівняння загального вигляду:

$$\Lambda u = 0, \text{ де } \Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b} \nabla - \nabla b + v,$$

$a(x): R^l \mapsto R^l \otimes R^l$ – гладка симетрична еліптична матриця, що задовольняє умову: $\exists \zeta, \xi: 0 < \zeta \leq \xi < \infty$ і виконується нерівність: $\zeta I \leq a(x) \leq \xi I$, для всіх $x \in R^l$; $\tilde{b}, b: R^l \mapsto R^l, v: R^l \mapsto R$.

Для дослідження подібних задач визначаються певні класи функцій.

Означення 1. Нехай $\varphi \in L^2_{loc}(R^l, d^l x)$. Функцію $n(\varphi; \lambda) = \text{ess sup}_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{t\Delta} |\varphi|^2(x))^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ називають нормою Неша функції φ .

Аналогічно для функції $\varphi \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ визначаються величини $k_l(\varphi; \lambda)$ і $k_{l+1}(\varphi; \lambda)$ за допомогою формул:

$$k_l(\varphi; \lambda) = \text{ess sup}_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} |\varphi|(x) dt, \quad k_{l+1}(\varphi; \lambda) = \text{ess sup}_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} |\varphi|(x) \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Функція φ належить класу Неша N_2 тоді і тільки тоді, коли $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} n(\varphi; \lambda) = 0$. Аналогічно, функція φ належить класам Като K_l і K_{l+1} , тоді і тільки тоді, коли $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} k_l(\varphi; \lambda) = 0$ і $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} k_{l+1}(\varphi; \lambda) = 0$, відповідно. Функція належить класу Неша N_2 тоді і тільки тоді, коли $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} n(\varphi; \lambda) = 0$. Функція належить класу Неша N^α_φ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} n(\varphi, \alpha; \lambda) = 0.$$

Означення 2. Клас форм-обмежених функцій $PK_\beta(A)$ визначається формулою:

$$PK_\beta(A) = \left\{ f \in L^1_{loc}(R^l, d^l x) : \langle h f h \rangle \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2 \right\}, \text{ де } \beta > 0, \quad c(\beta) \in R^1.$$

Приклади :

1. Справедливі вкладення функціональних просторів: $\{L^p(R^l, d^l x) + L^\infty(R^l, d^l x), \quad p > l, \quad l \geq 2\} \subset N_2 \subset K_{l+1}$.

2. Якщо $\varphi(t) = e^{-1}$ при $t \geq e^{-e}$ і $\varphi(t) = \left(\left(\log \frac{1}{t} \right) \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{1+\varepsilon} \right)^{-1}$ при $t \geq e^{-e}$ і довільному $\varepsilon > 0$. Тоді можна отримати, що $\left\{ L^{q,p}_{loc,u}(R^l, d^l x), \quad \frac{l}{2p} + \frac{1}{q} < 1, \quad l \geq 2 \right\} \subset N^\alpha_\varphi$.

3. Цікавим є випадок параболічного рівняння вигляду: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \right) u = 0$, де $\Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b} \nabla - \nabla b + v$,

$a(\cdot): \Omega \mapsto R^l \otimes R^l$ – симетрична еліптична матриця, яка задовольняє умову: $\exists \zeta: 0 < \zeta < \infty$ виконується нерівність: $\zeta I \leq a(\cdot), \quad x \in R^l; \quad a(\cdot) \in [L^1_{loc}(\Omega)]^{l \times l}$. Квадратична форма $H(u, v) = \langle \nabla u \cdot a \cdot \nabla v \rangle, \quad u, v \in C^1_0(\Omega)$, може

бути замкненою в L^2 . Нехай A_D – генератор, породжений замиканням форми $H(u, v)$ в L^2 і нехай оператор A_D знову позначаємо через A , тоді внаслідок теорії Берлінг – Дінні в просторі $L^p, \quad 1 \leq p < \infty$, існує позитивна стискаюча напівгрупа класу C_0 , генератором якої є оператор $-A_p$ і $A = A_2$. Отже, оператор ∇b можна розглядати як мале збурення оператора A , що визначений вище, в просторах L^2 чи L^p відповідно. Нехай $b \cdot a^{-1} \cdot b \in PK_\beta(A)$

при деякому $\beta < 1$, де оператор A – оператор Лапласа, тоді є вірною нерівність: $|\langle \nabla \varphi \cdot b \varphi \rangle| \leq \sqrt{\beta} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{c(\beta)}{2\beta} \|\varphi\|^2$

$\forall \varphi \in D(\Delta)$. Зазначені умови і нерівність $\beta < 1$ дають можливість твердити про існування в просторі $L^p, \quad C_0$ – напівгрупи стиску $e^{-t\Lambda_p}, \quad \frac{2}{2-\beta} \leq p < \infty$, де $\Lambda = A + b \cdot \nabla$. Далі для випадку лінійних операторів доводимо таку

теорему: якщо $b \cdot a^{-1} \cdot b, \quad \tilde{b} \cdot a^{-1} \cdot \tilde{b} \in PK_1(\beta A + v^+) \quad \forall \beta > 0$, де $v = v^+ - v^-, \quad 0 \leq v^\pm \in L^1_{loc}$, то в просторі $L^p, \quad 1 < p < \infty$, існує така квазістискаюча напівгрупа $e^{-t\Lambda_p}$ класу C_0 з генератором $-\Lambda_p$, що $\Lambda_2 = A + \tilde{b} \nabla - \nabla b + v$, і справедлива є

$$\text{наступна оцінка: } \left\| e^{-t\Lambda_p} \right\|_{r \rightarrow q} \leq C_{r,q} e^{\frac{\omega_{r,q}}{2rq} t^{-1(r-q)}}, \quad 1 < r < q < \infty, \quad t > 0.$$

Для порівняння з результатами, які одержано у данні статті для квазілінійних систем, важливим є випадок лінійного рівняння вигляду: $(-\nabla a \nabla + \tilde{b} \nabla - \nabla b) u = 0$ для якого доводиться, що достатніми умовами існування

розв'язку цього рівняння є належність функцій-коефіцієнтів рівняння \tilde{b} класу Неша та b класу Като, або \tilde{b} класу Като, а b класу Неша, тобто один з функціональних коефіцієнтів повинен належати класу Неша, а інший класу Като (в цьому розумінні класи Неша та Като взаємно спряжені).

Означення 3. Соболевий простір $W_m^p(R^l, d^l x)$ (або $W_m^p(R^l)$ чи W_m^p) є банаховий простором, який утворюють всі елементи простору $L^p(R^l)$, узагальнені похідні яких існують до m -го порядку включно і є інтегрованими зі степеню p .

$W_{m,0}^p(R^l, d^l x)$ – множина елементів $W_m^p(R^l, d^l x)$, носій яких є компактним. Лінійні операції визначаються формулою подібною до випадку простору Лебега, норма вводиться за наступною рівністю:

$\|f\|_{W_m^p} = \left(\|f\|_{L^p}^p + \sum_{1 \leq |s| \leq m} \|D^s f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$, або p – та степінь норми $\|f\|_{W_m^p}^p = \sum_{|s| \leq m} \|D^s f\|_{L^p}^p$. Спряженим до простору

$W_m^p(R^l, d^l x)$ простір $W_{-m}^q(R^l, d^l x)$, який за означенням можна ввести як простір усіх лінійних функціоналів на

лінійному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$. Двоїстий елемент має вигляд $f^{cn} = - \sum_{r=1, \dots, l} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \left| \frac{\partial f}{\partial x_r} \right|^{p-2} \right)$.

Оскільки дана стаття присвячена дослідженню систем квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, то невідомою є вектор-функція, тобто елемент $u = (u_1(x), \dots, u_N(x))$, $x \in R^l$, або упорядкована множина з N елементів певного функціонального простору, наприклад $u_i \in W_m^p(R^l, d^l x)$, $i = 1, \dots, N$.

Будемо використовувати наступні позначення:

$$\|u\|_{L^p(R^l)} = \left\langle \sum_{i=1, \dots, N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{1}{p}} = \left\langle \sum_{i=1, \dots, N} \langle |u_i|^p \rangle \right\rangle^{\frac{1}{p}}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1, \dots, N} \langle u_i, v_i \rangle \quad \forall u \in L^p(R^l) \quad \forall v \in L^q(R^l),$$

де під елементом $u \in L^p(R^l)$ мається на увазі упорядкований набір елементів довжини N , кожен з яких належить скалярному простору $L^p(R^l)$, а v за аналогією належить двоїстому простору $L^q(R^l)$.

$$\text{Має місце рівність: } \|u\|_{L^p(R^l)}^{p-1} = \left\langle \sum_{i=1, \dots, N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{p-1}{p}} = \left\langle \sum_{i=1, \dots, N} \left(|u_i|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right\rangle^{\frac{1}{q}} = \|u^{p-1}\|_{L^q(R^l)}.$$

Норма в векторному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$: $\|u\|_{W_m^p} = \left(\sum_{i=1, \dots, N} \left(\|u_i\|_{L^p}^p + \sum_{1 \leq |s| \leq m} \|D^s u_i\|_{L^p}^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}$, тобто належність вектор-

функції до якого-небудь функціонального простору означає, що кожна компонента вектор-функції належить до цього простору.

1. Постановка задачі. Розглянемо в усьому евклідовому просторі R^l систему вигляду:

$$\lambda u^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} u^k \right) + b^k(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) = f^k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

де невідомою є вектор-функція $u^k(x) = (u^1, \dots, u^N)$, $\lambda > 0$ – дійсне число і $f(x) = f^k = (f^1, \dots, f^N)$ – задана вектор-функція. Тут $b(x, u, \nabla u) = b^k(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})$ – вектор-функція розмірності N трьох змінних: вектора розмірності l , вектора розмірності N , матриці розмірності $l \times N$.

Кажуть, що вимірна матриця $a_{ij}(x, u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності, якщо $\exists v: 0 < v < \infty$ і виконується наступна нерівність $\forall l \leq a(x, u)$ для майже всіх $x \in R^l$, тобто

$$v \sum_{i=1}^l \xi_i^2 \leq \sum_{ij=1, \dots, l} a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in R^l. \quad (2)$$

Зауваження. Будемо вважати, що система (1) складається з N нелінійних рівнянь з N невідомими функціями причому припускається, що N може дорівнювати одиниці і рівняння можуть бути лінійними, але всі функції визначені на евклідовому просторі R^l , причому завжди $l \geq 3$ іншими словами випадок прямої і площини виключений із дослідження (в цих випадках ми потрапляємо в умови відомих контр прикладів).

Узагальненим (слабким) розв'язком в $W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ будемо називати елемент $u(x)$ який задовольняє інтегральну тотожність:

$$\lambda \langle u, v \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1, \dots, N} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \langle b, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad (3)$$

для будь-якого елементу $v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Виходячи з цього означення за лівими частинами системи (1) побудуємо форму $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^q \rightarrow R$:

$$h_\lambda^p(u, v) \equiv \lambda \langle u, v \rangle + \langle \nabla v \circ a \circ \nabla u \rangle + \langle b(x, u, \nabla u), v \rangle, \quad (4)$$

яку вважатимемо визначеною для всіх елементів $u \in W_1^p(R^l, d^l x), v \in W_1^q(R^l, d^l x)$. Дана скалярна форма визначена на векторних функціональних просторах $W_1^p(R^l, d^l x) \times W_1^q(R^l, d^l x)$ розмірностей N і приймає дійсні числові значення, тобто

$$h_\lambda^p : \left(\times_1^N W_1^p(R^l, d^l x) \right) \times \left(\times_1^N W_1^q(R^l, d^l x) \right) \rightarrow R.$$

Основний об'єкт дослідження – існування розв'язку таких систем, тобто встановлення належності узагальненого розв'язку певному функціональному простору за умов, що коефіцієнти рівняння належать до певних функціональних класів і просторів.

2. Умови на функції, що утворюють систему (1).

1. $b(x, y, z)$ є вимірною векторною функцією своїх аргументів і $b \in L_{loc}^1(R^l)$;

2. Вектор-функція $b(x, y, z)$ майже скрізь задовольняє нерівності:

$$|b(x, u, \nabla u)| \leq \mu_1(x) |\nabla u| + \mu_2(x) |u| + \mu_3(x). \quad (5)$$

В умові (5) функції $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_1^2 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$, $|\langle h \mu_1^2 h \rangle| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_2 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$, $|\langle h \mu_2 h \rangle| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$.

3. Приріст вектор-функції $b(x, y, z)$ майже скрізь задовольняє умову:

$$|b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v)| \leq \mu_4(x) |\nabla(u - v)| + \mu_5(x) |u - v|, \quad (5a)$$

де $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_4^2 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$ і $|\langle h \mu_4^2 h \rangle| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_5 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$ і $|\langle h \mu_5 h \rangle| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$.

3. Побудова оператора, що породжений формою, яка складена за лівими частинами системи (1).

Дослідження будемо проводити за допомогою наступної схеми: за рівнянням будемо форму і вивчаємо її властивості, показуємо, що з цією формою можна асоціювати певний нелінійний оператор властивості якого вивчаються за допомогою форми, що породжує його. Використовуючи метод монотонних операторів показуємо, що вихідна система має розв'язок в певному Соболевському просторі.

Реалізувати цю схему можна лише у випадку існування певних апріорних оцінок. Подібні оцінки є теоремами про властивості розв'язків за певних умов на функції, що утворюють дану систему, тобто припускаємо певну гладкість коефіцієнтів і отримуємо гладкість розв'язків системи. Оцінки розв'язків є ключовим моментом доведення теорем існування і за наявності таких оцінок можна використати різні методи доведення розв'язності системи.

Перевага методу аналізу нелінійних операторів полягає в загальності підходу до розгляду задачі і можливості застосування більш слабких умов на коефіцієнти, а недолік – в неможливості врахувати специфіку функцій, з яких складається задана система.

Оцінимо форму (4), яка складена за системою (1) на спряженому елементі $u|u|^{p-2} = (u_1|u_1|^{p-2}, \dots, u_N|u_N|^{p-2})$:

$$\begin{aligned} |h_\lambda^p(u, u|u|^{p-2})| &\equiv \left| \lambda \langle u, u|u|^{p-2} \rangle + \langle \nabla(u|u|^{p-2}) \circ a \circ \nabla u \rangle + \langle b(x, u, \nabla u), u|u|^{p-2} \rangle \right| \leq \\ &\leq \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + \langle \mu_1(x) |\nabla u| + \mu_2(x) |u| + \mu_3(x), |u|^{p-1} \rangle \leq \\ &\leq \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + \frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle + \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 + \|\mu_3\| \|u\|^{p-1}, \end{aligned}$$

де використано позначення вектор-функції $w = u|u|^{\frac{p-2}{2}}$, відповідно матриця $\nabla w = \frac{p}{2} |u|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u$ і оцінки:

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 |\nabla u|, |u|^{p-1} \rangle &= \left\langle \mu_1 |u|^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|, |u|^{\frac{p}{2}} \right\rangle \leq \frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle, \quad \langle \mu_2(x), w^2 \rangle \leq \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2, \\ \langle \mu_3(x), |u|^{p-1} \rangle &\leq \|\mu_3\| \| |u|^{p-1} \| = \|\mu_3\| \|u\|^{p-1}, \end{aligned}$$

тут $|u|^{p-1} = \left(\sum_{i=1, \dots, N} |u_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$. Далі використаємо нерівності Гельдера та Юнга

$$\frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle \leq \frac{2}{p} \|\mu_1 w\| \|\nabla w\|, \quad \|\mu_1 w\| = \left\langle (\mu_1 w)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle &\leq \frac{2}{p} \|\mu_1 w\| \|\nabla w\| = \frac{2}{p} \|\nabla w\| \left((\mu_1 w)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{p} \|\nabla w\| \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Тоді одержимо

$$\begin{aligned} \left| h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2}) \right| &\leq \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right) + \\ &+ \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 + \frac{\sigma^p}{p} \|\mu_3\|^p + \frac{1}{\sigma^q q} \|u\|^p, \end{aligned}$$

маємо

$$\left| h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2}) \right| \leq \left(\lambda + \left(\frac{\varepsilon^2}{p} + 1 \right) c(\beta) + \frac{1}{\sigma^q q} \right) \|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} + \frac{\beta \varepsilon^2}{p} + \beta \right) \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + \frac{1}{p} \frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \frac{\sigma^p}{p} \|\mu_3\|^p.$$

Зауваження. Тут $\|w\|_{L^2(R^l)}^2 = \|u\|_{L^p(R^l)}^p$, бо $\|w\|_{L^2(R^l)}^2 = \left\langle \sum_{i=1, \dots, N} u_i |u_i|^{\frac{p-2}{2}}, u_i |u_i|^{\frac{p-2}{2}} \right\rangle = \|u\|_{L^p(R^l)}^p$.

Проаналізуємо сенс числових коефіцієнтів, які входять в оцінку форми: коефіцієнт β – форм-грань, залежить лише від даних задачі (гладкості коефіцієнтів системи (μ_i)); коефіцієнт $c(\beta)$ залежить від β ; коефіцієнти ε і σ – довільні додатні сталі; коефіцієнт ε вибирається в залежності від матриці a сталих еліптичності, при чому коефіцієнт σ впливає на здвиг спектру його значення менш суттєво.

Отже, для кожного фіксованого вектора $u \in W_1^p$ форма $h_\lambda^p(u, v)$ є неперервним лінійним (по $v \in W_1^q$) функціоналом над W_1^q . Отже кожному $u \in W_1^p$ ставиться у відповідність елемент спряженого до W_1^q простору W_{-1}^p , тобто існує відображення $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$.

4. Дослідження відображення $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ діє таким чином: $h_\lambda^p(u, v) = \langle A^p(u), v \rangle$.

Означення 4. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ називається коерцитивний, якщо форма $h_\lambda^p(u, v) = \langle A^p(u), v \rangle$ задовольняє умову:

$$\lim_{\|u\|_{W_1^p} \rightarrow \infty} \frac{h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2})}{\|u |u|^{p-2}\|_{W_1^q}} = \infty. \quad (6)$$

Лема 1. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ є коерцитивним.

Доведення. Для доведення потрібно оцінити форму, що породжує оператор низу, це можна зробити за допомогою оцінок, які аналогічні тим, що записані вище, а саме:

$$\begin{aligned} h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2}) &= \lambda \langle u, u |u|^{p-2} \rangle + \langle \nabla (u |u|^{p-2}) \circ a \circ \nabla u \rangle + \langle b(x, u, \nabla u), u |u|^{p-2} \rangle \geq \\ &\geq \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle - \langle \mu_1(x) |\nabla u| + \mu_2(x) |u| + \mu_3(x) |u|^{p-1} \rangle \geq \\ &\geq \left(\lambda - \left(\left(\frac{\varepsilon^2}{p} + 1 \right) c(\beta) + \frac{1}{\sigma^q q} \right) \right) \|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \left(\frac{\beta \varepsilon^2}{p} + \beta + \frac{1}{\nu p \varepsilon^2} \right) \right) \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle - \frac{\sigma^p}{p} \|\mu_3\|^p, \end{aligned}$$

позначення ті самі, що і в попередньому пункті, але у даному випадку доданком $\frac{\sigma^p}{p} \|\mu_3\|^p$ можна знехтувати, бо це –

постійне число. Важливе значення має число β , бо це – міра сингулярності коефіцієнтів, саме форм-грань вирішує, який знак має другий доданок в оцінці форми, оскільки ε пов'язує здвиг спектру і сингулярність.

Означення 5. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ є акретивний в $L^p(R^l, d^l x)$, якщо виконується нерівність:

$$\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v) |u-v|^{p-2} \rangle \geq 0, \forall u, v \in W_1^p(R^l, d^l x). \quad (7)$$

Пояснення. Різниця розуміється як різниця елементів N мірного лінійного (евклідового) простору, тобто по елементна, а $(u-v) |u-v|^{p-2} = ((u_1 - v_1) |u_1 - v_1|^{p-2}, \dots, (u_N - v_N) |u_N - v_N|^{p-2})$.

Зауваження. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ називається строго акретивний в $L^p(R^l, d^l x)$, якщо виконується нерівність: $\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v) |u-v|^{p-2} \rangle \geq 0, \forall u, v \in W_1^p(R^l, d^l x)$ і $\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v) |u-v|^{p-2} \rangle = 0, \forall u, v \in W_1^p(R^l, d^l x)$ можливо лише тоді і тільки тоді коли $u = v$.

Лема 2. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ визначає строго акретивне відображення в $L^p(R^l, d^l x)$

Доведення. Дана властивість є однією з ключових при використанні методу монотонності, а тому її детальне доведення.

$$\begin{aligned} & \langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle = \\ & = \lambda \langle u, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle + \langle \nabla((u-v)|u-v|^{p-2}) \circ a \circ \nabla u \rangle + \langle b(x, u, \nabla u), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle - \\ & - \lambda \langle v, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle + \langle \nabla((u-v)|u-v|^{p-2}) \circ a \circ \nabla v \rangle + \langle b(x, v, \nabla v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle = \\ & = \lambda \langle u-v, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle + \langle \nabla((u-v)|u-v|^{p-2}) \circ a \circ \nabla(u-v) \rangle + \langle b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle = \\ & = \lambda \langle u-v, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle + \langle \nabla((u-v)|u-v|^{p-2}) \circ a \circ \nabla(u-v) \rangle - \langle \mu_4(x)|\nabla(u-v)| + \mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle = \\ & = \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle - \langle \mu_4(x)|\nabla(u-v)| + \mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle, \end{aligned}$$

де введено позначення

$$w = (u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}, \quad \nabla w = \frac{p}{2}|u-v|^{\frac{p-2}{2}} \nabla(u-v).$$

Далі оцінимо

$$\begin{aligned} & \frac{2}{p} \langle \mu_4(x)|\nabla w|, |w| \rangle \leq \frac{2}{p} \|\mu_4 w\| \|\nabla w\| = \frac{2}{p} \|\nabla w\| \langle (\mu_4 w)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{2}{p} \|\nabla w\| \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right), \end{aligned}$$

i

$$\langle \mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle = \langle \mu_5, w^2 \rangle \leq \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2.$$

Отже маємо

$$\begin{aligned} & \langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle \geq \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle - \\ & - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right) + \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \geq \\ & \geq \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c(\beta)}{p} - c(\beta) \right) \|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \beta \frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2 v} - \beta \right) \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Означення 6. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ визначає хемінеперервне відображення, якщо справджується властивість: $\omega\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} A^p(u+tv) = A^p(u)$, $\forall u, v \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ в нормі $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$.

Лема 3. Оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ визначає хемінеперервне відображення.

Доведення. Доведення базується на міркуваннях, які подібні попереднім. Маємо: $\forall u, v \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ і $\forall w \in W_1^q(R^l, d^l x)$:

$$\begin{aligned} & \left| \langle A^p(u+tv) - A^p(u), w \rangle \right| = \left| \lambda \langle u+tv, w \rangle + \langle \nabla w \circ a \circ \nabla(u+tv) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle b(x, u+tv, \nabla(u+tv)), w \rangle - \lambda \langle u, w \rangle - \langle \nabla w \circ a \circ \nabla u \rangle - \langle b(x, u, \nabla u), w \rangle \right| = \\ & \leq \left| \lambda t \langle v, w \rangle + t \langle \nabla w \circ a \circ \nabla v \rangle + t \langle \mu_4(x)|\nabla v| + \mu_5(x)|v|, w \rangle \right|_{t \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для знаходження граничного переходу використано задані умови, тобто обмеженість останнього доданку. Лему 3 доведено.

Отже, за системою (1) складено форму (4) яка породжує нелінійний оператор $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$, який задовольняє умови коерціативності, акретивності та хемінеперервності.

Теорема 1. Квазілінійна еліптична система (1) за умов (2), (5) має єдиний розв'язок в W_1^p .

5. Метод Гальоркіна. Доведемо існування розв'язку системи (1) та його єдиність методом Гальоркіна з використанням спеціального базису. Єдиність розв'язку буде наслідком строгої акретивності оператора, що породжений формою, яка складена за системою рівнянь, і доводиться від супротивного.

Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W_1^p(R^l, d^l x)$, $W_1^q(R^l, d^l x)$, відповідно, і нехай $[v_1, \dots, v_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів $\langle u_k, u_k^* \rangle = \|u_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $u_k = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, $u_k^* = \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь: $\langle A^p(u_k) - f, v_i^* \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k$. Далі покажемо, що ця система має розв'язок в лінійній оболонці перших n елементів базису $\{v_i\}$. Дійсно ця система визначає неперервне відображення сфери в евклідовому просторі, а отже має місце аналог леми про гострий кут. Це відображення

$\vec{B}(\vec{C}) : B_i(\vec{C}) = \langle A^p(u_k) - f, v_i^* \rangle$, внаслідок коерцитивності оператора

$A^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут, тобто

$$\left\langle \vec{B}(\vec{C}), \vec{C} \right\rangle = \left\langle A^p \left(\sum_{i=1}^k c_i v_i \right) - f, \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^* \right\rangle = \left\langle A^p(u_k) - f, u_k | u_k |^{p-2} \right\rangle \geq \left(\frac{h_\lambda^p(u_k, u_k | u_k |^{p-2})}{\|u_k | u_k |^{p-2}\|_{W_1^q}} - \|f\|_{W_{-1}^p} \right) \|u_k | u_k |^{p-2}\|_{W_1^q} \geq 0.$$

Оскільки $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ – неперервне відображення на скінченно-вимірних підпросторах простору $W_1^p(R^l, d^l x)$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > 0$ існує такий елемент \vec{C} , $|\vec{C}| = R$, що $\vec{B}(\vec{C}) = 0$. Вище вказано спосіб побудови послідовності $\{u_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками системи рівнянь $\langle A^p(u_k) - f, v_i^* \rangle = 0$. Покажемо, що ця послідовність збігається до розв'язку системи.

Використавши коерцитивність оператора $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$, одержимо нерівність $\|A^p(u_k)\|_{W_{-1}^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

Лема 4. Узагальнені розв'язки системи рівнянь (1) за умов (5) рівномірно обмежені в W_1^p .

Доведення. Складемо інтегральну тотожність: $\lambda \langle u_k, \xi \rangle + \langle d\xi \circ a \circ du_k \rangle + \langle b(x, u_k, \nabla u_k), \xi \rangle \equiv \langle f, \xi \rangle$, покладемо $\xi = u_k | u_k |^{p-2}$, тоді маємо

$$\lambda \langle u_k, u_k | u_k |^{p-2} \rangle + \frac{4(p-1)}{p^2} \left\langle d \left(u_k | u_k |^{\frac{p-2}{2}} \right) \circ a \circ d \left(u_k | u_k |^{\frac{p-2}{2}} \right) \right\rangle + \langle b, u_k | u_k |^{p-2} \rangle \equiv \langle f, u_k | u_k |^{p-2} \rangle.$$

З умов (15), використовуючи нерівності Юнга і Гельдера, знаходимо:

$$|\langle b, u_k | u_k |^{p-2} \rangle| \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 (\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2) \right) + \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 + \frac{\sigma^p}{p} \|u_3\|^p + \frac{1}{\sigma^q} \|u_k\|^p.$$

Далі, одержимо:

$$|\langle f, u_k | u_k |^{p-2} \rangle| \leq \|f\|_p \|u_k | u_k |^{p-2}\|_q \leq \|f\|_p \|u_k\|^{p-1}.$$

Знаходимо

$$\|u_k\| + \|\nabla u_k\| \leq c(\lambda, p, l, \lambda_0, N) \|f\|.$$

Отже, оскільки $\|u_k\|_{W_1^p} < C$, де стала C залежить лише коефіцієнтів системи рівнянь, внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p(R^l, d^l x)$ отримуємо, що існує така підпослідовність $(u_{k'}(x))$, для якої виконується властивість: $u_{k'} \xrightarrow{W_1^p} u_0$ слабо і $A^p(u_{k'}) \xrightarrow{W_{-1}^p} y$ слабо.

Покажемо, що $y = A^p(u_0) = f$. Звідси випливатиме, що відображення $A^p : W_1^p \rightarrow W_{-1}^p$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням "на". Складемо інтегральні тотожності: $\langle A^p(u_{k'}), v_i^* \rangle = \langle f, v_i^* \rangle$, $i = 1, \dots, k'$, і перейдемо до границі при $k' \rightarrow +\infty$. Тоді одержимо: $\lim_{n \rightarrow \infty} A^p(u_{k'}) = y = f$, де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$. Використовуючи акретивність оператора $A^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ в просторі $L^p(R^l, d^l x)$, маємо: $\lim_{k' \rightarrow \infty} \langle A^p(u_{k'}) - A^p(v), (u_{k'} - v) | u_{k'} - v |^{p-2} \rangle = \langle y - A^p(v), (u_0 - v) | u_0 - v |^{p-2} \rangle \geq 0$. Поклавши $v = u_0 - tz$, $t > 0$, $z \in W_1^p(R^l, d^l x)$ і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1} , отримаємо $\langle y - A^p(u_0 - tz), z | z |^{p-2} \rangle \geq 0$.

З хемінеперервності оператора $A^P : W_1^P \rightarrow W_{-1}^P$, враховуючи довільність елемента $z \in W_1^P(R^l, d^l x)$, одержимо $y = A^P(u_0) = f$. Таким чином для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{u_k\}$ і доведено її збіжність до елемента $u_0 \in W_1^P(R^l, d^l x)$. Отже елемент $u_0 \in W_1^P(R^l, d^l x)$ є розв'язком системи за заданих умов.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A^P(\cdot)$. Дійсно, нехай u_0, u'_0 – два таких розв'язки. Тоді, справедливі рівності: $\langle A^P(u_0), w \rangle = f, \langle A^P(u'_0), w \rangle = f \quad \forall w \in W_1^q(R^l, d^l x)$, а отже $\langle A^P(u_0) - A^P(u'_0), w \rangle = 0$. Поклавши $w = (u_0 - u'_0) |u_0 - u'_0|^{p-2}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A^P(u_0) - A^P(u'_0), (u_0 - u'_0) |u_0 - u'_0|^{p-2} \rangle \geq \\ &\geq \lambda \|u_0 - u'_0\|_p^p + (p-1) \langle \nabla(u_0 - u'_0) \circ a \circ \nabla(u_0 - u'_0), |u_0 - u'_0|^{p-2} \rangle - \langle \mu_4(x) |\nabla(u_0 - u'_0)| + \mu_5(x) |u_0 - u'_0|, (u_0 - u'_0) |u_0 - u'_0|^{p-2} \rangle \geq \\ &\geq \lambda \|u_0 - u'_0\|_p^p + (p-1) \langle \nabla(u_0 - u'_0) \circ a \circ \nabla(u_0 - u'_0), |u_0 - u'_0|^{p-2} \rangle - \\ &\quad \langle \mu_4(x) |\nabla(u_0 - u'_0)| + \mu_5(x) |u_0 - u'_0|, (u_0 - u'_0) |u_0 - u'_0|^{p-2} \rangle \geq \\ &\geq \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c(\beta)}{p} - c(\beta) \right) \|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \beta \frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2 \nu} - \beta \right) \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

що, внаслідок строгої акретивності оператора A^P еквівалентно рівності $u_0 = u'_0$.

Висновки. Доведено існування розв'язку квазілінійної еліптичної системи рівнянь (1) в усьому евклідовому просторі R^l за досить загальних умов щодо коефіцієнтів (2), (5), а саме: за умов форм-обмеженості модуля вектор-функцій, що входять в рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вишик М. Й. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. 29(71), №3. – С. 615–676.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. Гильберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильберг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
4. Дубинский Ю. А., Похожаев С. И. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений / Ю. А. Дубинский, С. И. Похожаев // Матем. сб. – 1967. – Т. 72(114), №2. – С. 226–236.
5. Коваленко В. Ф., Кухарчук Н. М., Семенов Ю. А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $\frac{1}{2} \Delta + d \nabla$ / В. Ф. Коваленко, Н. М. Кухарчук, Ю. А. Семенов. – Деп. в УкрНИИНТИ. – Киев, 1985. – №2380-Ук 85.
6. Кухарчук М. М. Про розв'язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в R^l / М.М.Кухарчук // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 2. – С. 145–158.
7. Кухарчук Н. М. Гладкость обобщенных решений квазилинейных уравнений с непрерывными коэффициентами / Н. М. Кухарчук // Труды 5-й Респ. конференции по нелинейным задачам математической физики. – Деп. в УкрНИИНТИ. – Донецк: Донецкий гос. ун-т. – 1985.
8. Кухарчук Н. М. Априорные оценки обобщенных производных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка / Н. М. Кухарчук. – Киев, 1987. – 60 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.36).
9. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 579 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.15

Яременко Н., канд. физ.-мат. наук
Международный математический центр НАН Украины

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЕФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрены квазилинейные эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных во всем евклидовом пространстве, установлены новые более слабые условия существования решения таких систем в определенном классе функций и их единственность (результаты новые в случае линейных систем и квазилинейного уравнения $N = 1$).

Yaremenko M., Ph.D
International Mathematical Centre of National Academy of Science of Ukraine

QUASI-LINEAR ELLIPTIC SYSTEM WITH SINGULAR COEFFICIENTS

We consider quasi-linear elliptic system of differential equations in whole Euclidean space, we obtained new conditions of existence of a weak solution in a certain class of functions and its uniqueness (the results is new in the case of linear and quasi-linear equations $N = 1$).

УДК 517.912:512.816

М. Серов, д-р фіз.-мат. наук, проф., Н. Ічанська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ПолтНТУ ім. Юрія Кондратюка, Полтава
e-mail: m.serov@ukr.net, natasha.ichanska@mail.ru

ПРО КОНФОРМНУ ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто багатовимірні нелінійні еволюційні рівняння. Серед широкого класу рівнянь відібрано ті, що є інваріантними відносно конформної алгебри, для деяких з них знайдено максимальні алгебри інваріантності.

ВСТУП. Задача інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними тісно пов'язана з їх груповими властивостями. Основи групового аналізу диференціальних рівнянь було закладено ще С. Лі [22, 23]. Продовження розвитку ідей С. Лі в сучасному формулюванні було запропоноване Л. В. Овсянніковим [12, 13, 14], який першим використав симетрію як критерій відбору диференціального рівняння в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. Пряма та обернена задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними є одними з найважливіших та, безумовно, актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики. (див., наприклад, праці Олвера-Р. Херредеро [20], Р. Вілтшіра–А. Г. Нікітіна [24], Р. М. Черніги [18], Р. З. Жданова–В. І. Лагна [17, 29, 7] та ін.).

Розглянемо клас нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку вигляду

$$\Delta u = F(u, u_0), \quad (1)$$

де $x = (x_0, \bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$, $u_0 = \partial u / \partial x_0$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(x)$, F – гладкі функції.

Важливість цього класу еволюційних рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все тим, що він містить як частинні випадки відомі рівняння математичної фізики. Крім того, до рівнянь з класу (1) приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- і масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину, тощо. Крім того, ці рівняння в частинному випадку є потенціальними багатовимірними рівняннями дифузії з розв'язаною задачею групової класифікації [13, 5, 6, 16].

Дослідженням симетрійних властивостей узагальнень нелінійного рівняння теплопровідності присвячено багато праць, в яких вивчено симетрійні властивості рівнянь теплопровідності з джерелом (стоком) [5], дифузії-конвекції [21], з конвективним та реактивним членами [15, 19], повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних [17, 10, 11, 1] та нелінійних [28, 3] одновимірних еволюційних рівнянь. У даній статті описано всі можливі зображення конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантними нелінійні багатовимірні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку (1) і розв'язано задачу про знаходження функцій F , при яких рівняння (1) є інваріантними відносно конформної алгебри. Зазначимо, що у [8, 2] обернена задача симетрійної класифікації розглянута повністю для загальних одновимірних рівнянь і систем довільного порядку та для виділеного підкласу конформно інваріантних рівнянь проведено повну групову класифікацію, а у [9, 26] розглянуто задачу про повну групову класифікацію нелінійних одновимірних рівнянь довільного порядку і для конформно інваріантних рівнянь, що володіють найширшими симетрійними властивостями, проведено редукцію.

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду (1). Використовуючи класичні результати Лі щодо диференціальних інваріантів груп перетворень, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Основною алгеброю класу рівнянь (1) є алгебра:*

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b \rangle. \quad (2)$$

Тут і далі $a = \overline{1, n}$, $b = \overline{1, n}$, де n – кількість просторових змінних.

Доведення. Нехай $S = \Delta u - F(u, u_0)$, де $\Delta u = \delta_{ab} u_{ab}$, $a = 1, 2, \dots, n$, $b = 1, 2, \dots, n$. Подіємо інфінітезимальним оператором на S : $XS = \delta_{ab}^{ab} \eta - F_u \eta - F_{u_0}^0 \eta$. Підставивши в $\tilde{X}S$ відповідні перші та другі продовження, після переходу на многовид та розщеплення відносно старших похідних, отримаємо рівняння:

$$\xi_a^0 = 0, \xi_u^0 = 0, \xi_u^a = 0, \xi_b^a + \xi_a^b = 0, a \neq b, \xi_1^1 = \xi_2^2 = \dots = \xi_n^n \quad (3)$$

Розщеплення $\tilde{X}S$ відносно степенів перших похідних за просторовими змінними задає:

$$\eta_{uu} = 0, 2\eta_{au} - \Delta \xi^a + \xi_0^a F_{u_0} = 0, \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi_0^0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi_1^1) F + \Delta \eta. \quad (4)$$

Випадок $F_{u_0} = const$ ми не розглядаємо, бо він вже вивчений (див. [12, 13, 15]). Тому тут і далі вважаємо $F_{u_0} \neq const$. Остаточо, визначальна система рівнянь має вигляд:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \xi^a = \xi^a(\bar{x}), \xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab} \xi_1^1, 2a_a = \Delta \xi^a, \quad (5)$$

$$\eta = a(x_0, \bar{x})u + b(x_0, \bar{x}), \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi_0^0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi_1^1) F + \Delta \eta. \quad (6)$$

Основна алгебра інваріантності класу рівнянь (1) описується операторами, координати яких завольняють наступні рівняння:

$$\xi^0 = 0, \xi_1^1 = 0, \xi_b^a + \xi_a^b = 0, \Delta \xi^a = 0, \eta = 0. \quad (7)$$

Розв'язком (7) є функції $\xi^0 = d_0, \xi^a = C_{ab} x_b + d_a$, де $C_{ab} = -C_{ba}, d_0, d_a$ – довільні сталі, що доводить твердження теореми 1.

Зауваження. 1. *Визначальна система (5)–(6) однозначно задає вигляд оператора інваріантності заданого класу рівнянь, а саме: якщо рівняння з класу (1) є інваріантним відносно оператора X , то цей оператор повинен мати вигляд:*

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^a(\bar{x})\partial_a + [a(x_0, \bar{x})u + b(x_0, \bar{x})]\partial_u. \quad (8)$$

2. *Розв'язки системи (5)–(6) дають повну групову класифікацію рівняння (1) відносно вигляду функції F .*

3. *Алгебра (2) є прямою сумою оператора зсуву по часу ∂_0 та алгебри Евкліда $AE(n)$.*

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ. Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [12, 14]. Тому знайдемо локальні перетворення еквівалентності класу рівнянь (1).

Теорема 2. *Максимальною локальною групою G^\sim точкових перетворень еквівалентності класу еволюційних рівнянь $\Delta u = F(u, u_0)$ є група, яка породжується оператором $E = (C_0x_0 + d_0)\partial_0 + (C_{ab}x_b + \varkappa x_a + d_a)\partial_a + (C_1u + C_2)\partial_u + (C_1 - 2\varkappa)F\partial_F$, де $C_0, d_0, C_{ab} = -C_{ba}, \varkappa, d_a, C_1, C_2$ – довільні сталі.*

Доведення. З умови інваріантності рівняння (1) при додаткових умовах $F_{u_0} = 0, F_u = 0$ відносно оператора

$E = \xi^0\partial_0 + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u + \zeta\partial_F$, одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій $\xi^0, \xi^a, \eta, \zeta$:

$$\begin{aligned} \xi_a^0 = \xi_u^0 = 0, \xi_0^a = \xi_u^a = 0, \xi_b^a + \xi_a^b = 0, \\ \eta_u = 0, \eta_{uu} = 0, \zeta_u = 0, \zeta = (\eta_u - 2\xi_1^1)F. \end{aligned} \quad (9)$$

Загальним розв'язком системи (9) є функції, що однозначно визначають координати інфінітезимального оператора E . Теорему доведено.

Зауваження. 1. *Група перетворень еквівалентності даного класу рівнянь складається із зсуву по x_μ , зсуву по u , поворотів по просторовим змінним, розтягів по x_μ , розтягу по u та розтягу по F . Це означає, що зв'язна компонента одиниці в G^\sim задається перетвореннями еквівалентності*

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow e^{\theta_5}x_0 + \theta_0, \\ x_a &\rightarrow e^{\theta_6}(x_a \cos \theta_8 - x_b \sin \theta_8) + \theta_a, \\ x_b &\rightarrow e^{\theta_6}(x_b \sin \theta_8 + x_a \cos \theta_8) + \theta_b, \\ u &\rightarrow e^{\theta_7}u + \theta_4, F \rightarrow e^{\theta_7 - 2\theta_6}F. \end{aligned} \quad (10)$$

2. *Крім неперервних перетворень еквівалентності (10), клас рівнянь (1) також допускає наступні дискретні перетворення еквівалентності:*

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow x_0, x_a \rightarrow -x_a, u \rightarrow u, F \rightarrow -F; \\ x_0 &\rightarrow x_0, x_a \rightarrow x_a, u \rightarrow -u, F \rightarrow -F. \end{aligned}$$

3. *Для окремих рівнянь вигляду (1) ефективними є додаткові перетворення еквівалентності:*

$$u \rightarrow e^{\lambda_0 x_0}u, x_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda_0 k}e^{\lambda_0 k x_0} \text{ та } u \rightarrow u - \lambda_0 x_0, x_0 \rightarrow -\frac{1}{\lambda_0}e^{-\lambda_0 x_0}.$$

4. *Всі подальші міркування будемо викладати з точністю до вказаних вище неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності.*

ЗОБРАЖЕННЯ КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ. Знайдемо зображення конформної алгебри відносно якої може бути інваріантне рівняння (1).

Означення: [27] Алгебру вигляду $AC(n) = \langle X_a, Y_{ab}, D, Z_a \rangle$ назвемо конформною алгеброю $AC(n)$, якщо її диференціальні оператори задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$\begin{aligned} [X_a, X_b] = 0, [X_a, Y_{bc}] = \delta_{ac}\partial_b - \delta_{ab}\partial_c, [X_a, D] = X_a, [X_a, Z_b] = 2\delta_{ab}D + 2Y_{ab}, \\ [Y_{ab}, Y_{cd}] = \delta_{ad}Y_{cb} + \delta_{ac}Y_{bd} + \delta_{bd}Y_{ac} + \delta_{bc}Y_{da}, [Y_{ab}, D] = 0, [Y_{ab}, Z_c] = \delta_{ac}Z_b - \delta_{bc}Z_a, \\ [D, Z_a] = Z_a, [Z_a, Z_b] = 0. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри тоді і тільки тоді, коли дана алгебра має наступне зображення:*

$$AC(n) = \langle \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = x_a\partial_a + (k_1u + k_2)\partial_u, K_a = 2x_aD - \bar{x}^2\partial_a \rangle, \quad (11)$$

де k_1, k_2 – сталі.

Доведення. Як доведено в теоремі 1, основна алгебра інваріантності рівняння (1) є прямою сумою оператора зсуву по часу ∂_0 та алгебри Евкліда $AE(n) = \langle \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b \rangle$. Тому $X_a = \partial_a, Y_{ab} = J_{ab}$. Розширимо основну алгебру інваріантності рівняння (1) операторами D та Z_a . Згідно зауваження 1 до теорем 1, дані оператори шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} D &= P(x_0)\partial_0 + M^a(\bar{x})\partial_a + [\alpha(x_0, \bar{x})u + \beta(x_0, \bar{x})]\partial_u, \\ Z_a &= G^a(x_0)\partial_0 + N^{ab}(\bar{x})\partial_b + [\gamma^a(x_0, \bar{x})u + \chi^a(x_0, \bar{x})]\partial_u. \end{aligned} \quad (12)$$

Для операторів (12), задовольнивши комутаційні співвідношення, які наведено в означенні конформної алгебри, та використавши, що $X_a = \partial_a, Y_{ab} = J_{ab}$, отримуємо остаточний вигляд операторів $D = x_a \partial_a + (k_1 u + k_2) \partial_u$ та $Z_a = 2x_a D - \bar{x}^2 \partial_a$. А це означає, що зображення конформної алгебри, відносно якої рівняння (1) є конформно інваріантним, має вигляд (11), що і потрібно було довести.

Зауваження. Оскільки до класу (1) належать еволюційні рівняння, то очевидно, що оператором інваріантності даного класу є оператор зсуву по часу ∂_0 , що підтверджує твердження теореми 1. Тому далі ми розглядатимемо пряму суму оператора зсуву по часу та конформної алгебри $AC(n)$. Перевіривши справедливість комутаційних співвідношень: $[\partial_0, \partial_a] = 0, [\partial_0, J_{ab}] = 0, [\partial_0, D] = 0, [\partial_0, K_a] = 0$, можемо стверджувати, що розглядувана пряма сума є алгеброю.

КЛАСИФІКАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІНВАРІАНТНИХ ВІДНОСНО КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ. Поставимо і розв'яжемо задачу: знайти такі рівняння з класу (1), які є інваріантними відносно алгебри $\langle \partial_0 \oplus AC(n) \rangle$.

Теорема 4. З точністю до неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності рівняння (1) є інваріантним відносно конформної алгебри тоді і тільки тоді, коли:

$F = e^u f(u_0)$, $n = 2$, та $\partial_0 \oplus AC(n)$ задається наступними базисними генераторами:

$$\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, D = x_a \partial_a - 2\partial_u, K_a = 2x_a D - \bar{x}^2 \partial_a \rangle \quad (13)$$

$F = u_0^{n-2} f\left(\frac{u_0}{u}\right)$, $n \neq 2$ та $\partial_0 \oplus AC(n)$ задається наступними базисними генераторами:

$$\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, D = 2x_a \partial_a + (2-n)u \partial_u, K_a = 2x_a D - \bar{x}^2 \partial_a \rangle, \quad (14)$$

Тут і далі f – довільна гладка функція своїх аргументів.

Доведення. Після використання алгоритму Лі, отримали систему визначальних рівнянь (5)–(6). Розглянемо оператор:

$$X = d_0 \partial_0 + d_a \partial_a + C_{ab} J_{ab} + \varkappa D + \lambda_a K_a, \quad (15)$$

де $d_0, d_a, C_{ab} = -C_{ba}, \varkappa, \lambda_a$ – довільні сталі, $a \neq b$. Підставивши ∂_0 , оператори з алгебри (11) в формулу (15) та у визначальну систему (5)–(6), отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} \eta_0 = 0, \eta_u = k_1(\varkappa + 2\lambda_b x_b), \Delta \eta = 0, a_a = 2\lambda_a k_1, \\ \xi_b^a = \varkappa \delta_{ab} + 2\lambda_b x_a - 2\lambda_a x_b + 2\bar{\lambda} \bar{x} \delta_{ab}, \xi_{bc}^a = 2\lambda_b \delta_{ac} - 2\lambda_a \delta_{bc} + 2\lambda_c \delta_{ab}, \\ \Delta \xi^a = 2\lambda_a(2-n), \xi_0^0 = 0, k_1 = \frac{2-n}{2}, (k_1 u + k_2) F_u + k_1 u_0 F_{u_0} = (k_1 - 2)F. \end{aligned} \quad (16)$$

Розв'язок останнього рівняння системи (16) залежить від значення параметра k_1 . При $k_1 = 0, n = 2$ отримуємо оператори алгебри (13). При $k_1 \neq 0, n \neq 2$ розв'язки рівнянь (16) задають оператори алгебри (14). Теорему 4 доведено.

Зауваження. З доведеної теореми випливає, що в класі рівнянь (1) з точністю до перетворень еквівалентності конформно інваріантними є наступні рівняння:

$$\Delta u = e^u f(u_0), n = 2 \quad \text{та} \quad \Delta u = u^{n-2} f\left(\frac{u_0}{u}\right), n \neq 2. \quad (17)$$

МАКСИМАЛЬНІ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТНОСТІ. Розглянемо задачу: знайти максимальні алгебри інваріантності (MAI) конформно інваріантних рівнянь (17). Розв'язання цієї задачі повністю описується загальним розв'язком визначальної системи (5)–(6). Одними з рівнянь визначальної системи (5)–(6) є рівняння Кілінга, а як відомо їх розв'язки залежать від значення n . При $n \neq 2$ розв'язки рівняння Кілінга мають вигляд $\xi^a = -\lambda_a \bar{x}^2 + 2\bar{\lambda} \bar{x} x_a + \varkappa x_a + (C_{ab} - C_{ba}) x_b + d_a$, а при $n = 2$ розв'язками рівняння Кілінга є функції $\xi^a = \xi^a(\bar{x})$ такі, що $\xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab} \xi_1^1, \Delta \xi^a = 0$. Тут і далі δ_{ab} – символ Кронекера. Тому групову класифікацію проведемо в залежності від значень параметра n .

Теорема 5. У випадку $n \neq 2$ основою алгеброю інваріантності класу багатовимірних рівнянь

$$\Delta u = u^{n-2} f\left(\frac{u_0}{u}\right) \quad (18)$$

є алгебра $A_1^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, D = 2x_a \partial_a + (2-n)u \partial_u, K_a = 2x_a D - \bar{x}^2 \partial_a \rangle$.

Теорема 6. З точністю до перетворень з G^\sim для класу рівнянь (18) при $n \neq 2$ існує лише п'ять випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх MAI):

$$\begin{aligned} \Delta u = \lambda e^u u^{n-2} : A_1 = \langle A_1^{bas}, Q_1 = e^{2-n} u \partial_u \rangle; \\ \Delta u = \lambda \left(\frac{u_0}{u}\right)^k u^{n-2} : A_2 = \langle A_1^{bas}, Q_2 = x_0 \partial_0 + \frac{2-n}{4} k u \partial_u \rangle, \quad k \neq \frac{n+2}{n-2}; \\ \Delta u = \lambda u_0^{n-2} : A_3 = \langle A_1^{bas}, Q_3 = x_0 \partial_0 + \frac{2+n}{4} u \partial_u, Q^\infty = \beta(\bar{x}) \partial_u \rangle; \end{aligned}$$

$$\Delta u = \lambda \left(\frac{u_0}{u} + m\right)^k u^{\frac{n+2}{n-2}} : A_4 = \langle A_1^{bas}, Q_4 = e^{\frac{4mx_0}{k(2-n)}} (\partial_0 - mu\partial_u) \rangle, k \neq \frac{n+2}{n-2}, m \neq 0, k \neq 0;$$

$$\Delta u = \lambda(u_0 + mu)^{\frac{n+2}{n-2}} : A_5 = \langle A_1^{bas}, Q_5 = e^{\frac{4mx_0}{2+n}} (\partial_0 - mu\partial_u), Q^\infty = e^{-mx_0} \beta(\bar{x}) \partial_u \rangle.$$

Тут і далі f – довільна гладка функція своїх аргументів, $\beta(\bar{x})$ – довільна гладка функція, що задовольняє рівняння $\Delta\beta = 0$, $\lambda, m \neq 0, k \neq 0$ – сталі.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Нехай $\omega = \frac{u_0}{u}$. У випадку $n \neq 2$ розв'язком визначальної системи (5)–(6) є функції:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \xi^a = -\lambda_a \bar{x}^2 + 2\bar{\lambda} \bar{x} x_a + \varkappa x_a + (C_{ab} - C_{ba}) x_b + d_a, \eta = a(x)u + b(x),$$

що задовольняють систему:

$$(b\omega - b_0)\dot{f} = \frac{n+2}{n-2} b f, (a_0 - \omega \xi_0^0)\dot{f} + \left(\frac{4}{n-2} a + 2\xi_1^1\right) f = 0, \Delta b = 0, \tag{19}$$

$$a_a = \lambda_a(2-n), \Delta a = 0, \xi_1^1 = 2\bar{\lambda} \bar{x} + \varkappa.$$

Якщо f – довільна функція, то розщеплюючи по f, \dot{f} отримуємо, зокрема, такі визначальні рівняння $\xi_0^0 = 0, a = (2-n)(\bar{\lambda} \bar{x} + \frac{1}{2} \varkappa)$, розв'язком яких є функції, які задають базисні генератори конформної алгебри, що доводить теорему 5.

Опишемо всі можливі розширення МАІ. Структурні рівняння для першого та другого рівнянь системи (19) мають вигляд

$$(k_1\omega + k_2)\dot{f} = k_3 f, \tag{20}$$

де k_1, k_2, k_3 – деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з G^\sim отримуємо різні вигляди функції f . Зазначимо, що випадок $f = \text{const}$ ми не розглядаємо.

Проаналізувавши структуру рівняння (20), приходимо до висновку, що можливі такі суттєво різні випадки:

$$f = e^{m\omega}, f = (\omega + m)^k, f = (\omega + m)^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ де } k \neq \frac{n+2}{n-2}, m - \text{ довільні сталі, для кожного з яких, використовуючи}$$

класичні результати Лі та провівши стандартні математичні міркування, отримуємо перший, другий, третій, четвертий або п'ятий пункти теореми 6. Теорему 6 доведено.

Сформулюємо результати групової класифікації для випадку $n = 2$.

Теорема 7. Нескінченна алгебра, базисні оператори якої породжуються інфінітезимальним оператором $X^{bas} = d_0\partial_0 + \xi^a(\bar{x})\partial_a - 2\xi_1^1\partial_u$, а функції ξ^a задовольняють рівняння $\xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab}\xi_1^1, \Delta\xi^a = 0$, є основою алгебру інваріантності класу (1+2)-вимірних рівнянь

$$\Delta u = e^u f(u_0). \tag{21}$$

Тут і далі $f(u_0)$ – довільна гладка функція.

Теорема 8. З точністю до перетворень з G^\sim для класу (1+2)-вимірних рівнянь (21) існує три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх інфінітезимальні оператори, які породжують максимальні алгебри інваріантності цих рівнянь):

$$\Delta u = \lambda e^{u+mu_0} :$$

$$X_1 = (-mC_1 e^{-\frac{1}{m}x_0} + d_0)\partial_0 + \xi^a(\bar{x})\partial_a + [C_1 e^{-\frac{1}{m}x_0} u + (\frac{1}{m}\beta_1(\bar{x})x_0 + \beta_2(\bar{x}))e^{-\frac{1}{m}x_0} - 2\xi_1^1]\partial_u;$$

$$\Delta u = \lambda(u_0 + m)^k e^u : X_2 = (-\frac{kC_1}{m} e^{-\frac{m}{k}x_0} + d_0)\partial_0 + \xi^a(\bar{x})\partial_a + [kC_1 e^{-\frac{m}{k}x_0} - 2\xi_1^1]\partial_u;$$

$$\Delta u = \lambda u_0^k e^u : X_3 = (C_1 x_0 + d_0)\partial_0 + \xi^a(\bar{x})\partial_a + [kC_1 - 2\xi_1^1]\partial_u.$$

Тут $m \neq 0, k \neq 0, \lambda \neq 0, C_1, d_0$ – довільні сталі, β_1, β_2 – довільні такі гладкі функції, що $\Delta\beta_1 = 0, \Delta\beta_2 = 0$.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Підставивши у визначальну систему (5)–(6) функцію $F = e^u f(u_0)$ та розщепивши по виразах ue^u та e^u , отримуємо визначальні рівняння:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \xi^a = \xi^a(\bar{x}), \xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab}\xi_1^1, \eta = a(x_0)u + b(\bar{x}), \Delta\xi^a = 0, \Delta b = 0, \tag{22}$$

$$a_0\dot{f} + af = 0, (b_0 + (a - \xi_0^0)\omega)\dot{f} + bf = (a - 2\xi_1^1)f.$$

Якщо f – довільна функція, то розв'язком (22) є функції $\xi^0 = d_0, \xi^a = \xi^a(\bar{x}), \eta = -2\xi_1^1$ та ξ^a задовольняють рівняння $\xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab}\xi_1^1, \Delta\xi^a = 0$, що доводить теорему 7.

Дослідимо останні два рівняння системи (22) за структурою. В залежності від співвідношень між структурними коефіцієнтами з точністю до перетворень еквівалентності отримуємо різні вигляди функцій f , а саме: $f = e^{mu_0}$, $f = (u_0 + m)^k$, де $k \neq \frac{n+2}{n-2}$, m – довільні сталі. Зазначимо, що: 1. Випадок $f = \text{const}$ ми не розглядаємо; 2. Випадок $f = (u_0 + m)^k$ розпадається на два суттєво різні підвипадки: $m = 0$ та $m \neq 0$, для кожного з яких, провівши міркування, що аналогічні наведеним вище, отримуємо другий або третій пункт теореми 8. Теорему 8 доведено.

ВИСНОВКИ. У даній роботі вивчено клас еволюційних n -вимірних рівнянь. Серед широкого класу нелінійних багатовимірних рівнянь відібрано ті, що володіють конформною симетрією. А саме, є інваріантними відносно прямої суми операторів зсуву по часу та алгебри Евкліда $AE(n)$, що розширена операторами масштабних та конформних перетворень. Для відібраних багатовимірних еволюційних нелінійних рівнянь проведено повну групову класифікацію.

Запропоновані рівняння мають широкі симетрійні властивості і тому можуть бути використані в якості математичних моделей для опису реальних фізичних процесів. Знання МАІ даних рівнянь дає можливість їх інтегрування і дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абраменко А. А., Лагно В. И., Самойленко А. М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 482–489.
2. Андреева Н. В. (тепер Ічанська Н. В.) Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: 36. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т. 19. – С. 10–13.
3. Ахатов Н. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – Т.34. – С. 3–83.
4. Бойко В. М., Попович В. О. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – Т. 36. – С. 45–50.
5. Дороничин В. А. О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22. – С. 1393–1400.
6. Дороничин В. А., Князева И. В., Свищевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – С. 1215–1223.
7. Жданов Р. З., Лагно В. И. Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом // Доповіді НАН України. – 2000. – № 3. – С. 12–16.
8. Ічанська Н. В. Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебри // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 2. – С. 159–169.
9. Ічанська Н. В. Групова класифікація еволюційних рівнянь високого порядку // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 43–48.
10. Лагно В. И., Самойленко А. М. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 365–372.
11. Лагно В. И., Спічак С. В., Стогній В. И. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України. – Т. 45. – 2002. – 360 с.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука. – 1978. – 400 с. – English translation: Ovsiannikov L. V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press. – 1982. – 400 p.
13. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492–495.
14. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений С. А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1960. – № 3. – С. 126–145.
15. Серов М. И., Черніга Р. М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 9. – С. 1262–1270.
16. Серова М. М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики. – 1985. – С. 119–123.
17. Basarab-Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – Vol. 69, № 1. – P. 43–94.
18. Cherniha R. M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – Vol. 2, № 3. – P. 374–383.
19. Cherniha R., Serov M. Symmetries ans \tilde{U} tze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. – 1998. – Vol. 9. – P. 527–542.
20. Heredero R. H., Olver P. J. Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, № 12. – P. 6414–6438.
21. Edwards M. P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 190. – P. 149–154.
22. Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2 z / dx dy = F(z)$ // Arch. Math. – 1881. – Vol. 8, № 1. – P. 112–125.
23. Lie S. Classification und Integration von gewöhnlichen Differential-gleichungen zwischen x , y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. – 1883. – 9. – P. 371–393.
24. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1666–1688.
25. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118, № 4. – P. 172–176.
26. Serova M., Andreeva N. (Ichanska N.) Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 1. – P. 217–221.
27. Fushchych W., Shtelen W. and Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1993. – 436 p.
28. Pukhnachov V. V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics. – 1996. – 316 p.
29. Zhdanov R. Z., Lahno V. I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. 7405–7418.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.16

Серов М., д-р физ.-мат. наук, проф., Ічанская Н., канд. физ.-мат. наук, доц.
ПолтНТУ ім. Юрія Кондратюка, Полтава

О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрено многомерные нелинейные эволюционные уравнения. Среди широкого класса уравнений отобрано те, которые являются инвариантными относительно конформной алгебры. Для некоторых из них найдено максимальные алгебры инвариантности.

Serov M., Full Doctor, Ichanska N., Phd
Yury Kondratiuk' PoINTU, Poltava

FROM THE CONFORMAL INVARIANCE OF NONLINEAR EVOLUTIONARY MANY DIMENSION EQUATIONS

This paper deals with study of symmetry properties of nonlinear evolution equations. The inverse group classification problem is solved for nonlinear evolutionary equations, which are invariant with respect to the conformal algebra.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА М'ЯКОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто м'який розв'язок рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою $d\mu(t)$, $t \in [0, T]$. За певних умов доведено, що розв'язок прямує до нуля м.н. при $|x| \rightarrow \infty$.

1. Вступ. Нехай X – довільна множина, $B(X)$ – σ -алгебра підмножин з X ; $L_0(\Omega, F, P)$ – множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P) . Збіжність в $L_0(\Omega, F, P)$ – це збіжність за ймовірністю. Нехай також μ – стохастична міра на $B(X)$, тобто, σ -адитивне відображення $\mu: B(X) \rightarrow L_0(\Omega, F, P)$. В [5] таке μ називається загальною стохастичною мірою.

В [5, розділ 7] та [4] для невідомої вимірної функції $g: X \rightarrow R$ визначено та досліджено інтеграл вигляду $\int g d\mu$. Зокрема, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна за μ . Крім того, для такого інтеграла $\int g d\mu$

справедливий аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність [5, твердження 7.1.1] або [4, пункт 1.1.1, наслідок].

У [3] визначено інтеграл за стохастичною мірою для випадкової функції та досліджено його властивості.

У даній статті розглядається стохастичне рівняння теплопровідності вигляду

$$\begin{cases} du(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} dt + f(t, x, u(t, x)) dt + \sigma(t, x) d\mu(t), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де $(t, x) \in [0, T] \times R$, $a \in R$, $a \neq 0$, та μ – стохастична міра, визначена на $B([0, T])$.

В [8] доведено існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (1), визначеного рівністю (2) нижче, та встановлено його неперервність за Гельдером за сукупністю змінних (t, x) . Мета даної роботи – показати, що за певних додаткових умов цей розв'язок прямує до нуля при нескінченному збільшенні абсолютної величини просторової координати.

Аналогічна задача розв'язана в [2], де рівняння теплопровідності кероване стохастичною мірою $d\mu(x)$, $x \in R$. Властивості розв'язків хвильового рівняння та рівняння теплопровідності з цією мірою розглянуто в [1] та [9] відповідно. В [6; 7], досліджено м'які розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, керованих різними гауссівськими шумами.

2. Постановка задачі. Розглядаємо м'який розв'язок рівняння (1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t, x) = u(t, x, \omega): [0, T] \times R \times \Omega \rightarrow R$, що

$$u(t, x) = \int_R p(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_R p(t-s, x-y) f(s, y, u(s, y)) dy ds + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_R p(t-s, x-y) \sigma(s, y) dy \quad \text{м.н.} \quad (2)$$

Тут $p(t, x) = (4a^2 \pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$ – щільність гауссівського розподілу. Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds

беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$. Такі інтеграли визначено і досліджено в [4, глава 3].

Далі будемо вимагати виконання наступних припущень.

A1. $u_0(y) = u_0(y, \omega): R \times \Omega \rightarrow R$ вимірна та обмежена для кожного $\omega \in \Omega: |u_0(y, \omega)| \leq C(\omega)$.

A2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером: $|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq C(\omega) |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}$, $\beta(u_0) > 0$.

A3. $f(s, y, v): [0, T] \times R \times R \rightarrow R$ вимірна та обмежена: $|f(s, y, v)| \leq C$.

A4. $f(s, y, v)$ ліпшицева за $y, v \in R: |f(s, y_1, v_1) - f(s, y_2, v_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |v_1 - v_2|)$.

A5. $\sigma(s, y): [0, T] \times R \rightarrow R$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s, y)| \leq C$.

A6. $\sigma(s, y)$ неперервна за Гельдером: $|\sigma(s_1, y_1) - \sigma(s_2, y_2)| \leq C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)})$, $1/2 < \beta(\sigma) < 1$.

A7. $|u_0(y)| \rightarrow 0$, $\sup_{s \in [0, T], z \in R} |f(s, y, z)| \rightarrow 0$, $\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0$, $|y| \rightarrow \infty$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

Також нам буде потрібний наступний факт. Розглянемо простір Бесова $B_{22}^\alpha([b, c])$, $1/2 < \alpha < 1$, тобто, простір функцій $g: [b, c] \rightarrow R$, для яких скінченною є норма

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b, c])} = \|g\|_{L_2([b, c])} + \left(\int_0^{c-b} (w_2(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{де } w_2(g, r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left(\int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для довільних $n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^n$ покладемо $\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t]$.

Нехай функція $g(z, s) : Z \times [0, t] \rightarrow R$ така, що для деякого $1/2 < \alpha < 1$ та для довільного $z \in Z : g(z, \cdot) \in B_{22}^\alpha([0, t])$. Тут Z – довільна множина. Тоді за [8, лема 1] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0, t]} g(z, s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

має таку модифікацію $\eta(z)$, що для всіх $\omega \in \Omega, z \in Z$ справедлива оцінка

$$|\eta(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| + C \|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([0, t])} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Зауважимо, що модифікація η є спільною для всіх $z \in Z$, а константа C залежить від α, t та не залежить від z, ω .

3. Основний результат. Теорема. Нехай виконуються припущення А1–А7. Тоді для розв'язку рівняння (2) існує така модифікація $u(t, x)$, що для будь-яких фіксованих $t \in [0, T], \omega \in \Omega$ виконується $|u(t, x)| \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$.

Доведення. Згідно [8, теорема 1], якщо виконуються припущення А1–А6, то рівняння (2) має єдиний (з точністю до м.н.) розв'язок $u(t, x)$ для всіх $t \in (0, T), x \in R$. Для цього розв'язку маємо

$$\begin{aligned} |u(t, x)| \leq & \left| \int_R p(t, x-y) u_0(y) dy \right| + \left| \int_0^t ds \int_R p(t-s, x-y) f(s, y, u(s, y)) dy \right| + \\ & + \left| \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_R p(t-s, x-y) \sigma(s, y) dy \right| = |I_1(t, x)| + |I_2(t, x)| + |I_3(t, x)|. \end{aligned}$$

Розглянемо спочатку стохастичний інтеграл $I_3(t, x) = \int_{(0, t]} q(t, x, s) d\mu(s)$.

Нехай $t \in [0, T], x \in R$ – фіксовані. Тоді випадкова функція $\eta(z) = I_3(t, x), z = (t, x)$, має модифікацію, для якої виконується співвідношення (3). Розглянемо окремо складові його правої частини. Для довільного $s \in [0, t]$ оцінимо $|q(t, x, s)|$. Ми маємо, що $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall |y| > \delta_0$:

$$|u_0(y)| < \varepsilon_0; \quad \sup_{s \in [0, T], z \in R} |f(s, y, z)| < \varepsilon_0; \quad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| < \varepsilon_0; \quad \int_{\{|y| > \delta_0\}} e^{-|y|^2} dy < \varepsilon_0, \quad (4)$$

де використали припущення А7 і те, що $\int_R e^{-|y|^2} dy = \sqrt{\pi} < +\infty$.

Тоді $\forall s \leq t, \forall |x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T}$:

$$\begin{aligned} |q(t, x, s)| &= \left| \int_R (4a^2\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} \sigma(s, y) dy \right| = \left| v = \frac{x-y}{2a\sqrt{t-s}} \right| = \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \left| \int_R e^{-|v|^2} \sigma(s, x-2av\sqrt{t-s}) dv \right| = \pi^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{\{|v| \leq \delta_0\}} e^{-|v|^2} \sigma(s, x-2av\sqrt{t-s}) dv + \int_{\{|v| > \delta_0\}} e^{-|v|^2} \sigma(s, x-2av\sqrt{t-s}) dv \right| < \\ &< \pi^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_0 \int_{\{|v| \leq \delta_0\}} e^{-|v|^2} dv + \pi^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_0 C_\sigma \leq C\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, ми отримуємо

$$|q(t, x, 0)| < C\varepsilon_0, \quad \|q(t, x, \cdot)\|_{L_2([0, t])} = \left(\int_0^t |q(t, x, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < C\varepsilon_0.$$

Далі оцінимо модуль неперервності. Використовуючи заміну змінних $v = \frac{x-y}{2a\sqrt{t-s-h}}, v = \frac{x-y}{2a\sqrt{t-s}}$, та А6 маємо

$$\begin{aligned} |q(t, x, s+h) - q(t, x, s)| &= \pi^{-\frac{1}{2}} \left| \int_R e^{-|v|^2} \left(\sigma(s+h, x-2av\sqrt{t-s-h}) - \sigma(s, x-2av\sqrt{t-s}) \right) dv \right| \leq \\ &\leq Ch^{\beta(\sigma)} (1 + (t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}) \leq Ch^{\beta(\sigma)} (t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left(\int_0^t |q(t, x, s+h) - q(t, x, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cr^{\beta(\sigma)}. \quad (6)$$

З іншого боку, за (5) для $s + h \leq t$ виконується $|q(t, x, s + h) - q(t, x, s)| \leq |q(t, x, s + h)| + |q(t, x, s)| < C\varepsilon_0$, і тому

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < C\varepsilon_0 \sqrt{t} \leq C\varepsilon_0. \tag{7}$$

Перемножимо тепер нерівності (6) та (7), піднесені до степенів θ та $1 - \theta$ відповідно, для довільного $\theta \in (0, 1)$. Маємо,

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < Cr^{\theta\beta(\sigma)} \varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Тоді, $\|q(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([0, t])} < C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^{1-\theta} \left(\int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma) - 2\alpha - 1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta})$,

для відповідного $\alpha < \theta\beta(\sigma)$. Тобто, ми одержали

$$|I_3(t, x)| < C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}) \left(|\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \leq C(\omega)(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

де в останній нерівності ми використали [9, лема 3.1].

Крім того, аналогічними міркуваннями, як і при отриманні (5), приходимо до оцінок

$$|I_1(t, x)| = \pi^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\{|v| \leq \delta_0\}} e^{-|v|^2} u_0(x - 2av\sqrt{t-s}) dv + \int_{\{|v| > \delta_0\}} e^{-|v|^2} u_0(x - 2av\sqrt{t-s}) dv \right|$$

$$\stackrel{A1,(6)}{<} \pi^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0 + \pi^{\frac{1}{2}} C(\omega) \varepsilon_0 \leq C(\omega) \varepsilon_0, \quad \forall |x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T},$$

та

$$|I_2(t, x)| < C\varepsilon_0, \quad \forall |x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо в (4) $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon \geq 1$ та $\varepsilon_0 = \varepsilon^{1-\theta} C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon < 1$.

Таким чином, для довільних фіксованих $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = (1 + 2|a|\sqrt{T})\delta_0 \quad \forall |x| > \delta: |u(t, x)| < \varepsilon,$$

що й завершує доведення теореми.

4. Висновки. Розглянуто м'який розв'язок стохастичного рівняння теплопровідності, що описує зміну температури деякого середовища, в якому присутні певні випадкові та невідповідні надходження теплової енергії. Доведено, що за вказаних умов щодо джерел теплової енергії температура середовища прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боднарчук І. М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 2010. – Т. 24. – С. 28–33.
2. Боднарчук І. М., Радченко В. М. Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.
3. Радченко В. М. Інтегральні рівняння із загальною стохастичною мірою // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Т. 91. – С. 154–163.
4. Радченко В. М. Інтегралы по общим случайным мерам // Труды Института математики НАН Украины. – К., 1999. – Т. 27.
5. Kwapień S., Wołczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple – Boston, 1992.
6. Nualart E., Quer-Sardanyons L. Gaussian estimates for the density of the non-linear stochastic heat equation in any space dimension // Stochastic Processes and their Applications. – 2012. – Vol. 122. – P. 418–447.
7. Tudor C. A. Analysis of Variations for Self-similar Processes. A Stochastic Calculus Approach // Probability and Its Applications. – Cham Heidelberg, 2013.
8. Radchenko V. Heat equation with general stochastic measure colored in time // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2014. – Vol. 1. – P. 129–138.
9. Radchenko V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.15

Боднарчук І., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЯГКОГО РЕШЕНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Рассмотрено мягкое решение уравнения теплопроводности, управляемого общей стохастической мерой $d\mu(t)$, $t \in [0, T]$. При определенных условиях доказано, что решение стремится к нулю п.н. при $|x| \rightarrow \infty$.

Bodnarchuk I., PhD student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

**ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE MILD SOLUTION
OF A STOCHASTIC HEAT EQUATION**

The mild solution of the heat equation driven by a general stochastic measure $d\mu(t)$, $t \in [0, T]$ is considered. Under some assumptions, we prove that this solution tends to 0 a.s. as $|x| \rightarrow \infty$.

УДК 629.7.076.6

І. Васильєв, канд. фіз.-мат. наук, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
 Б. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. фіз.-мат. наук,
 Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
 e-mail: igor_v@univ.kiev.ua, e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net

ОПТИМАЛЬНИЙ ПЕРЕЛІТ З МАЛОЮ КУТОВОЮ ДАЛЬНОСТЮ МІЖ ВІДДАЛЕНИМИ КОМПЛАНАРНИМИ ОРБІТАМИ

Проведено сумісну оптимізацію керувань рухом, енергозабезпечення електрореактивної рушійної системи та параметрів рушійної системи сталої потужності з акумулятором енергії космічного апарату при виконанні перельоту з малою кутовою дальністю в центральному гравітаційному полі між компланарними віддаленими орбітами. Отримано оцінку ефективності використання акумулятора енергії в складі рушійної системи космічного апарату для перельоту з орбіти Землі на орбіту Марсу.

ВСТУП. Сучасний стан та тенденції розвитку космічної техніки дозволяють припустити зростання кількості польотів космічних апаратів (КА) до різноманітних тіл сонячної системи (планет, астероїдів, комет) в недалекому майбутньому. Для здійснення таких перельотів доцільно використовувати рушійні системи з комбінацією великої та малої тяги [3, 5], бо використання рушійних систем тільки малої тяги на порядки збільшить час перельоту, а у випадку застосування рушійних систем тільки великої тяги зменшиться маса корисного навантаження. Двигуни великої тяги (традиційні хімічні, або ядерні) забезпечують розгін та гальмування в околах точок старту і прибуття. На геліоцентричній дузі траєкторії (дуга траєкторії, що знаходиться поза межами сфер впливу об'єктів старту та прибуття) маршовими двигунами є електрореактивні двигуни (ЕРД) малої тяги.

Проблема максимізації маси корисного навантаження КА була, є і залишиться актуальною для космонавтики через високу вартість виведення одиниці маси на монтажну орбіту. У [7] показано, що включення акумулятора енергії до складу електрореактивної рушійної системи може привести до збільшення маси корисного навантаження КА. Ідея такого підходу полягає в наступному. Так як секундна витрата робочої речовини ЕРД прямо пропорційна квадрату реактивного прискорення і обернено пропорційна підведеній потужності [2], то на дугах траєкторії з малим рівнем реактивного прискорення енергію джерела потужності накопичують в акумуляторі, зменшивши при цьому енергоживлення рушія, а на дугах траєкторії з великим рівнем реактивного прискорення накопичену енергію в акумуляторі спрямовують в рушій разом з енергією джерела. Якщо зеконормлена за рахунок такого підходу маса робочої речовини виявиться більше від збільшення маси рушійної системи, то доцільно застосовувати рушійну систему з акумулятором енергії. Проведені подальші дослідження для ряду маневрів в навколопланетному просторі підтвердили ефективність такого підходу [5, 6, 8].

У даній статті розглянуто задачу про оптимальний переліт КА з рушійною системою сталої тяги з акумулятором енергії між компланарними кеплеровими орбітами за заданий час, що відповідає малій кутовій дальності перельоту. Рух КА моделюється рухом матеріальної точки змінної маси в першому наближенні методом транспортуючої траєкторії [1, 2]. Задача оптимізації керувань та траєкторії розв'язана з застосуванням принципу максимуму Понтрягіна. Для перельоту між орбітами Землі та Марсу оптимізація параметрів рушійної системи проведена за допомогою чисельних методів. Проаналізовано ефективність використання акумулятора енергії в складі рушійної системи КА для ряду тривалостей перельоту.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. КА вважаємо матеріальною точкою змінної маси. Початкова маса КА складається з маси корисного навантаження M_{π} , маси рушія M_{γ} , маси джерела потужності M_{ν} , маси акумулятора енергії M_{β} та маси робочої речовини M_{ρ} , необхідної для виконання заданого динамічного маневру. Як і в [6, 8], вважаємо $M_{\nu} = \alpha N_0$, $M_{\gamma} = \gamma N_{\gamma} N_0$, $M_{\beta} = \beta E_{a_0}$, де N_0 – максимальне значення потужності джерела, E_{a_0} – енергоємність акумулятора, $N_{\gamma} N_0$ – значення потужності рушія, α, β, γ – питомі маси джерела потужності, акумулятора енергії та рушія.

Мета місії КА – здійснити міжорбітальний переліт з максимальною масою корисного навантаження в центральному гравітаційному полі між віддаленими компланарними орбітами за заданий час T . Причому, час T вважаємо таким, що забезпечує куту дальність перельоту менше π . Ця умова дає змогу використати рівняння руху в першому наближенні методу транспортуючої траєкторії.

Введемо систему координат Ox_1x_2 наступним чином: центр O розташуємо в гравітаційному центрі, вісь Ox_1 в початкове положення КА, а вісь Ox_2 напрямлена так, щоб система координат була правою. На рис. 1 штриховою лінією зображено транспортуючу траєкторію – дугу деякої кеплерової орбіти, що з'єднує початкову та кінцеву орбіти в точках O_1 та O_2 за час T . Початок транспортуючої системи координат $O_t x_{1t} x_{2t}$ рухається по вказаній дузі кеплерової орбіти, її осі паралельні осям нерухомої системи координат Ox_1x_2 . В початковий момент часу точки O_1 та O_t співпадають, а в кінцевий момент часу O_t співпадає з точкою O_2 . На цьому рисунку $\mathbf{r}(t)$ – радіус-вектор КА в абсолютному базисі Ox_1x_2 , $\mathbf{r}_t(t)$ – радіус-вектор початку транспортуючої системи координат $O_t x_{1t} x_{2t}$, $\mathbf{\rho}(t)$ – радіус-вектор КА в транспортуючому базисі, $\mathbf{V}_{1t}, \mathbf{V}_{2t}$ – швидкості транспортуючого базису в початковій та кінцевій точках перельоту, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ – орбітальні швидкості початкової та кінцевої орбіт в в початковій та кінцевій точках.

У подальшому всі співвідношення записано в безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до деякої величини r^* , час t віднесено до T^* – періоду обертання по круговій орбіті радіусом r^* , поділеному на 2π , прискорення – до прискорення вільного падіння на відстані r^* від гравітаційного центру, поточний запас енергії в акумуляторі E_a – до його енергоємності, потужності джерела та рушія – до максимальної потужності джерела N_0 , маси – до початкової маси КА. Відповідні безрозмірні величини позначено маленькими літерами.

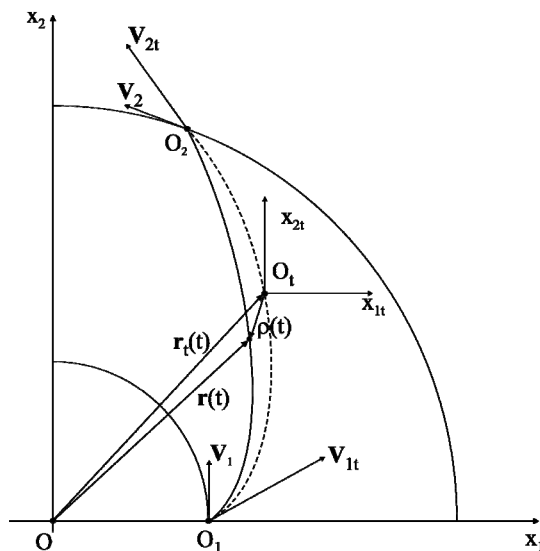


Рис.1. Схема перельоту

Електрореактивну рушійну систему КА вважаємо ідеально керованою системою сталої потужності. У цьому випадку рівняння зміни маси та поточного запасу енергії акумулятора мають вигляд [1, 5]

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\zeta}{m_v} \frac{m^2 a_e^2 \delta}{2N_\gamma},$$

$$\frac{de_a}{dt} = -\frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1), \quad e_a \in [0, 1],$$

де $\zeta = \alpha r^{*2} / T^{*3}$, $\eta = \beta T^* / \alpha$, $\xi_B = m_e / m_v$, a_e – вектор реактивного прискорення, δ – керуюча функція, яка приймає значення 0 (пасивна дуга траєкторії – рушій вимкнено, енергія джерела спрямована на зарядку акумулятора), або 1 (активна дуга траєкторії – накопичена енергія в акумуляторі разом з енергією джерела живлять рушій). Обмеження на величину e_a зумовлені тим, що запас енергії акумулятора не може бути від’ємним та не може перевищувати енергоємність. При використанні першого наближення метода транспортуючої траєкторії вектор реактивного прискорення a_e , що забезпечує перехід КА з точки O_1 в точку O_2 , повинен задовольняти крайову задачу

$$\dot{\rho} = a_e, \quad \rho(0) = 0, \quad \dot{\rho}(0) = V_{1t} - V_1, \quad \rho(T) = 0, \quad \dot{\rho}(T) = V_2 - V_{2t}. \quad (2)$$

Використовуючи співвідношення (1) та проєктуючи (2) на осі транспортуючої системи координат знаходимо

$$\dot{m} = -\frac{\zeta}{m_v} \frac{m^2 (a_{1e}^2 + a_{2e}^2) \delta}{2N_\gamma}, \quad m(0) = 1, \quad m_\pi = m(T) - m_\gamma - m_v \rightarrow \max,$$

$$\dot{e}_a = -\frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1), \quad e_a(0) = 1, \quad e_a(T) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{y}_1 = y_3, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(T) = 0,$$

$$\dot{y}_2 = y_4, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(T) = 0,$$

$$\dot{y}_3 = a_{1e} \delta, \quad y_3(0) = \Phi_1, \quad y_3(T) = \Theta_1,$$

$$\dot{y}_4 = a_{2e} \delta, \quad y_4(0) = \Phi_2, \quad y_4(T) = \Theta_2,$$

де $y_1 = x_{1t}, y_2 = x_{2t}$, Φ_1, Φ_2 и Θ_1, Θ_2 – проєкції векторів $V_{1t} - V_1$ та $V_2 - V_{2t}$.

Як видно з (2) напрямки та величини векторів $\dot{\rho}(0)$ та $\dot{\rho}(T)$ залежать від вибору транспортуючої траєкторії, яка може бути дугою еліпса, гіперболи або параболи (випадок кола мало ймовірний, а тому його не розглядаємо). Згідно з [4] та вибраних характерних величин для визначення дуги еліпса, що з’єднує точки O_1 та O_2 маємо систему рівнянь

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1),$$

$$r_2 = a(1 - e \cos E_2), \quad (4)$$

$$T = a^{3/2} (E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)).$$

Для дуги гіперболи маємо

$$r_1 = a(e \operatorname{ch} H_1 - 1),$$

$$r_2 = a(e \operatorname{ch} H_2 - 1), \quad (5)$$

$$T = a^{3/2} (e(\operatorname{sh} H_2 - \operatorname{sh} H_1) - H_2 + H_1).$$

Для параболічної транспортуючої траєкторії

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{p}{1 + \cos v_1}, \\ r_2 &= \frac{p}{1 + \cos v_2}, \\ T &= \frac{1}{2} p^{3/2} \left(\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{v_1}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Як бачимо системи (4) та (5) є системами трьох рівнянь з чотирма невідомими. Тому задаючи, наприклад E_1 для системи (4) та H_1 для системи (5), знаходимо невідомі a , e та E_2 і H_2 відповідно. А E_1 та H_1 будуть знайдені з умови максимуму маси корисного навантаження. Система ж (6) у випадку існування має єдиний розв'язок. Через те, що наперед тип транспортуючої траєкторії невідомий задачу оптимального керування (3) треба розв'язувати для випадків (4)–(6) та вибирати тип траєкторії, що дозволяє максимально збільшити масу корисного навантаження.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ. Застосуємо до задачі (3) принцип максимуму Понтрягіна. Складемо функцію H

$$H = -\psi_m \frac{\zeta}{m_v} \frac{m^2 (a_{1e}^2 + a_{2e}^2) \delta}{2N_\gamma} + \psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 + \psi_3 a_{1e} \delta + \psi_4 a_{2e} \delta - \psi_e \frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1).$$

З умови максимуму функції H по керуванням a_{1e} та a_{2e} , отримаємо

$$a_{1e} = \frac{\psi_3}{\frac{\zeta}{m_v} \psi_m m^2}, \quad a_{2e} = \frac{\psi_4}{\frac{\zeta}{m_v} \psi_m m^2} \quad (7)$$

Розв'язавши систему рівнянь для приєднаних функцій $\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$, отримаємо

$$\psi_1 = A_{13}, \quad \psi_2 = A_{23}, \quad \psi_3 = -A_{13}t + A_{12}, \quad \psi_4 = -A_{23}t + A_{22}, \quad \psi_m m^2 = c_m, \quad \psi_e = \text{const}, \quad (8)$$

де $A_{13}, A_{23}, A_{12}, A_{22}, c_m$ – сталі в часі коефіцієнти. З (7) та (8) випливає, що сталу c_m можемо покласти рівною 1. Тоді проєкції вектора реактивного прискорення приймають вигляд

$$a_{1e} = \frac{-A_{13}t + A_{12}}{\frac{\zeta}{m_v}}, \quad a_{2e} = \frac{A_{23}t + A_{22}}{\frac{\zeta}{m_v}} \quad (9)$$

Визначення керуючої функції δ проводиться для кожної конкретної задачі за схемою, що запропонована в [6, 8]. Спочатку розв'язується задача для КА з рушійною системою без акумулятора енергії [5]. Будується графік модуля реактивного прискорення. Визначається кількість максимумів. В околі кожного максимуму буде активна дуга траєкторії тривалістю τ_i . Після чого керування (9) підставляємо в (3), і інтегруючи у відповідності до вибраного розподілу активних та пасивних дуг траєкторії знаходимо сталі $A_{13}, A_{23}, A_{12}, A_{22}$ у вигляді функцій від τ_i та $\Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2$. Задаючись значенням питомої маси акумулятора β , після інтегрування першого рівняння в (3), отримаємо значення маси корисного навантаження як функцію $m_\pi = m_\pi(\tau_i, m_v, N_\gamma, \Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2)$, яку досліджуємо на максимум за допомогою чисельних методів.

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ВКЛЮЧЕННЯ АКУМУЛЯТОРА ЕНЕРГІЇ ДО СКЛАДУ РУШІЙНОЇ СИСТЕМИ КОСМІЧНОГО АПАРАТУ ДЛЯ ПЕРЕЛЬОТУ З ОРБИТИ ЗЕМЛІ НА ОРБИТУ МАРСУ. Орбіти Землі та Марсу вважатимемо компланарними круговими орбітами. За характерний лінійний розмір приймаємо середню відстань від Землі до Сонця. Питомі маси рушія та джерела потужності приймаємо $\gamma = 1.5$ кг/КВт, $\alpha = 10$ кг/КВт.

Таблиця

T		Маси корисного навантаження									
		90 діб		100 діб		110 діб		120 діб		130 діб	
$1/\beta$		m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π
3 Гдж/кг		0.1846	0.0182	0.2607	0.0752	0.3403	0.1466	0.4064	0.2200	0.4647	0.2902
2 Гдж/кг		0.1655		0.2452		0.3189		0.3851			
1 Гдж/кг		0.1226		0.1977		0.2697		0.3365			
0.5 Гдж/кг		0.0748		0.1420		0.2103		0.2751			
0.3 Гдж/кг		0.0356		0.0744		0.1454		0.2184			

В таблиці приведено маси корисного навантаження для різного часу перельоту, який вибирався так, щоб кутова дальність перельоту не перевищувала $\pi/2$ (для справедливості першого наближення методу транспортуючої траєкторії), у випадках класичної електрореактивної рушійної системи m_π та рушійної системи з акумулятором енергії m_π^e . Серед наявних на сьогоднішній день акумуляторів енергії найвищу питому енергоємність мають маховикові акумулятори, яка досягає величини $\beta^{-1} = 15$ МДж/кг, однак такої енергоємності недостатньо для

доцільності включення акумулятора до складу рушійної системи. Очікується, що перспективні маховикові акумулятори матимуть здатність накопичувати до 3 ГДж/кг. Як видно з таблиці для ефективного використання акумуляторів енергії в рушійних системах їх енергоємність має бути не менш ніж 0.5 ГДж/кг. Чисельні розрахунки показали, що для перельоту, що розглядається, оптимальною транспортуючою траєкторією є дуга еліпса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977. – 430 с.
2. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. – 679 с.
3. Кифоренко Б. Н., Харитонов А. М. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двухрежимными двигателями // Прикладная механика. – 2010. – 46, №10. – С. 78–89.
4. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
5. Ткаченко Я. В. Оптимизация перелетов космических аппаратов с электроракетными двигателями // Збірник праць інституту математики НАН України. – 2014 – 11, №4. – С. 318–329.
6. Ткаченко Я. В. Оптимизация работы электрических ракетных двигателей с постоянной и регулируемой тягами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 3. – С. 114–123.
7. Camac M. Use of energy storage in low thrust spaceflight // ARS Journal. –1960. – 30, № 1. – P. 32–41.
8. Tkachenko Ya. V Using energy storage in low thrust constant power thruster for optimal interorbital transfers // Stability and control. Theory and application. International Journal. – 2003. – 5, No.1. – P. 22–40.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.16

Васильев И., канд. физ.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Кифоренко Б., д-р физ.-мат. наук, проф., Ткаченко Я., канд. физ.-мат. наук,
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЕРЕЛЕТ С МАЛОЙ УГЛОВОЙ ДАЛЬНОСТЬЮ МЕЖДУ ОТДАЛЕННЫМИ КОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

Проведена совместная оптимизация управления движением, энергообеспечения электрореактивной двигательной системы и параметров двигательной системы постоянной мощности с аккумулятором энергии космического аппарата при выполнении перелета с малой угловой дальностью в центральном гравитационном поле между компланарными удаленными орбитами. Получена оценка эффективности использования аккумулятора энергии в составе двигательной системы космического аппарата для перелета с орбиты Земли на орбиту Марса.

Vasil'ev I., PhD, Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv
Kiforenko B., Dr. of science, Prof., Tkachenko Ya. PhD
S. P. Timoshenko institute of mechanics of NASU, Kyiv

OPTIMAL TRANSFER WITH LOW ANGLE DISTANCE BETWEEN FAR COPLANAR ORBITS

Joint optimization of motion control, electric propulsion power supply and parameters of constant power propulsion with energy storage of spacecraft at fly with low angle distance between far coplanar orbits is provided. Estimation of energy storage using in propulsion system of spacecraft for fly from Earth orbit to Mars orbit is obtained.

УДК 539.3

О. Жук, д-р физ.-мат. наук
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН України, Київ
Я. Жук, д-р физ.-мат. наук, проф.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: y.zhuk@i.ua

ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ, ЩО ДІЄ В РІДИНІ НА ТВЕРДУ РУХОМУ КУЛЮ

Розроблено підхід для обчислення сили радіаційного тиску, що діє в звуковому полі на абсолютно тверду кулю, яка знаходиться в рідині і рухається із сталою швидкістю. У рамках підходу передбачається, що потенціал звукового поля знаходиться як розв'язок рівняння гідродинаміки в акустичному наближенні. Далі обчислюється гідродинамічна сила, що діє на кулю. При цьому тиск в рідині знаходиться з точністю до величин другого порядку малості у порівнянні з числом Маха. Сама радіаційна сила обчислюється як стала складова гідродинамічної сили, яка знаходиться її осередненням за період первинної хвилі.

Вступ. Оpubліковані в науковій літературі результати досліджень дії радіаційного тиску (тиску звукового випромінювання) на тверді тіла в рідині, а також питання, пов'язані з ним, стосуються випадків нерухомих в рідині тіл [4, 5 та ін.]. Нижче пропонується підхід до розв'язання задачі визначення радіаційного тиску на тверду кулю, яка рухається в рідині зі сталою швидкістю. Підхід узагальнює метод, викладений у [10] для нерухокої кулі. Схема дослідження в [10] передбачає знаходження потенціалу Φ звукового поля як розв'язку рівняння гідродинаміки в акустичному наближенні

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \Phi = 0, \quad (1)$$

з наступним обчисленням сили, що діє в звуковому полі на кулю. При визначенні сили тиск в рідині обчислюється з точністю до величин другого порядку порівняно з числом Маха за формулою

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (2)$$

де потенціал Φ є сумою потенціалів первинної акустичної хвилі і хвилі, розсіяній на кулі, а ρ_0 і a_0 – відповідно густина рідини і швидкість звуку в ній. Радіаційна сила, що діє на кулю в акустичному полі, є стала складова гідродинамічної сили

$$\vec{F} = -\iint_S p \vec{N} dS, \quad (3)$$

що відфільтровується осередненням (3) за період первинної хвилі. У формулі (3) \vec{N} – орт нормалі до поверхні S кулі. Будемо дотримуватися приведеної вище схеми визначення радіаційної сили і у випадку рухомої кулі.

Рівняння для потенціалу акустичного поля. Вважатимемо, що в ідеальній стисливій рідині знаходиться куля радіуса R , яка зі швидкістю \vec{U} рухається в додатному напрямку осі Oz вибраної системи координат $Oxyz$. Зв'яжемо з кулею систему координат $O_1x_1y_1z_1$, вісь O_1z_1 якої збігається з віссю Oz нерухомої системи координат. На основі принципу відносності Галілея–Ньютона задачу стаціонарного руху кулі в рідині можна замінити задачею обтікання нерухомої кулі потоком, який набігає зі швидкістю $\vec{u}_\infty = -\vec{U}$. Отже, задачу формулюємо для нерухомої кулі, яку обтікає однорідний на нескінченності потік рідини. Потік стаціонарний, тому швидкість \vec{u} збуреного наявністю кулі потоку, густина ρ' і тиск p' будуть функціями тільки просторових координат x_1, y_1, z_1 . У подальшому вважатимемо, що ентропія середовища є сталою величиною, а потік не завихрений ($\text{rot } \vec{u} = 0$), тому основні рівняння гідродинаміки візьмемо в такій формі:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho'}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho' \vec{u}) = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} p' = a^2 \vec{\nabla} \rho', \quad (6)$$

де a – локальна швидкість звуку.

Нехай тепер у рідині, стан якої визначається величинами \vec{u} , p' , ρ' , поширюється звукова хвиля. При її проходженні величини \vec{u} , p' , ρ' одержують відповідно малі прирости \vec{v} , p , ρ , які характеризують коливання рідини відносно стаціонарного стану збуреного наявністю кулі потоку. Оскільки рівняння (4)–(6) залишаються справедливими і в цьому випадку, замінимо в них \vec{u} на $\vec{u}^* = \vec{u} + \vec{v}$, p' на $p^* = p' + p$, ρ' на $\rho^* = \rho' + \rho$. Обмежуючись лінійним наближенням знехтуємо в одержаних рівняннях членами більш високого порядку відносно малих величин \vec{v} , p , ρ . У результаті одержимо відповідно:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho'}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho') + \rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (8)$$

$$p = a^2 \rho, \quad (9)$$

де a – локальна швидкість поширення малих збурень, обумовлених звуковою хвилею, відносно стаціонарного потоку рідини. Поле швидкостей у звуковій хвилі задамо потенціалом Φ

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi. \quad (10)$$

Для визначення потенціалу Φ скористаємося співвідношеннями (7)–(10). Введемо потенціал звукового тиску [1]

$$P = \frac{p}{\rho'} \quad (11)$$

і запишемо

$$\vec{\nabla} P = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho'} - \frac{\rho \vec{\nabla} p'}{(\rho')^2}. \quad (13)$$

Враховуючи співвідношення (10) і (13), із рівняння (7) одержимо

$$P = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (14)$$

Із співвідношення (11), беручи до уваги співвідношення (14), одержуємо формули для обчислення тиску p , обумовленого в рідині звуковою хвилею

$$p = -\rho' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho' (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi), \quad (15)$$

а також відповідної густини ρ

$$\rho = -\frac{\rho'}{a^2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi \right] \quad (16)$$

Оскільки із співвідношення (11), в якому ρ' не залежить від часу, маємо

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{a^2}{\rho'} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (17)$$

а
$$\bar{\nabla} P = \rho \bar{\nabla} \left(\frac{a^2}{\rho'} \right) + \frac{a^2}{\rho'} \bar{\nabla} \rho, \tag{18}$$

то рівняння (8), беручи до уваги також співвідношення (10) і (14) та умову стаціонарності потоку, запишемо в такому вигляді

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - a^2 \Delta \Phi - \bar{\nabla} \Phi \cdot \frac{1}{\rho'} \bar{\nabla} p' + \bar{u} \cdot \rho \bar{\nabla} \left(\frac{a^2}{\rho'} \right) = 0. \tag{19}$$

Враховавши співвідношення

$$\rho \bar{\nabla} \left(\frac{a^2}{\rho'} \right) = \frac{p}{\rho'} \bar{\nabla} (\ln a^2) - \frac{p \bar{\nabla} \rho'}{(\rho')^2}, \tag{20}$$

останній доданок рівняння (19) запишемо в такому вигляді

$$\bar{u} \cdot \rho \bar{\nabla} \left(\frac{a^2}{\rho'} \right) = - \frac{d\Phi}{dt} (\bar{u} \cdot \bar{\nabla} \ln a^2). \tag{21}$$

Позначимо [9] $\bar{\nabla} p' / \rho' = \bar{\nabla} P_0$ і взявши до уваги співвідношення (21), одержимо із (19) рівняння для визначення потенціалу Φ звукової хвилі

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - a^2 \Delta \Phi - \bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} P_0 + \frac{d\Phi}{dt} (\bar{u} \cdot \bar{\nabla} \ln a^2) = 0. \tag{22}$$

Рівняння (22) аналогічне рівнянню, одержаному в [1] для потенціалу акустичного поля в неоднорідному потоці рідини.

Для прийнятої нами схеми дослідження важливою є лінійна складова рівняння (22). Тому, нехтуючи в рівнянні (22) доданками другого порядку відносно доданків першого порядку, одержимо

$$\frac{\partial^2 \Phi}{dt^2} - a^2 \Delta \Phi - \bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} P_0 + \frac{\partial \Phi}{dt} (\bar{u} \cdot \bar{\nabla} \ln a^2) = 0. \tag{23}$$

Формула для визначення швидкості поширення звукової хвилі має місце і у випадку довільного руху рідини, а не тільки у випадку її спокою [9]. Тому для обчислення швидкості хвилі, яка входить у співвідношення (23), скористаємося формулою

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{24}$$

Оскільки процес вважається адіабатичним, використаємо адіабату Тейта [9]

$$\frac{p^* + C}{\rho' + C} = \left(\frac{\rho^*}{\rho'} \right)^n. \tag{25}$$

Якщо обмежитися тільки малими першого порядку, то одержимо

$$\frac{p}{\rho' + C} = n \frac{p}{\rho'}. \tag{26}$$

Використавши співвідношення (26) в формулі (24) одержимо формулу для обчислення швидкості звукової хвилі в рухомій системі координат

$$a = \sqrt{n \frac{p' + C}{\rho'}}. \tag{27}$$

При нерухомій кулі ($a = a_0$, $\rho' = \rho_0$, $p' = p_0$, $\bar{u} = \vec{0}$) рівняння (23) для визначення потенціалу Φ звукової хвилі переходить в рівняння (1).

Обчислення тиску в акустичному полі. Очевидно, що стан рідини при наявності потоку і акустичної хвилі описується системою рівнянь (4)–(6), якщо в рівняннях величини \bar{u} , p' , ρ' замінити на $\bar{u}^* = \bar{u} + \bar{v}$, $p^* = p' + p$, $\rho^* = \rho' + \rho$. Запишемо тепер рівняння (4) у формі Громеки–Лемба

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + \bar{\nabla} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^{*2} \right) + \frac{1}{\rho^*} \bar{\nabla} p^* = 0. \tag{28}$$

Оскільки ми вважаємо, що рідина знаходиться в баротропному русі і має місце потенціальне обтікання кулі, то справедлива формула [6]

$$p^* = f(\rho^*). \tag{29}$$

Введемо функцію [8]

$$P(\rho^*) = \int \frac{dp^*}{\rho^*}, \quad \frac{1}{\rho^*} \bar{\nabla} p^* = \bar{\nabla} P. \tag{30}$$

Використовуючи функцію $P(\rho^*)$, приведемо рівняння (28) до такого вигляду

$$\bar{\nabla} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\bar{u}^*)^2 + P \right] = 0. \tag{31}$$

Якщо покласти

$$P(\rho^*) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\bar{u}^*)^2, \quad (32)$$

то рівняння (28) задовольняється тотожно.

При визначенні тиску звукової хвилі в рідині використаємо підхід, запропонований в [10]. Введемо параметр згущення $s = (\rho^* - \rho')/\rho'$ і розвинемо тиск (29) в ряд Тейлора в околі тиску p' обумовленого наявністю кулі в рідині

$$p^* = f(\rho') + f'(\rho')s\rho' + \frac{1}{2}f''(\rho')s^2\rho'^2 + \dots \quad (33)$$

Тепер для функції P можна одержати такий вираз

$$P = \int \frac{dp^*}{d\rho^*} = sf'(\rho') + \frac{1}{2}s^2[\rho'f''(\rho') - f'(\rho')] + \dots \quad (34)$$

Оскільки P і s одночасно прямують до нуля, то стала інтегрування відсутня. Розв'язуючи (34) відносно s методом послідовних наближень, одержимо

$$s = \frac{P}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{\rho' f''(\rho') - a^2 P^2}{a^2} + \dots \quad (35)$$

Формулу (33) для обчислення тиску в рідині, беручи до уваги (35), а також і співвідношення $f(\rho') = p'$, запишемо в такій формі

$$p^* = p' + \rho' P + \frac{1}{2} \frac{\rho'}{a^2} P^2 + \dots, \quad (36)$$

де $p' = p^* - p$ – тиск в потоці рідини і $f'(\rho') = a^2$.

В задачах як лінійної так, і нелінійної акустики число Маха [3, 7] значно менше одиниці, тому величинами, які мають порядок квадратів числа Маха, можна знехтувати. Підставляючи у (36) співвідношення (32) і нехтуючи доданками, які мають порядок числа Маха і вище, одержимо в результаті

$$p = -\rho' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho' (\bar{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho'}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (37)$$

Рівняння (37) записано без урахування доданків, які при осередненні за часом дають нульовий внесок в радіаційний тиск. За відсутності потоку (при нерухомій кулі) і ($a = a_0$, $\rho' = \rho_0$, $p' = p_0$, $\bar{u} = \bar{0}$) з співвідношення (37) одержимо (2).

Визначення параметрів руху рідини, обумовленого переміщенням кулі. В рівняння (23) і (37) входять параметри, які характеризують стан рідини при переміщенні в ній кулі радіуса R . Ці параметри можна визначити, розв'язавши задачу потенціального обтікання кулі однорідним на нескінченності потоком рідини, яка на нескінченності має швидкість $\bar{u}_\infty = -\bar{U}$, тиск p_∞ і густину ρ_∞ . У відповідності з методом при цьому досить обмежитися лінійним наближенням. Зв'яжемо з кулею сферичну систему координат $O_1 r \phi \theta$, в якій кут θ будемо відраховувати від осі $O_1 z_1$. Оскільки осесиметричний потік рідини в рухомій системі координат $O_1 x_1 y_1 z_1$, зв'язаній з кулею, стаціонарний, то дана задача в лінійній постановці зводиться до знаходження потенціалу $\Psi(r, \theta)$, який є розв'язком рівняння [2].

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (38)$$

і який задовольняє граничні умови на поверхні кулі

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (39)$$

$$\text{і на нескінченності} \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=\infty} = u_\infty \cos \theta, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_{r=\infty} = -u_\infty \sin \theta, \quad u_\phi \Big|_{r=\infty} = 0. \quad (40)$$

Як відомо [2], цим умовам відповідає функція

$$\Psi(r, \theta) = u_\infty \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (41)$$

Тоді для швидкості руху рідини маємо

$$\bar{u} = \bar{\nabla} \left(u_\infty \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \right). \quad (42)$$

Оскільки потік ідеальної стисливої рідини в нашому випадку адіабатичний, виразимо зв'язок між тиском p' і густиною ρ' рівнянням Тейта [9]

$$\frac{p' + C}{p_\infty + C} = \left(\frac{\rho'}{\rho_\infty} \right)^n, \quad (43)$$

де для води $C = 320 \cdot 10^5$ Па, $n = 7,15$. Тоді функція тиску P_0 буде мати такий вигляд

$$P_0(p') = \int_{p_\infty}^{p'} \frac{dp'}{\rho(p')} = -\frac{n}{n-1} \frac{p_\infty + C}{\rho_\infty} \left(1 - \left(\frac{p' + C}{p_\infty + C} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right). \quad (44)$$

Густину рідини ρ' можна обчислити за формулою (43), якщо взяти до уваги інтеграл Бернуллі, який у випадку потенціального обтікання кулі стисливою рідиною має такий вигляд [9]

$$\frac{\bar{u}^2}{2} + P_0(p') = C_1, \quad (45)$$

де стала C_1 визначається із умов на нескінченності. Отже, всі параметри, які входять у співвідношення (23), (27) і (37), можуть бути визначені.

Потенціал Φ звукового поля в рідині визначається інтерференцією первинної хвилі з потенціалом Φ_0 і розсіяної на кулі хвилі з потенціалом Φ_d

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d. \quad (46)$$

Потенціал як первинної хвилі Φ_0 , так і потенціал розсіяної на кулі хвилі Φ_d , є розв'язками рівняння (23). При цьому потенціал Φ_d знаходимо при розв'язуванні задачі розсіяння первинної хвилі на кулі при умові, що на поверхні кулі компонента v_r коливальної швидкості рідини дорівнює нулеві, а потенціал Φ_d на нескінченності згасає до нуля. Сила радіаційного тиску на кулю відфільтровується осередненням в часі гідродинамічної сили (3) при умові, що тиск p обчислюється за формулою (37), а потенціал Φ визначається за формулою (46).

Висновки. В статті розроблено метод дослідження радіаційного тиску акустичного поля. На основі методу одержано формули для обчислення радіаційної сили, яка в акустичному полі діє на тверду частинку, що рухається в рідині зі сталою швидкістю. Показано, що при цьому тиск в рідині знаходиться з точністю до величин другого порядку малості у порівнянні з числом Маха. Радіаційну силу можна обчислити як сталу складову гідродинамічної сили, виконуючи осереднення за період коливань падаючої хвилі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981.
2. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. –Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. – М.: Наука, 1979.
4. Гузь А. Н., Жук А. П. О движении твердых частиц в жидкости при действии акустического поля. Механизм радиационного давления// Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 11–24.
5. Каневский И. Н. Постоянные силы, возникающие в звуковом поле// Акуст. журнал. –1961. – Т. 7, вып.1. – С. 3–17.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.: ГИТТЛ, 1955.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т.2.
9. Шашин В. М. Гидромеханика. – М.: Высш. шк., 1990.
10. King L. V. On the acoustic radiation pressure on sphere // Proc. Roy. Soc., A. – 1934. – Vol. 147, No 861. – P. 212–240.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.16

Жук О., д-р физ.-мат. наук
Институт механики им. С. П.Тимошенко НАН Украины, Киев,
Жук Я., д-р физ.-мат. наук, проф.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ В ЖИДКОСТИ НА ТВЕРДУЮ ДВИЖУЩУЮСЯ СФЕРУ

Разработан подход к определению силы радиационного давления, действующей в звуковом поле на абсолютно твердую сферу, движущуюся в жидкости с постоянной скоростью. В рамках подхода предполагается, что потенциал звукового поля находится как решение уравнения гидродинамики в акустическом приближении. Далее вычисляется гидродинамическая сила, действующая на сферу. При этом давление в жидкости находится с точностью до величин второго порядка малости в сравнении с числом Маха. Сама радиационная сила вычисляется как постоянная составляющая гидродинамической силы, определяемая осреднением за период первичной волны.

Zhuk O., Full Doctor
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Zhuk Y., Full Doctor, Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

DETERMINATION OF RADIATION FORCE ACTING ON THE MOVING RIGID SPHERE IN LIQUID

Approach for determination of the radiation force acting in the acoustic field on the moving with constant velocity rigid sphere is elaborated. In the frame of the approach, it is assumed that acoustic potential is determined as the solution of the equation of hydrodynamics in the acoustic approximation. Then, the hydrodynamic force acting on the sphere is determined. Pressure in the liquid is found with the accuracy of up to second-order quantities with respect to the Mach number. The radiation force itself is determined as the constant component of the hydrodynamic force which is calculated by averaging the force over the incident wave period.

УДК 539.3

Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
 Львівський національний університет імені Івана Франка,
 Н. Оліярник, канд. фіз.-мат. наук,
 Я. Піскозуб, ст. викл., Українська академія друкарства,
 Я. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
 Луцький національний технічний університет
 e-mail: sulym@franko.lviv.ua, nazaroliyarnyk13@gmail.com,
 piskozub@pancha.lviv.ua, pasternak@ukrpost.ua

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ФРИКЦІЙНОГО ПРОКОВЗУВАННЯ

Методом функцій стрибка побудовано гранично-елементний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною, навантаженого розподіленою зосередженою силою у поздовжньому напрямку та нормальним стиском. Береги тріщини можуть взаємно проковзувати з урахуванням сухого тертя. Досліджено вплив параметрів навантаження та відношення пружних характеристик матеріалів півпросторів на виникнення і розмір ділянки проковзування у тріщині, а також розподіл стрибків переміщень на ній, величину розсіяної енергії.

ВСТУП. Задачі теорії пружності та руйнування для тіл з тріщинами викликають велике зацікавлення дослідників (див. огляди [2, 11, 15]). У деяких випадках простої геометрії та специфічних крайових умов різними методами отримано аналітичні розв'язки таких задач [5, 10]. Значно ускладнює розв'язування урахування на поверхні контакту сил фрикційної взаємодії, довільність типу і способу навантажування, а також обмеженість розмірів досліджуваних тіл. Помітний внесок у початок вивчення впливу фрикційного проковзування на напружено-деформований стан контактуючих тіл належить Каттанео, Міндліну та ін. [14, 16, 19]. Значні здобутки у цьому напрямі належать теорії вивчення тріщин на межі поділу двох середовищ, яка для усунення фізично некоректної осцилюючої особливості широко застосовує модель локального контакту берегів безпосередньо біля вістря [12, 15, 17]. Вплив сил тертя на контактні напруження між півплощинами із неглибокими гладкими виїмками на поверхні досліджено в [18]. Широкий клас задач, які стосуються цієї проблематики, розглянуто також у працях [1, 3, 4].

Метою даної публікації є узагальнення на випадок довільного навантаження результатів робіт авторів [8, 9], де методом функцій стрибка та сингулярних інтегральних рівнянь [10, 24] отримані аналітичні розв'язки антиплоскої задачі для біматеріалу із міжфазним фрикційним проковзуванням за симетричного навантаження. Для розв'язування інтегральних рівнянь сформульованих задач пропонується застосувати гранично-елементний метод функцій стрибка [6, 7, 13, 20–23, 26].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо безмежний ізотропний масив, що складається з двох півпросторів з пружними сталими E_k, ν_k , взаємно притиснутих до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^\infty = P < 0$. Тут введено в розгляд систему координат $Oxyz$ з початком у площині контакту півпросторів xOz . Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі z та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Вивчатимемо напружено-деформований стан перерізу тіла площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k=1,2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис. 1). На ній уздовж проміжку $L' = [-b; b]$ лежить серединна лінія перерізу тунельної тріщини, береги якої перебувають у контакті.

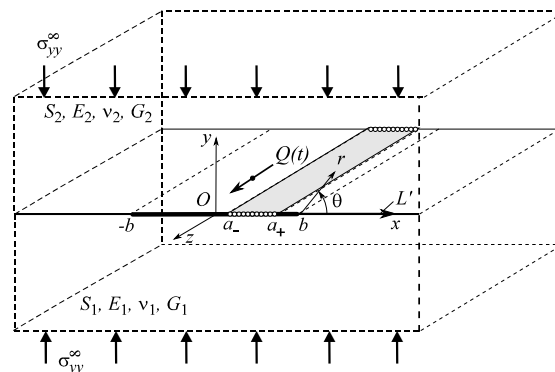


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Зовнішнє навантаження у поздовжньому напрямі визначається монотонно квазістатично зростаючою від нуля до деякого максимального значення зосередженою силою інтенсивності $Q(t)$ в точці $z_* \in S_2$. Відзначимо, що додатний напрям вектора сили обрано уздовж осі z (так, щоб з осями x, y утворювалася права система).

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ вважаємо механічно ідеальним. Уздовж L' береги тріщини контактують механічно ідеально до моменту, коли може початися взаємне проковзування контактуючих поверхонь тіл [8, 9]. Згадані умови контакту у налягаючій тріщині передбачають, що при досягненні дотичними напруженнями $\sigma_{yz}(x, 0)$ певного критичного значення τ_{yz}^{\max} на ділянці $\gamma = [a_-, a_+] \subset L'$ починається проковзування, причому цей

поріг дотичні напруження перевищити не можуть. Обмежуючись при цьому класичним законом тертя Амонтона [2], розглянемо варіант контактної задачі за умови що $\sigma_{yz}(x, 0)$ (зусилля тертя) у всіх точках ділянки $\gamma \subset L'$ дорівнюють

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x, 0) = -\text{sgn}([w])\tau_{yz}^{\max}, \quad \tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}^{\infty}, \quad (1)$$

де α - коефіцієнт тертя ковзання; $[w] = w^-(x, 0) - w^+(x, 0)$ - стрибок переміщень. Поза ділянкою $\gamma \subset L'$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує максимально допустимого рівня і взаємного переміщення берегів немає: $|\sigma_{yz}(x, 0)| \leq \tau_{yz}^{\max}, [w] = 0$.

Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо у залежності від знаку різниці переміщень $[w]$ на L' у розглядуваній точці. Тут і далі використовуються позначення $[\varphi]_L = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$; індекси "+" та "-" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L .

Застосування закону тертя у класичному вигляді (1) дає можливість, звичайно, спростити крайові умови для основної задачі, однак вибір складніших моделей тертя [2, 12], у тому числі з урахуванням спрацювання, при застосуванні граничноелементного методу функцій стрибка принципово не ускладнить процесу розв'язування.

Наявність зони проковзування можна моделювати стрибком компонент вектора переміщень на L' [10, 24], що з урахуванням закону Гука дає:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'} \equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = f_6(x, t), \quad x \in L'; \quad f_6(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L'.$$

Тут $f_6(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F_6(x, t)$, де $F_6(x, t) = -\int f_6(x, t) dx = w^+(x, t) - w^-(x, t)$; t - момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю сили.

Таким чином, необхідно розв'язати задачу поздовжнього зсуву від квазістатичної дії зосередженої сили $Q(t)$ з додатковим впливом однорідного розподілу стискувальних нормальних напружень, а також сил тертя на межі поділу матеріалів, які на тих поверхнях, де відбувається проковзування, можуть спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо. Аналітичний розв'язок такої задачі було отримано у працях авторів [8, 9] для часткового випадку симетричного щодо вертикальної осі навантаження. Випадок несиметричного навантаження вимагає більш універсального підходу до розв'язування.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ. Розв'язування задачі здійснюємо на основі відомого для антиплоскої задачі теорії пружності гранично-елементного методу функцій стрибка [6, 13, 20, 22–24, 26]. Його суть полягає у використанні методу функцій стрибка, формули Сомільяни для визначення переміщень у тілі з розрізом та теорем теорії комплексної змінної про граничні значення голоморфних функцій для побудови системи сингулярних інтегральних рівнянь тіла з тонкою пружною неоднорідністю. При цьому ядра відповідних інтегральних рівнянь записуються із використанням деяких комплексних сталих, які визначаються формалізмом Стро [20, 25] і залежать від механічних властивостей матеріалу тіла. Далі записані інтегральні рівняння розв'язуються з використанням модифікованої схеми методу граничних елементів [21, 22]. Таким чином, сформульована задача поздовжнього зсуву зосередженою силою біматеріалу з тріщиною зведеться до такого сингулярного інтегрального рівняння:

$$\text{HPV} \int_{\Gamma_C} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) F_6(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\Gamma(\mathbf{x}) = Q(t) D(\mathbf{z}_*, \mathbf{y}). \quad (2)$$

Тут HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром (Hadamard Principal Value); $\mathbf{z}_* = x_* + iy_*$ – точка прикладання сили $Q(t)$. Рівняння (2) та ядра $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ і $D(\mathbf{z}_*, \mathbf{y})$ записані у загальному випадку для тріщини описаної математичним розрізом Γ_C . У нашому випадку, коли тріщина розміщена на відрізку $L' = [-b; b]$ з вектором нормалі $\mathbf{n} = (n_x; n_y) = (0; -1)$ інтегральне рівняння (2) для $\mathbf{x}(x_1, x_2), \mathbf{y}(y_1, y_2) \in S_2$ матиме простіший вигляд:

$$\text{HPV} \int_{-b}^b S(x_1, y_1) F_6(x_1, t) dx = Q(t) D(\mathbf{z}_*, y_1);$$

$$\text{де } D(\mathbf{z}_*, y_1) = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\frac{\sqrt{G_2/G_1}}{x_* - y_1 + iy_*} + \frac{iR}{x_* - y_1 - iy_*} \right]; \quad S(x_1, y_1) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{G_2(i+R)}{2(x_1 - y_1)^2} \right];$$

$$G_1 \text{ та } G_2 - \text{модулі зсуву матеріалів, } R = -i \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ. Для ілюстрації ефективності застосування розробленого підходу розглянемо приклад, коли масив перебуває в умовах поздовжнього зсуву зосередженою силою Q , прикладеною в точці $(0; d)$. Введемо в розгляд знерозмірені величини: $x/b, d/b$ – нормовані координата x та віддаль точки прикладання зосередженої сили відповідно; $Q(t)/\pi b P, [w]C/bP$ та $W_1^d C/\pi b^2 P^2$ – нормовані інтенсивність діючої сили, стрибок переміщень та дисипація енергії відповідно.

На рис. 2 зображена залежність форми нормованих значень стрибків переміщень $C[w]/bQ$ вздовж зони проковзування від віддалі d/b точки прикладання при нормованій зосередженій силі $Q(t)/\pi b P = 2$. Відзначено практичне співпадіння результатів, отриманих за допомогою методу граничних елементів (суцільна лінія) та

аналітичного розв'язку (штрихова лінія) [6, 7, 15, 16]. Тут $C = G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$ – параметр, що характеризує відношення модулів зсуву матеріалів півпросторів. Як видно, зі зближенням точки прикладання сили до осі тріщини стрибки переміщень $[w]$ зростають. При цьому спостерігається формування виразного піку стрибків переміщень при достатньо малих значеннях d/b (наприклад $d/b = 0,2$). Натомість, у разі віддалення сили, наприклад, на подвоєну ширину тріщини, зона проковзування $|\gamma|/b$ вже не буде охоплювати всю ширину тріщини, а виникатиме лише на деякій її ділянці ($|\gamma|/b < 1$).

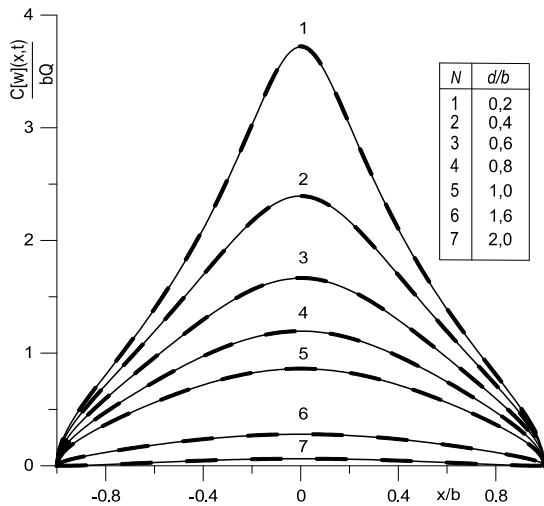


Рис. 2. Нормовані значення стрибків переміщень

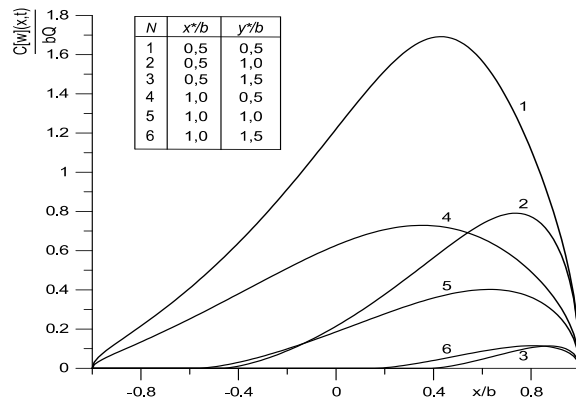


Рис. 3. Залежність нормованих значень стрибків переміщень від розміщення зосередженої сили

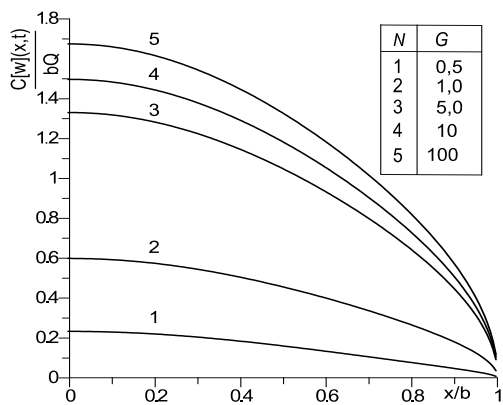


Рис. 4. Залежність нормованих значень стрибків переміщень від значення параметра G

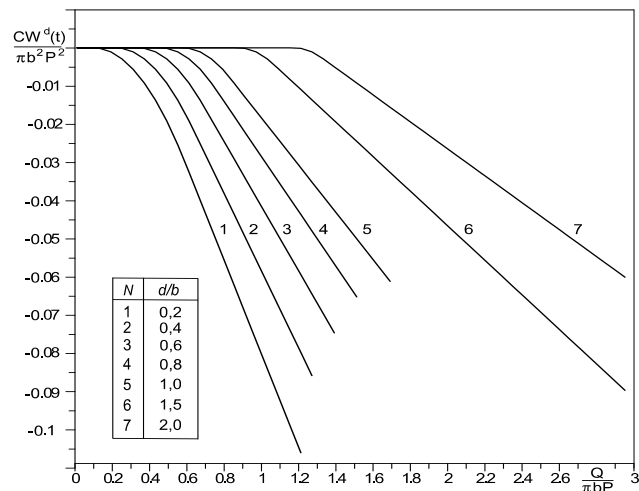


Рис. 5. Вплив інтенсивності та розміщення сили Q на розсіювання енергії W_1^d

На рис. 3 відображено результати розрахунків стрибка переміщень у разі несиметричного відносно вертикальної осі навантаження: сили, точка прикладання якої зміщена у напрямі осі Ox . Досліджено вплив зміни координат точки прикладання сили ($x^*/b, y^*/b$) на розташування та величину зони проковзування і величину відповідних стрибків переміщень. Графіки свідчать про появу несиметричності зони проковзування стосовно тріщини та зміщення зони проковзування і максимуму стрибків переміщень у сторону зміщення точки прикладання сили. При цьому, як у попередніх прикладах, наближення сили до осі тріщини породжуватиме більші $[w]$. Виявлено, що при $x^*/b > 2$ при збереженні значень решти параметрів проковзування практично зникає.

Досліджено вплив відношення модулів зсуву матеріалів півпросторів $G = G_1/G_2$ на стрибки переміщень (рис. 4). Спостерігається їх зростання при збільшенні значення G відносної жорсткості півплощини, у якій прикладається сила. Помітно, що більшим проковзування буде у випадку, коли зсувне навантаження зосередженою силою прикладене у більш жорсткому півпросторі. Обчислено величину розсіяної енергії $W_1^d C/P^2 \pi b^2$ при зміні інтенсивності зосередженої сили і точки її прикладання (рис. 5). Помітною є тенденція до зростання розсіювання енергії із наближенням точки прикладання сили до осі тріщини. У всіх розрахунках вважалося, що коефіцієнт тертя α дорівнює 0,5.

ВИСНОВКИ. Запропонована ефективна методика розрахунку напружено-деформованого стану при антиплоскому зсувному навантажуванні рівномірно розподіленою уздовж довільно розташованої осі силою двох притиснутих півпросторів, коли у контактній зоні міжфазної тріщини може відбуватися проковзування з тертям.

Шляхом порівняння числових результатів з відомими аналітичними розв'язками у окремих часткових випадках навантаження обґрунтовано коректність отриманого розв'язку. Розглянуто залежність розміру зони контакту на різних стадіях навантаження від його параметрів. Чисельно проаналізовано вплив тертя та різних варіантів навантажування на зміну розміру зони проковзування та стрибка взаємного зміщення берегів тріщини. Виявлено, що наближення точки прикладання зсувної сили до тріщини сприяє збільшенню стрибка переміщень при одночасній локалізації зони проковзування в околі прикладання сили. Несиметричність точки прикладання сили стосовно вертикальної осі тріщини приводить до появи несиметричності у тріщині зони проковзування та її зміщення у сторону зміщення точки прикладання сили. Виявлено, що при зміщенні убік точки прикладання сили більше, ніж на дві довжини тріщини, проковзування практично зникає. Помітно, що більшим проковзування є у випадку, коли зсувне навантаження зосередженою силою прикладене у більш жорсткому півпросторі. Обчислено дисипацію енергії для всіх розглянутих випадків навантажування. Досліджено, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // *Машинознавство*, 2008, №3 (129), С.16–21.
- Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М: Наука, 2001. – 478 с
- Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженні / *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів, 2003. С. 322–324.
- Острык В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с
- Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев, Наукова думка. - 1976. – 444 с.
- Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Оліярник Н. Р. Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями // *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех-мат.* – 2012. – Вип. 76. – С. 119–134.
- Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // *Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010* (Минск, 25 окт. – 1 нояб. 2010 г.) В 2 ч. Ч. 2.– Минск: БГУ, 2010. – С. 399–404.
- Пискозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, 2014. – вип.20. – С.160–172.
- Пискозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2014. – Вип.12. – С. 184–191
- Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. 716 с.
- Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Умови контактної взаємодії (огляд) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 2004, 47, №3. С. 110–125
- Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах // *Прикладная математика и механика*, 1966, 30, № 1. С. 82–93
- Bozhdyarnyk V., Pasternak I., Sulym H., Oliyarnyk N. BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities // *Acta mechanica et automatica*. – 2011. – № 4 (5). – P. 11–16.
- Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei*. – 1938. – 27. –P.342–348.
- Comninou M, Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // *Journal of Elasticity*. – 1980. – 10(2). – P. 203–212.
- Jager J. Half-planes without coupling under contact loading // *Arch.Appl.Mech.* – 1997. – 67. – P. 247–259.
- Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // *Archive of App. Mech.* – 1999. – 69. – P. 317–335.
- Martynyak R., Kryshafovych A. Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // *J. Friction and Wear*. – 2000. – 21, No 4. – P. 6–15.
- Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces // *ASME J. Appl.Mech.* – 1953. – 75. – P.327–344. Special Issue Thermomechanics, 2008. – 61. P. 315–337 p.
- Pasternak Iа. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity// *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2012. – 36 – P. 1931–1941.
- Pasternak Iа. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2011. – 35, №. 4. – P. 678–690.
- Pasternak Iа., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2014. – 48 – P. 87–101.
- Pasternak Iа., Sulym H. Dual boundary element method for the problems of thin inclusions theory // *Journal of Mathematical Science*. – 2010. – 53. – No 2. – P. 46–57.
- Piskozub J. Z., Sulim G. T. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *Journal of Engineering Mathematics*.
- Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
- Wu W.-L. Dual Boundary Element Method Applied to Antiplane Crack Problems // *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*. -Volume 2009, Article ID 132980, 10 pages. -doi:10.1155/2009/132980.

Стаття надійшла до редколегії 11.03.15

Сулим Г., д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Н. Оліярник, канд. фіз.-мат. наук, Пискозуб Л., ст. преп.,
Українська академія печати,
Я. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук, Луцький національний технічний університет

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ БИМАТЕРИАЛА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Методом функций скачка построено гранично-элементное решение антиплоской задачи для биматериала с закрытой межфазной трещиной, нагруженного распределенной сосредоточенной силой в продольном направлении и нормальным сжатием. Берега трещины могут взаимно проскальзывать с учетом сухого трения. Исследовано влияние параметров нагружения и соотношения упругих характеристик материалов полупространств на возникновение и размер зоны проскальзывания в трещине, а также распределение скачков перемещений в ней, величину диссипации энергии.

Sulym H.T., Full Doctor, Ivan Franko National University of Lviv,
Oliyarnyk N.R., PhD, Piskozub L.G., Teacher, Ukrainian Academy of Printing,
Pasternak Iа.M., PhD, Lutsk National Technical University

LONGITUDINAL SHEAR OF THE BIMATERIAL WITH INTERFACIAL CRACK WITH TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTIONAL SLIPPAGE

Using jump function method the boundary-element solution of the anti-plane problem for a bi-material with the closed interfacial crack is constructed. Solid is exposed to the loading by a concentrated force in the longitudinal direction and normal load. The faces of the crack can move relatively to each other with dry friction. We analyze the dependence size of this zone, shape of the displacement jump and energy dissipation on the loading parameters and shear modulus of the materials ratio.

УДК 681.3

L. Vasylevych, PhD
 Borys Grinchenko Kyiv University, Kyiv
 e-mail: lvasilevich@mail.ru

**MEMBERSHIP FUNCTIONS OF MODIFIED TERMS
 OF LINGUISTIC VARIABLES AND THEIR ANALYSIS**

The work offers semantic procedures to find out membership functions of modified terms of linguistic variables that correspond to such words as "very", "more or less", "much more" or "much less", and provides formulas to account for them. The work features peculiarities of fuzziness indexes of the above words. It also analyses how the fuzziness indexes change and provides corresponding formulas.

Introduction. The major difficulty in decision making comes with the factors as uncertainty in information, multicriteriality of a problem, impossibility to cardinally measure certain partial factors of decisions or difficulties in their evaluating; time limitations to make immediate decisions; human factor in decision making; impossibility to do objective experiments to check efficiency of various decisions; risk related to any decision. That is why systems of decision support have been developed for a vast range of problems, the most effective of them being systems of decision support with fuzzy logic [1, 2, 3, 4, 5]. The strong appeal of fuzzy logic for systems of decision support lies in its closeness to real speech. It makes the process of creating both data base and interface easy, as statements of a human expert may be directly translated into mathematical formulas of fuzzy logic and the other way round. Data base of such systems may be used basing on composition rules with fuzzy linguistic expressions. At that it is possible to use modified terms of linguistic variables. The work lays emphasis to the significance of the problem as there is no unified methodology to determine the functions of membership of modified terms or of their analysis. The purpose of this articles is to develop semantically the procedure to determine the membership function of modified terms of linguistic variables that correspond to such words as "very", "more or less", "much more" or "much less" and so on; to have formulas to work out the corresponding membership function and their analysis.

Main results. System of decision support will be analyzed in its narrow sense of the word as "intellectual" software that uses experts' knowledge and expertise (knowledgebase) as well as information about an object of decision making and "understanding" the person, who makes decisions (PMD) in his field (database). On the basis of processing them optimal resolutions are worked out (algorithm of fuzzy output operation), control signals are developed (fig. 1).

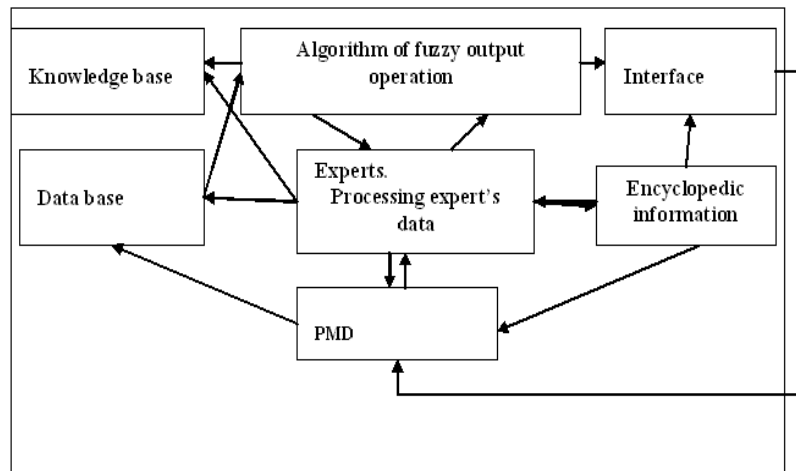


Fig. 1. Main elements of managerial decision support system and links between them

By intellect we understand ability to adapt to new information that is characterized by new external conditions and new objects of decision making.

The system is supposed to have 3 modes of operation: receiving expert's knowledge (creating data base), receiving data about the situation and object of decision making (creating a data base) and the mode of logic output, basing on which decisions are made.

In many cases the data base is defined by a system of fuzzy production rules as shown in [2, 3]:

$$\text{If } \nabla_k A_i^L, \text{ then } \nabla_l B_i^L; i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

where $\nabla_k A_i^L; i = \overline{1, n}$, – linguistic expression of the type $A_i^L = E_j$ which is the antecedent with term modifier ∇_k ; E – name f linguistic variable; E_j – one of its terms; $\nabla_l B_i^L$ - fuzzy linguistic expression with term modifier ∇_l , which is the consequent of fuzzy production.

For instance, the indistinct linguistic expression $A_1^L = E_j$ – "The installation has very low reliability level" has a linguistic variable E "Installation reliability", one of the term of which is E_j – "Low reliability level". Modifier of the term ∇_1 – is expressed by the word "Very". Another indistinct linguistic expression $\nabla_2 B_1^L$ "There needed parallel connection of much

higher than average number of such installations" uses linguistic variable E "Number of parallel installations", one of the term of which is E_j "Average number of installations". Modifier of the term $\nabla_2 B_1^L$ – is defined by the words "much higher", which in this case is equivalent to modifier "Very".

As the semantic procedures of forming the modifiers and corresponding formulas of determining membership functions of the terms with linguistic variables with modifiers do not exist, so this work is going to consider this task, too.

Further in the work there will be used terms A^L for linguistic variables as fuzzy variables with trapezoidal function of membership, that are featured by 4 numbers: $A^L = \langle a : b : c : d \rangle$, in which the carrier of fuzzy variables $s = d - a$, and kernel $r = c - b$ (fig. 2). The work [7] shows that setting up side branches of membership functions as linear ones doesn't lower the generality of the evaluation task, but all the mathematical operations on fuzzy variables are becoming significantly simpler.

The left branch of the trapezoidal membership function takes the form:

$$\mu_n(x) = \frac{x - a}{b - a}; \quad x \in [a; b], \tag{2}$$

the right branch –

$$\mu_n(x) = \frac{d - x}{d - c}; \quad x \in [c; d]. \tag{3}$$

For defuzzification of such a fuzzy variable using the method of gravitation center it is convenient to use the formula [6]:

$$x_{y.m.} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mu(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx} = \frac{d^2 + c^2 + dc - a^2 - b^2 - ab}{3(d - a + c - b)}. \tag{4}$$

For fuzzy numbers ($b=c$) formula (4) becomes even more simple:

$$x_{y.m.} = \frac{a + b + d}{3}. \tag{5}$$

When using various modifies the following transformations of membership function of the term of linguistic variable or fuzzy variable are possible:

1. Extension of the membership function, when the left branch of membership function moves left and the right one – right, which corresponds to such modifies ∇_1 , as "more or less";
2. Contraction (concentration) of the membership function, when the left branch of membership function moves right and the right one – left, which corresponds to such modifies ∇_2 , as "about", "nearly";
3. Reduction of the fuzzy variable, when both the left and right branches of membership function move right, which corresponds to such modifies ∇_3 , as "much less", "very little";
4. Increase of the fuzzy variable, when both the left and right branches of membership function move left, which corresponds to such modifies ∇_4 , as "much more", "very big".

Determining trapezoidal membership function of modified terms of linguistic variable $\nabla_j A_i^L = \langle a_m; b_m; c_m; d_m \rangle$ is suggested as follows (fig. 2).

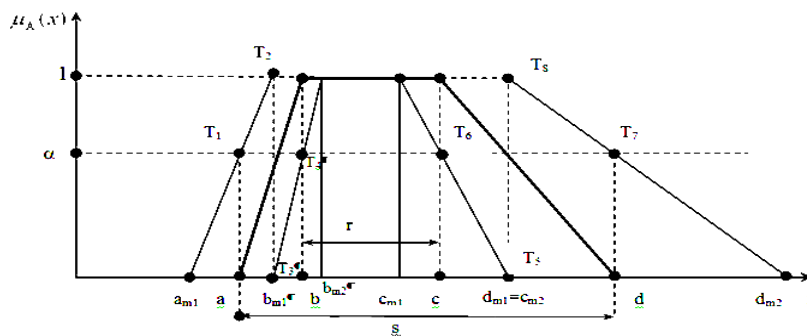


Figure 2. Diagram of determining membership function of modified terms of linguistic variables

When the left branch of membership function moves left, then points T_1 and T_2 can be determined as shown in fig. 2. The left branch of the corresponding modified term is drawn through these points. When using (2), we get for this branch:

$$b_{m1} = a + \beta(b - a); \tag{6}$$

$$a_{m1} = \frac{a - \beta b_{m1}}{(1 - \beta)}, \tag{7}$$

where $\beta \in (0;1)$ – is an index, that characterizes the stage (power) of action of the corresponding modifier.

When $\beta=0$, the left branch of membership function gets vertical ($b_{m1} = a_{m1} = a$) and when $\beta = 1$, it turns into infinite horizon $(-\infty; b)$. When $\beta \geq 0.5$, the carrier of the modified term changes at larger rate than its kernel.

When the left branch of membership function moves right, then points T_3 and T_4 are found as shown in fig. 2. A new left branch of modified term is drawn through them. When using (2), we get:

$$a_{m2} = a + \beta(b - a); \quad (8)$$

$$b_{m2} = \frac{b - (1 - \beta)a_{m2}}{\beta}. \quad (9)$$

When $\beta = 0$, the left branch of membership function turns into infinite horizon $(a; \infty)$, and when $\beta = 1$, it becomes vertical ($b_{m2} = a_{m2} = b$).

When the right branch of membership function moves left and through point's T_5 and T_6 , then using (3), we get the following:

$$d_{m1} = d - \beta(d - c); \quad (10)$$

$$c_{m1} = \frac{c - (1 - \beta)d_{m1}}{\beta}, \quad (11)$$

When the right branch of membership function moves right and through points T_7 and T_8 , then using (3), we get the following:

$$c_{m2} = d - \beta(d - c); \quad (12)$$

$$d_{m2} = \frac{d - \beta c_{m2}}{1 - \beta}. \quad (13)$$

From formulas (6), (8) and (10), (12) we get that $b_{m1} = a_{m2}$; and $d_{m1} = c_{m2}$.

This result corresponds to graphic finding these points as shown in fig. 2. Index α is supposed to provide the condition

$$b_{m2} \leq c_{m1}, \quad (14)$$

at which the use of modifier ∇_2 will not lead to subnormal status of membership function.

When plugging (9) and (11) in (14), we find a condition for choosing index β :

$$\beta \geq \frac{v - \sqrt{v^2 - 4}}{2},$$

where

$$v = \frac{2(d - a) - (c - b)}{(d - a) - (c - b)}. \quad (15)$$

To evaluate the variation of membership function of terms of linguistic variable or fuzzy variable we offer to use index of fuzziness k_p as a functional that is analogous to Shannon entropy [5]:

$$k_p = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) \ln \mu_A(x) \cdot dx,$$

where $\mu_A(x)$ – of membership function of fuzzy variable A .

The index of fuzziness has the following properties.

Property 1. Index of fuzziness k_p of any normal continuous fuzzy variable (FV) is directly proportional to the difference between its carrier s and kernel r of the fuzzy variable:

$$k_p = K(s - r), \quad (16)$$

where K – fixed coefficient [7].

For the linear side branches as show in work [7], $K=0.25$ and changes irrelevantly, if side branches of the membership function are non-linear.

Property 2. When shifting the membership function of FV along the X axis index of fuzziness does not change. In other words, if

$$k_{pA} = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x) \ln \mu_A(x) \cdot dx,$$

then

$$k_{p\tilde{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x-l) \ln \mu_A(x-l) \cdot dx = k_{pA}.$$

Proving is done by changing the variables in the integral.

Property 3. When extending the membership function of FV the membership function of FV along x axis in the way that the carrier and kernel grow by one and the same value L , index of fuzziness does not changes.

Indeed, according to (16), we have

$$k_p = K \cdot (s + L - r - L) = K(s - r).$$

Property 4. When membership function of FV along x axis is extended n times, so is changed the index of fuzziness by n times, too.

Indeed, when the membership function of FV along x axis is extended n times so is changed the carrier and kernel by n times, too. According to (16), we have

$$k_{pA} = K \cdot (ns - nr) = Kn(s - r).$$

Property 5. When only kernel r is extending n times, the index of fuzziness changes. Indeed, according to (16), we have

$$\Delta k_p = k_{pA} - k_{p\bar{A}} = K \cdot r(n-1);$$

Property 6. When only carrier r is extending n times, the index of fuzziness grows. Indeed, according to (16), we have

$$\Delta k_p = k_{p\bar{A}} - k_{pA} = K \cdot s(n-1).$$

When evaluating the index of fuzziness of FV it is convenient to utilize the following theorems.

Theorem1. The index of fuzziness k_{pA} of a sum of fuzzy variables $A_\zeta, \zeta = 1, \dots, \tau$, equals a sum the indexes of fuzziness $k_{p\zeta}$ of these variables:

$$k_{pA} = \sum_{\zeta=1}^{\tau} k_{p\zeta}.$$

Proving is done by mathematic induction method.

Theorem2. The index of fuzziness k_{pA} of difference between two FV equals a sum of indexes of fuzziness of these variables:

$$k_{pA} = k_{p1} + k_{p2}.$$

Proving. In accordance with generalization principle [1] the membership function of difference between two FV is defined as four numbers $\langle a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2 \rangle$. Then

$$\begin{aligned} k_{pA} &= K(s-r) = K(d_1 - a_2 - (a_1 - d_2) - (c_1 - b_2) - (b_1 - c_2)) = \\ &= K(d_1 - a_1 - (c_1 - b_1) + d_2 - a_2 - (c_2 - b_2)) = K(s_1 - r_1 + (s_2 - r_2)) = k_{p1} + k_{p2}, \end{aligned}$$

as was to be proved.

Utilizing (16), we will determine the expressions for kernel r_{∇_i} , carrier s_{∇_i} and index of fuzziness $k_{p\nabla_i}$ for various modifiers.

1. For the modifier of extension "more or less" ∇_1 , when the left branch of the membership function moves left and right one – right, the modified term $\nabla_1 A^L = \langle a_{m1} : b_{m1} : c_{m2} : d_{m2} \rangle$ has the following formulas:

$$r_{\nabla_1} = c_{m2} - b_{m1} = \beta r + (1-\beta)s = \beta(c-b) + (1-\beta)(d-a); \tag{17}$$

$$s_{\nabla_1} = d_{m2} - a_{m1} = \frac{s - \beta r_{\nabla_1}}{1-\beta} = \frac{d-a - \beta((1-\beta)(d-a) + \beta(c-b))}{1-\beta}; \tag{18}$$

$$k_{p\nabla_1} = K(s_{\nabla_1} - r_{\nabla_1}) = K(d_{m2} - a_{m1} - c_{m2} + b_{m1}) = K \frac{s - r_{\nabla_1}}{1-\alpha}. \tag{19}$$

2. For the modifier of contraction "about" or "nearly" ∇_2 , when the left branch of the membership function moves right and right one – left, the modified term $\nabla_2 A^L = \langle a_{m2} : b_{m2} : c_{m1} : d_{m1} \rangle$ has the following formulas:

$$s_{\nabla_2} = d_{m1} - a_{m2} = \beta r + (1-\beta)s = \beta(c-b) + (1-\beta)(d-a); \tag{20}$$

$$r_{\nabla_2} = c_{m1} - b_{m2} = \frac{r - (1-\beta)s_{\nabla_2}}{\beta} = \frac{c-b - (1-\beta)(d_{m1} - a_{m2})}{\beta}; \tag{21}$$

$$k_{p\nabla_2} = K(s_{\nabla_2} - r_{\nabla_2}) = K(d_{m1} - a_{m2} - c_{m1} + b_{m2}) = K(c_{m2} - c_{m1} + b_{m2} - b_{m1}). \tag{22}$$

3. For the modifier of reduction "much less", "very little" ∇_3 , when both the left and the right branches of the membership function move left, the modified term $\nabla_3 A^L = \langle a_{m1} : b_{m1} : c_{m1} : d_{m1} \rangle$ has the following formulas:

$$s_{\nabla_3} = d_{m1} - a_{m1} = d - \beta(d-c) - \frac{a - \beta b_{m1}}{1-\beta}; \tag{23}$$

$$r_{\nabla_3} = c_{m1} - b_{m1} = \frac{c - (1-\beta)d_{m1} - a - \beta(b-a)}{\beta}; \tag{24}$$

$$k_{p\nabla_3} = K(s_{\nabla_3} - r_{\nabla_3}) = K(d_{m1} - a_{m1} - c_{m1} + b_{m1}) = K(s_{m1} - r_{m1}), \tag{25}$$

where $s_{m1} = d_{m1} - a_{m1}; r_{m1} = c_{m1} - b_{m1}$.

4. For the modifier of increase "much more", "very big" ∇_4 , when both the left and the right branches of the membership function move right, the modified term $\nabla_4 A^L = \langle a_{m2} : b_{m2} : c_{m2} : d_{m2} \rangle$ has the following formulas:

$$s_{\nabla_4} = d_{m2} - a_{m2} = \frac{s - \beta r_{\nabla_4}}{1-\beta} = \frac{d-a - \beta((1-\beta)(d-a) + \beta(c-b))}{1-\beta}; \tag{26}$$

$$r_{\nabla_4} = c_{m2} - b_{m2} = \beta r + (1-\beta)s = \beta(b-a) + (1-\beta)(d-a); \tag{27}$$

$$k_{p\nabla_4} = K(s_{\nabla_4} - r_{\nabla_4}) = K(d_{m2} - a_{m2} - c_{m2} + b_{m2}) = K(s_{m2} - r_{m2}), \tag{28}$$

where $s_{m2} = d_{m2} - a_{m2}; r_{m2} = c_{m2} - b_{m2}$.

As we see with (17) and (20), $r_{\nabla_1} = s_{\nabla_2}$.

When using various modifiers, the indexes of fuzziness change:

$$\nabla k_{p\nabla_1} = k_{pA^L} - k_{p\nabla_1 A^L} = K(s-r-d_{m2}+a_{m1}+c_{m2}-b_{m1}); \quad (29)$$

$$\nabla k_{p\nabla_2} = k_{pA^L} - k_{p\nabla_2 A^L} = K(s-r-d_{m1}+a_{m2}+c_{m1}-b_{m2}); \quad (30)$$

$$\nabla k_{p\nabla_3} = k_{pA^L} - k_{p\nabla_3 A^L} = K(s-r-d_{m1}+a_{m1}+c_{m1}-b_{m1}); \quad (31)$$

$$\nabla k_{p\nabla_4} = k_{pA^L} - k_{p\nabla_4 A^L} = K(s-r-d_{m2}+a_{m2}+c_{m2}-b_{m2}); \quad (32)$$

At $\alpha=0.5$ the index of fuzziness while using the modifiers ∇_1 , ∇_3 and ∇_4 does not change in comparison with the index of fuzziness of the starting term, as the kernel and carrier change by one and same value (properties 3). Hence, in practice, if it meets the requirements (15), it is better to choose $\beta = 0.5$.

In the end, we will give an illustrational example of using the offered method of defining the membership function of modified terms of linguistic variables that are used in decision making support on the basis of fuzzy logic system and their analysis.

Example. Given term of linguistic variable $A^L = \langle a : b : c : d \rangle = \langle 2; 4; 8; 10 \rangle$. We will find modified terms and make their analysis.

Solution. If coefficient $\beta = 0.5$. It meets the requirement (15).

Indeed,
$$\beta \geq \frac{v - \sqrt{v^2 - 4}}{2} = \frac{3 - \sqrt{9 - 4}}{2} = 0.38,$$

where
$$v = \frac{2(d-a)-(c-b)}{(d-a)-(c-b)} = \frac{2(10-2)-(8-4)}{(10-2)-(8-4)} = 3.$$

By using formula (6)–(13), we find:

$$b_{m1} = a + \beta(b-a) = 2 + 0.5(4-2) = 3; \quad a_{m1} = \frac{a - \beta b_{m1}}{(1-\beta)} = \frac{2 - 0.5 \cdot 3}{1 - 0.5} = 1; \quad a_{m2} = a + \beta(b-a) = 3;$$

$$b_{m2} = \frac{b - (1-\beta)a_{m2}}{\beta} = \frac{4 - (1-0.5)3}{0.5} = 5; \quad d_{m1} = d - \beta(d-c) = 10 - 0.5(10-8) = 9;$$

$$c_{m1} = \frac{c - (1-\beta)d_{m1}}{\beta} = \frac{8 - (1-0.5)9}{0.5} = 7; \quad c_{m2} = d - \beta(d-c) = 10 - 0.5(10-8) = 9; \quad d_{m2} = \frac{d - \beta c_{m2}}{1-\beta} = \frac{10 - 0.5 \cdot 9}{1 - 0.5} = 11.$$

Then the membership functions are shown as the following trapezoid:

$$\nabla_1 A^L = \langle a_{m1}; b_{m1}; c_{m2}; d_{m2} \rangle = \langle 1; 3; 9; 11 \rangle; \quad \nabla_2 A^L = \langle a_{m2}; b_{m2}; c_{m1}; d_{m1} \rangle = \langle 3; 5; 7; 9 \rangle; \quad \nabla_3 A^L = \langle a_{m1}; b_{m1}; c_{m1}; d_{m1} \rangle = \langle 1; 3; 7; 9 \rangle; \quad \nabla_4 A^L = \langle a_{m2}; b_{m2}; c_{m2}; d_{m2} \rangle = \langle 3; 5; 9; 11 \rangle.$$

Using formula (16) or formulas (19), (22), (25), (28) we find the indexes of fuzziness of modified terms:

$$k_{p\nabla_1} = K(s_{\nabla_1} - r_{\nabla_1}) = 0.25(11 - 1 - (9 - 3)) = 1; \quad k_{p\nabla_2} = K(s_{\nabla_2} - r_{\nabla_2}) = 0.25(9 - 3 - (7 - 5)) = 1;$$

$$k_{p\nabla_3} = K(s_{\nabla_3} - r_{\nabla_3}) = 0.25(9 - 1 - (7 - 3)) = 1; \quad k_{p\nabla_4} = K(s_{\nabla_4} - r_{\nabla_4}) = 0.25(11 - 3 - (9 - 5)) = 1.$$

As mentioned above, at $\beta=0.5$, the indexes of fuzziness for different modifications of the term are identical. But at different β these indexes will be different. So if the index of fuzziness of terms $A^L = \langle 2; 4; 8; 10 \rangle$ equals $k_{pA^L} = K(s-r) = 0.25(10-2-(8-4)) = 1$, then it does not change at any modification.

Let us analyze how the defuzzification variables change when modifying the terms. We use formula (4) and get:

$$x_{u.m.A^L} = \frac{d^2 + c^2 + dc - a^2 - b^2 - ab}{3(d-a+c-b)} = \frac{100 + 64 + 80 - 4 - 16 - 8}{3(10-2+8-4)} = 6;$$

$$x_{u.m.\nabla_1 A^L} = 6; \quad x_{u.m.\nabla_2 A^L} = 6; \quad x_{u.m.\nabla_3 A^L} = 5; \quad x_{u.m.\nabla_4 A^L} = 7;$$

As we see, the use of modifiers ∇_1 and ∇_2 didn't change defuzzification meaning of the term, but it is only real for symmetrical the trapezoid membership functions. It is natural, that the use of modifier ∇_3 has diminished defuzzification meaning of the term, but the use of modifier ∇_4 has enlarged it.

When we take coefficient $\beta=0.6$, then we find:

$$b_{m1} = 3.2; \quad a_{m1} = 0.35; \quad a_{m2} = 3.2; \quad b_{m2} = 4.53; \quad d_{m1} = 8.8; \quad c_{m1} = 7.46; \quad c_{m2} = 8.8; \quad d_{m2} = 11.8.$$

Then the membership functions of modified terms are determined by the following trapezoids: $\nabla_1 A^L = \langle 0.35; 3.2; 8.8; 11.8 \rangle$; $\nabla_2 A^L = \langle 3.2; 4.53; 7.46; 8.8 \rangle$; $\nabla_3 A^L = \langle 0.35; 3.2; 7.46; 8.8 \rangle$; $\nabla_4 A^L = \langle 3.2; 4.53; 8.8; 11.8 \rangle$.

The index of fuzziness of modified terms:

$$k_{p\nabla_1} = 0.25(11.8 - 0.35 - (8.8 - 3.2)) = 1.46; \quad k_{p\nabla_2} = 0.67; \quad k_{p\nabla_3} = 1.05; \quad k_{p\nabla_4} = 1.08.$$

As we see, these indexes are already different from the index of fuzziness of the non-modified term A^L :

$$\nabla k_{p\nabla_1} = k_{pA^L} - k_{p\nabla_1 A^L} = 1 - 1.46 = -0.46; \quad \nabla k_{p\nabla_2} = 0.33; \quad \nabla k_{p\nabla_3} = -0.05; \quad \nabla k_{p\nabla_4} = -0.08.$$

Conclusions. 1. The work offers the method of determining the membership functions of modified terms of linguistic variables, that are used in knowledge base of decision making support systems and shows the formulas obtained. 2. The

properties the index of fuzziness of fuzzy variables and terms of linguistic variables are given. 3. The work outlines two theorems for the index of fuzziness of fuzzy variables and terms of linguistic variables that can be convenient to use when analyzing the sensitivity of decision making support systems based on fuzzy linguistic expressions. 4. The formulas have been obtained to evaluate the index of fuzziness for various modifiers of the term of linguistic expressions and their defuzzification. Their analysis is given.

REFERENCES

1. Поспелов Д. А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 396 с.
2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование / Леоненков А. В. – СПб.: ВНУ. – Петербург, 2003. – 736 с.
3. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука, 1990, – 272 с.
4. Борисов А. Н. и др.. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М.: Радио и связь, 1989, - 321с.
5. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ./Под ред. Р.Р.Ягера.- М.: Радио и связь, 1986.- 408 с.
6. Василевич Л. Ф., Маловик К. Н., Смирнов С. Б. Количественные методы принятия решений в условиях риска: Учеб. Пособие. – Севастополь: СНАУЭИП, 2007. – 229 С.
7. Василевич Л. Ф. Анализ чувствительности и стабильности нечетких систем принятия решений // Кибернетика и системный анализ, 1998. – №1, С. 71–76.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.15

Василевич Л., канд. техн. наук, доц.
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ

ФУНКЦІ НАЛЕЖНОСТІ МОДИФІКОВАНИХ ТЕРМІВ ЛІНГВІСТИЧНИХ ЗМІННИХ ТА ЇХ АНАЛІЗ

У роботі запропоновані семантичні процедури знаходження функцій належності модифікованих термів лінгвістичних змінних, які відповідають таким словам, як "дуже", "більш – менш", "значне більше" або "значне менше" та отримані формули для їх розрахунків. Приведені властивості показників розмитості термів лінгвістичних змінних (нечітких змінних). Проведено аналіз змін коефіцієнтів розмитості цих функцій належності та отримані відповідні формули.

Василевич Л., канд. техн. наук, доц.
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ

ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ТЕРМОВ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ АНАЛИЗ

В работе предложены семантические процедуры нахождения функций принадлежности модифицированных термов лингвистических переменных, которые соответствуют таким словам как "значительно", "более – менее", "существенно больше" или "существенно меньше" та получены формулы для их расчетов. Приведены свойства показателей размытости термов лингвистических переменных (нечеткие переменные). Приведен анализ измененных коэффициентов размытости этих функций та получены соответствующие формулы.

ОВСІЄНКО СЕРГІЙ АДАМОВИЧ (01.05.1953 – 25.01.2016)



Сергій Адамович Овсієнко народився у старовинному селі Германівка (у 1944–87 рр. – село Красне-2) Обухівського району Київської області. Його батьки – за освітою філологи – рано помітили математичні здібності сина і всіляко сприяли їх розвитку. У 1967 р. Сергій вступає до Республіканської фізико-математичної школи-інтернату при Київському державному університеті ім. Т. Г. Шевченка, яку закінчує в 1970 р. із золотою медаллю. Його вчителем математики у ФМШ був В. А. Вишеньський. У шкільні роки Сергій брав активну участь в Українських та Всесоюзних математичних олімпіадах для школярів, завжди був серед переможців.

У 1970 р. С. А. Овсієнко вступає на механіко-математичний факультет Київського університету. Уже з першого курсу, насамперед, під впливом професора Л. А. Калужніна, починає активно цікавитися алгеброю. Після закінчення з відзнакою в 1975 р. механіко-математичного факультету Сергій Адамович вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР (науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. В. Ройтер), де в 1978 році успішно захистив кандидатську дисертацію на тему "Квадратичні форми в теорії зображень". У 1978–1982 рр. працює в Інституті математики, спочатку інженером, потім молодшим науковим співробітником. У 1982 р. С. А. Овсієнко повертається на механіко-математичний факультет, з яким більше не розлучається. Спочатку він працює в науково-дослідній частині університету на посадах

молодшого і згодом старшого наукового співробітника, а потім стає завідувачем лабораторії. У 1988 р. С. А. Овсієнко переходить на викладацьку роботу на кафедру алгебри і математичної логіки, де пройшов усі щаблі: асистент, доцент, професор. Він був яскравим і неординарним педагогом, багато колишніх студентів механіко-математичного факультету з вдячністю згадують його лекції з алгебри і теорії чисел, лінійної алгебри, прикладної алгебри, різноманітних спецкурсів, які він читав з натхненням, ентузіазмом і глибоким почуттям гумору.

У 2006 р. Сергій Адамович успішно захистив докторську дисертацію на тему "Категорні методи в теорії зображень" (науковий консультант – доктор фізико-математичних наук, професор Ю. А. Дрозд). До сфери його наукових інтересів насамперед належала теорія зображень – він був одним із провідних представників добре відомої в математичному світі Київської школи з теорії зображень. Разом із Ю. Дроздом і В. Футорним він увів новий

клас зображень – зображення Харіш–Чандри, а разом з В. Футорним, А. Молевим і В. Мазорчуком розробив теорію таких зображень для повної лінійної алгебри Лі, а також для обмежених алгебр струмів та янгіанів. Зокрема, він встановив існування зображень Харіш–Чандри з довільним характером. Разом із Ю. Дроздом і Б. Гузнером він побудував серії простих модулів над узагальненими алгебрами Вейля. Значним є його внесок у розробку теорії матричних задач – нового розділу теорії зображень, створеного переважно київськими алгебраїстами. Їй були присвячені перші наукові праці С. А. Овсієнка, і нею він активно займався усе життя.

Втім, наукові інтереси С. А. Овсієнка не обмежувалися теорією зображень. Із понад 80 його наукових праць багато стосуються алгебраїчної геометрії, теорії асоціативних алгебр і модулів над ними, теорії алгебр Лі, комбінаторики, теорії категорій, гомологічної алгебри. Великий цикл його праць, частково, у співробітництві з В. Мазорчуком і німецькими математиками С. Кенігом і К. Штропель, присвячено теорії квазіспадкових і більш широких класів стратифікованих алгебр. Він глибоко вивчив зв'язки квазіспадкових алгебр з матричними задачами, дослідив їх гомологічні властивості, встановив існування і єдиність борелівських підалгебр у кожному класі Моріта еквівалентності квазіспадкових алгебр, розробив теорію двоїстості у їх похідних категоріях, узагальнив конструкцію дуальної алгебри за Рінгелем.

Сергій Адамович користувався великим авторитетом серед своїх колег як науковець і як викладач – він був членом спеціалізованих вчених рад із захисту дисертацій при Київському університеті і при Інституті математики НАН України, членом редколегій ряду математичних видань як в Україні, так і за кордоном. Серед учнів С. А. Овсієнка 4 кандидати наук, багато студентів писали свої дипломні роботи під його керівництвом. Нині всесвітньо відомі вчені В. Футорний, В. Бавула, В. Мазорчук з вдячністю згадують С. А. Овсієнка, який відіграв істотну роль у їхньому становленні як математиків. С. А. Овсієнко був стипендіатом фонду імені Гумбольдта (ФРН), брав активну участь у поглибленні співпраці українських і німецьких математиків. Завдяки йому багато молодих математиків з України побували на стажуванні в наукових центрах різних міст Німеччини та інших країн.

У 2012 р. у зв'язку з хворобою С. А. Овсієнко змушений був полишити викладацьку роботу і перейшов на посаду старшого наукового співробітника наукового-дослідницької частини механіко-математичного факультету університету Шевченка.

Колеги і друзі високо цінували такі риси його характеру як доброта, чуйність, повага до людей.

Світла пам'ять про Сергія Адамовича Овсієнка назавжди залишиться в серцях його численних учнів і колег.

О. О. Безущак, Є. В. Бондаренко, В. Я. Данілов, Ю. А. Дрозд, О. Г. Ганюшкін, М. Ф. Городній, В. В. Кириченко, Є. А. Кочубінська, Я. В. Лавренюк, О. С. Лимарченко, Ю. С. Мішура, А. С. Олійник, І. О. Парасюк, А. П. Петравчук, В. В. Плахотник, В. Г. Самойленко, В. І. Суцанський.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (1)36

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,2. Наклад 300. Зам. № 216-7879.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М2.
Підписано до друку 29.07.16

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02