

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Сущанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 2, корп. 7, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 12.10.09 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/7 від 09.06.99
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

Андросенко М. Достатні умови умовного екстремуму для функцій багатьох змінних	4
Тищук Т. Неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$	6
Ющенко Л. Негативні результати у кусково-опуклому наближенні вищих порядків	8
Громик А., Конет І. Інтегральне зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах	10
Капустян О., Шкляр Т. Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною	17
Лакоза І., Самойленко В. Вплив зовнішнього збурення на властивості розв'язків рівняння гармонійних коливань з імпульсною дією	20
Самойленко Ю. Умови існування розривних розв'язків квазілінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами	25
Сидоренко Ю., Чвартацький О. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса	32
Єршов А. Про слабку збіжність випадкових ламаних до процесів дифузійного типу	35
Каплуненко Д. Границя для справедливої вартості контракту з опціоном дискретної моделі з випадковою еволюцією неризикового активу	39
Усольцева О. Конзистентна оцінка в моделі виживання з похибками вимірювання	45
Сукретна А. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічного процесу	50
До 70-річчя від дня народження Григорія Логвиновича Кулініча	56
До 100-річчя від дня народження академіка Миколи Миколайовича Боголюбова	57
До читачів	59

CONTENTS

Androsenko M. Sufficient conditions of condotional extremum for functions of many variables.....	4
Tyschuk T. Continual solutions of inequality $f(xy) \leq f(x)f(y)$	6
Yushchenko L. The negative results in q-coconvex approximation.....	8
Gromyk A., Konet I. Integral presentations of non-stationary problems of heat conductivity in the limited piece-homogeneous space areas	10
Kapustyan O., Shklyar T. Qualitative behavior of solutions of parabolic inclusion with translation-compact right-hand part.....	17
Lakoza I., Samoylenko V. Influence of external perturbation on properties of solutions to harmonic equation with pulses	20
Samoylenko Yu. Conditions of existence solutions to quasilinear equation with variable coefficients	25
Sydorenko Yu., Chvartatskyy O. Binary darboux transformations for spatially two-dimensional intergodifferential operators and Lax equations	32
Yershov A. On weak convergence of random polygons to diffusion type processes.....	35
Kaplunenko D. Limit of rational option price for the discrete model with stochastic evilution of riskfree asset	39
Usoltseva O. Consistent estimator in survival model under measurement error	45
Sukretna A. Approximated synthesis of optimal bounded control for a parabolic process.....	50
Grygorij Logvynovich Kulinich (70th anniversary).....	56
Mykola Mykolayovych Bogolyubov (100th anniversary).....	57
For readers	59

ДОСТАТНІ УМОВИ УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Отримано явні формули для перевірки достатніх умов умовного екстремуму для функцій двох та трьох дійсних змінних. Exact formula for verification of sufficient conditions of conditional extremum for functions of two and three variables are obtained.

1. Вступ. Класична задача [1, с. 567-575] знаходження екстремумів функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при умові зв'язку $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ розв'язується за допомогою вивчення функції Лагранжа вигляду $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто зводиться до задачі про безумовний екстремум для функції $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$. Якщо $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, \lambda_0)$ – одна із стаціонарних точок функції Лагранжа, яка визначена з системи співвідношень $F'_\lambda = 0$, $F'_{x_i} = 0, i = \overline{1, n}$, то достатні умови умовного локального екстремуму в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, \lambda_0)$ визначаються системою співвідношень $d\Phi(M_0) = 0$, $d^2F(M_0) > 0 \vee d^2F(M_0) < 0$.

Перевірка умов знаковизначеності диференціала $d^2F(M_0)$ пов'язана з значним обсягом обчислень, що не завжди зручно при вивченні конкретних задач. Далі отримано явні формули для існування умовного локального екстремуму в точці, використання яких дозволяє зменшити обсяг обчислень.

2. Формули достатніх умов у випадку двох змінних. Розглянемо задачу про екстремум функції $z = f(x, y)$ при умові зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Нехай $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стаціонарна точка відповідної функції Лагранжа. Для того, щоб ця точка була точкою екстремуму, достатньо, щоб в точці $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ виконувалися умови

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 > 0 \text{ (або } d^2F < 0 \text{)},$$

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$$

Остання умова еквівалентна такій $F''_{\lambda x}dx + F''_{\lambda y}dy = 0$.

З іншого боку маємо

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)dx + F''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2 = \left(F''_{xx} + 2F''_{xy}\left(-\frac{F''_{x\lambda}}{F''_{y\lambda}}\right) + F''_{yy}\left(-\frac{F''_{x\lambda}}{F''_{y\lambda}}\right)^2\right)dx^2 =$$

$$= \frac{F''_{xx}(F''_{y\lambda})^2 - 2F''_{xy}F''_{x\lambda}F''_{y\lambda} + F''_{yy}(F''_{x\lambda})^2}{(F''_{y\lambda})^2}dx^2. \quad (1)$$

Звідси випливає, що знак диференціала d^2F в точці $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ визначається знаком виразу в чисельнику дробу при dx^2 в правій частині рівності (1).

Оскільки

$$F''_{xx}(F''_{y\lambda})^2 - 2F''_{xy}F''_{x\lambda}F''_{y\lambda} + F''_{yy}(F''_{x\lambda})^2 = - \begin{vmatrix} 0 & F''_{x\lambda} & F''_{y\lambda} \\ F''_{x\lambda} & F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{y\lambda} & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \Delta,$$

то точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є точкою умовного локального мінімуму, якщо $\Delta > 0$, і точкою умовного локального максимуму, якщо $\Delta < 0$.

3. Формули достатніх умов у випадку трьох змінних з двома умовами зв'язку. Розглянемо задачу про екстремум функції $w = f(x, y, z)$ при двох умовах зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0$ та $\psi(x, y, z) = 0$. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа, яка в даному випадку має вигляд $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$. Тоді для того, щоб ця точка була точкою екстремуму, достатньо, щоб в точці $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ виконувалися умови

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + F''_{yy}dy^2 + F''_{zz}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{xy}dxdz + 2F''_{xy}dydz > 0 \text{ (або } d^2F < 0 \text{)},$$

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0, \quad d\psi = \psi'_x dx + \psi'_y dy + \psi'_z dz = 0.$$

Останні дві умови еквівалентні таким $F''_{\lambda x}dx + F''_{\lambda y}dy + F''_{\lambda z}dz = 0$, $F''_{\mu x}dx + F''_{\mu y}dy + F''_{\mu z}dz = 0$.

З умов зв'язку знаходимо $dy = \frac{\varphi'_z \psi'_x - \varphi'_x \psi'_z}{\varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y} dx$ та $dz = \frac{\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x}{\varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y} dx$. Підставляючи ці вирази у формулу для

d^2F , після деяких перетворень отримаємо

$$d^2F = \frac{1}{\delta^2} \left[F''_{xx} (\varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y)^2 + F''_{yy} (\varphi'_z \psi'_x - \varphi'_x \psi'_z)^2 + F''_{zz} (\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x)^2 + \right. \\ \left. + 2F''_{xy} (\varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y) (\varphi'_z \psi'_x - \varphi'_x \psi'_z) + 2F''_{xz} (\varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y) (\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x) + 2F''_{yz} (\varphi'_z \psi'_x - \varphi'_x \psi'_z) (\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x) \right] dx^2,$$

де позначено $\delta = \varphi'_y \psi'_z - \varphi'_z \psi'_y$.

Оскільки вираз у квадратних дужках співпадає з визначником

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ 0 & 0 & \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \\ \varphi'_x & \psi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ \varphi'_y & \psi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ \varphi'_z & \psi'_z & F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix},$$

в чому легко упевнитися, якщо скористатися теоремою Лапласа, згідно з якою

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi'_x & \psi'_x & F''_{xz} \\ \varphi'_y & \psi'_y & F''_{yz} \\ \varphi'_z & \psi'_z & F''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi'_x & \psi'_x & F''_{xy} \\ \varphi'_y & \psi'_y & F''_{yy} \\ \varphi'_z & \psi'_z & F''_{zy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi'_x & \psi'_x & F''_{xx} \\ \varphi'_y & \psi'_y & F''_{xy} \\ \varphi'_z & \psi'_z & F''_{xz} \end{vmatrix},$$

то точка $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ є точкою умовного локального мінімуму, якщо $\Delta > 0$, і точкою умовного локального максимуму, якщо $\Delta < 0$.

4. Формули достатніх умов у випадку трьох змінних з однією умовою зв'язку. Розглянемо задачу про екстремум функції $w = f(x, y, z)$ при одній умові зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0$. Зазначимо, що розв'язання цієї задачі має певні особливості в порівнянні з розглянутими вище випадками. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ – стаціонарна точка відповідної функції Лагранжа. Тоді для того, щоб ця точка була точкою екстремуму, достатньо, щоб в точці $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ виконувалися умови

$$d^2F = F''_{xx} dx^2 + F''_{yy} dy^2 + F''_{zz} dz^2 + 2F''_{xy} dx dy + 2F''_{xy} dx dz + 2F''_{xy} dy dz > 0 \quad (\text{або } d^2F < 0),$$

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0.$$

Аналогічно розглянутому вище випадку, остання умова еквівалентна умові вигляду $F''_{\lambda x} dx + F''_{\lambda y} dy + F''_{\lambda z} dz = 0$.

З умови зв'язку знаходимо $dz = \frac{\varphi'_x dx + \varphi'_y dy}{-\varphi'_z} dx$. Підставляючи вираз для dz у формулу для диференціала

d^2F , після деяких перетворень отримаємо

$$d^2F = \frac{1}{(\varphi'_z)^2} \left\{ \left[F''_{xx} (\varphi'_z)^2 + F''_{zz} (\varphi'_z)^2 - 2F''_{xz} \varphi'_x \varphi'_z \right] dx^2 + \right. \\ \left. + \left[2F''_{zz} \varphi'_x \varphi'_y - 2F''_{xz} \varphi'_y \varphi'_z + 2F''_{xy} (\varphi'_z)^2 - 2F''_{yz} \varphi'_x \varphi'_z \right] dx dy + \left[F''_{yy} (\varphi'_z)^2 + F''_{zz} (\varphi'_z)^2 - 2F''_{yz} \varphi'_y \varphi'_z \right] dy^2 \right\}.$$

Позначимо:

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_z \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xz} \\ \varphi'_z & F''_{xz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = F''_{xx} (\varphi'_z)^2 + F''_{zz} (\varphi'_z)^2 - 2F''_{xz} \varphi'_x \varphi'_z, \quad \Delta_2 = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \varphi'_y & F''_{yy} & F''_{yz} \\ \varphi'_z & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = F''_{zz} (\varphi'_y)^2 + F''_{yy} (\varphi'_z)^2 - 2F''_{yz} \varphi'_y \varphi'_z,$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_z \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yz} \\ \varphi'_z & F''_{xz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = F''_{xy} (\varphi'_z)^2 - F''_{xz} \varphi'_x \varphi'_y - F''_{yz} \varphi'_x \varphi'_z + F''_{zz} \varphi'_x \varphi'_y.$$

Тоді диференціал d^2F можна зобразити таким чином $d^2F = \frac{1}{(\varphi'_z)^2} \{ \Delta_1 dx^2 + 2\Delta_3 dx dy + \Delta_2 dy^2 \}$. Звідси можна

легко отримати достатні умови для розглядуваного випадку: точка $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ є точкою умовного локального

екстремуму якщо в цій точці $\Delta = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3^2 > 0$, причому в цій точці досягається умовний локальний мінімум, якщо $\Delta_1 > 0$, і умовний локальний максимум, якщо $\Delta_1 < 0$.

5. Висновки. Отримано явні формули для перевірки достатніх умов локального умовного екстремуму в точці для випадку функцій двох і трьох змінних при наявності однієї та двох умов зв'язку, використання яких дозволяє зменшити обсяг обчислень.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 ч. – М., 2000. – Ч.1.

Надійшла до редколегії 09.10.08

УДК 517.9

Т. Тищук, студ.

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕРІВНОСТІ $f(xy) \leq f(x)f(y)$

Вивчено неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$ і описано вигляд її розв'язків.

Continual solutions of inequality $f(xy) \leq f(x)f(y)$ are studied and form of its solutions is described.

1. Вступ. При дослідженні низки задач про стійкість розв'язків диференціального рівняння з імпульсною дією [1] розглядаються функції, які задовольняють нерівність вигляду [2]:

$$f(xy) \leq f(x)f(y), \quad (1)$$

де функція $f(x)$ визначена для $x \in [0; +\infty)$ і задовольняє умову

$$f(0) = 0, \quad f(x) \geq 0. \quad (2)$$

В даній статті вивчається питання про неперервні розв'язки нерівності (1). Функція $f(x)$ називається розв'язком нерівності (1), якщо ця функція визначена для всіх $x \in [0; +\infty)$, є неперервною і для всіх значень $x, y \in [0; +\infty)$ виконується нерівність (1).

2. Основна частина. Очевидно, що нерівність (1) має тривіальний розв'язок $f(0) = 0$, де $x \in [0; +\infty)$. Тому надалі розглядається питання про існування нетривіальних розв'язків нерівності (1).

Дослідимо спочатку питання про вигляд розв'язків рівняння

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (3)$$

В [3] встановлено, що єдиною (нетривіальною) функцією, визначеною і неперервною на $[0; +\infty)$ і такою, що задовольняє рівність (3) є степенева функція.

Очевидно, що нерівність (1) має більш широкий клас розв'язків, ніж рівняння (3). Наприклад, функція вигляду $f(x) = cx^\alpha$, $\alpha > 0$, у випадку $c \geq 1$ задовольняє нерівність (1) з умовою (2).

Справедлива наступна лема.

Лема 1. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq 1, \\ x^\gamma & x > 1, \end{cases} \quad (4)$$

є розв'язком нерівності (1) тоді і лише тоді, коли виконується нерівність $\alpha \leq \gamma$.

Доведення необхідності. Визначимо, для яких α, γ функція вигляду (4) є розв'язком нерівності (1). Нехай $\xi \in (0; 1)$ – деяке фіксоване число, $\varepsilon > 0$ – довільне і мале. Тоді, враховуючи, що функція $f(x)$ вигляду (4) є розв'язком нерівності (1), маємо:

$$\xi^\alpha = f(\xi) = (\xi/1+\varepsilon)^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha = f(\xi/1+\varepsilon) f(1+\varepsilon) \leq f(\xi/1+\varepsilon) f(1+\varepsilon) = (\xi/1+\varepsilon)^\alpha (1+\varepsilon)^\gamma = \xi^\alpha (1+\varepsilon)^{\gamma-\alpha}.$$

Звідки випливає нерівність $(1+\varepsilon)^{\gamma-\alpha} \geq 1$, яка виконується для всіх $\varepsilon > 0$, якщо $\alpha \leq \gamma$.

Доведення достатності. Безпосередньою перевіркою легко встановити, що у випадку виконання нерівності $\alpha \leq \gamma$ функція вигляду (4) є розв'язком нерівності (1).

Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай $\alpha, \gamma, b > 0$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq b, \\ x^\gamma & x > b, \end{cases} \quad (5)$$

є розв'язком нерівності (1) тоді і лише тоді, коли виконується одна з умов:

1) $\alpha = \gamma$;

2) $\alpha < \gamma, b = 1$.

Доведення необхідності. Умова $b = 1$ випливає з неперервності функції $f(x)$ в точці $x = b$, а нерівність $\alpha \leq \gamma$ – з леми 1.

Достатність умов леми 2 слідує з леми 1.

Лему 2 доведено.

Лема 3. Нехай $\alpha, \gamma > 0$, $b \in (0; 1)$. Якщо функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^\gamma & x > b, \end{cases} \quad (6)$$

є розв'язком нерівності (1), то $\alpha \leq \gamma$.

Доведення Розглянемо можливі випадки розміщення точок x та y ($x \neq y$) стосовно точки b і покажемо, що якщо $b \in (0; 1)$ і функція $f(x)$ – розв'язок нерівності (1), то виконується умова $\alpha \leq \gamma$.

Нехай $x, y \in (0; b)$. Оскільки $b < 1$, то $xy \in (0; b)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha y^\alpha$. Останнє співвідношення має місце для всіх α .

Нехай $x \in (0; b)$, $y \in (b; +\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0; b)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha b^{\alpha-\gamma} y^\gamma$. Звідси маємо, що $(y/b)^{\alpha-\gamma} \leq 1$. Враховуючи, що $y/b < 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \leq \gamma$. Припустимо, що $xy \in (b; +\infty)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $b^{\alpha-\gamma} (xy)^\gamma = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha b^{\alpha-\gamma} y^\gamma$. Звідси маємо, що $x^{\alpha-\gamma} \geq 1$. Оскільки $b < 1$, то $\alpha \leq \gamma$.

Нехай тепер $x, y \in (b; +\infty)$. Припустимо, що $xy \in (b; +\infty)$, тоді, підставивши x та y у нерівність, отримаємо $b^{\alpha-\gamma} (xy)^\gamma = f(xy) \leq f(x)f(y) = b^{\alpha-\gamma} x^\alpha b^{\alpha-\gamma} y^\gamma$. Звідси маємо, що $b^{\alpha-\gamma} \geq 1$. Оскільки $b < 1$, то $\alpha \leq \gamma$. Припустимо, що $xy \in (0; b)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = b^{\alpha-\gamma} x^\alpha b^{\alpha-\gamma} y^\gamma$. Звідси маємо, що $(x/b)^{\alpha-\gamma} (y/b)^{\alpha-\gamma} \leq 1$, звідки $\alpha \leq \gamma$.

Випадок $x \in (b; +\infty)$, $y \in (0; b)$ є аналогічним випадку, коли $x \in (0; b)$, $y \in (b; +\infty)$. Лемму 3 доведено.

Лема 4. Нехай $\alpha, \gamma > 0$, $\alpha \neq \gamma$, $b \in (1; +\infty)$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^\gamma & x > b, \end{cases} \quad (7)$$

не є розв'язком нерівності (1).

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що (7) є розв'язком нерівності (1). Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \neq y$) відносно точки b .

Нехай $x, y \in (0; b)$. Припустимо, що $xy \in (0; b)$, тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha y^\alpha$. Останнє співвідношення має місце для всіх α . Припустимо, що $xy \in (b; +\infty)$. Після підстановки x та y у нерівність (1), отримаємо $b^{\alpha-\gamma} (xy)^\gamma = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha y^\alpha$. Звідси маємо, що $(xy/b)^{\alpha-\gamma} \geq 1$. Враховуючи, що $xy/b > 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \geq \gamma$.

Нехай $x \in (0; b)$, $y \in (b; +\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0; b)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = x^\alpha b^{\alpha-\gamma} y^\gamma$. Звідси маємо, що $(y/b)^{\alpha-\gamma} \leq 1$. Враховуючи, що $y/b > 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \leq \gamma$. Маємо протиріччя.

З лем 3, 4 випливає таке твердження.

Лема 5. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Якщо функція вигляду $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^\gamma & x > b, \end{cases}$ є розв'язком нерівності (1), то $b \in (0; 1)$

та $\alpha \leq \gamma$.

Лему 5 можна сформулювати ще таким чином.

Лема 5'. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Якщо функція вигляду $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \leq x \leq b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^\gamma & x > b, \end{cases}$ є розв'язком нерівності (1), то виконується одна з таких умов:

1) $\alpha = \gamma$ та $b \in (0; +\infty)$;

2) $\alpha < \gamma$ та $b \in (0; 1)$.

Доведення леми 5' випливає з лем 3 та 4.

Лема 6. Нехай $\alpha, \gamma, \alpha \neq \gamma, a > b > 1$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} ax^\alpha & 0 \leq x \leq c^*, \\ bx^\gamma & x > c^*, \end{cases} \quad (8)$$

де $c^* = (a/b)^{1/\gamma-\alpha}$, не є розв'язком нерівності (1).

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що функція вигляду (8) є розв'язком нерівності (1). Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \neq y$) відносно точки c^* .

Нехай $x \in (0; c^*)$, $y \in (c^*; +\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0; c^*)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $a(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = ax^\alpha by^\gamma$. Звідси отримаємо, що $(y/c^*)^{\gamma-\alpha} a \geq 1$. Останнє співвідношення виконується, якщо $\alpha \leq \gamma$. Припустимо, що $xy \in (c^*; +\infty)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $b(xy)^\gamma = f(xy) \leq f(x)f(y) = ax^\alpha by^\gamma$. Звідси маємо, що $(x/c^*)^{\gamma-\alpha} 1/b \leq 1$. Якщо останнє співвідношення виконується, то $\alpha \leq \gamma$.

Нехай $x, y \in (c^*; +\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0; c^*)$. Легко зрозуміти, що у цьому випадку $c^* \leq 1$. Звідси, оскільки $a > b$, одержуємо нерівність $\alpha \geq \gamma$. Маємо протиріччя.

Висновки. Досліджено клас неперервних розв'язків нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$, отримано опис загального вигляду функцій, визначених для всіх $x \in [0; +\infty)$, неперервних і таких, що для всіх значень $x, y \in [0; +\infty)$ справедлива нерівність $f(xy) \leq f(x)f(y)$.

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища школа, 1987. – 288с. 2. Борисенко С.Д., Самойленко А.М., Матараццо Дж., Тоскано Р., Ясінський В.В. Дифференціальні моделі. Стійкість. К.:Вища школа, 2000. – 329с. 3. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального і інтегрального числення: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.2.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.51

Л. Ющенко, асп.

НЕГАТИВНІ РЕЗУЛЬТАТИ У КУСКОВО-ОПУКЛОМУ НАБЛИЖЕННІ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ

Доведено, що для кусково- q -опуклого, $q > 3$, наближення алгебраїчними многочленами, нерівності типу Джексона-Стечкина є невірними навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують, якщо гладкість функції вище двох.

We prove that for the q -coconvex, $q > 3$, approximation by the algebraic polynomials, the Jackson-Stechkin estimates are invalid even with a constant which depends on the function, if the smoothness of a function is over the two.

1. Вступ. Основні означення та формулювання

Нехай $C[a, b]$ – простір неперервних на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцій f , з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a, b]} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

$C^{(r)}$ визначає простір r разів неперервно-диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій.

Для кожної функції $f \in C[a, b]$ і кожного $q \in \mathbb{N}$, позначимо через $\Delta_h^q(f, x) := \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \binom{q}{j} f(x + jh)$, q -ту різницю

у точці x з кроком h .

Нехай Y_s , $s \in \mathbb{N}$ – фікований набір з $s+1$ -ї точки $y_i \in [a, b]$, $a = y_s < \dots < y_1 < y_0 = b$; $\Delta(Y_s[a, b])$ – множина функцій $f \in C[a, b]$, неспадних на $[y_{i+1}, y_i]$ для i – парних та незростаючих на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції з $\Delta(Y_s[a, b])$ називаються кусково-монотонними.

Нехай $\Delta^2(Y_s[a, b])$ множина функцій $f \in C[a, b]$, таких що $\Delta_h^2(f, x) \geq 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для i – парних та $\Delta_h^2(f, x) \leq 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції з $\Delta^2(Y_s[a, b])$ називаються кусково-опуклими.

Більш загально, якщо $q \geq 2$, тоді множина $\Delta^q(Y_s[a, b])$ є множиною функцій $f \in C[a, b]$, таких що $\Delta_h^q(f, x) \geq 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для i – парних та $\Delta_h^q(f, x) \leq 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції $f \in \Delta^q(Y_s[a, b])$ називаються кусково- q -опуклими.

Нехай P_n – простір алгебраїчних многочленів степені $\leq n$.

Для функції $f \in \Delta(Y_s[a, b])$ позначимо

$$E_n(f, Y_s[a, b]) := \inf_{P_n \in P_n \cap \Delta(Y_s[a, b])} \|f - P_n\|_{C[a, b]}$$

величину найкращого кусково-монотонного наближення многочленами.

Аналогічно для $f \in \Delta^q(Y_s[a, b])$ позначимо

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^q(Y_s[a, b])} \|f - P_n\|_{C[a, b]}$$

Величину найкращого кусково - q - опуклого наближення многочленами.

Нехай W_∞^r – клас функцій, які мають абсолютно-неперервну $(r-1)$ -шу похідну на $[a, b]$ і таких, що $\|f^{(r)}\|_{L_\infty[a, b]} < \infty$.

Починаючи з робіт G.G.Lorentz, K.L.Zeller [8] вивчаються питання про справедливість оцінок типу Джексона-Стечкина для q -опуклого та кусково q -опуклого наближення функції

$$f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap W_{L_\infty[a, b]}^r,$$

а саме оцінок

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) \leq c(q, r) \|f^{(r)}\|_{L_\infty[a, b]} \frac{(b-a)^r}{n^r}, \quad n \geq N, \quad (1)$$

де $c(q, r)$ – стала, яка залежить лише від q і r , а N – деяке натуральне.

Зокрема, якщо $q = 1$, або $q = 2$, то оцінка (1) має місце для всіх r і s [6 ; 7], якщо $q = 3$, $r \geq 4$, то це питання ще в стані дослідження [4]. Якщо $q > 3$ і $s = 1$, то (1) має місце для $r = 1$ [3] і $r = 2$ [2]. Якщо ж $q > 3$, $s = 1$ та $r > 2$, Koponov та Leviatan показали [5], що оцінка (1) є невірною з N не залежним від функції f , а А.В.Бондаренко та А.В.Примак [1] – що оцінка (1) є невірною навіть з c та N залежними від f . Користуючись результатами роботи [1] ми поширюємо відповідне твердження на всі $s \geq 2$.

Основним результатом роботи є

ТЕОРЕМА 1. Нехай $q > 3$, $r > 2$, $s \geq 1$ та $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Для кожного набору $Y_s[a, b]$ існує функція

$$f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap W_{L_\infty[a, b]}^r$$

така, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^r E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) = \infty.$$

Теорема 1 є негайним наслідком теорем 2 і 3.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $q > 3$, $r < q$, $s \geq 2$ та $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Для кожного набору $Y_s[a, b]$ існує функція

$$f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap W_{L_\infty[a, b]}^r \quad (2)$$

така, що

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) \geq \frac{c(q, Y_s)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

де $c(q, Y_s)$ – додатня стала, що залежить тільки від q та Y_s .

ТЕОРЕМА 3. Для будь-яких $r, q \in \mathbb{N}$, $r \geq q-1$, $q \geq 4$ та послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \geq 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap C^{(r)}[a, b]$ така, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) n^{r-q+3} = +\infty \quad (4)$$

2. Доведення теорем.

Позначимо $E_n^{(q)}(f)_{[-1,1]} = E_n^{(q)}(f, Y_1[-1,1])$.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $y_1 = -1$, $b = 1$. Покажемо, що шукаємою функцією є:

$$f(x) = \frac{(q-r-1)!}{(q-1)!} x_+^{q-1}.$$

Справді, оскільки $f^{(q-2)}(x) = (q-r-1)! x_+$, то $f \in \Delta^q(Y_s[a, b])$. Крім того, $\|f^{(r)}\|_{[a, b]} = 1$, отже (2) виконується.

За теоремою 2 із [1] маємо: $E_n^{(q)}(x_+^{q-1})_{[-1,1]} \geq \frac{c_1(q)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси $E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) \geq E_n^{(q)}(x_+^{q-1})_{[-1,1]} \geq \frac{c_1(q)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Отже і (3) виконується.

Теорема 2 доведена.

Для доведення теореми 3 необхідна

ЛЕМА 1. [1] Для кожного $h \in (0,1)$, r, q таких, що $r \geq q-1$, $q \geq 4$, існують сталі $c_1, c_2 > 0$ та функція

$f_h = f_{h,r,q} \in C^{(r)}[-2,1] \cap \Delta^q[-2,1]$, що задовольняють співвідношення

$$1) |f_h|_{[-2,0]} = 0,$$

$$2) \left\| f_h^{(i)} \right\|_{C[-2,1]} \leq \begin{cases} \frac{c}{h^{i-q+1}}, & i = q-1, \dots, r, \\ 1, & i = 0, \dots, q-2. \end{cases}$$

3) якщо $h \leq \frac{c_2 l^{\frac{q-1}{2}}}{n}$, $l \in (0,1)$, $\theta \in \left(0, \frac{l}{3}\right)$, то $E_n^{(q)}(f_h(\cdot - \theta); [-l, l]) \geq \frac{c_1 l^{q-1}}{n^2}$, де $E_n^{(q)}(f_h(\cdot - \theta); [-l, l])$ – величина найкращого q -опуклого наближення функції $f_h(\cdot - \theta)$ многочленами степені $\leq n$ на відрізку $[-l, l]$.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 3. Розглянемо функцію $g(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k)$,

де f_{h_k} – функція з лема 1, $h_k := \frac{1}{c_2 n_k n_{k-1}^{q-1}}$, $\beta_k := \frac{1}{n_{k+1}^m n_k^{m(q-1)+2}}$, $x_k := \frac{1}{n_k}$.

Не втрачаючи загальності будемо вважати $y_1 = -1$, $b = 1$. Покажемо, що шукану функцію є

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \in [a, -1]. \end{cases}$$

Справді, за лемою 1, $f_{h_k}(\cdot - x_k) \in \Delta^q[-1, 1] \cap C^{(r)}[-1, 1]$ та $f_{h_k}(-1) = 0$, $j = \overline{0, r}$, тому також $g \in \Delta^q[-1, 1] \cap C^{(r)}[-1, 1]$ та $g^{(j)}(-1) = 0$, $j = \overline{0, r}$. Враховуючи, що $f(x) = 0$ при $x \in [a, -1]$, маємо $f \in \Delta^q(Y_s[a, b]) \cap C^{(r)}[a, b]$.

Нарешті маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s[a, b]) n^{r-q+3} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(g)_{[-1, 1]} n^{r-q+3} = +\infty$, де остання рівність доведена в [1].

Отже (4) виконується.

Теорема 3 доведена.

ВИСНОВОК

В данній роботі ми розглянули питання про неможливість отримати класичну оцінку Джексона-Стечкіна при q – опуклому наближенні многочленами з $q > 3$, $r > 2$, навіть із сталою, що залежить від функції. Точніше – встановлено, що замість очікуваної швидкості наближення n^{-r} можливою є не краще ніж n^{-r+q-3} .

1. Бондаренко А.В., Примак А.В. Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 812–823. 2. Шведов А.С. Порядки копериближений функций алгебраическими многочленами // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 1. С. 117–130. 3. Beatson R.K. The Degree of Monotone Approximation // Pacific J. Math. 1978. V. 74. № 1. P. 5–14. 4. Bondarenko A.V. Jackson type inequality in 3-convex approximation. // East J. Approx. 2002. V. 8. №3. P. 291–302. 5. Kononov V.N., Leviatan D. Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. 2003. V. 133. P. 239–268. 6. Leviatan D., Shevchuk I.A. Coconvex polynomial approximation. // J. Approx. Theory 2003. V. 121. № 1. P. 100–118. 7. Leviatan D., Shevchuk I.A. Constants in comonotone polynomial approximation // New developments in approximation theory. Dortman. 1998. P. 145–158. 8. Lorentz G.G., Zeller K.L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials // J. Approx. Theory. 1968. V. 1. № 4. P. 501–504.

Надійшла до редколегії 28.10.08

УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, канд. фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки нестационарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution of non-stationary problems of heat conductivity in the limited piece-homogeneous space areas.

1. Вступ

Нестационарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багат шарових) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [6,8,15,16]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [9-11, 13]. Зокрема в [11] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові та тришарові середовища розглянуто у працях [3-5,12]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестационарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t, x, y, z) | t > 0; (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [7, 18]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yz}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t, x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$T_j(t, x, y, z) \Big|_{t=0} = g_j(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, x, y), \quad (3)$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) T_k - T_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(v_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2 , де $a_{xy}, a_{yz}, a_{zj} \geq 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей x, y, z ($j = \overline{1, n+1}$); $\chi_j^2 \geq 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t, x, y, z) = \{f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), \dots, f_{n+1}(t, x, y, z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x, y, z) = \{g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), \dots, g_{n+1}(x, y, z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t, x, y), g_l(t, x, y)$ – задані обмежені неперервні функції в області $(0; +\infty) \times \Omega_2$; $R_k \geq 0$ – коефіцієнти термоопору; $v_k, v_{k+1} \geq 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t, x, y, z) = \{T_1(t, x, y, z), T_2(t, x, y, z), \dots, T_{n+1}(t, x, y, z)\}$ – шукана температура.

3. Основна частина

3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty) \times \{z \in K_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{|x|=\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{|y|=\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

щодо змінної y .

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [18]:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) g_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(0, x, y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) g_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(0, x, y); \\ & \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) g_k - g_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k} \Big|_{|x|=\infty} = 0; \quad \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k} \Big|_{|y|=\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}. \\ & \left(v_k \frac{\partial g_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 13].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x [17]:

$$F_x[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (7)$$

$$F_x^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \quad (8)$$

$$F_x \left[\frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 F_x[g(x)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (9)$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z) \mid t > 0; y \in (-\infty; +\infty); z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j + (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (10)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, y, z) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (11)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{|y|=\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (13)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(v_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (14)$$

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної y [17]:

$$F_y[g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (15)$$

$$F_y^{-1}[\tilde{g}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s) e^{isy} ds \equiv g(y), \quad (16)$$

$$F_y \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 F_y[g(y)] \equiv -s^2 \tilde{g}(s). \quad (17)$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z) \mid t > 0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yy}^2 s^2 + \chi_j^2) \tilde{\tilde{T}}_j = \tilde{\tilde{f}}_j(t, \sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t, \sigma, s, z) \Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{\tilde{T}}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0(t, \sigma, s); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{\tilde{T}}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{\tilde{g}}_l(t, \sigma, s) \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{\tilde{T}}_k - \tilde{\tilde{T}}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(v_k \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (21)$$

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження [13]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^l g(z) V(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv g_j, \quad (22)$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv g(z), \quad (23)$$

$$F_{jn} \left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \theta(z-l_{i-1}) \theta(l_i-z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz -$$

$$- \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g \right) \Big|_{z=l_0} + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g \right) \Big|_{z=l}. \quad (24)$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_j) \theta(z-l_{i-1}) \theta(l_i-z); \|V(z, \lambda_j)\|^2 = \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j) \sigma_i(z) dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z-l_{i-1}) \theta(l_i-z); V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{n+1,j} \left[\omega_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_{mj}z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_{mj}z) \right]; m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_j) = \omega_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j}z) - \omega_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j}z); c_{1k} = 1; c_{2k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}; q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^n \frac{v_j a_{n+1}}{v_{j+1} a_k^2}; \sigma_n = \frac{v_n a_{n+1}}{v_{n+1} a_n^2}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) = -v_k^* q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) = v_k^* q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) = R_k q_{sj} \cos(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k); v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj} \cos(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k2}(q_{sj} l_k) = \cos(q_{sj} l_k); v_{22}^{k2}(q_{sj} l_k) = \sin(q_{sj} l_k); v_k^* = \frac{v_{k+1}}{v_k}; \delta_{sm}^k(q_{kj} l_k; q_{k+1,j} l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1,j} l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1,j} l_k);$$

$$\omega_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j} l_0); \omega_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j} l_0); \omega_{sm}(\lambda_j) = \omega_{s-1,2}(\lambda_j) \delta_{sm}^k(q_{sj} l_s; q_{s+1,j} l_s) - \omega_{s-1,1}(\lambda_j) \delta_{2m}^k(q_{sj} l_s; q_{s+1,j} l_s);$$

λ_j – корені трансцендентного рівняння $\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l) \omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l) \omega_{n2}(\lambda) = 0$, що утворюють дискретний спектр, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [19].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma, s) \right) \tilde{T}_1(t, \sigma, s, z) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma, s) \right) \tilde{T}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma, s) \right) \tilde{T}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t, \sigma, s, z) \\ \tilde{f}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t, \sigma, s, z) \\ \tilde{T}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{T}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\sigma, s, z) \\ \tilde{g}_2(\sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1}(\sigma, s, z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де $q_j^2(\sigma, s) = a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yz}^2 s^2 + \chi_j^2$; $a_j^2 \equiv a_{zj}^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn} , який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_j) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_j) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \lambda_j) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_j^2 + q_i^2(\sigma, s) + k_i^2 \right) \tilde{T}_{ij} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij} - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(t, \sigma, s) + \sigma_{n+1} a_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_i(t, \sigma, s), \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ij} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ij}, \quad (29)$$

$$\text{де } \tilde{T}_{ij} \equiv \tilde{T}_{ij}(t, \sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_i(t, \sigma, s, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz; i = \overline{1, n+1}, \tilde{f}_{ij} \equiv \tilde{f}_{ij}(t, \sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{f}_i(t, \sigma, s, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz; i = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ij}(\sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{g}_i(\sigma, s, z) V_i(z) \sigma_i dz; i = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max \{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_i^2$ ($i = \overline{1, n+1}$).

Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{T}_j}{dt} + (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2) \tilde{T}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(t, \sigma, s) + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(t, \sigma, s), \quad (30)$$

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, s) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, s), \quad (31)$$

$$\text{де } \tilde{T}_j(t, \sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ij}(t, \sigma, s), \tilde{f}_j(t, \sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij}(t, \sigma, s), \tilde{g}_j(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ij}(\sigma, s).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{T}_j(t, \sigma, s) = \int_0^t \exp[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)(t - \tau)] \times & \left[\tilde{f}_j(\tau, \sigma, s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\tau, \sigma, s) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_j(\sigma, s) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (32)$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau = +0$ [19].

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \dots \dots \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{T}_j(t, \sigma, s) \right]$,

де функція $\tilde{T}_j(t, \sigma, s)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(t, \sigma, s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \exp[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)(t - \tau)] \times \right. & \left[\tilde{f}_j(\tau, \sigma, s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\tau, \sigma, s) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_j(\sigma, s) \right] d\tau \left\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2}, i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

До функцій $\tilde{T}_i(t, \sigma, s, z)$ послідовно застосуємо обернені оператори F_y^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \times & [f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi, \eta, \zeta)] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^1(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau + & \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^2(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_l(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned} E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)t] & \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2} \times \\ \times \cos(|x - \xi| \sigma) \cos(|y - \eta| s) d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (36)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна

$W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{i, n+1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

$$\text{Відомо [2], що } \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) \cos(\beta x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right).$$

Отже, формула (36) набуває вигляду

$$E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{\exp(-\lambda_{i1}^2 t)}{2\pi^2 a_{x1} a_{y1} t} \exp\left[-\frac{a_{y1}^2 (x - \xi)^2 + a_{x1}^2 (y - \eta)^2}{4a_{x1}^2 a_{y1}^2 t}\right] \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_{jt}^2) \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2}; \quad j, k = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_j^1(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_j^2(t, x, \xi, y, \eta, z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зауваження 1. У випадку $a_{xy}^2 = a_{yi}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$ формули (35) визначають структуру нестационарного температурного поля в ізотропному обмеженому $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$) безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, x, y, z), g_j(x, y, z)$ ($j = \overline{1, n+1}$), $g_0(t, x, y)$ та $g_l(t, x, y)$ проводиться безпосередньо.

3.2 Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty; +\infty) \times (0; +\infty) \times \{z \in K_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; +\infty)$. У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови (5) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right) T_j \Big|_{y=0} = P_j(t, x, z); \quad \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (37)$$

щодо змінної y , де $h \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $P_j(t, x, z) = hT_j^c(t, x, z)$, $T_j^c(t, x, z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(5), (37) виконуються умови узгодженості:

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) g_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(0, x, y); \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) g_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(0, x, y);$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) g_k - g_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} &= 0, \\ \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k} \Big|_{|x|=\infty} &= 0; \quad \left(-\frac{\partial}{\partial y} + h \right) g_j \Big|_{y=0} = P_j(0, x, z); \quad \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}. \\ \left(v_k \frac{\partial g_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} &= 0; \quad k = \overline{1, n}; \end{aligned} \right.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(5), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 19, 5].

До задачі (1)-(5), (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x . Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(5), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z) | t > 0; y \in (0; +\infty); z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (10) з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{P}_j(t, \sigma, z); \quad \frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (38)$$

та умовами спряження (14).

До задачі (10)-(12), (38), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [19]:

$$F_{+y}[g(y)] = \int_0^{+\infty} g(y) K_y(y, s) dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (39)$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(s) K_y(s, y) ds \equiv g(y), \quad (40)$$

$$F_{+y} \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0, s) \left(-\frac{dg}{dy} + hg \right) \Big|_{y=0}, \quad (41)$$

$$\text{де ядро перетворення } K_y(y, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s \cos(sy) + h \sin(sy)}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (39) внаслідок тотожності (41) початково-крайовій задачі (10)-(12), (38), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z) | t > 0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - a_{xy}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_j}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yy}^2 s^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{F}_j(t, \sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (42)$$

з початковими умовами (19), крайовими умовами (20) та умовами спряження (21), де

$$\tilde{F}_j(t, \sigma, s, z) = \tilde{f}_j(t, \sigma, s, z) + a_{yy}^2 K_y(0, s) \tilde{P}_j(t, \sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (42), (19)-(21) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (42), (19)-(21) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(t, \sigma, s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \exp \left[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_i^2)(t-\tau) \right] \times \left[\tilde{F}_j(t, \sigma, s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\tau, \sigma, s) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_j(\sigma, s) \right] d\tau \right\} \frac{V_i(z, \lambda_1)}{\|V_i(z, \lambda_1)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_i(t, \sigma, s, z)$, визначених формулами (43), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1} , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \left[f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi, \eta, \zeta) \right] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^l W_i^1(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^l W_i^2(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_l(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau + \\ + a_{y1}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) P_k(\tau, \xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta d\tau; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (44)$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (44) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned} E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_i^2)t \right] \times \\ \times \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \cos(|x - \xi| \sigma) K_y(y, s) K_y(\eta, s) d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна

$W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = \frac{\sigma_1 a_{n+1}^2}{\alpha_{22}} E_i(t, x, \xi, y, \eta, z, l)$, ординатної матриці Гріна $W_{yik}(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(5), (37).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_j^1(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_j^2(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_{yjk}(t, x, \xi, y, z, \zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (44), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (44) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $y = 0$ крайових умов 1-го роду ($h \rightarrow \infty$) та 2-го роду ($h \rightarrow 0$); 3) аналіз розв'язку (44) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j(t, x, y, z)$, $g_j(x, y, z)$, $P_j(t, x, z)$ ($j = \overline{1, n+1}$), $g_0(t, x, y)$ та $g_l(t, x, y)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестационарних задач в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971. 3. Громик А.П., Конетт И.М. Нестационарные задачи теплопроводности в неограниченных двоскладовых просторовых областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67–82. 4. Громик А.П., Конетт И.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в неограничених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100–118. 5. Громик А.П., Конетт И.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в неограничених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 102–120. 6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 8. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 9. Конетт И.М. Стационарные та нестационарные температурные поля в ортотропных сферических областях. – К., 1998. 10. Конетт И.М., Ленюк М.П. Стационарные та нестационарные температурные поля в цилиндрично-круговых областях. – Чернівці, 2001. 11. Конетт И.М., Ленюк М.П. Температурные поля в кусково-однородных цилиндрических областях. – Чернівці, 2004. 12. Конетт И.М., Ленюк М.П. Нестационарные задачи теплопроводности в неограниченных тришаровых просторовых областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118–134. 13. Ленюк М.П. Температурные поля в плоских кусково-однородных ортотропных областях. – К., 1997. 14. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 15. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 16. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 17. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М., 1955. 18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972. 19. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 23.09.08

УДК 517.9

О. Капустян, докт. фіз.-мат. наук, Т. Шкляр, асп.

ЯКІСНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРАНСЛЯЦІЙНО-КОМПАКТНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

В роботі для неавтономного параболічного включення з напівнеперервною зверху многозначною правою частиною за умов глобальної розв'язності і дисипативності доведено існування в фазовому просторі глобального аттрактору.

In the paper for nonautonomous parabolic inclusion with upper semicontinuous multi-valued right-hand part only under conditions of global resolvability and dissipation we prove an existence of global attractor in the phase space.

Вступ

В роботі для параболічного включення, многозначна права частина якого явно залежить від часової змінної, досліджується проблема побудови на його сильних розв'язках сім'ї многозначних процесів, існування у цієї сім'ї глобального аттрактору і з'ясування його властивостей. В роботі [1] проблема існування глобального аттрактору була розв'язана для правої частини спеціального виду $f(t, u) = [0, \theta(t, u)]$, де $\forall t \in R$ функція $\theta(t, \cdot)$ належала класу функцій без розривів 2-го роду і задовольняла умову $\sup_{t \in R} \Delta_c(\theta(t)) \rightarrow 0$, $c \rightarrow 0$, де Δ_c – модуль компактності Скоро-

хода [5]. Проте глобальна розв'язність вихідної задачі гарантується без вказаних умов на $f(t, u)$. Виходячи з результатів роботи [4] для нелінійного параболічного рівняння, де існування глобального аттрактору доведено лише за умов глобальної розв'язності, метою даної роботи є одержати відповідний результат для дисипативного параболічного включення загального вигляду. Цього вдається досягти, довівши трансляційну компактність [3] відображення $f(t, u)$ в просторі напівнеперервних зверху многозначних відображень, метрика в якому – це відстань Хаусдорфа між відповідними графіками.

Постановка задачі

Розглядається задача дослідження при $t \rightarrow \infty$ розв'язків параболічного включення

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} \in \Delta y(t, x) + f(t, y(t, x)) + h(x), & (t, x) \in (\tau, T) \times \Omega, \\ y(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, $\tau \in R$ – початковий момент часу, $h \in L^2(\Omega)$, $f: R \times R \mapsto 2^R$ – задане многозначне відображення, що задовольняє умовам:

- 1) $f: R \times R \mapsto C_v(R)$, тобто $\forall (t, u) \in R \times R$ $f(t, u) \neq \emptyset$, опукла, замкнена, обмежена в R ;
- 2) $\forall t \in R$ відображення $f(t, \cdot): R \mapsto C_v(R)$ є напівнеперервним зверху (н.н.зв.);
- 3) $\forall t, s \in R \quad \forall r > 0 \quad dist_h(graph|_r f(t), graph|_r f(s)) \leq \gamma(|t - s|, r)$, де $\gamma(\cdot, r)$ – неперервна функція така, що $\gamma(p, r) \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0+$, $dist_h$ – відстань Хаусдорфа, $graph|_r f = \bigcup_{|u| \leq r} \{(u, w) | w \in f(u)\}$;
- 4) $\exists C_1, C_2 \geq 0 \quad \forall t, u \in R \quad |f(t, u)| \leq C_1 + C_2 |u|$.

Зауважимо, що умова 3) виконується, якщо $\forall r > 0 \quad \forall |u| \leq r \quad dist_h(f(t, u), f(s, u)) \leq \gamma(|t - s|, r)$.

Розв'язність задачі (1) гарантує наступна

Лема 1. [1] За умов 1)-4) для довільних $T > \tau$, $y_\tau \in H := L^2(\Omega)$ існує принаймні один сильний розв'язок (1) на $[\tau, T]$ з $y(\tau) = y_\tau$, тобто $\exists y(\cdot) \in C([\tau, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \exists \xi \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$ такі, що $\xi(t, x) \in f(t, y(t, x))$ м.с. на $(\tau, T) \times \Omega$, $y(\tau, x) = y_\tau(x)$ і $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(y, v) = -((y, v)) + (\xi, v) + (h, v). \quad (2)$$

Той факт, що функція y приймає значення y_τ при $t = \tau$ і задовольняє (2) з деякою функцією ξ , будемо позначати $y = I(y_\tau)\xi$.

Основний результат роботи полягає в тому, що за умов глобальної розв'язності 1)-4) і додаткової умови дисипативності задача (1) породжує сім'ю многозначних процесів, для якої в фазовому просторі $H = L^2(\Omega)$ існує компактний, інваріантний, стійкий глобальний аттрактор.

З цією метою наведемо основні факти і конструкції теорії глобальних аттракторів многозначних процесів, а також деякі необхідні відомості з аналізу многозначних відображень.

Побудова сім'ї многозначних процесів

Позначимо $R_d = \{(t, \tau) \in R^2 \mid t \geq \tau\}$, $\beta(H)$ – сукупність всіх непорожніх, обмежених підмножин H , $C(H)$ – сукупність всіх непорожніх, замкнених підмножин H .

Означення 1. Відображення $U : R_d \times H \mapsto 2^H$ будемо називати многозначним процесом (МП) на H , якщо $\forall u \in H$

- 1) $U(\tau, \tau, u) = u \quad \forall \tau \in R$;
- 2) $U(t, \tau, u) \subseteq U(t, s, U(s, \tau, u)) \quad \forall (t, s), (s, \tau) \in R_d$.

Розглянемо сім'ю МП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$, де Σ – компакт, на якому діє (можливо, многозначна) група перетворень $\{T(h) : \Sigma \mapsto 2^\Sigma\}_{h \in R}$ і для довільних $(t, \tau) \in R_d$, $h \in R$, $u \in H$ і $\sigma \in \Sigma$ маємо

$$U_\sigma(t + h, \tau + h, u) \subseteq U_{T(h)\sigma}(t, \tau, u).$$

Позначимо $U_\Sigma(t, \tau, u) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, \tau, u)$.

Означення 2. Множина $\Theta_\Sigma \subset C(H)$ називається глобальним аттрактором сім'ї МП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$, якщо:

- 1) Θ_Σ є рівномірно притягуючою множиною, тобто $\forall B \in \beta(H) \quad \forall \tau \in R \quad \text{dist}(U_\Sigma(t, \tau, B), \Theta_\Sigma) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$;
- 2) для довільної рівномірно притягуючої множини Y виконується $\Theta_\Sigma \subset Y$.

При цьому Θ_Σ називається інваріантним, якщо $\forall (t, \tau) \in R_d$

$$\Theta_\Sigma = U_\Sigma(t, \tau, \Theta_\Sigma).$$

Θ_Σ називається стійким, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\forall (t, \tau) \in R_d \quad U_\Sigma(t, \tau, O_\delta(\Theta_\Sigma)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma)$$

Лема 2. [4] Нехай в умовах 2), 3) мають місце рівності і виконуються умови:

- 1) $\exists B_0 \in \beta(H) \quad \forall B \in \beta(H) \quad \exists T(B) \quad \forall t \geq T(B) \quad U_\Sigma(t, 0, B) \subset B_0$;
- 2) $\forall t > 0$ множина $U_\Sigma(t, 0, B_0)$ є предкомпактом в H ;
- 3) якщо $y_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, u_n)$, $\sigma_n \rightarrow \sigma_0$, $t_n \rightarrow t_0$, $u_n \rightarrow u_0$, то по підпоследовательності $y_n \rightarrow y_0 \in U_{\sigma_0}(t_0, 0, u_0)$.

Тоді сім'я МП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ має в просторі H компактний, інваріантний, стійкий глобальний аттрактор.

Побудову параметричної множини Σ будемо здійснювати на основі поняття трансляційно-компактної функції.

Означення 3. [3] Нехай M – повний метричний простір, $C(R; M)$ – повний метричний простір неперервних відображень з R в M з топологією рівномірної збіжності на компактах. Для фіксованого $\sigma(\cdot) \in C(R; M)$ покладемо $H(\sigma) := cl_{C(R; M)} \{\sigma(t + \cdot) \mid t \in R\}$. Функцію $\sigma(\cdot) \in C(R; M)$ будемо називати трансляційно-компактною (тр.-к.) в $C(R; M)$, якщо $H(\sigma)$ – компакт в $C(R; M)$.

Розглянемо простір M_r всіх н.н.зв., опуклозначних відображень $\psi : [-r, r] \mapsto C_v(R)$, що задовольняють оцінку $|\psi(u)| \leq C_1 + C_2 |u|$ і розглянемо функцію $\rho_r : M_r \times M_r \mapsto R$

$$\rho_r(\psi_1, \psi_2) = \text{dist}_h(\text{graph}\psi_1, \text{graph}\psi_2).$$

Тоді з [2] (M_r, ρ_r) – компактний метричний простір. Покладемо

$$M = \{\psi : R \mapsto C_v(R) \mid \psi - \text{н.н.зв.}, |\psi(u)| \leq C_1 + C_2 |u|\};$$

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ в } M \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \rho_r(\psi_n, \psi) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тоді легко показати, що M компактний метричний простір, збіжність по метриці ρ якого еквівалентна збіжності (3). Прояснимо на прикладах [5] характер збіжності (3). Нехай напівнеперервні зверху відображення $\psi_n(u) = [g_n(u), f_n(u)]$, $\psi(u) = [g(u), f(u)]$ діють з $[0,1]$ в $C_v([0,1])$.

По-перше, якщо $g_n(u) = g(u) = 0$, $f_n(u) = \begin{cases} 0, u \in [0, 1/2 - 1/n) \\ 1/2, u \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n) \\ 1, u \geq 1/2 + 1/n \end{cases}$, $f(u) = \begin{cases} 0, u \in [0, 1/2) \\ 1, u \geq 1/2 \end{cases}$, то $\psi_n \rightarrow \psi$, але

$f_n \not\rightarrow f$ поточково. З іншого боку, якщо $\psi_n \rightarrow \psi$, $u_n \rightarrow u$, то $\forall \xi_n \in \psi_n(u_n)$ $\text{dist}(\xi_n, \psi(u)) \rightarrow 0$. Дійсно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall v \in B_\delta(u)$ $\psi(v) \subset B_\varepsilon(\psi(u))$. Оскільки $\forall n \geq N$ $(u_n, \xi_n) \in B_\delta(\text{graph} \psi)$ і $u_n \rightarrow u$, то $\xi_n \in \bigcup_{v \in B_\delta(u)} \psi(v) \subset B_\varepsilon(\psi(u))$.

По-друге, легко показати, що якщо $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ в метриці Скорохода (і, тим більше, рівномірно), то $\psi_n \rightarrow \psi$, але не навпаки.

Дійсно, для $g_n(u) = g(u) = 0$, $f_n(u) = \begin{cases} 0, u \in [0, 1/2 - 1/n) \\ n(u - 1/2) + 1, u \in [1/2 - 1/n, 1/2) \\ 1, u \geq 1/2 \end{cases}$, $f(u) = \begin{cases} 0, u \in [0, 1/2) \\ 1, u \geq 1/2 \end{cases}$ маємо, що $\psi_n \rightarrow \psi$,

але не дивлячись на поточкову збіжність, $f_n \not\rightarrow f$ в метриці Скорохода.

З критерію трансляційної компактності [3] одразу маємо

Лема 3. Нехай f задовольняє умови 1)-4). Тоді f тр.-к. в $C(R; M)$, тобто множина $\Sigma = H(f)$ - компакт в $C(R; M)$. Крім того, $\forall \sigma \in \Sigma$ задовольняє умови 1)-4).

Тепер для довільного $\sigma \in \Sigma$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} \in \Delta y(t, x) + \sigma(t, y(t, x)) + h(x), (t, x) \in (\tau, T) \times \Omega, \\ y(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = 0, \\ y(t, x)|_{t=\tau} = y_\tau(x). \end{cases} \quad (1)_\sigma$$

В силу леми 3 і леми 1 задача $(1)_\sigma$ глобально розв'язна в тому ж сенсі, що і задача (1).

Тепер на розв'язках $(1)_\sigma$ розглянемо сім'ю відображень $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$

$$U_\sigma(t, \tau, y_\tau) := \{y(t) | y(\cdot) - \text{розв'язок } (1)_\sigma\}. \quad (4)$$

Основний результат

Основним результатом щодо якісного аналізу поведінки розв'язків задачі (1) є наступна

Теорема. Нехай в задачі (1) функція $f(t, y) = [\kappa(t, y), \theta(t, y)]$ задовольняє умови 1)-4), і наступну

$$\exists M > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall (t, y) \in R^2 \quad \forall \xi \in f(t, y) \quad \xi y \leq (\lambda_1 - \varepsilon)y^2 + M, \quad (5)$$

де λ_1 - перше власне значення $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$.

Тоді сім'я многозначних відображень, означених формулою (4), утворює сім'ю строгих МП $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, що має в фазовому просторі $H = L^2(\Omega)$ компактний, інваріантний, стійкий глобальний аттрактор.

Доведення. Те, що для довільного $\sigma \in \Sigma$ відображення (4) є МП, причому в умовах 2),3) означення 1 має місце рівність, доводиться аналогічно [1]. Тепер покажемо, що для довільних $\sigma \in \Sigma$, $(t, v) \in R^2$ виконується нерівність

$$\forall \xi \in \sigma(t, v) \quad \xi v \leq (\lambda_1 - \varepsilon)v^2 + M. \quad (6)$$

Для $\sigma = f$ відповідна нерівність гарантується умовою (5). В силу трансляційної компактності існує послідовність $\{t_n\}$ така, що $\forall t \in R$ $\forall r > 0$ $\text{dist}_h(\text{graph}|_r, f(t + t_n), \text{graph}|_r, \sigma(t)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

Оскільки

$$\text{graph}|_r f(t + t_n) \subset \bigcup_{|v| \leq r} \{(v, \xi) | \xi v \leq (\lambda_1 - \varepsilon)v^2 + M\}, \quad (7)$$

і замкнена множина зправа не залежить від n , то аналогічне вкладення справедливе і для $\text{graph}|_r \sigma(t)$, що і доводить (6).

Тепер нехай $\tau = 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y = y(t, x)$ - розв'язок $(1)_\sigma$ в сенсі леми 1 з $l_\sigma(t, x) \in \sigma(t, y(t, x))$ м.с. Тоді в силу (4)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 + \lambda_1 \|y(t)\|^2 \leq (\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}) \|y(t)\|^2 + M |\Omega| + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|^2,$$

і отже $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|y(t)\|^2 \leq M |\Omega| + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|^2$.

Звідси, застосовуючи лему Гронуола, маємо оцінку

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(0)\|^2 e^{-\varepsilon t} + \int_0^t (2M \|\Omega\| + \frac{1}{\varepsilon} \|h\|^2) e^{-\varepsilon(t-s)} ds, \quad (8)$$

з якої одержуємо умову 1) леми 2.

З оцінок (6),(8) аналогічно [1] виводимо, що для довільних $t_* > 0$, $r > 0$ множина $U_\Sigma(t_*, 0, B_r)$ – предкомпакт в H . Це означає, що сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ має в фазовому просторі H компактний глобальний аттрактор.

Доведемо умову 3) леми 2. Нехай $p_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n^0)$, $\sigma_n \rightarrow \sigma$ в Σ , $y_n^0 \rightarrow y^0$, $t_n \rightarrow t_0$ і доведемо, що принаймні по підпоследовательності $p_n \rightarrow p \in U_\sigma(t_0, 0, y^0)$. Зафіксуємо $T > t_0$. Маємо, що $y_n(\cdot)$ – розв'язок $(1)_{\sigma_n}$, $y_n(t_n) = p_n$, $l_{\sigma_n}(s, x) \in \sigma_n(s, y_n(s, x))$ м.с. Оскільки $\|l_{\sigma_n}(s)\| \leq K(1 + \|y_n(s)\|)$ з деякою константою $K > 0$, що не залежить від n , то з (8) в силу [2] існують функції l_σ , $y = I(y^0)l_\sigma$ такі, що по підпоследовательності $l_{\sigma_n} \rightarrow l_\sigma$ слабо в $L^1(0, T; H)$, $y_n \rightarrow y$ в $C([0, T]; H)$. Звідси $y_n(t_n) = p_n \rightarrow y(t_0)$, $y_n(t, x) \rightarrow y(t, x)$ м.с. і для включення $y(t_0) \in U_\sigma(t_0, 0, y^0)$ залишилось показати, що $l_\sigma(s, x) \in \sigma(s, y(s, x))$ м.с. Зафіксуємо $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, для яких $y_n(t, x) \rightarrow y(t, x)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(t, x, \varepsilon) \forall n \geq N$

$$l_{\sigma_n}(t, x) \in B_\varepsilon(\sigma(t, y(t, x))). \quad (9)$$

В силу теореми Мазура зі слабкої збіжності $l_{\sigma_n} \rightarrow l_\sigma$ в $L^1(0, T; H)$ маємо існування опуклих комбінацій, що збігаються сильно, тобто $\exists S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} l_{\sigma_{n_i}}$, $\lambda_i^{(n)} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} = 1$, $S_n \rightarrow l_\sigma$ в $L^1(0, T; H)$. Отже, по деякій підпоследовательності $S_n(t, x) \rightarrow l_\sigma(t, x)$ м.с. Тоді з (9) в силу довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$l_\sigma(t, x) \in \sigma(t, y(t, x)), \quad (10)$$

і шукана властивість доведена. Теорема доведена.

Висновки

В роботі для параболічного включення, багатовимірної правої частини якого є напівнеперервною зверху по фазовій змінній, лише за умов глобальної розв'язності і дисипативності доведено, що його сильні розв'язки породжують сім'ю багатовимірних процесів, для якої в фазовому просторі існує компактний, інваріантний, стійкий глобальний аттрактор.

Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень (грант Ф25.1/047).

1. Капустян О.В., Касьянов П.О. Глобальний аттрактор неавтономного включення з розривною правою частиною // УМЖ. – 2003. – Т. 55, № 11. – С. 1467–1475. 2. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Н.:Наука, 1986. 3. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors // J.Math. Pures Appl. – 1997. – v.76, n.10. – P. 913–964. 4. Kapustyan O.V., Valero J. On the connectedness and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. Appl. – 2006, vol.323, P. 614–633. 5. Silvestrov D. Limit theorems for randomly stopped stochastic processes. – Springer, 2003.

Надійшла до редколегії 04.12.08

УДК 517.9

І. Лакоза, асп., В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО ЗБУРЕННЯ НА ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Досліджено властивості розв'язків рівняння гармонійних коливань при наявності довготривалих (у часі) зовнішніх сил імпульсної природи в залежності від величин імпульсної дії. Отримано умови збільшення (зменшення) амплітуди коливань та умови існування періодичних розв'язків.

Properties of solution to harmonic equation with long lasting pulses are studied. Conditions of increase (decrease) of the oscillation amplitude and conditions for existence of periodic solutions are obtained.

1. Вступ

Останнім часом значний інтерес становить дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [3]. Такі системи виникають в якості математичних моделей різноманітних задач практики, для яких притаманні процеси або зовнішні збурення, тривалістю яких можна знехтувати при складанні їх математичних моделей. Як показано в [1–3], на властивості розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією суттєвий вплив можуть виявляти величини та моменти імпульсної дії (умови імпульсної дії). Разом з тим, при вивченні деяких важливих задач практики, наприклад, поведінки клітин головного мозку людей, що страждають на хворобу Паркінсона, досліджується вплив електричних імпульсів на поведінку нейронів головного мозку, при цьому такі імпульси, на відміну від згаданих вище задач, тривають порівняно довго [4], тобто їх тривалістю не можна нехтувати.

В даній статті розглядається задача про поведінку неперервно диференційованих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з переключенням [3], коли в різних областях розширеного фазового простору поведінка розглядуваної системи описується диференціальними рівняннями з різними правими частинами.

2. Постановка задачі

Розглянемо послідовність моментів часу $\{t_k\}$, $k \in N$, для яких виконується умова $t_{k+1} - t_k \geq \delta$ для деякого $\delta > 0$, де t_{2k-1} , $k \in N$, вважаються початком дії імпульсу, а t_{2k} , $k \in N$, — кінцем дії імпульсу. При цьому припускаємо, що тривалість імпульсу $h_k = t_{2k+1} - t_{2k} > 0$. Нехай дана система описується лінійним диференціальним рівнянням II-го порядку вигляду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (1)$$

де $f(t) = f_{2k}(t) = a_{2k} + b_{2k} \cos(\omega_{2k}t + \varphi_{2k})$ при $t \in I = \bigcup_{k \in N} [t_{2k-1}, t_{2k})$ та $f(t) = 0$ при відсутності дії імпульсу, тобто

при $t \notin I$. Тут дійсні величини $a_{2k}, b_{2k}, \varphi_{2k}, \omega_{2k}$, $k \in N$, вважаються заданими апіорі і задовольняють такі умови: $|a_{2k}| + |b_{2k}| > 0$, $\varphi_{2k} \in [0, 2\pi)$, $\omega_{2k} > 0$, $\omega_{2k} \neq \omega$, $k \in N$.

Таким чином, поведінка розглядуваної системи описується диференціальними рівняннями

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_{2k}(t), \quad \text{якщо } t \in I, \quad (2)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{якщо } t \notin I. \quad (3)$$

Рівняння (2), (3) описують поведінку гармонійного осцилятора, який зазнає імпульсної дії в певні (наперед визначені) моменти часу і при цьому враховується тривалість імпульсної дії. Згідно з [3] ця система має єдиний розв'язок.

3. Опис основного результату

З'ясуємо який вплив на властивості розв'язку задачі (2), (3) виявляють умови імпульсної дії, тобто величини $a_{2k}, b_{2k}, \varphi_{2k}, \omega_{2k}$, $k \in N$. Для цього запишемо формулу для загального розв'язку рівняння (1). Якщо t — деякий довільний фіксований момент часу такий, що $t < t_1$, то значення розв'язку рівняння (1) в момент часу t визначається формулою $x_0(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) - \frac{1}{\omega} \dot{x}_0 \sin \omega(t - t_0)$, де $x_0(t_0) = x_0$, $\dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0$ — початкові значення розв'язку. При цьому вважається, що $t_0 < t_1$. Якщо ж t — такий момент часу, що $t \geq t_1$, то існує таке натуральне число n , що $t_n \leq t$, але $t_{n+1} > t$. Згідно [1, 3] задача (2), (3) має єдиний розв'язок $x(t)$, який можна записати за допомогою такої формули:

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(-\frac{a_{2k}}{\omega^2} - \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \cos(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) \cos \omega(t - t_{2k-1}) \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{\omega_{2k}}{\omega} \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \sin(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) \sin \omega(t - t_{2k-1}) \right] + \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Phi(t) = \chi_n(t) & \left[\left(-\frac{a_{2n}}{\omega^2} - \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \cos(\omega_{2n}t_{2n-1} + \varphi_{2n}) \right) \cos \omega(t - t_{2n-1}) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_{2n}}{\omega} \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \sin(\omega_{2n}t_{2n-1} + \varphi_{2n}) \sin \omega(t - t_{2n-1}) + \frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \cos(\omega_{2n}t + \varphi_{2n}) \right], \end{aligned}$$

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{2n-1}; t_{2n}) \\ 0, & t \notin [t_{2n-1}; t_{2n}) \end{cases} \quad \text{— характеристична функція множини } [t_{2n-1}; t_{2n}).$$

Формула (4) дає можливість проаналізувати властивості розв'язків задачі (2), (3) в залежності від параметрів — величин, моментів і характеристик імпульсної дії. Дослідимо, як змінюється частота та амплітуда коливань під час дії імпульсу та після його закінчення. Розглянемо спочатку випадок, коли $b_{2k} = 0$, тобто $f_{2k}(t) = a_{2k}$. У цьому випадку імпульси мають сталу величину і резонанси в системі відсутні. З формули (4) випливає, що частота коливань системи залишається сталою, як під час дії імпульсу, так і після його закінчення, і співпадає із власною частотою гармонічних коливань ω , а квадрат амплітуди коливань змінюватиметься за таким законом:

$$A^2 = \begin{cases} \left(x_0 - \frac{a_2}{\omega^2} \cos \omega t_1 \right)^2 + \left(\dot{x}_0 - \frac{a_2}{\omega^2} \sin \omega t_1 \right)^2, & t \in [t_1, t_2), \\ \left(x_0 - \frac{a_2}{\omega^2} \cos \omega t_1 + \frac{a_2}{\omega^2} \cos \omega t_2 \right)^2 + \left(\dot{x}_0 - \frac{a_2}{\omega^2} \sin \omega t_1 + \frac{a_2}{\omega^2} \sin \omega t_2 \right)^2, & t \in [t_2, t_3), \\ \dots \\ \left(x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{a_{2k}}{\omega^2} \cos \omega t_k \right)^2 + \left(\dot{x}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{a_{2k}}{\omega^2} \sin \omega t_k \right)^2, & t \in [t_{n-2}, t_{n-1}), \\ \dots \end{cases} \quad (5)$$

де $[z]$ — ціла частина числа z .

З (5) випливає, що коливання в розглядуваній системі відбуваються з однією і тією ж самою частотою ω . При цьому, на кожному з інтервалів, що не містить моментів імпульсної дії, амплітуда коливань є сталою. Нехай A_n – амплітуда коливань на інтервалі $[t_n, t_{n+1})$. Порівняємо амплітуди на перших трьох проміжках. Нехай A_1 – амплітуда коливань на проміжку $[t_0, t_1)$ (без дії імпульсу), A_2 – амплітуда коливань на проміжку $[t_1, t_2)$ (коли діє перший імпульс), A_3 – амплітуда коливань на проміжку $[t_2, t_3)$ (після закінчення дії першого імпульсу). Аналогічно позначимо A_n, A_{n+1}, A_{n+2} – миттєві амплітуди коливань на проміжках $[t_{n-1}, t_n)$, $[t_n, t_{n+1})$ та $[t_{n+1}, t_{n+2})$, відповідно. З'ясуємо умови, за яких амплітуда коливань системи з часом зростає, зменшується або ж залишається без змін. Для різниці квадратів амплітуд маємо

$$A_3^2 - A_2^2 = \left(\frac{a_2}{\omega^2}\right)^2 + 2x_0 \frac{a_2}{\omega^2} \cos \omega t_2 + 2\dot{x}_0 \frac{a_2}{\omega^2} \sin \omega t_2 - 2\left(\frac{a_2}{\omega^2}\right)^2 \cos \omega(t_2 - t_1).$$

Звідси випливає, що амплітуда коливань в результаті дії імпульсу (в залежності від його параметрів) може як збільшуватися, так і зменшуватися. Знайдемо умови на параметри імпульсу при виконанні яких амплітуда коливань буде збільшуватися (зменшуватися). Для цього запишемо вираз для квадрата амплітуди коливань, враховуючи, що $t \in [t_n, t_{n+1})$. Маємо

$$\begin{aligned} A_n^2 = & x_0^2 + \dot{x}_0^2 + 2 \frac{x_0}{\omega^2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \cos \omega t_k + 2 \frac{\dot{x}_0}{\omega^2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \sin \omega t_k + \frac{1}{\omega^4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \cos \omega t_k \right)^2 + \\ & + \frac{1}{\omega^4} \sum_{\substack{k,m=1, \\ k \neq m}}^{n-1} (-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega t_k \cos \omega t_m + \frac{1}{\omega^4} \sum_{\substack{k,m=1, \\ k \neq m}}^{n-1} (-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sin \omega t_k \sin \omega t_m + \\ & + \frac{1}{\omega^4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \sin \omega t_k \right)^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2 + \frac{1}{\omega^4} \sum_{k=1}^{n-1} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}^2 + \frac{1}{\omega^4} \sum_{\substack{k,m=1, \\ k \neq m}}^{n-1} (-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_k - t_m) + \\ & + 2 \frac{x_0}{\omega^2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \cos \omega t_k + 2 \frac{\dot{x}_0}{\omega^2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \sin \omega t_k. \end{aligned}$$

Тоді

$$A_{n+1}^2 - A_n^2 = \frac{a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2x_0(-1)^n \cos \omega t_n + 2\dot{x}_0(-1)^n \sin \omega t_n + \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{n+m} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_n - t_m) \right), \quad (6)$$

звідки знаходимо умови, за яких амплітуда коливань буде змінюватися. Позначимо:

$$\begin{aligned} Q_n^2 = & \left[\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+m} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_n - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^n 2x_0 \right]^2 + \left[\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+m} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sin \omega(t_n - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^n 2\dot{x}_0 \right]^2, \quad (7) \\ P_{1n} = & \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+m} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_n - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^n 2x_0, \quad P_{2n} = \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+m} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sin \omega(t_n - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^n 2\dot{x}_0. \end{aligned}$$

Порівнявши квадрати амплітуд на проміжках $[t_{n-1}, t_n)$ та $[t_n, t_{n+1})$, знаходимо, що амплітуда коливань системи зростає (в результаті дії імпульсу) при виконанні умови

$$a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]} > \omega^4 Q_n \cos(\omega t_n + \psi_n + \pi), \quad (8)$$

де $\psi_n \in [0; 2\pi)$ – миттєва фаза (значення фази коливань в момент часу t), яка визначається з умов

$$\cos \psi_n = \frac{P_{1n}}{Q_n}, \quad \sin \psi_n = \frac{P_{2n}}{Q_n}, \quad \text{де } Q_n > 0$$

Нагадаємо, що a_{2n} в (8) – один з параметрів імпульсної дії.

Порівняємо тепер квадрати амплітуди на проміжках $[t_n, t_{n+1})$ та $[t_{n+1}, t_{n+2})$. Маємо:

$$A_{n+2}^2 - A_{n+1}^2 = \frac{a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]}}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} + 2x_0(-1)^{n+1} \cos \omega t_{n+1} + 2\dot{x}_0(-1)^{n+1} \sin \omega t_{n+1} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_{n+1} - t_m) \right),$$

звідки знаходимо умови, коли ця різниця більша нуля:

$$\frac{a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]}}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} + 2x_0(-1)^{n+1} \cos \omega t_{n+1} + 2\dot{x}_0(-1)^{n+1} \sin \omega t_{n+1} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_{n+1} - t_m) \right) > 0, \quad (9)$$

тобто при виконанні нерівності (9) амплітуда зростає при переході t з $[t_n, t_{n+1})$ на $[t_{n+1}, t_{n+2})$. Звідси випливає, що не залежно від дії імпульсу, амплітуда може як збільшуватись (при виконанні нерівності (9)), так і зменшуватись (при невиконанні (9))

Умову (9) можна подати таким чином: $a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} > \omega^4 Q_{n+1} \cos(\omega t_{n+1} + \psi_{n+1} + \pi)$,

де $\psi_{n+1} \in [0; 2\pi)$ – миттєва фаза коливань на проміжку $[t_{n+1}, t_{n+2})$, яка визначається з рівнянь

$$\cos \psi_{n+1} = \frac{P_{n+1}^{(1)}}{Q_{n+1}}; \sin \psi_{n+1} = \frac{P_{n+1}^{(2)}}{Q_{n+1}}, \text{ де } Q_{n+1} > 0, \text{ причому}$$

$$Q_{n+1}^2 = \left[\left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_{n+1} - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^{n+1} 2x_0 \right]^2 + \left[\left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sin \omega(t_{n+1} - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^{n+1} 2\dot{x}_0 \right]^2,$$

$$P_{1n+1} = \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cos \omega(t_{n+1} - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^{n+1} 2x_0, \quad P_{2n+1} = \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sin \omega(t_{n+1} - t_m)}{\omega^2} \right) + (-1)^{n+1} 2\dot{x}_0.$$

У випадку, коли $f_{2n}(t) = a_{2n} + b_{2n} \cos(\omega_{2n}t + \varphi_{2n})$ розв'язок задачі (2), (3) на проміжку $[t_{2n-1}; t_{2n})$ залежить від частот ω та ω_{2n} , тобто від власної частоти системи і частоти імпульсної дії. При цьому не можна скористатися поняттям амплітуди коливань, а можна лише розглядати питання про максимальне та мінімальне значення розв'язку $x(t)$. На проміжку $[t_{2n}; t_{2n+1})$, коли імпульсна дія відсутня, коливання відбуваються лише з власною частотою ω системи (2), (3).

Максимум (мінімум) функції на проміжку $[t_{n-1}; t_n)$ буде досягатись або на кінцях цього проміжку, тобто в точках t_{n-1} або в t_n , або в деякій внутрішній точці t_* де

$$t^* = \frac{-\sqrt{p\omega - \varphi_{2n}\omega + \phi_n\omega_{2n} + \arccos\left(\frac{Z_n(t)\sin p}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}\right)\omega_{2n} + \varphi_{2n}}}{\omega_{2n}}, \quad p \in Z, \quad Z_n(t) = \chi_n(t)\omega_{2n} \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2},$$

$$\cos \phi_n = \frac{M_n}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}, \quad \sin \phi_n = \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}, \quad \phi_n \in [0, 2\pi),$$

$$L_n = \dot{x}_0 + \omega \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{2k}}{\omega^2} + \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \cos(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) (\cos \omega t_{2k-1} + \cos \omega t_{2k}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega_{2k}}{\omega} \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \sin(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) (\sin \omega t_{2k-1} + \sin \omega t_{2k}) \right) + \\ \left. + \chi_n(t) \left(\left(\frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \cos(\omega_{2n}t_{2n-1} + \varphi_{2n}) \right) \cos \omega t_{2n-1} + \frac{\omega_{2n}}{\omega} \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \sin \omega t_{2n-1} \right) \right)$$

$$M_n = x_0 + \omega \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{a_{2k}}{\omega^2} + \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \cos(\omega_{2k} t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) (\sin \omega t_{2k-1} + \sin \omega t_{2k}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\omega_{2k}}{\omega} \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \sin(\omega_{2k} t_{2k} + \varphi_{2k}) \right) (\cos \omega t_{2k-1} + \cos \omega t_{2k}) \right] + \right. \\ \left. - \chi_n(t) \left(\left(\frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \cos(\omega_{2n} t_{2n-1} + \varphi_{2n}) \right) \sin \omega t_{2n-1} + \frac{\omega_{2n}}{\omega} \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2} \cos \omega t_{2n-1} \right) \right)$$

4. Періодичні розв'язки

Розглянемо питання про періодичні розв'язки задачі (2), (3). Справедлива така лема.

Лема. Нехай задача (2), (3) має T – періодичний розв'язок $x^*(t) \in C^{(\infty)}(R)$. Тоді існує таке натуральне число m , що для всіх $p = 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ виконуються умови:

$$f_{2p+2m} = f_{2p}, t_{p+m} = t_p + T \quad (10)$$

Умови (10) є необхідними умовами існування періодичного розв'язку задачі (2), (3). Вважаємо, що ці умови виконуються і розглянемо питання про відшукування періодичного розв'язку задачі (2), (3). В силу довільності t з рівності $x(t+T) = x(t)$ і формули для загального розв'язку (4) знаходимо:

$$x_0 (\cos \omega(T - t_0) - \cos \omega t_0) + \dot{x}_0 (\sin \omega(T - t_0) - \sin \omega t_0) = \\ = \sum_{k=1}^m \left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) (\cos \omega(T - t_{2k-1}) + \cos \omega(T - t_{2k})) \right] + \\ + \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) (\sin \omega(T - t_{2k-1}) + \sin \omega(T - t_{2k})) \right], \quad (11)$$

$$x_0 (-\sin \omega(T - t_0) + \sin \omega t_0) + \dot{x}_0 (\cos \omega(T - t_0) - \cos \omega t_0) = \\ = -\sum_{k=1}^m \left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) (\sin \omega(T - t_{2k-1}) + \sin \omega(T - t_{2k})) \right] + \\ + \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) (\cos \omega(T - t_{2k-1}) + \cos \omega(T - t_{2k})) \right].$$

Розглянемо визначник системи (11). Маємо:

$$\Delta = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \cos \omega(T - t_0) - \cos \omega t_0 & \sin \omega(T - t_0) + \sin \omega t_0 \\ \sin \omega(T - t_0) + \sin \omega t_0 & -(\cos \omega(T - t_0) - \cos \omega t_0) \end{vmatrix} = -\frac{4}{\omega} \sin^2 \frac{\omega T}{2}. \quad (12)$$

Якщо $\omega T \neq 2\pi q$ для всіх натуральних q , то з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11) можна однозначно на-
йти початкові значення x_0 та $\dot{x}_0$, при яких задача (2), (3) має єдиний періодичний розв'язок.

$$x_0 = \frac{1}{-2 \sin \frac{\omega T}{2}} \left[\sum_{k=1}^m -\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) \left(\sin \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0 \right) + \sin \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0 \right) \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) \left(\cos \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0 \right) + \cos \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0 \right) \right) \right], \\ \dot{x}_0 = \frac{1}{-\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2}} \left[\sum_{k=1}^m -\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) \left(\cos \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0 \right) + \cos \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0 \right) \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) \left(\sin \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0 \right) + \sin \omega \left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0 \right) \right) \right].$$

Якщо ж $\omega(T - 2t_0) \neq 2\pi q$ для деякого натурального q , то з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11) не можна од-
нозначно знайти початкові значення x_0 та $\dot{x}_0$. Відповідно задача (2), (3) має двопараметричне сімейство періодичних
розв'язків. При цьому характеристики (величини) імпульсної дії повинні задовольняти такі додаткові умови:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) (\cos \omega(T - t_{2k-1}) + \cos \omega(T - t_{2k})) \right] + \\
& + \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) (\sin \omega(T - t_{2k-1}) + \sin \omega(T - t_{2k})) \right] = \\
& = \sum_{k=1}^m \left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2} \left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2} a_{2k} + f_{2k}(t_{2k}) \right) (\cos \omega(T - t_{2k-1}) + \cos \omega(T - t_{2k})) \right] + \\
& + \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_{2k}^2)} \dot{f}_{2k}(t_{2k}) (\sin \omega(T - t_{2k-1}) + \sin \omega(T - t_{2k})) \right] = 0.
\end{aligned}$$

В цьому випадку початкові дані x_0 та $\dot{x}_0$ для періодичного розв'язку можуть бути обрані довільним чином.

5. Висновок

В роботі розглянуто задачу про поведінку неперервно диференційованих розв'язків рівняння гармонійних коливань з переключенням, яка в певному сенсі є системою з імпульсною дією, коли враховується тривалість її дії.

Детально вивчено два різних випадки імпульсної дії: так звані П-подібні імпульси та більш загальний випадок – синусо-подібні імпульси. На основі аналізу формули для загального розв'язку отримано умови збільшення (зменшення) амплітуди коливань та умови існування періодичних розв'язків.

1. Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Собчук В.В. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №6. – С. 827–834. 2. Самойленко В.Г., Елгондидзе К.К. Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №1. – С. 141–148. 3. Самойленко М.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987. 4. Terman D., Rubin J.E., Yew A.C., Wilson C.J. Activity patterns in a model for the subthalamopallidal network of the basal ganglia // J. Neuroscience. – 2002. – V. 22, №7. – P. 2963–2976.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук
yusam@univ.kiev.ua

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗРИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається питання про існування розривних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Використовуючи асимптотичний розв'язок для сингулярно збуреного рівняння Кортвега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для якого розглядуване рівняння є незбуреним, отримано умови (умови типу Гюгоніо) існування розривних розв'язків для згаданого вище квазілінійного рівняння.

Problem on existence discontinuous solutions to quasilinear partial differential equation with variable coefficients is studied. Using asymptotic solution for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients being perturbed for the one, conditions of existence (so called Hugoniot type conditions) discontinuous solutions to quasilinear equation mentioned above are proposed.

1. Вступ

При розгляді сингулярно збурених рівнянь часто виникає задача побудови розривних розв'язків рівнянь, які є породжуваними для них. При цьому така задача виникає у зв'язку з тим, що розв'язок збуреного рівняння при прямуванні малого параметра до нуля, прямує до деякої розривної функції, яка і є розв'язком незбуреного рівняння. Прикладом подібної задачі може бути рівняння Бюргерса вигляду [4]

$$u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

яке описує рух хвиль рідини для випадку малої дисперсії. Цілоком природно виникає питання про поведінку розв'язків рівняння (1), коли параметр ε прямує до нуля. Частинним розв'язком цього рівняння є функція

$$u(x, t, \varepsilon) = 2a \left(1 - \operatorname{th} \left(\frac{a(x - \varphi(t))}{\varepsilon} \right) \right), \quad (2)$$

де $\varphi(t) = 2at$, $a > 0$ – деяка стала.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ функція $u(x, t, \varepsilon)$ поточково збігається до розривної функції $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > \varphi(t), \\ 4a, & x < \varphi(t). \end{cases}$$

Тому, зважаючи на важливість умов існування розривних розв'язків породжуваних рівнянь, проблему побудови таких розв'язків можна розглядати як окрему задачу. Слід зауважити, що проблема побудови розривних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними активно досліджувалась багатьма математиками ХХ-ого століття. Як відомо, згідно класичної теореми Коші-Ковалевської для диференціальних рівнянь з частинними похідними в нормальному вигляді аналітичний розв'язок задачі Коші існує в деякому околі поверхні, на якій задано початкові умови. Тому при розгляді задачі Коші для нелінійних рівнянь з гладкими або розривними початковими умовами на деякому (часовому) інтервалі необхідна спеціальна постановка таких задач. Питання постановки таких узагальнених задач Коші для згаданих рівнянь були розглянуті І.Г.Петровським в [4] та згодом О.А.Олійник в [3].

В [6] Е. Хопф для побудови розривних розв'язків для рівнянь з частинними похідними запропонував метод "зникаючої в'язкості", коли розв'язок розглядуваного рівняння шукається як границя при $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язку $u(x, t, \varepsilon)$ деякого іншого сингулярно збуреного рівняння, яке при $\varepsilon = 0$ співпадає з досліджуваним рівнянням. Метод "зникаючої в'язкості" використано в [2] для вивчення рівняння вигляду

$$\rho_1 u_t + (\rho_2 + \rho_3 u) u_x + \rho_4 u = 0, \quad (3)$$

де $\rho_j^0 \leq \rho_j(x, t) \leq \rho_j^1$; $\rho_j^0, \rho_j^1, j = \overline{1, 4}$, – деякі такі сталі, що $\rho_1^0 > 0, \rho_3^0 > 0$; $\rho_{3x}(x, t) \leq 0, (\rho_1 \rho_3^{-3})_x(x, t) \geq 0$, та запропоновано алгоритм побудови так званого "нескінченно вузького" розв'язку вигляду

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{j=1}^M A_j(t) \eta(x - \varphi_j(t)),$$

де $u_0(x, t), \varphi_j(t)$ – нескінченно диференційовні функції, а

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \neq 0, \\ 1 & \xi = 0, \end{cases}$$

$M \geq 1$ – деяке фіксоване натуральне число.

Розглядаючи збурене для (3) рівняння вигляду

$$\rho_1 u_t + (\rho_2 + \rho_3 u) u_x + \rho_4 u = -\varepsilon^2 u_{xxx}, \quad (4)$$

зі спеціальною початковою умовою, автори в [2] знаходять слабку границю (при $\varepsilon \rightarrow 0$) розв'язку рівняння (3) і таким чином визначають певні співвідношення для функцій $A_j(t), \varphi_j(t), j = \overline{1, M}$. Отримані ними співвідношення для функцій $A_j(t), \varphi_j(t), j = \overline{1, M}$, називаються умовами типу Гюгоніо [2].

Умовою Гюгоніо для розривної скачкоподібної функції $u(x, t)$ називають співвідношення на лінії $x = \varphi(t)$ розриву функції $u(x, t)$, що пов'язує швидкість $\varphi'(t)$ поширення хвилі та ліві і праві граничні значення функції $u(x, t)$. Зокрема, для рівняння Бюргерса (1) умова Гюгоніо для розривного розв'язку породжуючого для (1) рівняння:

$$u_t + uu_x = 0$$

записується у вигляді:

$$[u] \varphi_t = \frac{1}{2} [u^2], \quad (5)$$

де $[u] = u(\varphi(t) + 0, t) - u(\varphi(t) - 0, t)$.

Умова (5) отримана з формули (2) для точного розв'язку рівняння Бюргерса. Але у загальному випадку, коли розв'язок збуреного рівняння в аналітичному вигляді побудувати неможливо, цей підхід застосувати не можна. Проте у таких випадках, для знаходження розривних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними можна скористатися формулами для асимптотичних розв'язків рівнянь, які є сингулярно збуреними для рівнянь, що розглядаються і з яких розглядуване рівняння може бути отримано шляхом переходу до границі, коли малий параметр прямує до нуля.

В даній статті розглядається задача про існування розривного розв'язку рівняння вигляду

$$a_0(x) u_t + b_0(x) uu_x = 0, \quad (6)$$

де $a_0(x), b_0(x)$ – нескінченно диференційовні функції, $x \in \mathbf{R}^1, t \in [0; T]$, яке є породжуючим рівнянням для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду [5, 7]

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, \varepsilon) u_t + b(x, \varepsilon) uu_x, \quad (7)$$

де функції $a(x, \varepsilon), b(x, \varepsilon)$ мають вигляд

$$a(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varepsilon^k, \quad b(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) \varepsilon^k, \\ t \in [0; T], \quad a_k(x), b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1), \quad k \geq 0.$$

2. Основні означення та припущення

Означення. Нехай асимптотичний розв'язок рівняння

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) = 0,$$

де диференціальний оператор $L_\varepsilon : C^\infty \rightarrow C^\infty$, має вигляд

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \geq 1.$$

Тут функція $S = S(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$, причому $S_x|_\Gamma \neq 0, \Gamma = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T], S(x, t) = 0\}$. Будемо говорити, що асимптотичний розв'язок $u(x, t, \varepsilon)$ породжує при $\varepsilon \rightarrow 0$ скачкоподібну функцію $u(x, t)$, яка є розв'язком незбуреного рівняння

$$L_0 u(x, t) = 0,$$

де $L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = L_0 u(x, t)$, якщо виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon Y_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right), f(x) \right\rangle = \langle L_0 u(x, t), f(x) \rangle, \quad f \in C_0^\infty, \quad (8)$$

де скалярний добуток $\langle \cdot, \cdot \rangle$ визначено формулою

$$\langle g(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

При цьому співвідношення (8) називається умовою типу Гюгонію.

Аналогічно до [1] позначимо за допомогою $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$, для яких рівномірно за змінними (x, t) на кожному компакт $K \subset \mathbf{R} \times (0; T)$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, α , виконуються такі дві умови:

1) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^n \frac{\partial^{n+m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} f(x, t, \tau) = 0; \quad (9)$$

2) існує нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$ така, що

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^n \frac{\partial^{n+m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} f(x, t, \tau) - f^-(x, t) = 0, \quad (x, t) \in K. \quad (10)$$

Позначимо за допомогою $G_0 = G_0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ лінійний підпростір в G функцій $f(x, t, \tau)$ таких, що додатково до умов (9), (10) рівномірно щодо (x, t) на кожному компакт $K \subset \mathbf{R} \times (0; T)$ справджується рівність

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

В [5] побудовано асимптотичний розв'язок рівняння (7) у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (11)$$

$$\text{де } Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}.$$

Для регулярної частини асимптотики отримано систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} a_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0, \\ a_0(x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x) u_0 \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} u_j &= f_j(x, t, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (12)$$

де функції $f_j(x, t, u_0, u_1, \dots, u_{j-1})$, $j = \overline{1, N}$, визначаються рекурентним чином.

Припускається, що рівняння (12) мають нескінченно диференційовний розв'язок.

Враховуючи співвідношення (12), можна знайти систему диференціальних рівнянь для визначення функцій сингулярної частини асимптотики $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, яка спочатку використовується для визначення функцій $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, на кривій розриву $x = \varphi(t)$, а потім ця система використовується для продовження функцій $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, в область $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : |x - \varphi(t)| < 2\mu\}$, де μ – деяка стала. Крива розриву визначається як розв'язок певного звичайного диференціального рівняння, яке отримується з так званих умов ортогональності [5], що забезпечують розв'язність системи рівнянь для функцій $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, в просторі $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$.

Функції $v_j = v_j(t, \tau) = V_j(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j = \overline{0, N}$, є розв'язками системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - b_0(\varphi(t)) \left[u_0(\varphi(t), t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right] = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} - b_0(\varphi(t)) \left[u_0(\varphi(t), t) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} + \frac{\partial v_0}{\partial \tau} v_j + v_0 \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \right] = F_j(t, \tau),$$

де $F_j(t, \tau) = F_j(t, V_0(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau), u_0(x, t), \dots, u_j(x, t))|_{x=\varphi(t)}$, $j = \overline{1, N}$, визначаються рекурентним чином.

Розв'язок першого рівняння системи (13) в просторі G_0 записується у вигляді

$$v_0(t, \tau) = -3 \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))} ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} (\tau + C) \right),$$

при умові, що

$$A(\varphi(t), t) = -a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) > 0. \quad (14)$$

Якщо $F_j(t, \tau) \in G_0$, $j \geq 1$, то необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь (13) в просторі $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ при $j \geq 1$ є умови ортогональності вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t, \tau) v_0(t, \tau) d\tau = 0, \quad j \geq 1. \quad (15)$$

З (15) при $j = 1$ можна отримати рівняння

$$\begin{aligned} & 15a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}A(\varphi(t), t) - 20a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\varphi'(t)A(\varphi(t), t) + \\ & + 10b_0^2(\varphi(t))u'_{0x}(\varphi(t), t)A(\varphi(t), t) + 10A(\varphi(t), t)b_0(\varphi(t))a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - \\ & - 10A(\varphi(t), t)b_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) + 16b_0(\varphi(t))A^2(\varphi(t), t) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

з якого визначається крива розриву $x = \varphi(t)$.

Продовжимо функції сингулярної частини асимптотики $V_j(x, t, \tau)$, $j \geq 0$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$. При цьому покладемо: $V_0(x, t, \tau) = v_0(t, \tau)$.

Для продовження функцій $V_j(x, t, \tau)$, $j \geq 1$, в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ запишемо функції $v_j(t, \tau)$, $j \geq 1$, у вигляді:

$$v_j(t, \tau) = v_j(t)\eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

де

$$v_j(t) = (a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t)))^{-1} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau),$$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t, \tau) d\tau + E_j(t), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0.$$

Тут $\eta_j(t, \tau)$ – деяка функція з простору $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ така, що $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta_j(t, \tau) = 1$; $E_j(t)$ – деяка нескінченно диференційовна функція;

$$\psi_j(t, \tau) = \psi_{j,1}(t, \tau) + c_j(t)v_{0\tau}(t, \tau),$$

$\psi_{j,1}$ – деяка функція з простору G_0 , $c_j(t)$ – стала інтегрування.

Формула (17) для $v_j(t, \tau)$, $j \geq 1$, дозволяє продовжити функції $v_j(t, \tau)$, $j \geq 1$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ наступним чином:

$$V_j(x, t, \tau) = u_j^-(x, t)\eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j \geq 1, \quad (18)$$

де $u_j^-(x, t)$, $j \geq 1$, визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$\Lambda u_j^-(x, t) = f_j^-(x, t), \quad (19)$$

$$u_j^-(x, t)|_\Gamma = v_j(t), \quad j \geq 1, \quad (20)$$

а диференціальний оператор Λ записується у вигляді

$$\Lambda = a_0(x)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x)u_0(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}.$$

Диференціальні рівняння (19) для визначення функцій $u_j^-(x, t)$, $j \geq 1$, отримано з рівняння (7) за допомогою граничного переходу при $\tau \rightarrow -\infty$ після підстановки в нього співвідношень (12) та (18). Зокрема, $f_1^-(x, t) = 0$.

Оскільки крива Γ трансверсальна характеристикам оператора Λ при всіх $t \in [0; T]$, то задача Коші (19), (20) коректно поставлена і відповідно до теореми Коші-Ковалевської при досить малих μ в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ має розв'язок $u_j^-(x, t) \in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$. Надалі припускаємо, що задача Коші (19), (20) має нескінченно диференційовний розв'язок в області $\{(x, t) : x - \varphi(t) \leq -\mu, t \in [0, T]\}$.

Отже, N -те наближення $Y_N(x, t, \varepsilon)$, $(x, t) \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]$, розв'язку рівняння (7) можна записати у вигляді

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} u_0(x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + u_j^-(x, t)], & (x, t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)], & (x, t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

де $D^- = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : \varphi(t) - x \geq \mu\}$, $D^+ = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : x - \varphi(t) \leq \mu\}$,

а функції $u_j^-(x, t)$, $j \geq 1$, визначені як розв'язки задач Коші (19), (20) як в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і в області $\{(x, t) : x - \varphi(t) \leq -\mu, t \in [0, T]\}$. Таке наближення розв'язку рівняння (7) при $\tau \rightarrow -\infty$ задовольняє рівняння (7) з точністю $O(\varepsilon^{N+2})$.

Якщо розв'язки задачі Коші (19), (20) визначені лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, то N -те наближення $Y_N(x, t, \varepsilon)$, $(x, t) \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]$, розв'язку рівняння (7) можна записати у вигляді

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)], & (x, t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in (D^+ \cup D^-) \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

і таке наближення розв'язку рівняння (7) при $\tau \rightarrow -\infty$ задовольняє рівняння (7) з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$.

3. Побудова розривних розв'язків для рівняння,

породжуючого для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо отриманий для рівняння (7) асимптотичний розв'язок, який зобразимо формулою [2]:

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = U_N(x, t, \varepsilon) + \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) + \varepsilon G(x, t, S, \varepsilon), \quad (21)$$

де $S = x - \varphi(t)$, а функції $F_N(x, t, S, \varepsilon)$, $G(x, t, S, \varepsilon)$, $U_N(x, t, \varepsilon)$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} F_N(x, t, S, \varepsilon) &= \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} V_j\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}\right); \\ G(x, t, S, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} V_0\left(t, \frac{S}{\varepsilon}\right) = -\frac{3}{\varepsilon} \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))} ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} \left(\frac{S}{\varepsilon} + C \right) \right); \\ U_N(x, t, \varepsilon) &= \begin{cases} u_0(x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + u_j^-(x, t)], & (x, t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in D^+ \cup \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases} \end{aligned}$$

якщо розв'язок задачі Коші (19), (20) визначено в області $\{(x, t) \in \mathbf{R} : x - \varphi(t) \leq -\mu, t \in [0; T]\}$ та

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t), \quad (x, t) \in D^+ \cup D^-,$$

якщо розв'язок задачі Коші (19), (20) визначено лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$.

Для функцій $U_N(x, t, \varepsilon)$, $F_N(x, t, S, \varepsilon)$, $G(x, t, S, \varepsilon)$ мають місце такі властивості:

Лема 1. Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12), $A(\varphi(t), t) > 0$, рівняння (16) має розв'язок для $t \in [0; T]$. Тоді для функції $G(x, t, S, \varepsilon)$ виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \langle \delta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G^2(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= \frac{24A(\varphi(t), t)\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0^2(\varphi(t))} \langle \delta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \frac{\partial G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial t}, f(S) \rangle &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) \langle \delta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \frac{\partial G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon \frac{\partial^3 G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x^j \partial S^{3-j}}, f(S) \rangle &= 0, \quad j = \overline{0, 3}; \end{aligned}$$

де функція $f \in C_0^\infty$, $\delta(S)$ – функція Дірака.

Доведення леми 1 безпосередньо впливає з обчислення відповідних границь. Так, зокрема, для довільної функції $f \in C_0^\infty$ маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{\varepsilon} \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))} \int_{-\infty}^{\infty} ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} \left(\frac{S}{\varepsilon} \right) + C \right) f(S) dS = \right. \\ &= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} f(0) = -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \langle \delta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G^2(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{9}{\varepsilon^2} \frac{A^2(\varphi(t), t)}{b_0^2(\varphi(t))} \int_{-\infty}^{\infty} ch^{-4} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} \left(\frac{S}{\varepsilon} \right) + C \right) f(S) dS = \\ &= \frac{24A(\varphi(t), t)\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0^2(\varphi(t))} f(0) = \frac{24A(\varphi(t), t)\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0^2(\varphi(t))} \langle \delta(S), f(S) \rangle. \end{aligned}$$

Лема 2. Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12), $A(\varphi(t), t) > 0$, рівняння (16) має розв'язок для $t \in [0; T]$ та мають місце умови ортогональності (15) при $j \geq 2$. Тоді для функції $F_N(x, t, S, \varepsilon)$ виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle F_N(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= u_1^-(x, t) \langle \theta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial t}, f(S) \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (u_1^-(x, t)) \langle \theta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} (u_1^-(x, t)) \langle \theta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial S}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial S}, f(S) \rangle &= u_1^-(x, t) \langle \delta(S), f(S) \rangle; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon \frac{\partial^3 F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x^j \partial S^{3-j}}, f(S) \rangle &= 0, \quad j = 0, 3, \end{aligned}$$

де функція $f \in C_0^\infty$, $\theta(S)$ – функція Хевісайда.

Лема 3. Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12), $A(\varphi(t), t) > 0$, рівняння (16) має розв'язок для $t \in [0; T]$ та мають місце умови ортогональності (15) при $j \geq 2$. Тоді для функцій $F_N(x, t, S, \varepsilon)$ та $G(x, t, S, \varepsilon)$ виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial x}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) G(x, t, S, \varepsilon), f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon G(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial F_N(x, t, S, \varepsilon)}{\partial S}, f(S) \rangle &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varepsilon F_N(x, t, S, \varepsilon) \frac{\partial G(x, t, S, \varepsilon)}{\partial S}, f(S) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

де функція $f \in C_0^\infty$.

Доведення лем 2 та 3 безпосередньо впливає з обчислення відповідних границь.

Отже, підставляючи асимптотичний розв'язок (21) в рівняння (7), поділивши обидві частини рівності на ε , спрямувши ε до нуля та скориставшись лемами 1–3, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} & \left(-\varphi'(t)a_0(x)g(t) + b_0(x)U_N(x,t,0)g(t) + \frac{1}{2}b_0(x)r(t) \right) \delta'(S) + \\ & + \left(a_0(x)g'(t) - \varphi'(t)a_0(x)f(x,t) + b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}g(t) + b_0(x)U_N(x,t,0)f(x,t) \right) \delta(S) + \\ & + \left(a_0(x)f'_t(x,t) + b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}f(x,t) + b_0(x)U_N(x,t,0)f'_x(x,t) \right) \theta(S) = 0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}, \\ r(t) &= \frac{24A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0^2(\varphi(t))}, \\ f(x,t) &= u_1^-(x,t), \end{aligned}$$

звідки, прирівнявши коефіцієнти при $\delta'(S)$, $\delta(S)$ та $\theta(S)$ до нуля, отримаємо

$$\begin{cases} -\varphi'(t)a_0(\varphi(t))g(t) + b_0(\varphi(t))U_N(\varphi(t),t,0)g(t) + \frac{1}{2}b_0(\varphi(t))r(t) = 0, \\ a_0(\varphi(t))g'(t) - \varphi'(t)a_0(\varphi(t))f(\varphi(t),t) + b_0(\varphi(t))\frac{\partial U_N(\varphi(t),t,0)}{\partial x}g(t) + b_0(\varphi(t))U_N(\varphi(t),t,0)f(\varphi(t),t) = 0, \\ a_0(x)f'_t(x,t) + b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}f(x,t) + b_0(x)U_N(x,t,0)f'_x(x,t) = 0, \quad x < \varphi(t). \end{cases}$$

Враховуючи вигляд функцій $g(t)$, $r(t)$, $f(x,t)$, знаходимо

$$\begin{aligned} & -\varphi'(t)a_0(\varphi(t)) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t) - A(\varphi(t),t) = 0; \\ & a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right) + \varphi'(t)a_0(\varphi(t))u_1^-(\varphi(t),t) + \\ & + b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)u_1^-(\varphi(t),t) = 0; \\ & a_0(x)\frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial t} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}u_1^-(x,t) + b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким чином, умова (8) для рівняння (7) справджується, якщо виконуються співвідношення (22).

Проаналізуємо систему (22). Перша рівність виконується згідно визначення функції $A(\varphi(t),t)$. Третя рівність системи теж виконується з огляду на процедуру продовження з кривої Γ сингулярної частини асимптотики. Розглянемо друге рівняння системи (22), яке еквівалентне такому звичайному диференціальному рівнянню

$$a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right) + b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right) + E_1(t) = 0, \quad (23)$$

де $u_0(x,t)$ – нульовий член регулярної частини асимптотики (11).

Враховуючи умови щодо функцій $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$, $A(\varphi(t),t)$ маємо, що розв'язок рівняння (23) існує.

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови лем 1–3. Тоді асимптотичний розв'язок $u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1})$, $N \geq 1$, породжує при $\varepsilon \rightarrow 0$ скачкоподібну функцію $u(x,t)$, яка є розв'язком незбуреного рівняння (6), а умова (23) є умовою типу Гюгоніо для скачкоподібного розв'язку $u(x,t)$ рівняння (6).

4. Висновки

В даній статті розв'язано задачу про існування розривних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розглядаючи це рівняння як породжуваче рівняння для сингулярно збуреного рівняння Кортвега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та використовуючи формулу для асимптотичного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортвега-де Фріза, отримано умови (так звані умови типу Гюгоніо) існування розривних розв'язків для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

1. Маслов В.П., Омелянов Г.А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124. 2. Маслов В.П., Омелянов Г.А. Об условиях типа Гюгоніо для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 5. – С. 172–182. 3. Олейник О.А. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "исчезающей вязкости" // Успехи мат. наук. – 1959. – Т. 14, № 2(86). – С. 160–164. 4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., 1953. 5. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.И. Асимптотичні розв'язки для однофазових солітоноподібних

розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С. 111 – 124. 6. Hopf E. On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order // Journ. Math. Mech. – 1969. – Vol. 19, № 6. – P. 483–487. 7. Samoylenko Yuliya. Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – Т. 3. – P. 1435 – 1441.

Надійшла до редколегії 25.08.09

УДК 517.9

Ю. Сидоренко, канд. фіз.-мат. наук, О. Чвартацький, студ.
E-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

БІНАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ І РІВНЯНЬ ЛАКСА

Запропоновано метод побудови точних розв'язків просторово-двовимірного узагальнення ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями за допомогою бінарних перетворень типу Дарбу.

A method for constructing exact solutions of the spatially two-dimensional generalization of hierarchy of the Kadomtsev-Petviashvili equations under nonlocal constraints using binary Darboux-type transformations is proposed.

1. Вступ

Далі ми наводимо необхідний мінімум позначень, які використовуються при формулюванні та доведенні основної теореми цієї роботи – теореми про бінарні перетворення типу Дарбу [1,4-7] для інтегродиференціальних зображень Лакса.

Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(N \times K)$ -матричними розв'язками лінійної інтегродиференціальної задачі

$$L\{\varphi\} := \alpha\varphi_y - \sum_{i=0}^n u_i \varphi^{(i)} + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, \varphi] = \varphi \Lambda, \quad (1)$$

та транспонованої задачі

$$L^T\{\psi\} := -\alpha\psi_y - \sum_{i=0}^n (-1)^i (u_i^T \psi)^{(i)} - \mathbf{r} M_0^T \Omega[\mathbf{q}, \psi] = \psi \tilde{\Lambda}, \quad (2)$$

з матричними $(N \times N)$ коефіцієнтами $u_i = u_i(x, y)$, $i = \overline{0, n}$ та $\alpha \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$. Λ , $\tilde{\Lambda}$ та M_0 – сталі матриці розмірності $(K \times K)$ та $(l \times l)$ відповідно; $q = q(x, y)$ та $r = r(x, y)$ – матричні функції розмірності $(N \times l)$; $\Omega[\mathbf{r}, \varphi]$, $\Omega[\mathbf{q}, \psi]$ – функції, що задовольняють умови: $\Omega_x[\mathbf{r}, \varphi] = \mathbf{r}^T \varphi$, $\Omega_x[\mathbf{q}, \psi] = \mathbf{q}^T \psi$.

Оператор Лакса L (1) вперше розглядався в роботах [2], [3] при побудові просторово-двовимірних узагальнень нелінійних систем математичної фізики, які виникають при нелокальних редукціях в матричній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі.

2. Основна теорема

Теорема.

1. Нехай функції f та g розмірності $(N \times 1)$ є розв'язками спектральних задач

$$L\{f\} := \alpha f_y - \sum_{i=0}^n u_i f^{(i)} + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, f] = f \lambda, \quad (3)$$

$$L^T\{g\} := -\alpha g_y - \sum_{i=0}^n (-1)^i (u_i^T g)^{(i)} - \mathbf{r} M_0^T \Omega[\mathbf{q}, g] = g \tilde{\lambda}, \quad (4)$$

з власними значеннями $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbf{C}$ відповідно, і функціями $\Omega[\mathbf{r}, f]$ та $\Omega[\mathbf{q}, g]$, де $\Omega_x[\mathbf{r}, f] = \mathbf{r}^T f$, $\Omega_x[\mathbf{q}, g] = \mathbf{q}^T g$.

Тоді функції $F := W\{f\} = f - \Phi\Omega[\psi, f]$ та $G := W^{-1, T}\{g\} = (W^T)^{-1}\{g\} = g - \Psi\Omega[\varphi, g]$ з оператором $W = I - \Phi\Omega[\psi, \cdot]$, де $\Phi = \Phi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}$, $\Psi^T = (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi^T$, задовольняють спектральні задачі

$$\hat{L}\{F\} = F\lambda, \quad (5)$$

$$\hat{L}^T\{G\} = G\tilde{\lambda}, \quad (6)$$

з інтегродиференціальними операторами $\hat{L}, \hat{L}^T$ такого вигляду

$$\hat{L} := WLW^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^n \hat{u}_i D^i + \Phi M \Omega[\Psi, \cdot] + \hat{\mathbf{q}} M_0 \Omega[\hat{\mathbf{r}}, \cdot], \quad (7)$$

$$\hat{L}^T := W^{-1, T} L^T W^T = -\alpha\partial_y - \sum_{i=0}^n (-1)^i D^i \hat{u}_i - \Psi M^T \Omega[\Phi, \cdot] - \hat{\mathbf{r}} M_0^T \Omega[\hat{\mathbf{q}}, \cdot], \quad (8)$$

де

$$M = C\Lambda - \tilde{\Lambda}^T C, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \Phi\Omega[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \Psi\Omega[\varphi, \mathbf{r}], \quad (10)$$

$\Omega[\Psi, F]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{r}}, F]$, $\Omega[\Phi, G]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{q}}, G]$ – функції, для яких виконуються умови: $\Omega_x[\Psi, F] = \Psi^T F$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{r}}, F] = \hat{\mathbf{r}}^T F$, $\Omega_x[\Phi, G] = \Phi^T G$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{q}}, G] = \hat{\mathbf{q}}^T G$.

2. Коефіцієнти $\hat{u}_l$, $l = \overline{0, n}$ перетвореного оператора $\hat{L}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{u}_l = u_l - \Phi \sum_{i=l+1}^n (-1)^{i-l-1} (\Psi^\top u_i)^{(i-l-1)} + \sum_{i=l+1}^n \sum_{j=0}^{i-l-1} \binom{i}{j} \binom{i-j-1}{i-j-l-1} u_i \varphi^{(j)} (\Psi^\top)^{(i-j-l-1)} - \\ - \sum_{i=l+2}^n \sum_{j=0}^{i-l-2} \sum_{k=0}^{i-l-j-2} (-1)^j \binom{i-j-1}{k} \binom{i-k-j-2}{i-k-j-l-2} \Phi (\Psi^\top u_i)^{(j)} \varphi^{(k)} (\Psi^\top)^{(i-k-l-j-2)}, \quad l = \overline{0, n-2}, \\ \hat{u}_{n-1} = u_{n-1} + u_n \Phi \Psi^\top - \Phi \Psi^\top u_n, \quad \hat{u}_n = u_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Доведення.

Нехай $\hat{L} := WLW^{-1}$ і $L\{f\} = f\lambda$, тоді $F := W\{f\} = f - \Phi\Omega[\psi, f]$ є розв'язком рівняння

$$\hat{L}\{F\} := WLW^{-1}\{W\{f\}\} = WL\{f\} = W\{f\lambda\} = W\{f\}\lambda = F\lambda.$$

Для отримання явного вигляду оператора $\hat{L}$ використовуватимемо наступні допоміжні формули:

$$\begin{aligned} \Psi^\top \Phi = (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Psi^\top \Phi (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} = [-(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}]_x \Rightarrow \\ \Omega[\Psi, \Phi] := -(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi^\top F = (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Psi^\top [f - \Phi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Omega[\psi, f]] = [(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Omega[\psi, f]]_x \Rightarrow \\ \Omega[\Psi, F] := (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Omega[\psi, f]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (I + \Phi\Omega[\Psi, \cdot])\{F\} = F + \Phi\Omega[\Psi, F] = W\{f\} + \Phi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1} \Omega[\psi, f] = f - \Phi\Omega[\psi, f] + \Phi\Omega[\psi, f] = f \Rightarrow \\ W^{-1} = I + \Phi\Omega[\Psi, \cdot]. \end{aligned} \quad (14)$$

W^{-1} (14) є оберненим оператором до $W = I - \Phi\Omega[\psi, \cdot]$.

Для функцій h_i , $i = \overline{1, 4}$ і диференціального оператора A виконуються наступні формули: (див. [7])

$$Ah_1 D^{-1} h_2 = (Ah_1 D^{-1} h_2)_+ + A\{h_1\} D^{-1} h_2, \quad (15)$$

$$h_1 D^{-1} h_2 A = (h_1 D^{-1} h_2 A)_+ + h_1 D^{-1} [A^\top \{h_2^\top\}]^\top, \quad (16)$$

$$h_1 D^{-1} h_2 h_3 D^{-1} h_4 = h_1 \Omega[h_2^\top, h_3] D^{-1} h_4 - h_1 D^{-1} \Omega[h_2^\top, h_3] h_4, \quad (17)$$

де в формулах (15)-(17) і далі для зручності з точки зору подальших технічних перетворень ми ввели такі позначення:

$$D^{-1} h := \Omega[h^\top, \cdot], \quad (18)$$

$$D^{-1} h A := \Omega[h^\top, A], \quad (19)$$

$$D^{-1} h_i D^{-1} h_j = \Omega[h_i, \Omega[h_j, \cdot]], \quad (20)$$

а символом $(B)_+$ позначається диференціальна частина інтегродиференціального оператора B .

Використовуючи формули (14)-(17) та позначення (18)-(20) для оператора

$$L = \alpha \partial_y - \sum_{i=0}^n u_i D^i + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, \cdot] := \alpha \partial_y + L_+ + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, \cdot], \quad (21)$$

шляхом безпосередніх обчислень ми отримуємо:

$$\begin{aligned} L \rightarrow WLW^{-1} &= (I - \Phi D^{-1} \Psi^\top) (\alpha \partial_y + L_+ + \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top) (I + \Phi D^{-1} \Psi^\top) = \\ &= (I - \Phi D^{-1} \Psi^\top) \alpha \partial_y (I + \Phi D^{-1} \Psi^\top) + (I - \Phi D^{-1} \Psi^\top) (L_+ + \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top) (I + \Phi D^{-1} \Psi^\top) = \\ &= W(\alpha \partial_y) W^{-1} + L_+ + \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top + L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top + \\ &+ \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top \Phi D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} \Psi^\top L_+ - \Phi D^{-1} \Psi^\top \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top - \\ &- \Phi D^{-1} \Psi^\top L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} \Psi^\top \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top \Phi D^{-1} \Psi^\top = \\ &= \alpha (\partial_y + \varphi_y D^{-1} \Psi^\top - \Phi \Omega[\psi, \varphi_y] D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} \Omega[\psi_y, \varphi] \Psi^\top + \Phi D^{-1} \psi_y^\top) + \\ &+ L_+ + (L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top)_+ - (\Phi D^{-1} \Psi^\top L_+)_+ - (\Phi D^{-1} \Psi^\top L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top)_+ + \\ &+ \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top + L_+ \{ \varphi \} D^{-1} \Psi^\top + \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top \Phi D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} (L_+ \{ \psi \})^\top - \\ &- \Phi D^{-1} \Psi^\top \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top - (\Phi D^{-1} \Psi^\top L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top)_- - \Phi D^{-1} \Psi^\top \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top \Phi D^{-1} \Psi^\top = \alpha \partial_y + \hat{L}_+ + \hat{L}_-, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} W(\alpha \partial_y) W^{-1} &= (I - \Phi D^{-1} \Psi^\top) \alpha \partial_y (I + \Phi D^{-1} \Psi^\top) = \\ &= \alpha (\partial_y + \varphi_y D^{-1} \Psi^\top - \Phi \Omega[\psi, \varphi_y] D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} \Omega[\psi_y, \varphi] \Psi^\top + \Phi D^{-1} \psi_y^\top); \\ \hat{L}_+ &= L_+ + (L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top)_+ - (\Phi D^{-1} \Psi^\top L_+)_+ - (\Phi D^{-1} \Psi^\top L_+ \Phi D^{-1} \Psi^\top)_+ := \\ &= L_+ + U_{+1} - U_{+2} - U_{+3} = \sum_{i=0}^n \hat{u}_i D^i. \end{aligned} \quad (22)$$

Використовуючи правило Лейбніца для псевдодиференціальних операторів, отримаємо вигляд U_{+1} , U_{+2} , U_{+3} :

$$\begin{aligned} U_{+1} &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=l+1}^n \sum_{j=0}^{i-l-1} \binom{i}{j} \binom{i-j-1}{i-j-l-1} u_i \varphi^{(j)} (\Psi^\top)^{(i-j-l-1)} D^l \\ U_{+2} &= \Phi \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=l+1}^n (-1)^{i-l-1} (\Psi^\top u_i)^{(i-l-1)} D^l \\ U_{+3} &= \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{i=l+2}^n \sum_{j=0}^{i-l-2} \sum_{k=0}^{i-l-j-2} (-1)^j \binom{i-j-1}{k} \binom{i-k-j-2}{i-k-j-l-2} \Phi (\Psi^\top u_i)^{(j)} \varphi^{(k)} (\Psi^\top)^{(i-k-l-j-2)} D^l \end{aligned}$$

Використавши ці формули, отримаємо явний вигляд функцій $\hat{u}_i$, $i = 1 \dots n$:

$$\begin{aligned} \hat{u}_l &= u_l + \sum_{i=l+1}^n \sum_{j=0}^{i-l-1} \binom{i}{j} \binom{i-j-1}{i-j-l-1} u_i \varphi^{(j)} (\Psi^\top)^{(i-j-l-1)} - \Phi \sum_{i=l+1}^n (-1)^{i-l-1} (\Psi^\top u_i)^{(i-l-1)} - \\ &- \sum_{i=l+2}^n \sum_{j=0}^{i-l-2} \sum_{k=0}^{i-l-j-2} (-1)^j \binom{i-j-1}{k} \binom{i-k-j-2}{i-k-j-l-2} \Phi (\Psi^\top u_i)^{(j)} \varphi^{(k)} (\Psi^\top)^{(i-k-l-j-2)}, \quad l = \overline{0, n-2}, \\ \hat{u}_{n-1} &= u_{n-1} + u_n \varphi \Psi^\top - \Phi \Psi^\top u_n = u_{n-1} + [u_n, \varphi(C + \Omega[\Psi, \varphi])^{-1} \Psi^\top], \\ \hat{u}_n &= u_n. \end{aligned}$$

Інтегральна частина $\hat{L}_-$ оператора $\hat{L}$ отримується за допомогою формул (15)–(17) та означення функцій Φ і Ψ . Вона матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{L}_- &= (L\{\varphi\} - \Phi \Omega[\Psi, L\{\varphi\}]) D^{-1} \Psi^\top - \Phi D^{-1} (L^\top \{\Psi\} - \Psi \Omega[\varphi, L^\top \{\Psi\}])^\top + \mathbf{q} M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top - \\ &- \mathbf{q} M_0 D^{-1} (\Psi \Omega[\varphi, \mathbf{r}])^\top - \Phi \Omega[\Psi, \mathbf{q}] M_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top + \Phi \Omega[\Psi, \mathbf{q}] M_0 D^{-1} (\Psi \Omega[\varphi, \mathbf{r}])^\top. \end{aligned}$$

Використавши формули

$$\begin{aligned} \Omega[\Psi, L\{\varphi\}] &= \Omega[\Psi, \varphi \Lambda] = \Omega[\Psi, \varphi] \Lambda, \\ \Omega[\varphi, L^\top \{\Psi\}] &= \Omega[\varphi, \Psi \tilde{\Lambda}] = \Omega[\varphi, \Psi] \tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}^\top \Omega[\varphi, \Psi])^\top \end{aligned}$$

і визначення функцій

$$\Phi := \varphi(C + \Omega[\Psi, \varphi])^{-1}, \quad \Psi := \psi(C^\top + \Omega[\varphi, \Psi])^{-1},$$

отримаємо

$$\hat{L}_- = \Phi(C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C) D^{-1} \Psi^\top + (\mathbf{q} - \Phi \Omega[\Psi, \mathbf{q}]) M_0 D^{-1} (\mathbf{r} - \Psi \Omega[\varphi, \mathbf{r}])^\top. \quad (23)$$

Таким чином, оператор перетворення подібності $\hat{L} := \alpha \partial_y + \hat{L}_+ + \hat{L}_-$ (22), (23) має вигляд (7) і F є розв'язком нової спектральної задачі (5) з потенціалами $\Omega[\Psi, F]$ (13) та

$$\begin{aligned} \Omega[\hat{\mathbf{r}}, F] &= \Omega[\mathbf{r}, f] - \Omega[\hat{\mathbf{r}}, \varphi] (C + \Omega[\Psi, \varphi])^{-1} \Omega[\Psi, f], \\ \Omega_x[\hat{\mathbf{r}}, F] &= \hat{\mathbf{r}}^\top F. \end{aligned} \quad (24)$$

Наслідок 1.

Нехай задовольняється рівняння Лакса $L_t = [M, L](:= ML - LM)$ з оператором $M = \sum_{i=0}^m v_i D^i$; функції φ та ψ – фіксовані розв'язки еволюційних рівнянь

$$\varphi_t = M_t^\top \varphi, \quad \psi_t = -M^\top \{\psi\}, \quad (25)$$

а функції f та g – довільні розв'язки рівнянь

$$f_t = M_t \{f\}, \quad g_t = -M^\top \{g\}. \quad (26)$$

Тоді перетворені оператори $\hat{L} := WLW^{-1}$ та $\hat{M} := \partial_t - W(\partial_t - M)W^{-1} = \sum_{i=0}^m \hat{v}_i D^i$, де $W = I - \Phi \Omega[\Psi, \cdot]$, задовольняють рівняння Лакса $\hat{L}_t = [\hat{M}, \hat{L}]$, а функції $F := W\{f\}$ та $G := W^{-1, \top} \{g\}$ є розв'язками нових еволюційних рівнянь

$$F_t = \hat{M} \{f\}, \quad G_t = -\hat{M}^\top \{g\}. \quad (27)$$

Зауваження 1.

Теорема 1 є природним узагальненням відповідної Теорема 1 з роботи [7].

Наслідок 2.

Нехай в рівностях (1)–(4) $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0$, $\lambda = \tilde{\lambda} = 0$.

Тоді при перетворенні подібності оператор $L = \alpha \partial_y - \sum_{i=0}^n u_i D^i + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, \cdot]$ перейде в оператор $\hat{L} := WLW^{-1} = \alpha \partial_y - \sum_{i=0}^n \hat{u}_i D^i + \hat{\mathbf{q}} M_0 \Omega[\hat{\mathbf{r}}, \cdot]$, де коефіцієнти $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{u}_i$, $i = \overline{0, n}$ мають вигляд (10), (11), а потенціали $\Omega[\mathbf{r}, f]$, $\Omega[\mathbf{q}, g]$, $\Omega[\hat{\mathbf{r}}, F]$, $\Omega[\hat{\mathbf{q}}, G]$, згідно з формулами Лагранжа для систем (2)–(3) можна записати у явному вигляді, наприклад

$$\Omega[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0, t_0, y_0)}^{(x, t, y)} P[\mathbf{r}, f] dx + Q[\mathbf{r}, f] dt + R[\mathbf{r}, f] dy, \quad (28)$$

де

$$P[\mathbf{r}, f] = \mathbf{r}^\top f, \quad (29)$$

$$Q[\mathbf{r}, f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{v}_i)^{(i)} f^{(i-j-1)}, \quad (30)$$

$$R[\mathbf{r}, f] = \alpha^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{u}_i)^{(i)} f^{(i-j-1)} + \alpha^{-1} \Omega_0[\mathbf{r}, q] \mathbf{M}_0 \Omega_0[\mathbf{r}, f], \quad (31)$$

а $\Omega_0[\mathbf{r}, q]$ та $\Omega_0[\mathbf{r}, f]$ мають наступний вигляд

$$\Omega_0[\mathbf{r}, q] = \int_{(x_0, t_0, y)}^{(x, t, y)} P[\mathbf{r}, q] dx + Q[\mathbf{r}, q] dt,$$

$$\Omega_0[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0, t_0, y)}^{(x, t, y)} P[\mathbf{r}, f] dx + Q[\mathbf{r}, f] dt.$$

3. Висновки

Запропонований в роботах [2-3] метод інтегрування нелінійних рівнянь, асоційованих з оператором Лакса (1) не дозволяє накладення на оператор L (1) додаткових, так званих "фізичних", редукцій типу ермітового спряження навіть в просторово-одновимірному випадку при $\alpha = 0$ (див. [1]). Результати, отримані нами в попередньому розділі усувають ці проблеми, що буде продемонстровано в окремій роботі.

1 Беркелю Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Теорема Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (Нк-сКР). // Математичні студії. – 2006. – Т. 25, №1. – С. 38–64. 2 Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С. 19–23. 3 Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78–97. 4 Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons. – Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. 5 Sydorenko Yu. Binary transformation and (2+1)-dimensional integrable systems, *Ukr. math. journ.*, 2002, V.52, №11, P.1531–1550. 6 Sydorenko Yu.M. Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Математичні студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С. 181–192. 7 Sydorenko Yu. Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev–Petviashvili (сКР) Flows // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 470–477.

Надійшла до редколегії 03.09.09

УДК 519.21

А. Єршов, асист.
E-mail: a_yershov@univ.kiev.ua

ПРО СЛАБУ ЗБІЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ЛАМАНИХ ДО ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЙНОГО ТИПУ

Досліджено умови, при яких випадкова ламана, побудована за послідовністю серій однорідних ланцюгів Маркова, слабо збігається до процесів дифузійного типу при вельми нерегулярній залежності локальних характеристик цих ланцюгів від номера серії.

Conditions, under which a random polygon, that is built by a sequence of series of homogeneous Markov chains, weakly converges to diffusion type processes with quite irregular dependence of the local characteristics of these chains on the number of the series, are studied.

1. Вступ

У даній роботі продовжено дослідження достатніх умов збіжності випадкових ламаних до процесів дифузійного типу, розпочате у [3]. За рахунок введення додаткової умови (умова (I7) в теоремі 1) вдалось значно послабити ряд інших умов, при яких має місце слабка збіжність випадкових ламаних, побудованих за послідовністю серій однорідних ланцюгів Маркова, до процесів дифузійного типу. Як і раніше, припускається можливість вельми нерегулярної залежності локальних характеристик цих ламаних від номера серії.

Розглянемо послідовність випадкових величин $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$, пов'язаних в кожній серії в однорідний ланцюг Маркова і нехай $0 = t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nk_n} = 1$ – розбиття відрізка $[0, 1]$, таке, що $\lambda_n = \max_k [t_{nk+1} - t_{nk}] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Позначимо: $\Delta t_{nk} = t_{nk+1} - t_{nk}$, $\Delta \xi_{nk} = \xi_{nk+1} - \xi_{nk}$, F_{nk} – мінімальна σ -алгебра, породжена випадковими величинами $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk}$,

$$a_n(x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} E \{ \Delta \xi_{nk} \mid \xi_{nk} = x \}, \quad \sigma_n^2(x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} E \{ [\Delta \xi_{nk}]^2 \mid \xi_{nk} = x \} - a_n^2(x) \Delta t_{nk},$$

$$\Delta \omega_{nk} = [\Delta \xi_{nk} - a_n(\xi_{nk}) \Delta t_{nk}] \sigma_n^{-1}(\xi_{nk}) \quad (\sigma_n(x) \neq 0), \quad w_n(t) = \sum_{t_{nk} < t} \Delta \omega_{nk}.$$

Нехай $\zeta_n(t)$ – випадкова ламана з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}) , $\zeta_{nk} = G_n(\xi_{nk})$, де $G_n(x)$ – певна сім'я двічі неперервно диференційовних функцій.

У подальшому будемо дотримуватись наступних позначень:

$$LG_n(x) = G'_n(x) a_n(x) + \frac{1}{2} G''_n(x) \sigma_n^2(x); \quad \eta_i = \int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}} \int_{\xi_{ni}}^x [G''_n(u) - G''_n(\xi_{ni})] du dx; \quad P_n^{(N)} = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |\zeta_n(t)| > N \right\};$$

$\chi_A(x)$ – індикатор множини A ; $\chi_{ni}^{(N)} = \chi_{[-N, N]}(\zeta_{ni})$; K, C з різними індексами – сталі, значення яких несуттєві.

2. Компактність

Теорема 1. Нехай існує сім'я двічі неперервно диференційовних функцій $G_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, така, що:

(I₁) для певної сталої $K > 0$ виконується нерівність $[LG_n(x)]^2 + [G_n'(x)\sigma_n(x)]^2 \leq K(1 + [G_n(x)]^2)$ при всіх x і n ;

(I₂) для довільного $N > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} |\eta_i| \chi_{ni}^{(N)} \right)^2 = 0$;

(I₃) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left(G_n''(\xi_{ni}) \left| \Delta \xi_{ni} \right|^4 \chi_{ni}^{(N)} \right) = 0$;

(I₄) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} \left| G_n''(x) \left[a_n^2(x) + |a_n(x)\sigma_n(x)| \right] \right| = 0$;

(I₅) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} \left| G_n''(x) \sigma_n^2(x) \right| = 0$;

(I₆) $E[G_n(\xi_{n0})]^2 \leq C$;

(I₇) $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_k |\zeta_{nk}| > N \right\} = 0$.

Тоді можна вибрати підпоследовність $n' \rightarrow \infty$, ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ і випадкові процеси $\tilde{\zeta}_{n'}(t)$, $\tilde{\zeta}_0(t)$ на цьому просторі так, щоб всі скінченновимірні розподіли процесу $\tilde{\zeta}_{n'}(t)$ співпадали з відповідними скінченновимірними розподілами процесу $\zeta_{n'}(t)$ і $\tilde{\zeta}_{n'}(t) \xrightarrow{\tilde{P}} \tilde{\zeta}_0(t)$ для кожного $t \geq 0$ при $n' \rightarrow \infty$.

Доведення.

Для доведення теореми достатньо переконатися [4], що виконуються дві умови:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} P \{ |\zeta_n(t)| > C \} = 0; \quad (1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t' - t| \leq h} P \{ |\zeta_n(t'') - \zeta_n(t')| > \varepsilon \} = 0 \text{ для довільного } \varepsilon > 0. \quad (2)$$

Умова (1) одразу випливає з (I₇).

Щоб довести (2), скористаємось представленням

$$\zeta_{nk+1} = \zeta_{n0} + \sum_{i=0}^k [\zeta_{ni+1} - \zeta_{ni}] = \zeta_{n0} + \alpha_{nk+1} + \gamma_{nk+1} + \beta_{nk+1}, \quad k = 0, k_n - 1,$$

$$\text{де } \alpha_{nk} = \sum_{i=0}^{k-1} LG_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni}, \quad \gamma_{nk} = \sum_{i=0}^{k-1} G_n'(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \Delta \omega_{ni},$$

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} G_n''(\xi_{ni}) \left[a_n^2(\xi_{ni}) (\Delta t_{ni})^2 + 2 a_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} \Delta \omega_{ni} + \sigma_n^2(\xi_{ni}) ((\Delta \omega_{ni})^2 - \Delta t_{ni}) \right] + \sum_{i=0}^{k-1} \eta_i.$$

Розглянемо випадкову ламану з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}) , тобто $\zeta_n(t) = \zeta_{nk} + \frac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}} \Delta \zeta_{nk}$ при $t_{nk} \leq t \leq t_{n(k+1)}$.

Аналогічно будемо розглядати випадкові ламані $\alpha_n(t)$, $\gamma_n(t)$, $\beta_n(t)$ з вершинами, відповідно, в точках (t_{nk}, α_{nk}) , (t_{nk}, γ_{nk}) , (t_{nk}, β_{nk}) . Тоді при всіх $t \in [0, 1]$

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) + \alpha_n(t) + \gamma_n(t) + \beta_n(t). \quad (3)$$

Використовуючи умови (I₁), (I₇) та той факт, що γ_{nk} є мартингальною послідовністю можна довести, що мають місце співвідношення

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t' - t| \leq h} P \{ |\alpha_n(t'') - \alpha_n(t')| > \varepsilon \} = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t' - t| \leq h} P \{ |\gamma_n(t'') - \gamma_n(t')| > \varepsilon \} = 0. \quad (5)$$

$$\text{Позначимо } \beta_{nk}^{(N)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} G_n''(\xi_{ni}) \left[a_n^2(\xi_{ni}) (\Delta t_{ni})^2 + 2 a_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} \Delta \omega_{ni} + \sigma_n^2(\xi_{ni}) ((\Delta \omega_{ni})^2 - \Delta t_{ni}) \right] \chi_{ni}^{(N)} + \sum_{i=0}^{k-1} \eta_i \chi_{ni}^{(N)}.$$

Використовуючи оцінку

$$E \sup_k |\beta_{nk}^{(N)}|^2 \leq 4 \left\{ \frac{1}{4} \lambda_n^2 \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G_n''(x) a_n^2(x)|^2 + 4 \lambda_n^2 \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G_n''(x) a_n(x) \sigma_n(x)|^2 + \right. \\ \left. + 16 \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left[(G_n''(\xi_{ni}))^2 (\Delta \xi_{ni})^4 \chi_{ni}^{(N)} \right] + 16 \lambda_n^3 \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G_n''(x) a_n^2(x)|^2 + 2 \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G_n''(x) \sigma_n^2(x)|^2 + E \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} |\eta_i| \chi_{ni}^{(N)} \right)^2 \right\}$$

та умови $(I_2) - (I_5)$, маємо

$$E \sup_k |\beta_{nk}^{(N)}|^2 \leq C(n, N), \quad (6)$$

де $C(n, N) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ для довільного $N > 0$.

Зі співвідношення (6) отримуємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t'-t''| \leq h} P\{|\beta_n(t'') - \beta_n(t')| > \varepsilon\} = 0. \quad (7)$$

Зі співвідношень (3)–(5) та (7) випливає (2), а отже, і остаточне доведення теореми.

3. Збіжність до процесів дифузійного типу

В умовах теореми 1 неважко переконатись, що збіжність типу (1) має місце для кожного з процесів $\alpha_n(t)$, $\gamma_n(t)$ і $\beta_n(t)$. Для процесу $w_n(t) = \sum_{t_{nk} < t} \Delta \omega_{nk}$ також виконуються умови вигляду (1) та (2).

Тому, згідно з [4], можна вибрати підпоследовність $n' \rightarrow \infty$, ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ і випадкові вектори $\tilde{\eta}_{n'}(t) = (\tilde{\zeta}_{n'}(t), \tilde{\alpha}_{n'}(t), \tilde{\gamma}_{n'}(t), \tilde{\beta}_{n'}(t), \tilde{w}_{n'}(t))$, $\tilde{\eta}_0(t) = (\tilde{\zeta}_0(t), \tilde{\alpha}_0(t), \tilde{\gamma}_0(t), \tilde{\beta}_0(t), \tilde{w}_0(t))$ на цьому просторі так, щоб всі скінченновимірні розподіли процесу $\tilde{\eta}_{n'}(t)$ співпадали зі скінченновимірними розподілами процесу $\eta_{n'}(t) = (\zeta_{n'}(t), \alpha_{n'}(t), \gamma_{n'}(t), \beta_{n'}(t), w_{n'}(t))$ і для кожного $t \geq 0$ відповідні компоненти процесу $\tilde{\eta}_{n'}(t)$ збігалися за ймовірністю при $n' \rightarrow \infty$ до відповідних компонентів процесу $\tilde{\eta}_0(t)$. Можна показати [2], що співвідношення, які пов'язують компоненти процесу $\eta_{n'}(t)$ мають місце і для компонентів процесу $\tilde{\eta}_{n'}(t)$. Тому в подальшому для простоти будемо вважати, що $n' = n$ і компоненти самого процесу $\eta_n(t)$ збігаються за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$ до відповідних компонентів процесу $\eta_0(t) = (\zeta_0(t), \alpha_0(t), \gamma_0(t), \beta_0(t), w_0(t))$.

Лема 1. Нехай виконуються умова (I_7) , а також наступна умова:

$$(I_8) \text{ для довільного } N > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left(\left| \frac{\Delta \xi_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^4 \chi_{ni}^{(N)} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^3 \sup_{|G_n(x)| \leq N} \left| \frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^4 = 0.$$

Тоді граничний процес $w_0(t)$ – вінерів.

Доведення. Введемо процес $w_n^{(N)}(t) = \sum_{t_{nk} < t} \Delta \omega_{nk}^{(N)}$, де $\Delta \omega_{nk}^{(N)} = \Delta \omega_{nk} \chi_{nk}^{(N)}$.

Міркуючи аналогічно до [1, с. 530], але вже стосовно процесу $w_n^{(N)}(t)$, можна довести, що виконується співвідношення $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| E e^{\sum_{k=0}^{k_n-1} \lambda_{nk} \Delta \omega_{nk}^{(N)}} - e^{-\sum_{k=0}^{k_n-1} \frac{\lambda_{nk}^2}{2} \Delta t_{nk}} \right| = 0$. Після цього, довівши, що аналогічна збіжність має місце і для

самих процесів $w_n(t)$, отримуємо остаточне доведення леми.

Теорема 2. Нехай виконуються умови $(I_1) - (I_8)$. Припустимо, що існують неперервні функції $a_0(y)$, $\sigma_0(y)$, такі, що для довільного $N > 0$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} E \left([LG_n(\xi_{nk}) - a_0(G_n(\xi_{nk}))] \chi_{nk}^{(N)} \right) \Delta t_{nk} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} E \left([G'_n(\xi_{nk}) \sigma_n(\xi_{nk}) - \sigma_0(G_n(\xi_{nk}))]^2 \chi_{nk}^{(N)} \right) \Delta t_{nk} = 0$;
3. стохастичне рівняння

$$\zeta_0(t) = \zeta_0(0) + \int_0^t a_0(\zeta_0(s)) ds + \int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s)) dw_0(s) \quad (8)$$

має єдиний слабкий розв'язок.

Тоді випадкова ламана $\zeta_n(t)$ слабо збігається при $n \rightarrow \infty$ до розв'язку $\zeta_0(t)$ рівняння (8).

Доведення. Спершу покажемо, що

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \alpha_n(t) - \int_0^t a_0(\zeta_n(s)) ds \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Для цього скористаємось нерівністю $\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \alpha_n(t) - \int_0^t a_0(\zeta_n(s)) ds \right| \leq S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$, де $S_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{k_n-1} |LG_n(\xi_{ni}) - a_0(\zeta_{ni})| \Delta t_{ni}$,

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}} |a_0(\zeta_n(s)) - a_0(\zeta_n(t_{ni}))| ds.$$

З умови (I₇), умови 1 теореми 2 та нерівності $P\{S_n^{(1)} > \varepsilon\} \leq P_n^{(N)} + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k_n-1} E(|LG_n(\xi_{ni}) - a_0(\zeta_{ni})| \chi_{ni}^{(N)}) \Delta t_{ni}$ впливає збіжність $S_n^{(1)} \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Доведення збіжності $S_n^{(2)} \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$ можна провести аналогічно до того, як це було зроблено у [3], з урахуванням умови (I₇).

Таким же чином доводимо збіжності

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t a_0(\zeta_n(s)) ds - \int_0^t a_0(\zeta_0(s)) ds \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \gamma_n(t) - \int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s)) dw_n(s) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s)) dw_n(s) - \int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s)) dw_0(s) \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (12)$$

Далі, використовуючи нерівність

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \zeta_n(t) - \zeta_0(0) - \int_0^t a_0(\zeta_0(s)) ds - \int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s)) dw_0(s) \right| \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \alpha_n(t) - \int_0^t a_0(\zeta_0(s)) ds \right| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \gamma_n(t) - \int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s)) dw_0(s) \right| + |\zeta_n(0) - \zeta_0(0)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_n(t)|, \end{aligned}$$

збіжності (9)-(12) та збіжність $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_n(t)| \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$, яка має місце внаслідок (6) та (I₇), отримуємо

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \zeta_n(t) - \zeta_0(0) - \int_0^t a_0(\zeta_0(s)) ds - \int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s)) dw_0(s) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad (13)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Отже, існує підпослідовність $n'' \rightarrow \infty$ послідовності n' така, що збіжність (13) має місце з ймовірністю 1 при $n'' \rightarrow \infty$, а отже, і $F(\zeta_{n''}(t)) \rightarrow F(\zeta_0(t))$ з ймовірністю 1 при $n'' \rightarrow \infty$ для довільного неперервного на просторі $C[0,1]$ функціонала F , тобто [1] має місце слабка збіжність процесу $\zeta_{n''}(t)$ до процесу $\zeta_0(t)$. Таким чином, граничні процеси для послідовності процесів $\zeta_n(t)$ є розв'язками рівняння (8). Із слабкої єдиності розв'язку рівняння (8) випливає остаточне доведення теореми 2.

Наслідок. Якщо в теоремі 2 не вимагати єдиності слабого розв'язку рівняння (8), то послідовність випадкових ламаних $\zeta_n(t)$ слабо компактна і граничні точки цієї послідовності є розв'язками рівняння (8).

Теорема 3. Нехай виконуються умови (I₂) – (I₈), а також умови

(I₉) для певної сталої $K > 0$ має місце нерівність $|LG_n(x)|^2 + |G'_n(x)\sigma_n(x)|^2 \leq K$,

(I₁₀) існує таке δ , що $G'_n(x)\sigma_n(x) \geq \delta > 0$.

Якщо існують функції $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$, які є неперервними за виключенням лише скінченного числа точок розриву першого роду на відрізку $[-N_1; N_1]$ для довільного $N_1 < \infty$, для яких виконуються умови 1. – 3. теореми 2, то випадкова ламана $\zeta_n(t)$ слабо збігається при $n \rightarrow \infty$ до розв'язку $\zeta_0(t)$ рівняння (8).

Доведення. Як і при доведенні теореми 2 тут досить показати, що мають місце аналоги збіжностей (9) – (12). Для цього беремо довільне $N_1 > 0$. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_m$ – всі точки розриву функцій $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$ на відрізку $[-N_1; N_1]$. На цьому відрізку розглянемо множину $A_{N_1}^{(\delta)} = \bigcup_{k=1}^m \{x : |x - x_k| < \delta\}$ і на цій множині згладимо функції $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$ до неперервності.

Позначимо згладжені функції через $a^{(\delta)}(x)$, $\sigma^{(\delta)}(x)$. Величину $\delta > 0$ виберемо достатньо малою, щоб $A_{N_1}^{(\delta)} \subset [-N_1; N_1]$.

Для доведення аналога збіжності (9) досить показати, що і в цьому випадку $S_n^{(2)} \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \text{Для довільного } \varepsilon > 0 \quad P\{S_n^{(2)} > \varepsilon\} \leq P_n^{(N)} + \frac{2}{\varepsilon} E \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}} |a_0^{(\delta)}(\zeta_n(s)) - a_n^{(\delta)}(\zeta_n(t_{ni}))| \chi_{|x| \leq N}(\zeta_n(s)) ds + \\ & + \frac{2}{\varepsilon} E \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}} |a_0(\zeta_n(s)) - a_0^{(\delta)}(\zeta_n(s))| \chi_{|x| \leq N}(\zeta_n(s)) ds + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}} E |a_0(\zeta_n(t_{ni})) - a_0^{(\delta)}(\zeta_n(t_{ni}))| \chi_{|x| \leq N}(\zeta_n(t_{ni})) ds. \end{aligned}$$

Вибравши величину N достатньо великою, а саме $N > N_1$, отримаємо $A_{N_1}^{(\delta)} \subset [-N; N]$, і, з урахуванням цього, подальше доведення теореми можна провести подібно до того, як це було зроблено у [3].

4. Висновки

Розглянуто послідовність серій однорідних ланцюгів Маркова ξ_{nk} і випадкові ламані з вершинами в точках $(t_{nk}, G_n(\xi_{nk}))$, де $G_n(x)$ – достатньо гладкі функції. Досліджено, при яких умовах буде мати місце компактність таких ламаних (теорема 1) та їх збіжність до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (теорема 2, 3).

1. Гухман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М., 1965. 2. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. – М., 1977. 3. Кулініч Г.Л., Єршов А.В. Збіжність послідовності ланцюгів Маркова до процесів дифузійного типу // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2008. – Вип. 78. – С. 103-118. 4. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. – К., 1961.

Надійшла до редколегії 02.02.09

УДК 519.21

Д. Каплуненко, асп.
E-mail: darya_mk@bigmir.net

ГРАНИЦЯ ДЛЯ СПРАВЕДЛИВОЇ ВАРТОСТІ КОНТРАКТУ З ОПЦІОНОМ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ З ВИПАДКОВОЮ ЕВОЛЮЦІЄЮ НЕРИЗИКОВОГО АКТИВУ

У даній статті описано всі можливі граничні процеси дискретної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлено умови збіжності до цих процесів. Знайдено границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

In this article all possible limit processes for discrete model with stochastic evolution of risk and riskfree asset are described. Conditions of such convergence are obtained. Limits of rational option price for this kind of evolutions are determined.

1. Вступ

Одним з основних завдань фінансової математики є побудова відповідних дійсності математичних моделей еволюції вартості активів, які еволюціонують випадково, і розрахунку на їх основі справедливої ціни контракту з опціоном. У даній роботі досліджується модель, в якій випадковій еволюції підлягають два ризикових активи: банківський рахунок і вартість акції. Важливим є врахування впливу на справедливу вартість контракту з опціоном і другого ризикового активу – банківського рахунку. Метою роботи є вивчення всіх можливих граничних процесів дискретної багатоперіодичної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлення умов збіжності до цих процесів, а також знаходження границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

2. Постановка задачі

Вважаємо, що на часовому інтервалі $[1, N]$ еволюція ставки відсотка є випадковою і відбувається за законом [1]

$$R_n = \prod_{i=1}^n (1 + r_i) = (1 + r_n) R_{n-1}, \quad R_0 = 1, \quad n = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $r_1, r_2, \dots, r_N$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – r_1 і r_2 з ймовірностями $P(r_i = r_1) = 1 - p$, $P(r_i = r_2) = p$, $0 < p < 1$. Припустимо, що еволюція вартості облігації відбувається за законом

$$B_n = R_n B_0 = (1 + r_n) B_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2)$$

де B_0 – початкова вартість облігації. Також припустимо, що еволюція вартості ризикового активу – акції описується на тому ж проміжку часу $[1, N]$ за законом [1]

$$S_n = \prod_{i=1}^n (1 + \rho_i) S_0 = (1 + \rho_n) S_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де S_0 – початкова вартість акції, тобто її вартість у нульовий момент часу. Послідовність випадкових величин ρ_i , $i = \overline{1, N}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – b_1 і b_2 з ймовірностями $P(\rho_i = b_1) = p$, $P(\rho_i = b_2) = 1 - p$, $0 < p < 1$.

Щоб урахувати спостережуваний в економічній дійсності факт, який полягає в тому, що з ростом ставки відсотка вартість акції спадає, слід вважати, що і послідовність $\{\rho_i\}_{i=1}^N$, і послідовність $\{r_i\}_{i=1}^N$ означені на одному й тому ж ймовірнісному просторі Ω , який можна ототожнити з $\Omega = \{-1, 1\}^N$, через те, що між послідовністю незалежних однаково розподілених величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ і кожною з послідовностей $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ і $\{r_i\}_{i=1}^N$ існує взаємно однозначна відповідність, де випадкова величина набуває два значення – $+1$ та -1 , причому $P(\varepsilon_i = 1) = p$, $P(\varepsilon_i = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Емпірично спостережуваний факт буде враховано, якщо задовольнятимуться умови $-1 < b_1 < r_1 < r_2 < b_2$,

$$S_n = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \ln(1+p_i)\right\} S_0, B_n = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \ln(1+r_i)\right\} B_0,$$

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \sum_{i=1}^n \ln(1+p_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+b_2}{1+b_1} - \ln(1+b_1)(1+b_2)\right), \quad (4)$$

$$\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right) = \sum_{i=1}^n \ln(1+r_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} - \ln(1+r_1)(1+r_2)\right). \quad (5)$$

Після встановлення теорем про еволюцію ризикового активу в континуальній границі та визначення конкретних асимптотик, для яких ці границі існують, ставиться задача відшукування границі для справедливої ціни контракту з опціоном дискретної моделі з випадковою еволюцією неризикового активу.

Справедлива ціна контракту з опціоном Європейського типу визначається наступною формулою:

$$C_N = S_0 \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k (1-\bar{p})^{N-k} - KL^N \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k (1-\bar{p})^{N-k}, \quad (6)$$

де

$$\bar{p} = \frac{(b_2 - r_1)(1+b_1)}{(r_2 - b_1)(1+b_2) + (b_2 - r_1)(1+b_1)}, \quad \bar{p} = \frac{b_2 - r_1}{(b_2 - r_1) + (r_2 - b_1)},$$

$$L = \frac{(b_2 - r_1) + (r_2 - b_1)}{(b_2 - r_1)(1+r_2) + (r_2 - b_1)(1+r_1)}, \quad k_0 = \left\lceil \frac{\ln K - \ln(1+b_2)^N S_0}{\ln(1+b_1)(1+b_2)^{-1}} \right\rceil,$$

де S_0 – початкова вартість акції, тобто її вартість у нульовий момент часу, K – страйкова ціна, обумовлена в контракті. Слід зауважити, що наведена формула для C_N справедлива лише при $k_0 > 0$. Якщо ж $k_0 \leq 0$, то $C_N = 0$.

3. Теорема про еволюцію ризикового активу з еволюцією не ризикового активу, що еволюціонує випадково, в континуальній границі

В рамках поставленої задачі єдиними можливими безмежно подільними граничними розподілами для еволюції двох ризикових активів є вироджений, нормальний розподіли та розподіл Пуассона з певними параметрами. В наступних двох теоремах сформульовано умови, виконання яких гарантує збіжність дискретних розподілів до вищевказаних безмежно подільних законів.

Теорема 1.

Нехай справедливі асимптотики $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_1(n)) = \beta_1, \quad \beta_1 \in R,$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_2(n)) = \beta_2, \quad \beta_2 \in R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+r_1(n)) = \varphi_1, \quad \varphi_1 \in R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+r_2(n)) = \varphi_2, \quad \varphi_2 \in R,$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = d,$
 причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(p(n)-d) = c$.

Якщо виконується умова $(d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2) = 0$, то єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є нормальний розподіл, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$

є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \longrightarrow N(\alpha_1, \sigma_1^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \longrightarrow L(\alpha_2), \quad n \rightarrow \infty,$ де

$$\alpha_1 = c(\beta_1 - \beta_2), \quad \sigma_1^2 = (\beta_1 - \beta_2)^2(1-d)^2 d + (\beta_1 - \beta_2)^2(1-d)d^2, \quad \alpha_2 = (1-d)\varphi_1 + d\varphi_2.$$

Теорема 1 доводиться із застосуванням центральної граничної теореми (див., наприклад, [4]). Для зручності посилянь наведемо її формулювання.

Теорема (Центральна гранична теорема).

Нехай X_{nk} є рівномірно нескінченно малими незалежними доданками.

1. Сім'я граничних законів послідовностей $L\left(\sum_k X_{nk}\right)$ співпадає з сім'єю безмежно подільних законів, або, з сім'єю законів, логарифм характеристичних функцій яких $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ визначається формулою

$$\psi(u) = iu\alpha + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x), \quad (7)$$

де $\alpha \in R$, і Ψ з точністю до постійного множника є функцією розподілу.

2. $L\left(\sum_k X_{nk}\right) \rightarrow L(X)$, логарифм характеристичної функції якого обов'язково має вигляд $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ тоді і тільки тоді, коли $\Psi_n \rightarrow \Psi, \quad \alpha_n \rightarrow \alpha$, де

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left(a_{n,k} + \int \frac{x}{1+x^2} d\bar{F}_{n,k}(x) \right), \quad (8)$$

$$\psi_n(x) = n \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} d\bar{F}_{n,k}(y) \quad)$$

$$i \quad a_{n,k} = \int x \chi_{\{|x| < \tau\}} dF_{n,k}(x), \quad \bar{F}_{n,k} = F_{n,k}(x + a_{n,k}).$$

Доведення теореми 1. Спочатку дослідимо збіжність $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$. Позначимо $\sum_{i=1}^n X_i^n = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) =$

$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+b_2}{1+b_1} - \ln(1+b_1)(1+b_2) \right)$. Функція розподілу для випадкової величини X_i^n буде наступною:

$F_1(x) = p\chi_{[\ln(1+b_1), \infty)}(x) + (1-p)\chi_{[\ln(1+b_2), \infty)}(x)$. Умова рівномірної нескінченної малості виконується, оскільки за умовою теореми $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+b_1(n)) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+b_2(n)) = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = d$:

$$\max_k \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k} = \left(\frac{\ln^2(1+b_1(n))}{1+\ln^2(1+b_1(n))} p(n) + \frac{\ln^2(1+b_2(n))}{1+\ln^2(1+b_2(n))} (1-p(n)) \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для подальшого доведення застосуємо центральну граничну теорему. Для $\sum_{i=1}^N X_i^n$ коефіцієнти $a_{n,k}$, та функції $\bar{F}_{n,k}$ мають вигляд

$$a_{n,i}^1 = \int_{|x| < \tau} x dF_{n,i}^1(x) = p \ln(1+b_1) + (1-p) \ln(1+b_2), \quad \bar{F}_{n,i}^1(x) = p \delta\left(x - (1-p) \ln \frac{1+b_1}{1+b_2}\right) + (1-p) \delta\left(x - p \ln \frac{1+b_2}{1+b_1}\right).$$

Наступним кроком визначимо α_n та $\psi_n^1(x)$ за формулами (8) та (9) відповідно:

$$\alpha_n^1 = np \ln(1+b_1) + n(1-p) \ln(1+b_2) + np \frac{(1-p) \ln \frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+b_1}{1+b_2}} + n(1-p) \frac{p \ln \frac{1+b_2}{1+b_1}}{1+p^2 \ln^2 \frac{1+b_2}{1+b_1}},$$

$$\psi_n^1(x) = n \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} d\bar{F}_{n,k}^1(y) = n \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} d \left(p \delta\left(x - (1-p) \ln \frac{1+b_1}{1+b_2}\right) + (1-p) \delta\left(x - p \ln \frac{1+b_2}{1+b_1}\right) \right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < (1-p) \ln \frac{1+b_1}{1+b_2} \\ np \frac{(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+b_1}{1+b_2}}, & (1-p) \ln \frac{1+b_1}{1+b_2} \leq x < p \ln \frac{1+b_2}{1+b_1} \\ np \frac{(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+b_1}{1+b_2}} + n(1-p) \frac{p^2 \ln^2 \frac{1+b_2}{1+b_1}}{1+p^2 \ln^2 \frac{1+b_2}{1+b_1}}, & x \geq p \ln \frac{1+b_2}{1+b_1} \end{cases}.$$

Так як за умовою теореми $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_1(n)) = \beta_1$, $\beta_1 \in R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_2(n)) = \beta_2$, $\beta_2 \in R$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(p(n) - d) = c$, тоді

$$\alpha_n^1 \sim c\beta_1 - c\beta_2 + (d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2)\sqrt{n} + (\beta_1 - \beta_2) \frac{c - 2dc - d^2\sqrt{n} - \frac{c^2}{\sqrt{n}}}{1 + \left(1 - d - \frac{c}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{n}} + (\beta_2 - \beta_1) \frac{c - 2dc - d^2\sqrt{n} - \frac{c^2}{\sqrt{n}}}{1 + \left(d + \frac{c}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2}{n}},$$

$n \rightarrow \infty$. Неважко помітити, що при виконанні умови $(d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2) = 0$ $\alpha_n^1 \rightarrow c(\beta_1 - \beta_2)$, $n \rightarrow \infty$.

Аналогічно, враховуючи умови теореми, знаходимо границю для $\psi_n^1(x)$:

$$\psi_n^1(x) \rightarrow \psi^1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d)^2 d, & x = 0, \quad n \rightarrow \infty, \text{ де } \sigma^2 = (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d)^2 d + (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d) d^2, \\ \sigma^2, & x > 0 \end{cases}$$

За центральною граничною теоремою сім'я граничних законів послідовностей $L\left(\sum_{i=1}^N X_i^n\right)$ збігається з сім'єю безмежно подільних законів, або, з сім'єю законів, логарифм характеристичних функцій яких $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ визначається формулою (7). У нашому випадку логарифм характеристичної функції набуває вигляду

$$\psi(u) = \frac{1}{2} i u \alpha_1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2}, \text{ де } \sigma^2 = (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d)^2 d + (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d) d^2.$$

В результаті отримали характеристичну функцію нормального розподілу. Отже, дійсно $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \longrightarrow N(\alpha_1, \sigma_1^2), \quad n \rightarrow \infty.$

Тепер знайдемо граничний розподіл для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$. Позначимо $\sum_{i=1}^N Y_i^n = \ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} - \ln(1+r_1)(1+r_2) \right)$. Функція розподілу F_2 для випадкової величини Y_i^n :

$F_2(x) = (1-p) \chi_{[\ln(1+r_1), \infty)}(x) + p \chi_{[\ln(1+r_2), \infty)}(x)$. Умова рівномірної нескінченної малості виконується оскільки за умовою теореми $\max_k \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk} = \frac{\ln^2(1+r_1(n))}{1+\ln^2(1+r_1(n))} (1-p(n)) + \frac{\ln^2(1+r_2(n))}{1+\ln^2(1+r_2(n))} p(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$, тому до $\sum_{i=1}^N Y_i^n$

також застосуємо центральну граничну теорему. Знайдемо коефіцієнти α_n^2 та функції $\psi_n^2(x)$ для $\sum_{i=1}^N Y_i^n$ за формулами (8) та (9) відповідно:

$$\alpha_n^2 = n(1-p) \ln(1+r_1) + n p \ln(1+r_2) + n(1-p) \frac{p \ln \frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2 \ln^2 \frac{1+r_1}{1+r_2}} + n p \frac{(1-p) \ln \frac{1+r_2}{1+r_1}}{1+(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+r_2}{1+r_1}},$$

$$\psi_n^2(x) = \begin{cases} 0, & x < p \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} \\ n(1-p) \frac{p^2 \ln^2 \frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2 \ln^2 \frac{1+r_1}{1+r_2}}, & p \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} \leq x < (1-p) \ln \frac{1+r_2}{1+r_1} \\ n(1-p) \frac{p^2 \ln^2 \frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2 \ln^2 \frac{1+r_1}{1+r_2}} + n p \frac{(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+r_2}{1+r_1}}{1+(1-p)^2 \ln^2 \frac{1+r_2}{1+r_1}}, & x \geq (1-p) \ln \frac{1+r_2}{1+r_1} \end{cases}.$$

Крім того, при виконанні умов теореми границі послідовності існують і скінченні наступні границі: $\alpha_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = (1-d) \varphi_1 + d \varphi_2$, $\psi^2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^2(x) = 0$. Характеристична функція для граничного розподілу:

$\psi(u) = i u \alpha_2 + \int \left(e^{i u x} - 1 - \frac{i u x}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x) = i u \alpha_2$, і тому єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \longrightarrow L(\alpha_2), \quad n \rightarrow \infty$. Теорему доведено.

Теорема 2.

Нехай справедливі асимптотики $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+b_1(n))=0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+b_2(n))=\gamma$, $0 < \gamma < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+r_1(n))=\varphi_1$, $\varphi_1 \in R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+r_2(n))=\varphi_2$, $\varphi_2 \in R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p(n))=0$.

Якщо існують границі $a = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-p(n))$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+b_1(n))$, то єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є розподіл Пуассона зі зсувом, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \rightarrow P(a; b, \gamma)$, $n \rightarrow \infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \rightarrow L(\alpha)$, $n \rightarrow \infty$, де $\alpha = \varphi_2$.

Доведення теореми 2 є аналогічним доведенню теореми 1.

Проілюструємо застосування наведених теорем на прикладах.

Приклад 1. Нехай задані асимптотики для $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$ мають такий вигляд: $r_1(n) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $r_2(n) = \exp\left\{r'_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_1(n) = \exp\left\{-b_0 \sqrt{\frac{t}{n}}\right\} - 1$, $b_2(n) = \exp\left\{b_0 \sqrt{\frac{t}{n}}\right\} - 1$, та $p(n) = \frac{(b_2 - r_1)(1 + r_2)}{(b_2 - r_1)(1 + r_2) + (r_2 - b_1)(1 + r_1)}$. Тоді, за теоремою 1, єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є нормальний розподіл, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При

цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \rightarrow N\left(\frac{1}{2}(r'_0 + r_0 - b_0^2)t, b_0^2 t\right)$, $n \rightarrow \infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \rightarrow L\left(\frac{1}{2}(r'_0 + r_0)t\right)$, $n \rightarrow \infty$.

Приклад 2. Нехай $r_1(n) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $r_2(n) = \exp\left\{r'_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_1(n) = \exp\left\{-\mu \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_2(n) = \exp\{\lambda\} - 1$, та $p(n) = 1 - \nu \frac{t}{n}$. Застосовуючи теорему 2, отримаємо, що єдиним можливим безмежно подільними граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є розподіл Пуассона зі зсувом, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \rightarrow P(\nu t; -\mu t, \lambda)$, $n \rightarrow \infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \rightarrow L\left(\frac{1}{2}(r'_0 + r_0)t\right)$, $n \rightarrow \infty$.

4. Границі для справедливої ціни контракту з опціоном

Постає задача відшукування границі для справедливої ціни контракту з опціоном дискретної моделі з випадковою еволюцією неризикового активу, а саме:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_0 \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k (1-\bar{p})^{N-k} - K L^N \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k (1-\bar{p})^{N-k} \right). \quad (8)$$

Теорема 3.

Нехай $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1+b_1(N))=0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1+b_2(N))=0$, а також $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1+r_1(N))=0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1+r_2(N))=0$.

Якщо існують скінченні границі $H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{p}}{N\bar{p}(1-\bar{p})}$, $F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{p}}{N\bar{p}(1-\bar{p})}$, $l = \lim_{N \rightarrow \infty} L^N$, то границя справедливої

ціни контракту з опціоном є наступною $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^H e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K l \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^F e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Доведення теореми 3. Введемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\zeta_i, i = \overline{1, N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $\bar{p}$ і $1 - \bar{p}$ відповідно, тобто $P(\zeta_i = 1) = \bar{p}$, $P(\zeta_i = 0) = 1 - \bar{p}, i = \overline{1, N}$. Тоді першу суму в виразі (8) можна представити наступним чином

$\sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{N-k} = P\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0\right)$. Застосуємо Теорему Лінденберга для знаходження границі цієї суми.

$$P\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^N \zeta_i - E\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i\right)}} \leq \frac{k_0 - E\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i\right)}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^H e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad N \rightarrow \infty, \text{ де } H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{p}}{N\bar{p}(1-\bar{p})}.$$

Отже, знайшли границю першої суми. Аналогічним чином визначимо границю для другої суми. Введемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_i, i = \overline{1, N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $\bar{\bar{p}}$ і $1 - \bar{\bar{p}}$ відповідно $P(\xi_i = 1) = \bar{\bar{p}}$, $P(\xi_i = 0) = 1 - \bar{\bar{p}}, i = \overline{1, N}$.

Тоді другу суму в виразі (8) можна представити наступним чином $\sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{\bar{p}}^k (1 - \bar{\bar{p}})^{N-k} = P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0\right)$. За теоремою Лінденберга границя цієї суми наступна:

$$P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i - E\left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)}} \leq \frac{k_0 - E\left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^F e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad N \rightarrow \infty, \text{ де } F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{\bar{p}}}{N\bar{\bar{p}}(1-\bar{\bar{p}})}.$$

Отже, границя справедливої ціни

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_0 P\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0\right) - KL^N P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0\right) \right) = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^H e^{-\frac{x^2}{2}} dx - KL \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^F e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\text{де } H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{p}}{N\bar{p}(1-\bar{p})}, \quad F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0 - N\bar{\bar{p}}}{N\bar{\bar{p}}(1-\bar{\bar{p}})}, \quad l = \lim_{N \rightarrow \infty} L^N.$$

Теорема доведена.

Теорема 4.

Нехай $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + b_1(N)) = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + b_2(N)) = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, та $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + r_1(N)) = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + r_2(N)) = 0$. Якщо існують границі $\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \bar{p}) = a$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \bar{\bar{p}}) = b$, $l = \lim_{N \rightarrow \infty} L^N$, то границя справедливої ціни контракту з опціоном визначається наступним чином $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = S_0 - Kl$.

Доведення теореми 4. Як і в попередньому випадку, вводимо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\zeta_i, i = \overline{1, N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $1 - \bar{p}$ і $\bar{p}$ $P(\zeta_i = 1) = 1 - \bar{p}$, $P(\zeta_i = 0) = \bar{p}$, $i = \overline{1, N}$, а також незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_i, i = \overline{1, N}$, таку, що $P(\xi_i = 1) = 1 - \bar{\bar{p}}$, $P(\xi_i = 0) = \bar{\bar{p}}$, $i = \overline{1, N}$. Ввівши такі незалежні величини, маємо

$$E e^{iu \sum_{i=1}^N \zeta_i} = (E e^{iu \zeta_i})^N = (e^{iu(1-\bar{p})} + \bar{p})^N. \text{ Через те що } \lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \bar{p}) = a \text{ можна представити } \bar{p} = 1 - \frac{a}{N} \text{ і } 1 - \bar{p} = \frac{a}{N}, \text{ і}$$

$$E e^{iu \sum_{i=1}^N \xi_i} = (E e^{iu \xi_i})^N = (e^{iu(1-\bar{\bar{p}})} + \bar{\bar{p}})^N = \left(e^{iu \frac{a}{N}} + 1 - \frac{a}{N} \right)^N = \left(1 + \frac{a}{N} (e^{iu} - 1) \right)^N \rightarrow e^{a(e^{iu} - 1)}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Граничним є розподіл Пуассона. Аналогічні міркування можна провести і для суми випадкових величин $\zeta_i, i = \overline{1, N}$, теж отримавши розподіл Пуассона як граничний. Шукана границя для C_N набуває вигляду:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_0 P\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0\right) - KL^N P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0\right) \right).$$

Так як $\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \bar{p}) = a$ та $\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \bar{\bar{p}}) = b$, застосуємо граничну теорему Пуассона для обчислення границь

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_0 P \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0 \right) \right) = S_0 \lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \leq k_0 \right) = S_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k: k \leq [k_0]} P \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i = k \right) = S_0 \sum_{k=1}^G \frac{a^k}{k!} e^{-a} = S_0, \text{ де}$$

$$G = \lim_{N \rightarrow \infty} [k_0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln K - \ln(1 + b_2)^N S_0}{\ln(1 + b_1)(1 + b_2)^{-1}} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln \frac{K}{S_0} - N \ln(1 + b_2)}{\ln(1 + b_1) - \ln(1 + b_2)} \right] = \infty. \text{ Аналогічно і для другого доданку}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(KL^N P \left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0 \right) \right) = K \lim_{N \rightarrow \infty} \left(L^N P \left(\sum_{i=1}^N \xi_i \leq k_0 \right) \right) = K l \sum_{k=1}^G \frac{b^k}{k!} e^{-b} = K l. \text{ Отже } \lim_{N \rightarrow \infty} C_N = S_0 - K l.$$

Теорема доведена.

Проілюструємо застосування наведених теорем на прикладах.

Приклад 3. Нехай $r_1(N) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{N}\right\} - 1$, $r_2(N) = \exp\left\{r'_0 \frac{t}{N}\right\} - 1$, $b_1(N) = \exp\left\{-b_0 \sqrt{\frac{t}{N}}\right\} - 1$, $b_2(N) = \exp\left\{b_0 \sqrt{\frac{t}{N}}\right\} - 1$.

Застосувавши теорему 3 отримаємо, що границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = S_0 \Phi \left(-\frac{1}{b_0 \sqrt{t}} \left(\ln K / S_0 + \frac{1}{2} (r'_0 + r_0 + b_0^2) t \right) \right) - K e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} b_0^2 - r'_0 - r_0 \right) t} \Phi \left(-\frac{1}{b_0 \sqrt{t}} \left(\ln K / S_0 + \frac{1}{2} (b_0^2 - r'_0 - r_0) t \right) \right),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Приклад 4. Нехай $r_1(N) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{N}\right\} - 1$, $r_2(N) = \exp\left\{r'_0 \frac{t}{N}\right\} - 1$, $b_1(N) = \exp\left\{-\mu \frac{t}{N}\right\} - 1$, $b_2(N) = \exp\{\lambda\} - 1$.

За теоремою 4 границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = S_0 - K \exp\left\{ \frac{\lambda r'_0 + 2\mu}{\lambda + \frac{1}{2} \lambda^2} T \right\}$, та

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = 0, \text{ якщо } \frac{\lambda r'_0 + 2\mu}{\lambda + \frac{1}{2} \lambda^2} T > \ln \frac{S_0}{K}.$$

5. Висновки

В результаті проведених у даній роботі досліджень отримано ряд результатів: встановлено, що в рамках поставленої задачі єдиними можливими безмежно подільними граничними розподілами для еволюції двох ризикових активів є вироджений, нормальний розподіли та розподіл Пуассона з певними параметрами; знайдено умови, виконання яких гарантує збіжність саме до отриманих розподілів; отримано границі для справедливої ціни контракту з опціоном для дискретної моделі з випадковою еволюцією ризикових активів та умови їх існування. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладах, в яких розглядаються конкретні моделі еволюції ризикового та неризикового активу, що еволюціонують випадково і для яких явно знайдені граничні розподіли з конкретними параметрами та отримано формули для границі справедливої ціни контракту з опціоном.

1. Гончар М.С. Фондовый рынок и экономический рост. – К., 2001. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М., 1965. 3. Карташов М.В. Теория вероятностей та математична статистика. – К., 2004. 4. Лозе М. Теория вероятностей. – М., 1962. 5. Рачев С.Т., Рушендорф Л. Модели и расчеты контрактов с опционами // Теория вероятностей и ее применения – 1994. – Том 39. – с.150-188. 6. Ширяев А.Н. Основы стохастической и финансовой математики. – М., 1998.

Надійшла до редакції 11.11.08

УДК 519.21

О. Усольцева, асп.
E-mail: elena_usolceva@ukr.net

КОНЗИСТЕНТНА ОЦІНКА В МОДЕЛІ ВИЖИВАННЯ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

У статті розглядається модель виживання з похибкою вимірювання. Деякі тривалості життя можуть бути цензурованими. Їх розподіл залежить від невідомого параметра, що оцінюється. В статті оцінюється цей параметр, від якого розподіл цензора не залежить. Доведено конзистентність одержаної адаптованої оцінки максимальної вірогідності у випадку невірної кореляційної матриці регресора.

The Accelerated Failure Time Model is studied, where i.i.d. errors are present. Some lifetimes may be censored. The distribution of lifetime depends on unknown parameter, which is estimated. There is measurement error presents in the normal model. The adjusted quasi-likelihood estimator is obtained. It is consistent under nonsingular correlation matrix of regressor and some conditions on censoring distribution.

1. Вступ

Розглянемо модель виживання (Accelerated Failure Time Model) $\log T_i = \beta_0 + \beta_X^T X_i + \psi \varepsilon_i$, $\psi > 0$, $i = 1, \dots, n$. Досліджуються вектори X_i ; $\{\varepsilon_i\}$ – незалежні однакові розподілені випадкові величини з нульовим середнім і скінченною дисперсією. У досліджуваних вибірках присутні цензуровані спостереження, тобто спостерігаються $Y_i = \min\{T_i, C_i\}$ та індикатори $\Delta_i = I\{T_i \leq C_i\}$ замість T_i . Цензори $\{C_i\}$, що є незалежним однаково розподіленими, не залежать від досліджуваних даних. У статті оцінюється невідомий параметр θ , від якого залежить розподіл тривалості життя T_i , причому розподіл цензора C_i не залежить від нього. В роботі [1] була сконструйована незміщена адаптована виправлена оціночна функція (Corrected Score) у присутності похибки вимірювання. В даній статті, що основана на теорії оціночних рівнянь, доводиться, що це оціночне рівняння задає конзистентну оцінку. Структура роботи наступна. У розділі 2 описана основна модель. Розглядаємо класичну модель у присутності похибки вимірювання, досліджуючи замість X_i сурогатні дані $W_i = X_i + U_i$, $i = 1, \dots, n$, де U_i – центровані незалежні однаково розподілені випадкові вектори із скінченим другим моментом. У розділі 3 доводиться конзистентність наведеної оцінки при відомому розподілі цензора. У розділі 4 використовується метод Каплана-Мейєра для оцінювання невідомого розподілу цензора. В цьому випадку також доведено конзистентність оцінки при виконанні певних умов на розподіл цензора.

2. Загальна модель

Розглядається n спостережень невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин T_i , $i = 1, \dots, n$. Під T_i розуміється час до того, як певна подія відбудеться. Припускається, що функція розподілу T_i неперервна. В моделі присутнє цензурування, тобто замість T_i досліджуються $Y_i = \min\{T_i, C_i\}$ та $\Delta_i = I\{T_i \leq C_i\}$, де незалежні однаково розподілені випадкові величини C_i , що є обмеженими константою C – цензори, що не залежать від досліджуваних даних.

Розглянемо модель виживання (AFTM)

$$Z_i := \log T_i = \beta_0 + \beta_X^T X_i + \psi \varepsilon_i, \psi > 0 \quad (1)$$

при наявності цензурування. Розглядаються пари незалежних однаково розподілених випадкових величин (Y_i, Δ_i) , $i = 1, \dots, n$. Через $\beta = (\beta_0, \beta_X^T)^T$ позначимо вектор, що належить компактній опуклій множині Θ . Позначимо наступні розмірності: $\dim \beta = k + 1$, $\dim X_i = k$, $i = 1, \dots, n$. Позначимо через S кореляційну матрицю випадкового вектора X_i , $i = 1, \dots, n$. Припущення відносно розподілу X_i наступні: випадкові вектори $\{X_i\}$ однаково розподілені, матриця S – не вироджена, $E\|(1; X_i^T)^T\| < \infty$. Позначимо через x_i , $i = 1, \dots, k$ – випадкові величини, що є координатами вектора X_1 . Тоді вимагається існування скінчених моментів $E x_i x_j \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X_1\}$ при всіх $i, j = 1, \dots, k$. В даній моделі присутня похибка вимірювання, тобто замість X_i досліджуються сурогатні дані $W_i = X_i + U_i$, $i = 1, \dots, n$, де $\{U_i\}$ – послідовність центрованих незалежних однаково розподілених випадкових векторів із скінченим другим моментом. U_i не залежать від X_k, Y_k, Δ_k , $k = 1, \dots, n$. Додатково припускається існування моменту $M_{U_i}(a) = E(\exp\{a^T U_i\})$, для всіх векторів $a \in R^{k+1}$, $i = 1, \dots, n$.

Нехай у моделі $Z_i = F(X_i, \theta)$, де спостерігаються $\{X_i\}$, розподіл Z_i залежить від параметра θ , що оцінюється.

Оцінка квазімаксимальної вірогідності $\hat{\theta}$ визначається як корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{(Z_i - m_i(\theta))}{V_i(\theta)} = 0, \quad (2)$$

де функції середнього та дисперсії задаються наступним чином

$$\begin{cases} m_i(\theta) = E(Z_i | X_i) \\ V_i(\theta) = \text{Cov}(Z_i | X_i) \end{cases} \quad (3)$$

Рівняння (2) є незміщеним при виконанні певних стандартних умов регулярності, див. [3]. Замість введених функцій середнього та дисперсії у випадку нової адаптованої оцінки Quasi-Likelihood розглядаються умовні моменти $E(T_i | W_i; \theta)$ та $\text{Var}(T_i | W_i; \theta)$. Таким чином рівняння (2) набуває виду

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E(T_i | W_i; \theta)}{\partial \theta} \cdot (\text{Var}(T_i | W_i; \theta))^{-1} \cdot \{T_i - E(T_i | W_i; \theta)\} = 0. \quad (4)$$

Одержане оціночне рівняння також незміщене. В [1] умовні моменти $E(T_i | W_i; \theta)$ та $\text{Var}(T_i | W_i; \theta)$ подані в наступному вигляді:

$$E(T_i | W_i; \theta) = E(E(T_i | X_i, \theta) | W_i); \text{Var}(T_i | W_i; \theta) = V(E(T_i | X_i, \theta) | W_i) + E(V(T_i | X_i, \theta) | W_i) \quad (5)$$

3. Конзистентність при відомому розподілі цензора

Оціночне рівняння Quasi-Likelihood (2) в загальній моделі AFTM переписується у вигляді

$$\sum_{i=1}^n (1; X_i^T)^T (T_i - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X_i)) = 0 \quad (6)$$

Це оціночне рівняння також є незміщеним. Припускаючи нормальність випадкових векторів $U_i \sim N(0, \Sigma_{U_i})$, модифікуємо це оціночне рівняння, використовуючи адаптивне оціночне рівняння з леми 5.2.1 з [1]. Підрахуємо наступні моменти в цьому випадку: $M_{U_i}(-\beta_X) = E(\exp\{-\beta_X^T U_i\}) = \exp\{0, 5 \cdot \beta_X^T \Sigma_{U_i} \beta_X\}$;

$$M'_{U_i}(-\beta_X) = E(U_i \cdot \exp\{\beta_X^T U_i\}) = \frac{\partial}{\partial \beta_X} M_{U_i}(\beta_X) = -\Sigma_{U_i} \beta_X \cdot \exp\{0, 5 \cdot \beta_X^T \Sigma_{U_i} \beta_X\}.$$

З (6) одержимо систему рівнянь, яка задає оціночне рівняння у випадку присутності похибки вимірювання $W_i = X_i + U_i$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(T_i \cdot \frac{\exp\{-(\beta_0 + \beta_X^T W_i)\}}{(M_{U_i}(-\beta_X))} - 1 \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(\left(W_i - \frac{M'_{U_i}(\beta_X)}{M_{U_i}(-\beta_X)} \right) \cdot T_i \cdot \frac{\exp\{-(\beta_0 + \beta_X^T W_i)\}}{(M_{U_i}(-\beta_X))} - W_i \right) = 0 \end{cases}.$$

Тепер будемо адаптувати оціночне рівняння (6) до цензурування. Розглянемо наступні об'єкти:

$$\{Q_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(Z_i, t), t \in \Theta, n \geq 1\}, \quad (7)$$

де послідовність оціночних функцій $\{Q_n(t), n \geq 1\}$ базується на вибірці $\{Z_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Тут і надалі у статті, якщо немає окремих зауважень, Θ є опуклою та компактною підмножиною R^{k+1} . Випадкові величини $\{Z_i\}$ незалежні однаково розподілені, $i = \overline{1, n}$. Функція розподілу Z_i залежить від вектора параметрів $\theta \in \Theta$. Вимагається, щоб функції $Q_n(t), n \geq 1$ були неперервними на Θ P_0 -м.н. при $n \geq 1$, де P_0 – деяка скінченна міра на борельових підмножинах Θ .

Вимагається також, щоб оціночна функція $\sum_{i=1}^n q(z, t), t \in \Theta$ була вимірною відносно z , $\dim q = k+1$. Надалі буде

розглядатися оцінка $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n$, що є вимірним розв'язком рівняння $Q_n(t) = 0$, $t \in \Theta$. Існування та вимірність такої оцінки буде гарантувати теорема 1. Виходячи з рівняння (6) одержимо наступне $t = (\beta_0; \beta_X^T)^T$, $z = (T; X^T)^T$, $\theta = (b_0; b_X^T)^T$, $Q_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(Z_i, t) = 0$, де $q(z, t) = (1; X^T)^T (T - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X))$. Тепер використаємо теорему 6.2.2 з роботи [1]. Перепишемо оціночне рівняння (6) в наступній формі

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X} \right) \left(\frac{\Delta_i Y_i}{G(Y_i)} - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X_i) \right) = 0, \quad (8)$$

де $G(t) := P(C_i \geq t | W_i) = P(C_i \geq t) > 0$. Одержане оціночне рівняння є незміщеним. Його можна записати у вигляді

$$Q_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(Z_i, t) = 0, \quad (9)$$

де

$$q(z, t) = \left(\frac{1}{X} \right) \left(\frac{\Delta Y}{G(Y)} - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X) \right). \quad (10)$$

Наведемо теорему, доведення якої повторює алгоритм доведення леми 1 з [4].

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови для оціночних функцій (7).

1). $q(z, \cdot) \in C^1(\Theta)$ м. н.; при всіх t з Θ $E_0 \|q(z, t)\|$ відносно міри P_0 обмежене.

2). Функція $Q_\infty(\theta, t) := E_0 q(z, t)$ неперервна за θ на Θ .

3). $E_0 \sup_{t \in \Theta} \left\| \frac{\partial q}{\partial t^T}(z, t) \right\| < \infty$.

4). $v := \frac{\partial Q_\infty}{\partial t^T}(\theta, \theta)$ – невироджена матриця.

5). $Q_\infty(\theta, t) = 0$ тоді і лише тоді, коли $\theta = t$.

Тоді існує оцінка $\hat{\theta}_n$, що є функцією від спостережень. Ця оцінка є строго конзистентною, тобто $P_0(\hat{\theta}_n \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty) = 1$.

Існування оцінки випливає з теореми 12.1 з [3]. Існування вимірного розв'язку забезпечує теорема зі статті [5]:

Якщо існує декілька розв'язків рівняння для визначення оцінки, можна вибрати такий, який буде вимірною функцією від спостережень.

Теорема 2. Оцінка $\hat{\theta}$, що визначається як розв'язок оціночного рівняння (8), є строго конзистентною.

Доведення: Для доведення цієї теореми потрібно перевірити для функцій $q(z, t)$ з (10) виконання умов теореми 1. Позначимо істинне значення вектору параметрів β через b . Використовуючи лему 6.2.1 з роботи [1], одержимо

$$Q_{\infty}(\beta, t) := E_b q(z, t) = E_b \left(\frac{1}{X} \right) \left(\frac{\Delta Y}{G(Y)} - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X) \right) = E \left(\left(\frac{1}{X} \right) (\exp\{b_0 + b_X^T X\} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X\}) \right).$$

Умови 1) – 3) теореми 1 випливають із умов регулярності, накладених на функції $Q_{\infty}(\beta, t)$, $q(z, t)$. Розглянемо умову 4) теореми 1. Невиродженість матриці $v := \frac{\partial Q_{\infty}}{\partial t^T}(\theta, \theta) = -E \left(\exp\{b_0 + b_X^T X\} \left(\frac{1}{X} \right) (1; X^T) \right)$ випливає з невірності

кореляційної матриці S регресора. Для перевірки умови 5) достатньо показати, що з рівняння $Q_{\infty}(\theta, t) = 0$ випливає $t = \theta$. Покажемо це, використовуючи умову невірності матриці S . Маємо рівняння

$$E \left(\left(\frac{1}{X} \right) (\exp\{b_0 + b_X^T X\} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X\}) \right) = 0, \text{ що розписується у систему}$$

$$\begin{cases} E e^{b_0 + b_X^T X} = E e^{\beta_0 + \beta_X^T X} \\ E x_i e^{b_0 + b_X^T X} = E x_i e^{\beta_0 + \beta_X^T X}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (11)$$

Лема 1. Нехай S – додатновизначена матриця. Тоді система рівнянь (11) має єдиний розв'язок $\beta_i = b_i, i = \overline{0, k}$.

Доведення леми спирається на те, що матриця других похідних функції $\Phi(\beta) = E e^{\beta_0 + \beta_X^T X}$ додатновизначена за умови невірності матриці S .

Отже, всі умови теореми 1 виконані. Теорема 2 доведена.

4. Оцінка Каплана-Меєра розподілу цензора

Ми довели конзистентність оцінки у випадку відомого розподілу цензора. Часто на практиці цього розподілу ми не знаємо. Його можна оцінити за допомогою методу Каплана-Меєра. Використовуючи цей метод, необхідно поміняти місцями функції розподілу періоду життя та цензора. Наведемо лему з [2], яка буде використана далі.

Лема 2. Нехай функції $U_n(\cdot)$ задано на компакт $\Theta \subset R^{k+1}$ такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\beta) = 0$ за ймовірністю для кожного $\beta \in \Theta$. Припустимо, що для всіх додатних ε виконується $\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \leq l} |U_n(\beta_1) - U_n(\beta_2)| > \varepsilon \} = 0$. Тоді за ймовірністю $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in \Theta} |U_n(\beta)| = 0$.

Доведемо наступну лему.

Лема 3. Розглядаються борельова сигма-алгебра $B(\Theta)$ на Θ , імовірнісний простір (Ω, F, P) . Послідовність вимірних відносно сигма-алгебри $\mathcal{Z} := \sigma\alpha(B(\Theta) \times F)$ функцій $S_n(\beta) = S_n(\beta, \omega)$, $n \geq 1$ задовольняє наступні умови:

1. Існує така не випадкова функція $S_{\infty}(\beta)$, $\beta \in \Theta$, що для всіх $\beta \in \Theta$: $S_n(\beta) \rightarrow S_{\infty}(\beta)$, $n \geq 1$ м. н.

2. Рівняння $S_{\infty}(\beta) = 0$ має єдиний розв'язок b на Θ .

3. Функція $S_{\infty}(\cdot)$ неперервна за β на Θ .

4. $S_n(\beta) \in C^1(\Theta)$, $P\{S_n(\cdot), n \geq 1 \text{ однотайно неперервні за } \beta \in \Theta\} = 1$.

5. $E_b \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial S_n}{\partial \beta^T}(\beta) \right\| < \infty$

6. $v := \frac{\partial S_{\infty}}{\partial \beta^T}(b)$ – невірнена матриця

Нехай випадкові величини Φ_n , $n \geq 1$ задовольняють умові

7. при $n \rightarrow \infty$ за ймовірністю.

Тоді оціночне рівняння $S_n(\beta) + \Phi_n = 0$ має вимірний розв'язок β'_n з ймовірністю p_n , що прямує до 1 при $n \rightarrow \infty$, такий, що оцінка β'_n конзистентна.

Доведення: Умови існування та вимірності розв'язку гарантує теорема 1.

Використаємо лему 2 з [2], поклавши $U_n(\beta) = S_n(\beta) + \Phi_n - S_{\infty}(\beta)$. При кожному $\beta \in \Theta$ виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(\beta) - S_{\infty}(\beta)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = 0$ за ймовірністю. Залишилося перевірити виконання другої умови леми 2 для функції $U_n(\beta)$ для всіх додатних ε .

$$\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \leq l} |U_n(\beta_1) - U_n(\beta_2)| > \varepsilon \} \leq$$

$$\leq \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \leq l} |S_n(\beta_1) - S_{\infty}(\beta_1)| > \frac{\varepsilon}{2} \} + \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \leq l} |S_n(\beta_2) - S_{\infty}(\beta_2)| > \frac{\varepsilon}{2} \}.$$

Ці доданки рівні 0, бо з ймовірністю 1 $S_n(\beta)$ рівномірно по β збігаються до $S_\infty(\beta)$. За лемою 2 маємо, що $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in \Theta} |U_n(\beta)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in \Theta} |S_n(\beta) + \Phi_n(\beta) - S_\infty(\beta)| = 0$ за ймовірністю. Тобто оціночна функція $S'_n(\beta) = S_n(\beta) + \Phi_n$ задовольняє наступну умову за ймовірністю $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in \Theta} \|S'_n(\beta) - S'_\infty(\beta)\| = 0$, причому $S'_\infty(\beta) = S_\infty(\beta)$. З цього

випливає, що $\|S'_n(\beta) - S_\infty(\beta)\| \xrightarrow{P} 0$. Тому $\beta'_n \xrightarrow{P} b$, де b – істинне значення параметра, що оцінюється. Дійсно, $S_\infty(\cdot)$ – неперервна функція, тому якщо $\|\beta'_n - b\| > \varepsilon$, то для деякого додатного $\delta(\varepsilon)$ виконується наступна нерівність $\|S_\infty(\beta'_n) - S_\infty(b)\| > \delta(\varepsilon)$. Розглянемо ймовірність $P\{\|\beta'_n - b\| > \varepsilon\} \leq P\{\|S_\infty(\beta'_n) - S_\infty(b)\| > \delta(\varepsilon)\} \leq$
 $\leq P\{\|S_\infty(\beta'_n) - S'_n(\beta'_n)\| > \frac{\delta(\varepsilon)}{4}\} + P\{\|S'_n(b) - S_\infty(b)\| > \frac{\delta(\varepsilon)}{4}\} + P\{\|S_\infty(b) - S'_\infty(b)\| > \frac{\delta(\varepsilon)}{4}\} + P\{\|S'_n(b) - S'_\infty(b)\| > \frac{\delta(\varepsilon)}{4}\}.$

Перший та останній доданки прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ з одержаної збіжності $\|S'_n(\beta) - S_\infty(\beta)\| \xrightarrow{P} 0$. Другий прямує до нуля з ймовірністю $p_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ тому що з ймовірністю 1 $S_n(\beta)$ рівномірно по β збігаються до $S_\infty(\beta)$. Третій доданок прямує до нуля за неперервністю функції $S_\infty(\cdot)$ на Θ .

Лема доведена.

Теорема 3. Оцінка $\hat{\theta}$, що визначається як корінь оціночного рівняння

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X_i\} \right) = 0, \quad (8')$$

де $\hat{Y}_i := Y_i \cdot I\{Y < C - \delta_n\}$, послідовність додатних чисел $\{\delta_n, n \geq 1\}$ прямує до 0, буде конзистентною за ймовірністю після оцінювання невідомої функції розподілу цензора за допомогою методу Каплана-Мейєра.

Доведення: Рівняння (8') перепишемо наступним чином:

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X_i\} \right) =: S_n(\beta, F^C),$$

де F^C – функція розподілу цензора. Розв'язуючи оціночне рівняння $S(\beta, F^C) = 0$, ми одержимо конзистентну оцінку $\hat{\beta}$ аналогічно теоремі 1 при відомому розподілі цензора F_C . Нехай за допомогою методу Каплана-Мейєра була одержана

оцінка функції розподілу цензора $\hat{F}_n^C$. Тоді маємо оціночне рівняння $\hat{S}_n(\beta, \hat{F}_n^C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)} - \exp\{b_0 + b_X^T X_i\} \right) = 0$,

де функція $\hat{G}(\cdot)$ визначається після оцінювання функції розподілу цензора. Перепишемо цю оціночну функцію у

вигляді $\hat{S}_n(\beta, \hat{F}_n^C) = S_n(\beta, \hat{F}_n^C) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)} - \frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)} \right)$. Залишається використати лему 3 для доведення теореми

3, забезпечивши наступне співвідношення $\Phi_n(F^C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)} - \frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ за ймовірністю. Це

виконується завдяки припущенню щодо обмеженості цензорів. Враховуючи також, що $E\|(1; X_i^T)^T\| < \infty$, одержимо

$$|\Phi_n| = \sup_{i=1, n} \left| E \left(\frac{1}{X_i} \right) \left(\frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)} - \frac{\Delta_i \hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)} \right) \right| \leq E \left\| \left(\frac{1}{X_i} \right) \right\| \cdot \sup_{i=1, n} \left\{ |\Delta_i T_i| \cdot \left| \frac{G(\hat{Y}_i) - \hat{G}(\hat{Y}_i)}{\hat{G}(\hat{Y}_i) G(\hat{Y}_i)} \right| \right\} \leq$$

$$\leq E \left\| \left(\frac{1}{X_i} \right) \right\| \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sup_{i=1, n} \left\{ |\Delta_i T_i| \cdot |G(\hat{Y}_i) - \hat{G}(\hat{Y}_i)| \right\} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} E \left\| \left(\frac{1}{X_i} \right) \right\| \sup_{i=1, n} \left\{ |G(\hat{Y}_i) - \hat{G}(\hat{Y}_i)| \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

де $\varepsilon := \varepsilon(\delta_n) = \inf_{t \leq C - \delta_n} G(t)$. Останній множник прямує до нуля тому що з наслідку 1.2. у статті [6] випливає збіжність

$\sup_{i=1, n} \left\{ |G(\hat{Y}_i) - \hat{G}(\hat{Y}_i)| \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Послідовність додатних чисел $\{\delta_n, n \geq 1\}$ прямує до нуля таким чином, щоб

$\varepsilon^{-2}(\delta_n) \cdot \sup_{i=1, n} \left\{ |G(\hat{Y}_i) - \hat{G}(\hat{Y}_i)| \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ за ймовірністю. Що і доводить теорему 3.

1. Augustin, T. Survival analysis under measurement error. – Habilitation-Schrift. Universität München, 2002. 2. Fazekas, I., Kukush, A. Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms // Computers Math. Applic. – 1997 – Vol. 34, No. 10, pp. 23–39. 3. Heyde, C. Quasi-Likelihood and its application. – Springer series in statistics, 1997. – 172 p. 4. Kukush, A., Schneeweiss, H., A comparison of asymptotic covariance matrices of adjusted least square and structural least squares in error ridden polynomial regression // Sonderforschungsbereich 386, Paper 218, 2000. 5. Pfanzagl, G. On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika – 1969. – 14, pp. 249–273. 6. Stute W. The central limit theorem under random censorship // Ann. Stat. – 1995. – Vol. 23, No. 2, – pp. 422–439.

Підтримано грантом SI-01424/2007 від Шведського Інституту.

Надійшла до редколегії 17.11.08

УДК № 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Для задачі оптимального керування для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, у випадку керування, що сходиться з обмеження, побудовано і обґрунтовано наближене усереднене керування у формі зворотного зв'язку.

For the problem of optimal control for a parabolic equation with rapidly oscillating coefficients in the case of control, which is going down from restriction, we construct and motivate approximate homogeneous control in the form of reverse connection.

1. Вступ

Задача побудови оптимального синтезу для нескінченновимірних динамічних систем є актуальною проблемою в теорії оптимального керування. Незважаючи на те, що керування практично всіма виробничими системами здійснюється за принципом зворотного зв'язку, проблема побудови обмежених оптимальних синтезованих керувань для нескінченновимірних динамічних систем ще далека від свого остаточного розв'язання. З практичної точки зору синтезоване керування має переваги над програмним, адже дозволяє здійснювати більш гнучке управління системою. Повний розв'язок задачі для випадку розподіленого керування без обмежень отримано в [2, 6]. Проте природна умова обмеженості керувань в таких системах значно ускладнює задачу. Крім того, нерегулярна залежність коефіцієнтів задачі від малого параметру (що пов'язана з неоднорідністю середовищ, в яких відбуваються досліджувані процеси) також додає певних складнощів, насамперед обчислювального характеру.

В даній роботі для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами і спеціальним напіввизначеним критерієм якості побудовано усереднене наближене обмежене керування за принципом зворотного зв'язку у випадку, коли керування сходиться з обмежень. Аналогічні питання, але без швидкоосцилюючих коефіцієнтів, розглянуті в [5], випадок виходу керування на обмеження розглянуто в [7].

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0, 1)$ керований процес в циліндрі $\bar{Q}_T = [0, T] \times \bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x, t) = A^\varepsilon(y^\varepsilon(x, t)) + g^\varepsilon(x)v(t), & (t, x) \in Q_T, \\ y^\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ y^\varepsilon(x, 0) = y_0(x), & x \in \bar{\Omega}; \end{cases} \quad (11)$$

де $A^\varepsilon := \text{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ вимірна симетрична матриця, яка задовольняє умови рівномірної

еліптичності й обмеженості, $g^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $a(x)$ та $g(x)$ – 1-періодичні матриця і функція відповідно, ε – малий параметр.

На керування накладено локальні обмеження

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2([0, T]) : |v(t)| \leq \xi \text{ м.с. на } [0, T]\}. \quad (12)$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб на розв'язках (1) при $v(\cdot) \in U$ мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_{\Omega} q(x) y^\varepsilon(x, T) dx \right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t) dt, \quad (13)$$

де $q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$.

В роботі [4] при деяких додаткових обмеженнях на функції g^ε та q виписано явні формули для синтезованого оптимального керування задачі (1) – (3). Проте ці формули містять нескінченні ряди, побудовані за коефіцієнтами Фур'є вихідних функцій g^ε , y_0 , q та власними значеннями оператора A^ε . Крім того, згадані формули залежать від малого параметру ε , входження якого, як правило, нерегулярне. Вказані вище обставини суттєво ускладнюють практичне застосування цих результатів.

Мета даної роботи – на базі точної формули для синтезованого оптимального керування $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$ задачі (1) – (3) (тобто керування в формі оберненого зв'язку $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, яке б при підстановці в (1) – (3) замість $v(t)$ мінімізувало заданий критерій якості), у випадку сходження керування з обмежень, побудувати наближене і певним чином усереднене керування та довести близькість отриманого керування $v_n[t, z_n^\varepsilon]$ до точного $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, а також близькість значень $J^\varepsilon(v_n[t, z_n^\varepsilon])$ и $J^\varepsilon(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])$.

3. Побудова наближеного усередненого синтезованого керування задачі (1) – (3)

Відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v \in U$ задача (1) має єдиний розв'язок в класі $C([0, T]; H_0^1)$ [1]. Крім того, задача оптимального керування (1) – (3) має єдиний розв'язок $v^\varepsilon(\cdot) \in U$ [6].

Неважко переконатися, що для розв'язків задачі (1) при довільному керуванні $v \in U$, для кожного значення параметру $\varepsilon \in (0; 1)$ та для всіх $t \in [0; T]$ справедливі оцінки

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 \leq 2 \left(\|y_0\|^2 + \frac{1}{(\lambda_1^\varepsilon)^4} \|g^\varepsilon\|^2 \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0; T]} |v(t)|^2 \right), \quad \|y_i^\varepsilon(t)\|^2 \leq 3 \left(\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2 \|g^\varepsilon\|^2 \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0; T]} |v(t)|^2 \right), \quad (14)$$

де тут і надалі $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{cases} A^\varepsilon X + \mu X = 0, & x \in \Omega, \\ X|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Тоді з урахуванням умови рівномірної еліптичності та [1] спектральна задача (5) при кожному $\varepsilon \in (0; 1)$ має власні числа $0 < (\lambda_1^\varepsilon)^2 \leq (\lambda_2^\varepsilon)^2 \leq \dots$, $(\lambda_n^\varepsilon)^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, і власні функції $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$, що утворюють ортонормований в $L_2(\Omega)$ та ортогональний в $H_0^1(\Omega)$ базис.

Поряд з оператором A^ε введемо усереднений оператор $A := \operatorname{div}(a^0 \vec{\nabla})$, де a^0 – усереднена до $a^\varepsilon(x)$ матриця [3].

Нехай $\{(\lambda_i^0)^2\}_{i=1}^\infty$ та $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ відповідно власні значення і власні функції спектральної задачі (5) з оператором A^0 , причому будемо вимагати, щоб відповідні власні значення були простими, g^0 – середнє значення функції $g(x)$. Тоді відомо [3], що мають місце оцінки

$$|(\lambda_k^\varepsilon)^2 - (\lambda_k^0)^2| \leq c_k \varepsilon, \quad \|X_k^\varepsilon - X_k^0\| \leq C_k \varepsilon, \quad k \geq 1, \quad (16)$$

та $g^\varepsilon \rightarrow g^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$. Звідси легко отримуємо, що

$$g_i^\varepsilon = (g^\varepsilon, X_i^\varepsilon) \rightarrow (g^0, X_i^0) = g_i^0, \quad q_i^\varepsilon = (q, X_i^\varepsilon) \rightarrow (q, X_i^0) = q_i^0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $(\cdot, \cdot)$ скалярний добуток в $L_2(\Omega)$.

При $\varepsilon \in [0; 1)$ введемо наступні позначення

$$f^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^\infty e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon, \quad \mathfrak{R}^\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^\infty q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} X_i^\varepsilon(x), \quad (17)$$

причому перший ряд збігається рівномірно по $t \in [0, T]$, а другий в просторі $C([0, T]; L_2)$.

Неважко переконатися в справедливості наступної леми [7].

Лема. При кожному $t \in [0; T]$ мають місце збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f^\varepsilon(t) \rightarrow f^0(t), \quad \|\mathfrak{R}^\varepsilon(\cdot, t) - \mathfrak{R}^0(\cdot, t)\| \rightarrow 0. \quad (18)$$

Розглянемо допоміжну "усереднену" до (1) – (3) задачу оптимального керування

$$\begin{cases} y_t^0(x, t) = A^0(y^0(x, t)) + g^0 v(t), & (t, x) \in Q_T, \\ y^0(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ y^0(x, 0) = y_0(x), & x \in \bar{\Omega}; \end{cases} \quad (9)$$

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2([0, T]) : |v(t)| \leq \xi \text{ м.с. на } [0; T]\},$$

$$J^0(v) = \left(\int_\Omega q(x) y^0(x, T) dx \right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t) dt.$$

Відмітимо, що задача оптимального керування (9) має єдиний розв'язок $v^0 \in U$, крім того, при довільному фіксованому керуванні $v \in U$ для розв'язку крайової задачі (9) справедливі оцінки типу (4).

Надалі будемо вважати дані (1) – (3) та (9) такими, що виконані наступні припущення.

Припущення 1: При довільному значенні параметра $\varepsilon \in [0;1]$ функція $f^\varepsilon(t)$ додатна і строго монотонно спадає на $[0;T]$.

Припущення 2: При кожному $\varepsilon \in [0;1]$ виконуються нерівності

$$\frac{(\Re^\varepsilon(\cdot, 0), y_0) f^\varepsilon(0)}{\gamma + \int_0^T (f^\varepsilon(s))^2 ds} < -\xi, \quad \frac{(\Re^\varepsilon(\cdot, 0), y_0) f^\varepsilon(T)}{\gamma + \int_0^T (f^\varepsilon(s))^2 ds} > -\xi, \quad (\Re^\varepsilon(\cdot, 0), y_0) + \xi \int_0^T f^\varepsilon(s) ds < 0.$$

При виконанні припущень 1,2 для довільного $\varepsilon \in [0;1]$ оптимальне керування задачі (9), у випадку $\varepsilon = 0$, та задачі (1) – (3), у випадку $\varepsilon > 0$, набуває вигляду

$$u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] = \begin{cases} \xi, & t \in [0, \tau^\varepsilon], \\ -\frac{(\Re^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) f^\varepsilon(t)}{\gamma + \int_t^T (f^\varepsilon(s))^2 ds}, & t \in [\tau^\varepsilon, T], \end{cases} \quad (10)$$

де $y^\varepsilon(x, t)$ – розв'язок крайових задач (9) та (1) відповідно з керуванням (10), а точка переключення τ^ε – єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{(\Re^\varepsilon(0), y_0) + \xi \int_0^{\tau^\varepsilon} f^\varepsilon(s) ds}{\gamma + \int_{\tau^\varepsilon}^T (f^\varepsilon(s))^2 ds} f^\varepsilon(\tau^\varepsilon) = -\xi. \quad (11)$$

Перейдемо до розв'язання задачі наближеного синтезу.

Для довільного $\varepsilon \in [0;1]$ та $n \in N$ введемо позначення

$$f_n^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon, \quad \Re_n^\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} X_i^\varepsilon(x).$$

Будемо вимагати виконання наступного припущення.

Припущення 3: При довільному значенні параметра $\varepsilon \in [0;1]$ функція $f_n^\varepsilon(t)$ додатна і строго монотонно спадає на $[0;T]$.

Нехай тепер $(10)_n$, $(11)_n$ – це формули (10), (11), в яких всі входження $f^\varepsilon(t)$ і $\Re^\varepsilon(x, t)$ замінені на $f_n^\varepsilon(t)$ і $\Re_n^\varepsilon(x, t)$ відповідно, τ_n^ε – відповідна точка переключення.

Тоді можна довести, що формально збудований закон $(10)_n$ – $(11)_n$ є законом оптимального керування для задач (9) при $\varepsilon = 0$ та (1) – (3) при $\varepsilon > 0$ з функціоналом J^ε , в якому функція $q(x)$ замінена на функцію

$q_n(x) = \sum_{i=1}^n q_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x)$, причому при кожному $n \in N$ точка τ_n^ε визначається єдиним чином і для довільного $\varepsilon \in [0;1]$

має місце збіжність $\tau_n^\varepsilon \rightarrow \tau^\varepsilon$, $n \rightarrow \infty$.

Тепер побудуємо і обґрунтуємо закон наближеного усередненого синтезу для задачі (1) – (3), причому основною метою є доведення близькості значень критерію якості (3) на точному і побудованому керуваннях.

Надалі основним об'єктом нашого дослідження буде наближене усереднене керування, що має вигляд

$$v_n[t, z_n^\varepsilon] = \begin{cases} \xi, & t \in [0, \tau_n^0], \\ -\frac{(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)) f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f_n^0(s))^2 ds}, & t \in [\tau_n^0, T], \end{cases} \quad (12)$$

де $z_n^\varepsilon(x, t)$ – розв'язок задачі (1) з керуванням (10), τ_n^0 – точка переключення, яка є розв'язком рівняння $(11)_n$ при $\varepsilon = 0$.

Зауваження. Керування (12) не є, взагалі кажучи, неперервним в точці $t = \tau_n^0$.

4. Коректність запропонованого керування

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема. Нехай $g^\varepsilon, q \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ та виконані припущення 1 – 3. Тоді для довільного малого $\eta > 0$ існують $n_0 \in N$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для будь-яких $n \geq n_0$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для керувань (10), (12) виконуються нерівності:

$$\|v_n[\cdot, z_n^\varepsilon] - u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon]\|_{L_2([0, T])} < \eta, \quad |J^\varepsilon(v_n[t, z_n^\varepsilon]) - J^\varepsilon(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])| < \eta. \quad (13)$$

Доведення.

1. Доведемо, що $v_n[\cdot, z_n^\varepsilon] \rightarrow v^0[\cdot, z^\varepsilon]$, $n \rightarrow \infty$ в $L_2([0, T])$ рівномірно по $\varepsilon \in (0; 1)$, де $v^0[t, \cdot]$ має форму (10) при $\varepsilon = 0$, а z^ε – розв'язок задачі (1) з керуванням $v^0[t, z^\varepsilon]$. Для цього оцінимо

$$D = \|v_n[\cdot, z_n^\varepsilon] - v^0[\cdot, z^\varepsilon]\|_{L_2([0, T])}^2 = \int_0^T |v_n[t, z_n^\varepsilon] - v^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt.$$

Зафіксуємо довільне достатньо мале $\eta > 0$ і, беручи до уваги той факт, що має місце збіжність точок переключення відповідних керувань, виберемо $n_1 \in \mathbb{N}$ таким чином, аби для всіх $n \geq n_1$ виконувалася нерівність

$$|\tau_n^0 - \tau^0| < \frac{\eta^2}{144\xi^2}. \text{ Далі розіб'ємо проміжок інтегрування в } D \text{ на три проміжки: } \left[0; \tau - \frac{\eta}{144\xi}\right],$$

$$\left[\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}; \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right], \quad \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]. \text{ Тоді } D = D_1 + D_2 + D_3, \text{ де } D_1 = \int_0^{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}} |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt = 0,$$

$$D_2 = \int_{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}} |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt < 4\xi^2 \cdot 2 \cdot \frac{\eta^2}{144\xi^2} = \frac{\eta^2}{18}, \quad D_3 = \int_{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^T |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt.$$

Тепер покажемо, що $v_n[t, z_n^\varepsilon] \rightarrow v^0[t, z^\varepsilon]$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно по $\varepsilon \in (0; 1)$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$.

Для довільного $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ оцінимо

$$\begin{aligned} |v_n[t, z_n^\varepsilon] - v^0[t, z^\varepsilon]| &= \left| \frac{(\mathfrak{R}^0(t), z^\varepsilon(t)) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f^0(s))^2 ds} - \frac{(\mathfrak{R}_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)) f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f_n^0(s))^2 ds} \right| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\mathfrak{R}^0(t) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f^0(s))^2 ds} \right\| \cdot \|z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\| + \left\| \frac{\mathfrak{R}^0(t) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f^0(s))^2 ds} - \frac{\mathfrak{R}_n^0(t) f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^T (f_n^0(s))^2 ds} \right\| \cdot \|z_n^\varepsilon(t)\| \leq \kappa \|z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\| + \alpha_n. \end{aligned} \quad (14)$$

де внаслідок леми та оцінок (4) $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ і не залежить від ε , а κ – стала.

Для завершення доведення рівномірної по ε збіжності відповідних керувань покажемо, що $\|\omega_n^\varepsilon(t)\| = \|z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ рівномірно по ε .

Зауважимо, що $\omega_n^\varepsilon(x, t)$ при $t \in [0, T]$ є розв'язком наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \omega_{nt}^\varepsilon(x, t) = A^\varepsilon(\omega_n^\varepsilon(x, t)) + g^\varepsilon(x)(v^0[t, z^\varepsilon] - v_n[t, z_n^\varepsilon]), & (t, x) \in Q_T, \\ \omega_n^\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ \omega_n^\varepsilon(x, t_0) = 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (15)$$

Розкладаючи функції задачі (15) в ряди Фур'є за системою $\{X_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$, для коефіцієнтів Фур'є $\omega_i(t)$ розв'язку крайової задачі $\omega_n^\varepsilon(x, t)$ отримуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{\omega}_i = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 \omega_i + g_i^\varepsilon(v^0[t, z^\varepsilon] - v_n[t, z_n^\varepsilon]), \\ \omega_i(0) = 0. \end{cases}$$

Звідси $\omega_i^2(t) \leq \frac{(g_i^\varepsilon)^2}{2(\lambda_i^\varepsilon)^2} \int_0^t (v^0[s, z^\varepsilon] - v_n[s, z_n^\varepsilon])^2 ds$, тому, $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{\|g^\varepsilon\|^2}{2(\lambda_1^\varepsilon)^2} \int_0^t (v^0[s, z^\varepsilon] - v_n[s, z_n^\varepsilon])^2 ds$, $t \in [0, T]$.

Далі, оскільки ми вже встановили близькість $v^0[t, z^\varepsilon]$ і $v_n[t, z_n^\varepsilon]$ в просторі $L_2\left(\left[0, \tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right]\right)$, то, використовуючи (14), для $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ маємо оцінку $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2 \leq \beta_n + K \int_{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^t \|\omega_n^\varepsilon(s)\|^2 ds$, де $K = \text{const}$, а $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і ці стала та послідовність не залежать від ε .

Звідки за нерівністю Гронуолла – Беллмана знаходимо, що при кожному $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно по ε .

Таким чином, $v_n[t, z_n^\varepsilon] \rightarrow v^0[t, z^\varepsilon]$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно по $\varepsilon \in (0; 1)$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$, а отже

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N_2 \geq N_1 \quad \forall n \geq N_2 \quad \forall \varepsilon \in (0; 1) \quad \|v_n[\cdot, z_n^\varepsilon] - v^0[\cdot, z^\varepsilon]\|_{L_2(0, T)} < \frac{\eta}{3} \quad (16)$$

2. Доведемо, що $v^0[t, z^\varepsilon] \rightarrow u^0[t, y^0]$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при кожному $t \in [0, T]$, де $u^0[t, y^0]$ задається формулою (10) при $\varepsilon = 0$ і є оптимальним керуванням задачі (9) з точкою переключення τ^0 .

Оскільки розглядувані керування мають спільну точку переключення τ^0 , то досить довести вказану збіжність для довільного $t \in [\tau^0, T]$.

Враховуючи той факт, що $z^\varepsilon(x, t)$ розв'язок задачі (1) з відповідним керуванням, і що для розв'язків крайової задачі (1) мають місце оцінки (4), отримуємо, що $\text{ess sup}_{t \in [0; \tau^0]} \left\{ \|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|z_t^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right\} \leq K$, де $K > 0$ деяка стала, що не залежить від ε .

Тоді з леми про компактність випливає існування такої функції $z^0 = z^0(x, t)$, що для деякої підпослідовності для всіх $t \in [\tau^0, T]$ мають місце збіжності

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(t) &\rightarrow z^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ сильно в } L_2(\Omega), \quad z^\varepsilon(t) \rightarrow z^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ слабо в } H_0^1(\Omega), \\ z_t^\varepsilon(t) &\rightarrow z_t^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ слабо в } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Оскільки внаслідок (17) $z^\varepsilon(t) \rightarrow z^0(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то при кожному $t \in [\tau^0, T]$: $v_0[t, z^\varepsilon] \rightarrow v_0[t, z^0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по тій же підпослідовності. А тому $g^\varepsilon(x)v_0[t, z^\varepsilon] \rightarrow g^0v_0[t, z^0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$ для всіх $t \in [\tau^0, T]$. Остання обставина дозволяє перейти до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ в задачі Коші для коефіцієнтів Фур'є розкладу функції $z^\varepsilon(x, t)$ за базисом $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$:

$$\begin{cases} \dot{z}_i^\varepsilon = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 z_i^\varepsilon + g_i^\varepsilon v^0[t, z^\varepsilon], \\ z_i^\varepsilon(0) = y_i^\varepsilon; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}_i^0 = -(\lambda_i^0)^2 z_i^0 + g_i^0 v^0[t, z^0], \\ z_i^0(0) = y_i^0. \end{cases}$$

А це означає, що $p(x, t) = \sum_{i=1}^\infty z_i^0(t) X_i^0(x)$ єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} p_t = A^0(p) + g^0 v^0[t, z^0], \\ p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{t=0} = y_0. \end{cases} \quad (18)$$

Покажемо тепер, що $p \equiv z^0$. Для цього оцінимо при кожному $t \in [\tau^0, T]$:

$$\|z^\varepsilon(t) - p(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^\infty (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(\cdot) - z_i^0(t) X_i^0(\cdot)) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n_3-1} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(\cdot) - z_i^0(t) X_i^0(\cdot)) \right\| + \left\| \sum_{i=n_3}^\infty (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(\cdot) - z_i^0(t) X_i^0(\cdot)) \right\| = I_1 + I_2$$

при кожному фіксованому $n_3 \geq 2$.

Оскільки для довільного $t \in [\tau^0, T]$: $z^\varepsilon(t) \rightarrow z^0(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ по підпослідовності та $X_i^\varepsilon \rightarrow X_i^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ для всіх $i \in N$, то $I_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ по цій підпослідовності.

Оцінимо I_2 . Для кожного фіксованого $n_3 \geq 2$ виберемо з урахуванням (6) таке $\varepsilon_1 > 0$, щоб для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ виконувалися нерівності $0 < (\lambda_{n_3}^0)^2 - 1 < (\lambda_{n_3}^0)^2 - c_{n_3} \varepsilon < (\lambda_{n_3}^\varepsilon)^2$ та $\|g^\varepsilon\| \leq 2 \|g^0\|$.

Крім того, неважко помітити, що для $z_i^\varepsilon(t)$ і $z_i^0(t)$, як для розв'язків вищезгаданих задач Коші, справедливі оцінки $(z_i^\varepsilon(t))^2 \leq 2(y_i^{0\varepsilon})^2 e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2 t} + 2 \frac{(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^2} \left(1 - e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2 t}\right)$, $(z_i^0(t))^2 \leq 2(y_i^{00})^2 e^{-(\lambda_i^0)^2 t} + 2 \frac{(g_i^0)^2}{(\lambda_i^0)^2} \left(1 - e^{-(\lambda_i^0)^2 t}\right)$, де $y_i^{0\varepsilon}$ та y_i^{00}

коефіцієнти Фур'є при розкладі функції $y_0(x)$ за ортонормованими базисами $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$ та $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$ відповідно.

$$\text{Тоді } I_2^2 \leq \sum_{i=n_3}^\infty \left((z_i^\varepsilon(t))^2 + (z_i^0(t))^2 \right) \leq 4 \|y_0\|^2 e^{-((\lambda_{n_3}^0)^2 - 1)t} + \frac{6 \|g^0\|^2}{(\lambda_{n_3}^0)^2 - 1} \rightarrow 0, \quad n_3 \rightarrow \infty.$$

Тоді отримуємо, що

$$\forall \zeta > 0 \quad \exists n_3 \geq n_2 \quad \exists \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}) \quad \forall t \in [\tau_0; T] \\ \left\| \sum_{i=1}^{n_3-1} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2}, \quad \left\| \sum_{i=n_3}^\infty (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2},$$

звідси $z^\varepsilon(t) \rightarrow p(t)$ при $t \in [\tau^0; T]$ в $L_2(\Omega)$, а отже, $p \equiv z^0$ в силу єдиності границі. Таким чином, z^0 розв'язок задачі (18) з керуванням $v^0[t, z^0]$, а тому з єдиності розв'язку крайової задачі маємо, що $z^0 \equiv y^0$ і при кожному $t \in [\tau^0; T]$ збіжність $z^\varepsilon \rightarrow y^0$ іде по всій послідовності $\varepsilon \rightarrow 0$.

Остаточно отримуємо, що для всіх $t \in [\tau^0; T]$ (а значить і для всіх $t \in [0; T]$) $v^0[t, z^\varepsilon] \rightarrow u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а тому

$$\forall \eta > 0 \quad \exists n_3 \geq n_2 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall n \geq n_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1) \quad \|v^0[\cdot, z^\varepsilon] - u^0[\cdot, y^0]\|_{L_2([0, T])} < \frac{\eta}{3}. \quad (19)$$

3. Доведемо, що $\|u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon] - u^0[\cdot, y^0]\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$.

Використовуючи міркування пункту 1 даного доведення і збіжність $\tau^\varepsilon \rightarrow \tau^0, \quad \varepsilon \rightarrow \infty$, достатньо переконатися, що

$$u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \rightarrow u^0[t, y^0] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{для кожного } t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144 \xi^2}; T \right].$$

Для доведення цього факту застосуємо метод, ужитий при доведенні пункту 2. Всі викладки, проведені тут, можуть бути повторені і у випадку керування $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, якщо переконатися у можливості граничного переходу у рівнянні

$$y_i^\varepsilon(t) = y_i^{0\varepsilon} + \int_0^t \left(-(\lambda_i^\varepsilon)^2 y_i^\varepsilon(s) + g_i^\varepsilon u^\varepsilon[s, y^\varepsilon] \right) ds, \quad t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144 \xi^2}; T \right].$$

Останнє легко випливає з твердження лема.

Таким чином

$$\forall \eta > 0 \quad \exists n_3 \geq n_2 \quad \exists \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \quad \|u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon] - u^0[\cdot, y^0]\|_{L_2([0, T])} < \frac{\eta}{3}. \quad (20)$$

Зі співвідношень (16), (19), (20) легко отримуємо, що

$$\forall \eta > 0 \quad \exists n_3 \in N \quad \exists \varepsilon_2 \in (0, 1) \quad \forall n \geq n_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \quad \|u_n[\cdot, z_N^\varepsilon] - u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon]\|_{L_2([0, T])} < \eta. \quad (21)$$

Звідси аналогічно доведенню пункту 1 отримуємо при кожному $t \in [0; T]$ близькість в $L_2(\Omega)$ розв'язків крайової задачі (1) з відповідними керуваннями, а отже, і близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях, тобто

$$\forall \eta > 0 \quad \exists n_4 \in N \quad \exists \varepsilon_3 \in (0, 1) \quad \forall n \geq n_4 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_3) \quad |J^\varepsilon(u_n[\cdot, z_n^\varepsilon]) - J^\varepsilon(u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon])| < \eta. \quad (22)$$

З оцінок (21) – (22) очевидним чином маємо (13), покладаючи $n_0 = \max\{n_3, n_4\}$, $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Таким чином, теорема доведена.

Висновки: В роботі побудоване й обґрунтоване наближене усереднене синтезоване керування для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, у випадку, коли керування сходять з обмежень. Доведено збіжність побудованого наближеного керування до точного та близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях.

1. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, 1997. 2. *Езоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М., 1978. 3. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М., 1993. 4. *Капустян Е.А., Наконечный А.Г.* Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44–57. 5. *Капустян О.А.* Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі // Укр. мат. журн. – 2004. – т. 56, № 10. – С. 1384–1394. 6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М., 1972. 7. *Сукретна А.В., Капустян О.А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2002. – т. 54, № 12. – С. 1704–1709.

ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ГРИГОРІЯ ЛОГВИНОВИЧА КУЛІНІЧА



Кулініч Григорій Логвинович – математик, доктор фізико-математичних наук, професор. Відомий спеціаліст в області теорії випадкових процесів та їх застосувань, учень академіка А.В. Скорохода. Його фундаментальними працями створено два нові перспективні наукові напрямки цієї теорії: а) асимптотична теорія стохастичних диференціальних рівнянь при дуже нерегулярній поведінці коефіцієнтів; б) теорія інваріантних множин стохастичних диференціальних рівнянь. Він фундатор методу просторового усереднення коефіцієнтів стохастичних диференціальних рівнянь і детермінованого методу стабілізації нестійких стохастичних систем.

Народився Г.Л. Кулініч 9 грудня 1938 року на хуторі Лучищів біля села Жеревці Лугинського району Житомирської області в багатодітній сім'ї залізничника (8 дітей).

В 1939 р. сім'я переїхала жити на станцію Білокорівичі і його дитинство пройшло на залізничній станції Білокорівичі. З ранніх років він проявив інтерес до математики і вважався в школі одним з кращих.

У 1956 році закінчив середню залізничну школу №32 на станції Білокорівичі Олевського району Житомирської області. Після закінчення школи Григорій Логвинович вирішив стати моряком. Що є цілком природним бажанням для хлопця з поліського села. Не склалось.

З 1956 по 1959 рік працював на електростанції Білокорівичського гарнізону, проходив дійсну службу в рядах Радянської Армії. У 1959 році при виконанні службових обов'язків став інвалідом Армії III групи. Цього року Григорій Логвинович вступив до двох військових училищ, але це було не його. Далі – Київ, механіко-математичний факультет.

На механіко-математичному факультеті Григорій Логвинович блискуче себе проявив і став одним з кращих, закінчивши механіко-математичний факультет у 1964 році з відзнакою. Цього року вступив до аспірантури при кафедрі теорії ймовірностей.

З 1966 року він нерозривно працює на викладацьких посадах на механіко-математичному факультеті КНУ імені Тараса Шевченка.

Під керівництвом академіка А.В.Скорохода в 1968 році захистив кандидатську дисертацію "Про граничну поведінку розподілів розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь".

Г.Л. Кулініч вперше у вітчизняній і зарубіжній літературі почав (УМЖ, № 3, 1967 р.) систематичне дослідження поведінки нестійких розв'язків СДР. Через існування просторових усереднень коефіцієнтів рівняння він отримав необхідні та достатні умови слабкої збіжності у рівномірній топології нормованого розв'язку до вінерівського процесу, до узагальненого процесу дифузійного типу, достатні умови слабкої збіжності у рівномірній топології до беселівського процесу, дифузійного процесу та споріднених ним інших марківських процесів. Тут слід підкреслити, що Г.Л. Кулініч є піонером (1967–1968 рр.) в розробці методу просторового усереднення коефіцієнтів у СДР Іто і відповідних їм диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу. Також Г.Л.Кулінічем вперше (1976) було встановлено що розв'язок СДР Іто може з ймовірністю 1 "дифундувати" по гладкій кривій фазового простору і було введено для СДР поняття ЛІ локальної інваріантності множин вигляду $G(x)=C$, де $G(x)$ – двічі неперервно диференційована функція в області D . Він вперше встановив необхідні і достатні умови ЛІ таких множин, знайшов явний вигляд всіх можливих ЛІ кривих для лінійних СДР другого порядку із сталими коефіцієнтами, описав клас нелінійних СДР, для яких ці криві будуть ЛІ. Ним же розроблений метод дослідження поведінки розв'язку на ЛІ множинах.

Г.Л.Кулініч започаткував аналогічну теорію і для СДР із стрибками. Результати цього напрямку Г.Л. Кулініч успішно застосовує:

- 1) при побудові фазового "портрету" не лише дифузійних процесів а і процесів із стрибками;
- 2) при якісному аналізі поведінки гармонічного осцилятора з тертям, збуреного випадковим процесом типу "білого і дробового шумів", які діють під певним кутом до вектора фазової швидкості;
- 3) при розробці методів стабілізації нестійких стохастичних систем;
- 4) при стабілізації розв'язку задачі Коші диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу другого порядку.

Докторську дисертацію на тему "Асимптотичні задачі стохастичних диференціальних рівнянь" захистив в 1981 році. В 1983 р. йому присвоєно вчене звання професора кафедри загальної математики.

З 1981 по 2003 рр. Г.Л. Кулініч працював завідувачим кафедрою загальної математики механіко-математичного факультету. Читав нові спеціальні курси "Асимптотична поведінка нестійких розв'язків СДР", "Інваріантні множини СДР"; "Методи стабілізації нестійких стохастичних систем".

На цій посаді розкрився талант Г.Л. Кулініча як керівника по роботі з кадрами. Вже будучи завідувачим кафедрою, Григорій Логвинович був точкою притягання для багатьох молодших і старших колег.

Завдяки організаторському таланту Григорія Логвиновича йому вдалось зберегти традиції кафедри, її наукову спрямованість і відкрити нову спеціалізацію при кафедрі "математичне моделювання". В цей час співробітниками кафедри загальної математики вивчається широке коло задач, пов'язаних зі стохастичними диференціальними рівняннями та їх застосуваннями.

Педагогічна діяльність Г.Л. Кулініча поєднується з математичним талантом вченого. Підготував 18 кандидатів наук. Він успішно займався науковою роботою. Основні результати його досліджень містяться в більше чим 150 наукових працях

Г.Л. Кулініч є автором двох учбових посібників і підручника з грифом Міністерства освіти України у двох книгах з "Вищої математики", навчальних посібників "Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь", "Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто".

У 1999 році Г.Л. Кулініч нагороджений знаком "Відмінник освіти України", у 2006 році обраний академіком Академії наук вищої школи України.

Чуйність, доброзичливість, відкритість, щирість, відданість справі відзначають Григорія Логвиновича Кулініча серед його колег по факультету та університету.

Станжицький О.М., Плахотник В.В., Перегуда О.В.

ДО 100-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АКАДЕМІКА МИКОЛИ МИКОЛАЙОВИЧА БОГОЛЮБОВА

"Наука – головна і єдина мета в моєму житті".
(М. Боголюбов)

21 серпня 2009 року виповнилося 100 років від дня народження видатного математика і фізика-теоретика – академіка Миколи Миколайовича Боголюбова – вченого, наукові досягнення якого отримали світове визнання. Завдяки своїм видатним науковим здобуткам і енциклопедичним знанням з різних напрямів математики і фізики він вважається одним з найвидатніших вчених ХХ-го століття.

Протягом сімдесяти років своєї наукової діяльності М.М. Боголюбов написав і опублікував понад 300 наукових праць з варіаційного числення, теорії наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь та асимптотичних методів нелінійної механіки, теорії майже періодичних функцій, теорії динамічних систем, функціонального аналізу, теорії ймовірностей, математичної фізики, статистичної механіки, квантової теорії поля, фізики елементарних частинок, де його внесок був фундаментальним, а часом і визначальним для подальшого розвитку того чи іншого напрямку математики чи фізики – у сучасній науковій літературі часто використовуються такі терміни як "асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського", "теорема усереднення Боголюбова", "теорема Боголюбова про інваріантну міру", "ланцюжок рівнянь Боголюбова", "R-операція Боголюбова-Парасюка", "дисперсійні співвідношення Боголюбова", "теорема Боголюбова про вістря клина" та інші.

Микола Миколайович був видатним математиком і володів тонкою фізичною інтуїцією. Як зазначали учні М.М. Боголюбова: "Головна риса наукового стилю Миколи Миколайовича полягає у вмінні оцінити ключовий характер проблеми і потім, не зупиняючись перед труднощами, створити адекватний метод розв'язання проблеми, причому злиття математики і фізики змушує кожного, хто вивчає роботи М.М. Боголюбова згадати про ті часи, коли представників природничих наук називали просто натурфілософами". Внесок М.М. Боголюбова до скарбниці світової науки важко переоцінити: його по праву можна назвати "Ньютоном ХХ-го століття".

М.М. Боголюбов значною мірою простимулював взаємне проникнення і вплив математичних методів і фізичних ідей, які народжувались у різних напрямках розвитку природознавства в ХХ столітті. Яскравий талант дозволив Миколі Миколайовичу сформулювати і розв'язати низку ключових проблем теоретичної фізики, якими визначались головні напрями наукового та технічного прогресу ХХ-го століття. Усна легенда зберігає питання "батька кібернетики" Н. Вінера: "А чи не існує кілька Боголюбових, кожний з яких – найбільший спеціаліст у своїй галузі?"

Життя і наукова діяльність М.М. Боголюбова тісно пов'язані з Києвом і Україною. З Києвом пов'язаний один з найбільш плідних на новітні ідеї періодів творчості М.М. Боголюбова – семінарами Д.О. Граве та М.М. Крилова (1922–1928 р.); з кафедрою математичної фізики ВУАН (1928–1934 р.), яка в 1934 р. увійшла до складу Інституту будівельної механіки, де М.М. Боголюбов залишався співробітником до 1950 р.; з Київським університетом (1936–1941, 1944–1958 р.); з Інститутом математики (1945–1956 р.) та згодом – з Інститутом теоретичної фізики, який створив і очолював М.М. Боголюбов (1966–1973 р.) і який в наш час носить його ім'я. Працюючи в Києві, М.М. Боголюбов отримав низку видатних результатів з математики і теоретичної фізики. Відзначаючи значний вплив М.М. Боголюбова на розвиток математики і теоретичної фізики в Києві, не можна не згадати про всесвітньо відому Київську школу з нелінійної механіки, започатковану М.М. Криловим і М.М. Боголюбовим.

Микола Миколайович Боголюбов народився у Нижньому Новгороді. Невдовзі сім'я переїхала до м. Ніжин, де в 1911 році народився його брат Олексій – середній син сім'ї Боголюбових, який згодом став відомим вченим – істориком математики і механіки, членом-кореспондентом НАН України. В 1913 році після обрання батька Миколи Миколайовича – Миколи Михайловича професором богослов'я Університету Святого Володимира сім'я Боголюбових переїздить до Києва. Тут сім'я Боголюбових деякий час мешкала в "червоному корпусі" Університету Святого Володимира, де 24 січня 1918 р. народився третій син – Михайло, який в наш час є відомий вченим – фахівцем зі східних мов, дійсним членом Російської академії наук. Дитинство Миколи Миколайовича і його брата Олексія проходило на університетському дворі, серед штабелів дощок, які були приготвлені для будівництва корпусів університетської бібліотеки і хімічної лабораторії, та в Ботанічному саду. Михайло сам підготував свого сина – М.М. Боголюбова до вступу в Олександрівську Київську гімназію, хоча хлопчик не закінчив і першого класу гімназії, бо йшла громадянська війна. В гімназії М.М. Боголюбов навчався в цілому добре, але з арифметики мав в кращому випадку "четвірку", вчитель йому говорив: "З тебе, Коля, математика не вийде."

У 1920 р. на деякий час сім'я Боголюбових виїздить з Києва до села Велика Круча на Полтавщині, де вперше у Миколи Миколайовича проявився його математичний талант і де він отримав свідоцтво про закінчення Великокручанської семирічної школи – єдиний в його житті документ про освіту. Згадуючи про цей період свого життя, М.М. Боголюбов зазначав: "Вченим я став у Великій Кручі".

Після повернення до Києва Микола Михайлович почав брати для свого старшого сина книги з математики і фізики в університетській бібліотеці, які М.М. Боголюбов, завдяки своїй великій працездатності, швидко і глибоко опановував, і до середини 1922 року він вже володів знаннями з математики і фізики на рівні повного університетського курсу. Побачивши здібності до освоєння знань з фізики і математики, батько відвів сина до академіка Д.О. Граве, який порадив йому відвідувати його лекції в Київському університеті, щоб систематизувати знання з математики, та дозволив приймати участь в науковому семінарі викладачів та аспірантів.

Весною 1923 року відбулася зустріч, яка стала доленосною в житті М.М. Боголюбова – він зустрів Миколу Митрофановича Крилова – свого наставника, майбутнього колегу, соратника, однодумця і друга на довгі роки. М.М. Крилов тяжів до практики, його ідеалом математика був учений, який в рівняннях і формулах бачив те, що можна завтра застосувати на будівельному майданчику чи цеху. Він цікавився новою технікою, часто зустрічався з інженерами і конструкторами. За висловленням академіка А. Данжуа М.М. Крилов поєднував в собі три категорії вчених: він одночасно був видатним математиком, фізиком та інженером. Йому були добре знайомі сучасний математичний ана-



ліз, проблеми сучасної фізики та практичні потреби техніки. Цим і пояснюється математична строгість всіх його міркувань, широта охоплення різноманітних проблем фізики та техніки, доведення досліджень до практичних інженерних рекомендацій, до формул та висновків, які можуть на практиці використовувати інженери.

Перша наукова праця М.М. Боголюбова була надрукована в 1924 році спільно з М.М. Криловим і стосувалась варіаційного числення, яким серйозно займався М.М. Крилов протягом тривалого часу і де він досяг важливих наукових результатів. На той час М.М. Боголюбову виповнилося лише 15 років. Незабаром Мала Президія Укрголовнауки розглянула питання про виняткове зарахування „в аспіранти кафедри математики М.Боголюбова з огляду на його феноменальні здібності до математики” і ухвалила постанову від 1 червня 1925 року, в якій значилось: „Вважати М. Боголюбова на положенні аспіранта кафедри математики в Києві. Включити його в список на заробітну платню.” 8 липня 1928 року на засіданні кафедри сільськогосподарської механіки Інституту технічної механіки М.М. Боголюбов захищає дисертацію на тему: „Про деякі нові методи варіаційного числення”. У 1930 році Болонська Академія наук (Італія) удостоїла М.М. Боголюбова премії за роботу „Застосування прямих методів до однієї проблеми варіаційного числення”, а 6 квітня 1930 року Загальні збори фізико-математичного відділення Всеукраїнської Академії наук, за поданням академіків Д.О. Граве та М.М. Крилова, присудили М.М. Боголюбову науковий ступінь доктора математики "honoris causa".

На початку 30-х років відбувався швидкий розвиток техніки і нових технологій. При цьому виникали проблеми, які потребували розвитку нових математичних методів для їх розв'язання. Як писав М.М. Боголюбов у статті до 50-ти річного ювілею свого вчителя, "М.М. Крилов спільно зі мною, його учнем і співробітником, звернувся до вивчення актуальних проблем теорії нелінійних коливних процесів. Поєднуючи характерні для нього глибокі теоретичні побудови та практичну спрямованість, М.М. Крилов вдалось тут закласти основи нової галузі математичної фізики – нелінійної механіки." Саме в цей час М.М. Крилов якось сказав М.М. Боголюбову: „Ти вже став справжнім вченим, маєш чимало цілком оригінальних праць, які б зробили честь найбільшим математичним авторитетам, та я тобі скажу ось що: можна мати великий талант і використати його на виробництво запальничок, а треба народжувати полум'я, з якого б інші не цигарки підпалювали, а самі загорялися. Тобі не можна розмінюватися на дрібниці, треба орати глибоко, бо маєш в руках не соху, а добрячого плуга". Так розпочався академічний шлях М.М. Боголюбова, який тривав до останніх днів його життя – 13 лютого 1992 року.

На початку війни М.М.Боголюбов у складі Академії наук України виїздить у евакуацію до Уфи, а потім – до Москви. В цей час, як пише Микола Миколайович у своїй автобіографії, він, продовжуючи свої теоретичні дослідження з нелінійної механіки, займався переважно проблемами оборонної тематики.

Повернувшись в Київ М.М. Боголюбов на початку 1944 р. У травні 1944 р. він починає працювати в Київському університеті, а дещо згодом – в Інституті математики, до якого М.М. Боголюбова було зараховано 1 березня 1945 р. "старшим науковим співробітником з дорученням керувати семінаром з нелінійної механіки" за наказом академіка М.О. Лаврентьєва, який в той час очолював інститут. Незабаром вийшов новий наказ: "На зміну наказу №14 від 5/III-1945 р. призначити член-кореспондента М.М. Боголюбова завідувачем відділу асимптотичних методів та статистичної механіки з 1/IV-1945 р." У вересні 1949 р. у зв'язку з розширенням відділу і організацією в ньому обчислювальної групи відділ було перейменовано у відділ математичної фізики. Пізніше на основі цієї групи було створено лабораторію обчислювальної математики і обчислювальної техніки, з якої в 1957 р. було виділено самостійний науковий підрозділ – обчислювальний центр.

В автобіографії М.М. Боголюбова знаходимо, що з 1944 р. "зацікавившись питаннями статистичної фізики, почав працювати в галузі теоретичної фізики, в яку вдалось перенести деякі асимптотичні методи нелінійної механіки." І відразу він отримав видатні результати зі статистичної механіки. Наукову діяльність в перші після воєнних роки яскраво характеризують такі факти з творчості М.М. Боголюбова за цей період. Звіт М.М. Боголюбова за 1945 р. в Інституті математики з теми "Проблеми динамічної теорії в статистичній фізиці" був рукописом тепер всесвітньо відомої монографії "Проблеми динамічної теорії в статистичній фізиці", яка опублікована в 1946 р. Результати, що увійшли до цієї монографії, склали новий етап у розвитку статистичної механіки після попередніх етапів, що пов'язані з іменами таких видатних постатей як Максвелл, Больцман, Гіббс. Ця праця одразу ж отримала заслужене визнання – за неї і монографію "Про деякі статистичні методи математичної фізики" (1945 р.) М.М. Боголюбову в 1947 р. було присуджено Сталінську премію I ступеня. Тут вперше було запропоновано рівняння, у наш час відомі як ланцюжок рівнянь Боголюбова – це фундаментальні рівняння, які описують природу речей оточуючого Світу. Принципові питання статистичної механіки – ключові для наукової творчості М.М. Боголюбова. Він неодноразово повертався до їх дослідження протягом всього свого наукового шляху.

У 1947 р. в збірнику праць Інституту математики було опубліковано фундаментальну працю М.М. Боголюбова "До теорії надплинності" (подана до друку 24.09.1946 р.), яка невдовзі була передрукована російською мовою в журналі "Известия АН СССР", англійською мовою в "Journal Physics" та німецькою в "Sowjetwissenschaft" в 1948 р. Ця стаття є найбільш цитованою за останній час працею. В ній вперше було сформульовано мікроскопічну теорію такого квантового явища як надплинність. Явище надплинності, яке вперше відкрите для рідкого гелія П.Л. Капицею в 1938 р., полягає у властивості квантових рідин протікати крізь мікроскопічні пори без тертя. Згодом це явище спостерігалось і в інших системах. Експериментальне відкриття бозе конденсату в розріджених газах, за яке у 2001 р. групі іноземних вчених було присуджено Нобелівську премію з фізики, цілком підтвердило теорію М.М. Боголюбова 1946 р. При розробці мікроскопічної теорії надплинності та згодом мікроскопічної теорії надпровідності М.М. Боголюбов вперше застосував нову математичну ідею, що відома тепер як канонічне перетворення Боголюбова. В результаті в його працях незалежно від Бардіна, Купера, Шриффера, які отримали Нобелівську премію з фізики за 1972 р., було створено послідовну мікроскопічну теорію надпровідності.

У 1989 році академік А.А.Логунів писав про М.М.Боголюбова – свого вчителя, так: "Мнение о его месте в науке сложилось давно: это крупнейший ученый века. После Пуанкаре и Гильберта только он совмещает в себе великого физика и математика".

М.М. Боголюбов по праву вважається творцем сучасної математичної фізики. У своєму виступі на міжнародній нараді з проблем квантової теорії поля в 1981 р. М.М. Боголюбов так визначив стан розвитку математичної і теоретичної фізики: "На наших очах за останні роки сформувалась цілком нова галузь науки, яку доречно назвати сучасною математичною фізикою". Учень М.М.Боголюбова академік В.С. Владіміров писав: "Органічне злиття математики і фізики в творчості М.М. Боголюбова дозволило йому внести вирішальний внесок у розвиток теоретичної фізики і фактично закласти основи сучасної математичної фізики, яка продовжує традиції Гільберта, Пуанкаре, Ейнштейна, Дірака".

В період 1951–1953рр. М.М. Боголюбов працював над надтаємному об'єкті "Арзамас-16" (м. Саров) і в Інституті атомної енергії (в наш час "Курчатовський інститут", м. Москва), де паралельно з математичним забезпеченням ро-

біт зі створення водневої зброї, він працював над спеціальною темою зі з'ясування можливостей створення магнітного термоядерного реактора. З 1948 р. М.М. Боголюбов одночасно з роботою в Києві почав очолювати відділ математичної фізики в Інституті хімічної фізики в Москві, а з 1949 р. також почав завідувати відділом теоретичної фізики Математичного інституту імені В.А. Стеклова АН СРСР. Після переїзду до м. Москви у повній мірі виявився видатний талант М.М.Боголюбова як організатора науки: він тривалий час очолював Об'єднаний інститут ядерних досліджень (м. Дубна), Математичний інститут імені В.А. Стеклова АН СРСР, Відділення математики АН СРСР, за його ініціативою в Києві у 1966 році було організовано Інститут теоретичної фізики, яким він керував протягом шести років і доклав багато зусиль для його становлення і який зараз носить ім'я М.М. Боголюбова.

Наукову діяльність М.М. Боголюбов постійно поєднував з педагогічною діяльністю в університетах та інших вищих навчальних закладах. Викладати М.М. Боголюбов почав у 1936 році в Київському університеті, у 1937 році він очолював новостворену кафедру теорії функцій, по якій йому в 1940 році було присуджено вчене звання професора. У Київському університеті Микола Миколайович працював протягом 1936–1941 та 1944–1958 років: з 1945 по 1948 роки він декан механіко-математичного факультету, у 1946 році заснував кафедру математичної фізики механіко-математичного факультету, став першим її завідувачем і очолював її по 1950 рік. Після приєднання Львівщини та згодом Буковини до України, М.М. Боголюбов працював у Чернівецькому університеті. Він також читав лекції студентам фізичного факультету Львівського університету, Київського технологічного університету харчової промисловості, а з 1953 року завідував кафедрою теоретичної фізики Московського державного університету імені М.В. Ломоносова, де згодом заснував кафедру квантової статистики та теорії поля.

Як згадують колишні студенти Миколи Миколайовича, кожна його лекція несла в собі щось нове, створене ним самим, і тому захоплювала слухачів. В 1949 р. на основі лекцій, прочитаних в Київському та Московському університеті, М.М. Боголюбов опублікував українською мовою підручник "Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем", який відразу став класичним і випередив свою епоху на десятиліття. Інший приклад, відома в усьому світі книга "Введение в теорию квантованных полей", що написана спільно з його учнем Д.В. Ширковим, перше видання якої побачило світ в 1957 р., є зразком підручника і в наш час. На цій книзі виросло не одне покоління відомих вчених у всьому світі.

В 1945 р. з ініціативи М.М. Боголюбов було відновлено проведення Київських математичних олімпіад. Як голова комітету з організації в Києві математичних олімпіад для школярів, Микола Миколайович залучив до роботи зі школярами кращі математичні кадри Київського університету – від аспірантів до провідних викладачів. Робота проводилась на громадських засадах: школярам пропонувались цікаві задачі з елементарної математики, переможці олімпіади нагороджувались грошовими преміями, що у тяжкі післявоєнні часи було суттєвим стимулом. Оцінюючи роботи учасників олімпіад, М.М.Боголюбов обов'язково звертав увагу на те, як розв'язано запропоновані задачі і завжди цінував цікаві оригінальні роботи. Такі олімпіади, на думку Миколи Миколайовича, давали можливість відшукати здібних дітей. Багато переможців олімпіад тих років згодом стали відомими вченими.

До М.М. Боголюбова завжди тягнулася молодь, і передусім її приваблювала можливість стати співучасником процесу пізнання. Учень Миколи Миколайовича академік РАН і НАН України Ю.О. Митропольський писав про М.М. Боголюбова: «Душевна щедрість, людяність, невтомність та вируюча енергія, невгамовний характер, глибина та енциклопедичність наукової думки, тонкий аналіз, відданість справі – ось ті риси, які поєднують в собі наш земляк». Академік НАН України О.С. Парасюк – учень академіка Г.М. Савіна і М.М. Боголюбова зазначав, що "М.М. Боголюбов був надзвичайно компетентною людиною, яка багато що могла зробити, та тримав руку на пульсі сучасних проблем." "М.М. Боголюбов ніколи не сперечався про пріоритет особисто своїх праць, вважаючи це не вартим гідності вченого, але за пріоритет праць учнів боровся."

М.М. Боголюбов постійно керував кількома науковими семінарами, у яких виростали нові вчені, серед яких багато хто згодом сам став академіком, він започаткував всесвітнього відомі наукові школи теоретичної фізики і математичної фізики в багатьох містах країни, а його учні, в свою чергу, створили свої наукові школи. В цих наукових школах і досі променіє боголюбовський дух: повага до істини, співпереживання, добра воля, прощення, терпимість, любов, віра... Ці канонічні християнські принципи М.М. Боголюбов, мабуть, успадкував від свого батька – відомого релігійного філософа Миколи Михайловича Боголюбова (1872–1934), автора праць "Теизм и пантеизм. Опыт выяснения логического взаимоотношения данных систем" (1899), "Основной вопрос о мировой жизни и сущность пантеизма" (1900), "Теизм и пантеизм" (1901), "Философия религии" (1915; за цей твір йому присвоєно вчений ступінь доктора богослов'я).

Микола Миколайович був росіянином за походженням, але вихований в атмосфері любові до України, відчував велику повагу до землі, на якій пройшли його дитинство і юнацькі роки, на якій він сформувався як вчений і здобув світове визнання. Він вважав себе українцем, про що власноруч писав в анкетах і особових паперах. Такий же запис був і в його радянському паспорті. Брат М.М. Боголюбова, Олексій Миколайович згадував: "У Миколи Миколайовича було дві батьківщини – Україна і Росія і дві рідні мови – російська і українська. Починаючи від великокочовницької епопеї, він поріднився з Україною, а поезія Шевченка була першою поезією, якою він захопився. Молодий аспірант кафедри математичної фізики писав протоколи семінарів кафедри українською мовою і перші його праці також були написані українською. Микола Миколайович не приховував своєї громадянської позиції – у тяжкі для України часи, коли почали знищувати українську інтелігенцію, коли в Харкові проходив сфальсифікований процес СВУ, а українські книги горіли, він визнав себе українцем і вважав себе ним все своє життя. Він називав Київ своїм улюбленим містом, прирівнюючи до нього лише Париж". Ці слова вичерпно пояснюють любов Миколи Миколайовича до України, його відношення до землі, на якій виріс, до української мови – це має бути добрим прикладом для багатьох наших співвітчизників.

М.М. Боголюбов був і залишається зразком наукового та трудового подвигу Вченого. Такі вчені, як Микола Миколайович Боголюбов, не вкладаються в рамки сучасності – вони творять майбутнє. Його наукова творчість – це духовне надбання всього людства на всі часи.

Герасименко В.І., Городній М.Ф., Загородній А.Г., Парасюк І.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М., Самойленко В.Г.

До уваги читачів! У Віснику №19 у розділі ЗМІСТ та на стор. 12 було допущено помилку.
Замість Ю.Єльченко читати Ю.Ільченко.

Наукове видання



ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 22

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Підписано до друку 29.01.10. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № 328. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 10. Обл.-вид. арк. 10. Зам. № 29-5074.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; факс (38044) 239 31 28
E-mail: vpc@mail.univ.ua