

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics.

For scientist, professors, students.

<b>ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР</b>	І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
<b>РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ</b>	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Суцанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
<b>Адреса редколегії</b>	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 2, корп. 7, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
<b>Затверджено</b>	Вченою радою механіко-математичного факультету 08.10.07 (протокол № 2)
<b>Атестовано</b>	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/7 від 09.06.99
<b>Зареєстровано</b>	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
<b>Засновник та видавець</b>	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
<b>Адреса видавця</b>	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

---

## ЗМІСТ

---

### ВИПУСК 19

<b>Мітін Д., Назаренко М.</b> Фрактальна апроксимація у просторах $L_p$ , $0 < p < 1$ .....	4
<b>Задоянчук Н., Касьянов П.,</b> Про роз'язність нелінійних еволюційних рівнянь з $M$ -псевдомонотонними некоерцитивними .....	7
<b>Єльченко Ю., Чайковський А.</b> Диференціальне рівняння зі зсувом аргументу в просторі $\mathbb{L}_2$ у випадку виродженого операторного коефіцієнта .....	12
<b>Кічмаренко О., Скрипник Н.</b> Нечіткі диференціальні рівняння з запізненням .....	18
<b>Самусенко П.</b> Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням і точкою повороту .....	24
<b>Омелян О.</b> Інваріантність системи рівнянь хемотаксису відносно алгебри Галілея .....	29
<b>Будницька Н., Пришляк О.</b> Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях .....	36
<b>Банна О., Мішура Ю.</b> Найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху .....	38
<b>Вижва З., Зражевський О.</b> Про статистичне моделювання випадкових полів на площині .....	43
<b>Кубайчук О.</b> Асимптотика оцінки для баєсового порогу .....	47
<b>Зайцев О., Хорошилов О.</b> Уточнення методу розв'язання газодинамічних задач, що мають особливість на вільній межі .....	50
<b>Мольченко Л., Лоос І., Індіамінов Р.</b> Магнітопружне деформування ортотропних оболонок обертання з ортотропною електродовідністю .....	53

### ВИПУСК 20

<b>Балога С.</b> Асимптотична еквівалентність систем диференціальних рівнянь .....	60
<b>Вакал Ю., Парасюк І.</b> Оцінка хаусдорфової розмірності множини колмогорівських торів, частоти яких погано апроксимуються раціональними числами .....	63
<b>Громик А., Конет І</b> Інтегральні зображення розв'язків стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатопарових просторових областей .....	65
<b>Попов В., Вакал, Є. Гап'як І.</b> Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для крайових задач в областях з негладкими межами .....	73
<b>Пришляк О.</b> Функції загального положення на поверхнях з межею .....	77
<b>Дереч В.</b> Варіанти інверсних напівгруп скінченного рангу .....	80
<b>Дарійчук, І.</b> Рівномірна збіжність з ймовірністю одиниця вейвлет розкладу одного класу передгаусових випадкових процесів .....	84
<b>Моклячук М., Щестюк Н.</b> Робастна фільтрація однорідних та однорідно зв'язаних випадкових полів дискретного аргументу .....	88
<b>Андрущенко В., Лібов Д., Якименко М.</b> Дослідження спектрів пружних коливань коротких суцільних циліндрів .....	91
<b>Антонова В., Зайцев О.</b> Транспортування завихореною течією часточок зависі у куті .....	95
<b>Мольченко Л., Лоос І., Корнєєв С.</b> Нелінійне деформування кільцевої пластини змінної жорсткості в магнітному полі .....	99
<b>Наквасюк В.</b> Задачі електропереносу з розривними роз'язками .....	102
<b>П'ятецька О.</b> Вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування коливань круглої пластини з жорстким закріпленням торців .....	106
До 70-річчя від дня народження Анатолія Михайловича Самойленка .....	110
До 65-річчя від дня народження Володимира Васильовича Кириченка .....	112
До 80-річчя з дня народження Антона Юрійовича Лучки .....	114

---

## CONTENTS

---

### ISSUE 19

<b>Mitin D., Nazarenko M.</b> Fractal approximation in spaces $L_p$ , $0 < p < 1$ .....	4
<b>Zadoyanchuk N., Kasianov P.</b> On solvability for nonlinear evolution equations with $M$ -pseudomonotone noncoercive maps .....	7
<b>Ilchenko Yu., Chaikovskiy A.</b> Differential equation with argument's displacement in $l_2$ space in the case of degenerated operator coefficient .....	12
<b>Kichmarenko O., Scripnik N.</b> Fuzzy differential equations with delay .....	18
<b>Samusenko P.</b> Asymptotical integration of singularly perturbed systems of the differential equations with degeneration and a turning point .....	24
<b>Omelyan O.</b> The invariance of the system of chemotaxis equations under Galilei transformation .....	29
<b>Budnitska N., Prishlyak. O.</b> The equivalence of closed 1-forms on orientable closed surfaces .....	36
<b>Banna O., Mishura Yu.</b> The simplest martingales of the best approximation to fractional Brownian motion .....	38
<b>Vyzhva Z., Zrashevsky O.</b> About the statistical simulation of random fields on the plane .....	43
<b>Kubajchuk O.</b> The asymptotic of the estimator for bayesian border .....	47
<b>Zaitcev O., Khoroshilov O.</b> Improvement of method of the solution of problem of gas dynamics with a features on free boundary .....	50
<b>Molchenko L., Loos I., Indiaminov R.</b> Magnetoelasticity deformation of orthotropic rotation shells with orthotropic electroconductivity .....	53

### ISSUE 20

<b>Baloga S.</b> Asymptotic equivalence of systems of differential equations .....	60
<b>Vakal Y., Parasyuk I.</b> Estimate of the Hausdorff dimension for a set of Kolmogorov tori whose frequencies are badly approximable by rational .....	63
<b>Gromyk A., Konet I.</b> Integral presentations of solutions of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas .....	65
<b>Popov V., Vakal E., Gapyak I.</b> Application of the boundary integral equations method for boundary value problems in fields with non-smooth boundaries .....	73
<b>Prishlyak A.</b> Functions in general position on surfaces with boundary .....	77
<b>Derech V.</b> Variants of inversion of semigroup of finite rank .....	80
<b>Dariychuk I.</b> Uniformly convergence with probability one of one wavelet explanations of certain class of pre-gaussian random processes .....	84
<b>Moklyachuk M., Shchestyuk N.</b> Robust filtering for random correlated fields of discrete argument .....	88
<b>Andruschenko V., Libov D., Yakymenko M.</b> Study of elastic vibrations spectra for short solid cylinders .....	91
<b>Antonova V., Zaitcev O.</b> Transportation by a vortex fluid flow of particles of sand or slurry suspension in area of corner .....	95
<b>Molchenko L., Loos I., Korneev S.</b> Nonlinear deformation of circular plate with variable stiffness in magnetic field .....	99
<b>Nakvasyuk V.</b> Charge transfer problems with discontinuous solutions .....	102
<b>Pyatetska O.</b> Influence of temperature boundary conditions on efficiency of active damping of forced vibrations of circular plate with rigid fixation of plate ends .....	106
Anatoliy Myhailovich Samojlenko (70th anniversary) .....	110
Volodymyr Vasiliovych Kyrychenko( 65th anniversary) .....	112
Anton Yurievych Luchka (80th anniversary) .....	114

# ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ $L_p$ , $0 < p < 1$

*Розглянуто умови збіжності фрактальних наближень у просторах  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ . Сформульовано достатні умови, за яких оператор фрактального перетворення виявляється евентуально стискующим. При цьому використано відповідну метричну теорему про нерухомі точки для відображень просторів, в яких порушується нерівність трикутника. Встановлено оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискующим.*

*The conditions for convergence of fractal approximations in spaces  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ , are considered. Sufficient conditions for fractal transform operator to be eventually contractive are formulated. Correspondent metric theorem about fixed points for maps of spaces with triangle inequality broken is used. Estimates for fractal approximation error (Barnsley type inequalities) are found for the case when fractal operator is contractive.*

## 1. Вступ

Питання збіжності послідовності фрактальних наближень та оцінки похибки фрактального наближення вивчаються в різних функціональних просторах, а саме: з рівномірною метрикою [2, 3], інтегральною [2], хаусдорфовою [5], інтегральною хаусдорфовою відстанню, метрикою Скорохода, Канторовича-Васерштейна, поточною збіжністю [4], збіжністю майже скрізь тощо. Отримувані результати знаходять застосування в задачах кодування та стиску (з втратами) графічних даних при відповідній інтерпретації. Не завжди розглядуваний простір функцій є метричним (наприклад, простір хаусдорфово-неперервних функцій з інтегральною хаусдорфовою відстанню) за рахунок порушення, найчастіше, нерівності трикутника для функцій відстані, що унеможлиблює застосування теореми Банаха про нерухому точку стискующего відображення. В літературі відомо чимало метричних узагальнень принципу стискующих відображень (див., наприклад, огляд [1]), в яких послаблюються умови або на відображення, або на функцію відстані в просторі. Узагальнення першого типу приводять, зокрема, до поняття евентуально стискующего відображення (тобто відображення, деякий степінь якого є стискующим). Узагальнення другого типу – до так званих слабо метричних просторів (інакше – квазіметричних, напівметричних тощо), в яких нерівність трикутника замінюється деякою більш слабкою умовою.

У даній статті встановлюються достатні умови, за яких оператор фрактального перетворення виявляється евентуально стискующим у слабо метричному просторі функцій  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ . В цих просторах вже досліджувалися різні класичні питання теорії апроксимації (див., наприклад, [6]). Для наших цілей перевіряється, що залишаються в силі міркування, задіяні раніше [2] для випадку метричних просторів  $L_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Після цього застосування однієї порівняно нещодавно встановленої метричної теореми (твердження 6) про нерухомі точки відображень слабо метричних просторів одного типу дає змогу стверджувати збіжність фрактальних наближень у розглядуваному просторі. Збіжність цих наближень до нерухомої точки, якою є апроксимована функція, виявляється експоненційно швидкою. Виписано явні оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискующим (твердження 7).

## 2. Умови збіжності фрактальних наближень у просторах $L_p$ , $0 < p < +\infty$

Як завжди [2-5] при фрактальній апроксимації функцій, заданих на відрізку  $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ , зафіксуємо:

1) набір точок  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , які є вузлами розбиття відрізка  $I$ , тобто таких, що  $a = x_0 < x < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Позначимо  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ;  $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ . Очевидно, що  $I_i \subset I$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$ ;  $I_{i_1} \cap I_{i_2} = \emptyset$ ,  $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq n$ .

2) два набори точок  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , таких, що  $a \leq \alpha_i < \beta_i \leq b$ . Позначимо  $I'_i = [\alpha_i, \beta_i)$  або  $(\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ;  $I'_n = [\alpha_n, \beta_n]$ .

3) набір дифеоморфізмів  $\varphi_i : I'_i \rightarrow I_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

4) набір відображень  $\psi_i : I'_i \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , які задовольняють умовам:

$$\psi_i \in C(I'_i \times \mathbf{R}),$$

$$|\psi_i(x, y_1) - \psi_i(x, y_2)| \leq d_i |y_1 - y_2|, \quad x \in I'_i, \quad y_1, y_2 \in \mathbf{R}, \quad d_i > 0.$$

Нагадаємо [2], що оператор фрактального перетворення  $T : L_p(I) \rightarrow L_p(I)$ ,  $p \geq 1$ , задається таким чином:

$$(T(f))(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))) 1_{I_i}(x), \quad f \in L_p(I), \quad x \in I.$$

Тут використано позначення  $1_A$  для індикаторної функції множини  $A$ .

**Твердження 1.** [2, п. 3] Нехай задано  $\{x_i\}$ ,  $\{\alpha_i\}$ ,  $\{\beta_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$ ,  $\{\psi_i\}$ , які задовольняють умовам 1)-4). Тоді оператор  $T : L_p(I) \rightarrow L_p(I)$ ,  $p \geq 1$ , визначений коректно та неперервний відносно метрики  $\rho(f, g) = \left( \int_I |f - g|^p dx \right)^{1/p}$ ,  $p \geq 1$ .

**Твердження 2.** [2, п. 3] У тих самих позначеннях та припущеннях покладемо:

$$u_{i_1 \dots i_k}(F) = \sup_{\substack{f, g \in F \\ f \neq g}} \frac{\int_{\Phi_{i_1}^{-1}(I_{i_1} \cap \Phi_{i_2}^{-1}(I_{i_2} \cap \dots \cap \Phi_{i_k}^{-1}(I_{i_k})))} |f - g|^p \left| \left( \Phi_{i_1} \circ \dots \circ \Phi_{i_k} \right)' \right| dx}{\int_I |f - g|^p dx}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n,$$

$$v_k(T, F) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n d_{i_1}^p \dots d_{i_k}^p u_{i_1 \dots i_k}(F), \quad k \geq 1,$$

де  $F \subset L_p(I)$  – деяка підмножина, інваріантна відносно оператора  $T$ , тобто така, що  $T(F) \subset F$ . Нехай  $\inf_{k \geq 1} v_k(T, F) < 1$ . Тоді оператор  $T$  – евентуально стискуєчий на  $F$ , тобто для  $T$  знайдеться його ітерація з деяким номером, яка буде стискуєчим оператором на  $F$ .

**Твердження 3.** [2, п. 3] Нехай задано  $\{x_i\}$ ,  $\{\alpha_i\}$ ,  $\{\beta_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$ ,  $\{\psi_i\}$ , які задовольняють умовам 1)-4), а величини  $u_{i_1 \dots i_k}(F)$ ,  $v_k(T, F)$  визначено для інваріантної підмножини  $F$ , як вище. Припустимо, що множина  $F$  додатково задовольняє умові:

$$f \in F \Rightarrow f(\varphi_i^{-1}(\cdot))1_{I_i}(\cdot) \in F, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тоді існує границя  $w(T, F) := \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k(T, F))^{1/k} < +\infty$ . І якщо  $w(T, F) < 1$ , то оператор  $T$  – евентуально стискуєчий на  $F$ .

**Твердження 4.** [2, п. 3] Припустимо, що умови 1)-4) виконані. Нехай інваріантна відносно оператора  $T$  множина  $F$  замкнена. Тоді за умови, що оператор  $T$  евентуально стискуєчий на  $F$ , у нього існує єдина нерухома точка  $f_* \in L_p(I)$ , причому для довільної  $f \in L_p(I)$  маємо:  $T^{ok}(f) \rightarrow f_*$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Більш того, ця збіжність є експоненційно швидкою (явні оцінки швидкості наведено в [2, п. 4.1]). Тут використано позначення  $T^{ok}(f) = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_k(f)$ .

Тепер перенесемо визначення оператора  $T$  на функції  $f \in L_p(I)$  при  $0 < p < 1$ . Як добре відомо, простори  $L_p(I)$  при  $0 < p < 1$  не є метричними, оскільки відстань  $\rho(f, g) = \left( \int_I |f - g|^p dx \right)^{1/p}$  при  $0 < p < 1$  не задовольняє нерівності трикутника. Проте, справджується така нерівність, що є аналогом нерівності трикутника:

$$\rho(f, g) \leq C \cdot (\rho(f, h) + \rho(h, g)), \quad f, g, h \in L_p(I), \quad C := 2^{1/p-1} > 1, \quad 0 < p < 1.$$

Дійсно, використовуючи елементарні нерівності між середніми степеневими,

$$\begin{aligned} \left( \int_I |f - g|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left( \int_I (|f - h| + |h - g|)^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_I (|f - h|^p + |h - g|^p) dx \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_I |f - h|^p dx + \int_I |h - g|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^{1/p-1} \left[ \left( \int_I |f - h|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_I |h - g|^p dx \right)^{1/p} \right]. \end{aligned}$$

Можна ввести поняття збіжної послідовності, фундаментальної послідовності, повного простору, відображення стиску тощо аналогічно тому, як це робиться у випадку метричного простору. Доведення тверджень 1-3 залишаються в силі. Відомо [7, п. 1.2.2], що простори  $L_p(I)$ ,  $0 < p < 1$ , є повними, тобто кожна  $\rho$ -фундаментальна послідовність є  $\rho$ -збіжною ( $\rho$  – відстань в  $L_p(I)$ ,  $0 < p < 1$ ). За рахунок того, що відстань у  $L_p(I)$  при  $0 < p < 1$  задовольняє наведеній вище нерівності типу нерівності трикутника, стає можливим встановити аналог твердження 4, якщо скористатися однією з метричних теорем про нерухомі точки, що узагальнюють теорему Банаха:

**Твердження 5.** [1, §2, п. 11] Нехай задано пару  $(X, \rho)$ , де функція  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  задовольняє стандартним аксіомам метрики, окрім нерівності трикутника (невід'ємність, невід'ємність, симетричність), замість якої виконано умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x, y, z \in X, \rho(z, y) < \delta: \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \varepsilon.$$

Припустимо, що  $(X, \rho)$  є повним простором. Нехай відображення  $f: X \rightarrow X$  є відображенням стиску, тобто  $\rho(f(x), f(y)) \leq d \cdot \rho(x, y)$  для всіх  $x, y \in X$  і деякого числа  $0 \leq d < 1$ . Тоді існує єдина нерухома точка  $x_* \in X$  відображення  $f$ , причому для всіх  $x \in X: f^{\circ n}(x) \rightarrow x_*$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Проте, скористатися саме твердженням 5 в нашому випадку (в  $L_p(I)$  при  $0 < p < 1$ ) не можна, оскільки, як можна пересвідчитись, вказана умова на відстань не справджується. Розглянемо узагальнення твердження 5.

**Твердження 6.** [8, п. 3] Нехай задано пару  $(X, \rho)$ , де функція  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  задовольняє стандартним аксіомам метрики, окрім нерівності трикутника (невід'ємність, невід'ємність, симетричність), замість якої виконано умову:

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y, z \in X, \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq \delta: \rho(x, y) \leq \varepsilon.$$

Припустимо, що  $(X, \rho)$  є хаусдорфовим простором (тобто для довільних двох точок простору знайдуться  $\rho$ -кулі з центрами в цих двох точках, які не перетинаються) і повним простором. Нехай відображення  $f: X \rightarrow X$  задово-

ляняє умову  $\rho(f(x), f(y)) \leq \varphi(\rho(x, y))$  для всіх  $x, y \in X$ , де функція  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  не спадає, причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ . Тоді існує єдина нерухома точка  $x_* \in X$  відображення  $f$ , причому для всіх  $x \in X$ :  $f^{\circ n}(x) \rightarrow x_*$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Зокрема, у твердженні 6 можна покласти  $\varphi(t) = d \cdot t$ ,  $t \geq 0$ ,  $0 \leq d < 1$ . З нерівності типу нерівності трикутника (в  $L_p(I)$  при  $0 < p < 1$ ) впливає вказана умова на відстань.

**Висновок.** Твердження 1-4 залишаються в силі й при  $0 < p < 1$ .

**Зауваження 1.** Як показано в [4, п. 4], при виборі  $I = [0, 1]$ ,  $n = 2$ ,  $I_1 = [0, 1/2]$ ,  $I_2 = [1/2, 1]$ ,  $I'_1 = [0, 1)$ ,  $I'_2 = [0, 1]$ ,  $\varphi_1(x) = x/2$ ,  $\varphi_2(x) = (x+1)/2$ ,  $\psi_1(x, y) = d_1 x$ ,  $\psi_2(x, y) = d_2 x$  фрактальні наближення збігаються майже скрізь на відріzkі  $I$  при  $d_1 d_2 < 1$ , а в просторі  $L_p(I)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  – при  $(d_1^p + d_2^p)/2 < 1$ . Тепер ми можемо стверджувати, що в просторі  $L_p(I)$ ,  $0 < p < 1$ , буде збіжність теж при  $(d_1^p + d_2^p)/2 < 1$ . Зауважимо, що гіпербола  $d_1 d_2 = 1$  є обвідною сім'ї кривих  $(d_1^p + d_2^p)/2 = 1$ ,  $0 < p < +\infty$ .

### 3. Оцінки похибки фрактального наближення у просторах $L_p$ , $0 < p < 1$

Встановимо оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу нерівності Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискующим.

**Твердження 7.** Нехай у позначеннях попереднього пункту  $0 \leq d := v_1(T, L_p(I)) < 1$ . Тоді оператор фрактального перетворення  $T: L_p(I) \rightarrow L_p(I)$ ,  $0 < p < 1$ , – стискующий зі сталою  $d$ ,  $f_* \in L_p(I)$  – його єдина нерухома точка, причому має місце оцінка:

$$\rho(T^{\circ n}(f), f_*) \leq \frac{Cd^n}{1-Cd^j} \rho(f, T^{\circ j}(f)) \leq \begin{cases} \frac{Cd^n}{1-Cd^j} \left( C \frac{C^{j-1}d^{j-1}-1}{Cd-1} + C^{j-1}d^{j-1} \right) \rho(f, T(f)), & Cd \neq 1, \\ \frac{Cd^n}{1-Cd^j} (C(j-1)+1) \rho(f, T(f)), & Cd = 1, \end{cases}$$

де  $j \geq \left\lceil \frac{\ln C}{-\ln d} \right\rceil + 1$ . Зокрема, при  $n = 0$ :

$$\rho(f, f_*) \leq \frac{C}{1-Cd^j} \rho(f, T^{\circ j}(f)) \leq \begin{cases} \frac{C}{1-Cd^j} \left( C \frac{C^{j-1}d^{j-1}-1}{Cd-1} + C^{j-1}d^{j-1} \right) \rho(f, T(f)), & Cd \neq 1, \\ \frac{C}{1-Cd^j} (C(j-1)+1) \rho(f, T(f)), & Cd = 1. \end{cases}$$

Тут  $\lfloor A \rfloor$  – ціла частина числа  $A$ .

**Доведення.** Маємо ланцюжок нерівностей:

$$\begin{aligned} \rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) &\leq C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\leq C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+2)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+2)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\leq \dots \\ &\leq C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+2)}(f)) + C^3\rho(T^{\circ(n+2)}(f), T^{\circ(n+3)}(f)) + \dots \\ &\quad + C^{m-1}\rho(T^{\circ(n+m-2)}(f), T^{\circ(n+m-1)}(f)) + C^{m-1}\rho(T^{\circ(n+m-1)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\leq Cd^n \left( \frac{1-C^{m-1}d^{m-1}}{1-Cd} + C^{m-2}d^{m-1} \right) \rho(f, T(f)). \end{aligned}$$

У випадку  $Cd < 1$ , переходячи в отриманій оцінці до границі при  $m \rightarrow \infty$ , маємо:

$$\rho(T^{\circ n}(f), f_*) \leq \frac{Cd^n}{1-Cd} \rho(f, T(f)).$$

Нехай тепер  $Cd \geq 1$ . Знайдемо таке  $j \in \mathbb{N}$ , що  $Cd^j < 1$ . Застосуємо отриману оцінку для відображення  $T^{\circ j}$ , яке є стискующим зі сталою  $d^j$ . Матимемо:

$$\rho(T^{\circ nj}(f), f_*) \leq \frac{Cd^{nj}}{1-Cd^j} \rho(f, T^{\circ j}(f)).$$

Звідси:

$$\rho(T^{\circ(nj+i)}(f), f_*) = \rho(T^{\circ(nj+i)}(f), T^{\circ i}(f_*)) \leq \frac{Cd^{nj+i}}{1-Cd^j} \rho(f, T^{\circ j}(f)),$$

що й доводить твердження після перепозначення  $n_j + i$  через  $n$ .

**Зауваження 2.** Аналогічно встановлюються оцінки похибки фрактального наближення для випадку, коли фрактальний оператор є евентуально стискующим.

#### 4. Висновок

З прикладу оператора фрактального перетворення, наведеного в зауваженні 1, можна бачити, що умови евентуального стиску в просторах  $L_p(I)$ ,  $0 < p < 1$ , займають, так би мовити, проміжне положення між умовами евентуального стиску в просторах  $L_p(I)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , та умовами збіжності майже скрізь.

1. Иванов А. А. Неподвижные точки отображений метрических пространств // Записки ЛОМИ. – 1976. – Т. 66. – С. 5–102. 2. Митин Д. Ю., Назаренко М. О. Фрактальная аппроксимация в пространствах  $C$  и  $L_p$  та її застосування в задачах кодування зображень // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 2. – С. 161–175. 3. Митин Д. Ю., Назаренко М. О. Інваріантність підпросторів неперервних та гладких функцій відносно фрактальних перетворень // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, серія "Математика, механіка". – 2007. – Вип. 18 (здано до друку). 4. Митин Д. Ю., Назаренко М. О. Поточкова фрактальна аппроксимация функций // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007 (прийнято до друку). 5. Митин Д. Ю., Назаренко М. О. Фрактальная аппроксимация функций в пространстве функций с хаусдорфовой метрикой // 11-та Міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука: Матер. конф., Київ, 2006. – К., 2006. – С. 523. 6. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах  $L^p$ ,  $0 < p < 1$  // Матем. сборник. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415. 7. Трибель Х. Теория функциональных пространств. – М., 1986. 8. Jachymski J., Matkowski J., Świątkowski T. Nonlinear contractions on semimetric spaces // J. of applied analysis. – 1995. – Vol. 1, no. 2. – P. 125–134.

Надійшла до редколегії 08.10.2007

УДК 517.9

Н. Задоянчук, асп. П. Касьянов, канд. фіз.-мат. наук  
e-mail: ninelll@ukr.net e-mail: kasyanov@univ.kiev.ua

## ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З М-ПСЕВДОМОНОТОННИМИ НЕКОЕРЦИТИВНИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

*Ми розглядаємо диференціально-операторні рівняння першого порядку з некоерцитивними відображеннями  $M$ -псевдомонотонного типу, зокрема, для некоерцитивних операторів варіаційного числення. Ми довели розв'язність методом Фаєдо-Гальоркіна і одержали апіорні оцінки для наближених розв'язків.*

*We consider the first order differential-operators equations with non-coercive maps of  $M$ -pseudomonotone type, in particular, for non-coercive operators of variational calculus. We proved the solvability by using of Faedo-Galerkin method and obtained a priory estimations for approximate solutions.*

### 1. Вступ

В останні роки активізувались дослідження нелінійних некоерцитивних граничних задач в частинних похідних, які породжують еволюційні рівняння та включення з некоерцитивними відображеннями псевдомонотонного типу [1-15]. Так, в роботах [1; 7] досліджено випадок монотонних некоерцитивних операторів. В роботах [4; 5] описані некоерцитивні задачі з операторами, які мають напівобмежену варіацію. Мета даної роботи полягає у тому, щоб узагальнити ці результати на випадок  $M$ -псевдомонотонних некоерцитивних відображень. Це дозволить досліджувати ряд задач гідродинамічного типу, що породжують нелінійні диференціально-операторні рівняння з некоерцитивними операторами варіаційного числення [7; 8], з сумою некоерцитивного по старшим похідним та демінеперервного некоерцитивного по похідним нижчого порядку операторів.

### 2. Постановка задачі

Нехай  $V_i$ ,  $i = 1, 2$  – рефлексивні банахові простори;  $H$  – гільбертів простір зі скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$ , ототожнений зі спряженим простором  $H^*$ ,  $V_\sigma$  – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)_{V_\sigma}$  і  $V_\sigma \subset V_i \subset H$ , де кожне вкладення неперервне і щільне. Тоді маємо такий ланцюжок неперервних та щільних вкладень  $V_\sigma \subset V_i \subset H \subset V_i^* \subset V_\sigma^*$ , де  $V_i^*$  – спряжений простір до  $V_i$ ,  $V_\sigma^*$  – спряжений до  $V_\sigma$  відносно  $(\cdot, \cdot)$ .

Введемо позначення  $S = [0, T]$  – скінченний інтервал часу,

$$X = L_{p_0}(S; H) \cap L_{p_1}(S; V_1) \cap L_{p_2}(S; V_2), \quad X_\sigma = L_{p_0}(S; H) \cap L_{\max\{p_1, p_2\}}(S; V_\sigma),$$

$$X^* = L_{q_0}(S; H) + L_{q_1}(S; V_1^*) + L_{q_2}(S; V_2^*), \quad X_\sigma^* = L_{q_0}(S; H) + L_{\min\{q_1, q_2\}}(S; V_\sigma^*),$$

де  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ ,  $1 < p_i < \infty$ ,  $p_i \leq p_0 < \infty$ ,  $i = 1, 2$ .

Лінійний простір  $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$  (відповідно  $W_\sigma = \{y \in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$ ) є рефлексивним банаховим простором відносно норми  $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$  (відповідно  $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$ ), де  $y'$  – похідна від елемента  $y \in X$  в сенсі простору скалярних розподілів  $D^*(S, V_\sigma^*) = L(D(S); V_\sigma^*)$  [1].

Для довільних  $v \in X$  та  $f \in X^*$ :  $f = f_0 + f_1 + f_2$ ,  $f_0 \in L_{q_0}(S; H)$ ,  $f_1 \in L_{q_1}(S; V_1^*)$ ,  $f_2 \in L_{q_2}(S; V_2^*)$ , розглянемо

$$\langle f, v \rangle_X = \int_S (f_0(t), v(t)) dt + \int_S \langle f_1(t), v(t) \rangle_{V_1^*} dt + \int_S \langle f_2(t), v(t) \rangle_{V_2^*} dt = \int_S (f(t), v(t)) dt.$$

Тут  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i^*} : V_i^* \times V_i \rightarrow R$  – канонічне спарювання, що співпадає на  $H \times V_i$  зі скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  в  $H$ .

Розглянемо диференціально-операторне рівняння вигляду

$$y' + A(y) + B(y) = f \quad (1)$$

$$y(0) = y_0 \quad (2)$$

де  $A, B: X \rightarrow X^*$ ,  $f \in X^*$ ,  $y_0 \in H$ .

Основною метою даної роботи є встановлення властивостей розв'язуючого оператора для некоерцитивної задачі (1)-(2) за умов узагальненої  $M$ -псевдомонотонності та обмеженості на відображень  $A$  та  $B$ .

### 3. Основні класи відображень.

**Означення 1.** Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  називається коерцитивним, якщо існує визначена на  $[0, \infty)$  дійсна функція  $\gamma$  з  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = +\infty$  така, що  $\langle Au, u \rangle_X \geq \gamma(\|u\|_X) \|u\|_X \quad \forall u \in X$ .

**Означення 2.** Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  називається демінеперервним, якщо з  $u_n \rightarrow u$  в  $X$  випливає, що  $Au_n$  слабо збігається до  $Au$  в  $X^*$ .

**Означення 3.** Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  називається:

1)  $M$ -псевдомонотонним на  $W$  (на  $W_\sigma$ ), якщо для довільної послідовності  $\{y_n\}_{n \geq 1}$ , слабо збіжної до  $y$  в  $X$ ,  $y'_n \rightarrow y'$  слабо в  $X^*$  (в  $X_\sigma^*$ ) і нерівності

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \leq 0 \quad (3)$$

можна виділити таку підпослідовність  $\{y_{n_k}\}$ , що

$$\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - w \rangle_X \geq \langle A(y), y - w \rangle_X \quad \forall w \in W \quad (w \in W_\sigma); \quad (4)$$

2)  $M_0$ -псевдомонотонним на  $W$  (на  $W_\sigma$ ), якщо з того, що  $y_n \rightarrow y$  слабо в  $X$ ,  $A(y_n) \rightarrow d$  слабо в  $X^*$ ,  $y'_n \rightarrow y'$  слабо в  $X^*$  (в  $X_\sigma^*$ ) і нерівності (3) випливає нерівність (4).

**Зауваження 1.** Оператори  $M$ -псевдомонотонного типу на  $W$  в значно більш загальній ситуації були введені в роботах [7] (означення 4.3.2), а також [4]. Перехід в (4) до підпослідовностей має тут принципове значення, і ця ідея запозичена нами з [2]. Очевидно також, що кожний  $M$ -псевдомонотонний на  $W$  (на  $W_\sigma$ ) оператор є  $M_0$ -псевдомонотонним на  $W$  (на  $W_\sigma$ ).

**Пропозиція 1.** [13] Нехай  $A, B: X \rightarrow X^*$  –  $M$ -псевдомонотонні на  $W$  (на  $W_\sigma$ ) оператори. Тоді оператор  $A = A + B$  ( $A(y) = A(y) + B(y)$ ,  $y \in X$ ) є  $M$ -псевдомонотонним на  $W$  (на  $W_\sigma$ ).

**Зауваження 2.** Для  $M_0$ -псевдомонотонних відображень аналогічне твердження справедливе, якщо один з операторів обмежений.

**Пропозиція 2.** [13] Справедливі імплікації:

" $A$  – радіально неперервний оператор з  $(X; W_\sigma)$ -напівобмеженою варіацією"  $\Rightarrow$  " $A - M_0$ -псевдомонотонний на  $W_\sigma$  оператор"  $\Rightarrow$  " $A$  задовольняє властивість  $(M)$  на  $W_\sigma$ ".

### 4. Основні результати.

Нехай  $A: X \rightarrow X^*$ . Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціально-операторного рівняння I – го порядку

$$y' + A(y) = f \quad (5)$$

$$y(0) = y_0, \quad (6)$$

де  $f \in X^*$ ,  $y_0 \in H$ .

**Зауваження 3.** Рівняння (5) можна розуміти як рівність в  $D^*(S; V^*)$ , а оскільки  $y' = f - A(y) \in X^*$ , то в силу неперервності вкладення  $W_\sigma^* \subset C(S; V_\sigma^*)$  рівність (6) має сенс (наприклад, в  $V_\sigma^*$ ).

Нехай  $\lambda > 0$ ,  $p_0 \geq 2$ , тобто  $X \subset X^*$ ,  $I: X \rightarrow X \subset X^*$  – тотожнє відображення. Накладемо на  $A$  наступні умови:

$\alpha_1$ ) оператор  $A: X \rightarrow X^*$  –  $\lambda_0$ -псевдомонотонний на  $W_\sigma$  і обмежений;

$\alpha_2$ ) оператор  $A: C(S; V_\sigma^*) \rightarrow X^*$  – демінеперервний;

$\alpha_3$ ) оператор  $A + \lambda I$  – коерцитивний.

Нехай також виконується умова

$P$ ) простір  $V_\sigma$  (а, тому і  $V$ ) сепарабельний (ця вимога не є суттєвою, проте вона спрощує доведення), і нехай  $\{h_1, \dots, h_n, \dots\}$  – повна система лінійно незалежних елементів;  $H_n$  – лінійна оболонка сукупності  $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ , наді-



лена скалярним добутком із  $H$ . Припустимо, що система  $\{h_1, h_2, \dots\}$  така, що  $\forall n$  оператор ортогонального проєктування  $\pi_n : H \rightarrow H_n$  рівномірно обмежений одиницею в  $L(H; H)$ ,  $L(V_\sigma; V_\sigma)$  і  $L(V_\sigma^*; V_\sigma^*)$ .

**Теорема 1.** Нехай  $p_0 \geq 2$  і виконуються умови  $\alpha_1) - \alpha_3)$  і  $P)$ . Тоді при кожному  $f \in X^*$  і  $y_0 \in H$  задача Коші (5), (6) має, принаймні, один розв'язок  $y \in W$ .

**Доведення.** Доведення проведемо, слідуючи [1]. Для кожного  $t \in S$  покладемо

$$\begin{aligned} X(t) &= L_{p_1}([0, t]; V_1) \cap L_{p_2}([0, t]; V_2) \cap L_{p_0}([0, t]; H), \\ X_\sigma(t) &= L_{p_0}([0, t]; H) \cap L_p([0, t]; V_\sigma), \quad p = \max\{p_1, p_2\}; \\ X_\sigma^*(t) &= L_{q_0}([0, t]; H) + L_q([0, t]; V_\sigma^*), \quad q = \min\{q_1, q_2\}; \end{aligned}$$

**Лема 1.** Якщо  $p_0 \geq 2$  та для деякого  $\lambda \geq 0$   $A + \lambda I : X \rightarrow X^*$  є коерцитивним оператором типу Вольтерра, то справджується наступна нерівність

$$\int_S e^{-2\lambda t} (A(y)(t) + \lambda y(t), y(t)) dt \geq \tilde{\gamma}(\|y\|_X) \|y\|_X \quad \forall y \in X, \quad (7)$$

де  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  – обмежена знизу на обмежених в  $\mathbb{R}_+$  множинах неперервна функція така, що  $\tilde{\gamma}(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Перевіримо (7). Із коерцитивності і обмеженості  $A$  випливає, що для  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  – обмеженої знизу на обмежених в  $\mathbb{R}_+$  множинах функції такої, що  $\gamma(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow \infty$

$$\langle (A + \lambda I)y, y \rangle \geq \gamma(\|y\|_X) \|y\|_X \quad \forall y \in X.$$

Звідси,  $\inf_{s \geq 0} \gamma(s) = a > -\infty$ . Для довільного  $b > a$  розглянемо непорожню обмежену в  $\mathbb{R}_+$  множину  $A_b = \{c \geq 0 \mid \gamma(c) \leq b\}$ . Нехай  $c_b = \sup A_b$  для довільного  $b > a$ . Зауважимо, що  $\forall b_1 > b_2 > a$   $+\infty > c_{b_1} \geq c_{b_2}$  і  $c_b \rightarrow +\infty$  при  $b \rightarrow +\infty$ . Покладемо  $\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, c_{a+1}], \\ a + k - 1 + \frac{t - c_{a+k}}{c_{a+k+1} - c_{a+k}}, & t \in (c_{a+k}, c_{a+k+1}], k \geq 1. \end{cases}$

Тоді,  $\hat{\gamma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  – обмежена знизу на обмежених в  $\mathbb{R}_+$  множинах неспадна неперервна функція така, що  $\hat{\gamma}(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow \infty$  та  $\gamma(t) \geq \hat{\gamma}(t) \quad \forall t \geq 0$ . Оскільки  $A$  – оператор типу Вольтерра, то

$$\forall t \in S \quad \int_0^t (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)) d\tau = \int_0^t (A(y_t)(\tau) + \lambda y_t(\tau), y_t(\tau)) d\tau \geq \hat{\gamma}(\|y_t\|_X) \|y_t\|_X = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t}) \|y\|_{X_t},$$

де  $\|y\|_{X_t} = \|y_t\|_X$ , а  $y_t(s) = \begin{cases} y(s), & 0 \leq s \leq t, \\ 0, & t \leq s \leq T. \end{cases}$  Нехай  $g(\tau) = (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in S$ ,  $h(t) = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t}) \|y\|_{X_t}$ ,  $t \in S$ .

Для всіх  $t \in S$   $h(t) \geq \hat{\gamma}(0) \|y\|_X$  та  $\int_0^t g(\tau) d\tau \geq h(t) \quad \forall t \in S$ .

Далі,  $\int_0^T e^{-2\lambda \tau} (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)) d\tau = e^{-2\lambda T} \int_0^T g(\tau) d\tau + \int_0^T [e^{-2\lambda \tau} - e^{-2\lambda T}] g(\tau) d\tau \geq e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda \int_0^T e^{-2\lambda s} \int_0^s g(\tau) d\tau ds \geq e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda T \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)) d\tau \geq -c_1 \|y\|_X + e^{-2\lambda T} \hat{\gamma}(\|y\|_X) \|y\|_X$ ,

де  $c_1 = 2\lambda T |\hat{\gamma}(0)| \geq 0$  не залежить від  $y \in X$ ,  $\tilde{\gamma}(s) = e^{-2\lambda T} \hat{\gamma}(s) - c_1$ ,  $s \geq 0$ . Отже, властивість (7) встановлена.

Розглянемо таку задачу

$$y_n' + A_n(y_n) = f_n, \quad (8)$$

$$y_n(0) = y_{n0}, \quad (9)$$

де  $X_n = L_{p_0}(S; H_n)$ ,  $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$ ,  $y_{n0} \rightarrow y_0$  сильно в  $H$ , а оператор  $A_n : X_n \rightarrow X_n^*$ , і  $f_n \in X_n^*$  визначаються співвідношеннями

$$\langle f_n, w_n \rangle_{X_n^*} = \langle f, w_n \rangle_X, \quad \langle A_n(y_n), w_n \rangle_{X_n^*} = \langle A(y_n), w_n \rangle_X \quad \forall y_n, w_n \in X_n.$$

**Лема 2.** При кожному  $n \geq 1$  задача (8), (9) має розв'язок  $y_n \in W$ , послідовність  $\{y_n\}$  обмежена в  $X$  і в  $C(S; H)$ , а  $\{y_n'\}$  обмежена в  $X_\sigma^*$ .

**Доведення.** Позначимо  $S_1$  множину тих  $t_1 \in S$ , для яких задача (8), (9) має розв'язок з  $L_{p_0}([0, t_1]; H_n)$  (можливо,  $S_1 = \{0\}$ ). При цьому  $S_1$  може мати вигляд  $[0, t_0)$  або  $[0, t_0]$ . Для кожного  $t_1 \in [0, t_0)$  система (8) має розв'язок  $y_n \in L_{p_0}([0, t_1]; H_n)$ ,  $y'_n \in L_{q_0}([0, t_1]; H_n)$ , тобто

$$y'_n(t) + (A_n y_n)(t) = f_n(t) \text{ для м.в. } t \in [0, t_1] \quad (10)$$

$$y_n(0) = y_{n0}. \quad (11)$$

Помноживши (10) на  $y_n(t)e^{-2\lambda t}$  і проінтегрувавши, внаслідок леми 1. та Вольтеровості  $A$ , для всіх  $n \geq 1$  та  $t \in [0, t_1)$ , маємо

$$\frac{1}{2} e^{-2\lambda T} \|y_n(t)\|_H^2 + \gamma(\|y_n\|_{X(t)}) \|y_n\|_{X(t)} \leq \|f\|_{X^*} \|y_n\|_{X(t)} + \frac{1}{2} \|y_{n0}\|_H^2, \quad (12)$$

оскільки  $\int_0^t e^{-2\lambda \tau} (y'_n(\tau), y_n(\tau)) d\tau = \int_0^t ((e^{-\lambda \tau} y_n(\tau))', y_n(\tau) e^{-\lambda \tau}) d\tau + \lambda \int_0^t e^{-2\lambda \tau} (y_n(\tau), y_n(\tau)) d\tau$  та

$$\int_0^t ((e^{-\lambda \tau} y_n(\tau))', y_n(\tau) e^{-\lambda \tau}) d\tau = \frac{1}{2} (\|e^{-\lambda t} y_n(t)\|_H^2 - \|y_{n0}\|_H^2) = \int_0^t e^{-2\lambda \tau} \langle f(\tau), y_n(\tau) \rangle d\tau - \int_0^t e^{-2\lambda \tau} \langle A y_n(\tau) + \lambda y_n(\tau), y_n(\tau) \rangle d\tau.$$

Зокрема із (12) випливає:

$$\gamma(\|y_n\|_{X(t_1)}) \|y_n\|_{X(t_1)} \leq \|f\|_{X^*} + \frac{1}{2} \|y_{n0}\|_H^2 \quad \forall n \geq 1 \quad (13)$$

та

$$\|y_n(t)\|_H^2 \leq c_2 (\|y_n\|_{X(t_1)} + 1), \quad (14)$$

де  $c_2 \equiv \text{const}$ , яка не залежить від  $n \geq 1$  та  $t$ . Звідси виводимо, що

$$\|y_n\|_{X(t_1)} \leq k_1, \quad (15)$$

де стала  $k_1$  не залежить від  $n$  та  $t_1$ . Тому,  $y_n \in L_{p_0}([0, t_0]; H_n)$ , і можемо вважати, що  $S_1 = [0, t_0]$ . Доведемо, що розв'язок  $y_n$  продовжується на весь  $S$ . Покладемо  $y_n(t_0) = l$  і

$$\xi(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ l, & t_0 < t \leq T. \end{cases}$$

Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  обмежений, тому обмеженням, а тим більше, локально обмеженням, буде і відображення  $A_n: X_n \rightarrow X_n^*$ . Справді, якщо  $\|y_n\|_{X_n} \leq k_0$ , то

$$\|A_n(y_n)\|_{X_n^*} = \sup_{\|w_n\|_{X_n}=1} |\langle A_n(y_n), w_n \rangle_{X_n}| \leq \sup_{\|w_n\|_{X_n}=1} |\langle A(y_n), w_n \rangle_X| = \|A(y_n)\|_{X^*} \leq l_0.$$

А тому локально обмеженням буде оператор  $A_n: C(S; H_n) \rightarrow L_{q_0}(S; H_n)$ .

Таким чином, знайдуться числа  $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$ ,  $M = M(\xi) > 0$  такі, що

$$\|A_n(y) - f_n\|_{X_n^*} \leq M \quad (16)$$

як тільки  $\|y - \xi\|_{C(S; H_n)} \leq \varepsilon$ .

Нехай функція  $y \in C(S; H_n)$  задається співвідношенням

$$y(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \eta(t), & t_0 < t \leq T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} \leq \varepsilon, \\ l + \varepsilon(\eta(t) - l) / \|\eta(t) - l\|_{H_n}, & t_0 < t \leq T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} > \varepsilon, \end{cases}$$

де  $\eta \in C_l = \{w \in C([t_0, T], H_n) | w(t_0) = l\}$ .

Визначимо оператор  $G: C_l \rightarrow L_{q_0}(S; H_n)$  рівністю

$$(G\eta)(t) = (A_n(y) - f_n)(t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Очевидно, відповідність  $C_l \ni \eta \rightarrow y \in C(S; H_n)$  неперервна, а із умови  $\alpha_2$ ) випливає демінеперервність відображення  $A_n: C(S; H_n) \rightarrow X_n^*$ . А тому демінеперервним буде і відображення  $G: C_l \rightarrow X_n^*$ . Крім того, завдяки (16),  $\|G(\eta)\|_{X_n^*} = \|A_n(y) - f\|_{X_n^*} \leq M \quad \forall \eta \in C_l$ .

Таким чином, ми потрапляємо в умови узагальненої теореми Каратеодорі, доведення якої приведено, наприклад, у роботі [1].

**Лема 3.** Нехай  $G: C_I \rightarrow X_n^*$  – демінеперервний оператор і справедлива оцінка  $\|G(\eta)\|_{X_n^*} \leq M \quad \forall \eta \in C_I$ . Тоді рівняння  $\eta(t) = I - \int_{t_0}^t (G\eta)(\tau) d\tau \quad \forall t \in [t_0, T]$  розв'язне в  $C_I$ .

Звідси випливає, що для достатньо малого  $\delta > 0$  справедлива оцінка  $\|\eta(t) - I\|_{X_n} \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ . Функцію  $y_n(t)$ , визначену на  $[0, t_0]$ , продовжимо на інтервал  $[0, t_0 + \delta]$ :  $y_n(t) = \eta(t), \quad t_0 < t \leq t_0 + \delta$ . Тоді

$$(G\eta)(t) = (A_n(y_n) - f_n)(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

$$i \quad y_n(t) = I - \int_{t_0}^t (G\eta)(\tau) d\tau = y_n(t_0) - \int_{t_0}^t (A_n(y_n) - f_n)(\tau) d\tau = y_{n0} - \int_{t_0}^t (A_n(y_n) - f_n)(\tau) d\tau,$$

оскільки  $y_n(t_0) = y_{n0} - \int_{t_0}^{t_0} (A_n(y_n) - f_n)(\tau) d\tau$ .

А це означає, що розв'язок задачі (10), (11) існує на  $[0, t_0 + \delta]$ , належить  $L_{p_0}([0, t_0 + \delta]; H_n)$  і, таким чином, продовжуючи цей процес, приходимо до  $S_1 = S$ , тобто  $y_n$  із  $L_{p_0}(S; H_n)$ .

Обмеженість послідовності  $\{y_n\}$  в просторі  $X$  негайно випливає із оцінки (15), а оцінка  $\|y_n\|_{C(S; H_n)} \leq k_0$  випливає із (14), обмеженість  $\{A(y_n)\}$  в  $X^*$  очевидна.

Доведемо обмеженість послідовності  $\{y'_n\}$  в  $X_\sigma^*$ . Нехай  $\pi_n: H \rightarrow H_n$  – оператор ортогонального проектування, що задовольняє умову Р). Тоді з того, що  $\langle y'_n(t), h_i \rangle_V + \langle (A y_n)(t), h_i \rangle_V = \langle f(t), h_i \rangle_V, \quad i = \overline{1, n}$ , одержуємо

$$y'_n + \pi_n A(y_n) = \pi_n f.$$

З умови  $\alpha_1)$  випливає, що послідовність  $\{A(y_n)\}$  обмежена в  $X^*$  і відповідно в  $X_\sigma^*$ , а, це означає, що  $\{\pi_n A(y_n)\}$  обмежена в  $X_\sigma^*$  в силу властивостей оператора  $\pi_n$ . Також обмежена в  $X_\sigma^*$  і послідовність  $\{\pi_n f\}$ . Таким чином, робимо висновок, що  $\{y'_n\}$  обмежена в  $X_\sigma^*$ .

Лема 2 доведена.

Отже, завдяки рефлексивності  $W_\sigma, X, H$ , теоремі Банаха-Алаоглу існує підпослідовність  $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ , існують  $y \in W_\sigma, z \in H$  та  $d \in X^*$ , для яких мають місце збіжності:

- $i_1) \quad y_m \rightarrow y$  слабо в  $W_\sigma$ ;
- $i_2) \quad y_m(T) \rightarrow z(T)$  слабо в  $H$ ;
- $i_3) \quad A(y_m) \rightarrow d$  слабо в  $X^*$ .

Тоді для довільних  $\varphi \in D(S)$  і  $h \in H_n$ , використовуючи властивості інтеграла Бохнера, одержуємо при  $n_k \geq n$

$$\left\langle \int_S \varphi(t) \left( y'_{n_k}(t) + (A_{n_k} y_{n_k})(t) \right) dt, h \right\rangle_V = \left\langle y'_{n_k} + A_{n_k}(y_{n_k}), \varphi h \right\rangle_X = \left\langle f, \varphi h \right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t) f(t) dt, h \right\rangle_V.$$

Перейшовши до границі в останній рівності, знаходимо  $\langle y', \varphi x \rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t) (f(t) - d(t)) dt, x \right\rangle_{V_\sigma} \quad \forall x \in \bigcup_n H_n$ , а оскільки

$\bigcup_n H_n$  щільна в  $V_\sigma$  (і в  $V$ ), то

$$y' + d = f \tag{17}$$

як рівність в  $X_\sigma^*$ . Звідси, зокрема, випливає, що  $y \in W$ .

Доведемо, що  $y(0) = y_0, y(T) = z$ . Для довільного  $h \in \bigcup_n H_n$ , згідно (17), маємо

$$\begin{aligned} \int_S \langle y'(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt &= \int_S \langle f(t) - d(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_S \langle f(t) - (A y_{n_k})(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt = \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_S \langle f(t) - (A y_{n_k})(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_S \langle y'_{n_k}(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left\{ \int_S \langle y_{n_k}(t), h \rangle dt - (y_{n_k}(0), Th) \right\} = \\ &= \int_S \langle y(t), h \rangle dt - (y_0, Th) = \int_S \langle y'(t), (T-t)h \rangle_{V_\sigma} dt - (y(0) - y_0, Th). \end{aligned}$$

Але, оскільки  $\bigcup_n H_n$  щільна в  $V_\sigma$ , то звідси одержуємо ss Аналогічно для  $h \in \bigcup_n H_n$  маємо

$$(y(T) - y_0, h) = \int_S \langle y'(t), h \rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_S \langle y'_{n_k}(t), h \rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (y_{n_k}(T) - y_{n_k}(0), h) = (z - y_0, h)$$

і, таким чином,  $y(T) = z$ .

Нам залишається довести, що  $d = A(y)$ . Скористаємось для цього умовою  $\alpha_1$ ). Перейшовши, при необхідності, до підпослідовності, із (10), (11) і (17), одержуємо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_{n_k}), y_{n_k} \rangle_X &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle f - y'_{n_k}, y_{n_k} \rangle_X \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \langle f, y_{n_k} \rangle_X + \frac{1}{2} \left( \|y_{n_k}\|_H^2 - \|y_{n_k}(T)\|_H^2 \right) \right\} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \langle f, y_{n_k} \rangle_X + \frac{1}{2} \left( \|y_{n_k}\|_H^2 - \|y_{n_k}(T)\|_H^2 \right) \right\} \leq \langle f, y \rangle_X + \frac{1}{2} \left( \|y_0\|_H^2 - \|y(T)\|_H^2 \right) = \\ &= \int_S \langle f(t), y(t) \rangle_V dt - \int_S \langle y'(t), y(t) \rangle_V dt = \int_S \langle d(t), y(t) \rangle_V dt = \langle d, y \rangle_X. \end{aligned}$$

Проте кожний  $M_0$ -псевдомонотонний на  $W$  оператор має властивість  $(M)$  на  $W$  (пропозиція 2), звідки  $d = A(y)$ . Таким чином,  $y' + A(y) = f$ ,  $y \in W$ ,  $y(0) = y_0$ . Теорема доведена.

Покладемо  $X_1 = L_{p_1}(S; V_1)$ ,  $X_2 = L_{p_2}(S; V_2) \cap L_{p_0}(S; H)$ .

**Наслідок 1.** Нехай оператори  $A: X_1 \rightarrow X_1^*$  та  $B: X_2 \rightarrow X_2^*$  задовольняють умови  $\alpha_1) - \alpha_3)$ . Нехай також виконується умова  $P)$ . Тоді для кожного  $f \in X^*$  та  $y_0 \in H$  задача (1), (2) має принаймні один розв'язок  $y \in W_\sigma$ .

**Зауваження 4.** Для доведення даного твердження досить розглянути оператор  $C = A + B$ . Тоді задача (1), (2) набуде вигляду (5)-(6).

Далі застосовуємо теорему 1 до цієї задачі з оператором  $C: X \rightarrow X^*$ , де  $X = X_1 \cap X_2$ ,  $X^* = X_1^* + X_2^*$ .

**Наслідок 2.** Нехай або  $V_1$ , або  $V_2$  компактно вкладений в  $H$ . Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  задовольняє умови  $\alpha_2), \alpha_3)$ , обмежений та  $A + \lambda I: X \rightarrow X^* - M_0$ -псевдомонотонний на  $W_\sigma$  і виконується умова  $P)$ . Тоді при кожному  $f \in X^*$  і  $y_0 \in H$  задача (5), (6) має принаймні один розв'язок  $y \in W_\sigma$ .

## 5. Висновок

За допомогою методу Фаєдо-Гальоркіна можна довести розв'язність диференціально-операторних рівнянь з некоефективними нелінійними відображеннями псевдомонотонного типу. Таким чином, для широкого класу еволюційних задач, зокрема, для рівнянь гідродинамічного типу, можна встановити розв'язність та апіорні оцінки для розв'язків.

1. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978. 2. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. – М.: ВИНТИ. – 1976. – №9. – С. 5-130. 3. Зауровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – К., 1999. 4. Зауровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К., 2004. 5. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К., 1988. 6. Капустян А.В. Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Vol. 38, № 10. – С. 1378-1382. 7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972. 8. Мельник В.С. Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 3. – С. 120-126. 9. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М., 1990. 10. Brezis H. Perturbation non lineaire d'operateurs maximaux monotones // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1969. – Vol. 269. – P. 566-569. 11. Groger K. Zum Galerkin. Verfahrenen fur Evolutions gleichungen. Theory of Nonlinear operators. – Proceedings of a summer-school, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee). – GDR. Berlin: Akademie – Verlag, 1974. – P. 85-104. 12. Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J. Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2003. – Vol. 13, № 7. – P. 1969-1983. 13. Kasyanov P.O., Melnik V.S., Yasinsky V.V. Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with  $W_1$ -pseudomonotone maps. – К., 2007. 14. Kartsatos A.G., Scrypnik I.V. Topological degree theories for densely defined mappings involving operator of type // Adv. Differential Equations. – 1999. – № 4. – P. 413-456. 15. Melnik V. S., Vakulenko A.N. Topological methods in the theory of operator inclusions with densely defined mappings in Banach spaces // Nonlinear Boundary Valued Problems. – 1999. – Vol. 10. – P. 132-145.

Надійшла до редколегії 01.10.2007

УДК 517.98

Ю. Єльченко, студ., А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук  
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІ ЗСУВОМ АРГУМЕНТУ В ПРОСТОРІ $l_2$ У ВИПАДКУ ВИРОДЖЕНОГО ОПЕРАТОРНОГО КОЕФІЦІЄНТА

Наведено достатні умови розв'язності однорідного диференціального рівняння зі зсувом аргументу у просторі  $l_2$  у випадку необмеженого оператора блочною вигляду з довільним розташуванням спектра.

The sufficient conditions for solvability of homogeneous differential equation with argument's displacement in the  $l_2$  space in the case of unbounded operator coefficient with block structure with any specter are given.

### 1. Вступ.

В цій роботі розглядається лінійне однорідне диференціальне рівняння з одним запізненням аргументу на осі

$$x'(t) = Ax(t-1), t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

відносно неперервно диференційовної функції зі значеннями в просторі  $l_2$ , яка зростає повільніше довільної експоненти.

У випадку, коли  $A \in L(B)$  і  $\sigma(A) \cap \{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\} = \emptyset$  відомо, що це рівняння має лише тривіальний розв'язок. Як-що ця умова не виконується, задача відшукування розв'язку суттєво ускладнюється. В роботі Чайковського А.В. [1] такі розв'язки знайдені за умов певного розташування спектра.

В той же час при застосуванні цієї теорії до розв'язання нескінченних систем диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2,3]), виникають необмежені матричні оператори, спектр яких не задовольняє знайдені умови. Мета цієї роботи – знаходження розв'язків рівняння (1) для деяких класів необмежених матричних операторів у просторі  $l_2$ .

**2. Постановка задачі.** Нехай  $(B, \|\cdot\|)$  – комплексний банахів простір. Розглянемо диференціальне рівняння (1), де  $A: B \rightarrow B$  – лінійний оператор,  $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$  – шукана функція.

Для нього відомо [1], що якщо  $A \in L(B)$ , то спектр оператора  $A$  складається з трьох замкнених частин  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , де  $\sigma_1$  не перетинається з подвійною спіраллю  $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$ ,  $\sigma_2$  лежить на цій спіралі, але не містить її точок самоперетину:  $(-1)^{k+1}(\frac{\pi}{2} + \pi k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $\sigma_3$  складається лише з точок самоперетину, то розв'язок, що зростає повільніше до вільної експоненти, тобто  $x \in C_E(\mathbf{R}, B) := \left\{ x \in C^1(\mathbf{R}, B) \mid \forall r > 0 : \sup_{t \in \mathbf{R}} e^{-r|t|} \|x(t)\| < \infty \right\}$ , має вигляд:

$$x(t) = e^{C_2 t} x_2 + e^{C_{31} t} x_{31} + e^{C_{32} t} x_{32}. \quad (2)$$

Якщо  $P_1, P_2, P_3$  – проектори, що відповідають часинам спектра  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,  $B_k = P_k B, k = 1, 2, 3$ , – підпростори простору  $B$ , причому  $B$  є їх прямою сумою,  $A_2 = AP_2$ ,  $A_3 = AP_3$  – оператори, що фактично діють у просторах  $B_2, B_3$ , то оператор  $C_2 = f^{-1}(A_2)$ , де  $f(z) = ze^z, f^{-1}$  – обернене відображення, що переводить окіл частин уявної осі в околі частин спіралі. Якщо ці частини спіралі є точками самоперетину, то в їх околі можна описати два різних "обернених" відображення:  $f_1^{-1}$  і  $f_2^{-1}$  (див. [1]). Тоді  $C_{31} = f_1^{-1}(A_3)$ ,  $C_{32} = f_2^{-1}(A_3)$ ,  $x_2, x_{31}, x_{32} \in B$  – довільні сталі вектори.

Спробуємо отримати розв'язок рівняння (1), якщо спектр не обов'язково розпадається на вищезгадані частини для випадку простору  $B = l_2$  за умови, що оператор  $A$  є нескінченною матрицею, що має блочну структуру. В цьому разі рівняння розпадається на нескінченну кількість рівнянь, які відповідають різним блокам. Кожне таке рівняння розглядається в скінченновимірному евклідовому просторі. Оператор  $A$  при цьому може бути необмеженим.

### 3. Дослідження прямої суми блоків 2x2

Розглянемо рівняння вигляду (1) в двовимірному просторі. Спектр оператора  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  складається з двох власних чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  (можливо, рівних). Нехай  $A$  зводиться до діагональної нормальної жорданової форми:  $A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$ , де  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тоді легко знайти матрицю переходу  $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d & b \\ c & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ . Розв'яжемо рівняння  $\bar{A}\bar{t} = \lambda_1 \bar{t}$  (тобто знайдемо власний підпростір, що відповідає числу  $\lambda_1$ ). Отримаємо, що  $T^{-1}\bar{t}$  – власний вектор матриці  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , що відповідає власному числу  $\lambda_1$ , тобто  $T^{-1}\bar{t} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbf{C} \Rightarrow \bar{t} = kT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbf{C}$ . Отже, шуканим власним підпростором для  $\lambda_1 \in B_1 = \left\{ \bar{t} = kT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C} \right\}$ .

Аналогічно знаходимо власний підпростір для  $\lambda_2$ :  $B_2 = \left\{ \bar{t} = kT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C} \right\}$ .

Якщо тепер  $A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$ , то  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$  ( $E$  – одинична матриця), отже кожен вектор простору  $\mathbf{C}^2$  є власним.

Якщо ж  $A$  зводиться до вигляду  $A = T \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$ , то можна знайти матрицю переходу  $T_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ . Але в

цьому випадку простір не розбивається на два інваріантні підпростори.

Позначимо такі множини:

$C_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z \neq ite^{it}, t \in \mathbf{R} \right\}$  – точки поза спіраллю;

$C_2 = \left\{ z = ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}, t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right\}$  – точки на спіралі, крім точок самоперетину;

$C_3 = \{z = ite^{it} \mid t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$  – точки самоперетину спіралі.

Тепер, використовуючи формулу (2), ми можемо записати розв'язки рівняння (1) в залежності від вигляду матриці  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  і від розташування точок спектру (тобто власних чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  матриці  $A$ ).

1. Якщо  $\lambda_1, \lambda_2 \in C_1$ , то розв'язок  $x(t) \equiv 0$ .

2. Якщо  $\sigma(A) = \{\lambda\}$  (тобто  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  – одне власне число кратності 2) і  $\lambda \in C_2$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , тоді  $x(t) = e^{Kt}c_1$ , де  $K = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$  – знаходиться після підстановки розв'язку в рівняння,  $c_1 \in \mathbf{C}^2$ ,  $\sigma e^\sigma = \lambda$ ,  $\sigma \in i\mathbf{R}$ , тобто  $\sigma = f^{-1}(\lambda)$ ,  $f(z) = ze^z$ . Таким чином,  $x(t) = e^{\sigma t}c_1$ ,  $c_1 \in \mathbf{C}^2$ .

б)  $A = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1}$ ,  $\lambda = \frac{a+d}{2}$ ,  $\sigma e^\sigma = \lambda$ .

Після підстановки розв'язку  $x(t) = e^{Kt}c_1$  отримаємо  $A = Ke^K$ . Легко перевірити, що  $K$  не може мати діагональну нормальну жорданову форму. Тому  $K = S \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} S^{-1}$ , де  $S$  – деяка невироджена матриця, що зводить  $K$  до жорданової нормальної форми. Маємо:

$$Ke^K = S \begin{pmatrix} \sigma e^\sigma & (\sigma+1)e^\sigma \\ 0 & \sigma e^\sigma \end{pmatrix} S^{-1} = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1},$$

Оскільки  $\begin{pmatrix} \sigma e^\sigma & (\sigma+1)e^\sigma \\ 0 & \sigma e^\sigma \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sigma e^\sigma & 1 \\ 0 & \sigma e^\sigma \end{pmatrix} M^{-1}$ , де  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sigma+1)e^\sigma} \end{pmatrix}$ , то

$$SM \begin{pmatrix} \sigma e^\sigma & 1 \\ 0 & \sigma e^\sigma \end{pmatrix} M^{-1} S^{-1} = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1}, \text{ можна взяти } SM = T_2, \text{ тобто } S = T_2 M^{-1}.$$

Тож  $K = T_2 M^{-1} \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} M T_2^{-1}$ . Остаточно розв'язок запишеться у вигляді:

$$\text{ді: } x(t) = T_2 M^{-1} \begin{pmatrix} e^{\sigma t} & te^{\sigma t} \\ 0 & e^{\sigma t} \end{pmatrix} M T_2^{-1} c = e^{\sigma t} D(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{C},$$

$$\text{де позначено } D(t) := \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} t \frac{1}{(\sigma+1)e^\sigma} + 1 & -\left(\frac{a-d}{2}\right) t \frac{1}{c(\sigma+1)e^\sigma} \\ \frac{ct}{(\sigma+1)e^\sigma} & \frac{t(d-a)}{2} \frac{1}{(\sigma+1)e^\sigma} + 1 \end{pmatrix}.$$

3. Якщо  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in C_2$ , тоді  $A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$  і розв'язок

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{K_1 t} c_1 + e^{K_2 t} c_2 = |c_1 \in B_1, c_2 \in B_2| = T \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} k_1 T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} T^{-1} k_2 T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= k_1 T \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} = k_1 e^{\sigma_1 t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\sigma_2 t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k, k_2 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

4. Якщо  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in C_3$ , то  $x(t) = e^{K_1 t} c_1 + e^{K_2 t} c_2$ . Можливі випадки зведення  $A$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , в цьому випадку "обернені" відображення переводить точку  $\lambda$  самоперетину спіралі у дві точки

уявної осі  $\sigma_1 = f_1^{-1}(\lambda)$ ,  $\sigma_2 = f_2^{-1}(\lambda)$ .

Підстановкою загального розв'язку в (1) можна знайти загальний вигляд операторів  $K_1, K_2$ .

$$K_1 e^{K_1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 e^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 e^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 e^{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 e^{\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 e^{\sigma_1} \end{pmatrix}.$$

$$x(t) = e^{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t} \\ me^{\sigma_1 t} + ne^{\sigma_2 t} \end{pmatrix}, \quad k, l, m, n \in \mathbb{C}.$$

б) Якщо  $A = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1}$ ,  $x(t) = e^{K_1 t} c_1 + e^{K_2 t} c_2$ .  $K_1, K_2$  не можуть мати діагональної нормальної жорданової форми, тому  $K_1 = S \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} S^{-1}$ ,  $K_2 = V \begin{pmatrix} \sigma_2 & 1 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V^{-1}$ ,  $\lambda = \sigma_1 e^{\sigma_1} = \sigma_2 e^{\sigma_2}$ .

Після підстановки маємо  $K_1 e^{K_1} = A$ , і  $K_1 = T_2 M_1^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} M_1 T_2^{-1}$ ,  $K_2 = T_2 M_2^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 1 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} M_2 T_2^{-1}$ , де матриця  $M$  вводилася в пункті 2) для  $\sigma$ , а  $M_1, M_2$  –аналогічні матриці для  $\sigma_1, \sigma_2$ . Розв'язок :

$$x(t) = T_2 M_1^{-1} \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} & te^{\sigma_1 t} \\ 0 & e^{\sigma_1 t} \end{pmatrix} M_1 T_2^{-1} c_1 + T_2 M_2^{-1} \begin{pmatrix} e^{\sigma_2 t} & te^{\sigma_2 t} \\ 0 & e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} M_2 T_2^{-1} c_2 = e^{\sigma_1 t} D_1(t) c_1 + e^{\sigma_2 t} D_2(t) c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}^2. \quad 5.$$

Нехай  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \in C_2$ ,  $\lambda_2 \in C_3$  і  $A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$ . Тоді  $x(t) = ke^{\sigma t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (le^{\sigma_1 t} + me^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $k, l, m \in \mathbb{C}$ .

6. Нехай  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in C_3$ . Тоді, якщо  $\sigma_1, \sigma_2$  відповідають числу  $\lambda_1$ ,  $\sigma_3, \sigma_4$  – числу  $\lambda_2$ , то розв'язком буде :

$$x(t) = (ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (me^{\sigma_3 t} + ne^{\sigma_4 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k, l, m, n \in \mathbb{C}.$$

7. Якщо  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \in C_1$ ,  $\lambda_2 \in C_2$ , то  $x(t) = ke^{\sigma t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{C}$ .

8. Якщо  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \in C_1$ ,  $\lambda_2 \in C_3$ , то  $x(t) = (ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $k, l \in \mathbb{C}$ .

Пункти 1)-8) – повністю вичерпують усі можливі випадки вигляду розв'язку диференціального рівняння (1) у двовимірному евклідовому просторі в залежності від матриці  $A$ .

Нижче будемо оцінювати одержані розв'язки, щоб отримати умови, при яких рівняння (1) уже в просторі  $l_2$  має розв'язок. Для цього потрібні допоміжні леми.

**Лема 1.** Нехай матриця  $A$  в комплексному евклідовому просторі  $\mathbb{C}^2$  має вигляд  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Тоді норма

$$\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + \sqrt{(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^2 + 8 \operatorname{Re}(adcb) - 4|ad|^2 - 4|cb|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Доведення. Потрібно скористатись формулою  $\|A\| = \sqrt{\|AA^*\|} = \sqrt{r(AA^*)}$ , де  $r(AA^*)$  – спектральний радіус відповідного оператора, який можна підрахувати, знайшовши власні числа матриці.

**Лема 2.** Нехай  $\sigma_1, \sigma_2 \in i\mathbb{R}$  (тобто лежать на уявній осі),  $a, b \in \mathbb{C}$ . Тоді

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |ae^{\sigma_1 t} + be^{\sigma_2 t}| = |a| + |b|. \quad (4)$$

Доведення можна отримати, дослідивши функцію  $|ae^{\sigma_1 t} + be^{\sigma_2 t}|$  на екстремум по  $t$  методами диференціального числення.

Використовуючи формулу (3), можна отримати норми матриць  $D(t), D_1(t), D_2(t)$ .

Тепер оцінимо зверху норми розв'язків, одержаних в пунктах 1)–8).

1)  $\|x(t)\| = 0 \Rightarrow \psi_1(t) \equiv \psi_1$ ;

2) а)  $\|x(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |e^{\sigma t}| \cdot \|c_1\| = \|c_1\| = \psi_2(t) \equiv \psi_2$ ;

2) б)  $\forall t \in \mathbb{R} : \|x(t)\| = \left\| e^{\sigma t} D(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |e^{\sigma t}| \cdot \|D(t)\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\| =: \psi_3(t)$ ;

$$\begin{aligned}
 3) \|x(t)\| &= \left\| k_1 e^{\sigma_1 t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\sigma_2 t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} k_1 e^{\sigma_1 t} (\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b \\ k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t} (\lambda_2 - a) \end{pmatrix} \right\| = \\
 &= \sqrt{\|k_1 e^{\sigma_1 t} (\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b\|^2 + \|k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t} (\lambda_2 - a)\|^2} \leq \\
 &\leq \sqrt{(|k_1 (\lambda_1 - d)| + |k_2 b|)^2 + (|k_1 c| + |k_2 (\lambda_2 - a)|)^2} =: \psi_4(t) \equiv \psi_4; \\
 4) \quad \text{а) Аналогічно знаходимо :} \\
 \|x(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t} \\ m e^{\sigma_1 t} + n e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{(|k| + |l|)^2 + (|m| + |n|)^2} =: \psi_5(t) \equiv \psi_5; \\
 4) \quad \text{б) } \forall t \in \mathbf{R} : \|x(t)\| &= \|e^{\sigma_1 t} D_1 c_1 + e^{\sigma_2 t} D_2 c_2\| \leq \|D_1\| \cdot \|c_1\| + \|D_2\| \cdot \|c_2\| =: \psi_6(t); \\
 5) \|x(t)\| &= \left\| k e^{\sigma_1 t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} k e^{\sigma_1 t} (\lambda_1 - d) + (l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t}) b \\ k e^{\sigma_1 t} c + (l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t}) (\lambda_2 - a) \end{pmatrix} \right\| = \\
 &= \sqrt{(|k (\lambda_1 - d)| + |l b| + |m b|)^2 + (|k c| + |l (\lambda_2 - a)| + |m (\lambda_2 - a)|)^2}^{\frac{1}{2}} =: \psi_7(t) \equiv \psi_7; \\
 6) \|x(t)\| &= \left\| (k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (m e^{\sigma_3 t} + n e^{\sigma_4 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \leq \\
 &\leq \sqrt{(|k (\lambda_1 - d)| + |l (\lambda_1 - d)| + |m b| + |n b|)^2 + (|k c| + |l c| + |m (\lambda_2 - a)| + |n (\lambda_2 - a)|)^2}^{\frac{1}{2}} =: \psi_8(t) \equiv \psi_8; \\
 7) \|x(t)\| &= \left\| k e^{\sigma_1 t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{|k b|^2 + |k (\lambda_2 - a)|^2} =: \psi_9(t) \equiv \psi_9; \\
 8) \|x(t)\| &= \left\| (k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t}) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{(|k b| + |l b|)^2 + (|k (\lambda_2 - a)| + |l (\lambda_2 - a)|)^2} =: \psi_{10}(t) \equiv \psi_{10}.
 \end{aligned}$$

**Зауваження.** Лема 2 показує, що використані оцінки лінійних комбінацій двох експонент є точними.

Перейдемо тепер до рівняння (1) в просторі  $l_2$ . Оператор  $A$  матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5)$$

Двовимірні блоки  $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$  матриці (5) відповідають розглядуваним вище матрицям  $2 \times 2$ . Двовимірний розв'язок  $x_N(t)$

для  $N$ -того блоку визначаються формулами з пунктів 1)–8) і  $\forall t \in \mathbf{R} : \|x_N(t)\| \leq \psi_{i(N)}(t)$ ,

$\|A_N x_N(t)\| \leq \|A_N\| \psi_{i(N)}(t)$ ,  $i = i(N) \in \{1, \dots, 10\}$ , і обирається в залежності від вигляду  $N$ -того блоку. Введемо перепо-

значення:  $\tilde{x}_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (x_N(t), \bar{e}_1) & (x_N(t), \bar{e}_2) & 0 & \dots \end{pmatrix}^t$ , де  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  – вектори базису в двовимірному

просторі. Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розв'язку рівняння (1) :

$$x(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{x}_N(t) \quad (6)$$

Використовуючи подані вище позначення, сформулюємо таку теорему:

**Теорема 1.** Нехай оператор  $A$  має вигляд (5). Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (6).

2) Якщо

$$\forall t \in \mathbf{R} : \sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \psi_{i(N)}^2(t) < \infty, \quad \sum_{N=1}^{\infty} \psi_{i(N)}^2(t) < \infty,$$

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі  $C_E(\mathbf{R}, B)$  функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.



3) Якщо в матриці  $A$  немає блоків вигляду 2)б) та 4)б) і

$$\sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \Psi_{i(N)}^2 < \infty, \quad \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_{i(N)}^2 < \infty,$$

тоді ряд (6) збігається в  $l_2$  до обмеженого розв'язку рівняння (1).

**Доведення.** Пункт 1 випливає з наведених вище міркувань, якщо діяти на рівняння (1) проекторами на відповідні двовимірні підпростори. Пункт 2 з наведених вище міркувань, рівності Парсеваля:  $\|x(t)\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty} \|\widetilde{x}_N(t)\|^2$  і неперервності функцій  $x$  та  $Ax$ , що випливають з рівномірної збіжності рядів.

#### 4. Дослідження прямої суми блоків $n \times n$ .

Далі будемо розглядати рівняння (1), де матриця  $A$  – нескінченна і має блочну структуру з блоків різної (скінченної) розмірності.

Всі міркування з попереднього розділу можна перенести на цей випадок. Розглянемо  $N$ -тий  $n$ -вимірний блок  $A_N$ , його власні числа  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  можна визначити з характеристичного рівняння  $\det(A_N - \lambda E) = 0$ .

Зведемо  $A_N$  до нормальної жорданової форми. Нехай  $T$  – матриця переходу. Простір  $\mathbb{C}^n$  розбивається в пряму суму інваріантних підпросторів, що відповідають клітинам Жордана. Розв'язок у цьому просторі буде сумою розв'язків, що відповідають різним клітинам. Міркуючи аналогічно попередньому пункту, можна встановити вигляд розв'язку для кожного випадку.

1) Якщо власне число, що відповідає клітині Жордана, лежить у множині  $C_1$ , то розв'язок для цієї клітини нульовий.

2) Якщо клітина Жордана одновимірна, то у випадку власного числа  $\lambda \in C_2$  маємо розв'язок  $ke^{\sigma t}Te$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma = f^{-1}(\lambda)$ ,  $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , де положення одиниці залежить від розташування клітини в матриці, а у випадку  $\lambda \in C_3$  маємо розв'язок  $(k_1 e^{\sigma_1 t} + k_2 e^{\sigma_2 t})Te$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma_1 = f_1^{-1}(\lambda)$ ,  $\sigma_2 = f_2^{-1}(\lambda)$ ,  $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .

3) Якщо клітина Жордана  $U$  більш ніж одновимірна і  $\lambda \in C_2$ , то знаходимо матрицю  $M$  з умови  $Ue^U = MZM^{-1}$ , де  $Z$  – нормальна жорданова форма для матриці  $Ue^U$ . Позначимо через  $G(t)$  матрицю розміру  $n \times n$ , у якій на тому місці, на якому досліджувана клітина Жордана розташована в  $A_N$  стоїть матриця  $M^{-1}e^{U_0 t}M$ , де  $U_0$  – клітина Жордана тої ж розмірності, що й  $U$ , яка відповідає числу  $\sigma = f^{-1}(\lambda)$ , а всі інші клітини заповнені нулями. Тоді маємо  $x(t) = TG(t)T^{-1}c$ ,  $c \in \mathbb{C}^n$ . У випадку  $\lambda \in C_3$  всі міркування залишаються правильними, крім того, що маємо два доданки, що відповідають числам  $\sigma_1 = f_1^{-1}(\lambda)$ ,  $\sigma_2 = f_2^{-1}(\lambda)$ .

$n$ -вимірний розв'язок  $x_N(t)$  для  $N$ -того блоку визначається наведеними формулами і  $\forall t \in \mathbb{R}: \|x_N(t)\| \leq \Psi_{i(N)}(t)$ ,  $\|A_N x_N(t)\| \leq \|A_N\| \Psi_{i(N)}(t)$ ,  $i = i(N)$ , і обирається в залежності від вигляду  $N$ -того блоку. Введемо перепозначення:

$$\tilde{x}_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (x_N(t), \bar{e}_1) & \dots & (x_N(t), \bar{e}_n) & 0 & \dots \end{pmatrix}^t, \text{ де } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{вектори базису в } n\text{-вимірному просторі.}$$

Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розв'язку рівняння (1):

$$x(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{x}_N(t) \quad (7)$$

Використовуючи подані вище позначення, сформулюємо таку теорему:

**Теорема 2.** Нехай оператор  $A$  має блочно-діагональний вигляд. Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (7).

2) Якщо  $\forall t \in \mathbb{R}: \sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \Psi_{i(N)}^2(t) < \infty$ ,  $\sum_{N=1}^{\infty} \Psi_{i(N)}^2(t) < \infty$ ,

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі  $C_E(\mathbb{R}, B)$  функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.

3) Якщо в матриці  $A$  немає блоків, описаних у випадку 3) і

$$\sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \Psi_{i(N)}^2 < \infty, \quad \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_{i(N)}^2 < \infty,$$

тоді ряд (7) збігається в  $l_2$  до обмеженого розв'язку рівняння (1).

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

## 5. Висновки

В роботі розглянуті диференціальні рівняння зі зсувом аргументу в просторі  $l_2$  для випадку вироджених необмежених операторних коефіцієнтів, спектр яких може досить загальним чином перетинати подвійну спіраль  $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$ . В цьому випадку не виконується умова існування та єдиності розв'язків. Проте у випадку операторів блочної структури в просторі  $l_2$  вдалося знайти умови, за яких існують розв'язки, що зростають повільніше довільної експоненти та явно виписати ці розв'язки для випадку двовимірних блоків.

1. Чайковський А.В. Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, №5, С. 688-693. 2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М., 1960.

Надійшла до редколегії 22.09.2007

УДК 517.9

О. Кічмаренко, канд. фіз.-мат. наук, Н. Скрипник, канд. фіз.-мат. наук  
E-mail: k-olga@paco.net E-mail: talie@ukr.net

## НЕЧІТКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ

*Для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням доведено теореми існування та єдиності розв'язку, неперервної залежності від початкових функцій. Розглянуто питання обґрунтування схеми часткового усереднення на скінченному проміжку для систем з постійним та асимптотично великим запізненням.*

*For the fuzzy differential equations with delay theorems of existence and uniqueness of the solution, continuous dependence on initial functions are proved. The question of a substantiation of the scheme of partial averaging on a final interval for systems with constant and asymptotically big delay is considered.*

### 1. Вступ.

Стаття L.A. Zadeh [16] в 1965 р. започаткувала розвиток теорії нечітких множин. В 1983 р. M.L. Puri та D.A. Ralescu [12] ввели поняття Н-похідної та інтегралу від нечітких відображень, в якому використовувався підхід M. Hukuhara [6]. В 1987 р. О. Kaleva [7] розглянув нечіткі диференціальні рівняння та довів теорему існування та єдиності для випадку, коли права частина задовольняє умові Ліпшиця. В подальшому нечіткі диференціальні рівняння розглядались в роботах [2, 8 – 11, 14, 15].

### 2. Основні означення і поняття.

Нехай  $\text{conv}(R^n)$  – метричний простір непустих компактних опуклих підмножин  $R^n$ . Метрика в цьому просторі визначається за допомогою відстані Хаусдорфа

$$h(F, G) = \max \left\{ \sup_{f \in F} \inf_{g \in G} \|f - g\|, \sup_{g \in G} \inf_{f \in F} \|f - g\| \right\},$$

де під  $\|\cdot\|$  розуміється норма в просторі  $R^n$ .

Введемо до розгляду простір  $E^n$  відображень  $u: R^n \rightarrow [0, 1]$ , що задовольняють наступним умовам:

- 1)  $u$  – модальне відображення, тобто існує вектор  $x_0 \in R^n$  такий, що  $u(x_0) = 1$ ;
- 2)  $u$  – нечітко опукле відображення, тобто для довільних  $x, y \in R^n$  та довільного  $\lambda \in [0, 1]$  виконується нерівність  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ ;
- 3)  $u$  – відображення, напівнеперервне зверху;
- 4) замикання множини  $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$  є компактим.

**Означення 1.**  $\alpha$ -зрізкою  $[u]^\alpha$  відображення  $u \in E^n$  при  $0 < \alpha \leq 1$  назвемо множину  $\{x \in R^n : u(x) \geq \alpha\}$ . Нульовою зрізкою відображення  $u \in E^n$  назвемо замикання множини  $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ .

**Теорема 1** [11]. Якщо  $u \in E^n$ , то

$$1^0 [u]^\alpha \in \text{conv}(R^n) \text{ для всіх } 0 \leq \alpha \leq 1;$$

$$2^0 [u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1} \text{ для всіх } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1;$$

$$3^0 \text{ якщо } \{\alpha_k\} \subset [0, 1] \text{ — неспадна послідовність, що збігається до } \alpha > 0, \text{ то } [u]^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} [u]^{\alpha_k}.$$

Навпаки, якщо  $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$  – сімейство підмножин  $R^n$ , що задовольняють умовам  $1^0 - 3^0$ , то існує  $u \in E^n$  таке, що  $[u]^\alpha = A^\alpha$  для  $0 < \alpha \leq 1$  та  $[u]^0 = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha \subset A^0$ .

Визначимо в просторі  $E^n$  метрику  $D: E^n \times E^n \rightarrow [0, +\infty)$ , покладаючи  $D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ .

Нехай  $I$  – проміжок в  $R$ .

**Означення 2** [11]. Відображення  $F : I \rightarrow E^n$  називається сильно вимірним на  $I$ , якщо для всіх  $\alpha \in [0,1]$  многозначне відображення  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$  вимірне.

**Означення 3** [11]. Відображення  $F : I \rightarrow E^n$  називається інтегрально обмеженим на  $I$ , якщо існує інтегрована за Лебегом функція  $k(t)$  така, що  $\|x\| \leq k(t)$  для всіх  $x \in F_0(t)$ .

**Означення 4** [11]. Інтегралом від відображення  $F : I \rightarrow E^n$  по множині  $I$  називається елемент  $G \in E^n$  такий, що  $[G]^\alpha = \int_I F_\alpha(t) dt$  для всіх  $0 < \alpha \leq 1$ , де інтеграл від многозначного відображення  $F_\alpha(t)$  є інтегралом Ауманна [5].

**Теорема 2** [11]. Якщо відображення  $F : I \rightarrow E^n$  сильно вимірне та інтегрально обмежене, то  $F$  інтегроване на  $I$ .

**Теорема 3** [11]. Нехай  $F, G : I \rightarrow E^n$  інтегровані на  $I$  та  $\lambda \in R$ . Тоді

- 1)  $\int_I (F(t) + G(t)) dt = \int_I F(t) dt + \int_I G(t) dt$ ;
- 2)  $\int_I \lambda F(t) dt = \lambda \int_I F(t) dt$ ;
- 3) функція  $D(F(t), G(t))$  інтегрована за Лебегом на  $I$ ;
- 4)  $D\left(\int_I F(t) dt, \int_I G(t) dt\right) \leq \int_I D(F(t), G(t)) dt$ .

**Означення 5** [11]. Відображення  $F : I \rightarrow E^n$  називається диференційованим в точці  $t_0 \in I$ , якщо для всіх  $\alpha \in [0,1]$  многозначне відображення  $F_\alpha(t)$  диференційоване за Хукухарою [6] в точці  $t_0$ , його похідна дорівнює  $D_H F_\alpha(t_0)$  та сімейство множин  $\{D_H F_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$  визначає елемент  $F'(t_0) \in E^n$ .

Якщо відображення  $F : I \rightarrow E^n$  диференційоване в точці  $t_0 \in I$ , то  $F'(t_0)$  називається нечіткою похідною відображення  $F(t)$  в точці  $t_0$ .

**Теорема 4** [11]. Нехай відображення  $F : I \rightarrow E^n$  диференційоване та припустимо, що його нечітка похідна  $F' : I \rightarrow E^n$  інтегрована на  $I$ . Тоді для довільного  $t \in I$  маємо  $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t F'(s) ds$ .

**Означення 5** [11]. Відображення  $F : I \rightarrow E^n$  називається слабо неперервним в точці  $t_0 \in I$ , якщо для довільного фіксованого  $\alpha \in [0,1]$  та довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$  таке, що  $h(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \varepsilon$  для всіх  $t \in I$  таких, що  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$ .

**Означення 6.** Відображення  $F : I \times E^n \times \dots \times E^n \rightarrow E^n$  називається слабо неперервним в точці  $(t_0, x_{10}, \dots, x_{m0}) \in I \times E^n \times \dots \times E^n$ , якщо для довільного фіксованого  $\alpha \in [0,1]$  та довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$  таке, що  $h([F(t, x_1, \dots, x_m)]^\alpha, [F(t_0, x_{10}, \dots, x_{m0})]^\alpha) < \varepsilon$  для всіх  $t \in I$ ,  $x_i \in E^n$  таких, що  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$  та  $h([x_i]^\alpha, [x_{i0}]^\alpha) < \delta(\varepsilon, \alpha)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Означення 7.** Кажуть, що відображення  $F : I \times E^n \times \dots \times E^n \rightarrow E^n$  задовольняє умові Ліпшиця за змінними  $x_1, \dots, x_m$ , якщо існує стала  $L > 0$  така, що для довільної пари  $(t, x_1, \dots, x_m), (t, y_1, \dots, y_m) \in I \times E^n \times \dots \times E^n$  та всіх  $\alpha \in [0,1]$  виконується нерівність  $h([F(t, x_1, \dots, x_m)]^\alpha, [F(t, y_1, \dots, y_m)]^\alpha) \leq L \sum_{i=1}^m h([x_i]^\alpha, [y_i]^\alpha)$ .

Зрозуміло, що якщо відображення  $F : I \times E^n \times \dots \times E^n \rightarrow E^n$  задовольняє умові Ліпшиця за змінними  $x_1, \dots, x_m$  зі сталою  $L > 0$ , то для довільної пари  $(t, x_1, \dots, x_m), (t, y_1, \dots, y_m) \in I \times E^n \times \dots \times E^n$  виконується нерівність

$$D(F(t, x_1, \dots, x_m), F(t, y_1, \dots, y_m)) \leq L \sum_{i=1}^m D(x_i, y_i).$$

Позначимо через

$$I_0 = [t_0, T], \quad B(x_0, b) = \{x \in E^n : D(x, x_0) \leq b\}, \quad J_0 = I_0 \times B(x_0, b).$$

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

де  $f : J_0 \rightarrow E^n$  – слабо неперервне відображення.

**Означення 8** [11]. Відображення  $x : [t_0, t_1] \rightarrow E^n, t_1 \leq T$  називається розв'язком задачі (1), якщо воно є слабо неперервним та для всіх  $t \in [t_0, t_1]$  задовольняє інтегральному рівнянню  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .

**Теорема 5** [9]. Припустимо, що відображення  $f : J_0 \rightarrow E^n$  є слабо неперервним та задовольняє умові Ліпшиця по  $x$ . Тоді існує єдиний розв'язок  $x = x(t)$  задачі (1), визначений на проміжку  $[t_0, t_0 + \delta]$ , де

$$\delta = \min \left\{ T - t_0, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \sup_{(t,x) \in J_0} D(f(t,x), \hat{0}), \quad \hat{0} \in E^n \text{ таке, що } \hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \setminus 0. \end{cases}$$

### 3. Теореми існування, єдиності та неперервної залежності від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням.

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння із запізненням

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))), \\ x(t) &= \varphi(t), t \in E_{t_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $E_{t_0} = \bigcup_{i=1}^m E_{t_0}^{(i)}$ ,  $E_{t_0}^{(i)}$  – множини, що містять точку  $t_0$  та ті значення  $t - \tau_i(t)$ , для яких  $t - \tau_i(t) < t_0$  при  $t \geq t_0$ ,

$F : R \times E^n \times \dots \times E^n \rightarrow E^n$ ,  $\varphi : R \rightarrow E^n$ .

Покажемо, що для рівняння (2) виконуються теореми існування, єдиності та неперервної залежності від початкових функцій, які є аналогічними до теорем для рівняння в просторі  $R^n$  [3, 4].

**Теорема 6.** Нехай  $F$  слабо неперервне відображення в околі точки  $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau_1(t_0)), \dots, \varphi(t_0 - \tau_m(t_0)))$ , що задовольняє умові Ліпшиця зі сталою  $\lambda$  по всім змінним, починаючи з другої; початкова функція  $\varphi(t)$  слабо неперервна на  $E_{t_0}$ ; всі функції  $\tau_i(t)$  неперервні на  $t_0 \leq t \leq t_0 + L$ ,  $L > 0$  та невід'ємні. Тоді існує єдиний розв'язок  $x(t)$  задачі (2) при  $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$ , де  $\sigma$  достатньо мале.

**Доведення.** За означенням 8 розв'язку відображення  $x(t)$  задовольняє інтегральному рівнянню

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))) ds, t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ x(t) &= \varphi(t), t \in E_{t_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо до розгляду оператор  $A(x(t)) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))) ds$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ ,

$$A(x(t)) = x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0},$$

визначений в повному метричному просторі  $C_0$  всіх слабо неперервних на  $E_{t_0} \cup [t_0, t_0 + \sigma]$  функцій таких, що на  $E_{t_0}$  всі ці функції співпадають з  $\varphi(t)$ , а на проміжку  $[t_0, t_0 + \sigma]$  відрізняються від  $\varphi(t_0)$  не більше, ніж на величину  $\eta > 0$  в метриці  $\rho(x(t), y(t)) = \sup_{[t_0, t_0 + \sigma]} D(x(t), y(t))$ .

Нехай стала  $M > 0$  така, що  $D(F(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))), \hat{0}) < M$  при  $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ .

Функція  $A(x(t))$  слабо неперервна на  $E_{t_0} \cup [t_0, t_0 + \sigma]$ , так як на  $E_{t_0}$  функція  $A(x(t))$  співпадає зі слабо неперервною функцією  $\varphi(t)$ , а на проміжку  $[t_0, t_0 + \sigma]$  для довільних двох точок  $t$  та  $t'$  маємо

$$\begin{aligned} D(A(x(t)), A(x(t'))) &= \\ &= D\left(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))) ds, \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t'} F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))) ds\right) < M |t - t'|. \end{aligned}$$

На проміжку  $[t_0, t_0 + \sigma]$  функція  $A(x(t))$  відрізняється від  $\varphi(t_0)$  не більше, ніж на  $\eta$  в метриці  $\rho(\bullet, \bullet)$ , так як  $D(A(x(t)), \varphi(t_0)) < M\sigma < \eta$  при  $\sigma < \frac{\eta}{M}$ . Таким чином, оператор  $A$  відображає простір  $C_0$  в себе.

Крім того,

$$\begin{aligned} D(A(x(t)), A(y(t))) &= \\ &= D\left(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))) ds, \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y(s), y(s - \tau_1(s)), \dots, y(s - \tau_m(s))) ds\right) \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t D(F(s, x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_m(s))), F(s, y(s), y(s - \tau_1(s)), \dots, y(s - \tau_m(s)))) ds \leq \\ &\leq \lambda \int_{t_0}^t \left[ D(x(s), y(s)) + \sum_{i=1}^m D(x(s - \tau_i(s)), y(s - \tau_i(s))) \right] ds \leq \lambda \sigma (m+1) \rho(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

при  $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$  та  $D(A(x(t)), A(y(t))) = 0$  при  $t \in E_{t_0}$ . Нехай  $\sigma \leq \frac{\beta}{(m+1)\lambda}$ , де  $0 < \beta < 1$ , тоді оператор  $A(x(t))$  є стискаючим.

Таким чином, для  $\sigma \leq \min \left\{ \frac{\eta}{M}, \frac{\beta}{(m+1)\lambda} \right\}$  за теоремою Банаха [1] існує єдина нерухома точка оператора  $A$ , а значить і єдиний розв'язок рівняння (2), визначений на проміжку  $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$ .

**Теорема 7.** Нехай виконані всі умови теореми 1 та початкові функції  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$  такі, що  $D(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \leq \delta$ ,  $\delta > 0$  для всіх  $t \in E_{t_0}$ . Тоді справедлива оцінка

$$D(x_1(t), x_2(t)) \leq \delta e^{\lambda(m+1)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

де  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  – розв'язки рівняння (2) з початковими функціями  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$  відповідно, тобто розв'язки рівняння (2) неперервно залежать від початкових функцій.

**Доведення.** За означенням 8 розв'язку функції  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  задовольняють інтегральним рівнянням вигляду (3) з початковими функціями  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$  відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} D(x_1(t), x_2(t)) &= \\ &= D\left(\varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \dots, x_1(s-\tau_m(s)))ds, \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \dots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\right) \leq \\ &\leq D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + D\left(\int_{t_0}^t F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \dots, x_1(s-\tau_m(s)))ds, \int_{t_0}^t F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \dots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\right) \leq \\ &\leq D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \int_{t_0}^t D(F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \dots, x_1(s-\tau_m(s))), F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \dots, x_2(s-\tau_m(s))))ds \leq \\ &\leq D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \lambda \int_{t_0}^t \left[ D(x_1(s), x_2(s)) + \sum_{i=1}^m D(x_1(s-\tau_i(s)), x_2(s-\tau_i(s))) \right] ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Позначимо  $z(t) = \max \left\{ \delta, \max_{[t_0, t]} D(x_1(s), x_2(s)) \right\}$ . Тоді з (5) отримаємо

$$z(t) \leq \delta + \lambda(m+1) \int_{t_0}^t z(s) ds. \quad (6)$$

З (6), використовуючи лему Гронуола – Белмана, отримуємо необхідну нерівність (4).

#### 4. Усереднення нечітких диференціальних рівнянь з запізненням.

Розглянемо тепер питання обґрунтування схеми часткового усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$\begin{aligned} x'(t, \varepsilon) &= \varepsilon F(t, x(t, \varepsilon), x(t-\tau, \varepsilon)), \\ x(s, \varepsilon) &= \varphi(s, \varepsilon), \quad -\tau \leq s \leq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\varepsilon > 0$  – малий параметр,  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ ,  $L$  – стала.

У відповідність рівнянню (7) поставимо наступне частково усереднене рівняння

$$\begin{aligned} y'(t, \varepsilon) &= \varepsilon F^0(t, y(t, \varepsilon), y(t-\tau, \varepsilon)), \\ y(s, \varepsilon) &= \varphi(s, \varepsilon), \quad -\tau \leq s \leq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{T} \int_0^T F^0(s, x, z) ds, \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x, z) ds\right) = 0. \quad (9)$$

**Теорема 8.** Нехай в області  $Q = \{t \geq 0; x, z \in Q' \subset E^n\}$  виконані наступні умови:

1) функції  $F(t, x, z)$ ,  $F^0(t, x, z)$  та  $\varphi(s, \varepsilon)$  задовольняють умовам теореми 6 та існує стала  $M$  така, що

$$D(F(t, x, z), \hat{0}) \leq M, D(F^0(t, x, z), \hat{0}) \leq M;$$

2) рівномірно відносно  $x, z \in Q'$  існує границя (9);

3) розв'язок рівняння (8) існує при  $0 < \varepsilon \leq \sigma$  та належить  $Q'$  разом з деяким  $\delta$  – околom для  $t \in [0, L^*\varepsilon^{-1}]$ , де  $L^*$  – додатна стала.

Тоді для довільних  $\eta > 0$  та  $0 < L \leq L^*$  існує  $0 < \varepsilon^0 \leq \sigma$  таке, що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$  та  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$  справедлива оцінка

$$D(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \leq \eta. \quad (10)$$

**Доведення.** Розглянемо допоміжне диференціальне рівняння

$$z'(t, \varepsilon) = \varepsilon F(t, z(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)), \quad z(0, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon). \quad (11)$$

За означенням 8 функції  $x(t, \varepsilon)$  та  $z(t, \varepsilon)$  при  $t \geq 0$  задовольняють інтегральним рівнянням

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varphi(0, \varepsilon) + \int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s-\tau, \varepsilon)) ds, \\ z(t, \varepsilon) &= \varphi(0, \varepsilon) + \int_0^t F(s, z(s, \varepsilon), z(s, \varepsilon)) ds. \end{aligned}$$

Тоді

$$D(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \leq \varepsilon D\left(\int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s-\tau, \varepsilon)) ds, \int_0^t F(s, z(s, \varepsilon), z(s, \varepsilon)) ds\right). \quad (12)$$

При  $t \in [0, \tau]$  приймаючи до уваги обмеженість функції  $F(s, x, z)$ , отримаємо

$$D(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \leq \varepsilon \left[ D\left(\int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s-\tau, \varepsilon)) ds, \hat{0}\right) + D\left(\int_0^t F(s, z(s, \varepsilon), z(s, \varepsilon)) ds, \hat{0}\right) \right] \leq 2\varepsilon M \tau. \quad (13)$$

При  $t \in [\tau, L\varepsilon^{-1}]$  з (12) маємо

$$\begin{aligned} & D(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \leq \\ & \leq \varepsilon D\left(\int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s - \tau, \varepsilon)) ds, \int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s, \varepsilon)) ds\right) + \varepsilon D\left(\int_0^t F(s, x(s, \varepsilon), x(s, \varepsilon)) ds, \int_0^t F(s, z(s, \varepsilon), z(s, \varepsilon)) ds\right) \leq \\ & \leq \varepsilon \lambda \int_0^t D(x(s - \tau, \varepsilon), x(s, \varepsilon)) ds + 2\varepsilon \lambda \int_0^t D(x(s, \varepsilon), z(s, \varepsilon)) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} & \int_0^t D(x(s - \tau, \varepsilon), x(s, \varepsilon)) ds = \\ & = \int_0^t D(x(s - \tau, \varepsilon), x(s - \tau, \varepsilon) + \varepsilon \int_{s-\tau}^s F(s_1, x(s_1, \varepsilon), x(s_1 - \tau, \varepsilon)) ds_1) ds \leq \int_0^t \varepsilon M \tau ds \leq M \tau L. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді, використовуючи лему Гронуола – Белмана, з (14) отримуємо

$$D(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \leq \varepsilon \lambda M \tau L e^{2\varepsilon \lambda t}. \quad (16)$$

Аналогічно для розв'язків рівняння (8) та рівняння

$$w'(t, \varepsilon) = \varepsilon F^0(t, w(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)), \quad w(0, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon) \quad (17)$$

отримуємо

$$D(y(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) \leq \varepsilon \lambda M \tau L e^{2\varepsilon \lambda t}. \quad (18)$$

Рівняння (17) є частково усередненим для рівняння (11).

Для довільних  $\eta$  та  $L \in (0, L^*)$  можна підібрати  $[2] \varepsilon^1 \in [0, \sigma]$  таке, що для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^1]$  та  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$  справедлива наступна оцінка

$$D(w(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \leq \frac{\eta}{2}. \quad (19)$$

З (13), (16), (18), (19) для  $\varepsilon^0 = \min\left\{\varepsilon^1, \frac{\eta}{4\lambda M \tau L e^{2\lambda L}}, \frac{\eta}{4M\tau}\right\}$  отримуємо оцінку (10). Теорема доведена.

Розглянемо ще одну загальну схему усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$x'(t, \varepsilon) = \varepsilon F\left(t, x(t, \varepsilon), x(t - \tau_1, \varepsilon), x\left(t - \frac{\tau_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right), \quad (20)$$

$$x(s, \varepsilon) = \varphi(s, \varepsilon), \quad -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \leq s \leq 0.$$

Рівнянню (20) поставимо у відповідність наступне частково усереднене рівняння

$$y'(t, \varepsilon) = \varepsilon F^0\left(t, y(t, \varepsilon), y(t - \tau_1, \varepsilon), y\left(t - \frac{\tau_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right), \quad (21)$$

$$y(s, \varepsilon) = \varphi(s, \varepsilon), \quad -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \leq s \leq 0,$$

де

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, x, y, z) dt, \frac{1}{T} \int_0^T F^0(t, x, y, z) dt\right) = 0. \quad (22)$$

**Теорема 9.** Нехай в області  $Q = \{t \geq 0; x, y, z \in Q' \subset E^n\}$  виконуються наступні умови:

1) функції  $F(t, x, y, z), F^0(t, x, y, z)$  є слабо неперервними, рівномірно обмеженими сталою  $M$  та задовольняють умові Ліпшиця зі сталою  $\lambda$  за всіма змінними, починаючи з другої;

2) початкова функція  $\varphi(s, \varepsilon)$  є слабо неперервною і такою, що

$$D(\varphi(s', \varepsilon), \varphi(s'', \varepsilon)) \leq \varepsilon \lambda (s' - s''), \quad \varphi(s, \varepsilon) \in D, \quad -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \leq s \leq 0;$$

3) рівномірно відносно  $x, y, z \in Q'$  існує границя (22);

4) розв'язок рівняння (21) існує при  $0 < \varepsilon \leq \sigma_1$  та належить області  $Q'$  разом з деяким  $\delta$  – околom для  $t \in [0, L^* \varepsilon^{-1}]$ , де  $L^* > 0$  – стала.

Тоді для довільних  $\eta > 0$  та  $0 < L \leq L^*$  існує  $0 < \varepsilon^0 \leq \sigma_1$  таке, що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$  та  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$  справедлива оцінка

$$D(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \leq \eta. \quad (23)$$

**Доведення.** Розглянемо розв'язки систем (20), (21) на інтервалі  $\left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$ :

$$\begin{aligned}x'_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon F\left(t, x_1(t, \varepsilon), x_1(t - \tau_1, \varepsilon), \varphi\left(t - \frac{\tau_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right), \quad x_1(0, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon); \\y'_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon F^0\left(t, y_1(t, \varepsilon), y_1(t - \tau_1, \varepsilon), \varphi\left(t - \frac{\tau_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right), \quad y_1(0, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon).\end{aligned}$$

За теоремою 8 для довільного  $\eta_1 > 0$  існує  $\varepsilon_1 \in (0, \sigma]$  таке, що для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  та  $t \in \left(0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$  справедлива оцінка

$$D(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon)) \leq \eta_1. \quad (24)$$

Розглянемо тепер розв'язки  $y_2(s, \varepsilon)$  та  $z_2(s, \varepsilon)$  системи (15) на проміжку  $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$  з початковими функціями

$$y_2(s, \varepsilon) = y_1(s, \varepsilon), \quad s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right], \quad z_2(s, \varepsilon) = x_1(s, \varepsilon), \quad s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 7 для довільного  $\eta_2 > 0$  існує  $\delta > 0$  таке, що для  $D(y_1(s, \varepsilon), x_1(s, \varepsilon)) \leq \delta$  маємо

$$D(y_2(s, \varepsilon), z_2(s, \varepsilon)) \leq \frac{\eta_2}{2}, \quad s \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]. \quad (25)$$

Тепер розглянемо розв'язки  $x_2(s, \varepsilon)$  та  $z_2(s, \varepsilon)$  систем (20), (21) на проміжку  $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$  з початковими функціями

$$x_2(s, \varepsilon) = x_1(s, \varepsilon), \quad s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right], \quad z_2(s, \varepsilon) = x_1(s, \varepsilon), \quad s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 8 для довільного  $\eta_2 > 0$  існує  $\bar{\varepsilon}_2$  таке, що для  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_2]$  та  $t \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$  справедлива оцінка

$$D(x_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon)) \leq \frac{\eta_2}{2}. \quad (26)$$

Виберемо  $\hat{\varepsilon}_2 \in (0, \sigma]$  так, щоб  $\eta_1 \leq \delta$  для  $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_2]$ . Тоді для  $\varepsilon_2 = \min\{\bar{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_2\}$  з (25), (26) отримуємо

$$D(y_2(s, \varepsilon), x_2(s, \varepsilon)) \leq \eta_2, \quad s \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

Нехай  $k < \frac{L}{\tau_2} \leq k+1$ . Тоді після  $k$  кроків для  $\varepsilon^0 = \min_{1 \leq i \leq k} \varepsilon_i$  ми отримуємо твердження теореми.

**Зауваження.** Якщо відображення  $F^0(t, x, y, z)$  не залежить від  $t$ , то з рівняння (22) випливає існування середнього, тобто

$$F^0(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^0(t, x, y, z) dt.$$

В цьому випадку теорема 9 обґрунтовує схему повного усереднення.

### 5. Висновки.

Таким чином, в статті обґрунтовано існування, єдиність та неперервна залежність від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням, а також обґрунтовано схеми усереднення для рівнянь такого виду, які містять малий параметр.

1. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М., 1988.
2. Комплева Т.А., Плотников А.В., Плотникова Л.И. Усреднение дифференциальных включений // Труды Одесского политехнического университета. – 2007. – №1 (27). – С.185 – 190.
3. Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук. – 1949. – IV, вып.5. – С. 99 – 141.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971.
5. Aumann R.J. Integrals of set – valued functions // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – 12. – P. 1 – 12.
6. Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 11. – P. 205 – 223.
7. Kaleva O. Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 301 – 317.
8. Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, 3. – P. 389 – 396.
9. Lakshmikantham V., Leela S., Vatsala A.S. Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. – 2003. – Vol. 54. – P. 351 – 360.
10. Negoita C.V., Ralescu D.A. Applications of fuzzy sets to systems analysis. – New York, Toronto, 1975.
11. Park J.Y., Han H.K. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, 2. – P. 271 – 279.
12. Puri M.L., Ralescu D.A. Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552 – 558.
13. Puri M.L., Ralescu D.A. Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol.114, 2. – P. 409 – 422.
14. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 319 – 330.
15. Song S.J., Wu C.X. Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67.
16. Zadeh L. Fuzzy sets // Inform. and Control. – 1965. – 8. – P. 338 – 353.

УДК 517.927.8

П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук  
E-mail: psamusenko@ukr.net**АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ І ТОЧКОЮ ПОВОРОТУ**

*Використовуючи метод примежевих функцій, у роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням і точкою повороту.*

*Using the method of boundary functions, the solution of the initial-value problem of the singularly perturbed system of differential equations with degeneration and a turning point is constructed.*

**1. Вступ**

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad (2)$$

де  $A(t)$ ,  $B(t)$  – квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $f(x, t, \varepsilon)$  – задана  $n$ -вимірний вектор-функція,  $x = x(t, \varepsilon)$  – шукана вектор-функція,  $\varepsilon$  – малий параметр.

За умови простих елементарних дільників в'язки  $A(t) - \lambda B(t)$  і неособливої матриці біля похідних задачу (1), (2) розв'язав В.П. Яковець [7]. У випадку кратних елементарних дільників зазначена задача розглядалась в [5]. При цьому припускалось, що матриця  $B(t)$  на відрізку  $[0; T]$  змінює свій ранг, що значно ускладнювало алгоритм побудови розв'язку задачі Коші.

**2. Об'єкт та методи досліджень**

У даній роботі наведено асимптотичні формули для розв'язку задачі (1), (2) у випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння

$$\det(A(t) - \lambda B(t)) = 0 \quad (3)$$

на відрізку  $[0; T]$  змінюють свою кратність. Отже, нехай:

$$1) \quad A(t), B(t) \in C_{[0; T]}^\infty;$$

2) вектор-функція  $f(x, t, \varepsilon)$  має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині

$$G = \{(x, t, \varepsilon) : \|x\| \leq a, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}, \quad \|x_0\| \leq a;$$

3) в'язка матриць  $A(0) - \lambda B(0)$  має  $n-1$  "скінченних" елементарних дільників і один "нескінченний" елементарний дільник;

4) в'язка матриць  $A(t) - \lambda B(t)$ ,  $t \in (0; T]$ , має  $n$  "скінченних" елементарних дільників;

5)  $\operatorname{Re} \lambda_1(t) < 0$ ,  $t \in (0; T]$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$ ,  $t \in [0; T]$ , і  $\lambda_i(0) \neq 0$ ,  $i = \overline{2, k}$ ;  $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$ ,  $\lambda_i(t) \neq 0$ ,  $t \in (0; T]$ , і  $\lambda_i(0) = 0$ ,  $i = k+1, m$ ;  $\lambda_i(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0; T]$ ,  $i = m+1, n$ , де  $\lambda_i(t)$  – корені рівняння (3).

Згідно умов 3) – 5) існують неособливі матриці  $P(t)$ ,  $Q(t)$  такі, що

$$P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t), \quad P(t)B(t)Q(t) = H(t),$$

$$\Omega(t) = \operatorname{diag}\{1, W(t)\}, \quad W(t) = \operatorname{diag}\{W_1(t), W_2(t)\},$$

$$W_1(0) = \operatorname{diag}\{\lambda_2(0), \lambda_3(0), \dots, \lambda_k(0)\}, \quad W_2(0) \text{ – нульова матриця } (n-k) \text{ -го порядку};$$

$$H(t) = \operatorname{diag}\{h_{11}(t), E_{n-1}(t)\}, \quad E_{n-1}(0) = E_{n-1},$$

$$E_{n-1} \text{ – одинична матриця } (n-1) \text{ -го порядку, } h_{11}(0) = 0 \text{ [8]. Причому } P(t), Q(t) \in C_{[0; T]}^\infty.$$

Покладаючи  $x(t, \varepsilon) = Q(t)y(t, \varepsilon)$ , запишемо систему (1) наступним чином:

$$\varepsilon H(t) \frac{dy}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y + \varepsilon P(t)f(Qy, t, \varepsilon),$$

або

$$\varepsilon H(t) \frac{dy}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon))y + \varepsilon g(y, t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\text{Де } C_1(t, \varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon} \frac{d\Omega(\theta t)}{dt} - H(t)Q^{-1}(t)Q'(t), \quad 0 < \theta < 1; \quad g(y, t, \varepsilon) = P(t)f(Qy, t, \varepsilon).$$

Зазначимо, що  $\|C_1(t, \varepsilon)\| = O(1)$ ,  $t \in [0; k\varepsilon]$  (число  $k$  визначимо нижче).

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду

$$y(0, \varepsilon) = Q^{-1}(0)x_0 \equiv y_0 \quad (5)$$



Розв'язок задачі (4), (5) на відрізку  $[0; k\varepsilon]$  шукатимемо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \quad (6)$$

де  $\bar{y}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{y}_s(t, \varepsilon)$  – регулярний ряд, а  $\Pi y(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s y(\tau, \varepsilon)$  – примежевий ряд,  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  [1, с. 48].

Нехай  $\bar{g}(t, \varepsilon) = g(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  і  $\Pi g(\tau, \varepsilon) = g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon)$ .

Розкладемо вектор-функції  $\bar{g}(t, \varepsilon)$  та  $\Pi g(\tau, \varepsilon)$  у формальні ряди за степенями  $\varepsilon$ :

$$\bar{g}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{g}_s(t), \quad \Pi g(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s g(\tau).$$

У такому ж вигляді запишемо  $H(\varepsilon\tau)$  та  $C_1(\varepsilon\tau, \varepsilon)$ :

$$H(\varepsilon\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{\tau^s}{s!} \frac{d^s H(0)}{dt^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_s(\tau),$$

$$C_1(\varepsilon\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{\tau^s}{s!} \left( \tau \frac{d^{s+1} \Omega(0)}{dt^{s+1}} - \frac{d^s (H(0)Q^{-1}(0)Q'(0))}{dt^s} \right) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(\tau).$$

Підставимо ряд (6) до системи (4) і зрівняємо окремо вирази, що залежать від  $t$  і  $\tau$ :

$$\varepsilon H(t) \frac{d\bar{y}}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon)) \bar{y} + \varepsilon \bar{g}(t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$H(\varepsilon\tau) \frac{d\Pi y}{d\tau} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(\varepsilon\tau, \varepsilon)) \Pi y + \varepsilon \Pi g(\tau, \varepsilon). \quad (8)$$

У тотожностях (7), (8) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів  $\varepsilon$ . Зокрема, біля  $\varepsilon^0$  матимемо:

$$\Omega(0) \bar{y}_0(t, \varepsilon) = 0, \quad (9)$$

$$H(0) \frac{d\Pi_0 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = \Omega(0) \Pi_0 y(\tau, \varepsilon). \quad (10)$$

Звідси  $\bar{y}_0(t, \varepsilon) = \Phi \alpha_0(t, \varepsilon)$ , де  $\Phi = [e_{k+1}, \dots, e_n]$ ,  $e_i$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ , – вектор,  $i$ -та компонента якого дорівнює одиниці, решта компонент дорівнюють нулю,  $\alpha_0(t, \varepsilon)$  – деяка  $(n-k)$ -вимірний вектор-функція, що буде визначена нижче;

$$\Pi_{01} y(\tau, \varepsilon) = 0,$$

$$\Pi_{02} y(\tau, \varepsilon) = \exp(W(0)\tau) c_0(\varepsilon),$$

$\Pi_{01} y(\tau, \varepsilon)$  – перша компонента вектор-функції  $\Pi_0 y(\tau, \varepsilon)$ ,  $\Pi_{02} y(\tau, \varepsilon)$  – вектор-функція, що містить решту компонент  $\Pi_0 y(\tau, \varepsilon)$ ,  $c_0(\varepsilon)$  –  $(n-1)$ -вимірний вектор довільних сталих.

Вектор  $c_0(\varepsilon)$  підберемо так, щоб

$$\bar{y}_0(0, \varepsilon) + \Pi_0 y(0, \varepsilon) = y_0. \quad (11)$$

Для цього вимагатимемо виконання наступної умови:

б)  $y_{01} = 0$ , де  $y_{01}$  – перша компонента вектора  $y_0$ .

Тоді для виконання рівності (11) достатньо покласти

$$\{c_0(\varepsilon)\}_i = \{y_0\}_i - \{\Phi \alpha_0(0, \varepsilon)\}_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

За рахунок вибору  $\alpha_0(0, \varepsilon) = \alpha_0$  можна вважати, що  $\{c_0(\varepsilon)\}_i = 0$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ .

При  $\varepsilon^1$  матимемо:

$$\Omega(0) \bar{y}_1(t, \varepsilon) = H(t) \frac{d\bar{y}_0(t, \varepsilon)}{dt} - C_1(t, \varepsilon) \bar{y}_0(t, \varepsilon) - \bar{g}_0(t), \quad (12)$$

$$H(0) \frac{d\Pi_1 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = \Omega(0) \Pi_1 y(\tau, \varepsilon) - H_1(\tau) \frac{d\Pi_0 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + C_0(\tau) \Pi_0 y(\tau, \varepsilon) + \Pi_0 g(\tau). \quad (13)$$

Система (12) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi^* H(t) \Phi \frac{d\alpha_0(t, \varepsilon)}{dt} = \Phi^* (C_1(t, \varepsilon) \Phi \alpha_0(t, \varepsilon) + \bar{g}_0(t)), \quad (14)$$

де  $\Phi^*$  – матриця, спряжена до  $\Phi$ .

Оскільки  $\det \Phi^* H(0) \Phi = 1$ , то можна вважати, що  $\det \Phi^* H(t) \Phi \neq 0$ ,  $t \in [0; k\varepsilon]$ . Таким чином, система (14) набуде вигляду

$$\frac{d\alpha_0(t, \varepsilon)}{dt} = g(\alpha_0, t, \varepsilon). \quad (15)$$

Нехай  $\alpha_0 = \alpha_0(t, \varepsilon)$  – розв'язок системи (15), що задовольняє умову  $\alpha_0(0, \varepsilon) = \alpha^0$ . Тоді  $\bar{y}_1(t, \varepsilon) = \Phi \alpha_1(t, \varepsilon) + \tilde{y}_1(t, \varepsilon)$ , де  $\tilde{y}_1(t, \varepsilon)$  – деякий частинний розв'язок (12).

Сталу  $k$  підберемо так, щоб  $\|Q(t)(\bar{y}_0(t, \varepsilon) + \Pi_0 y(t/\varepsilon, \varepsilon))\| \leq a_0 < a$ , для всіх  $t \in [0; k\varepsilon]$

Система (13) розщепиться на дві системи  $\Pi_{11}y(\tau, \varepsilon) = -l_1(\tau, \varepsilon)$ , і  $\frac{d\Pi_{12}y(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = W(0)\Pi_{12}y(\tau, \varepsilon) + l_2(\tau, \varepsilon)$ ,

де  $l_1(\tau, \varepsilon)$  – перша компонента вектор-функції  $l(\tau, \varepsilon)$ ,  $l_2(\tau, \varepsilon)$  – вектор-функція, що містить решту компонент  $l(\tau, \varepsilon)$ ,  $l(\tau, \varepsilon) = -H_1(\tau) \frac{d\Pi_0 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + C_0(\tau)\Pi_0 y(\tau, \varepsilon) + \Pi_0 g(\tau)$ .

Звідси  $\Pi_{12}y(\tau, \varepsilon) = \exp(W(0)\tau)c_1(\varepsilon) + \int_0^\tau \exp(W(0)(\tau-s))l_2(s, \varepsilon)ds$ .

7) Нехай  $g_1(y_0, 0, 0) = 0$  де  $g_1(y_0, 0, 0)$  – перша компонента вектора  $g(y_0, 0, 0)$ .

Тоді стали  $c_1(\varepsilon)$  можна підібрати так, щоб  $\bar{y}_1(0, \varepsilon) + \Pi_1 y(0, \varepsilon) = 0$  [4].

Використовуючи метод математичної індукції, таким чином можна визначити і решту членів рядів  $\bar{y}(t, \varepsilon)$  та  $\Pi y(\tau, \varepsilon)$ . При цьому, умова, аналогічна до умови 7) на  $j$ -му кроці матиме вигляд  $\frac{\partial^{j-1} g_1(y_0, 0, 0)}{\partial \varepsilon^{j-1}} = 0$ ,  $j \geq 2$ , [4].

Нехай  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  – власні вектори матриці  $\Omega(0)$  відносно  $H(0)$ ;  $\tilde{\varphi}$  – власний вектор матриці  $H(0)$ , що відповідає нульовому власному значенню;  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$  та  $\tilde{\psi}$  – елементи нуль-простору матриць  $(\Omega(0) - \lambda_i(0)H(0))^*$  та  $H^*(0)$  відповідно. Вектори  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$  та  $\tilde{\psi}$  визначимо так, щоб

$$(H(0)\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{2, n}, \quad (\Omega(0)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 1, \quad \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера [3, с. 35].}$$

Система  $\varepsilon H(0) \frac{dy}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon))y$  має  $n-1$  формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right), \quad i = \overline{2, n},$$

де  $u_i(t, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірні вектори, а  $\lambda_i(t, \varepsilon)$  – скалярні функції, причому

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_i(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t). \quad (16)$$

Зробимо в системі (4) заміну

$$y(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) + y_m(t, \varepsilon), \quad (17)$$

де  $y_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s (\bar{y}_s(t, \varepsilon) + \Pi_s y(\tau, \varepsilon))$ , а  $z(t, \varepsilon)$  – невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon H(t) \frac{dz}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon))z + h(z, t, \varepsilon), \quad (18)$$

$$h(z, t, \varepsilon) = \varepsilon g(z + y_m(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon))y_m(t, \varepsilon) - \varepsilon H(t) \frac{dy_m(t, \varepsilon)}{dt}.$$

Зазначимо, що  $\|h(0, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1})$ ,  $t \in [0; k\varepsilon]$ . Побудуємо матриці  $Q_1(t, \varepsilon) = [U_m(t, \varepsilon), \tilde{\varphi}]$ ,  $P_1 = [\Psi, \tilde{\psi}]^*$ , де  $U_m(t, \varepsilon)$  – прямокутна  $(n \times (n-1))$ -матриця, що містить перші  $m$  членів виразів (16),  $\Psi = [\psi_2, \dots, \psi_n]$ .

Покладемо

$$z(t, \varepsilon) = Q_1(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon) \quad (19)$$

і домножимо обидві частини системи (18) зліва на  $P_1$ :  $\varepsilon P_1 H(t) Q_1(t, \varepsilon) \frac{du}{dt} = P_1 L(t, \varepsilon) Q_1(t, \varepsilon)u + P_1 h(Q_1(t, \varepsilon)u, t, \varepsilon)$ ,

$$L(t, \varepsilon) = \Omega(0) + \varepsilon C_1(t, \varepsilon) - \varepsilon H(t) \frac{d}{dt}, \quad \text{або}$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \Psi^* H(t) U_m(t, \varepsilon) & \Psi^* H(t) \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* H(t) U_m(t, \varepsilon) & \tilde{\psi}^* H(t) \tilde{\varphi} \end{pmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \Psi^* L(t, \varepsilon) U_m(t, \varepsilon) & \Psi^* L(t, \varepsilon) \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* L(t, \varepsilon) U_m(t, \varepsilon) & \tilde{\psi}^* L(t, \varepsilon) \tilde{\varphi} \end{pmatrix} u + P_1 h(Q_1(t, \varepsilon)u, t, \varepsilon). \quad (20)$$

Оскільки  $\Psi^* H(0) U_m(0, 0) = \|(H(0)\varphi_i, \psi_j)\|_2 = E_{n-1}$ , і  $\tilde{\psi}^* L(0, 0) \tilde{\varphi} = (\Omega(0)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 1$ , то елементи матриці  $(\Psi^* H(t) U_m(t, \varepsilon))^{-1}$  та функція  $(\tilde{\psi}^* L(t, \varepsilon) \tilde{\varphi})^{-1}$  рівномірно обмежені на відрізьку  $[0; t_0]$ ,  $t_0 \leq T$ .

Зазначимо, що

$$\Psi^* L(t, \varepsilon) \tilde{\varphi} = O(\varepsilon),$$

$$L(t, \varepsilon) U_m(t, \varepsilon) = H(0) U_m(t, \varepsilon) \Lambda_m(t, \varepsilon) + \varepsilon (H(t) - H(0)) U_m'(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} D(t, \varepsilon),$$

де  $\Lambda_m(t, \varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_2^{(m)}(t, \varepsilon), \dots, \lambda_n^{(m)}(t, \varepsilon)\}$ ,

$D(t, \varepsilon)$  –  $(n \times (n-1))$ -матриця, компоненти якої обмежені на  $[0; t_0]$  [6, с. 50-53].

Покажемо, що існує єдиний розв'язок системи (20) такий, що

$$u(0, \varepsilon) = 0. \quad (21)$$

Задача (20), (21) рівносильна задачі про знаходження неперервного розв'язку рівняння

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, \varepsilon) U^{-1}(s, \varepsilon) r(u, s, \varepsilon) ds, \quad (22)$$

де  $U(t, \varepsilon)$  – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}^* H(t) \tilde{\Phi} \end{pmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \Lambda_m(t, \varepsilon) & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}^* \Omega(t) \tilde{\Phi} \end{pmatrix} u, \\ r(u, s, \varepsilon) = (P_1 H(s) Q_1(s, \varepsilon))^{-1} \left( \begin{pmatrix} \varepsilon \Psi^* (H(s) - H(0)) U'_m(s, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \Psi^* D(s, \varepsilon) & \Psi^* L(s, \varepsilon) \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Psi}^* L(s, \varepsilon) U_m(s, \varepsilon) & -\varepsilon \tilde{\Psi}^* H(s) Q^{-1}(s) Q'(s) \tilde{\Phi} \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \varepsilon \begin{pmatrix} \Psi^* (H(s) - H(0)) U_m(s, \varepsilon) & \Psi^* H(s) \tilde{\Phi} \\ \Psi^* H(s) U_m(s, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix} U'(s, \varepsilon) U^{-1}(s, \varepsilon) \right) u + P_1 h(Q_1(s, \varepsilon) u, s, \varepsilon).$$

Нехай мають місце умови:

$$8) \quad \tilde{\Psi}^* H(t) \tilde{\Phi} = h_{11}(t) \equiv th(t), \quad \operatorname{Re} h(0) < 0;$$

$$9) \quad |\tilde{\Psi}^* (r_m(\bar{y}_m(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + r_m(\Pi_m y(t, \varepsilon), t, \varepsilon))| = O(\varepsilon^{m+1} t), \quad t \in [0; k\varepsilon], \quad r_m(\bar{y}_m(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \text{ та } r_m(\Pi_m y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - \\ \text{додаткові члени формул Тейлора за степенями } \varepsilon \text{ для функцій } g(\bar{y}_m(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \text{ та} \\ g(\bar{y}_m(\varepsilon t, \varepsilon) + \Pi_m y(\tau, \varepsilon), \varepsilon t, \varepsilon) - g(\bar{y}_m(\varepsilon t, \varepsilon), \varepsilon t, \varepsilon)).$$

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що система (22) на відрізку  $[0; k\varepsilon]$  має єдиний розв'язок  $u = u(t, \varepsilon)$  такий, що правильна умова (21) і  $\|u(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m-1})$  [4].

Покладемо  $y(k\varepsilon, \varepsilon) = y_\varepsilon$ , (23) де  $y_\varepsilon$  побудований за формулами (17), (19), (22) при  $t = k\varepsilon$ .

Розв'язок системи (4) на відрізку  $[k\varepsilon; t_0]$  шукатимемо у вигляді  $y(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{y}_s(t)$ . Для визначення  $\bar{y}_s(t)$ ,  $s \geq 0$ , підставимо ряд  $y(t, \varepsilon)$  до системи (4) і зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів параметра  $\varepsilon$ :

$$\Omega(t) \bar{y}_0(t) = 0, \quad (24)$$

$$\Omega(t) \bar{y}_s(t) = H(t) Q^{-1}(t) Q'(t) \bar{y}_{s-1}(t) + H(t) \frac{d \bar{y}_{s-1}(t)}{dt} - \bar{g}_{s-1}(t), \quad s \geq 1. \quad (25)$$

Нехай  $\Omega(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) & \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) & \Omega_4(t) \end{pmatrix}$ , де  $\Omega_1(t)$  – квадратна матриця  $m$ -го порядку.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що  $\det \Omega_1(t) \neq 0$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ ,  $t_0 \leq T$ . Тоді

$$\bar{y}_0(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1^{-1}(t) \Omega_2(t) \\ -E_{n-m} \end{pmatrix} \beta_0(t) \equiv M(t) \beta_0(t),$$

де  $\beta_0(t)$  – деяка  $(n-m)$ -вимірний вектор-функція, що буде визначена нижче [2, с. 61].

Розглянемо систему (25), коли  $s = 1$ :

$$\Omega(t) \bar{y}_1(t) = H(t) Q^{-1}(t) Q'(t) \bar{y}_0(t) + H(t) \frac{d \bar{y}_0(t)}{dt} - \bar{g}_0(t). \quad (26)$$

Система (26) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$K^*(t) H(t) M(t) \frac{d \beta_0(t)}{dt} = K^*(t) (\bar{g}_0(t) - H(t) M'(t) \beta_0(t) - H(t) Q^{-1}(t) Q'(t) M(t) \beta_0(t)), \text{ де } K(t) = \begin{pmatrix} (\Omega_3(t) \Omega_1^{-1}(t))^* \\ -E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що  $\det K^*(t) H(t) M(t) \neq 0$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ . Справді, нехай  $k_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n-m}$ , – рядки матриці  $K^*(t)$ ,  $m_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n-m}$ , – стовпці матриці  $M(t)$ . Тоді, якщо припустити, що для деякого  $t = \bar{t}$   $\det K^*(\bar{t}) H(\bar{t}) M(\bar{t}) = 0$ , то  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i (k_j(\bar{t}), H(\bar{t}) m_i(\bar{t})) = 0$ ,  $j = \overline{1, n-m}$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ , або  $(k_j(\bar{t}), H(\bar{t}) \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i m_i(\bar{t})) = 0$ ,  $j = \overline{1, n-m}$ .

Оскільки  $m(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i m_i(\bar{t})$  – власний вектор матриці  $\Omega(\bar{t})$  відносно  $H(\bar{t})$ , що відповідає нульовому власному значенню і  $(k_j(\bar{t}), H(\bar{t}) m(\bar{t})) = 0$ ,  $j = \overline{1, n-m}$ , то алгебраїчна система  $\Omega(\bar{t}) z = H(\bar{t}) m(\bar{t})$  розв'язна відносно  $z$ , що суперечить умові 4). Таким чином,  $\det K^*(t) H(t) M(t) \neq 0$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ , і

$$\frac{d \beta_0(t)}{dt} = (K^*(t) H(t) M(t))^{-1} K^*(t) (\bar{g}_0(t) - H(t) M'(t) \beta_0(t) - H(t) Q^{-1}(t) Q'(t) M(t) \beta_0(t)). \quad (27)$$

10) Нехай система (27) має розв'язок  $\beta_0 = \beta_0(t)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ , такий, що  $\|Q(t)M(t)\beta_0(t)\| \leq \frac{a_0}{2}$  для всіх  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ . Тоді  $\bar{y}_1(t) = M(t)\beta_1(t) + \tilde{y}_1(t)$ , де  $\tilde{y}_1(t)$  – частинний розв'язок системи (26).

Аналогічно можна довести сумісність систем (25) для  $s \geq 2$ .

11) Нехай  $\|\tilde{y}_s(t)\| = O(1)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ ,  $s \geq 1$ .

Зазначимо, що вектор-функції  $\beta_s(t)$ ,  $s \geq 1$ , взагалі кажучи, визначатимуться з лінійних систем з особливою точкою  $t = 0$ .

**Зауваження.** Покажемо, що за певних умов, накладених на матриці  $\Omega(t)$  і  $H(t)$  існує стала  $c > 0$  така, що

$$\det K^*(t)H(t)M(t) \geq c, \quad t \in [k\varepsilon; t_0]. \quad (28)$$

Нехай  $H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & H_4(t) \end{pmatrix}$ , де  $H_1(t)$  – квадратна матриця  $m$ -го порядку.

12)  $\|\Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t)\| = O(t)$  і  $\|\Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t)\| = O(1)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ , або  $\|\Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t)\| = O(1)$  і  $\|\Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t)\| = O(t)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ .

Тоді, враховуючи структуру матриці  $K^*(t)H(t)M(t)$ , існуватиме стала  $c > 0$  така, що матиме місце умова (28).

Зробивши в системі (4) заміну (17), де  $y_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s \bar{y}_s(t)$ , дістанемо

$$\varepsilon H(t) \frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z + q(z, t, \varepsilon), \quad (29)$$

$$q(z, t, \varepsilon) = \varepsilon g(z + y_m(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y_m(t, \varepsilon) - \varepsilon H(t) \frac{dy_m(t, \varepsilon)}{dt}.$$

За побудовою  $\|q(0, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1})$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ . Припустимо виконання умов:

13) система  $\varepsilon H(t) \frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z$  має фундаментальну матрицю  $Z(t, s, \varepsilon)$  ( $Z(t, s, \varepsilon) = E$ ) таку,

що  $\|Z(t, s, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{-\gamma})$ ,  $\gamma \geq 0$  і  $\|Q(t)Z(t, k\varepsilon, \varepsilon)(y_\varepsilon - y_{[\gamma]+1}(k\varepsilon, \varepsilon))\| \leq \frac{a_0}{2}$  ( $[\gamma]$  – ціла частина  $\gamma$ ) для всіх  $k\varepsilon \leq s \leq t \leq t_0$ ;

14) існує неперервна функція  $\eta(t, \varepsilon)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , така, що

$$\|f(u, t, \varepsilon) - f(v, t, \varepsilon)\| \leq \eta(t, \varepsilon) \|u - v\|,$$

причому  $\eta(t, \varepsilon)\varepsilon^{-\gamma-1} = O(1)$  для всіх  $\|u\| \leq a$ ,  $\|v\| \leq a$ .

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку  $z = z(t, \varepsilon)$

$$\text{системи } z(t, \varepsilon) = Z(t, k\varepsilon, \varepsilon)(y_\varepsilon - y_m(k\varepsilon, \varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t Z(t, s, \varepsilon) H^{-1}(s) q(z, s, \varepsilon) ds.$$

При цьому,  $\|z(t, \varepsilon)\| = O(1)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ .

**Теорема.** Нехай виконуються умови 1) – 12), 14), 15) і системи для визначення вектор-функцій  $\beta_s(t)$ ,  $s \geq 1$ , мають такі розв'язки, що  $\|M(t)\beta_s(t)\| = O(1)$ ,  $t \in [k\varepsilon; t_0]$ ,  $s \geq 1$ . Тоді для  $m \geq \gamma + 1$ ,  $t \in [0; t_0]$ ,  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ ,  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ , задача (1), (2) має єдиний розв'язок  $x = x(t, \varepsilon)$ .

**Наслідок.** Нехай виконуються умови 1) – 15). Тоді для  $m \geq \gamma + 1$ ,  $t \in [0; t_0]$ ,  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ ,  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ , задача (1), (2) має єдиний розв'язок  $x = x(t, \varepsilon)$ .

### 3. Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та суміжні питання" (21 – 26 травня 2007 р., м. Москва).

### 4. Висновки

У роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної слабо нелінійної системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею біля похідних і точкою повороту. При цьому, розглянуто випадок простих елементарних дільників граничної в'язки матриць.

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с. 3. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 4. Самусенко П.Ф. Про побудову асимптотичних розв'язків нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 1 (45). – С. 144 – 150. 5. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 3 (47). – С. 139 – 147. 6. Шкіль Н.І., Старун І.І., Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с. 7. Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис.... док. фіз.-мат. наук. – К., 1992. – 32 с. 8. Sibuya R. Simplification of a System of Linear Ordinary Differential Equations about a Singular Point // Funkcialaj Ekvacioj, 1962. – № 4. – Р. 29 – 56.

УДК 517.912:512.816

О. Омелян, асист.  
Email: k26@pntu.edu.uaІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ  
ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ*Проведено групову класифікацію систем рівнянь хемотаксису, інваріантних відносно перетворень Галілея.**The group classification systems of chemotaxis equations, which are invariance under Galilei transformations, is performed.*

## 1. Вступ.

В сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму і рухаються зі сталою швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксисних властивостей, добре описуються математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля [7]

$$\begin{aligned} S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g(S) b, \\ b_t &= -v \partial_x [b \chi(S) S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S) b, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$ ,  $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$ ,  $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$ ,  $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ ,  $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$ ,  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ , причому  $S(t, x)$  – концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бактеріями,  $b(t, x)$  – щільність бактерій,  $g(S)$  – питома швидкість росту бактерій,  $\chi(S)$  – функція хемотаксисної відповіді,  $D_S$  та  $D_b$  – коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій відповідно;  $v$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  – сталі;  $t$ ,  $x$  – часова та просторова змінні відповідно. Моделлю Келлера-Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [6] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [2]. Перепишемо систему (1) у звичних для математичних досліджень позначеннях, узагальнивши її наступним чином

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $g^1(u^1, u^2)$ ,  $g^2(u^1, u^2)$ ,  $f(u^1)$  – довільні гладкі функції своїх аргументів, причому  $f \neq 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $u^a = u^a(x_0, x_1)$ ,  $a = \overline{1, 2}$ ,  $x_0$  – часова,  $x_1$  – просторова змінні, нижній індекс означає диференціювання по відповідній змінній. Зауважимо, що система (2) є частинним випадком системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[ F(u^1, u^2) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + G(u^1, u^2), \quad (3)$$

$$\text{де } F(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}, \quad G(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}, \quad f^{ab} = f^{ab}(u^1, u^2), \quad g^a = g^a(u^1, u^2), \quad a, b = \overline{1, 2}.$$

В даній роботі поставимо перед собою задачу: дослідити симетрійні властивості системи (2) в залежності від значення функцій  $f(u^1)$ ,  $g^1(u^1, u^2)$ ,  $g^2(u^1, u^2)$  та сталих  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

## 2. Ядро симетрії.

Для дослідження симетрійних властивостей системи (2) застосуємо алгоритм Лі [3], [5], [8]. Поділяючи продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \quad (4)$$

де  $\xi^\mu = \xi^\mu(x_0, x_1, u^1, u^2)$ ,  $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, u^1, u^2)$ ,  $\mu = \overline{0, 1}$ ,  $a = \overline{1, 2}$ , на систему (2), після переходу на многовид, та розщеплення отриманої системи по похідних функцій  $u^a$ , одержимо визначальну систему для визначення координат інфінітезимального оператора (4) та функцій  $f$ ,  $g^1$ ,  $g^2$ . Визначальна система складається з трьох підсистем:

$$S_1(\xi, \eta) = 0, \quad S_2(\xi, \eta, f) = 0, \quad S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0.$$

Система  $S_1 = 0$  є системою диференціальних рівнянь лише відносно функцій  $\xi^\mu$  і  $\eta^a$

$$\begin{aligned} \xi_0^1 &= \xi_{u^a}^\mu = \eta_{u^a}^a = \eta_{u^b u^c}^a = 0, \quad a, b, c = \overline{1, 2}, \\ \xi_0^0 &= 2\xi_1^1, \quad 2\lambda_1 \eta_{u^1}^1 = -\xi_0^1. \end{aligned} \quad (5)$$

Система  $S_2(\xi, \eta, f) = 0$  пов'язує між собою координати інфінітезимального оператора  $\xi^\mu$ ,  $\eta^a$  та функцію  $f(u^1)$  і має вигляд

$$\begin{aligned}\eta^1 \dot{f} + (\eta_{u^1}^1 - \eta_{u^2}^2 + \frac{1}{u^2} \eta^2) f + \frac{1}{u^2} (\lambda_2 - \lambda_1) \eta_{u^1}^2 &= 0, \\ u^2 \eta^1 \dot{f} + (u^2 \eta_{u^1}^1 + \frac{1}{2} \eta^2) f + \lambda_2 \eta_{u^1}^2 &= 0, \\ \eta^1 f + 2\lambda_2 \eta_{u^1}^2 &= -\xi_0^1.\end{aligned}\tag{6}$$

Система  $S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0$  складається з двох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\eta^1 g_{u^1}^1 + \eta^2 g_{u^2}^1 &= (\eta_{u^1}^1 - \xi_0^0) g^1 + \eta_{u^2}^1 g^2 + \eta_0^1 - \lambda_1 \eta_{11}^1, \\ \eta^1 g_{u^1}^2 + \eta^2 g_{u^2}^2 &= (\eta_{u^2}^2 - \xi_0^0) g^2 + \eta_{u^1}^2 g^1 + \eta_0^2 - \lambda_2 \eta_{11}^2 - u^2 f \eta_{11}^1,\end{aligned}\tag{7}$$

які пов'язують між собою функції  $g^1, g^2$  та функції  $\xi^u, \eta^a, f$ .

**Зауваження.** Покладаючи  $f, g^1, g^2, \lambda_1, \lambda_2$  довільними у системах (5), (6), (7), одержимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \eta^2 = 0,\tag{8}$$

де  $d_0, d_1$  – довільні сталі. В цьому випадку оператор (4) має вигляд

$$X = d_0 \partial_0 + d_1 \partial_1.\tag{9}$$

Оператор (9) породжує алгебру

$$A_0 = \langle \partial_0, \partial_1 \rangle,\tag{10}$$

яку назовемо **ядром симетрії системи** (2).

### 3. Необхідні умови розширення ядра симетрії.

Дослідимо, при яких значеннях функцій  $f, g^1, g^2$  симетрія системи (2) ширша порівняно з алгеброю  $A_0$ . Необхідними умовами розширення симетрії є наступне твердження.

**Теорема 1.** Якщо система (2) допускає розширення ядра симетрії  $A_0$ , то функція  $f(u^1)$  набуває одного із наступних виглядів:

$$1. f = \varphi(u^1), \quad 2. f = \lambda, \quad 3. f = \frac{\lambda}{u^1}, \quad 4. f = \frac{2\lambda_1}{u^1}, \quad 5. f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1},$$

де  $\varphi(u^1)$  – довільна гладка функція,  $\lambda$  – довільна стала.

**Доведення.** Для доведення теореми розв'яжемо систему визначальних рівнянь, що складається із систем  $S_1 = 0$  та  $S_2 = 0$  [4].

Неважко бачити, що загальним розв'язком системи  $S_1(\xi, \eta) = 0$  є функції

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2A(x_0), \quad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} \left[ \frac{1}{2} \ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0) \right] u^1 + \beta^1(x_0, x_1), \\ \eta^2 &= \alpha^{21}(x_0, x_1)u^1 + \alpha^{22}(x_0, x_1)u^2 + \beta^2(x_0, x_1),\end{aligned}$$

де  $A, B, C, \alpha^{2a}, \beta^a$  – довільні гладкі функції своїх аргументів.

З умов сумісності рівнянь системи (6) одержуються умови  $\alpha_1^{21} = \alpha_1^{22} = \beta_1^2 = 0$ . Тоді система  $S_2 = 0$  набуде вигляду

$$\begin{aligned}(\alpha^{11}u^1 + \beta^1) \dot{f} &= -\alpha^{11}f, \\ (\alpha_1^{11}u^1 + \beta_1^1) f &= 2\lambda_1 \alpha_1^{11}, \\ (\alpha^{21}u^1 + \beta^2) f &= (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha^{21}.\end{aligned}\tag{11}$$

Розв'язання системи (11) приводить до появи 5-ти нееквівалентних випадків вигляду функції  $f$ , наведених у формулюванні теореми.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що при вказаних значеннях функції  $f(u^1)$  можливе розширення симетрії системи (3) порівняно з  $A_0$ .

1.  $f = \varphi(u^1)$  – довільна гладка функція. З системи (11) випливає

$$\xi_0^1 = \alpha^{a1} = \beta^a = 0.\tag{12}$$

Врахувавши (12), одержимо

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = \alpha(x_0)u^2,\tag{13}$$

де  $\alpha(x_0)$  – довільна гладка функція,  $c_1, d_0, d_1$  – довільні сталі. Порівнявши формули (8) і (13), легко бачити можливість розширення симетрії (10).

Аналогічно доводиться можливість розширення симетрії (10) у випадках 2-5. Не повторюючи цих міркувань, наведемо остаточний вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з вказаних  $f(u^1)$ .

2. При  $f = \lambda$  координати інфінітезимального оператора (4) мають вигляд

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = \beta(x_0), \quad \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \quad (14)$$

де  $\beta(x_0)$  – довільна гладка функція.

3. При  $f = \frac{\lambda}{u}$  ( $\lambda$  – довільна стала) з системи (11) знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = C(x_0)u^1, \quad \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \quad (15)$$

де  $C(x_0)$  – довільна гладка функція.

4. При  $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$  маємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2A(x_0), \quad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} \left[ \frac{1}{2} \ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0) \right] u^1, \quad \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $A(x_0)$ ,  $B(x_0)$ ,  $C(x_0)$  – довільні гладкі функції.

5. При  $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$  одержимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = a(x_0)u^1, \\ \eta^2 &= \sigma(x_0)u^1 + \alpha(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\sigma(x_0)$  – довільна гладка функція.

Теорему доведено.

#### 4. Галілеївська інваріантність.

Теорема 1 є тільки необхідною умовою розширення ядра симетрії системи (2). Достатньою умовою такого розширення є система  $S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0$ . Згідно даної системи вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з п'яти наведених функцій  $f(u^1)$ , буде залежати від вигляду функцій  $g^a(u^1, u^2)$ . Повна класифікація симетричних властивостей системи (2) для кожної з п'яти, вказаних в теоремі 1 функцій  $f(u^1)$ , є окремою задачею.

В даній роботі детально дослідимо симетрійні властивості системи (2) у випадку  $f(u^1) = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ . Класифікація симетричних властивостей системи (2) для інших чотирьох виглядів функції  $f(u^1)$  буде проведена в наступних роботах.

Отже, розглянемо систему (1) вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Як було показано в результаті доведення теореми 1, у випадку  $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$  розв'язком систем  $S_1(\xi, \eta) = 0$  та  $S_2(\xi, \eta, f) = 0$  є наступні координати інфінітезимального оператора  $X$

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2A(x_0), \quad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 &= \gamma(x_0, x_1)u^1, \quad \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\gamma(x_0, x_1) = -\frac{1}{2\lambda_1} \left[ \frac{1}{2} \ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0) \right], \quad (20)$$

$A(x_0)$ ,  $B(x_0)$ ,  $C(x_0)$ ,  $\alpha(x_0)$  – довільні гладкі функції. Щоб отримати принципово інше ніж у випадку 3 теореми 1 розширення симетрії, необхідне виконання умови  $\gamma_1 \neq 0$ . Це можливо тільки при  $\dot{B} \neq 0$ . (Випадок, у якому  $\dot{B} = 0, \ddot{A} \neq 0$ , неможливий, оскільки в цьому випадку оператори, породжені формулами (21) не утворюватимуть алгебру). Отже, надалі будемо вважати  $\dot{B} \neq 0$ .

Справедливе наступне твердження.

**Теорема 2.** Якщо система (18) допускає розширення ядра симетрії  $A_0$  при умові, що  $\gamma_1 \neq 0$ , то функції  $g^1, g^2$  задаються наступними формулами:

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 [\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1], \\ g^2 &= \varphi^2(u^2); \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\lambda_3$  – довільна стала,  $\varphi^a(u^2)$  – довільні гладкі функції.

**Доведення.** Враховуючи формули (19), (20), систему  $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$  можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\gamma u^1 g_{u^1}^1 + \alpha u^2 g_{u^2}^1 &= (\gamma - 2\dot{A})g^1 + (\gamma_0 - \lambda_1 \gamma_{11})u^1, \\ \gamma u^1 g_{u^1}^2 + \alpha u^2 g_{u^2}^2 &= (\alpha - 2\dot{A})g^2 + (\alpha_0 - 2\lambda_1 \gamma_{11})u^2.\end{aligned}\quad (22)$$

Дослідимо, якими можуть бути функції  $g^1, g^2$ , щоб задовольнялась система (22). Так як функції  $\gamma, \alpha, A$  залежать лише від змінних  $x_0, x_1$ , а функції  $g^a$  – від змінних  $u^1, u^2$ , то найбільш широкий клас функцій  $g^1, g^2$ , що задовольняють системі (23) є загальним розв'язком системи

$$\begin{aligned}u^1 g_{u^1}^1 + k u^2 g_{u^2}^1 &= (m+1)g^1 + k_1 u^1, \\ u^1 g_{u^1}^2 + k u^2 g_{u^2}^2 &= (m+k)g^2 + k_2 u^2,\end{aligned}\quad (23)$$

де  $k, m, k_1, k_2$  – довільні сталі, які ми будемо називати *структурними константами*, а систему (23) – *структурною системою* для функцій  $g^a$ .

Зв'язок між системами (23) і (24) задається формулами

$$\frac{\alpha}{\gamma} = k, \quad -2 \frac{\dot{A}}{\gamma} = m, \quad \frac{\gamma_0 - \lambda_1 \gamma_{11}}{\gamma} = k_1, \quad \frac{\alpha_0 - 2\lambda_1 \gamma_{11}}{\gamma} = k_2. \quad (24)$$

Використавши диференціальний наслідок по змінній  $x_1$  рівнянь (24), одержимо

$$k\gamma_1 = m\gamma_1 = k_2\gamma_1 = 0.$$

Так як  $\gamma_1 \neq 0$ , то  $k = m = k_2 = 0$ . Тоді система (23) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned}u^1 g_{u^1}^1 &= g^1 + k_1 u^1, \\ g_{u^1}^2 &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

Загальний розв'язок системи (25) задається формулами (21), де  $\lambda_3 = k_1$ .

Отже, розв'язавши систему  $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$  стосовно  $g^1, g^2$  при  $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ , ми одержали зображення (21) функцій  $g^1, g^2$ , наведене в умові теореми.

Теорему доведено.

Умови теореми 2, як і теореми 1, є лише необхідними умовами розширення ядра симетрії системи (2). Щоб отримати достатні умови, необхідно зображення функцій  $g^a$  вигляду (21) підставити в систему  $S_3 = 0$  і розв'язати одержану систему відносно функцій  $A(x_0), B(x_0), C(x_0), \alpha(x_0)$  в залежності від вигляду функцій  $\varphi^a(u^2)$  та значень сталої  $\lambda_3$ . Результатом таких досліджень є наступне твердження.

**Теорема 3.** Максимальні алгебри інваріантності системи (18), (21) залежно від значень функцій  $g^1, g^2$  наведені у таблиці 1.

**Таблиця 1.** Класифікація симетрійних властивостей системи (18), (21).

№ з/п	Зображення функцій $g^1, g^2$	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1 \varphi^1(u^2),$ $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2);$	$\partial_0, \partial_1, G = x_0 - \frac{x_1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, I_1 = u^1 \partial_{u^1}$
2	$g^1 = u^1 (\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2 (\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6);$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, Q_1 = e^{\lambda_4 x_0} (\lambda_5 I_1 + \lambda_4 I_2)$
3	$g^1 = u^1 (\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = \lambda_6 u^2;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, Q = \lambda_5 x_0 I_1 + I_2$
4	$g^1 = u^1 [\lambda_5 (u^2)^m + \lambda_7],$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1};$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - \frac{2}{m} I_2$
5	$g^1 = u^1 [\lambda_5 (u^2)^2 + \lambda_7],$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - I_2,$ $\Pi_1 = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1} x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2} x_0) I_1 - x_0 I_2$
6	$g^1 = \lambda_7 u^1,$ $g^2 = \lambda_6 u^2;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, I_2, D_3 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2x_0 (\lambda_7 I_1 + \lambda_6 I_2),$ $\Pi_2 = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1} x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2} x_0) I_1 + (\lambda_6 x_0^2 - x_0) I_2$



Закінчення табл. 1

№ з/п	Зображення функцій $g^1, g^2$	Оператори максимальної алгебри інваріантності
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1),$ $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2);$	$\partial_0, \partial_1, G = e^{\lambda_3 x_0} (\partial_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} x_1 I_1), M = e^{\lambda_3 x_0} I_1$
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6),$ $\lambda_4 \neq \lambda_3;$	$\partial_0, \partial_1, G, M, Q_2 = e^{\lambda_4 x_0} (\lambda_5 I_1 + (\lambda_4 - \lambda_3) I_2)$
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6).$	$\partial_0, \partial_1, G, M, Q_3 = e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_5 x_0 I_1 + I_2)$

В таблиці 1  $\lambda_3, \dots, \lambda_7, m$  – довільні сталі,  $m \neq 0; 2$ ,  $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$  – довільні гладкі функції,  $I_2 = u^2 \partial_{u^2}$ .

**Доведення.** З теореми 2 випливає, що система (18) допускає розширення основного ядра симетрії при  $\dot{B} \neq 0$ , якщо функції  $g^1, g^2$  мають вигляд (21).

В такому разі система (18) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} u^1 [\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1] \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

де  $\lambda_3$  – довільна стала.

В результаті підстановки  $g^1, g^2$  із (21) разом з  $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$  та відповідними координатами (19), (20) оператора (4) у систему  $S_3 = 0$  одержується система

$$\begin{aligned} \alpha u^2 \dot{\varphi}^1 &= -2\dot{A}\varphi^1 + \gamma_0 - \lambda_1 \gamma_{11} - \lambda_3 \gamma - 2\lambda_3 \dot{A} \ln u^1, \\ \alpha u^2 \dot{\varphi}^2 &= (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} - 2\lambda_1 \gamma_{11})u^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Розщепивши (27) по  $u^1$  та  $x_1$ , одержимо

$$\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} - \frac{1}{2\lambda_1}\dot{C} + \frac{\lambda_3}{2\lambda_1}C, \quad (28)$$

$$\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} + \ddot{A})u^2.$$

$$\ddot{A} = 0, \quad \lambda_3 \dot{A} = 0, \quad \ddot{B} - \lambda_3 \dot{B} = 0. \quad (29)$$

Очевидно, що розв'язок рівнянь (29) залежить від значення сталої  $\lambda_3$ .

1. Якщо  $\lambda_3 \neq 0$ , то, як випливає з системи рівнянь (29),  $\dot{A} = 0$ . Система (28) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \alpha u^2 \dot{\varphi}^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - \lambda_3 C), \\ \alpha(u^2 \dot{\varphi}^2 - \varphi^2) &= \dot{\alpha} u^2. \end{aligned} \quad (30)$$

причому

$$A = \frac{1}{2}d_0, \quad B = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \quad (31)$$

де  $d_0, d_1, c_1$  – сталі.

Вважаючи функції  $\varphi^1, \varphi^2$  у системі (30) довільними, знайдемо ядро симетрій системи (26) при  $\lambda_3 \neq 0$ . При довільних  $\varphi^1, \varphi^2$  із (30) випливає, що

$$\alpha = 0, \quad C = d_2 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (32)$$

Підставивши (31), (32) у (19), (20), одержимо координати оператора (4)

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \quad \eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_3 g + d_2) u^1, \quad \eta^2 = 0. \quad (33)$$

В цьому випадку оператор (4) з координатами (33) породжує ядро симетрії системи (26)

$$A_1 = \langle \partial_0, \partial_1, G = e^{\lambda_3 x_0} (\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1} x_1) u^1 \partial_{u^1}, M = e^{\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^1} \rangle \quad (34)$$

при довільних функціях  $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$  та  $\lambda_3 \neq 0$ . Одержаний результат відповідає пункту 7 таблиці 1.

Дослідимо тепер, при яких значеннях функцій  $\varphi^a$  у випадку  $\lambda_3 \neq 0$  система (26) допускає розширення ядра симетрії (34).

З рівнянь (30) випливає, що

$$\begin{aligned} u^2 \dot{\varphi}^1 &= -\frac{\dot{C} - \lambda_3 C}{2\lambda_1 \alpha} = \lambda_5, \\ \dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{u^2} &= \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \lambda_4, \end{aligned} \quad (35)$$

де  $\lambda_4, \lambda_5$  – сталі.

З рівнянь (35) одержимо

$$\varphi^1 = \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = u^2 [\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6]. \quad (36)$$

$$\alpha = d_3 e^{\lambda_4 x_0}, \quad \dot{C} - \lambda_3 C = -2\lambda_1 \lambda_5 d_3 e^{\lambda_4 x_0}. \quad (37)$$

Розв'язок другого рівняння (37) залежить від співвідношень між сталими  $\lambda_4, \lambda_5$ . Можливі два суттєво різні випадки.

**1.1.**  $\lambda_4 \neq \lambda_3$ . В цьому випадку функції  $g^a$  матимуть вигляд

$$g^1 = u^1 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2 (\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6).$$

Із другого рівняння (37) випливає, що

$$C = d_2 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{2\lambda_1 \lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0},$$

де  $d_2, d_3$  – довільні сталі. Внаслідок цього одержуємо наступний вигляд координат оператора (4)

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \\ \eta^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} [e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_3 g x_1 + d_2) + \frac{2\lambda_1 \lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0}] u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_4 x_0} u^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Оператор (4) з координатами (38) породжує алгебру інваріантності системи (26), наведену в пункті 8 таблиці 1.

**1.2.**  $\lambda_4 = \lambda_3$ . В цьому випадку функції  $g^a$  задаються наступним чином

$$g^1 = u^1 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6). \quad (39)$$

При  $\lambda_4 = \lambda_3$  із другого рівняння (37) одержуємо  $C = (d_2 - 2\lambda_1 \lambda_5 d_3 x_0) e^{\lambda_3 x_0}$ . Координати оператора (4) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \\ \eta^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_3 g x_1 - 2\lambda_1 \lambda_5 d_3 x_0 + d_2) u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_3 x_0} u^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Алгебра інваріантності системи (26), (39), породжена оператором (4) з координатами (40) співпадає з алгеброю пункту 9 таблиці 1.

**2.** Якщо  $\lambda_3 = 0$ , то рівняння (28), (29) розв'язуємо аналогічно до того, як це зроблено у випадку, коли  $\lambda_3 \neq 0$  і отримуємо пункти 1-6 таблиці 1.

Теорему доведено.

### Зауваження.

За допомогою методу С. Лі (див., наприклад, [1], [3]) можна показати, що основна група перетворень еквівалентності системи (18) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= t e^{2\theta_2} + \theta_0, \quad x_1 = x e^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3}, \quad u^2 = w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned}$$

Крім основної групи еквівалентності система (18) при конкретних  $g$  допускає деякі додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 e^{kt}, \quad u^2 = w^2 e^{mt},$$

де  $a, b, k, m$  – деякі сталі. Застосувавши ці перетворення дану систему з функціями  $g^1, g^2$  з таблиці 1 можна звести до наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{w^2}{w^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_x \right] + \begin{pmatrix} G^1(w^1, w^2) \\ G^2(w^1, w^2) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Поставимо задачу: підібрати параметри даних перетворень так, щоб вигляд функцій  $G^1, G^2$  був простіший ніж вигляд функцій  $g^1, g^2$ , наведених в таблиці 1. Результати такого спрощення подамо у вигляді наступної таблиці.

В таблиці 2 містяться константи, які набувають наступних значень  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r_1 \in \{-1; 1\}$ ,  $r_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ ,  $\varphi^a = \varphi^a(w^2)$  – довільні гладкі функції.

Таблиця 2. Спрощення системи (18) з нелінійностями, наведеними в таблиці 1, за допомогою перетворень еквівалентності

№ з/п	Зображення функцій $g^1, g^2$ системи (18)	Перетворення	Зображення функцій $G^1, G^2$ системи (41)
2	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6),$ $\lambda_4 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_4 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_4 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7\lambda_4 - \lambda_5\lambda_6}{\lambda_4^2}t} w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}} w^2,$	$G^1 = r w^1 \ln w^2,$ $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2;$
3	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = \lambda_6 u^2,$ $\lambda_5 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_5 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_5 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{ \lambda_5 }t} w^1, \quad u^2 = w^2,$	$G^1 = r_1 w^1 \ln w^2,$ $G^2 = r w^2;$
4.1	$g^1 = \lambda_7 u^1,$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1},$ $m \neq 0, \lambda_4 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_4 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_4 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{ \lambda_4 }t} w^1, \quad u^2 = w^2,$	$G^1 = 0,$ $G^2 = r_1 (w^2)^{n+1};$
4.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^m + \lambda_7],$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1},$ $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_5 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_5 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{ \lambda_5 }t} w^1, \quad u^2 = w^2,$	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^n,$ $G^2 = r (w^2)^{n+1};$
5.1	$g^1 = \lambda_7 u^1,$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3,$ $\lambda_4 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_4 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_4 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{ \lambda_4 }t} w^1, \quad u^2 = w^2,$	$G^1 = 0,$ $G^2 = r_1 (w^2)^3;$
5.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^2 + \lambda_7],$ $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3,$ $\lambda_5 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_5 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_5 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{ \lambda_5 }t} w^1, \quad u^2 = w^2,$	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^2,$ $G^2 = r (w^2)^3;$
6	$g^1 = \lambda_7 u^1,$ $g^2 = \lambda_6 u^2;$	$x_0 = t, \quad x_1 = x,$ $u^1 = e^{\lambda_7 t} w^1, \quad u^2 = e^{\lambda_6 t} w^2,$	$G^1 = 0,$ $G^2 = 0;$
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1),$ $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2),$ $\lambda_3 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_3 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_3 }}x,$ $u^1 = w^1, \quad u^2 = w^2$	$G^1 = w^1(\varphi^1(w^2) + r_1 \ln w^1),$ $G^2 = w^2 \varphi^2(w^2);$
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6),$ $\lambda_4 \neq \lambda_3, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0;$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_3 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_3 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_4}{\lambda_3\lambda_4}t} w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}} w^2,$	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2),$ $G^2 = r_2 w^2 \ln w^2;$
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6),$ $\lambda_3 \neq 0.$	$x_0 = \frac{1}{ \lambda_3 }t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{ \lambda_3 }}x,$ $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_7}{\lambda_3^2}t} w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_3}} w^2,$	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2),$ $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2.$

## 5. Висновки.

Нерелятивістський рух будь-яких макрооб'єктів задовольняє принципу відносності Галілея. Тому, очевидно, знайдені в даній роботі моделі руху, які, будучи інваріантними відносно алгебр Галілея, задовольняють принципу відносності Галілея, а отже, претендують на достовірність описання руху об'єктів моделі Келлера-Сегеля. Крім того, оскільки в даній роботі встановлено максимальні алгебри інваріантності систем, то це може значно полегшити роботу по встановленню траєкторій руху об'єктів, рух яких досліджується вище названою моделлю.

1. Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.К. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М., 1989. – Т. 34. – С. 3-83. 2. Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А. От беспорядка к упорядоченности – на примере движения микроорганизмов. // Успехи физических наук – 1991. – Т. 161, №4. – С. 13-71. 3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978. 4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1958. 5. Фушич В.И., Штельн В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – К., 1989. 6. Adler J., Chemotaxis in bacteria. // Science. – 1996. – Vol. 153. – P.708-716. 7. Keller E.F., Segel L.A., Model for chemotaxis. // J.Theor.Biol. – 1971. – Vol. 30. – P.225-234. 8. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. – New York, 1986.

Надійшла до редколегії 05.06.2007

## ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАМКНЕНИХ 1-ФОРМ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

*Розглядаються замкнені 1-форми з ізольованими нулями на замкнених орієнтованих поверхнях роду  $p \geq 2$ . Доводиться критерій топологічної еквівалентності замкнених 1-форм.*

*The closed 1-forms with isolated zeros on orientable closed surfaces of genus  $p \geq 2$  are considered. The criteria on topological equivalence of closed 1-forms is proved.*

### 1. Вступ.

Топологічна теорія замкнених 1-форм була започаткована С.П. Новіковим, над нею також працювали А.Т. Фоменко, В.І. Арнольд тощо. У роботі [2] зроблена топологічна класифікація замкнених 1-форм з ізольованими критичними точками та замкненими рекурентними траєкторіями.

Метою цієї роботи є знаходження необхідних і достатніх умов топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями. Для доведення розглядається круг Пуанкаре  $H^2$  як накривна площа поверхні, а також використовується гомотопічний клас обертання, введений С.Х. Арансоном і В.З. Грінесом у роботі [1].

### 2. Основні визначення.

Розглянемо  $M$  – замкнену орієнтовану поверхню роду  $p \geq 1$ . Нагадаємо деякі означення, що були введені в роботі [2].

**Визначення 1.** Позначимо  $N(\omega) = \{x \in M : f_i(x) = 0\}$  – множину нулів 1-форми  $\omega$ . Крива  $\gamma \subset M$ , що не містить нулів, називається інтегральною кривою форми  $\omega$ , якщо локально вона є рівнем функції  $f$ , такої що  $\omega = df$ . Ми будемо розглядати тільки максимальні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і будемо називати їх просто кривими чи траєкторіями.

Для кожного досить малого околу  $U(x)$  точки  $x \in M \setminus N(\omega)$  крива, що проходить через  $x$ , розбиває  $U(x)$  на дві частини: додатну  $\{y : f(y) - f(x) > 0\}$  і від'ємну  $\{x : f(y) - f(x) < 0\}$ .

**Визначення 2.** Диференціальні 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$  на  $M$  називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм  $h : M \rightarrow M$ , що відображає нулі в нулі, а криві на криві. При цьому  $h$  називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того,  $h$  зберігає розбиття кожного малого околу точки  $x \in M \setminus N(\omega)$  на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні форми топологічно еквівалентними.

Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, а від'ємних – від'ємною.

**Визначення 3.** Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.

**Визначення 4.** Інтегральна крива  $\gamma : R \rightarrow M$  називається рекурентною, якщо  $\gamma \subset \{x \in M : \exists \{t_n\} \rightarrow \pm\infty, \gamma(t_n) \rightarrow x, n \rightarrow \infty\}$ .

Нехай  $\omega$  – замкнена 1-форма з ізольованими точками на замкненій орієнтованій поверхні  $M$ , усі рекурентні інтегральні криві якої замкнені. Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як граф  $G(\omega)$ , що вкладений у поверхню  $M$ . При цьому якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна траєкторія, то для побудови графа  $G(\omega)$ , ми обріжемо цю траєкторію на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Ізольовані нулі можуть бути сідлами парної валентності або центрами [2].

Оскільки поверхня орієнтована, то можемо розглядати інтегральні криві замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$  як потоки  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  ( $t \in R$ ), задані на  $M$ , і навпаки.

Якщо рід поверхні  $p = 1$ , то розглянемо  $M$  як фактор евклідової площини  $R^2$  з координатами  $x, y$  по цілочисельній решітці  $Z^2$ . Позначимо через  $\pi$  природну проекцію  $R^2$  на  $M$ . Нехай  $L$  – додатна півтраєкторія потоку  $f_t$  на  $M$  і  $l : x = x(t), y = y(t) \ t \in [0, +\infty)$  – її прообраз на  $R^2$ .

Відомо [1], що якщо  $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то існує скінченна чи нескінченна границя  $v(L) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ , яка не залежить від вибору прообразу  $l$  в  $\pi^{-1}(L)$ . Число  $v(L)$  називається числом обертання додатної півтраєкторії  $L$  потоку  $f_t$  на  $M$ . Аналогічно визначається число обертання від'ємної півтраєкторії. Зазначимо, що число обертання не залежить від вибору півтраєкторії потоку  $f_t$  на  $M$ , прообраз якої на  $R^2$  покидає компакту частину площини. Тому для такого потоку  $f_t$  на  $M$ , можна говорити про одне число обертання для будь-якої півтраєкторії, якщо її прообраз на  $R^2$  покидає компакту частину площини. Таке число  $v$  називається числом обертання Пуанкаре потоку  $f_t$  на торі  $M$ .

**Визначення 5.** Потік  $\tilde{f}_t$  на  $M$  з числом обертання Пуанкаре  $\tilde{\nu}$  топологічно еквівалентний за допомогою гомотопії до потоку  $f_t$  на  $M$  з числом обертання Пуанкаре  $\nu$ , якщо  $\tilde{\nu} = \frac{c+dv}{a+bv}$ , де  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – цілочисельна унімодулярна матриця, яка задає автоморфізм групи гомологій  $H_1(M, \mathbb{Z})$ , індукований  $\varphi$ . Числа обертання  $\nu$  і  $\tilde{\nu}$ , що задовольняють це співвідношення, називаються сумірними.

Кажуть, що  $f_t$  утворює транзитивний потік, якщо в нього  $\nu$  ірраціональне, а сам  $f_t$  співпадає з усім тором. З [1] відомо, що для того щоб два транзитивних потоки на торі без станів рівноваги були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб числа обертання цих потоків були сумірними. Під топологічною еквівалентністю двох потоків  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), заданих на  $M$ , розуміється існування гомеоморфізму  $M \rightarrow M$ , що переводить траєкторії потоку  $f_t$  в траєкторії потоку  $\tilde{f}_t$ .

Для поверхні  $M$  роду  $p \geq 2$  з роботи [1] розглянемо  $H^2$  – круг Пуанкаре,  $S_\infty^1$  – абсолют,  $\partial H^2 = S_\infty^1$ , причому  $H^2$  з  $S_\infty^1$  не перетинаються. Нехай  $C$  – коло, яке перетинає  $S_\infty^1$  в двох точках під кутами  $90^\circ$ , тоді  $C \cap H^2$  є геодезичною дугою. Ізометрія в  $H^2$  визначається як композиція інверсій, де відстань між точками визначається за формулою  $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$ , де  $x$  і  $y$  – це координати точки в  $\mathbb{R}^2$ . Позначимо множину всіх ізометрій через  $\Gamma$ .

Відомими є факти, що  $\Gamma$  ізоморфна  $\pi_1(M)$ ,  $H^2$  є накривним простором для  $M$ .

Слідуючи роботі [1], введемо такі означення та позначення: нехай  $L$  – траєкторія на  $M$ ,  $L^+$  – її додатна півтраєкторія (з від'ємною траєкторією аналогічно). Тоді  $l$  і  $l^+$  – їх підняття в  $H^2$ . Оскільки  $M$  – орієнтована, то зобразимо  $M$  в  $H^2$  як  $4p$ -кутник, вершини якого лежать на геодезичних дугах, а сторони є частинами геодезичних дуг, де  $p \geq 2$  – рід поверхні  $M$ . Тоді  $\pi(H^2) = M$ , де  $\pi$  – склеювання відповідних сторін.

Відображаючи даний  $4p$ -кутник  $k$  разів відносно лише протилежної сторони до сторони, яку перетинає траєкторія, ми отримаємо криві  $l_k^+$  і  $l_k^- \rightarrow \delta \in S_\infty^1$ ,  $k \rightarrow +\infty$ . Позначимо через  $\delta(l^+)$  – граничну точку півтраєкторії  $l^+$ , що належать абсолюту.

**Визначення 6.** Гомотопічним класом обертання півтраєкторії  $L^+$  потоку  $f_t$  на  $M$  назвемо множину:  $\mu(L^+) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\delta(l^+))$ .

**Визначення 7.** Два гомотопічних класи обертання  $\mu(L^+)$  і  $\mu(\tilde{L}^+)$  півтраєкторій  $L^+$  і  $\tilde{L}^+$  потоків  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  на  $M$  називаються сумірними в силу автоморфізму  $\bar{g}_*$  групи  $\Gamma$ , якщо  $\mu(\tilde{L}^+) = \bar{g}_*(\mu(L^+))$ , де  $\bar{g}_*$  – гомеоморфізм абсолюту  $S_\infty^1$ , який єдиним чином індукований автоморфізмом  $\bar{g}$ .

Нагадаємо з [1], що потік  $f_t$  на  $M$  належить класу  $T$ , якщо виконуються такі умови:

- 1) потік  $f_t$  є транзитивним, тобто має на  $M$  всюди щільну півтраєкторію;
- 2) у потоку  $f_t$  існує лише скінченне число станів рівноваги і сепаратрис;
- 3) потік  $f_t$  немає сепаратрис, що йдуть з одного стану рівноваги в інший або в той же.

З роботи [1] відомо, що для того, щоб два потоки класу  $T$ , що задані на зв'язному замкненому орієнтованому двовимірному многовиді  $M$  роду  $p \geq 2$ , які не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами, були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб існували дві стійкі за Пуасоном півтраєкторії цих потоків, що мають сумірні в силу автоморфізму  $\bar{g}_*$  групи  $\Gamma$  гомотопічні класи обертання.

### 3. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм на орієнтованих поверхнях.

Граф  $G(\omega)$ , вершинами якого є нулі, а ребрами траєкторії, що їх з'єднують, розбиває поверхню на області двох типів:

- 1) області, що заповнені замкненими траєкторіями (регулярними рівнями);
- 2) області, що заповнені незамкненими рекурентними траєкторіями.

**Теорема.** Нехай  $M$  – замкнена орієнтована поверхня роду  $g \geq 1$ . Нехай на  $M$  задано дві замкнені 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Для того, щоб  $\omega_1$  і  $\omega_2$  були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:

- 1) для  $G(\omega_1) \neq \emptyset$  і  $G(\omega_2) \neq \emptyset$  виконувалися умови:

- існував гомеоморфізм  $f: M \rightarrow M$ , обмеження якого на  $G(\omega_1)$  задає ізоморфізм графів  $G(\omega_1)$  і  $G(\omega_2)$ ;
- області, що обмежені ребрами графа  $G(\omega_1)$ , переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі  $G(\omega_2)$
- додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні – у від'ємні;

2) для кожної з областей з  $M \setminus G(\omega_i)$ , що містить хоча б одну незамкнену рекурентну траєкторію, виконувалися умови:

- для областей роду  $p = 1$  числа обертання півтраєкторій замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$  мають бути сумірними;
- для областей роду  $p \geq 2$  існує по одній незамкненій рекурентній півтраєкторії замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$ ,

що мають сумірні гомотопічні класи обертання.

**Доведення.** Необхідність прямо випливає з побудови та означень.

**Достатність.** За умовою теореми існує ізоморфізм  $f$  між вкладеними в  $M$  графами  $G(\omega_1)$  і  $G(\omega_2)$ . Треба задати продовження даного ізоморфізму  $f$  до гомеоморфізму  $h: M \rightarrow M$ .

Аналогічно, як і в теоремі 2 роботи [3], встановлюємо траєкторну еквівалентність між областями типу 1).

Умова відображення в областях 1-го типу додатних підобластей в додатні, від'ємних – у від'ємні задана в теоремі.

З умови 1)  $f$  задає відповідність між областями через їх межі. Зокрема,  $f$  задає відповідність і між областями, межі яких містять хоча б ребро з вершиною валентності 1. Тобто, якщо існує область  $V$ , така, що  $\partial \bar{V}$  має хоча б одне ребро з вершиною валентності 1, то  $\exists \tilde{V}: f(V) = \tilde{V}$  і  $\partial \tilde{V}$  має таку ж кількість ребер з вершинами валентності 1, які є образами відповідних ребер з  $\partial \bar{V}$ . Як і при доведенні необхідності розглянемо окремо області  $V$  і  $\tilde{V}$ , позаклеюємо петлі в  $\partial \bar{V}$  і  $\partial \tilde{V}$  дисками, які постягуємо в точки, задамо орієнтації на кривих і будемо розглядати ці криві як потоки  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  ( $t \in R$ ), задані на  $V$  і  $\tilde{V}$ .

Якщо рід областей  $V$  і  $\tilde{V}$   $p = 1$ , то зауважимо, що перебудовані області будуть містити незамкнені рекурентні траєкторії, які мають одне й те ж число обертання, тобто траєкторії в  $R^2$  будуть паралельними між собою. Бо якщо траєкторії не паралельні, а відомо, що кожна така траєкторія щільно заповнює  $R^2$ , то між траєкторіями виникали б самоперетини, що неможливо. Тому  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  будуть транзитивними потоками у яких, за умовою теореми, числа обертання сумірні, тоді між ними існує гомеоморфізм  $V \rightarrow \tilde{V}$ , який відображає траєкторії  $f_t$  в траєкторії  $\tilde{f}_t$ .

Якщо рід областей  $V$  і  $\tilde{V}$   $p \geq 2$ , то потоки  $f_t$  і  $\tilde{f}_t$  ( $t \in R$ ) будуть належати до класу  $T$  і, за умовою теореми, існують дві незамкнені рекурентні півтраєкторії цих потоків, що мають сумірні гомотопічні класи обертання. Тоді існує гомеоморфізм  $V \rightarrow \tilde{V}$ , який відображає траєкторії  $f_t$  в траєкторії  $\tilde{f}_t$ . Розглянувши аналогічно всі області, що містять незамкнені рекурентні траєкторії, знайдемо між ними гомеоморфізми.

За необхідності, змінюючи гомеоморфізми областей в околах їх меж (графів) так, щоб гомеоморфізми при обмеженні на межі збігалися з гомеоморфізмами графів, отримаємо в сукупності шуканий гомеоморфізм поверхні. Теорему доведено.

#### 4. Висновок.

У даній роботі сформульована і доведена теорема про топологічну еквівалентність двох замкнених 1-форм на замкненій орієнтованій поверхні.

1. Арансон С.Х., Грінес В.З. Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях: УМН, 1986 Т.41, вып.1(247), С. 149-169. 2. Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісник КНУ. – 2002. – №8. 3. Будницька Н.В., Пришляк О.О.. Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісник КНУ. – 2007. – №18. 4. Кессон Е., Блейлер С. Теорія автоморфізмів по Нільсону і Тьорстону. М.: ФАЗИС, 1998.

Надійшла до редколегії 20.09.2007

УДК 519.21

О. Банна, асп., Ю. Мішура, д-р фіз.-мат. наук  
bannaya@univ.kiev.ua, myus@univ.kiev.ua

### НАИПРОСТІШІ МАРТИНГАЛИ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ДО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

**Знайдено найкраще рівномірне наближення дробового броунівського руху в просторі  $L_\infty([0, T]; L_2(\Omega))$  мартингалами виду  $\int_0^t a(s) dW_s$ , де  $W$  – вінерівський процес,  $a(s)$  – стала або степенева функції.**

**The best uniform approximation of fractional Brownian motion in the space  $L_\infty([0, T]; L_2(\Omega))$  by martingales of the form  $\int_0^t a(s) dW_s$ , where  $W$  is Wiener process,  $a(s)$  is a constant or a power function, is established.**

#### 1. Вступ.

Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$  називається гауссівський процес  $\{B_t^H, t \geq 0\}$  з середнім  $EB_t^H = 0$ , коваріацією  $EB_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$ , такий, що  $B_0^H = 0$ . Ми будемо розглядати ли-

ше випадок, коли індекс Хюрста  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Відомо, що ДБР з індексом  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  не є семімартингалом, зокрема, він не є ні мартингалом, ні процесом обмеженої варіації. Виникає природне питання: чи можна наблизитися до ДБР в деякій метриці за допомогою мартингалів, семімартингалів або процесів обмеженої варіації. Що стосується процесів обмеженої варіації та семімартингалів, відповідь позитивна, і ці задачі розв'язано в роботах [1, с. 11–20; 3, с. 281–300] та [5, с. 255–260]. В даній роботі розглянуто наближення дробового броунівського руху мартингалами, точніше, стохастичними інтегралами по вінерівському процесу. Задачу поставлено наступним чином: нехай задано відрізок  $[0, T]$ . Відомо з [3], що ДБР  $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$  допускає зображення  $B_t^H = \int_0^t z(t, s) dW_s$ , де  $\{W_t, t \in [0, T]\}$  – вінерівський процес,  $z(t, s) = (H - \frac{1}{2}) c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2} (u-s)^{H-3/2} du$ , де  $c_H = \left( \frac{2H \cdot \Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2}) \Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$ ,  $\Gamma(x)$ ,  $x > 0$  – гамма-функція. Нехай в подальшому  $\alpha = H - \frac{1}{2}$ .

Нехай тепер  $a : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  – вимірна функція з класу  $L_2[0, T]$ , тобто така, для якої існує стохастичний інтеграл  $\int_0^t a(s) dW_s$ ,  $t \in [0, T]$ , по цьому ж вінерівському процесу  $\{W_t, t \in [0, T]\}$ . Треба знайти

$\inf_{a \in L_2[0, T]} \sup_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - \int_0^t a(s) dW_s)^2$ . В даній роботі розв'язано спрощені варіанти цієї загальної задачі, коли замість

всього класу  $L_2[0, T]$  інфімум береться: (а) по всіх сталих; (б) по всіх степеневих функціях вигляду  $a(s) = k \cdot s^{H-\frac{1}{2}}$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ; (в) по всіх функціях вигляду  $k \cdot s^\gamma$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ,  $\gamma > 0$ . В кожному випадку знайдено ту функцію, на якій інфімум досягається, та значення самого інфімуму. Зауважимо, що всі ці значення ненульові.

## 2. Основні результати.

Ми будемо дотримуватись позначень, що введені в статті [4, с. 571–587]. Зафіксуємо  $T > 0$  і розглянемо  $E(B_t^H - M_t)^2$ ,  $0 \leq t \leq T$ , де  $B_t^H$  – дробовий броунівський рух з індексом Хюрста  $\frac{1}{2} < H < 1$ ,  $M_t$  – квадратично інтегрований мартингал виду  $M_t = \int_0^t a(s) dW_s$ , причому виконується умова  $\int_0^T a^2(s) ds < \infty$ , тобто  $a \in L_2[0, T]$ . Будемо шукати  $\min_{a \in L_2[0, T]} \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - M_t)^2$  у деяких часткових випадках.

**Теорема 1.** Нехай  $a(s)$  – стала, тобто  $a(s) = a$ ,  $s \in [0, T]$ . Тоді  $\min_a \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H} (1 - c_1^2)$ , де  $c_1 = c_1(H) = \alpha \cdot c_H \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha, \alpha)$ . Причому  $a_{\min} = c_1(H) \cdot T^\alpha$ . Тут  $B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  – бета-функція.

**Зауваження 1.** Як буде видно з доведення теореми,  $c_1(H) < 1$ .

**Доведення.**

Оскільки  $a(s)$  – стала, то  $M_t = \int_0^t a(s) dW_s = \int_0^t a dW_s = a(W_t - W_0) = aW_t$ .

З цього випливає, що

$$E(B_t^H - M_t)^2 = E(B_t^H - aW_t)^2 = (EB_t^H)^2 - 2aEB_t^H \cdot W_t + a^2EW_t^2 = t^{2H} - 2aEB_t^H W_t + a^2t.$$

Знайдемо  $EB_t^H W_t$ :

$$EB_t^H W_t = E \int_0^t z(t, s) dW_s \cdot W_t = \int_0^t z(t, s) ds = \alpha \cdot c_H \int_0^t s^{-\alpha} \cdot \left( \int_s^t u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} du \right) ds. \quad (1)$$

Змінимо в (1) порядок інтегрування. Отримаємо:  $EB_t^H W_t = \alpha \cdot c_H \int_0^t u^\alpha \left( \int_0^u s^{-\alpha} (u-s)^{\alpha-1} ds \right) du$ .

Лінійною заміною змінних  $s = ux$  зведемо останній інтеграл до вигляду:

$$EB_t^H W_t = \alpha \cdot c_H \int_0^t u^\alpha \left( \int_0^1 x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} dx \right) du = \alpha \cdot c_H \cdot \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha, \alpha).$$

Отже,  $E(B_t^H - aW_t)^2 = t^{2H} - 2aEB_t^H W_t + a^2t = t^{2H} - 2a \cdot c_1 t^{\alpha+1} + a^2t =: f(t)$ .

Продиференціюємо функцію  $f$  по  $t$  і прирівняємо до нуля отриману похідну:  $2H \cdot t^{2\alpha} - 2ac_1 t^\alpha \cdot (\alpha+1) + a^2 = 0$ .

Після заміни змінних  $t^\alpha =: x$  отримаємо квадратне рівняння:

$$2Hx^2 - 2ac_1(\alpha+1)x + a^2 = 0. \quad (2)$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння (2):

$$D = 4(\alpha+1)^2 c_1^2 a^2 - 4 \cdot 2H \cdot a^2 = 4a^2 \cdot ((\alpha+1)^2 c_1^2 - 2H). \quad (3)$$

Доведемо, що  $D < 0$  при  $\frac{1}{2} < H < 1$ . Справді,

$$(\alpha+1)^2 \left( \alpha c_H \cdot \frac{B(1-\alpha, \alpha)}{\alpha+1} \right)^2 - 2H = \left( \alpha \cdot \left( \frac{2H\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-2\alpha)} \right)^{1/2} \cdot \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) \right)^2 - 2H = 2H \cdot \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(1-\alpha))^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - 1 \right). \quad (4)$$

Оскільки  $\frac{1}{2} < H < 1$ ,  $1-\alpha = \frac{3}{2} - H > 0$ ,  $1-2\alpha = 2-2H > 0$ , і всі  $\Gamma$ -функції в (4) – додатні. Отже, достатньо довести, що

$$\Gamma(\alpha+1) \cdot (\Gamma(1-\alpha))^3 < \Gamma(1-2\alpha) \text{ при } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Якщо  $\alpha = 0$ , маємо рівність:  $\ln \Gamma(\alpha+1) + 3 \ln(\Gamma(1-\alpha)) = \ln \Gamma(1-2\alpha)$ .

Якщо  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$  і  $\varphi'(x) < \psi'(x)$ ,  $x \in (x_0, x_1)$ , то  $\varphi(x) < \psi(x)$ ,  $x \in (x_0, x_1)$ .

У нас  $\varphi(x) = \ln \Gamma(x+1) + 3 \ln \Gamma(1-x)$ ,  $\psi(x) = \ln \Gamma(1-2x)$ , при  $x_0 = 0$ ,  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ .

Знайдемо похідні:  $\varphi'(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - 3 \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}$ ,  $\psi'(x) = -2 \frac{\Gamma'(1-2x)}{\Gamma(1-2x)}$ .

Скористаємось формулою Гауса [2, с. 772]:  $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt - C$ , де  $C$  – стала Ейлера,  $C \approx 0,57721566490$ .

$$\text{Маємо: } \varphi'(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt - C - 3 \int_0^1 \frac{1-t^{-x}}{1-t} dt + 3C = 2C + \int_0^1 \frac{3t^{-x}-t^x-2}{1-t} dt, \quad \psi'(x) = -2 \int_0^1 \frac{1-t^{-2x}}{1-t} dt + 2C.$$

Таким чином, достатньо довести, що при  $t \in (0,1)$  та  $x > 0$

$$3t^{-x} - t^x < 2t^{-2x}. \quad (6)$$

Позначимо  $t^{-x} =: y$ . Тоді нерівність (6) еквівалентна нерівності:  $3y^2 - 1 < 2y^3$ ,  $(y-1)^2(2y+1) > 0$ , яка, очевидно, має місце при всіх  $y = t^{-x}$ ,  $x > 0$  та  $t \in (0,1)$ .

Таким чином ми довели (5), а отже і те, що дискримінант рівняння (3) є від'ємним. Крім того, ми довели, що  $c_1 < \frac{(2H)^{1/2}}{\alpha+1} < 1$ . Таким чином, рівняння (2) не має дійсних коренів, коефіцієнт при  $x^2$  в (2) додатний, отже  $\frac{df}{dt} > 0$ ,

тобто  $f(t)$  зростає по  $t$ . Тоді  $\max_{[0,T]} f(t) = f(T)$ .

Оскільки

$$f(T) = E(B_T^H - aW_T)^2 = a^2 T - 2c_1 T^{\alpha+1} a + T^{2H}, \quad (7)$$

шукаємо точку мінімуму квадратного тричлена (7) від  $a$ :  $a_{\min} = \frac{2c_1 T^{\alpha+1}}{2T} = c_1 \cdot T^\alpha$ .

$$\text{Отже, } \min_{\alpha} \max_t E(B_t^H - aW_t)^2 = (c_1 T^\alpha)^2 T - 2c_1^2 T^{\alpha+1} T^\alpha + T^{2H} = c_1^2 T^{2\alpha+1} - 2c_1^2 T^{2\alpha+1} + T^{2H} = T^{2H} - c_1^2 T^{2H}$$

Розглянемо тепер степеневу функцію зі сталим показником  $\alpha$ .

**Теорема 2.** Нехай  $a(s)$  – степеневая функція виду  $a(s) = k \cdot s^\alpha$ ,  $k \in \mathbf{R}^+$ , тоді

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H} \left( 1 - \frac{c_H^2}{2H} \right), \text{ де } c_H = \left( \frac{2H \cdot \Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}. \text{ Причому } k_{\min} = c_H.$$

**Доведення.**

Оскільки  $a(s)$  – степеневая функція виду  $a(s) = k \cdot s^\alpha$ , то  $M_t = \int_0^t a(s) dW_s = k \int_0^t s^\alpha dW_s$ .

З цього випливає, що

$$E(B_t^H - k \int_0^t s^\alpha dW_s)^2 = (E B_t^H)^2 - 2k E \left( B_t^H \int_0^t s^\alpha dW_s \right) + k^2 E \left( \int_0^t s^\alpha dW_s \right)^2 =: g(t). \quad (8)$$

Знайдемо  $E \left( B_t^H \int_0^t s^\alpha dW_s \right)$  та  $E \left( \int_0^t s^\alpha dW_s \right)^2$ :

$$\begin{aligned} E \left( B_t^H \int_0^t s^\alpha dW_s \right) &= E \left( \int_0^t z(t, s) dW_s \int_0^t s^\alpha dW_s \right) = \int_0^t z(t, s) s^\alpha ds = \alpha c_H \int_0^t \left( \int_s^t u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} du \right) ds = \\ &= \alpha c_H \int_0^t u^\alpha \left( \int_0^u (u-s)^{\alpha-1} ds \right) du = c_H \int_0^t u^{2\alpha} du = \frac{c_H}{2\alpha+1} t^{2\alpha+1}, \end{aligned} \quad (9)$$



$$\text{Далі, } E\left(\int_0^t s^\alpha dW_s\right)^2 = \int_0^t s^{2\alpha} ds = \frac{t^{2H}}{2H}.$$

$$\text{Отже, (8) має вигляд: } g(t) = t^{2H} - 2k \cdot \frac{c_H t^{2H}}{2H} + k^2 \cdot \frac{t^{2H}}{2H} = t^{2H} \left(1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}\right).$$

Взагалі,  $E(\cdot)^2$  не від'ємне, отже і  $g(t)$  не від'ємна і не спадає по  $t \in [0, T]$ . Якщо квадратний тричлен  $1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H} > 0$  для всіх  $k$ , то

$$\max_{[0, T]} g(t) = T^{2H} \left(1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}\right) \quad (10)$$

Знайдемо точку мінімуму вказаного квадратного тричлена  $1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}$ :  $k_{\min} = c_H$ , і при цьому

$$1 - k_{\min} \cdot \frac{c_H}{H} + k_{\min}^2 \cdot \frac{1}{2H} = 1 - \frac{c_H^2}{2H} = 1 - \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H - \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)} \dots$$

Перевіримо за допомогою формули Гаусса нерівність  $\Gamma(\frac{3}{2} - H) < \Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)$ ,  $\frac{1}{2} < H < 1$ . Ця нерівність еквівалентна такій:  $\Gamma(x) < \Gamma(2 - x)\Gamma(2x - 1)$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ . При  $x = 1$  маємо рівність, а для похідних потрібна нерівність  $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} > -\frac{\Gamma'(2-x)}{\Gamma(2-x)} + 2\frac{\Gamma'(2x-1)}{\Gamma(2x-1)}$ , або, з використанням формули Гаусса  $\int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt > -\int_0^1 \frac{1-t^{1-x}}{1-t} dt + 2\int_0^1 \frac{1-t^{2x-2}}{1-t} dt$ , або

ще  $\int_0^1 \frac{t^{1-x} + t^{x-1} - 2t^{2x-2}}{1-t} dt < 0$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ . При заміні  $t^{x-1} = z$  чисельник перетворюється на  $(1-z)(1+z+2z^2) < 0$ ,

оскільки  $0 < t < 1$ ,  $-\frac{1}{2} < x-1 < 0$ , і значить,  $z > 1$ .

Отже,

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - k \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}} dW_s)^2 = T^{2H} \left(1 - c_H \cdot \frac{c_H}{H} + c_H^2 \cdot \frac{1}{2H}\right) = T^{2H} \left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right).$$

□

Розглянемо більш загальний випадок.

Для цього використаємо такі відомі факти з математичного аналізу [2]:

**Означення.** Нехай  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  – функція від однієї змінної, тоді  $g(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  – це функція нахилу.

**Теорема 3.** [2] Якщо  $f$  – строго опукла донизу, то функція  $g$  строго зростає по одній змінній при фіксованій другій.

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f$  – строго опукла донизу, а  $g$  – функція нахилу при фіксованих  $x_1$  та  $x_2$ ,  $x_1 \neq x_2$ , тоді  $g(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha)$  строго зростає по  $\alpha > 0$ .

**Теорема 4.** Нехай  $a(s)$  – степенева функція виду  $a(s) = k \cdot s^\gamma$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ,  $\gamma > 0$ , тоді

$$\min_{\gamma} \min_k \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - M_t) = T^{2H} (1 - c_1^2(H)), \text{ причому мінімум досягається при } \gamma = 0 \text{ та } k_{\min} = c_1(H) \cdot T^\alpha.$$

**Доведення.** Оскільки  $a(s)$  – степенева функція виду  $a(s) = k \cdot s^\gamma$ , то  $M_t = \int_0^t a(s) dW_s = k \int_0^t s^\gamma dW_s$ .

Тоді, використовуючи (9) та рівність  $E\left(\int_0^t s^\gamma dW_s\right)^2 = \int_0^t s^{2\gamma} ds = \frac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}$ ,  $2\gamma+1 > 0$ , маємо:

$$\begin{aligned} E(B_t^H - k \int_0^t s^\gamma dW_s)^2 &= (EB_t^H)^2 - 2kE\left(B_t^H \int_0^t s^\gamma dW_s\right) + k^2 E\left(\int_0^t s^\gamma dW_s\right)^2 = \\ &= t^{2H} - 2k \cdot c_2(H, \gamma) \cdot t^{\alpha+\gamma} + k^2 \cdot \frac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} =: h(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } c_2(H, \gamma) = \frac{\alpha c_H B(1 - \alpha + \gamma, \alpha)}{\alpha + \gamma + 1}.$$

Продиференціюємо функцію  $h$  по  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= 2H \cdot t^{2H-1} - 2k c_2(H, \gamma) \cdot (\alpha + 1 + \gamma) t^{\alpha+\gamma} + k^2 \cdot \frac{1}{2\gamma+1} \cdot (2\gamma+1) t^{2\gamma} = \\ &= t^{2H-1} \left( 2H - 2k c_2(H, \gamma) \cdot (\alpha + 1 + \gamma) t^{-\alpha+\gamma} + k^2 \cdot t^{-2\alpha+2\gamma} \right).\end{aligned}$$

Перевіримо, чи  $\exists t \in [0, T]$  таке, що  $\frac{dh}{dt} = 0$ , тобто  $k^2 \cdot t^{-2\alpha+2\gamma} - 2k c_2(H, \gamma) \cdot (\alpha + 1 + \gamma) t^{-\alpha+\gamma} + 2H = 0$ .

Зробимо заміну  $k \cdot t^{-\alpha+\gamma} =: x$ , отримаємо:

$$x^2 - 2c_2(H, \gamma) \cdot (\alpha + 1 + \gamma) \cdot x + 2H = 0. \quad (12)$$

Знайдемо дискримінант  $D_1$  квадратного тричлена (13):

$$D_1 = 4c_2^2(H, \gamma)(\alpha + 1 + \gamma)^2 - 8H. \quad (13)$$

$D_1 < 0$  при  $\frac{1}{2} < H < 1$ ,  $\gamma > 0$ . Доведемо це.

$$\begin{aligned}4 \cdot \left( \frac{\alpha c_H B(1-\alpha+\gamma, \alpha)}{\alpha+\gamma+1} \right)^2 \cdot (\alpha+\gamma+1)^2 - 8H &= 4 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{2H \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(1-2\alpha)} \cdot \left( \frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma) \cdot \Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\gamma)} \right)^2 - 8H = \\ &= 8H \cdot \left( \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \cdot \left( \frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \right)^2 - 1 \right).\end{aligned} \quad (14)$$

Якщо в (14)  $\alpha = 0$ , отримаємо (4). Вище вже довели, що цей дискримінант  $D < 0$ .

Покажемо, що  $D_1 < 0$  при  $\gamma > 0$ .

Покажемо, що вираз  $\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} =: z(\gamma)$  із (14) спадає по  $\gamma > 0$ . Оскільки  $z(\gamma) > 0$  при  $\gamma > 0$ , то все одно, що довести, що  $\ln z(\gamma)$  – спадає по  $\gamma > 0$ .

$$\text{Розглянемо} \quad \ln \left( \frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \right) = (-\alpha) \cdot \frac{\ln(\Gamma(1+\gamma)) - \ln(\Gamma(1-\alpha+\gamma))}{(1+\gamma) - (1-\alpha+\gamma)}; \quad \text{позначимо}$$

$$\frac{\ln(\Gamma(1+\gamma)) - \ln(\Gamma(1-\alpha+\gamma))}{(1+\gamma) - (1-\alpha+\gamma)} =: \omega(\gamma)$$

Зауважимо, що  $\ln \Gamma(x)$  – опукла донизу функція. З наслідку 1 випливає тоді, що функція нахилу  $\omega(\gamma)$  зростає по  $\gamma$ , а  $-\alpha = \frac{1}{2} - H < 0$  і не залежить від  $\gamma$ , тому  $\ln z(\gamma)$  буде спадати по  $\gamma$ , отже сам вираз  $z(\gamma)$  при  $\gamma > 0$  буде менше, ніж  $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1-\alpha)$ . Таким чином, при  $\alpha > 0$   $\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} < \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}$ . Отже  $D_1 < D < 0$ , де вираз для  $D$

треба взяти з формули (4). Коефіцієнт при  $x^2$  в (12) додатний, отже графік функції опуклий донизу, тоді  $\frac{dh}{dt} > 0$ ,

тобто функція  $h$  зростає по  $t$ . Тоді  $\max_{[0, T]} h(t) = h(T) = E(B_T^H - k \int_0^T s^\gamma dW_s)^2$ . Оскільки

$$h(T) = h(T, \gamma, k) = T^{2H} - 2k \cdot c_2(H, \gamma) \cdot T^{H+\frac{1}{2}+\gamma} + k^2 \cdot \frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}, \quad (15)$$

то мінімізуємо квадратний тричлен (15) по  $k$ :  $k_{\min} = k_{\min}(\gamma) = \frac{2c_2(H, \gamma) \cdot T^{\alpha+1+\gamma}}{2 \cdot \frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}} = (2\gamma+1) \cdot c_2(H, \gamma) \cdot T^{\alpha-\gamma}$ .

Отже,

$$\begin{aligned}\min_{k \in \mathbf{R}} \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - k \int_0^t s^\gamma dW_s)^2 &= T^{2H} - 2(2\gamma+1) \cdot c_2^2(H, \gamma) \cdot T^{\alpha-\gamma} \cdot T^{\alpha+1+\gamma} + \\ &+ (2\gamma+1)^2 \cdot c_2^2(H, \gamma) \cdot T^{2\alpha-2\gamma} \cdot \frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} = T^{2H} - 2(2\gamma+1) \cdot c_2^2(H, \gamma) \cdot T^{2H} + (2\gamma+1) \cdot c_2^2(H, \gamma) \cdot T^{2H} = \\ &= T^{2H} - (2\gamma+1) \cdot c_2^2(H, \gamma) \cdot T^{2H}.\end{aligned} \quad (16)$$

Мінімізуємо (16) по  $\gamma$ . Для цього треба знайти, в якій точці досягається  $\max_{\gamma \geq 0} (2\gamma + 1)c_2^2(H, \gamma)$  або, що еквівалентно, точку, в якій досягається  $\max_{\gamma \geq 0} \frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1} \frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$ , в залежності від  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . Розглянемо функцію  $g(\gamma) := \frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1} \frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$ ,  $\gamma \geq 0$ . Її похідна, з точністю до додатного множника, дорівнює  $\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+1)\sqrt{2\gamma+1} \left( \frac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} - \frac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} + \frac{1}{2\gamma+1} - \frac{1}{\alpha+\gamma+1} \right)$ . Знайдемо знак функції  $p(\gamma, \alpha) := \frac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} - \frac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} + \frac{1}{2\gamma+1} - \frac{1}{\alpha+\gamma+1}$ ,  $\gamma \geq 0$ . За формулою Гаусса  $p(\gamma, \alpha) = \int_0^1 \frac{t^\gamma - t^{\gamma-\alpha}}{1-t} dt + \frac{1}{2\gamma+1} - \frac{1}{\alpha+\gamma+1}$ ,  $\gamma \geq 0$ . Якщо  $\alpha = 0$ , то  $p(\gamma, 0) < 0$ . Крім того,  $\frac{\partial p(\gamma, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\gamma-\alpha} \ln t}{1-t} dt + \frac{1}{(\alpha+\gamma+1)^2}$ . На відрізку  $[0, 1]$   $\left| \frac{\ln t}{1-t} \right| \geq 1$  і  $\ln t < 0$ . Тому  $\frac{\partial p(\gamma, \alpha)}{\partial \alpha} < -\int_0^1 t^{\gamma-\alpha} dt + \frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2} = -\frac{1}{\gamma-\alpha+1} + \frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2} = \frac{-\gamma^2 - \alpha^2 - 2\gamma\alpha - 3\alpha - \gamma}{(\gamma-\alpha+1)(\gamma+\alpha+1)^2} < 0$ .

Отже,  $p(\gamma, \alpha) < 0$  при всіх  $\gamma \geq 0$ . Це і означає, що похідна функції  $g(\gamma)$  від'ємна при всіх  $\gamma \geq 0$ , а значить  $\max_{\gamma \geq 0} (2\gamma + 1)c_2^2(H, \gamma)$  і, відповідно  $\min_{\gamma}$  в (16) досягається в точці  $\gamma = 0$ . Таким чином,

$$\min_{\gamma \geq 0} \min_{k \in \mathbf{R}} \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - k \int_0^t s^\gamma dW_s)^2 = \max_{0 \leq t \leq T} E(B_t^H - k_{\min} W_t)^2 = T^{2H} (1 - c_2^2(H, 0)) = T^{2H} (1 - c_1^2),$$

і з усіх степеневих функцій найкраще наближення надає стала функція.  $\square$

**Зауваження 2.** Покажемо, що в теоремі 4  $\min_{\gamma, k} h(T, \gamma, k) = \min_{\gamma} \min_k h(T, \gamma, k)$ , де мінімум береться по  $\gamma \geq 0$ ,  $k \in \mathbf{R}$ . Справді, нехай  $\min_{\gamma, k} h(T, \gamma, k) = h(T, \gamma_0, k_0)$ . Тоді, очевидно,  $k_0 = k_{\min}(\gamma_0)$ , а тоді і  $\gamma_0 = 0$ . Крім того,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} h(T, \gamma, k) = \begin{cases} T^{2H}, & \text{якщо } T \leq 1 \\ \infty, & \text{якщо } T > 1 \end{cases}, \text{ тобто мінімум справді досягається в деякій скінченній точці.}$$

### 3. Висновки.

В статті розглянуто найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху.

1. Андрощук Т. Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам // Теор. ймов. та мат. статистика. – 2005. – 73. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 2. – М., 1969. 3. Androshchuk T., Mishura Y. Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics // Stochastics: An Int.J.Prob.Stoch.Proc. – 2006. – 78. 4. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – 5(4). 5. Thao T.H. A note on fractional Brownian motion // Vietnam J. Math. – 2003. – 31, № 3.

Надійшла до редколегії 20.03.2007

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, О. Зражевський, асп.  
E-mail: vsa@univ.kiev.ua

## ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ

*Розглянута задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів. Наведена теорема про середньоквадратичну оцінку апроксимації таких випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині.*

*The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculate the spectral coefficients for the typical random fields examples. It has been give the theorem about the mean – square estimator of this random fields approximation by the partial sums.. It has been constructed the model and statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields algorithm.*

### 1. Вступ

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині, розроблена на основі спектрального розкладу таких полів. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для деяких практично важливих прикладів кореляційних функцій випадкових полів, які використовуються у моделюючому алгоритмі.

Нехай  $\xi(x)$  ( $x \in \mathbf{R}^2$ ) – дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле на площині. Як відомо [6], кореляційну функцію однорідного та ізотропного випадкового поля можна подати у вигляді інтегралу:

$$B(\rho) = \int_0^\infty J_0(\rho u) d\Phi(u), \quad (1)$$

де  $\Phi(u)$  – обмежена незростаюча функція, що називається **спектральною функцією** випадкового поля, а  $J_0(x)$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Припустимо, що випадкове поле  $\xi(x)$  – неперервне в середньому квадратичному. Позначимо через  $r$  та  $\varphi$  ( $r \in R_+, \varphi \in [0, 2\pi]$ ) – полярні координати точки  $x$  на площині. При цьому, відстань між точками  $x_1 = (r_1, \varphi_1)$  та  $x_2 = (r_2, \varphi_2)$  буде рівною  $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ . Тоді справедливе наступне твердження:

**Теорема 1.** Неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині  $\xi(r, \varphi)$  можна подати у вигляді **спектрального розкладу**:

$$\xi(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\nu^k} \left( \cos k\varphi \int_0^{\infty} J_k(ru) Z_k^1(du) + \sin k\varphi \int_0^{\infty} J_k(ru) Z_k^2(du) \right), \quad (2)$$

де  $\nu^k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 2, & k>0, \end{cases} \{Z_k^i(\cdot)\}_{k=0}^{+\infty}$  ( $i=1, 2$ ) – послідовність дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмно-

жинах Бореля із інтервалу  $[0, +\infty)$ , таких, що виконується умова:

$MZ_k^i(S_1)Z_k^j(S_2) = \delta_k^i \delta_k^j \Phi(S_1 \cap S_2)$ , ( $i, j=1, 2$ ), для будь-яких множин Бореля  $S_1$  та  $S_2$  із інтервалу  $[0, +\infty)$ , причому:  $\Phi(S) = \int_S d\Phi(u)$ . Доведення теореми міститься в роботі [4].

Кореляційна функція такого випадкового поля має вигляд:

$$B(\varphi_1 - \varphi_2) = M\xi(r_1, \varphi_1)\xi(r_2, \varphi_2) = \int_0^{\infty} J_0(2ur \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) d\Phi(u). \quad (3)$$

Спектральні коефіцієнти в цьому випадку можна виразити через спектральну функцію так:

$$b_k(r) = 2 \int_{0-}^{\infty} J_k^2(ru) d\Phi(u). \quad (4)$$

Якщо скористатись співвідношенням 6.681 [2] та врахувати вираз (3), отримаємо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від  $\sin \varphi$

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} B(2r \sin \varphi) \cos 2k\varphi d\varphi, \quad k=1, 2, \dots \quad (5)$$

Можна також використати до виразу (4) співвідношення 6.681.5 [2]. Тоді матимемо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від  $\cos \varphi$

$$b_k(r) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} B(2r \cos \varphi) \cos 2k\varphi d\varphi, \quad k=1, 2, \dots \quad (6)$$

Після теоретичних викладок перейдемо до розгляду прикладів кореляційних функцій для такого типу випадкових полів.

**Приклад 1.** Нехай спектральна функція  $\Phi(u)$  – **ступінчаста** функція, яка має скінчене число  $p$  стрибків (стрибки – в точках  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , а величини стрибків –  $u_1, u_2, \dots, u_p$ ).

Тоді відповідна кореляційна функція зображається формулою:

$$B(\varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{k=1}^p J_0 \left( 2 c_k r \left| \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right| \right) u_k. \quad (7)$$

**Приклад 2.** В геологічних науках знаходять застосування кореляційні функції випадкових полів, які називаються функціями **експоненціального** типу. Вони мають наступний вигляд:

$$B(t) = e^{-at}, \quad a > 0. \quad (8)$$

**Приклад 3.** Розглянемо кореляційні функції, які називаються **Гауссівськими** кривими. Вони зображаються наступною формулою:

$$B(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0. \quad (9)$$

**Приклад 4.** Заслугує уваги кореляційна функція **модифікованого Бесселевого** типу:

$$B(\rho) = a\rho K_1(a\rho), \quad a > 0, \quad (10)$$

де  $K_1(x)$  – функція Ганкеля.

**Приклад 5.** Наступна кореляційна функція виражається через добре відому **Бесселеву** функцію першого роду. Вона зображається формулою:

$$B(\rho) = \frac{2J_1(a\rho)}{a\rho}, \quad a > 0. \quad (11)$$

**Приклад 6.** Наведемо широко відому кореляційну функцію, яка зветься **моделлю Коші**. Узагальнена **модель Коші** має вигляд:

$$B(\rho) = \left( 1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a > 0. \quad (12)$$

Ми будемо використовувати модель Коші при значенні параметра  $\alpha=1/2$ . Вона виражається формулою:

$$B(\rho) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}, \quad a > 0. \quad (13)$$

Спектральні коефіцієнти для прикладів 1-6 обчислено в роботі [4]. Далі наведено дуже важливі для практичного застосування приклади кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині та виведено формули для відповідних спектральних коефіцієнтів

**Приклад 7.** Часто знаходять застосування кореляційні функції **поліноміального** типу. Найпростішим прикладом такого типу є так звана **сферична** модель:

$$B(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{a} \right)^3, & \rho \leq a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \quad (14)$$

При  $a \in [\pi, +\infty)$  знайдемо спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (5). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( 1 - 3 \frac{r}{a} \sin \varphi + 4 \left( \frac{r}{a} \right)^3 \sin^3 \varphi \right) \cos 2k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Для обчислення цього інтегралу скористаємося значенням табличного інтегралу із роботи [2, с. 388]:

$$\int_0^\pi \sin^{v-1} x \cos ax \, dx = \frac{\pi \cos \frac{a\pi}{2}}{2^{v-1} \Gamma(v) \beta\left(\frac{v+a+1}{2}, \frac{v-a+1}{2}\right)}$$

Після деяких спрощень із (15) отримаємо вираз для спектральних коефіцієнтів кореляційної функції, що розглядається:

$$b_k(r) = \frac{r \cos k\pi (2r^2 - a^2 (9 - 4k^2))}{8a^3 \beta\left(\frac{5}{2} + k, \frac{5}{2} - k\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де  $\beta(x, y)$  - бета-функція.

**Приклад 8.** На практиці часто зустрічається модель випадкових полів, яка має назву **експоненціально затухаючої косинусоїди**. Така кореляційна функція має вигляд:

$$B(\rho) = c e^{-a\rho} \cos \omega \rho, \quad c > 0, \quad a > 0, \quad \omega > 0. \quad (17)$$

Знайдемо відповідні спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (6). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi c \exp(-a \, 2r \cos \varphi) \cos(\omega \, 2r \cos \varphi) \cos 2k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Позначивши через  $\alpha = a \, 2r$  та  $\beta = \omega \, 2r$ , обчислимо наступний інтеграл:

$$I = \int_0^\pi c \exp(-\alpha \cos \varphi) \cos(\beta \cos \varphi) \cos 2k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Скориставшись наступною формулою:  $\cos(\beta \cos \varphi) = \frac{1}{2} [\exp(i\beta \cos \varphi) + \exp(-i\beta \cos \varphi)]$ , розіб'ємо інтеграл (19)

на два інтеграли  $I_1$  та  $I_2$ :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{ \exp[(-\alpha + i\beta) \cos \varphi] + \exp[(-\alpha - i\beta) \cos \varphi] \} \cos 2k\varphi \, d\varphi = (I_1 + I_2)/2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Для обчислення першого інтегралу введемо наступне позначення:  $\gamma_1 = -\alpha + \beta$ . Тоді маємо:

$$I_1 = \int_0^\pi \exp(\gamma_1 \cos \varphi) \cos 2k\varphi \, d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \cos \varphi \quad d\varphi = \frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} \\ d = -\sin \varphi \, d\varphi \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \exp(\gamma_1 t) \cos(2k \arccos t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (21)$$

Оскільки в підінтегральному виразі містяться многочлени Чебишева першого роду:

$$T_{2k}(t) = 2k \arccos t, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

то внаслідок використання табличного інтегралу [5, с. 453]:

$$\int_{-a}^a \exp(ipx) T_n\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = i^n \pi J_n(ap), \quad a > 0,$$

остаточно для першого інтегралу  $I_1$  маємо вираз:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \exp(\gamma_1 t) T_{2k}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = i^{2k} \pi J_{2k}(-i\gamma_1) = (-i)^k \pi J_{2k}(-i\gamma_1), \quad a > 0. \quad (23)$$

Аналогічно для другого інтегралу  $I_2$  із формули (20) отримаємо:

$$I_2 = \int_{-1}^1 \exp(\gamma_2 t) T_{2k}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = (-i)^k \pi J_{2k}(-i\gamma_2), \quad \text{де } \gamma_2 = -\alpha - i\beta. \quad (24)$$

Підставляючи (23) та (24) у вираз (20), маємо для інтегралу  $I$  наступний вираз:

$$I = \frac{1}{2} (-i)^k \pi [J_{2k}(\beta + i\alpha) + J_{2k}(-\beta + i\alpha)]. \quad (25)$$

Отже, враховуючи (25), можна отримати формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів випадкових полів із кореляційною функцією типу експоненціально затухаючої косинусоїди у вигляді :

$$b_k(r) = c \left[ J_{2k}(2\omega r + i2kr) + J_{2k}(-2\omega r + i2kr) \right] \quad (26)$$

Результати обчислень спектральних коефіцієнтів для практично важливих кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині наведено в наступній таблиці.

**Таблиця 1.** Кореляційні та спектральні функції і відповідні спектральні коефіцієнти однорідних ізотропних випадкових полів на площині

NN	$B(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$b_k(r)$
11	$\sum_{m=1}^s p_m J_0 \left( 2 c_m \rho \left  \sin \frac{\Phi}{2} \right  \right),$ $\sum_{m=1}^s p_m = 1, p_m > 0, c_m \geq 0.$	$\begin{cases} 0, \lambda \leq c_1, \\ \sum_{m=1}^i p_m, c_i < \lambda \leq c_{i+1}, i = \overline{1, s-1} \\ 1, \lambda > c_s \end{cases}$	$2 \sum_{m=1}^s p_m J_k^2(c_m r)$
22	$\exp \{ -c \rho \}, c > 0, n \geq 1$	$\frac{c}{\pi} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}$	$2 J_{2k}(2 c r)$
33	$\exp \{ -c \rho^2 \}, c > 0$	$\Phi'(\lambda) = \frac{\lambda}{2 c} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2 c} \right\}$	$\exp \{ -2 c r^2 \} I_k(2 c r^2)$ $I_k(x)$ – модифікована функція Бесселя
44	$2 \frac{J_1(c \rho)}{c \rho}, c \geq 0.$	$\begin{cases} \left( \frac{\lambda}{c} \right)^2, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$	$2 [ J_k^2(c r) - J_{k+1}(c r) J_{k-1}(c r) ]$
55	$c \rho K_1(c \rho), c > 0$	$\Phi'(\lambda) = 2 \frac{c^2 \lambda}{(\lambda^2 + c^2)^2}$	$2 + 2 (k-2) K_k(c r) I_k(c r)$ де $K_k(x)$ – функція Ганкеля
66	$\frac{c}{\sqrt{\rho^2 + c^2}}, c > 0, n > 1.$	$\Phi'(\lambda) = c e^{-c \lambda}$	$\frac{2}{\pi} \frac{c}{r} Q_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{c^2 + 2 r^2}{2 r^2} \right),$ де $Q_k(y)$ – функція Лежандра
77	$\begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{a} \right)^3, & \rho \leq a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$		$\frac{r \cos k \pi (2 r^2 - a^2 (9 - 4 k^2))}{8 a^3 \beta \left( \frac{5}{2} + k, \frac{5}{2} - k \right)}$ де $\beta(x, y)$ – бета-функція
88	$c e^{-a \rho} \cos \omega \rho,$ $c, a, \omega > 0, \rho \in [0, 1]$		$c [ J_{2k}(2 \omega r + i 2 a r) + J_{2k}(-2 \omega r + i 2 a r) ]$

. Отримані спектральні коефіцієнти можна використовувати для статистичного моделювання випадкових полів за алгоритмом, сформульованим у роботі [7]. Наведемо його.

За статистичну модель випадкового поля, що розглядається, приймається часткова сума ряду (2) виду:

$$\xi_N(r, \varphi) = \sum_{k=0}^N \sqrt{v_k} \left[ \cos k \varphi \int_0^\infty J_k(\lambda r) Z_k^1(d\lambda) + \sin k \varphi \int_0^\infty J_k(\lambda r) Z_k^2(d\lambda) \right], \quad (27)$$

де  $N$  – деяке натуральне число.

При цьому значення числа  $N$  визначається за допомогою нерівності, яка є оцінкою наближення випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  частковими сумами  $\xi_N(r, \varphi)$  в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як за вгодою малому числу  $\epsilon$  – точності наближення. Згадана нерівність отримана в роботі [7] (доведення наведено далі).

**Теорема 2.** Нехай виконується умова  $\int_0^\infty \lambda^2 d \Phi(\lambda) < +\infty$ . Тоді справедлива оцінка:

$$M \left[ \xi(r, \varphi) - \xi_N(r, \varphi) \right]^2 \leq \frac{1}{\pi N} \left( \frac{1}{2} r \mu_1 + r^2 \mu_2 \right), \quad (28)$$

$$\text{де } \mu_k = \int_0^\infty \lambda^k d \Phi(\lambda).$$

**Доведення:**

$$\text{Для доведення достатньо зауважити, що: } M \int_{|x| \leq Q} [\xi(r, \varphi) - \xi_N(r, \varphi)]^2 dx = 2 \sum_{k=N+1}^\infty \int_0^\infty J_k^2(\lambda r) d \Phi(\lambda)$$

та застосувати твердження наступної леми.

**Лема.** Для кожного дійсного та натурального справедлива нерівність:

$$\sum_{k=N+1}^\infty J_k^2(z) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2} |z| + z^2 \right). \quad (29)$$

**Доведення.** Прийемо до уваги теорему додавання для бesselевих функцій – співвідношення 8.531 [1]:

$$J_0\left(\lambda \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\right) = J_0(\lambda r_1) J_0(\lambda r_2) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\lambda r_1) J_k(\lambda r_2) \cos k(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\text{Звідси випливає, що: } J_0\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right) = J_0^2(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z) \cos k \varphi.$$

Це означає, що  $\{2 J_k^2(z), m \geq 1\}$  є послідовність коефіцієнтів Фур'є функції  $J_0\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ .

Друга похідна цієї функції дорівнює:

$$\left[J_0\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right)\right]'' = \frac{1}{2} z \sin \frac{\varphi}{2} J_1\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} z^2 \cos^2 k \varphi \left[J_0\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right) - J_2\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\text{Звідси випливає: } \sup_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} \left[J_0\left(2 z \sin \frac{\varphi}{2}\right)\right]'' \leq \frac{1}{2} |z| + z^2. \text{ Тому справедлива нерівність: } 2 J_k(z) \leq \frac{\frac{1}{2} |z| + z^2}{k^2 \pi}.$$

$$\text{Отже, остаточно отримаємо: } \sum_{k=N+1}^{\infty} J_k^2(z) \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} |z| + z^2\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} |z| + z^2\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{\pi N} \left(\frac{1}{2} |z| + z^2\right).$$

Лема доведена.

На основі моделі (27) та оцінки (28) можна побудувати алгоритм статистичного моделювання гауссівського однорідного ізотропного випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  на площині, яке задається своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією.

## 2. Алгоритм.

1. Визначається значення числа **N**, відповідно наперед заданому числу  $\epsilon$ , за допомогою нерівності (28) :

$$\frac{1}{\pi N} \left(\frac{1}{2} r^2 \mu_1 + r^2 \mu_2\right) \leq \epsilon$$

, де **r** – радіус точки площини, в якій генерується реалізація випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$ .

2. Обчислюються спектральні коефіцієнти  $b_k(r)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) для прикладу кореляційної функції, що моделюється.

3. Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин  $\{\zeta_k(r), k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  та  $\{\eta_k(r), k = 0, 1, 2, \dots, N\}$ .

4. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин :

$$\xi_N(r, \varphi) = \sum_{k=0}^N \sqrt{v_k b_k(r)} [\zeta_k(r) \cos k \varphi + \eta_k(r) \sin k \varphi]. \quad (30)$$

5. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  за допомогою програм **S-Plus**, **GeoR** і порівнюється із заданою кореляційною функцією  $B(\rho)$ , а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

## 3. Висновки

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гаусівським.

1. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М., 1974. 2. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. - 2003. - Вип. 10. - С.85-91. 3. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. - 2004. - Вип. 11-12. - С.20-24. 4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., 1971. 5. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: специальные функции. - М., 1983. 6. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. - К., 1980. 7. Grikh Z., Yadrenko M., Yadrenko O. About Approximation and Statistical Simulation of Izotropic Fields. // Rand. Operators and Stoh. Eq.- 1993. - Vol. 1, No. 1, - P. 37-45.

Надійшла до редколегії 02.10.2007

УДК 519.21

О. Кубайчук, канд. фіз.-мат. наук  
katrissa@voliacable.com

## АСИМПТОТИКА ОЦІНКИ ДЛЯ БАЄСОВОГО ПОРОГУ

Розглянуто асимптотику оцінки для баєсового порогу, побудованої методом мінімізації емпіричного ризику і методом емпірично-баєсової класифікації для порогових класифікаторів для вибірки із суміші зі змінними концентраціями.

The asymptotic of the estimator for Bayesian border that is constructed by the Empirical Risk Minimization method and the method of the Empirical-Bayesian Classification for border classifiers for the sample from mixture with varying concentrations is considered.

## 1. Вступ

Розглядається задача класифікації деякого об'єкту  $O$  за спостереженням його числової характеристики  $\xi = \xi(O)$ . Вважаємо, що об'єкт може належати лише одному з двох класів. Розглядаємо порогові класифікатори вигляду

$$g_{t_1, t_2}^1(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi \in [t_1, t_2], \\ 2, & \text{якщо } \xi \notin [t_1, t_2], \end{cases} \quad (1)$$

тобто об'єкт відносять до першого класу, якщо його характеристика потрапляє в проміжок  $[t_1, t_2]$  і до другого класу в іншому випадку. Приклад такої класифікації — визначення людини (об'єкт) як хворої (другий клас), якщо її температура (характеристика  $\xi$ ) перевищує  $37^\circ$  (або рівень гемоглобіну в крові перевищує 84 одиниці) (поріг  $t_2$ ) і є меншою за  $36^\circ$  (рівень гемоглобіну є меншим за 72 одиниці) (поріг  $t_1$ ). Можливий також варіант

$$g_{t_1, t_2}^2(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi \notin [t_1, t_2], \\ 2, & \text{якщо } \xi \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (2)$$

Найкращим (баєсовим) вважають поріг  $\bar{t}^B = (t_1^B, t_2^B)$ , при якому  $g_{t_1, t_2}^i$ ,  $i = 1, 2$  має найменшу ймовірність помилки. Об'єкт  $O$ , у якого спостерігається деяка числова характеристика  $\xi = \xi(O)$ , може належати одному з двох класів; невідомий номер класу, якому належить  $O$  позначимо  $ind(O)$ . Вважаються відомими апіорні ймовірності  $p_i = P(ind(O) = i)$ ,  $i = 1, 2$ . Характеристика  $\xi$  — випадкова, її розподіл залежить від  $ind(O)$ :  $P(\xi(O) < x | ind(O) = i) = H_i(x)$ . Розподіли  $H_i$  невідомі, але будемо вважати, що вони мають неперервні щільності відносно міри Лебега —  $h_i$ .

## 2. Методи оцінки і основні результати

Множину всіх класифікаторів позначимо  $G$ . Ймовірність помилки класифікатора:

$$\begin{aligned} L(g_t^1) &= L^1(\bar{t}) = P\{g_t^1(\xi(O)) \neq ind(O)\} = \sum_{i=1}^2 P\{ind(O) = i\} P\{g_t^1(\xi(O)) = 3 - i | ind(O) = i\} = \\ &= p_1(H_1(t_1) + 1 - H_1(t_2)) + p_2(H_2(t_2) - H_2(t_1)), \\ L(g_t^2) &= L^2(\bar{t}) = P\{g_t^2(\xi(O)) \neq ind(O)\} = \sum_{i=1}^2 P\{ind(O) = i\} P\{g_t^2(\xi(O)) = 3 - i | ind(O) = i\} = \\ &= p_1(H_1(t_2) - H_1(t_1)) + p_2(H_2(t_1) + 1 - H_2(t_2)). \end{aligned}$$

Баєсовим класифікатором у класі  $G$  називають класифікатор  $g^B \in G$ , на якому досягається мінімум  $L(g)$ :

$$g^B = \arg \min_{g \in G} L(g).$$

Поріг  $\bar{t}^B$  баєсового класифікатора є баєсовим порогом:  $\bar{t}^B = \arg \min_{\bar{t} \in R^2} L(\bar{t})$ .

$$\text{Для } g_t^1 \text{ маємо: } \bar{t}^{1B} = \arg \min_{t_1 \in R, t_2 \in R} L^1(t_1, t_2) = (\arg \min_{t_1 \in R} L^1(t_1, t_2), \arg \min_{t_2 \in R} L^1(t_1, t_2)) = (\arg \min_{t_1 \in R} L_1^1(t_1), \arg \min_{t_2 \in R} L_2^1(t_2))$$

$$\text{де } L_1^1(t_1) = p_1 H_1(t_1) - p_2 H_2(t_1), \quad L_2^1(t_2) = p_1 (1 - H_1(t_2)) + p_2 H_2(t_2).$$

$$\text{Для } g_t^2 \text{ маємо: } \bar{t}^{2B} = \arg \min_{t_1 \in R, t_2 \in R} L^2(t_1, t_2) = (\arg \min_{t_1 \in R} L^2(t_1, t_2), \arg \min_{t_2 \in R} L^2(t_1, t_2)) = (\arg \min_{t_1 \in R} L_1^2(t_1), \arg \min_{t_2 \in R} L_2^2(t_2))$$

$$\text{де } L_1^2(t_1) = -p_1 H_1(t_1) + p_2 H_2(t_1), \quad L_2^2(t_2) = p_1 H_1(t_2) + p_2 (1 - H_2(t_2)).$$

Найкращим (баєсовим) вважають поріг  $\bar{t}^B = (t_1^B, t_2^B)$ , при якому  $g_{t_1, t_2}$  має найменшу ймовірність помилки. При цьому виникає проблема вибору (оцінки) порогу на основі навчаючої вибірки. Найбільш поширеними методами оцінювання  $\bar{t}^B$  за повністю класифікованою вибіркою є емпірично-баєсова класифікація (ЕБК) [3;5] та метод мінімізації емпіричного ризику (МЕР) [2;7].

Розглянемо перший метод. Вважаємо, що навчаюча вибірка отримана із суміші зі змінними концентраціями. Будемо досліджувати асимптотичну поведінку цього методу.

Розглянемо випадок (1). Функції  $H_i$  (а, значить, і  $h_i$ ) вважаються невідомими. Їх можна оцінити за даними, що являють собою вибірку із суміші зі змінними концентраціями:  $\{\xi_{j:N}\}_{j=1}^N$ ,  $\xi_{j:N}$  — незалежні між собою при фіксованому  $N$  і  $P\{\xi_{j:N} < x\} = w_{j:N} H_1(x) + (1 - w_{j:N}) H_2(x)$ , де  $w_{j:N}$  — відома концентрація об'єктів першого класу у суміші в момент  $j$ -го спостереження [6]. Для оцінки функції розподілу  $H_i$  використовують зважені емпіричні функції розподілу

$$\hat{H}_i^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j:N}^i 1\{\xi_j < x\},$$

де  $1\{A\}$  — індикатор події  $A$ ,  $a_{j:N}^i$  — вагові коефіцієнти:

$$a_{j:N}^1 = \frac{1}{\Delta_N} ((1 - S_N^1) w_{j:N} + (S_N^2 - S_N^1)), \quad a_{j:N}^2 = \frac{1}{\Delta_N} (S_N^2 - S_N^1 w_{j:N}), \quad S_N^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (w_{j:N})^k, \quad \Delta_N = S_N^2 - (S_N^1)^2 \quad (\text{див. [6]}).$$

Для оцінки щільностей розподілів  $h_i$  можна скористатися ядерними оцінками



$$\hat{h}_i^N(x) = \frac{1}{Nk_N} \sum_{j=1}^N a_{j:N}^i K\left(\frac{x - \xi_{j:N}}{k_N}\right),$$

де  $K$  – ядро (щільність деякого ймовірнісного розподілу),  $k_N$  – параметр згладжування [1;4].

Оцінка ЕБК будується наступним чином: знаходиться множина  $T_N$  всіх розв'язків рівняння  $p_1 \hat{h}_1^N(t) - p_2 \hat{h}_2^N(t) = 0$  і на роль оцінки використовується  $\bar{t}_N^{EBC} = \arg \min_{t_1, t_2 \in T_N} L_N^1(t_1, t_2)$ , де

$$\begin{aligned} L_N^1(t_1, t_2) &= p_1 (\hat{H}_1^N(t_1) + 1 - \hat{H}_1^N(t_2)) + p_2 (\hat{H}_2^N(t_2) - \hat{H}_2^N(t_1)) = L_{N_1}^1(t_1) + L_{N_2}^1(t_2), \\ L_{N_1}^1(t_1) &= p_1 \hat{H}_1^N(t_1) - p_2 \hat{H}_2^N(t_1), \quad L_{N_2}^1(t_2) = p_1 (1 - \hat{H}_1^N(t_2)) + p_2 \hat{H}_2^N(t_2); \\ \bar{t}_{N_1}^{EBC} &= \arg \min_{t_1 \in T_N} L_{N_1}^1(t_1), \quad \bar{t}_{N_2}^{EBC} = \arg \min_{t_2 \in T_N} L_{N_2}^1(t_2). \end{aligned}$$

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

(А).  $\bar{t}^B$  існує і є єдиною точкою глобального мінімуму  $L^1(\bar{t})$  ( $t_1^B$  є точкою глобального мінімуму  $L_1^1(t_1)$ ,  $t_2^B$  –  $L_2^1(t_2)$ ).

( $B_k$ ). Існують границі  $S^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  і  $\Delta = S^2 - (S^1)^2 > 0$ .

**Теорема 1.** Нехай виконуються (А), ( $B_2$ ), існують і є неперервними щільності  $h_i$ ,  $k_N \rightarrow 0$ ,  $N_{k_N} \rightarrow \infty$ ,  $K$  – неперервна функція  $d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) dt < \infty$ .

Тоді  $\bar{t}_N^{EBC} \rightarrow \bar{t}^B$  ( $\bar{t}_{N_1}^{EBC} \rightarrow t_1^B$ ,  $\bar{t}_{N_2}^{EBC} \rightarrow t_2^B$ ) за ймовірністю при  $N \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Згідно з теоремою 1 у [1], в наших умовах,  $\hat{h}_i^N(x) \rightarrow h_i(x)$  за ймовірністю в кожній точці  $x \in R$ . Отже  $u_N(x) \doteq p_2 \hat{h}_2^N(x) - p_1 \hat{h}_1^N(x) \rightarrow u(x) \doteq p_2 h_2(x) - p_1 h_1(x)$  за ймовірністю. Для  $\delta_i > 0$  позначимо

$$A_N(\delta_i) = \left\{ \exists t_i : |t_i - t_i^B| \leq \delta_i, u_N(t_i) = 0 \right\}.$$

Покажемо, що

$$P(A_N(\delta_i)) \rightarrow 1, N \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Оскільки  $t_1^B$  – точка мінімуму  $L_1^1(t)$ ,  $t_2^B$  – точка мінімуму  $L_2^1(t)$ , а  $-L_1^1(t) + L_2^1(t) = u(t)$  – неперервна функція, то  $u(t)$  повинна змінювати знак в околі точки  $t_i^B$ , тобто існують такі  $t_i^-$ ,  $t_i^+$ , що  $t_i^B - \delta_i < t_i^- < t_i^B < t_i^+ < t_i^B + \delta_i$  і  $u(t_i^-)u(t_i^+) < 0$ . Отже,  $P(u_N(t_i^-)u_N(t_i^+) < 0) \rightarrow 1$ . Але, оскільки  $u_N$  – неперервна, то  $\{u_N(t_i^-)u_N(t_i^+) < 0\} \subseteq A_N(\delta_i)$ . Отже, (3) доведено для  $i = 1, 2$ .

Фіксуємо  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Оскільки,  $L_1^1$ ,  $L_2^1$  – неперервні на  $R$  функції,  $L_1^1(-\infty) = 0$ ,  $L_1^1(+\infty) = p_1 - p_2$ ,  $L_2^1(-\infty) = p_1$ ,  $L_2^1(+\infty) = p_2$  і виконана умова (А), то  $\forall \delta_i > 0 \exists \varepsilon_i$  таке, що для всіх  $t_i$ , для яких  $|t_i - t_i^B| > \delta_i$  має місце нерівність  $L^1(t_i) > L^1(t_i^B) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ . Виберемо  $0 < \delta_i' < \delta_i$  так, щоб для всіх  $t \in [t_i^B - \delta_i', t_i^B + \delta_i']$  виконувалось  $L^1(t_i) < L^1(t_i^B) + \frac{\varepsilon_i}{4}$ . Позначимо  $B_{N_i} = \left\{ \inf_{t \in [t_i^B - \delta_i', t_i^B + \delta_i']} L_{N_i}^1(t) > L^1(t_i^B) + \frac{\varepsilon_i}{2} > \inf_{t \in [t_i^B - \delta_i', t_i^B + \delta_i']} L_{N_i}^1(t) \right\}$ .

Фіксуємо довільне  $\lambda_i > 0$ . Використовуючи рівномірну збіжність  $L_{N_i}^1$  до  $L^1$ , отримуємо, що для достатньо великих  $N$ ,  $P(B_{N_i}) > 1 - \frac{\lambda_i}{2}$ . Згідно (3), при великих  $N$ ,  $P(A_N(\delta_i')) > 1 - \frac{\lambda_i}{2}$ . Якщо виконано  $A_N(\delta_i')$ , то існують  $t_i^* \in T_N \cap [t_i^B - \delta_i', t_i^B + \delta_i']$  і, при виконанні  $B_{N_i}$ ,  $L_{N_i}^1(t_i^*) < L_{N_i}^1(t_i)$  для всіх  $t_i \notin [t_i^B - \delta_i', t_i^B + \delta_i']$ . Тому

$$P\{\bar{t}_N^{EBC} - t_i^B < \delta_i\} \geq P(A_N(\delta_i') \cap B_{N_i}) \geq 1 - \frac{\lambda_i}{2} + 1 - \frac{\lambda_i}{2} = 1 - \lambda_i.$$

$$(P(A_N(\delta_i') \cap B_{N_i})) = P(A_N(\delta_i')) + P(B_{N_i}) - P(A_N(\delta_i') \cup B_{N_i}) \geq P(A_N(\delta_i')) + P(B_{N_i}) - 1$$

при великих  $N$ ,  $i = 1, 2$ . Враховуючи довільність  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , отримаємо твердження теореми.

Далі оцінку порогу  $\bar{t}^B$  будемо методом мінімізації емпіричного ризику. Знову вважаємо, що навчаюча вибірка отримана із суміші зі змінними концентраціями. Припущення щодо оцінок для  $H_i$  і  $h_i$  такі ж як і раніше. Дослідимо асимптотичну поведінку цього методу. Оцінка МЕР визначається як  $\bar{t}_N^{MER} = \arg \min_{\bar{t} \in R^2} L_N^1(\bar{t})$ , де

$$L_N^1(\bar{t}) = [p_1 \hat{H}_1^N(t_1) - p_2 \hat{H}_2^N(t_1)] + [p_1 (1 - \hat{H}_1^N(t_2)) + p_2 \hat{H}_2^N(t_2)],$$

де  $L_{N_1}^1(t_1) = p_1 \hat{H}_1^N(t_1) - p_2 \hat{H}_2^N(t_1)$ ,  $L_{N_2}^1(t_2) = p_1(1 - \hat{H}_1^N(t_2)) + p_2 \hat{H}_2^N(t_2)$ .

Отже,  $\hat{t}_{N_1}^{MER} = \arg \min_{t_1 \in R} L_{N_1}^1(t_1)$ ,  $\hat{t}_{N_2}^{MER} = \arg \min_{t_2 \in R} L_{N_2}^1(t_2)$ . Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

(A).  $\bar{t}^B$  існує і є єдиною точкою глобального мінімуму  $L^1(\bar{t})$ .

( $B_k$ ). Існують границі  $S^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  і  $\Delta = S^2 - (S^i)^2 > 0$ .

**Теорема 2.** Нехай виконуються (A), ( $B_2$ ),  $H_i$  – неперервні функції на  $R$ . Тоді  $\hat{t}_N^{MER} \rightarrow \bar{t}^B$  ( $\hat{t}_{N_1}^{MER} \rightarrow t_{1:N}^B$ ,  $\hat{t}_{N_2}^{MER} \rightarrow t_2^B$ ) за ймовірністю при  $N \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Відмітимо, що з умови ( $B_2$ ) випливає рівномірність по  $N$  та  $j$  обмеженість вагових коефіцієнтів  $a_{j:N}^i$ . Тому за теоремою 2.4.2 з [3]  $\sup_x |H_i^N(x) - H_i(x)| \rightarrow 0$  за ймовірністю при  $N \rightarrow \infty$ . Звідси випливає, що  $\sup_x |L_{N_1}^1(x) - L^1(x)| \rightarrow 0$  та  $\sup_x |L_{N_2}^1(x) - L^1(x)| \rightarrow 0$  за ймовірністю. Фіксуємо довільні  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Нехай  $A_{N_1} = \left\{ \sup_x |L_{N_1}^1(x) - L^1(x)| < \frac{\varepsilon_1}{2} \right\}$ ,  $A_{N_2} = \left\{ \sup_x |L_{N_2}^1(x) - L^1(x)| < \frac{\varepsilon_2}{2} \right\}$ .

При достатньо великих  $N$ ,  $P(A_{N_1}) > 1 - \lambda_1$ ,  $P(A_{N_2}) > 1 - \lambda_2$ . Оскільки  $L_1^1$ ,  $L_2^1$  – неперервні функції на  $R$ ,  $L_1^1(-\infty) = 0$ ,  $L_1^1(+\infty) = p_1 - p_2$ ,  $L_2^1(-\infty) = p_1$ ,  $L_2^1(+\infty) = p_2$  і виконана умова (A), то  $\forall \delta_i > 0 \exists \varepsilon_i$  таке, що для всіх  $t_i$ , для яких  $|t_i - t_i^B| > \delta_i$  має місце нерівність  $L^1(t_i) > L^1(t_i^B) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Нехай події  $A_{N_i}$  виконані. Тоді  $L^1(\hat{t}_{N_i}^{MER}) - \frac{\varepsilon_i}{2} \leq L_{N_i}^1(\hat{t}_{N_i}^{MER}) \leq L_{N_i}^1(t_i^B) \leq L^1(t_i^B) + \frac{\varepsilon_i}{2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Отже,  $L^1(\hat{t}_{N_i}^{MER}) \leq L^1(t_i^B) + \varepsilon_i$  і  $|\hat{t}_{N_i}^{MER} - t_i^B| \leq \delta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Внаслідок довільності  $\delta_1$  ( $\delta_2$ ) та  $\lambda_1$  ( $\lambda_2$ ) теорема доведена.

Розглянемо випадок (2). В доведенні та формулюванні відбудуться незначні зміни, а саме, верхній індекс зміниться з 1 на 2, а також  $L_1^1(-\infty) = 0$ ,  $L_2^2(-\infty) = p_2$ ,  $L_1^2(+\infty) = p_2 - p_1$ ,  $L_2^2(+\infty) = p_1$ , що не впливає на хід доведення.

### 3. Висновки

В даній роботі знайдено умови збіжності за ймовірністю оцінок для баєсового порогу, побудованих методом мінімізації емпіричного ризику і методом емпірично-баєсової класифікації для вибірки із суміші зі змінними концентраціями.

1. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер. – М., 1977. 2. Вапник В.Н. Индуктивные принципы поиска эмпирических закономерностей // Распознавание. Классификация. Прогноз, Вып.1. – М., 1989. 3. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. – М., 1988. 4. Іванько Ю.О. Асимптотика ядерних оцінок щільностей та їх похідних, побудованих за спостереженнями із суміші зі змінними концентраціями // Вісник КНУ, сер. Математика. Механіка. – 2003. – №9. – С. 29–35. 5. Іванько Ю.О., Майборода Р.Є. Експоненціальні оцінки емпірично-баєсового ризику при класифікації суміші зі змінними концентраціями // Український математичний журнал. – 2002. – Т.54, №10. – С. 1421–1428. 6. Майборода Р.Є. Статистичний аналіз сумішей. – К., 2003. 7. Вапник В.Н. The nature of Statistical Learning Theory. – N. Y., 1996.

Надійшла до редколегії 27.09.07

УДК 532.5

О. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук  
Email: alex\_z\_ua@ukr.net

## УТОЧНЕННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГАЗОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ, ЩО МАЮТЬ ОСОБЛИВІСТЬ НА ВІЛЬНІЙ МЕЖІ

На прикладі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною межею в околі якої існує особливість. Розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на поверхні розділу двох потоків, поперечний перетин якої має форму кола.

On the example of mathematical model of the supersonic flowing around of of conical porous bodies without axial symmetry, everywhere surface of which the strong is carried out blew gas, perfection of method of construction of decision of regional task is conducted with free granitseyu in okoli which a feature is. The algorithm of numeral solution of boundary task is developed enables to execute the terms of invariability of function of entropy on the surface of section of two streams, the transversal crossing of which has a form of circle.

### 1. Вступ.

В роботі [3] побудована математична модель надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу. Сформульовано пряму та обернену крайові задачі із вільною границею. Слід вказати, що за межами викладеного в [3] матеріалу залишилося питання побудови розв'язку задачі у околі поверхні контактної розриву (поверхні розділу), якою на основі проведеного асимптотичного аналізу замінюється шар змішування (взаємодії) зовнішнього і внутрішнього потоків. В роботі [1] на базі математичної моделі з [3] розроблено метод побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею, в околі якої існує особливість. Знайдені умови існування регулярного розв'язку та розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі у всій області течії. Однак, аналіз результатів, отриманих за викладеним в [1] методом, показав, що для окремого випадку

"прямої" задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, треба додатково розглянути питання поведінки функції ентропії у околі поверхні контактної розподілу.

Дійсно, згідно постановці задачі в [3] у загальному випадку функція ентропії  $S$  представлена у вигляді

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos(l\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m S_m \sin(m\varphi), \quad (1)$$

Для окремого випадку "прямої" задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, на цій поверхні

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos l\varphi. \quad (2)$$

Тобто, ентропія є функцією від змінної  $\varphi$  всюди, включаючи поверхню контактної розриву. У той же час, відомо, що А.Феррі, виходячи з фізичних міркувань, доказав, що ентропія на поверхні вісесиметричного конуса має бути постійною [4].

Тому у околі контактної поверхні треба провести додаткове дослідження поведінки газодинамічних функцій.

## 2. Метод розв'язання.

Повернемося до роботи [3], де вісесиметрична течія описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \eta_0 u_0 v_0 = 0, \quad v_0 \frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{dv_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \gamma p_0 (v_0 + 2\eta_0 u_0) = 0, \\ \frac{dp_0}{d\xi_N} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\xi_N} = 0, \quad u_0^2 + v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c. \end{aligned} \quad (3)$$

У загальному випадку для визначення збурень вісесиметричної течії маємо дві лінійні системи диференціальних рівнянь. Перша з них не залежить від параметра  $\Theta_m$ , а друга – від  $\Theta_l$ . Таким чином, в кожній області I і II для визначення збурень в основному вісесиметричному потоці маємо наступні дві лінійні системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{dv_i}{d\xi_N} + v_i \frac{dv_0}{d\xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dp_i}{d\xi_N} - \frac{\rho_i}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} \right) - \sigma_0 (\eta_0 u_0 v_i + \eta_0 u_i v_0 + \eta_i u_0 v_0) - \sigma_i \eta_0 u_0 v_0 = 0, \\ v_0 \frac{dw_i}{d\xi_0} - \sigma_0 \left[ w_i (v_0 + \eta_0 u_0) - \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\rho_0} \left( p_i + \frac{\eta_i}{\Theta_0 - \Delta_0} \frac{dp_0}{d\xi_0} \right) \right] = 0, \\ v_0 \frac{dp_i}{d\xi_0} + v_i \frac{dp_0}{d\xi_0} + \gamma \left( p_i \frac{dv_0}{d\xi_0} + p_0 \frac{dv_i}{d\xi_0} \right) - \gamma \sigma_0 \{ p_i (v_0 + 2\eta_0 u_0) + \\ p_0 [v_i + 2(\eta_0 u_i + \eta_i u_0) + w_i \sqrt{1+\eta_0^2}] \} - \sigma_i \gamma p_0 (v_0 + 2\eta_0 u_0) = 0, \\ u_0 u_i + v_0 v_i + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{p_i}{p_0} - \frac{\rho_i}{\rho_0} \right) = 0, \\ \frac{p_i}{p_0} - \gamma \frac{\rho_i}{\rho_0} = S_i, \quad i = l, m \end{aligned} \quad (4)$$

У рівняннях систем (3) і (4) прийняті такі позначення:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}, \quad \eta_0 = \Theta_0 + \xi (\Delta_0 - \Theta_0), \quad \sigma_l = \frac{\Theta_l - \sigma_0 (1 + 3\eta_0^2) \eta_l}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}, \quad \sigma_m = \frac{\Theta_m - \sigma_0 (1 + 3\eta_0^2) \eta_m}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}, \\ \eta_l = \Theta_l (1 - \xi), \quad \eta_m = \Theta_m (1 - \xi), \quad c = \frac{c_{kp\infty}}{c_{kpbd}}, \end{aligned}$$

$N$  – номер області течії.

Для окремого випадку "прямої" задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, в області I залишиться лише одна система рівнянь першого наближення. В області II треба розглядати обидві системи рівнянь. Такий підхід є справедливим й для граничних умов.

Нагадаємо, що при побудові крайових задач першого наближення в рівняннях та граничних умовах залишалися лише члени першого порядку відносно  $\delta_i$ . Внаслідок цього, у системі рівнянь Ейлера в рівнянні для ентропії не був врахований член:

$$Bw\sqrt{1+\eta^2} \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

який має другий порядок малості по  $\delta_i$ , але стає головним при малих значеннях  $\xi$ , коли перший доданок рівняння наближається до нуля.

На перший погляд може здатися, що врахування членів другого порядку малості відносно  $\delta_i$  дозволить усунути цей недолік розв'язку першого наближення. Однак, в роботі [2], де наводиться обґрунтування теорії першого та другого наближень для задач обтікання вісесиметричних конічних тіл, вказано, що й в другому наближенні розв'язок для функції ентропії в околі поверхні конусу не відповідає фізичній моделі.

Тому розглянемо на прикладі крайової задачі в області I дещо інший підхід, який дає змогу забезпечити постійне значення ентропії на поверхні контактної розриву, тобто при  $\xi = 0$ . Для цього треба модифікувати системи рівнянь першого наближення, враховуючи деякі члени більшого порядку малості.

$$\text{Перепишемо рівняння для ентропії у вигляді: } A \frac{\partial S}{\partial \xi} + \varepsilon B \tilde{w} \sqrt{1 + \eta^2} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0,$$

де  $\varepsilon$  – деякий малий параметр, який будемо вважати рівним  $\delta_i$ , під час асимптотичного аналізу рівнянь. Це дає змогу зберегти в рівняннях  $n$ -го наближення поряд з членами  $n$ -го порядку ще і члени порядку  $\delta_i^{n+1}$ , які стають головними при малих значеннях  $\xi$ .

Тоді, для першого наближення ми отримаємо рівняння для ентропії у такому вигляді:

$$E(\xi) \frac{\partial S_i}{\partial \xi} - \varepsilon_i \sin \varphi \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = 0, \text{ де } E(\xi) = \frac{v_0}{B_0 w_i \sqrt{1 + \eta_0^2}}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:  $S_1 = F\left(b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$ , де  $b = e^{-\delta_i \int_1^\xi \frac{d\xi}{E(\xi)}}$ , а  $F$  – довільна функція.

Представимо ентропію у першому наближенні у вигляді:

$$S_1(\xi_N, \varphi) = \sum_{k=0}^n S_{1k}(\xi) \cos k\varphi. \quad (6)$$

Якщо в (6) позначити функції ентропії на стрибку ущільнення як  $S_{1k}$ , то, якщо обмежившись чотирма членами ряду (тобто  $n = 3$ ), отримаємо

$$S_{1k}(\xi) = (s_{10} - s_{12})q_{0k} + (s_{11} - 3s_{32})q_{1k} + 2s_{12}q_{2k} + 4s_{13}q_{3k}, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} q_{00} &= 1, \quad q_{01} = q_{02} = q_{03} = 0, \\ q_{10} &= \frac{1-b}{1+b}, \quad q_{11} = \frac{4b}{(1+b)^2}, \quad q_{12} = -\frac{4b(1-b)}{(1+b)^3}, \quad q_{13} = \frac{4b(1-b)^2}{(1+b)^4}, \quad q_{20} = \frac{1+b^2}{(1+b)^2}, \\ q_{21} &= \frac{4b(1-b)}{(1+b)^3}, \quad q_{22} = -\frac{4b(1-4b+b^2)}{(1+b)^4}, \quad q_{23} = \frac{4b(1-b)(1-6b+b^2)}{(1+b)^5}, \\ q_{30} &= \frac{1-b^3}{(1+b)^3}, \quad q_{31} = \frac{6b(1+b^2)}{(1+b)^4}, \quad q_{32} = -\frac{6b(1-b)^3}{(1+b)^5}, \\ q_{33} &= \frac{2b}{(1+b)^6} (3 - 18b + 38b^2 - 18b^3 + 3b^4). \end{aligned}$$

За аналогією з (6), для інших параметрів маємо:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=0}^n u_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \quad v_1 = \sum_{k=0}^n v_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \quad p_1 = \sum_{k=0}^n p_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \quad \rho_1 = \sum_{k=0}^n \rho_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \\ w_1 &= \sum_{k=0}^n w_{1k}(\xi) \sin k\varphi, \quad \Delta_1 = \sum_{k=0}^n \Delta_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \quad \Theta_1 = \sum_{k=0}^n \Theta_{1k}(\xi) \cos k\varphi, \quad \Omega_1 = \sum_{k=0}^n \Omega_{1k}(\xi) \cos k\varphi. \end{aligned}$$

Система рівнянь для визначення цих параметрів має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{1k}}{d\xi} &= \frac{1}{v_0^2 - c_0^2} \left( C_{1k} v_0 - \frac{1}{\rho_0} D_{1k} \right), \quad \frac{dp_{1k}}{d\xi} = \frac{1}{v_0^2 - c_0^2} (D_{1k} v_0 - \gamma C_{1k} p_0), \\ \frac{dw_{1k}}{d\xi} &= \frac{K_{1k}}{v_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_{1k} = -\frac{1}{u_0} \left[ v_0 v_{1k} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{p_{1k}}{p_0} - \frac{\rho_{1k}}{\rho_0} \right) \right], \quad \rho_{1k} = \frac{\rho_0}{\gamma} \left( \frac{p_{1k}}{p_0} - S_{1k} \right),$$

$$\text{де } C_{1k} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{v_{1k}}{v_0} - \frac{\rho_{1k}}{\rho_0} \right) \frac{dp_0}{d\xi} - u_0 u_{1k} - u_0 v_0 (\eta_0 \sigma_{1k} + \eta_{1k} \sigma_0),$$

$$D_{1k} = \frac{1}{p_0} (v_0 p_{1k} - p_0 v_{1k}) \frac{dp_0}{d\xi} - \gamma p_0 \left[ \sigma_0 (v_{1k} + 2\eta_0 u_{1k} + 2\eta_{1k} u_0) + \sigma_{1k} (v_0 + 2\eta_0 u_0) - \sigma_0 \sqrt{1 + \eta_0^2} w_{1k} \right],$$

$$K_{1k} = \frac{\sigma_0 \sqrt{1 + \eta_0^2}}{\rho_0} \left( p_{1k} - \frac{\eta_{1k}}{\Omega_0 - \Theta_0} \frac{dp_0}{d\xi} \right) - \sigma_0 (v_0 + \eta_0 u_0) w_{1k}.$$

$$\sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0(1 + \eta_0^2)}, \quad \eta_0 = \Theta_0 + \xi_I(\Delta_0 - \Theta_0), \quad \sigma_{1k} = \frac{\Theta_{1k} - \sigma_0(1 + 3\eta_0^2)\eta_{1k}}{\eta_0(1 + \eta_0^2)}, \quad \eta_{1k} = \Theta_{1k}(1 - \xi_I), \quad c = \frac{c_{kp\infty}}{c_{kpbd}}.$$

Граничні умови в області I:  
на стрибку ущільнення ( $\xi_I = 0$ ):

$$u_{1k} = -\frac{\Omega_0 \Omega_{1k} u_0}{1 + \Omega_0^2} + \alpha_{1k}, \quad v_{1k} = \frac{(\gamma - 1)U_{n0}^2 - 2\gamma p_\infty}{(\gamma + 1)U_{n0}^2} U_{1k}, \quad w_{1k} = \frac{k(u_0 \Omega_0 + v_0) \Omega_{1k}}{\Omega_0 \sqrt{1 + \Omega_0^2}} + \beta_{1k},$$

$$p_{1k} = \frac{4U_{0k} U_{1k}}{\gamma + 1}, \quad \rho_{1k} = \frac{4\gamma(\gamma + 1)p_\infty U_{0k} U_{1k}}{[(\gamma - 1)U_{0k}^2 + 2\gamma p_\infty]^2},$$

$$\alpha_{11} = -u_0 \Theta_0, \quad \beta_{11} = \Theta_0 U_\infty, \quad \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0.$$

на поверхні розподілу ( $\xi_I = 1$ ):  $v_1 = 0$ .

Далі, як і у роботі [1], для того, аби  $w_m$  мала скінченне значення на поверхні  $\Theta$ , необхідно зв'язати функції  $w_{1k}$  і  $p_{1k}$  співвідношенням

$$w_{1k}(0) = k \frac{\sqrt{1 + \Theta_0^2}}{\Theta_0 u_0 \rho_0} p_{1k}. \quad (10)$$

Після чого можна отримати аналітичний вираз для тангенціальної складової  $w_m$  вектора швидкості, який є справдливим у околі поверхні розподілу  $\Theta$ :

$$w_{1k}(\xi_I) = w_{1k}(0) \pm \lambda_{1k} \xi_I^{1/2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

де  $\lambda_{1k}$  – невідомі константи інтегрування, значення яких знаходяться чисельно за допомогою розробленого в [1] алгоритму побудови розв'язку у околі поверхні контактної розриву.

Завдяки запропонованому підходу побудова чисельного розв'язку крайових задач на базі математичної моделі [3] здійснюється за допомогою алгоритмів, розроблених в [3] і [1]. Ускладнення процедури розв'язання цих задач, що пов'язане з необхідністю виконання умови незмінності функції ентропії на поверхні контактної розриву, зводиться лише до технічних питань, оскільки, згідно [3], розв'язок крайової задачі будується у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних розв'язків, що задовольняють відповідним граничним умовам. В даному випадку їх кількість збільшується й визначається числом членів в співвідношенні (6).

### 3. Висновки.

На основі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення розробленого раніше методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею в околі якої існує особливість. У окремому випадку "прямой" крайової задачі для режима течії, коли поверхня розділу має поперечний перетин у формі кола, розроблений метод розв'язання, що дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на контактній поверхні двох потоків. При цьому зберігаються алгоритми побудови розв'язку задачі, що були розроблені в [3] і [1].

1. Антонов А.М., Зайцев О.В., Хорошилов О.В. Метод розв'язання газодинамічних задач, що мають особливість на вільній межі // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2006, №17, С. 2. Булах Б.М. Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса // ПММ. 1962, т. XXVI, вып. 2, С. 300-307. 3. Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черний Д.І. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл із вдувом // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2005, №13, С. 54-59. 4. Ferri A. Supersonic flow around circular cones // NASA TN, №2236.

Надійшла до редколегії 17.08.07

УДК 538.6; 539.3; 534.1

Л. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, І. Лоос, канд. фіз.-мат. наук, Р. Індіамінов, канд. фіз.-мат. наук

## МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ОРТОТРОПНОЮ ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЮ

*Побудована нелінійна двовимірною модель магнітопружності струмонесучих ортотропних оболонок обертання з врахуванням ортотропної електропровідності, магнітної та діелектричної проникливості. Отримана зв'язана розв'язуюча система нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан гнучких струмонесучих ортотропних оболонок обертання з довільною формою меридіану, з ортотропною електропровідністю, які знаходяться при нестационарних силових та електромагнітних навантаженнях.*

*A two-dimensional variant of connected nonlinear equations of electrodynamics of the current-carrying orthotropic rotation shells, under no stationary loads is presented. A procedure for solution of asymmetrical problems of magneto elasticity of flexible current-carrying orthotropic rotation shells under no stationary actions of mechanical and electromagnetic forces is plotted. A stress-strained state of flexible current-carrying orthotropic rotation shells is studied as an example.*

### 1. Вступ.

Важливе місце у механіці спряжених полів займають питання вивчення руху суцільних середовищ з врахуванням електромагнітних ефектів. Дослідження механіки зв'язаних полів у деформованих тілах мають як фундаментальний,

так і прикладний характер, що надає їм особливої актуальності. У сучасній техніці використовуються конструкційні матеріали, які у недеформованому стані вже анізотропні, подекуди ортотропні. Причому анізотропія властивостей таких матеріалів виникає в них у разі застосування різних технологічних процесів. Останнім часом розроблені матеріали з новими електромагнітними властивостями. Ці матеріали можуть ефективно використовуватись у різних галузях нової техніки.

Особливий інтерес викликають задачі магнітопружності при дії на тіло стороннього струму. Однак, задачі, пов'язані з питаннями врахування сторонніх струмів, в цілому достатньо важкі, але суттєво спрощуються у випадку тонких тіл, що мало змінюють форми при деформації. Подалі нас будуть цікавити саме ці спрощені задачі.

Вважаємо, що електропровідне тіло перебуває в магнітному полі, створюваному як електричним струмом у самому тілі (власне магнітне поле), так і джерелом, яке знаходиться на віддалі від тіла (зовнішнє магнітне поле). Вважається також, що сторонній електричний струм у не збудженому стані рівномірно розподілений по тілу (густина струму не залежить від координат). Тіло має скінчену електропровідність і не має властивості самовільної поляризації та намагнічення.

Визначимо величини та запишемо рівняння, які характеризують електромагнітне поле. Нехай електромагнітне поле тіла в ейлеровій системі координат характеризується вектором напруженості електричного поля  $\vec{e}$ , вектором напруженості магнітного поля  $\vec{h}$ , вектором електричної індукції  $\vec{d}$  і вектором магнітної індукції  $\vec{b}$ , а в лагранжевій системі координат характеризується відповідно  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{B}$ .

Аналіз електромагнітних ефектів має місце на основі системи рівнянь Максвелла, сумісно з матеріальними рівняннями, які зв'язують між собою вектори  $\vec{d}$  і  $\vec{e}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{h}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{e}$ , які в разі лінійних ізотропних середовищ мають вигляд [3]:

$$\vec{d} = \epsilon_{\alpha} \vec{e}, \quad \vec{b} = \mu_{\alpha} \vec{h}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{e},$$

де  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  - називаються відповідно електричною і магнітною проникливостями,  $\sigma$  - електричною провідністю середовища. Властивості середовищ характеризуються параметрами  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$ . В залежності від властивостей параметрів  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  розрізняють наступні середовища:

лінійні, в яких параметри  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  не залежать від величини електричного і магнітного полів, і нелінійні, в яких параметри  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  (чи хоча б один з них) залежить від величини електричного чи магнітного поля. Всі реальні середовища, по суті, є нелінійними. Однак, при не дуже сильних полях в багатьох випадках можливо знехтувати залежністю  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  від величини електричного і магнітного полів і вважати, що розглядуване середовище лінійне. В свою чергу, лінійні середовища діляться на однорідні і неоднорідні, ізотропні і анізотропні. Однорідними називають середовища, параметри  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  яких не залежать від координат, тобто властивості середовища однакові у всіх його точках. Середовища, у яких хоча б один з параметрів  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  є функцією координат, називають неоднорідними. Якщо властивості середовища однакові за різними напрямками, то середовище називають ізотропним. Відповідно середовища, властивості яких різні за різними напрямками, називають анізотропними. В ізотропних середовищах вектори  $\vec{d}$  і  $\vec{e}$ , а також  $\vec{b}$  і  $\vec{h}$  паралельні, в анізотропних середовищах вони можуть бути не паралельними. В ізотропних середовищах параметри  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha}$  і  $\sigma$  - скалярні величини. В анізотропних середовищах, хоча б, один з цих параметрів є тензором. Відмітимо, що визначення зв'язків між величинами  $\vec{e}$  і  $\vec{d}$ , а також  $\vec{h}$  і  $\vec{b}$  конкретизує модель середовища.

При русі провідного тіла в магнітному полі чи при зміні магнітного поля за часом в тілі виникають індукційні струми і обумовлені ними пондеромоторні сили Лоренца, що, в свою чергу, супроводжується деформацією середовища і появою хвиль напружень.

Рух пружного середовища в магнітному полі описується сумісною системою рівнянь електродинаміки середовища, що повільно рухається і рівняннями динамічної теорії пружності з врахуванням пондеромоторних сил. Дана система рівнянь є нелінійною за рахунок нелінійності співвідношень узагальненого закону Ома і виразів для пондеромоторних сил.

Здійснимо перехід від ейлерової системи координат  $\vec{x}$  до лагранжевої  $\vec{\xi}$  за допомогою залежностей [6,10]:

$$\begin{aligned} \rho &= \Gamma \rho^*; \quad \vec{E} = F^T \vec{e}; \quad \vec{H} = F^T \vec{h}; \\ \vec{D} &= \Gamma F^{-1} \vec{d}; \quad \vec{B} = \Gamma F^{-1} \vec{b}; \quad \Gamma \rho = P F^T; \\ \vec{P}_R &= P \vec{n}_R; \quad R_e = \Gamma \rho_e; \quad \vec{J} = \Gamma F^{-1} \vec{j}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Gamma = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|, \quad F = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

де

В цьому випадку, згідно результатам робіт [2,5,6], рівняння магнітопружності для анізотропних тіл в лагранжевих змінних, в області, яку займає тіло (внутрішня область), запишуться наступним чином [10]:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_{cm};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho (\vec{f} + \vec{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}, \quad (3)$$

де  $\vec{J}_{cm}$  – густина стороннього електричного струму,  $\vec{f}$  – об'ємна сила,  $\vec{f}^{\wedge}$  – об'ємна сила Лоренца,  $\vec{J}$  – густина електричного струму,  $\hat{\sigma}$  – тензор внутрішніх напружень.

Систему рівнянь магнітопружності необхідно замкнути співвідношеннями, які пов'язують вектори напруженості та індукції електромагнітного поля, а також законом Ома, що визначає густину струму провідності в рухомому середовищі. Якщо анізотропне тіло лінійно відносно магнітних і електричних властивостей, то визначаючи рівняння для електромагнітних характеристик поля і кінематичні рівняння для електропровідності, а також вирази для сил Лоренца, з врахуванням стороннього струму  $\vec{J}_{cm}$  у змінних Лагранжа запишуться відповідно у вигляді [1,10]:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_{ij} \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}, \\ \vec{J} &= \Gamma F^{-1} \vec{J}_{cm} + \sigma_{ij} \Gamma F^T F^{-1} [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}], \\ \rho \vec{f}^{\wedge} &= \Gamma^{-1} F^{-1} [\vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Відмітимо, що в рівняннях Максвелла нехтуємо струмами зміщення, вектором електричної індукції і об'ємної густини електричних зарядів (квазістатичне поле);  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – відповідно тензори електричної провідності, діелектричної та магнітної проникливості лінійно анізотропного струмонесучого тіла ( $i, j=1, 2, 3$ ). Для однорідних анізотропних середовищ вони є симетричними тензорами другого рангу [3,8].

Система рівнянь (2), (3), яка визначає рух пружного струмонесучого тіла в електромагнітному полі, повинна бути доповнена початковими умовами, граничними умовами і умовами на нескінченності. Обмежуючись розглядом випадків, коли електропровідне тіло контактує з зовнішнім неполяризованим неелектропровідним середовищем чи неполяризованим електропровідним тілом скінченного об'єму, за початкові умови приймаємо

$$\vec{u} = 0, \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \vec{B} = 0, \vec{B}^{(c)} = 0, \vec{H} = 0, \vec{H}^{(c)} = 0, \quad (5)$$

де  $\vec{u}$  – вектор переміщення; індекс (c) вказує на величини зовнішнього середовища.

Крайові умови на вектори електромагнітного поля на поверхні (S) контакту середовищ з різними властивостями матеріалу у разі, коли на поверхні тіла поверхневі заряди і струми дорівнюють нулю, для середовищ, що повільно рухаються, записуються у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} (\vec{E}^{(c)} - \vec{E}) \times \vec{n}_R &= 0, \quad (\vec{D}^{(c)} - \vec{D}) \cdot \vec{n}_R = 0, \\ (\vec{H}^{(c)} - \vec{H}) \times \vec{n}_R &= 0, \quad (\vec{B}^{(c)} - \vec{B}) \cdot \vec{n}_R = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $(\vec{a}^{(c)} - \vec{a})$  – стрибки векторів при переході через поверхню S – розподілу середовищ;  $\vec{n}_R$  – вектор нормалі до поверхні розриву. Відмітимо, що умови на нормальні складові електричного і магнітного полів виконуються тотожно, внаслідок рівнянь

$$\operatorname{div} \vec{D}^{(c)} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{div} \vec{B}^{(c)} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (7)$$

В тілі, що розглядається, під дією електромагнітного поля вздовж і поперек силових ліній з'являються відповідно розтягуючі та стискаючі зусилля, які визначаються електродинамічним тензором напруження Максвелла. Крайові умови для функцій, які характеризують як механічну частину задачі, так і електромагнітну, в разі завдання на поверхні тіла зовнішнього навантаження  $\vec{P}$ , записуються в ейлерових змінних наступним чином [10]:

$$(\sigma_{ki} + T_{ki}) n_i / S_1^* = P_i + n_i T_{ki}^{(c)} / S_1^*. \quad (8)$$

Тут  $n_i$  – компоненти вектора одиничної нормалі до деформованої границі тіла;  $P_i$  – складові поверхневих сил, віднесені до розмірів площадки в деформованому стані;  $T_{ki}$  і  $T_{ki}^{(c)}$  – тензори напружень Максвелла відповідно у тілі і вакуумі, які виражені через просторові характеристики тіла;  $S_1^*$  – частина границі тіла, на якій задані граничні умови в напруженні. Вирази для тензора напружень Максвелла  $T_{ki}$  в загальному вигляді запишуться [1]:

$$T_{ki} = b_k h_i + d_k e_i - \frac{1}{2} \delta_{ki} (h_p b_p + d_p e_p). \quad (9)$$

Так як нас цікавлять рівняння поля, що записані у лагранжевих змінних, граничні умови необхідно також записати в цих змінних. Враховуючи вираз (1), граничні умови (8) приймають вигляд

$$(\hat{\sigma}_R + \hat{\tau}_R) \cdot \vec{n}_R / S = \vec{P}_R + \hat{\tau}^{(c)} \cdot \vec{n}_R / S. \quad (10)$$

Тут  $\hat{\sigma}_R = \Gamma \hat{\sigma} \Gamma^{-1}$  – тензор напружень, віднесений до недеформованої поверхні,  $\vec{P}_R$  – вектор поверхневої сили, віднесений до одиничної поверхні тіла в недеформованому стані;

$$\hat{\tau}_R = F^{-1} \hat{\tau}, \quad \hat{\tau}_R^{(c)} = \Gamma F^{-1} \hat{\tau}^{(c)}. \quad (11)$$

– тензори напружень Максвелла відповідно у тілі і вакуумі. З наведених рівнянь видно, що задача електромагнітопружності для збуреного стану, не дивлячись на прийняті спрощення, все ще складна і нелінійна. Подальші спрощення задачі електромагнітопружності пов'язуємо з геометрією провідного тела, яке розглядається.

При побудові наближених рівнянь магнітопружності гнучких струмонесучих анізотропних оболонок, які знаходяться у змінному полі, згідно результатів робіт [1,10] використаємо наступну групу гіпотез:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1(\alpha, \beta, t); & E_2 &= E_2(\alpha, \beta, t); & E_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial t} B_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} B_2; \\ J_1 &= J_1(\alpha, \beta, t); & J_2 &= J_2(\alpha, \beta, t); & J_3 &= 0; \\ H_1 &= \frac{1}{2} (H_1^+ + H_1^-) + \frac{z}{h} (H_1^+ - H_1^-); \\ H_2 &= \frac{1}{2} (H_2^+ + H_2^-) + \frac{z}{h} (H_2^+ - H_2^-); & H_3 &= H_3(\alpha, \beta, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут  $u_i$  – компоненти просторового вектора переміщень;  $H_i^\pm$  – відомі компоненти вектору напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки. Ці припущення є деяким електродинамічним аналогом гіпотези недеформованих нормалей і разом з останньою складають гіпотези магнітопружності тонких тіл. Для розглядуваного випадку квадратичної нелінійності [4] деформації й кути повороту – величини малі, але другі значно перевищують перші. Врахування малих подовжень і нехтування зсувами в порівнянні з кутами повороту дозволяють не проводити різниці між розмірами об'ємного елемента до і після деформації. Сказане дозволяє прийняти, що

$$S_i^*/S_i \approx 1 \quad \text{і} \quad V^*/V \approx 1 \quad (i=1,2,3).$$

Тут  $S_i$  – елементарна площадка з нормаллями  $\vec{n}_i$  до деформації,  $S_i^*$  – та ж площадка після деформації;  $V$  і  $V^*$  – об'єми елементарного елемента до і після деформації. Такий підхід дозволяє врахувати нелінійність у співвідношеннях для деформацій, кривин і кручення. При цьому метрика оболонки залишається практично недеформованою, бо радіуси кривин і параметри Ламе відповідають недеформованому стану оболонки.

Будемо розглядати гнучкі оболонки змінної товщини, у яких координатна поверхня має форму, яка замкнена в коловому напрямку за поверхнею обертання. Припускаємо, що оболонка знаходиться під дією нестационарного механічного і електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями вважаємо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм від зовнішнього джерела. Пружні властивості матеріалу оболонки вважаються ортотропними, головні напрямки пружності якого співпадають з напрямками відповідних координатних ліній, електромагнітні ж властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності  $\sigma_{ij}$ , магнітної проникливості  $\mu_{ij}$  і діелектричної проникливості  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

При цьому, виходячи з кристалофізики [9] і згідно роботам [2,3,8], для розглядуваного класу провідних ортотропних середовищ з ромбічною кристалічною структурою вважаємо, що тензори  $\sigma_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  приймають діагональний вигляд.

Координатну поверхню в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат  $s$  і  $\theta$ , де  $s$  – довжина дуги твірної (меридіану), яка відраховується від деякої фіксованої точки,  $\theta$  – центральний кут у паралельному колі, який відраховується від обраної поверхні. Координатні лінії  $s = \text{const}$  і  $\theta = \text{const}$  є лініями головних кривин координатної поверхні. Обираючи координату  $\zeta$  за нормаллю до координатної поверхні обертання, відносимо оболонку до координатної просторової системи координат  $s, \theta, \zeta$ . Товщина оболонки  $h = h(s, \theta)$ . В декартовій системі координат  $x, y, z$  рівняння координатної поверхні має вигляд:

$$x = r(s) \cos \theta, \quad y = r(s) \sin \theta, \quad z = z(s); \quad (s_0 \leq s \leq s_N, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (13)$$

де  $r = r(s)$  – радіус паралельного кола;  $z = z(s)$  – відстань по осі обертання від початкової площини  $z = z_0$ . Вісь  $oz$  співпадає з віссю обертання координатної поверхні, а рівняння

$$x = r(s), \quad z = z(s) \quad (14)$$

є параметричними рівняннями твірної в площині  $xoz$ , яку в подальшому будемо називати меридіаном. Параметри Ламе в даному випадку приймають вигляд

$$A = 1, \quad B = r, \quad (15)$$

а радіуси головних кривин  $R_s$  і  $R_\theta$  дорівнюють відповідно радіусам кривин меридіану і довжині відрізка, який паралельний нормалі, і міститься між координатною поверхнею і віссю обертання. Якщо  $\varphi$  – кут між нормаллю до координатної поверхні і осі обертання, то

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi. \quad (16)$$

Перше рівняння Кодацці – Гаусса з врахуванням (16) можна записати наступним чином:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \varphi. \quad (17)$$



Припускаючи, що розглядуване ортотропне тіло лінійне відносно магнітних і електричних властивостей, з врахуванням діагонального вигляду тензорів  $\sigma_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  і згідно результатів робіт [2,5,10], а також, враховуючи описану геометрію оболонки, повна система рівнянь в криволінійній ортогональній системі координат, яка дозволяє математично описати нелінійну двовимірну модель магнітопружності ортотропних оболонок обертання, складається з:

рівнянь руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) + \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} Q_s + r(p_s + \rho F_s^n) &= r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s}(r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s}(\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r(p_\theta + \rho F_\theta^n) &= r\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r(p_\zeta + \rho F_\zeta^n) &= r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - \cos \varphi M_\theta - rQ_s - r\left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta\right) \vartheta_s - rS\vartheta_\theta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s}(r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - rQ_\theta - r\left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s\right) \vartheta_\theta - rS\vartheta_s &= 0, \\ \left(S = N_{\theta s} - \frac{1}{R_s} M_{s\theta} = N_{s\theta} - \frac{\sin \varphi}{r} M_{\theta s}, \quad H = M_{s\theta} = M_{\theta s}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial s} - \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right); \quad \sigma_1 \left[ E_s - \frac{\partial v}{\partial t} B_\zeta - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right] = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial H_\zeta}{\partial \theta} - \frac{r(H_\theta^+ - H_\theta^-)}{h} \right); \\ \sigma_2 \left[ E_\theta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] &= \left( -\frac{\partial H_\zeta}{\partial s} + \frac{(H_s^+ - H_s^-)}{h} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

виразів для деформацій

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \vartheta_s^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \vartheta_\theta^2; \\ \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v}{r} \right) + \vartheta_s \vartheta_\theta; \quad \chi_s = \frac{\partial \theta}{\partial s}; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s; \\ 2\chi_{s\theta} &= \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_\theta + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s}; \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v, \quad (21)$$

співвідношень пружності  $N_s = \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} (\varepsilon_s + \nu_\theta \varepsilon_\theta)$ ;  $N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_s)$ ;  $S = g_{s\theta} h \varepsilon_{s\theta}$ ;

$$M_s = \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} (\chi_s + \nu_\theta \chi_\theta); \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} (\chi_\theta + \nu_s \chi_s); \quad H = g_{s\theta} \frac{h^3}{12} 2\chi_{s\theta}. \quad (22)$$

Тут  $\nu_s = \nu_{\theta s}$ ;  $\nu_\theta = \nu_{s\theta}$ ;  $e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s$ .

Компоненти сили Лоренца мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho F_s^n &= -h J_{\theta cm} B_\zeta + \sigma_1 h \left[ E_\theta B_\zeta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\zeta \right] + \\ &+ \sigma_1 h \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) - \frac{1}{12} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_\zeta \right], \\ \rho F_\theta^n &= h J_{s cm} B_\zeta - \sigma_2 h \left\{ \frac{\mu_2}{\sigma_1 r} \left( \frac{\partial B_\zeta}{\partial \theta} - \frac{r(B_\theta^+ - B_\theta^-)}{h} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\zeta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right\} B_\zeta + \\ &+ \sigma_2 h 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_\zeta - \sigma_2 h \frac{\partial v}{\partial t} B_\zeta^2 - \sigma_2 h \frac{\partial v}{\partial t} \left( 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 - 0,5 (B_s^+ + B_s^-) B_\zeta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho F_{\zeta}^n = 0,5 h \left[ -J_{scm} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) + J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \\
+ 0,5 \sigma_3 h \left\{ \frac{\mu_2}{\sigma_1 r} \left( \frac{\partial B_{\zeta}}{\partial \theta} - \frac{r (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)}{h} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} B_{\zeta} + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) \right\} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - \\
- \sigma_3 h 0,5 E_{\theta} (B_s^+ + B_s^-) + \sigma_3 h 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\zeta} + \sigma_3 h 0,5 \frac{\partial v}{\partial t} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) B_{\zeta} - \\
- \sigma_3 h \frac{\partial w}{\partial t} \left[ 0,25 (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + 0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12} (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right].
\end{aligned} \quad (23)$$

Тут  $N_s, N_{\theta}$  – нормальні тангенціальні зусилля;  $S$  – зсувне зусилля;  $Q_s, Q_{\theta}$  – поперечні зусилля;  $M_s, M_{\theta}, H$  – відповідно згинаючі та скручуючий моменти;  $u, v, w$  – компоненти переміщень;  $E_s, E_{\theta}$  – складові напруженості електричного поля;  $B_{\zeta}$  – нормальна складова магнітної індукції;  $B_s^+, B_s^-$  – відомі складові магнітної індукції на поверхні оболонки.  $J_{scm}, J_{\theta cm}$  – складові густини електричного струму від зовнішнього джерела;  $\sigma_s$  – електрична провідність;  $h = h(s, \theta)$  – товщина оболонки;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Використовуючи наведені рівняння магнітопружності (18)-(23), побудуємо розв'язуючу систему рівнянь оболонок обертання для осесиметричного випадку. Припускаємо, що всі компоненти, які входять в рівняння, не залежать від координати  $\theta$ .

У випадку дослідження напружено-деформованого стану ортотропних оболонок обертання довільної форми, будемо виходити з наступних міркувань. По-перше, шукана система рівнянь повинна описувати увесь клас оболонок обертання, включаючи циліндричну оболонку і круглу пластину, по-друге, вона повинна бути, представлена у вигляді, зручному для чисельного розв'язання задачі, по-третє, повинна допускати формулювання граничних умов в зусиллях, моментах, переміщеннях і у змішаному вигляді. Накінце, система диференціальних рівнянь повинна бути записана відносно таких функцій, щоб можна було найпростішим чином здійснити умови спряження різних оболонок. Виходячи з цих міркувань, обираємо в якості розв'язуючих наступні функції:

$$u_x, u_z, \vartheta_s, N_x, N_z, M_s, E_{\theta}, B_{\zeta}, \quad (24)$$

де  $u_x, u_z$  – радіальне та осьове переміщення;  $N_x, N_z$  – радіальне та осьове зусилля;  $E_{\theta}, B_{\zeta}$  – напруженість електричного і індукція магнітного полів, які виражаються через переміщення  $u, w$  і зусилля  $N_s, Q_s$  наступним чином

$$N_x = N_s \cos \varphi + Q_s \sin \varphi; N_z = N_s \sin \varphi - Q_s \cos \varphi; \quad (25)$$

$$u_x = u \cos \varphi + w \sin \varphi; u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi.$$

Після деяких перетворень з врахуванням (24), (25) отримуємо наступну зв'язану систему нелінійних диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_{\theta}}{e_s h} (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \cos \varphi + \frac{\nu_{\theta} \cos \varphi}{r} u_x + \frac{1}{R_s} u_z - \sin \varphi \vartheta_s - \frac{\cos \varphi}{2} \vartheta_s^2; \\
\frac{\partial u_z}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_{\theta}}{e_s h} (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \sin \varphi + \frac{\nu_{\theta} \sin \varphi}{r} u_x - \frac{1}{R_s} u_z + \cos \varphi \vartheta_s - \frac{\sin \varphi}{2} \vartheta_s^2; \\
\frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{12(1 - \nu_s \nu_{\theta})}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_{\theta} \cos \varphi}{r} \vartheta_s; \\
\frac{\partial N_x}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} (\nu_{\theta} - 1) N_x + \left( \frac{1}{R_s} + \frac{\nu_{\theta} \sin \varphi}{r} \right) N_z + \frac{e_{\theta} h}{r^2} u_x - \cos \varphi (P_s + \rho f_s^{\wedge}) - \sin \varphi (P_{\zeta} + \rho f_{\zeta}^{\wedge}) + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial N_z}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} N_z - \frac{1}{R_s} N_x - \sin \varphi (P_s + \rho f_s^{\wedge}) + \cos \varphi (P_{\zeta} + \rho f_{\zeta}^{\wedge}) + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} (\nu_{\theta} - 1) M_s + \frac{e_{\theta} h^3 \cos^2 \varphi}{12 r^2} \vartheta_s + \cos \varphi N_x - \sin \varphi N_z + \\
&+ (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \vartheta_s - \frac{\nu_{\theta} \sin \varphi}{r} M_s \vartheta_s - \frac{e_{\theta} h^3 \cos \varphi \sin \varphi}{12 r} \vartheta_s^2; \\
\frac{\partial B_{\zeta}}{\partial s} &= -\sigma_2 \mu_3 \left[ E_{\theta} + 0,5 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) (B_s^+ + B_s^-) - \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_{\zeta} \right] + \frac{B_s^+ - B_s^-}{\mu_1 h}; \\
\frac{\partial E_{\theta}}{\partial s} &= -\frac{\partial B_{\zeta}}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_{\theta}.
\end{aligned} \quad (26)$$

Компоненти сили Лоренца в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho f_S^{\wedge} = & -h J_{\theta cm} B_{\zeta} + \sigma_1 h \left[ E_0 B_{\zeta} + 0,5 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) B_{\zeta} (B_S^+ + B_S^-) - \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_{\zeta}^2 \right]; \\ \rho f_{\zeta}^{\wedge} = & 0,5 h J_{\theta cm} (B_S^+ + B_S^-) + \sigma_3 h \left\{ -0,5 E_0 (B_S^+ + B_S^-) - \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[ 0,25 (B_S^+ + B_S^-)^2 + \frac{1}{12} (B_S^+ - B_S^-)^2 \right] + 0,5 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_{\zeta} (B_S^+ + B_S^-) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Тут під  $B_S^{\pm}$  – розуміємо  $B_S^{\pm} = B_{S0}^{\pm} + B_{S0} - B_{\zeta 0} \vartheta_S + B_{\zeta} \vartheta_S$ .

Де  $B_{S0}^{\pm}$  – компоненти магнітної індукції початкового власного магнітного поля, обумовлені стороннім електричним струмом;  $B_{S0}$  – компоненти зовнішнього магнітного поля, отримані з розв'язку задачі статки;  $B_{\zeta}$  – нормальна складова магнітної індукції оболонки,  $h = h(s)$  – товщина оболонки.

Таким чином, отримана зв'язана розв'язуюча система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку (26) описує напружено-деформований стан гнучких струмонесучих ортотропних оболонок обертання з довільною формою меридіану, яка має ортотропну електропровідність. Складові сили Лоренца враховують швидкість деформування оболонки, зовнішнє магнітне поле, величину і напруженість струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Врахування нелінійності в рівняннях руху викликає нелінійність в пондеромоторній силі. Додаючи до отриманої системи рівнянь початкові і граничні умови, отримаємо крайову задачу. У векторному вигляді нелінійна крайова задача має вигляд:

рівняння руху

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left( s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right), \quad \begin{pmatrix} s_0 \leq s \leq s_N, \\ t_0 \leq t \leq t_N \end{pmatrix}, \quad (28)$$

граничні умови

$$\vec{g}_1(\vec{N}(s_0, t)) = \vec{b}_1^*, \quad \vec{g}_2(\vec{N}(s_N, t)) = \vec{b}_2^*, \quad (29)$$

початкові умови

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (30)$$

Тут:  $\vec{N} = \{u, w, \theta_S, N_S, Q_S, M_S, E_0, B_{\zeta}\}^T$  – вектор стовпчик шуканих функцій;  $\vec{F}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{b}_1^*, \vec{b}_2^*$  – у загальному випадку нелінійні вектор функції. В подальшому, крайова задача (28), (29) з початковими умовами (30), розв'язується чисельно у відповідності з методикою, яка викладена в роботах [7,10]. Розв'язок крайових задач магнітопружності пов'язаний з суттєвими обчислювальними труднощами. Це пояснюється тим, що розв'язуюча система рівнянь (26) є системою диференціальних рівнянь гіперболо-параболічного типу восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Запропонований підхід до чисельного розв'язання крайової задачі базується на послідовному застосуванні схеми Ньюма-рка, методу квазілінеаризації і методу дискретної ортогоналізації.

На закінчення відмітимо наступне. Діелектричні і магнітні властивості твердого тіла змінюються не тільки при зміні густини, але і при деформаціях (зсувах), коли густина залишається сталою. В результаті деформації діелектричні і магнітні властивості тіла стають анізотропними, а скалярні діелектрична і магнітна проникливості замінюються тензорами другого рангу. На основі отриманих рівнянь, з використанням запропонованої методики, маємо можливість, враховувати, як анізотропію матеріалу, так і анізотропію внутрішнього електромагнітного поля оболонки, а також вплив деформацій на електромагнітні властивості тіла. Такі задачі електромагнітопружності досить актуальні з точки зору додатків.

## 2. Висновки.

У випадку тонких анізотропних чи ізотропних тіл з анізотропною електропровідністю можна ставити і розв'язувати оптимальні задачі магнітопружності шляхом варіації усіх фізико-механічних параметрів матеріалу тіла. Зокрема, при сталих механічних і геометричних параметрах задачі, за допомогою зміни анізотропних електродинамічних параметрів можна отримати конструктивні елементи з якісно новою механічною поведінкою.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М., 1977. 2. Багдасарян Г.Е., Данонян З.Н. Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля // Механика: Межвуз., сб., науч., тр., Мех., дефор., тверд., тела. – 1984. – Вып. 3. – С. 32-42. 3. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М., 1971. 4. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок. – К., 1993. 5. Kaliski S. Wave equations of thermoelectromagnetoelasticity. // Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci., – 1965, – 6, № 3, – Р. 231-265. 6. Махорт Ф.Г. О теории распространения магнито-упругих волн в проводящих телах с начальными напряжениями. // Прикл. Механика. – 1985, XXI, – № 6, – С. 3-11. 7. Мольченко Л.В., Лоос И.И., Индиаминев Р.Ш. Нелинейное деформирование конической оболочки, находящейся в магнитном поле. // Прикл. механика, – 1997, 33, – № 3, – С.58-64. 8. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М., 1967. 9. Сиротин Ю.И., Шашкольская М.П. Основы кристаллофизики. – М., 1979. 10. Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. – К., 1994.

# АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В даній статті розглядається асимптотична еквівалентність систем диференціальних рівнянь, визначених на  $m$ -вимірному торі.

In this article the asymptotic equivalence of systems of differential equations on the  $m$ -dimensional tore are under the consideration.

## 1. Вступ.

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, які є лінійним розширенням динамічної системи на  $m$  – вимірному торі, а саме відшукуванню системи диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків розглядуваної системи. В роботі [4] був отриманий аналог відміченого результату для розв'язків систем диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \text{ де } A - \text{ стала } (n \times n)\text{-матриця, розв'язки якої обмежені на } [0, \infty) \text{ і } \frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \text{ де}$$

$$B(t) \in C[0, \infty) \text{ і } \int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \text{ який отримав назву теореми Левінсона.}$$

## 2. Основні результати.

Розглянемо два лінійні розширення динамічних систем на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = B(\varphi)y. \tag{2}$$

Тут  $\varphi \in T^m$ ,  $x, y \in R^n$ ,  $a(\varphi) - m$ -мірна векторнозначна,  $A(\varphi)$  і  $B(\varphi) - (n \times n)$ -мірні матричні функції,  $2\pi$ -періодичні по  $\varphi_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, m$ .

Кажуть [1], що системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні, якщо між їх розв'язками  $x(t, \varphi)$  і  $y(t, \varphi)$  можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, \varphi) - y(t, \varphi)) = 0$ ,  $\varphi \in T^m$ .

Наведемо прості ознаки асимптотичної еквівалентності лінійних розширень динамічних систем на торі. Припустимо, що в системі (1) матриця  $A(\varphi)$  така, що існує границя  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$  рівномірно по  $\varphi \in T^m$ .

**Теорема 1.** Нехай розв'язки системи рівнянь

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

обмежені при  $t \geq 0$ . Якщо матриці  $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$  і  $B(\varphi)$  абсолютно інтегровані на  $[0, \infty)$  вздовж кожної з траєк-

торій системи  $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ ,  $\varphi \in T^m$ , то лінійні розширення

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = (A(\varphi) + B(\varphi))y \tag{5}$$

асимптотично еквівалентні.

Для доведення сформульованого твердження використаємо ідею Брауера доведення теореми Левінсона [1, с.159], [3].

Без обмеження можна вважати, що  $A = \text{diag}(A_0, A_-)$ , де матриця  $A_0$  має власні числа з нульовою дійсною частиною, а дійсні частини всіх власних чисел матриці  $A_-$  – від'ємні.

Позначимо через  $X(t) = \text{diag}(e^{A_0 t}, e^{A_- t})$  матрицант системи рівнянь (3) і покладемо  $X(t) = X_0(t) + X_-(t)$ , де  $X_0(t) = \text{diag}(e^{A_0 t}, 0)$ ,  $X_-(t) = \text{diag}(0, e^{A_- t})$ .

Тоді матрицю Коші  $K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = X(t - \tau)$  можна подати у вигляді  $K(t - \tau) = X_0(t - \tau) + X_-(t - \tau)$ ,

причому існують такі додатні числа  $\alpha, K_0$  і  $K_-$ , що

$$\|X_0(t)\| = \|e^{A_0 t}\| \leq K_0, \quad t \in R, \tag{6}$$

$$\|X_-(t)\| = \|e^{A_- t}\| \leq K_- e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Переконаємося тепер, що при виконанні умов теореми системи рівнянь (3) і (4) асимптотично еквівалентні. Для цього при кожному фіксованому  $\varphi \in T^m$  (4) запишемо у вигляді

$$\dot{x} = Ax + P(\varphi_t(\varphi))x \tag{8}$$

де  $P(\varphi) = A(\varphi) - A$ , а систему (5) у вигляді

$$\dot{y} = Ay + [P(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi))]y. \quad (9)$$

Для кожного розв'язку  $x(t, \varphi)$ ,  $x(t_0, \varphi) = x_0$  справедливе інтегральне представлення

$$x(t, \varphi) = X(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X_0(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau + \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau. \quad (10)$$

В силу абсолютної інтегрованості на  $[0, \infty)$  матриці  $P(\varphi_t(\varphi))$  для кожного  $\varphi \in T^m$  робимо висновок, що кожний розв'язок  $x(t, \varphi)$  є обмеженим на  $[0, \infty)$ , а, отже, невластний інтеграл  $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau$  збігається, що дає можливість інтегральне представлення (10) подати у вигляді

$$x(t, \varphi) = X(t - t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau] + \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau \quad (11)$$

Аналогічні міркування дають можливість кожен розв'язок  $y(t, \varphi)$ ,  $y(t_0, \varphi) = y_0$  рівняння (9) подати у подібному до (11) вигляді

$$\begin{aligned} y(t, \varphi) = & X(t - t_0)[y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau] + \\ & + \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

бо в силу абсолютної інтегрованості на  $[0, \infty)$  матриці  $B(\varphi_t(\varphi))$  невластний інтеграл  $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t - \tau)B(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$  збігається.

Між множиною розв'язків  $x(t, \varphi)$ ,  $x(t_0, \varphi) = x_0$  системи (8) і множиною розв'язків  $y(t, \varphi)$ ,  $y(t_0, \varphi) = y_0$  системи (9) встановимо відповідність формулою

$$x_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau = y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau. \quad (13)$$

Переконаємося, що ця відповідність задає ізоморфізм лінійних просторів розв'язків систем рівнянь (8) і (9). Кожен з розв'язків  $x(t, \varphi)$ ,  $x(t_0, \varphi) = x_0$  і  $y(t, \varphi)$ ,  $y(t_0, \varphi) = y_0$  можна подати у вигляді  $x(t, \varphi) = Q_{t_0}^t(\varphi)x_0$  і  $y(t, \varphi) = R_{t_0}^t(\varphi)y_0$

де  $Q_{t_0}^t(\varphi)$  і  $R_{t_0}^t(\varphi)$  – матрицанти відповідно систем рівнянь (8) і (9), а тому рівність (13) можна записати так:

$$(E + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))Q_{t_0}^\tau(\varphi)d\tau)x_0 = (E + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0 - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]R_{t_0}^\tau(\varphi)d\tau)y_0. \quad (14)$$

В силу умов теореми легко перекопати, що матрицанти  $Q_{t_0}^t(\varphi)$  і  $R_{t_0}^t(\varphi)$  рівномірно щодо  $\varphi \in T^m$  і  $t_0 \geq 0$  обмежені на  $[t_0, \infty)$ .

Так як  $\int_{t_0}^{\infty} \|X_0(t_0 - \tau)\| \cdot \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot \|Q_{t_0}^\tau(\varphi)\|d\tau \rightarrow 0$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} \|X_0(t_0 - \tau)\| \cdot (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) \cdot \|R_{t_0}^\tau(\varphi)\|d\tau \rightarrow 0$ , коли  $t_0 \rightarrow \infty$ , в силу абсолютної інтегрованості матриць  $P(\varphi_t(\varphi))$  і  $B(\varphi_t(\varphi))$ , то робимо висновок, що рівність (14), а отже і (13) задає ізоморфізм між множинами розв'язків систем (8) і (9).

Оцінімо різницю розв'язків  $x(t, \varphi)$  і  $y(t, \varphi)$  з початковими умовами, що задовольняють рівності (13). Скориставшись інтегральними представленнями (11) і (12) з урахуванням (13), маємо

$$\begin{aligned} y(t, \varphi) - x(t, \varphi) = & \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)B(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)B(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau, \varphi)d\tau \\ \text{або ж} \quad y(t, \varphi) - x(t, \varphi) = & \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))][y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))] \cdot \\ & \cdot [y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau + \int_{t_0}^t X_-(t - \tau)B(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t - \tau)B(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Так як кожен з розв'язків  $x(t, \varphi)$  і  $y(t, \varphi)$  обмежений на проміжку  $[0, \infty)$ , то покладаючи

$\sup_{t \geq t_0} \|y(t, \varphi) - x(t, \varphi)\| = m, \quad \sup_{t \geq t_0} \|Q_{t_0}^t \varphi\| = q, \quad \text{з (15) дістаємо}$

$$\begin{aligned} \|y(t, \varphi) - x(t, \varphi)\| &\leq \int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) m d\tau + \int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau + \\ &+ \int_t^\infty K_0 (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) m d\tau + \int_t^\infty K_0 \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Останні два доданки правої частини цієї нерівності прямують до нуля, коли  $t \rightarrow \infty$  в силу абсолютної інтегрованості матричних функцій  $P(\varphi_t(\varphi))$  і  $B(\varphi_t(\varphi))$ . Переконаємося, що перші два доданки правої частини нерівності (16) мають таку ж властивість. Справді, для  $t \geq 2t_0$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau &= \int_{t_0}^{t/2} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau + \int_{t/2}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau \leq \\ &\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^\infty K_- \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau \cdot q \|x_0\| + \int_{t/2}^t K_- \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau \cdot q \|x_0\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коли  $t \rightarrow \infty$ . Аналогічно  $\int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m \leq$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^\infty K_- (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m + \int_{t/2}^t K_- (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m \rightarrow 0, \quad \text{коли } t \rightarrow \infty.$$

Отже, з нерівності (16) робимо висновок, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, \varphi) - y(t, \varphi)) = 0$ , тобто системи рівнянь (8) і (9), або ж, що те саме, системи (4) і (5), асимптотично еквівалентні.

Сформулюємо ще частинний випадок доведеної теореми. Спочатку зауважимо, що за умови абсолютної інтегрованості на  $[0, \infty)$  матриці  $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$  вздовж кожної з траєкторій системи  $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ ,  $\varphi \in T^m$  існує границя

$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$ . Тому в теоремі замість абсолютної інтегрованості матриці  $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$  досить вимагати абсо-

лютну інтегрованість матриці  $P(\varphi_t(\varphi))$ . Безпосередньо переконуємося в справедливості такого твердження

**Теорема 2.** Нехай в системі рівнянь (4) матриця  $A(\varphi)$  така, що існує стала границя  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$

для всіх  $\varphi \in T^m$  і матриця  $A(\varphi_t(\varphi)) - A$  абсолютно інтегрована на  $[0, \infty)$  для кожного  $\varphi \in T^m$ . Якщо розв'язки системи рівнянь (3) обмежені при  $t \geq 0$ , то система рівнянь (4) асимптотично еквівалентна системі (3).

З доведення теореми 1 випливає, що взаємно однозначна відповідність між розв'язками  $x(t, x_0)$ ,  $x(t_0, x_0) = x_0$  системи (3) і  $y(t, \varphi)$ ,  $y(t_0, \varphi) = y_0$  системи (4) при фіксованому  $\varphi \in T^m$ , що має місце гранична рівність

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, x_0) - y(t, \varphi)) = 0 \quad \text{встановлюється рівністю } x_0 = y_0 + \int_{t_0}^\infty X_0(t_0 - \tau) P(\varphi_\tau(\varphi)) Q_{t_0}^\tau(\varphi) d\tau \cdot y_0.$$

Нехай  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$  і розв'язки системи рівнянь  $\dot{x} = Ax$  обмежені на проміжку  $[0, \infty)$ .

Якщо матриця  $A(\varphi_t(\varphi)) - A$  абсолютно інтегровна на  $[0, \infty)$  вздовж будь-якого розв'язку  $\varphi_t(\varphi)$  системи на торі  $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ , то система  $\dot{y} = A(\varphi_t(\varphi))y$  асимптотично еквівалентна системі  $\dot{x} = Ax$ .

Асимптотичну еквівалентність системи здійснює відповідність:  $x_0 = y_0 + \int_{t_0}^\infty X_0(t_0 - \tau) (A(\varphi_\tau(\varphi)) - A) y(\tau, \varphi) d\tau$ .

### 3. Висновки.

В даній роботі отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності систем диференціальних рівнянь, які є лінійним розширенням динамічної системи на торі.

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1969. 2. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М., 1987. 3. Brauer. Nonlinear differential equations with forcing terms, Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – 15, №5. – P. 758 – 765. 4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. Duke Math. Journ. – 1948. – 15. – P. 111 – 126.

УДК 517.9

Ю. Вакал, студ., І. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук  
Vakal@ipnet.ua, pio@univ.kiev.ua**ОЦІНКА ХАУСДОРФОВОЇ РОЗМІРНОСТІ МНОЖИНИ КОЛМОГОРОВСЬКИХ ТОРІВ,  
ЧАСТОТИ ЯКИХ ПОГАНО АПРОКСИМУЮТЬСЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ**

*Для гамільтонової системи з двома ступенями волі, близької до цілком інтегрованої, оцінено розмірність Хаусдорфа множини колмогоровських торів, для яких відношення частот квазіперіодичних рухів погано апроксимуються раціональними числами. Показано, що зазначена розмірність відрізняється від розмірності фазового простору на величину, пропорційну кореню шостого степеня з амплітуди збурення.*

*For Hamiltonian system with two degrees of freedom which is close to a completely integrable one, the Hausdorff dimension of a set of Kolmogorov tori for which the ratio of frequencies of quasiperiodic motions is badly approximable by rational numbers is estimated. It is shown that the above dimension differs from that of the phase space by the value proportional to the root of sixth degree of perturbation amplitude.*

**1. Вступ.**

В останні десятиліття значну увагу дослідників, які працюють в галузі нелінійної динаміки, привертають задачі, пов'язані з вивченням механізмів переходу від регулярної до хаотичної поведінки нелінійних систем. Виявилось, що такий перехід, як правило, супроводжується виникненням у фазовому просторі структур фрактального типу [2; 3; 4; 6; 9; 20].

Однією з визначальних характеристик фрактальної множини є розмірність Хаусдорфа (Хаусдорфа-Безіковича), яка набуває дробових значень і не збігається з топологічною розмірністю [5; 7; 19].

Класичними прикладами фракталів є самоподібні множини канторового типу: трихотомічна множина Кантора, килим та губка Серпінського тощо. Досконалі ніде не щільні множини канторового типу природно з'являються у теорії Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ), а також в інших задачах математичної фізики, в яких виникає відома проблема малих знаменників [1]. Так, частоти  $\omega$  квазіперіодичних рухів колмогоровської множини інваріантних торів (ця множина складається з інваріантних торів збуреної гамільтонової системи, близької до невинродженої цілком інтегрованої гамільтонової системи) належать (несамоподібній) канторівій множині вигляду

$$\Omega_{\alpha}^{\tau} = \{\omega \in \Omega : |\langle k, \omega \rangle| \geq \alpha |k|^{-\tau} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}\},$$

де  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  – область зміни частот незбуреної системи,  $n$  – кількість ступенів волі,  $\tau$  і  $\alpha$  – додатні числа,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярний добуток в  $\mathbf{R}^n$ ,  $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$ . Зауважимо, що  $\alpha$  при фіксованому  $\tau$  може бути величиною порядку  $\sqrt{\varepsilon}$ , де  $\varepsilon$  – амплітуда збурення ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) [1; 21].

Тривалий час у КАМ-теорії основна увага приділялася метричним характеристикам колмогоровської множини. Оскільки при фіксованому  $\tau > n - 1$  міра Лебега доповнення до множини  $\Omega_{\alpha}^{\tau}$  не перевищує величини порядку  $\alpha$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  відносна міра колмогоровської множини прямує до 1. Водночас для  $\tau < n - 1$  множина  $\Omega^{\tau} = \bigcup_{\alpha > 0} \Omega_{\alpha}^{\tau}$  узагалі є порожньою.

Відзначимо, яким би не було малим, але фіксованим  $\varepsilon > 0$ , КАМ-теорія не гарантує, що існуютьтори з частотами  $\omega \in \Omega_{\alpha}^{\tau+1} \setminus \Omega_{\alpha}^{\tau}$  при як завгодно великому  $\tau > n - 1$ . Це пояснюється тим, що збурення спричиняє руйнування не лише строго резонансних торів, для яких частоти задовольняють точні рівності  $\langle k, \omega \rangle = 0$  з деякими  $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ , але й торів, частоти яких досить добре апроксимуються раціональними числами. Теорія руйнування інваріантних торів та перехід до хаотичної динаміки зараз знаходяться в стадії активного розвитку. Теоретичні та експериментальні дослідження дають підстави для таких висновків: із зростанням величини збурення спочатку руйнуються ті тори, які краще апроксимуються раціональними числами; при цьому у фазовому просторі з'являються щілини, вільні від інваріантних торів; у щілинах між збуреними торами виникають хаотичні рухи, а якщо число ступенів волі перевищує 2, то в щілинах може виникнути явище так званої дифузії Арнольда; під дією збурень, які наростають, деформовані тори можуть поступово втрачати гладкість, перетворюючись урешті-решт на канторо-тори; останніми мають руйнуватися тори, частоти яких найгірше апроксимуються раціональними числами, тобто тори з частотами, які належать  $\Omega_{\alpha}^{n-1}$  з максимально можливим  $\alpha$ ; зокрема, у випадку двох ступенів волі останніми руйнуються тори з відношенням частот, рівним золотому перерізу  $(\sqrt{5} - 1)/2$  [1; 13; 16; 17; 18].

Викладене вище підтверджує важливість вивчення властивостей таких двох множин: 1) так званої виключної множини  $E^{\tau}$ , утвореної частотами  $\omega$ , кожна з яких має властивість: яке б не було  $\alpha > 0$  знайдеться  $k \in \mathbf{Z}^n$  таке, що  $|\langle k, \omega \rangle| < \alpha |k|^{-\tau}$ ; 2) множини  $\Omega^{n-1}$ . Властивості зазначених множин та їхніх узагальнень вже давно вивчаються в теорії діофантових наближень. Зокрема, ще у 1929 В. Ярніком [14] та в 1934 році незалежно А.С. Безіковичем [10] було показано, що хаусдорфова розмірність множини

$$W^{\tau} = \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : |\lambda - p/q| < q^{-\tau} \text{ для нескінченної множини } (p/q) \in \mathbf{Q} \right\}$$

дорівнює  $2/\tau$ , якщо  $\tau \geq 2$ , і  $W^{\tau} = \mathbf{R}$ , якщо  $\tau \leq 2$ . В. Ярніком [15] було також виявлено, що множина

$$B = \bigcup_{\alpha > 0} \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : |\lambda - p/q| \geq \alpha q^{-2} \quad \forall (p/q) \in \mathbf{Q} \right\},$$

(множина дійсних чисел, які погано апроксимуються раціональними числами) має нульову лебегову міру, але її хаусдорфова розмірність дорівнює 1. Про багатовимірні аналоги тверджень такого типу, зокрема для множини  $\Omega^{n-1}$ , та про їхній зв'язок з КАМ-теорією йдеться в [11; 12].

Як уже зазначалося вище, природно було б висловити припущення, що тори з частотами, які погано апроксимуються раціональними числами, є найбільш стійкими щодо збурень. Виникає питання: якою є хаусдорфова розмірність множини таких торів? Наскільки відрізняється вона від розмірності фазового простору?

## 2. Постановка задачі.

Відповідь на поставлене питання не впливає безпосередньо з результатів, про які йшлося вище: адже КАМ-теорія гарантує існування збурених торів не з будь-якими частотами  $\omega \in \Omega^{n-1}$ , а лише з тими, які належать  $\Omega_\alpha^{n-1}$  при  $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$ , де  $C$  – деяка додатна стала. Отже, перш за все потрібно оцінити в залежності від  $\varepsilon$  хаусдорфову розмірність множини  $\Omega_\alpha^{n-1}$ , де  $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$ .

Надалі обмежимося аналізом випадку  $n = 2$ .

Розглянемо гамільтоніан вигляду  $H(p, q, \varepsilon) = h(p) + f_\varepsilon(p, q)$ ,  $f_\varepsilon(p, q) = \varepsilon f_1(p, q, \varepsilon)$  для малих значень параметра збурення  $\varepsilon$ , де  $p = (p_1, p_2)$  – змінні дії, які пробігають область  $D \subset \mathbf{R}^2$ , а  $q = (q_1, q_2) \bmod 2\pi$  – спряжені кутові змінні на торі  $\mathbf{T}^2$ , так що  $f_\varepsilon$  має період  $2\pi$  по кожній компоненті  $q_1, q_2$ . Крім того, припускається, що  $H$  є дійсно аналітичним за всіма аргументами на  $\bar{D} \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , де  $\varepsilon_0$  деяке додатне число.

Припускатимемо, що інтегровний гамільтоніан  $h$  не вироджений у тому сенсі, що частотне відображення  $h'_p$  є дифеоморфізмом  $D \rightarrow \Omega$ . Тоді для кожного  $\tau \geq 1$  існує стала  $\delta > 0$  така, що для  $0 < \varepsilon < \delta \alpha^2$  всі тори незбуреної системи з частотами  $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_\alpha^\tau$  виживають, є лагранжевими і лише трохи деформуються. Крім того, вони ліпшицево неперервно залежать від  $\omega$  і, якщо  $\tau > 1$ , заповнюють множину, міра якої відрізняється від міри  $D \times \mathbf{T}^n$  на величину  $O(\alpha)$  [1]. Зрозуміло, що серед торів, які виживають є й усі ті, для яких відношення частот  $\lambda = \omega_2 / \omega_1$  належить визначеній вище множині  $B$ . Міра Лебега множини таких торів дорівнює нулю. Задача полягає в оцінці розмірності Хаусдорфа цієї множини торів.

## 3. Основний результат.

Основний результат даної статті складає така теорема.

**Теорема.** При зроблених вище припущеннях щодо функції  $H = h + f_\varepsilon$  існує така стала  $C_0 > 0$ , що множина інваріантних торів системи з гамільтоніаном  $H$ , які несуть на собі квазіперіодичні рухи з частотами  $\omega_1, \omega_2$  і відношення яких  $\omega_2 / \omega_1$  належить множині  $B$ , має розмірність Хаусдорфа не меншу, ніж  $4 - C_0 \sqrt[6]{\varepsilon}$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Доведення.** Позначимо через  $\Omega - \delta$  множину, яка складається з точок, які входять до  $\Omega$  разом зі своїми  $\delta$ -околами. Як відомо [21], існують числа  $\varepsilon_* > 0$  і  $C > 0$ , і при кожному  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$  існує дифеоморфізм  $\Psi : \Omega \times \mathbf{T}^2 \mapsto D \times \mathbf{T}^2$ , який відображає множину  $\hat{\Omega}(\varepsilon) \times \mathbf{T}^2$ , де  $\hat{\Omega}(\varepsilon) := \left\{ \omega \in \Omega - C\sqrt{\varepsilon} : \left| \langle k, \omega \rangle \right| \geq C\sqrt{\varepsilon} |k|^{-1} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\} \right\}$ , в колмогоровську множину, причому образом тора  $\{(\omega_1, \omega_2) \in \hat{\Omega}(\varepsilon)\} \times \mathbf{T}^2$  є інваріантний тор збуреної системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з частотами  $\omega_1, \omega_2$ . Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що область  $\Omega$  міститься в першому квадранті координатної площини. Відображення, яке точці  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$  зіставляє точку  $(\omega_1, \omega_2 / \omega_1) \in B$  є дифеоморфізмом. Цей дифеоморфізм переводить  $\hat{\Omega}(\varepsilon)$  в множину, яка при відповідному виборі додатних чисел  $a, b, c, d$  містить у собі прямий добуток

$$\{\omega_1 \in (a, b)\} \times \hat{B}(\varepsilon), \text{ де } \hat{B}(\varepsilon) := \left\{ \lambda \in (c, d) : \left| \lambda - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{aq^2} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \right\} \subset B.$$

Таким чином, колмогоровська множина містить підмножину торів, для яких відношення частот належить множині  $\hat{B}(\varepsilon)$ . Оскільки ліпеоморфізм і, зокрема, дифеоморфізм, зберігає хаусдорфову розмірність (її ми будемо позначати через  $\dim_H$ ), а хаусдорфова розмірність прямого добутку множин не менша ніж сума хаусдорфових розмірностей співмножників, то для доведення теореми досить показати, що  $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) > 1 - C_0 \sqrt[6]{\varepsilon}$ .

Для кожного  $N > 0$  позначимо через  $B_N$  множину тих чисел  $\lambda \in (c, d)$ , які мають властивість: якщо  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  – зображення числа  $\lambda$  у вигляді ланцюгового дробу, то  $a_j \leq N$  для всіх  $j = 1, 2, \dots$ . Як встановив В. Ярнік [15], для кожного  $N \geq 8$  виконується нерівність



$$1 - \frac{4}{N \log 2} \leq \dim_H B_N \leq 1 - \frac{1}{8N \log N}. \quad (1)$$

З іншого боку, в [8, с. 51] показано, що для кожного  $\lambda \in B_N$  справджується нерівність

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(N+2)(N+1)^2 q^2} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Звідси випливає, що множина  $\hat{B}(\varepsilon)$  містить множину  $B_{N(\varepsilon)}$ , де  $N(\varepsilon)$  – корінь рівняння  $(N+2)(N+1)^2 = a/(C_1 \sqrt{\varepsilon})$ . Але тоді існує стала  $C_1 > 0$  така, що при всіх досить малих  $\varepsilon > 0$  виконується нерівність  $N(\varepsilon) \geq 1/(C_1 \sqrt[6]{\varepsilon})$ . З урахуванням оцінки (1) маємо  $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) \geq \dim_H B_{N(\varepsilon)} > 1 - 4C_1 \sqrt[6]{\varepsilon} / \log 2$ .

Теорему доведено.

### Висновки.

Проблеми обчислення розмірності множин фрактального типу мають безпосереднє відношення до задач нелінійної динаміки, зокрема до КАМ-теорії і проблеми "малих знаменників". Методи, розроблені для обчислення хаусдорфових розмірностей фрактальних множин, які є об'єктом вивчення теорії діофантових наближень, виявилися придатними і для одержання нових результатів у теорії Колмогорова–Арнольда–Мозера.

У роботі було розглянуто гамільтонову систему з двома ступенями волі, близьку до цілком інтегрованої. Узагальненню отриманого результату на випадок більшого числа ступенів волі буде присвячено окрему статтю.

У зв'язку із проведеним дослідженням виникає така задача: чи існує таке  $\varepsilon$ , при якому тори збуреної системи утворюють множину міри нуль, однак хаусдорфова розмірність цієї множини, близька до розмірності фазового простору?

Роботу виконано за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (договір № Ф25.212-2008).

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштadt А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. – М., 2002. 2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – М., 1988. 3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М., 2000. 4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М., 1984. 5. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск, 2002. 6. Мун Ф. Хаотические колебания. – М., 1990. 7. Турбин А.Ф., Працевитый А.Ф. Фрактальные множества, функции распределения. – К., 1992. 8. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – Москва, 1961. 9. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М., 1988. 10. Besicovitch A.S. Sets of fractional dimensions (IV): on rational approximation to real numbers// J. Lond. Math. Soc. – 1934. – Vol. 9. – P. 126–131. 11. Dodson M.M., Vickers J.A.G. Exceptional sets in Kolmogorov–Arnold–Moser theory// J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19. – P. 349–374. 12. Dodson M.M., Pöschel J., Rynne B.P., Vickers J.A.G. The Hausdorff dimension of small divisors for lower dimensional KAM-tori // Proc. R. Soc. Lond. – 1992. – Vol. 439. – P. 359–371. 13. Escande D.F., Doveil F. Renormalization method for computing the threshold of the large scale stochastic instability in two degree of freedom Hamiltonian systems// J.Stat. Phys. – 1981. – Vol. 26. – P. 257–284. 14. Jarnik V. Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass// Mat. Sbornik. – 1929. – Vol. 36. – P. 371–382. 15. Jarnik V. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen// Prace Mat.-Fiz. – 1929. – Vol. 9. – P. 91–106. 16. Kadanoff L.P. Scaling for a critical Kolmogorov–Arnold–Moser trajectory// Phys. Rev. Lett. – Vol. 47. – 1981. – P. 1641–1643. 17. Khanin K., Sinai Ya.G. Renormalization group methods in the theory of dynamical systems// Int. J. Mod. Phys. B. – 1988. – Vol. 2. – P. 147–165. 18. Koch H. A renormalization group fix point associated with the break up of golden invariant tori// Discrete Contin. Syst. – 2004. – Vol. 11. – P. 881–909. 19. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. – New York, 1982. 20. Ott E. Chaos in dynamical systems. – Cambridge, 1993. 21. Pöschel J. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Commun. Pure and Appl. Math. – 1982. – Vol. 35. P. 653–696.

Надійшла до редколегії 03.12.2007

УДК 517.946

А.П. Громик, викл., І.М. Конет, канд. фіз.-мат. наук

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗОБРАЖЕНИЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЕЙ

*Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових просторових областей.*

*The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas.*

### 1. Вступ.

Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [5,7,14,15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [12,8,9,10]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових та тришарових просторових областях побудовано в працях [2,3,4,11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових за декартовою координатою просторових областей.

### 2. Основна частина.

Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропній обмеженій  $(n+1)$ -шаровій просторовій області математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega_2 = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathcal{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}, l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [6, 17]

$$\left[ a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yz}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x, y, z); z \in \mathcal{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x, y), (\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(x, y) \quad (2)$$

та умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\left\{ \begin{aligned} [(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1) T_k - T_{k+1}] \Big|_{z=l_k} &= 0, \\ (\nu_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}) \Big|_{z=l_k} &= 0, k = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі  $\Omega_2$ , де  $a_{xy}, a_{yz}, a_{zj} \geq 0$  – коефіцієнти теплопровідності у напрямках координатних осей  $x, y, z$  ( $j = \overline{1, n+1}$ );  $\chi_j^2 \geq 0$  – коефіцієнти дисипації теплової енергії;  $f(x, y, z) = \{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_{n+1}(x, y, z)\}$  – інтенсивність теплових джерел;  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  – деякі дійсні сталі;  $g_0(x, y), g_l(x, y)$  – задані обмежені неперервні функції в області  $\Omega_2$ ;  $R_k$  – коефіцієнти термоопору;  $\nu_k, \nu_{k+1} \geq 0$  – коефіцієнти теплопровідності;  $T(x, y, z) = \{T_1(x, y, z), T_2(x, y, z), \dots, T_{n+1}(x, y, z)\}$  – шукана температура.

1.  $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$ . У цьому випадку вважаємо, що на межі області  $\Omega_2$  виконуються умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

щодо змінної  $x$  та умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (5)$$

щодо змінної  $y$ .

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної  $x$  [16, 13]:

$$F_x[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (6)$$

$$F_x^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \quad (7)$$

$$F_x\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2 F_x[g(x)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (8)$$

Інтегральний оператор  $F_x$  за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області  $\Omega'_3 = \{(y, z) : y \in (-\infty; +\infty); z \in K_n^+\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[ a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j - (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = -\tilde{f}_j(\sigma, y, z); z \in \mathcal{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (9)$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(\sigma, y), (\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(\sigma, y), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} [(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1}] \Big|_{z=l_k} &= 0, \\ (\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z}) \Big|_{z=l_k} &= 0, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

До задачі (9)-(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної  $y$  [16, 13]:

$$F_y[g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (13)$$

$$F_y^{-1}[\tilde{g}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s)e^{isy} ds \equiv g(y), \quad (14)$$

$$F_y\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -s^2 F_y[g(y)] \equiv -s^2 \tilde{g}(s), \quad (15)$$

Інтегральний оператор  $F_y$  за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)-(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $K_n^+$  розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[ a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_j(\sigma, s, z) = -\tilde{f}_j(\sigma, s, z); z \in \mathcal{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (16)$$

за крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(\sigma, s), \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(\sigma, s) \quad (17)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[ (R_k \frac{d}{dz} + 1) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left( v_k \frac{d\tilde{T}_k}{dz} - v_{k+1} \frac{d\tilde{T}_{k+1}}{dz} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (18)$$

До задачі (16)-(18) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[l_0, l]$  з  $n$  точками спряження [10]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^l g(z)V(z, \lambda_j)\sigma(z)dz \equiv g_j, \quad (19)$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^n g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv g(z), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i-z) \frac{d^2 g}{dz^2}\right] &\equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_0}^l \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z)V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz - \\ &- a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) (\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g) \Big|_{z=l_0} + a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) (\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g) \Big|_{z=l}. \end{aligned} \quad (21)$$

У рівностях (19)-(21) беруть участь величини і функції:

$$\begin{aligned} V(z, \lambda_j) &= \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_j) \Theta(z-l_{i-1}) \Theta(l_i-z); \|V(z, \lambda_j)\|^2 \equiv \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_j) \sigma(z) dz = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j) \sigma_i dz; \\ \sigma(z) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \Theta(z-l_{i-1}) \Theta(l_i-z); V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{i+1,j} [w_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_{mj}z) - w_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_{mj}z)], m = \overline{1, n}; \\ V_{n+1}(z, \lambda_j) &= w_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j}z) - w_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j}z), c_{1k} = 1, c_{2k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}, q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj}; \\ \sigma_k &= \prod_{j=k}^n \frac{v_j a_{n+1}}{v_{j+1} a_k^2}, \sigma_n = \frac{v_n a_{n+1}}{v_{n+1} a_n^2}, \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); \\ v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) &= R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k); v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); v_{12}^{k2}(q_{sj} l_k) = \cos(q_{sj} l_k); v_{22}^{k2}(q_{sj} l_k) = \sin(q_{sj} l_k); \\ v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) &= -\frac{v_k}{v_{k+1}} q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); \delta_{sm}^k(q_{kj} l_k, q_{k+1,j} l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1,j} l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1,j} l_k); \\ v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) &= \frac{v_k}{v_{k+1}} q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); w_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j} l_0); w_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j} l_0); \\ w_{sm}(\lambda_j) &= w_{s-1,2}(\lambda_j) \delta_{1m}^s(q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s) - w_{s-1,1}(\lambda_j) \delta_{2m}^s(q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s); \\ \lambda_j &- \text{утворюючі дискретний спектр корені трансцендентного рівняння} \\ \Delta_n(\lambda) &\equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}(\lambda) l) w_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}(\lambda) l) w_{n2}(\lambda) = 0; \end{aligned}$$

$\Theta(x)$  – одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} (a_1^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_1^2(\sigma, s)) \tilde{T}_1(\sigma, s, z) \\ (a_2^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_2^2(\sigma, s)) \tilde{T}_2(\sigma, s, z) \\ \dots \\ (a_{n+1}^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_{n+1}^2(\sigma, s)) \tilde{T}_{n+1}(\sigma, s, z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\sigma, s, z) \\ \tilde{f}_1(\sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1}(\sigma, s, z) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

де  $q_j^2(\sigma, s) = a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2$ ;  $a_j^2 \equiv a_{xj}^2$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ .

Інтегральний оператор  $F_{jn}$ , який діє за правилом (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[ \int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_j) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_j) \sigma_2 dz \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(z, \lambda_j) \sigma_n dz \int_{l_n}^l \dots V_{n+1}(z, \lambda_j) \sigma_{n+1} dz \right]. \quad (23)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до системи (22). Внаслідок тотожності (21), одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_j^2 + k_i^2 + q_i^2(\sigma, s)) \tilde{T}_{ij}(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij}(\sigma, s) - \frac{a_1^2 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s), \quad (24)$$

де  $\tilde{T}_{ij}(\sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$ ;  $\tilde{f}_{ij}(\sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{f}_i(\sigma, s, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$ ;  $i = \overline{1, n+1}$ .

Припустимо, не зменшуючи загальності, що  $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ , і покладемо всюди  $k_i^2 = q_1^2 - q_j^2$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ). Рівняння (24) набуває вигляду

$$(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2) \tilde{T}_j(\sigma, s) = \tilde{f}_j(\sigma, s) - \frac{a_1^2 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s), \quad (25)$$

де  $\tilde{T}_j(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ij}(\sigma, s)$ ,  $\tilde{f}_j(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij}(\sigma, s)$ .

Із рівняння (25) знаходимо функцію

$$\tilde{T}_j(\sigma, s) = \frac{\tilde{f}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)}. \quad (26)$$

Оскільки суперпозиція операторів  $F_{jn}$  та  $F_{jn}^{-1}$  є одиничним оператором, то оператор  $F_{jn}^{-1}$  зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (27) до матриці-елементу  $[\tilde{T}_j(\sigma, s)]$ , де функція  $\tilde{T}_j(\sigma, s)$  визначена формулою (26). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (16)-(18):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{f}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{T}_i(\sigma, s, z)$ , визначених формулами (28), обернені оператори  $F_y^{-1}$  та  $F_x^{-1}$ , одержуємо функції

$$T_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) g_l(\xi, \eta) d\xi d\eta; i = \overline{1, n+1}, \quad (29)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (29) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_j(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j) \cos(|x - \xi| \sigma) \cos(|y - \eta| s)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \quad (30)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \quad (31)$$

та компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l) \quad (32)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(5).

**Зауваження 1.** Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору  $R_k$  дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 2.** При  $R_k = 0 (k = \overline{1, n})$  безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 3.** У випадку  $a_{xy}^2 = a_{yx}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$  формули (29) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропній обмеженій  $(n+1)$  – шаровій просторовій області.

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $z = l_0, z = l$  крайової умови 1-го роду  $(\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1, g_0(x, y) = \alpha_{11}^0 g'_0(x, y); \alpha_{22}^{n+1} = 0, \beta_{22}^{n+1} = 1, g_l(x, y) = \alpha_{22}^{n+1} g'_l(x, y))$ , 2-го роду  $(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 1, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0)$  й 3-го роду  $(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h_1 > 0, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} \equiv h_2 > 0)$  та їх можливих комбінацій.

**Зауваження 5.** Аналіз розв'язку (29) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(x, y, z) (j = \overline{1, n+1}), g_0(x, y)$  та  $g_l(x, y)$  проводиться безпосередньо.

2.  $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; +\infty)$ . Уцьому випадку вважаємо, що на межі області  $\Omega_2$  виконуються умови (4) щодо змінної  $x$  та крайові умови

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h \right) T_j \Big|_{y=0} = g_j(x, z), \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (33)$$

щодо змінної  $y$ , де

$h \geq 0$  - коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = 0$ ;  $g_j(x, z) = h T_j^c(x, z), T_j^c(x, z)$  - температура середовища на поверхні  $y = 0$ .

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(4), (33) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної  $x$ . Інтегральний оператор  $F_x$  за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (33) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області  $\Omega'_3 = \{(y, z) : y \in (0; +\infty); z \in K_n^+\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{g}_j(\sigma, z), \frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (34)$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (34), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної  $y$  [13]:

$$F_{+y}[g(y)] = \int_0^{\infty} g(y) K_y(y, s) dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (35)$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)] = \int_0^{\infty} \tilde{g}(s) K_y(y, s) ds \equiv g(y), \quad (36)$$

$$K_{+y} \left[ \frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0, s) \left( -\frac{dg}{dy} + hg \right) \Big|_{y=0}, \quad (37)$$

де ядро перетворення

$$K(y, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s \cos sz + h \sin sz}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор  $F_{+y}$  за правилом (35) внаслідок тотожності (37) крайовій задачі (9), (10), (34), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $K_n^+$  розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[ a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_j(\sigma, s, z) = -\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s, z); z \in \mathcal{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (38)$$

за крайовими умовами (17) та умовами спряження (18), де

$$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s, z) = \tilde{f}_j(\sigma, s, z) + a_{yj}^2 K_y(0, s) \tilde{g}_j(\sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (38), (17), (18) збігається із задачею (16)-(18). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[l_0, l]$  з  $n$  точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (38), (17), (18) відповідно до формул (28) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) = & \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{T}_i(\sigma, s, z)$ , визначених формулами (39), обернені оператори  $F_{+y}^{-1}$  та  $F_x^{-1}$ , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(x, y, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) g_l(\xi, \eta) d\xi d\eta + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} W_{yik}(x, \xi, y, z, \zeta) g_k(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (40)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (40) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{l_k} \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j) \cos(|x - \xi| \sigma) K_y(y, s) K_e(\eta, s)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \quad (41)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \quad (42)$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l) \quad (43)$$

та компоненти ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, 0, z, \zeta) \quad (44)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (33).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр  $h$  дає можливість виділяти із формул (40) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні  $y = 0$  крайової умови 1-го роду ( $h \rightarrow \infty$ ) та 2-го роду ( $h = 0$ ); 3) аналіз розв'язку (40) в залежності від аналітичного виразу функцій

$f_j(x, y, z), g_j(x, z) (j = \overline{1, n+1}), g_0(x, y)$  та  $g_l(x, y)$  проводиться безпосередньо.

3.  $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; b)$ . У цьому випадку вважаємо, що на межі області  $\Omega_2$  виконуються умови (4) щодо змінної  $x$  та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)T_j\Big|_{y=0} = g_{1j}(x, z), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)T_j\Big|_{y=b} = g_{2j}(x, z); j = \overline{1, n+1} \quad (45)$$

щодо змінної  $y$ , де  $h_1 \geq 0$  - коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = 0$ ;  $g_{1j}(x, z) = h_1 T_j^{c1}(x, z)$ ,  $T_j^{c1}(x, z)$  - температура середовища на поверхні  $y = 0$ ;  $h_2 \geq 0$  - коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = b$ ;  $g_{2j}(x, z) = h_2 T_j^{c2}(x, z)$ ,  $T_j^{c2}(x, z)$  - температура середовища на поверхні  $y = b$ .

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 5].

До задачі (1)-(4), (45) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної  $x$ . Інтегральний оператор  $F_x$  за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (45) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області  $\Omega'_3 = \{(y, z) : y \in (0; b); z \in K_n^+\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0} = \tilde{g}_{1j}(\sigma, z), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=b} = \tilde{g}_{2j}(\sigma, z); j = \overline{1, n+1} \quad (46)$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (46), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[0; b]$  щодо змінної  $y$  [13]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y) V_k(y) dy \equiv g_k, \quad (47)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{V_k(y)}{\|V_k\|^2} \equiv g(y), \quad (48)$$

$$\Lambda_{yk} \left[ \frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + V_k(0) \left( -\frac{d}{dz} + h_1 \right) g \Big|_{y=0} + V_k(b) \left( \frac{d}{dy} + h_2 \right) g \Big|_{y=b}, \quad (49)$$

де ядро перетворення

$$V_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}, \|V_k\|^2 \equiv \int_0^b V_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$  – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор  $\Lambda_{yk}$  за правилом (47) внаслідок тотожності (49) крайовій задачі (9), (10), (46), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $K_n^+$  розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[ a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_{jk}(\sigma, z) = -\tilde{G}_{jk}(\sigma, z); z \in \mathcal{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (50)$$

за крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_{1k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{ok}(\sigma), \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1,k} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lk}(\sigma) \quad (51)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \left( R_p \frac{d}{dz} + 1 \right) \tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k} \right] \Big|_{z=l_p} &= 0, \\ \left( v_p \frac{d \tilde{T}_{pk}}{dz} - v_{p+1} \frac{d \tilde{T}_{p+1,k}}{dz} \right) \Big|_{z=l_p} &= 0, p = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (52)$$

де

$$\tilde{G}_{jk}(\sigma, z) = \tilde{f}_{jk}(\sigma, z) + a_{yj}^2 V_k(0) \tilde{g}_{1j}(\sigma, z) + a_{yj}^2 V_k(b) \tilde{g}_{2j}(\sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (50)-(52) збігається із задачею (16)-(18). Отже, відповідно до формул (28), єдиний обмежений розв'язок задачі (50)-(52) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ik}(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{G}_{kj}(\sigma)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{ik}(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{T}_{ik}(\sigma, z)$ , визначених формулами (53), обернені оператори  $\Lambda_{jk}^{-1}$  та  $F_x^{-1}$ , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) g_l(\xi, \eta) d\xi d\eta + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} W_{yik}^1(x, \xi, y, z, \zeta) g_{1k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta + \\ + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{l_k} W_{yik}^2(x, \xi, y, z, \zeta) g_{2k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (54)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (54) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{l_k} \frac{V_i(z, \lambda_j) V_r(\zeta, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \times \frac{\cos(|x - \xi| \sigma) V_r(y) V_r(\eta)}{(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_r^2 + \chi_1^2) \|V_r\|^2} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \quad (55)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \quad (56)$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l), \quad (57)$$

компоненти лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^1(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, 0, z, \zeta) \quad (58)$$

та компоненти правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^2(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, b, z, \zeta) \quad (59)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (45).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) дають можливість виділяти із формул (54) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $y = 0, y = b$  крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (54) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(x, y, z), g_{1j}(x, z), g_{2j}(x, z)$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ),  $g_0(x, y)$  та  $g_l(x, y)$  проводиться безпосередньо.

### 3. Висновки.

При найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в обмежених багатозарових просторових областях. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517с.
2. Громик А.П., Конет І.М. Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 13. – С. 52-65.
3. Громик А.П., Конет І.М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 36-50.
4. Громик А.П., Конет І.М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Наукові праці Кам'янець-Подільського державного університету. Збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів. Випуск 5.: В 3-х томах. – Кам'янець-Подільський: К-ПДУ, 2006. Т. 1. – С. 94-95.
5. Дейнека В.С., Сергиенко І.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с.
7. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. Конет І.М. Стаціонарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
9. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
10. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
11. Конет І.М., Ленюк М.П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 84-96.
12. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
13. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
14. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
15. Сергиенко І.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 668 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.



УДК 517.944:532.546

В. Попов, канд. фіз.-мат. наук, доц., Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Гап'як, студ.  
mph\_mmf@univ.kiev.ua

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З НЕГЛАДКИМИ МЕЖАМИ

Здійснено чисельний експеримент щодо різних варіантів застосування методу граничних інтегральних рівнянь на прикладі крайової задачі Діріхле для гармонічної функції в області з негладкою межею. Отримано чисельні розв'язки тестової задачі, що враховують особливість крайової задачі, а також розв'язок, що не враховує цю особливість. Проаналізовано результати чисельного експерименту.

A numerical experiment for different variants of using the boundary integral equations method on example of Dirichle boundary value problem for harmonic function in the field with non-smooth boundary is fulfilled. Numerical solutions of test problem that take into account the particularity of the boundary value problem are obtained as well as solution, not taking into account this particularity. The results of numerical experiment are analyzed.

### 1. Вступ.

Лінійні крайові задачі в областях, межа яких містить кутові точки, можуть виникати при моделюванні багатьох механічних та фізичних процесів, що зумовлює актуальність дослідження їх впливу на шуканий розв'язок.

Суть методу граничних інтегральних рівнянь [5], використаного в даній роботі, полягає в зведенні крайової задачі до інтегрального рівняння на основі використання тотожності Гріна. Вказаним методом задачу для області з негладкою межею можна розв'язувати кількома способами, наприклад:

- ✓ використовувати тотожність Гріна для областей з кусково-гладкою межею;
- ✓ згладжувати область і використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею;
- ✓ використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею без урахування зламу межі конкретної області.

Для вибору способу чисельного розв'язування крайових задач описаного типу необхідно отримати відповідні розв'язки та здійснити їх аналіз.

### 2. Постановка задачі.

Розглянемо задачу знаходження гармонічної функції  $\varphi(x, y)$  в замкненій області  $D$ , якщо на її межі  $\partial D$  задана одна з класичних лінійних крайових умов:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= f(x, y), \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} &= g(x, y), \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} + h\varphi(x, y) &= \omega(x, y),\end{aligned} \quad (x, y) \in \partial D. \quad (1)$$

Вважаємо, що межа  $\partial D$  є кусково-гладкою лінією.

### 3. Чисельне розв'язування задачі.

З основної тотожності Гріна для гармонічної функції у двовимірному випадку маємо [4]:

$$\Omega(P)\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_Q} \varphi(Q) \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), \quad (2)$$

$$\text{де } \Omega(P) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } P \in D, \\ \frac{\beta(P)}{2\pi}, & \text{якщо } P \in \partial D, \\ 0, & \text{якщо } P \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Тут  $\ln \frac{1}{r(P, Q)}$  – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа;  $r(P, Q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  – відстань між точками  $Q(x, y)$  і  $P(x_0, y_0)$ ;  $P(x_0, y_0)$  – довільна фіксована точка;  $Q(x, y)$  – точка інтегрування;  $n_Q$  – зовнішня нормаль;  $\beta(P)$  – кут, під яким видно область з точки  $P$  (якщо межа гладка, то  $\beta(P) = \pi$ ). У випадку об'ємної задачі величину  $\beta(P)$  ще називають тілесним кутом [4].

Рівність (2) (для випадку  $P \in \partial D$ ) і одна з крайових умов (1) утворюють систему рівнянь для знаходження на  $\partial D$  двох функцій  $\varphi$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . З цієї системи отримується одне інтегральне рівняння, яке для задачі Діріхле є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, а для задачі Неймана і третьої крайової задачі – інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.

Для отримання конкретних результатів та вивчення впливу кутових точок межі на розв'язок розглядається задача Діріхле для області  $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$ :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x,y) &= 0, & (x,y) \in D, \\ \varphi(x,y) &= f(x,y), & (x,y) \in \partial D.\end{aligned}\quad (3)$$

З метою спрощень при формуванні інтегрального рівняння функцію  $f(x,y)$  вибираємо з властивістю симетрії:

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(-x,y), & (x,y) \in \partial D, \\ f(x,y) &= f(x,-y), & (x,y) \in \partial D.\end{aligned}\quad (4)$$

Розглянемо тотожність (2), коли точка  $P \in \partial D$ . З урахуванням крайової умови інтегральне рівняння для знаходження розв'язку має вигляд:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q} \ln\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) ds(Q) = \beta(P)f(P) + \int_{\partial D} f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) ds(Q). \quad (5)$$

Легко показати, що функція  $\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q}$ ,  $Q \in \partial D$ , як і розв'язок  $\varphi(x,y)$ , має на межі області  $\partial D$  властивість симетрії

(4). Позначимо  $g(Q) = \frac{\partial\varphi}{\partial n_Q}$ . Враховуючи симетрію крайових умов, в (5) зручно перейти від інтегрування по всій межі  $\partial D$  до інтегрування лише по її частині  $\partial D_1$  – частині межі, що лежить у першому квадранті площини та містить куту точку  $P^*$  з кутом  $\beta(P^*) = \frac{\pi}{2}$ .

Позначимо через  $K(t,s)$  ядро інтегрального рівняння, а через  $u(s)$  – його праву частину. В результаті отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_0^L g(t)K(t,s)dt = u(s), \quad s \in [0,L], \quad (6)$$

де  $L$  – довжина дуги  $\partial D_1$ .

Задача (6), як відомо, є некоректною. Для розв'язання рівняння (6) використовується метод регуляризації Тихонова першого порядку [2, 6]. Замість точної правої частини (6) розглянемо функцію  $u_\delta$  таку, що  $\rho_{L_2}(u_\delta, u) \leq \delta$ , де

$$\rho_{L_2}(u_\delta, u) = \left\{ \int_0^L [u_\delta(x) - u(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо згладжуючий функціонал (функціонал Тихонова)

$$M^\alpha[g, u_\delta] = \|Ag - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g], \quad (7)$$

де введено позначення

$$\Omega[g] = \int_0^L \left[ q(s)g^2(s) + p(s) \left( \frac{dg}{ds} \right)^2 \right] ds. \quad (8)$$

Тут  $q(s)$  і  $p(s)$  – задані невід'ємні неперервні функції такі, що  $\forall s \in [0,L] \quad q^2(s) + p^2(s) \neq 0$  і  $p(s) \geq p_0 > 0$ , де  $p_0$  – число. Функціонал  $\Omega[g]$  називають стабілізуючим функціоналом, а  $\alpha > 0$  є параметром регуляризації. Використовуючи теорію регуляризації, приходимо до задачі мінімізації функціонала  $M^\alpha[g, u_\delta]$ , а саме, враховуючи необхідну умову мінімуму функціонала  $M^\alpha[g, u_\delta]$  та здійснюючи необхідні обчислення, отримуємо інтегродиференціальне рівняння [6]

$$\int_0^L \left( \int_0^L K(z,s)K(z,t)dz \right) g(t)dt + \alpha[g(s) - pg''(s)] = \int_0^L K(z,s)u_\delta(z)dz, \quad (9)$$

для розв'язків якого виконуються крайові умови одного з наступних чотирьох типів:

$$g(0) = 0, \quad g(L) = 0, \quad (10)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(L) = 0, \quad (11)$$

$$g'(0) = 0, \quad g(L) = 0, \quad (12)$$

$$g'(0) = 0, \quad g'(L) = 0. \quad (13)$$

Візьмемо за стабілізуючий функціонал  $\Omega[z]$  функціонал вигляду  $\Omega[g] = \int_0^L [g^2 + p(g')]ds$ ,  $p = \text{const} > 0$ .

Для того, щоб невідома функція рівняння (9) задовольняла одну з крайових умов (10)–(13) (наприклад, умову (10)), необхідно розглянути функцію  $g_1 = g - g^*$ , де  $g^* = g(0) + \frac{t}{L}(g(L) - g(0))$ ,  $t \in [0,L]$ . Таким чином, регуляризований розв'язок  $g_1$  задовольняє умову (10) і інтегральне рівняння Фредгольма II роду:

$$\int_0^L \left( \int_0^L K(z, s) K(z, t) dz \right) g_1(t) dt + \alpha [g_1(s) - p g_1''(s)] = \int_0^L K(z, s) u_\delta(z) dz. \quad (14)$$

Для чисельної реалізації рівняння (14) необхідно передбачити параметризацію межі  $\partial D_1$  та її аналогу – згладжувальної кривої. Крім того, та чи інша апроксимація шуканої функції вимагає введення сітки точок на межі інтегрування. В даній роботі використовується нерівномірне розбиття зі згущенням точок біля точки  $P^*$ . Це можна зробити за допомогою формули [3]

$$z_i = L \frac{e^{\frac{\gamma i}{n}} - 1}{e^\gamma - 1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (15)$$

де  $n$  – кількість проміжків, на які розбивається відрізок  $[0, L]$ , параметр  $\gamma$  відповідає за згущення координат сітки біля одного з кінців відрізка  $[0, L]$ .

Шукана функція з рівняння (14) знаходиться методом колокації [3].

Використовуючи триточкові формули чисельного диференціювання, з (14) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_1, t_j) (z_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_1 - 2p\alpha \left( \frac{g_1}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_4) + (s_1 - s_2)) + \right. \\ & + \frac{g_2}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_4)) + \frac{g_3}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} ((s_1 - s_4) + (s_1 - s_2)) + \\ & \left. + \frac{g_4}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_3)(s_4 - s_2)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_2)) \right) = F_1, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_i, t_j) (z_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_i - 2p\alpha \left( \frac{g_{i-1}}{(s_{i-1} - s_i)(s_{i-1} - s_{i+1})} + \frac{g_i}{(s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1})} + \right. \\ & \left. + \frac{2g_{i+1}}{(s_{i+1} - s_{i-1})(s_{i+1} - s_i)} \right) = F_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_n, t_j) (z_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_n - 2p\alpha \left( \frac{g_{n-3}}{(s_{n-3} - s_{n-2})(s_{n-3} - s_{n-1})(s_{n-3} - s_n)} ((s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1})) + \right. \\ & + \frac{g_{n-2}}{(s_{n-2} - s_{n-3})(s_{n-2} - s_{n-1})(s_{n-2} - s_n)} ((s_n - s_{n-1}) + (s_n - s_{n-3})) + \frac{g_{n-1}}{(s_{n-1} - s_{n-3})(s_{n-1} - s_{n-2})(s_{n-1} - s_n)} ((s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-3})) + \\ & \left. + \frac{g_n}{(s_n - s_{n-3})(s_n - s_{n-2})(s_n - s_{n-1})} ((s_n - s_{n-3}) + (s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1})) \right) = F_n, \end{aligned}$$

де позначено

$$t_j = \frac{z_j - z_{j-1}}{2}, \quad F_i = \int_0^L K(z, s_i) u_\delta(z) dz, \quad i = \overline{1, n}; \quad \bar{K}(s_i, t_j) = \int_0^L K(z, s_i) K(z, t_j) dz, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Значення  $\bar{K}(s_i, t_j)$  та  $F_i$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  обчислюються за допомогою найпростіших квадратурних формул, наприклад формул трапецій [1, 3]

$$\begin{aligned} \bar{K}(s_i, t_j) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} K(z, s_i) K(z, t_j) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{z_{k+1} - z_k}{2} (K(z_{k+1}, s_i) K(z_{k+1}, t_j) + K(z_k, s_i) K(z_k, t_j)) \right), \\ F_i &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} K(z, s_i) u_\delta(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{z_{k+1} - z_k}{2} (K(z_{k+1}, s_i) u_\delta(z_{k+1}) + K(z_k, s_i) u_\delta(z_k)) \right). \end{aligned}$$

При такому обчисленні інтегралів виникає ситуація, коли вузли  $s_i$  (або  $t_j$ ) належать проміжку інтегрування  $[z_k, z_{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , що може привести до суттєвих похибок, якщо не враховувати слабку особливість ядер (логарифмічну особливість). Врахування слабкої особливості при інтегруванні здійснюється заміною підінтегральної змінної.

Розв'язуючи СЛАР методом Жордана, отримаємо розподіл нормальної похідної гармонічної функції на межі області. Шукана функція  $\varphi(x, y)$  при необхідності обчислюється квадратурами в будь-якій внутрішній точці  $P \in D$  за допомогою тотожності (2).

#### 4. Аналіз результатів розв'язування задачі.

Для задачі Діріхле розглянуто тестову гармонічну функцію  $\varphi(x, y) = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$ ,  $(x, y) \in \bar{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Її нормальною похідною на межі  $\partial D$  буде функція:

$$g(x, y) = n_x \operatorname{sh} x \cdot \sin y + n_y \operatorname{ch} x \cdot \cos y, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Із застосуванням описаного алгоритму знайдено наближений розв'язок  $g_\alpha(x, y)$ .

На рис.1-3 подано графіки залежності похибки наближеного розв'язку  $Y_1 = \|g - g_\alpha\|_C$  від параметра регуляризації  $\alpha$ :

- а) крива 1 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по незгладжуваній межі;
- б) крива 2 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по згладжуваній межі;
- с) крива 3 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по незгладжуваній межі, причому при його обчисленні множник  $\beta(x, y)$  в рівнянні (5) не враховувався.

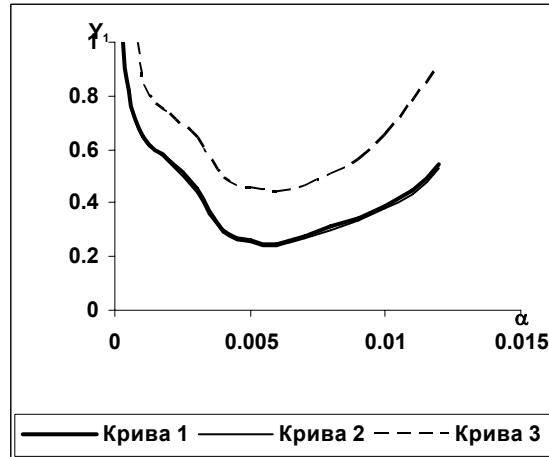


Рис. 1. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування  $r = 0,002$ )

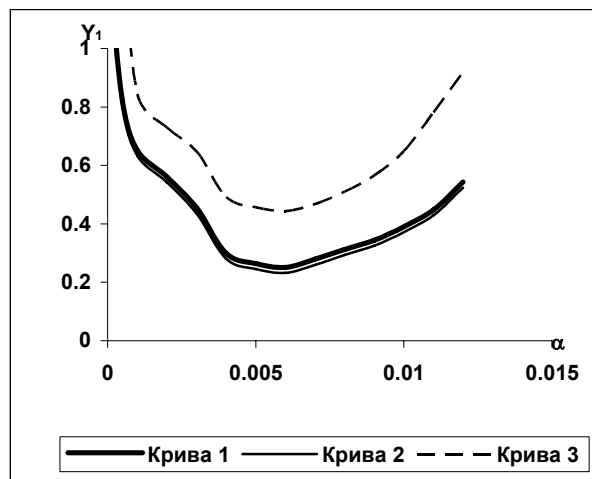


Рис. 2. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування  $r = 0,006$ )

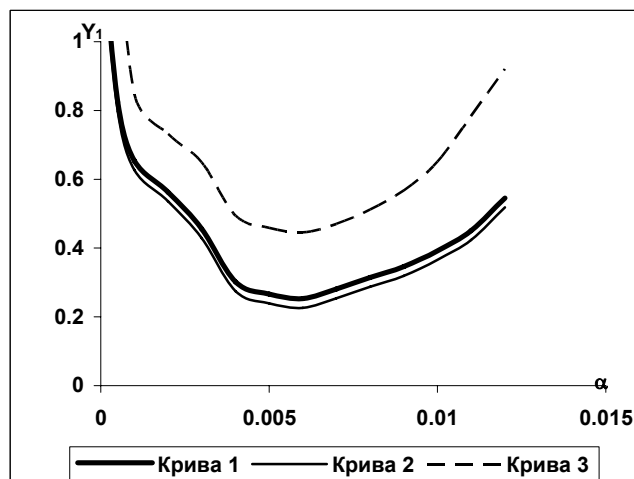


Рис. 3. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування  $r = 0,008$ )

## 5. Висновки.

При знаходженні розв'язку в області з межею, яка містить кутові точки, потрібно враховувати кут зламу – множник  $\beta(x, y)$  у рівнянні (5). Альтернативою цьому є згладжування межі області. Графіки похибок свідчать про те, що із зменшенням радіуса дуги згладжування кутової точки можна прийти до істотно точніших результатів.

1. Арушанян И.О. Применение метода квадратур для решения граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на многоугольниках. – М., 2003. 2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: справочное пособие. – К., 1986. 3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М., 1978. 4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М., 1970. 5. Рипцо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики // Механика. Новое в зарубежной науке. – 1978. – №15. 6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М., 1979.

Надійшла до редколегії 12.11.2007

УДК 517.91

О.О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук  
prishlyak@yahoo.com

## ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ПОВЕРХНЯХ З МЕЖЕЮ

*Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на поверхнях з межею.*

*We construct the complete topological invariant of functions in general position on surfaces with boundary.*

### 1. Вступ.

Якщо  $M$  – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкрити скрізь щільну множину. За лемою Морса [2], для невідродженої критичної точки  $p$  існує локальна система координат  $(x_1, \dots, x_n)$ , в якій функція має вигляд  $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ .

Нехай  $M$  – гладкий компактний  $n$ -вимірний многовид з межею  $\partial M$ . Функція  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  є функцією загального положення, якщо

- усі її критичні точки – невідроджені і не лежать на межі  $\partial M$ ,
- обмеження  $f|_{\partial M}$  функції  $f$  на  $\partial M$  є функцією Морса загального положення,
- критичний рівень функції  $f$  містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції  $f|_{\partial M}$ .

Нехай  $x \in \partial M$  – критична точка  $f|_{\partial M}$ . Індексом  $\text{ind } x$  цієї критичної точки називається пара  $(\lambda, \delta)$ , де  $\lambda$  – звичайний індекс, а  $\delta = +1$ , якщо вектор  $\text{grad} f_x$  спрямований назовні і  $\delta = -1$ , якщо  $\text{grad} f_x$  спрямований в усередину многовиду  $M$ . Якщо  $x \notin \partial M$  – критична точка  $f$ , то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невідродженої критичної точки  $f_0$  існує локальна система координат  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_n \geq 0$ , в якій функція  $f$  має вигляд  $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$  [4].

Нехай  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкі функції. Функції  $f$  і  $g$  називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $\psi: M \rightarrow M$ ,  $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що  $f \zeta = g \psi$ .

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морсу на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1, 5, 6], а тривимірних у [3].

Основною метою роботи – дати топологічну класифікацію функцій загального положення на поверхнях (двовимірних многовидах) з межею.

### 2. Локальна класифікація.

В цьому розділі розглядається питання еквівалентності функцій на поверхні в околі зв'язної компоненти критичного рівня. Можливі 4 типи критичних точок на межі, що відрізняються індексом. Для функції висоти вони зображені на рис. 1.

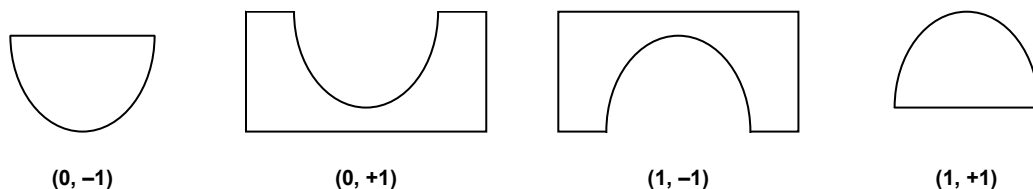


Рис. 1.

Нехай компонента рівня не є локальний мінімум чи максимум. Тоді вона може містити лише такі критичні точки: 1) внутрішні критичні точки, 2) критичні точки на краю індекса  $(0, +1)$ , 3) критичні точки на краю індекса  $(1, -1)$ . Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція  $f$  має критичне значення 0, а околі компоненти критичного рівня є компонентою множини  $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ . Компоненти  $\partial M = f^{-1}(-\varepsilon)$  є колами та відрізками. Їх ми будемо називати нижніми. Кола та відрізки з  $\partial M = f^{-1}(\varepsilon)$  будемо називати верхніми. Побудуємо аналог хордової діаграми на нижніх колах та відрізках. Для цього розглянемо поле  $\text{grad } f$  у деякій рімановій метриці. Стійкі многовиди особливих точок індексу 1 утворюють хорди (криві) з кінцями на нижніх колах чи внутрішніх точках нижніх відрізків. Компонента межі  $\partial M$ , яка містить точку індексу  $(1, -1)$  є хордою, що з'єднує кінці нижніх відрізків. За допомогою поля  $\text{grad } f$  знайдемо проєкції точок індексу  $(0, +1)$  на  $\partial M$  (перетин інтегральних траєкторій, що проходять через ці точки з  $\partial M$ ). Зменшуючи за

необхідності  $\varepsilon$ , доможемося того, що ці проєкції будуть лежати на нижніх колах та відрізках. Орієнтація поверхні і напрямок поля градієнта визначають орієнтацію кіл та відрізків.

**Означення.** Об'єднання орієнтованих кіл та відрізків з'єднаних хордами, з виділеними на колах та відрізках точками, називається *хордовою  $m$ -діаграмою*. При цьому, якщо кінець хорди є кінцем відрізка, то і інший кінець хорди є кінцем деякого відрізка.

Дві  $m$ -діаграми називаються ізоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм, який відображає кола на кола, відрізки на відрізки, хорди на хорди, а виділені точки на виділені точки і зберігає орієнтації кіл та відрізків.

**Лема.** Дві функції загального положення є топологічно еквівалентними в околі критичного рівня, якщо відповідні їм хордові  $m$ -діаграми є ізоморфними.

**Доведення.** *Необхідність* випливає з побудови. *Достатність.* Без обмеження загальності будемо вважати, що функції мають однакове критичне значення і приймають однакові значення на границі околу критичного рівня. Зафіксуємо ріманову метрику на поверхнях. Ізоморфізм  $m$ -діаграм задає відповідність між інтегральними траєкторіями (крім нестійких многовидів сідлових точок) полів градієнтів. При цьому, оскільки хорди та виділені точки відображаються на хорди та виділені точки, то стійкі многовиди критичних точок переходять в стійкі многовиди. Відповідність між траєкторіями задає гомеоморфізм між їх об'єднаннями за таким правилом: точки на відповідних траєкторіях переходять одна в одну, якщо вони мають однакові значення в цих точках. Відповідність орієнтацій дозволяє продовжити гомеоморфізм з об'єднання траєкторій, між якими задана відповідність, на нестійкі многовиди сідлових точок і, таким чином, побудувати шуканий гомеоморфізм околів. Верхні кола та відрізки задають цикли та маршрути на діаграмі, які будемо називати верхні цикли та маршрути.

### 3. Глобальна класифікація.

Побудуємо граф Ріба функції загального положення  $f$ . Для цього введемо таке відношення еквівалентності на  $M$ : дві точки еквівалентні, якщо вони належать одній компоненті лінії рівня функції. Тоді граф Ріба є факторпростір  $G = M/\sim$ . На графі Ріба є природна орієнтація ребер, породжена зростанням функції на відповідних лініях рівня. Крім того, ребра графа розфарбовано в два кольори (розбито на два типи): 1) ребра, для яких компоненти рівня є колами, 2) ребра, для яких компоненти рівня – відрізки.

Розглянемо вершини графа, валентність яких не перевищує 3. Вершини валентності 1 відповідають локальним мінімумам (витоки) чи максимумам (стоки). При цьому, якщо інцидентне їй ребро має перший тип, то відповідна критична точка -внутрішня, а, якщо другий, то вона лежить на краю. Для вершин, валентність яких більше 1, існує принаймні одне ребро, яке входить в неї, і одне, яке виходить з неї. Ребра валентності 2 мають два інцидентних ребра різних типів. При цьому відповідна критична точка має індекс  $(0, +1)$ , якщо ребро другого типу виходить, і індекс  $(1, -1)$ , якщо ребро другого типу входить в неї.

Для вершин валентності 3 є такі можливості:

- 1) всі інцидентні їй ребра мають перший тип. Тоді критична точка є внутрішня і має індекс 1;
- 2) два ребра другого типу входять (виходять), а одне першого – виходить (входить). Тоді можливо два варіанти:
  - а) дві критичні точки на краю індексу  $(1, -1)$   $((0, +1))$  – дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці двох різних відрізків,
  - б) дві критичні точки на краю індексу  $(1, -1)$   $((0, +1))$  і одна індексу 1 – дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці одного з двох відрізків і третя хорда з'єднує дві внутрішні точки різних відрізків (Рис. 2);

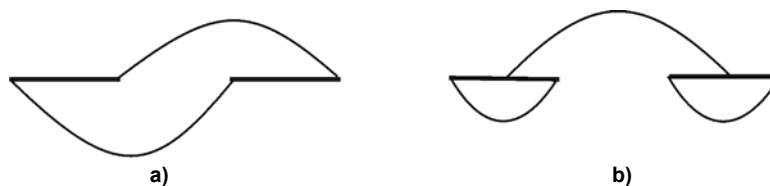


Рис. 2.

- 3) одне ребро другого типу входить, одне ребро другого типу виходить, а третє ребро має перший тип. Можливі два варіанти: а) одна критична точка, яка є внутрішньою індексу 1, б) три критичні точки, індекси яких  $(1, -1)$  і  $(0, +1)$ ;
- 4) всі три інцидентні до вершини ребра мають другий тип. Тоді можливі такі варіанти: а) одна критична точка, яка лежить на краю і має тип  $(0, +1)$ , якщо два ребра виходять і одне входить, б) одна точка типу  $(1, -1)$  в іншому випадку, в) дві точки типу  $(1, -1)$  і одна  $(0, +1)$ , г) одна точка типу  $(1, -1)$  і дві типу  $(0, +1)$ ;
- 5) два ребра першого типу, одне з яких входить і одне виходить, і одне другого типу – виходить (входить). Тоді маємо дві критичні точки: одна на краю індексу  $(1, -1)$   $((0, +1))$  а друга внутрішня індексу 1.

Якщо валентність вершини більше 3, то необхідно фіксувати хордові  $m$ -діаграми, як в п.1. При цьому будемо фіксувати такі бієкції: 1) між нижніми колами і вхідними ребрами першого типу, 2) між нижніми відрізками та вхідними ребрами другого типу, 3) між циклами і вихідними ребрами першого типу, 4) максимальними маршрутами і вихідними ребрами другого типу. Як і для звичайних функцій  $m$ -функція задає упорядкування (відображення на множину  $\{1, 2, \dots, N\}$ ) вершин графа Ріба.

Розрізняючи графом функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні називається побудований за нею (як вище) орієнтований граф Ріба, з розфарбуванням його ребер у два кольори, упорядкуванням вершин, оснащенням вершин валентності більше 2 хордовою  $m$ -діаграмою і завданням бієкцій інцидентних до цих вершин ребер з відповідними елементами хордової  $m$ -діаграми. Два розрізняючих графи називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм графів Ріба, що зберігає орієнтації та розфарбування ребер, упорядкування вершин, оснащення вершин та комутиє з заданими бієкціями.

**Теорема.** Дві функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли існує ізоморфізм їх розрізняючих графів.

**Доведення. Необхідність.** Топологічна еквівалентність функцій загального положення, за побудовою, породжує ізоморфізм розрізняючих графів.

**Достатність.** Для кожної пари відповідних вершин (відповідність задається ізоморфізмом  $m$ -графів) побудуємо, як в п.1, гомеоморфізми околів відповідних компонент критичних рівнів. При цьому гомеоморфізмі компоненти границі переходять в такі компоненти границі, що відповідні їм ребра  $m$ -графу переходять один в одного при ізоморфізмі  $m$ -графів. Тоді ця відповідність, зважаючи на упорядкування вершин та орієнтації ребер, дозволяє продовжити гомеоморфізми з околів критичних рівнів на решту поверхні (що є об'єднанням циліндрів  $S^1 \times [0,1]$  та квадратів  $[0,1] \times [0,1]$ ).

#### 4. Приклади підрахувань.

Будемо позначати ребра першого типу звичайною стрілочкою в кінці ребра, а другого – порожньою в середині. Можливі дві функції, у яких по дві критичні точки – одна на сфері, а інша на двовимірному диску. Можливі дві функції з трьома критичними точками, їх графи відрізняються лише орієнтацією ребер. Тому будемо зображати лише один такий граф. На рис. 3 зображено графи функцій з 2 та 3 критичними точками. Графи функцій з 4 критичними точками зображено на рис. 4.

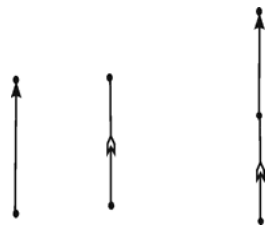


Рис. 3.

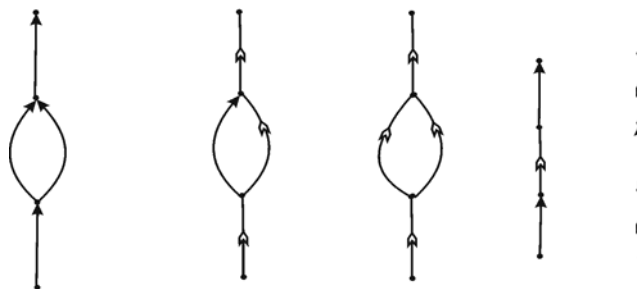
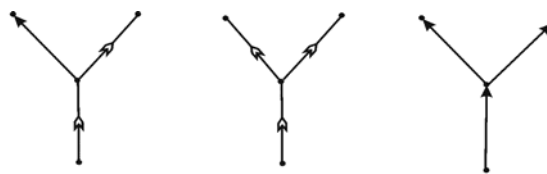


Рис. 4.

На першому графі можливі два різні упорядкування вершин і дві орієнтації ребер (всього 4 не еквівалентних функцій). Наступні два графи мають по одному упорядкуванню і дві орієнтації (по 2 функції). Решта графів задають по одній функції. Отже, існує 13 топологічно не еквівалентних функцій загального положення з 4 критичними точками.

Для функцій з 5 критичними точками існує 9 графів та 22 топологічно нееквівалентні функції.

#### 5.Висновок.

Отримано топологічну класифікацію функцій загального положення на компактних орієнтованих поверхнях з межею.

1. Максименко С.І. Еквівалентність  $m$ -функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С. 128-134. 2. Милнор Дж. Теория Морса. – М.: Мир, 1964. – 184 с. 3. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С.94-103. 4. Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. 5. Kulinich E.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.- P.22-28. 6. Sharko V.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.-P.19-23.

## ВАРІАНТИ ІНВЕРСНИХ НАПІВГРУП СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Нехай  $S$  – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінчену довжину. Для фіксованого елемента  $c$  визначимо на  $S$  операцію  $*_c$  згідно правила  $x *_c y = xcy$ , а множину  $S$  з операцією  $*_c$ , яка є напівгрупою, позначимо через  $(S, *_c)$ . Для  $(S, *_c)$  знайдено необхідні і достатні умови того, що  $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ .

Let  $S$  be an inverse semigroup whose semilattice of idempotents is of finite length. For fixed element  $c$  from  $S$  defines operation  $*_c$  on  $S$  via  $x *_c y = xcy$ . The set  $S$  with operation  $*_c$  is, obviously, a semigroup which we denote by  $(S, *_c)$ . Necessary and sufficient conditions in order that  $(S, *_a) \cong (S, *_b)$  are founded.

## 1. Вступ.

Нехай  $S$  – довільна напівгрупа. Зафіксуємо елемент  $a \in S$  і визначимо нову бінарну операцію  $*_a$  згідно правила  $x *_a y = xay$ . Легко перевірити, що операція  $*_a$  є асоціативною. Напівгрупа  $(S, *_a)$  називається варіантом напівгрупи  $S$ .

Одне з найважливіших питань, яке виникає при вивченні варіантів напівгрупи, формулюється таким чином: нехай  $a$  і  $b$  – елементи напівгрупи  $S$ . За яких умов напівгрупи  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$  будуть ізоморфними? У випадку скінченної інверсної симетричної напівгрупи (вона позначається через  $IS_n$ ) відповідь на це питання дано в [4, теорема 1]. Сформулюємо її:

**Результат** [4, теорема 1] Напівгрупи  $(IS_n, *_\alpha)$  і  $(IS_n, *_\beta)$  ізоморфні тоді і тільки тоді, коли  $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta)$ .

В даній замітці отримано узагальнення згаданого вище результату. Основні результати даної статті анонсовано в [5].

## 1. Означення, термінологія і формулювання потрібних результатів

Напіврешітку  $E$  називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує таке натуральне число  $n$ , що довжина будь-якого ланцюжка напіврешітки  $E$  не перевищує  $n$ .

Нехай  $P$  – впорядкована множина скінченної довжини з найменшим елементом 0. Довжина максимально-го за кількістю елементів ланцюжка, що з'єднує 0 і елемент  $x$ , називається висотою елемента  $x$  і позначається через  $h(x)$ .

Нехай  $S$  – довільна напівгрупа,  $N_0$  – множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію  $\text{rank} : S \rightarrow N_0$  називають ранговою на напівгрупі  $S$ , якщо для будь-яких елементів  $a, b \in S$  виконується нерівність  $\text{rank}(a \cdot b) \leq \min\{\text{rank}(a), \text{rank}(b)\}$ . Число  $\text{rank}(x)$  називається рангом елемента  $x$ .

Нехай  $S$  – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція  $\text{rank}(a) = h(aa^{-1})$ , де  $h(aa^{-1})$  – висота ідемпотента  $aa^{-1}$  в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи  $S$ , є ранговою (див. [2]). В даній статті використовується поняття рангу елемента інверсної напівгрупи саме в такому сенсі.

Зазначимо, що для скінченної симетричної інверсної напівгрупи поняття рангу перетворення згідно класичного означення і означення, сформульованого вище, – збігаються. Аналогічне зауваження має місце і для  $\text{PAut}(V)$  – напівгрупи всіх часткових автоморфізмів скінченновимірному векторного простору  $V$ .

Відзначимо деякі властивості рангової функції (див. [2]), які надалі використовуються без відповідних посилань: якщо  $S$  – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину, то для довільних  $a, b \in S$  мають місце такі властивості:

1) якщо  $a < b$ , то  $\text{rank}(a) < \text{rank}(b)$ , де через  $a < b$  позначено строгий канонічний порядок на інверсній напівгрупі  $S$ ;

2) для кожного елемента  $a \in S$  має місце рівність  $\text{rank}(a) = \text{rank}(a^{-1}) = \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a^{-1}a)$ .

Множина всіх ідемпотентів напівгрупи  $(S, \circ)$  позначається через  $E(S, \circ)$ . Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в монографії [3].

## 2. Основний результат

Спочатку доведемо декілька лем.

**Лема 1.** Якщо  $a$  – ідемпотент інверсної напівгрупи  $(S, \cdot)$ , то  $E(S, *_a) \subseteq E(S, \cdot)$ .

**Доведення.** Нехай  $x \in E(S, *_a)$ , тоді  $hax = x$ . Отже  $axa = x^{-1}$  і  $xa \in E(S, \cdot)$ . Звідси  $x^{-1} = axa = aaxa = ax^{-1}$ . Таким чином,  $x = xa \in E(S, \cdot)$ .

**Лема 2.** Якщо  $a$  – ідемпотент інверсної напівгрупи  $(S, \cdot)$ , то  $E(S, *_a) = \{x : x \leq a\}$ , де відношення  $\leq$  є канонічним порядком на  $(S, \cdot)$ .



**Доведення.** Нехай  $x \in E(S, *_a)$ . Тоді  $xax = x$ . Згідно леми 1 елемент  $x$  є ідемпотентом напівгрупи  $(S, \cdot)$ , а тому  $x = xax = xa$ , тобто  $x \leq a$ . Навпаки, якщо  $x \leq a$ , то  $xa = x$ , звідки  $xax = x$ , тобто  $x \in E(S, *_a)$ .

**Лема 3.** Якщо  $a$  – ідемпотент інверсної напівгрупи  $(S, \cdot)$ , то на множині  $E(S, *_a)$  операції  $*_a$  і  $\cdot$  збігаються.

**Доведення.** Нехай  $x, y \in E(S, *_a)$ . Тоді  $x *_a y = xay$ . Оскільки згідно леми 2  $x = xa$ , то  $x *_a y = xay = xy$ .

**Лема 4.** Якщо  $a$  – ідемпотент інверсної напівгрупи  $(S, \cdot)$ , то будь-які два ідемпотенти напівгрупи  $(S, *_a)$  комутують.

*Це твердження безпосередньо випливає з леми 3.*

**Лема 5.** Нехай  $(S, \cdot)$  – інверсна напівгрупа скінченного рангу,  $a, b \in E(S, \cdot)$ . Якщо напівгрупи  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$  ізоморфні, то  $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ .

**Доведення.** З леми 4 випливає, що множини  $E(S, *_a)$  і  $E(S, *_b)$  є піднапівгрупами відповідно напівгруп  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$ . Оскільки за умовою напівгрупи  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$  ізоморфні, то ізоморфні і піднапівгрупи їх ідемпотентів, тобто  $E(S, *_a) \cong E(S, *_b)$ .

Згідно леми 2  $E(S, *_a) = \{x : x \leq a\}$  і  $E(S, *_b) = \{x : x \leq b\}$ , де  $\leq$  – канонічний порядок на інверсній напівгрупі  $(S, \cdot)$ . Оскільки згідно леми 3 операція  $*_a$  на множині  $E(S, *_a)$  збігається з операцією  $\cdot$ , а операція  $*_b$  на множині  $E(S, *_b)$  збігається з операцією  $\cdot$ , то множини  $\{x : x \leq a\}$  і  $\{x : x \leq b\}$  ізоморфні як впорядковані множини. Звідси випливає, що  $h(a) = h(b)$ , де  $h(a)$  – висота ідемпотента  $a$ . Отже, згідно означення рангу маємо  $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ .

**Теорема 1.** Нехай інверсний моноїд  $S$  з групою оборотних елементів  $G$  задовольняє такі умови:

- 1) напіврешітка ідемпотентів моноїда  $S$  має скінченну довжину;
- 2) ідеали моноїда  $S$  лінійно впорядковані відносно включення;
- 3) для будь-якого  $x \in S$  існує такий елемент  $g \in G$ , що  $x \leq g$ .

Тоді для будь-яких  $a$  і  $b$  напівгрупи  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$  ізоморфні тоді і тільки тоді, коли  $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ .

**Доведення.** Нехай елементи  $a, b \in S$  такі, що  $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ . Тоді  $SaS = SbS$  (див. [2], теорема 2). Отже існують такі елементи  $u$  і  $v$ , що  $uav = b$ . Запишемо останню рівність у вигляді  $uaa^{-1}aa^{-1}av = b$ . Позначимо  $uaa^{-1}$  через  $x$  і  $a^{-1}av$  через  $y$ . Покажемо, що  $\text{rank}(x) = \text{rank}(y) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ . Справді,  $\text{rank}(x) = \text{rank}(uaa^{-1}) \leq \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$ . Якщо припустити, що  $\text{rank}(uaa^{-1}) < \text{rank}(a)$ , то  $\text{rank}(a) = \text{rank}(b) = \text{rank}(uaa^{-1}aa^{-1}av) \leq \text{rank}(uaa^{-1}) < \text{rank}(a)$ . Маємо суперечність. Отже,  $\text{rank}(x) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ . Аналогічно,  $\text{rank}(y) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$ . Таким чином  $xay = b$ , причому  $\text{rank}(x) = \text{rank}(y) = \text{rank}(a)$ . Звідси випливає, що

$$x^{-1}x = aa^{-1} \quad (1)$$

$$i \quad y^{-1}y = a^{-1}a. \quad (2)$$

Дійсно, припустимо, що  $x^{-1}x \neq aa^{-1}$ . Оскільки  $\text{rank}(x^{-1}x) = \text{rank}(aa^{-1})$ , то  $x^{-1}xaa^{-1} < aa^{-1}$ . Отже,  $\text{rank}(x^{-1}xaa^{-1}) < \text{rank}(aa^{-1})$ . Далі,  $\text{rank}(b) = \text{rank}(xay) = \text{rank}(xx^{-1}xaa^{-1}ay) \leq \text{rank}(x^{-1}xaa^{-1}) < \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$ . Отримали суперечність. Аналогічно доводиться справедливості рівності (2).

Згідно умови 3) теореми 1 існують такі оборотні елементи  $g \in G$  і  $q \in G$ , що  $x \leq g$  і  $y \leq q$ . Тому

$$xx^{-1} = gx^{-1} \quad (3)$$

$$i \quad y^{-1}y = y^{-1}q. \quad (4)$$

$$\text{Згідно рівностей (1), (3) маємо } xa = xx^{-1}xa = gx^{-1}xa = gaa^{-1}a = ga. \text{ Тобто } xa = ga. \quad (5)$$

Аналогічно з рівностей (4) і (2) отримуємо  $ay = ay^{-1}y = ay^{-1}q = aa^{-1}aq = aq$ .

Тобто

$$ay = aq. \quad (6)$$

Використовуючи рівності (5) і (6), одержуємо  $b = xay = xaa^{-1}ay = gaa^{-1}aq = gaq$ . Отже,  $b = gaq$ .

Далі, як в статті [4, теорема 1] визначимо перетворення за допомогою рівності  $F(x) = q^{-1}xg^{-1}$ . Легко перевірити, що перетворення  $F$  є ізоморфізмом між напівгрупами  $(S, *_a)$  і  $(S, *_b)$ .

Доведемо тепер зворотне твердження. Нехай  $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ . Оскільки  $\text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$ , то згідно доведеного вище  $(S, *_a) \cong (S, *_{aa^{-1}})$ . Аналогічно, позаяк  $\text{rank}(bb^{-1}) = \text{rank}(b)$ , то  $(S, *_b) \cong (S, *_{bb^{-1}})$ . Звідси випливає, що  $(S, *_{aa^{-1}}) \cong (S, *_{bb^{-1}})$ . Оскільки  $aa^{-1}$  і  $bb^{-1}$  – ідемпотенти, то згідно леми 5  $\text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(bb^{-1})$ . Таким чином  $\text{rank}(a) = \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(bb^{-1}) = \text{rank}(b)$ .

### 3. Наслідки

Нехай  $V$  – скінченновимірний лінійний простір. Позначимо через  $PAut(V)$  інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів лінійного простору  $V$  відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Відомо, що ідеали напівгрупи  $PAut(V)$  лінійно впорядковані відносно включення. Скориставшись добре відомими класичними теоремами лінійної алгебри, легко показати, що виконується умова 3) теореми 1. Таким чином, маємо

**Наслідок 1.** Напівгрупи  $(PAut(V), *_\alpha)$  і  $(PAut(V), *_\beta)$  ізоморфні тоді і тільки тоді, коли  $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta)$ .

Нехай  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  ( $m \geq 2$ ) – скінченна сім'я рівнопотужних множин, причому  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , якщо  $i \neq j$ . Сконструємо інверсну напівгрупу часткових взаємно однозначних перетворень на множині  $\bigcup_{i=1}^m A_i$  наступним чином:

- 1) зафіксуємо деяку групу бієкцій  $G_1$  на множині  $A_1$ ;
- 2) для кожного  $A_k$  ( $k \neq 1$ ) фіксуємо бієкцію  $\varphi_k : A_1 \rightarrow A_k$ .

Напівгрупу, що породжена множиною  $G_1 \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m, \varphi_2^{-1}, \varphi_3^{-1}, \dots, \varphi_m^{-1}\}$ , позначимо через  $I$ . Очевидно, що порожнє перетворення належить  $I$  і є нулем напівгрупи  $I$ .

Легко перевірити, що напівгрупа  $I$  має такі властивості:

- 1) якщо  $f \in I$ , то  $f^{-1} \in I$ ;
- 2) якщо  $f \in I$  і  $f \neq \emptyset$ , то  $\text{dom}(f)$  і  $\text{im}(f)$  (тут  $\text{dom}(f)$  і  $\text{im}(f)$  відповідно область визначення і множина значень перетворення  $f$ ) належать сімейству  $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ ;
- 3) для будь-яких  $A_k$  і  $A_r$ , що належать сімейству  $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ , існує таке перетворення  $\psi \in I$ , що  $\text{dom}(\psi) = A_k$  і  $\text{im}(\psi) = A_r$ .

Легко перевірити, що напівгрупа  $I$  є цілком 0-простою інверсною напівгрупою, тобто напівгрупою Брандта. Позначимо через  $\Omega(I)$  оболонку зсувів напівгрупи  $I$ . Відомо [6, с. 209], що оболонка зсувів інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою. З основного результату статті [1] випливає, що напівгрупа  $\Omega(I)$  є ідеалізатором напівгрупи  $I$  в

симетричній напівгрупі всіх часткових перетворень множини  $\bigcup_{i=1}^m A_i$ . Тепер вже легко зрозуміти, що елементи напів-

групи  $\Omega(I)$  є взаємно однозначними перетвореннями множини  $\bigcup_{i=1}^m A_i$ , кожне з яких є об'єднанням перетворень з

напівгрупи  $I$ . Звідси випливає, що кожний ідемпотент напівгрупи  $\Omega(I)$  є об'єднанням тотожних перетворень множин, що належать сімейству  $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ . Отже кількість ідемпотентів напівгрупи  $\Omega(I)$  скінченна, а тому напівгрупа  $\Omega(I)$  задовольняє умову 1) теореми 1. Далі, елемент  $\psi \in \Omega(I)$  є оборотним тоді і тільки тоді, коли

$\text{dom}(\psi) = \text{im}(\psi) = \bigcup_{i=1}^m A_i$ . Звідси випливає, що напівгрупа  $\Omega(I)$  задовольняє умову 3) теореми 1. Крім того легко

показати, що ідеали напівгрупи  $\Omega(I)$  лінійно впорядковані відносно включення. Таким чином, інверсна напівгрупа  $\Omega(I)$  задовольняє усі умови теореми 1. Отже має місце таке твердження.

**Наслідок 2.** Напівгрупи  $(\Omega(I), *_\alpha)$  і  $(\Omega(I), *_\beta)$  ізоморфні тоді і тільки тоді, коли  $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta)$ .

Зокрема, якщо  $G_1$  є одноелементною групою, то  $\Omega(I)$  ізоморфна симетричній інверсній напівгрупі на множині  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Звідси випливає теорема 1 зі статті [4].

**Наслідок 3.** Нехай  $S$  – інверсна напівгрупа скінченної довжини. Для будь-яких  $a, b \in S$   $(S, *_a) \cong (S, *_b)$  тоді і тільки тоді, коли  $S$  – група.

**Доведення.** Якщо  $S$  – група, то, очевидно, що вона задовольняє усі умови теореми 1. Очевидно, що всі елементи групи мають нульовий ранг. Отже, згідно теореми 1 для будь-яких  $a, b \in S$   $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ .

Нехай тепер  $S$  – інверсна напівгрупа скінченної довжини така, що для будь-яких елементів  $a, b \in S$   $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ . Покажемо, що  $S$  є групою. Оскільки за умовою напівгрупа  $S$  має скінчену довжину, то напіврешітка її ідемпотентів містить найменший елемент  $e$ . Доведемо, що ідемпотент  $e$  єдиний в інверсній напівгрупі  $S$ . Скористаємося методом від супротивного і припустимо, що напівгрупа  $S$  містить принаймні ще один ідемпотент  $f$ . Розглянемо напівгрупи  $(S, *_e)$  і  $(S, *_f)$ . Згідно леми 2  $E(S, *_e) = \{x | x \leq e\} = \{e\}$  і  $E(S, *_f) = \{x | x \leq f\}$ . Отже множина  $E(S, *_e)$  одноелементна, а множина  $E(S, *_f)$  містить принаймні два елементи  $e$  і  $f$ . Згідно припущення напівгрупи  $(S, *_e)$  і  $(S, *_f)$  ізоморфні, а оскільки при ізоморфізмі ідемпотент переходить в ідемпотент, то маємо суперечність. Таким чином інверсна напівгрупа  $S$  містить точно один ідемпотент. Звідки легко випливає (див. наприклад, [6, с.88]), що  $S$  – група.

#### 4. Приклади

Залишаючи незмінною умову 1) теореми 1, на прикладах покажемо, що умови 2) і 3) є суттєвими.

**Приклад 1.** Розглянемо впорядковану множину  $\{1 < 2 < 3\}$ . Позначимо через  $IO_3$  інверсну напівгрупу всіх часткових монотонних ін'єкцій множини  $\{1 < 2 < 3\}$ . Легко перевірити, що для напівгрупи  $IO_3$  виконується умова 2), але не виконується умова 3). Позначимо елемент  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in IO_3$  через  $\alpha$ , а елемент  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in IO_3$  через  $\beta$ . Згідно леми 2  $E(IO_3, *_\alpha) = \{\emptyset, \alpha\}$  і  $E(IO_3, *_\beta) = \{\emptyset, \beta\}$ . Покажемо, що напівгрупи  $(IO_3, *_\alpha)$  і  $(IO_3, *_\beta)$  не є ізоморфними. Скористаємося методом від супротивного і припустимо, що існує ізоморфізм  $f$  між напівгрупами  $(IO_3, *_\alpha)$  і  $(IO_3, *_\beta)$ . Тоді, очевидно,  $f(\alpha) = \beta$ . Прямим підрахунком легко перевірити, що існує рівно 6 таких елементів  $x \in (IO_3, *_\alpha)$ , що  $x^2 = \alpha$  і рівно 4 таких елементів  $y \in (IO_3, *_\beta)$ , що  $y^2 = \beta$ . Маємо суперечність. Таким чином умова 3) теореми 1 є суттєвою.

**Приклад 2.** Розглянемо інверсну напівгрупу часткових ін'єкцій множини  $\{1, 2, 3\}$ :  $S = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \ 2 \\ 2 \ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix} \right\}$ . Легко перевірити, що  $A = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  і  $B = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  є ідеалами напівгрупи  $S$ , причому  $A \not\subset B$  і  $B \not\subset A$ . Тобто ідеали напівгрупи  $S$  не утворюють ланцюжок відносно включення. Очевидно, що  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix} \right\}$  є групою оборотних елементів напівгрупи  $S$ . Легко перевірити, що для напівгрупи  $S$  виконується умова 3). Нехай  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  і  $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Очевидно, що  $rank(\alpha) = rank(\beta)$ . Легко перевірити, що напівгрупа  $(S, *_\beta)$  містить рівно 7 таких елементів  $\rho$ , що  $\rho *_\beta \rho = \emptyset$ , а напівгрупа  $(S, *_\alpha)$  містить рівно 5 таких елементів  $\omega$ , що  $\omega *_\alpha \omega = \emptyset$ . Отже, напівгрупи  $(S, *_\alpha)$  і  $(S, *_\beta)$  не є ізоморфними. Таким чином, умова 2) теореми 1 є суттєвою.

#### 5. Висновки

Вивчення варіантів напівгрупи дозволяє одержувати додаткову інформацію про структуру вихідної напівгрупи. В даній замітці узагальнено один відомий результат [4, теорема 1] і окреслено межі застосування аналогу цієї теореми для інверсних напівгруп скінченного рангу.

1. Глускин Л.М. Идеалы полугрупп преобразований // Матем. сб. – 1959. – 47, № 3. – С. 111-130. 2. Дереч В.Д. Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 4. – С. 469 – 473. 3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1 – 286 с. 4. Цяпула Г.Ю. Напівгрупи перетворень із деформованим множенням // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2003.- № 3. – С. 82-88. 5. Derech V. Inverse semigroups with the deformed multiplication // 6th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts, Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 59-60. 6. Petrich M. Inverse semigroups. New York etc.: John Wiley and Sons, 1984. – 674 p.

## РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ З ІМОВІРНІСТЮ ОДИНИЦЯ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДУ ОДНОГО КЛАСУ ПЕРЕДГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано умови рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів  $\Theta$ -передгауссових випадкових процесів.

Conditions of uniform convergence with probability one of wavelet expansions of  $\Theta$ -pre-Gaussian random processes defined on the space  $\mathbb{R}$  are presented.

### 1. Вступ

Актуальною є задача про різноманітні розклади випадкових процесів за системами функцій. В [5] була використана загальна теорема про рівномірну збіжність вейвлет розкладів на скінченних інтервалах для функцій, які мають деякий степінь росту на нескінченності, для вивчення умов рівномірної збіжності з імовірністю один вейвлет розкладів  $\varphi$ -субгауссових випадкових процесів. Становить інтерес узагальнення цих результатів для нових класів випадкових процесів.

В статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів іншого класу випадкових процесів –  $\Theta$ -передгауссових. Спочатку розглядаються умови рівномірної збіжності на скінченному інтервалі вейвлет розкладів не випадкових функцій, які мають деяку степінь росту на нескінченності [1]. Потім ці умови пов'язуються з  $\Theta$ -передгауссовими випадковими процесами для отримання умов рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів випадкових процесів на скінченних інтервалах.

### 2. Основні відомості з вейвлет аналізу

Нехай  $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$  – деяка функція для перетворення Фур'є  $\hat{\phi}(y)$ , для якої виконуються умови:  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ ,  $\hat{\phi}(y)$  неперервна в точці 0 і майже скрізь  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(y + 2k\pi)|^2 = 1$ . Тоді якщо існує така  $2\pi$ -періодична функція

$m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$ , що справджується рівність  $\hat{\phi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$ , то функцію  $\phi(x)$  називають  $f$ -вейвлетом, а

функцію  $\psi(x)$ , яка є оберненим перетворенням Фур'є функції  $\hat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$ , –  $m$ -вейвлетом.

Нехай  $\phi \in f$ -вейвлетом. Кажуть [1], що виконується умова  $S$  для  $\phi$ , якщо існує така незростаюча функція  $\Phi(x)$ ,  $x \geq 0$ , для якої  $\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) dx < +\infty$  і справджується нерівність  $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$ . В подальшому суттєво використовується такий результат [5].

**Теорема 1.** Нехай виконується умова  $S$  для  $f$ -вейвлету  $\phi$  та  $m$ -вейвлету  $\psi$ , що відповідає  $\phi$ ;  $c(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  – така опукла функція, що: а)  $c(x) > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; б)  $c(x)$  зростає для  $x > 0$ ; в)  $\int_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|) dx < +\infty$ ; г) існує така додатна функція  $y(t)$ ,  $t > 0$ , що для досить великих  $x$ :  $c(kx) \leq c(x)y(k)$ , де  $k > 0$  – деяка константа.

Якщо  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , є такою вимірною на  $\mathbb{R}$  функцією, що  $|f(x)| < c(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  і  $f(x)$  неперервна на кожному інтервалі  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , то тоді рівномірно на кожному інтервалі  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$f_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\text{де } \alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0k}(x)} dx, \quad \beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{jk}(x)} dx, \quad \phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

### 3. Основна теорема про $\Theta$ -передгауссові випадкові процеси

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  стандартний імовірнісний простір. Випадкову величину  $\xi = \xi(\omega)$ ,  $E\xi = 0$ , називають передгауссовою, якщо існують такі числа  $H > 0$  і  $a > 0$ , що нерівність  $E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2 \lambda^2}{2}\right\}$  виконується для всіх  $\lambda \in (-H, H)$ . Клас передгауссових випадкових величин, визначених на стандартному імовірнісному просторі позначають  $\text{Prg}(\Omega)$ .

**Означення 1** [2]. Випадковий процес називається *передгауссовим*, якщо всі випадкові величини  $X(t)$ ,  $t \in T$  є передгауссовими.

Нехай  $X = (X(t), t \in T)$  є передгауссовим випадковим процесом. Позначимо

$$\theta_1(t) \equiv \Theta(X(t)), \quad \theta(t, s) \equiv \Theta(X(t) - X(s)), \quad t, s \in T.$$

**Означення 2** [2]. Характеристики передгауссового процесу  $X$  підпорядковані переднормі  $\Theta$ , якщо існують такі константи  $\gamma > 0$  й  $a \geq 1$ , що для  $|\lambda| < \gamma \theta_1^{-a}(t)$ :

$$E \exp\{\lambda X(t)\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \theta_1^2(t)}{2}\right\}, (1) \text{ а для } |\lambda| < \gamma \theta^{-a}(t, s): E \exp\{\lambda(X(t) - X(s))\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \theta^2(t, s)}{2}\right\}, \quad t, s \in T. \quad (2)$$

Такі процеси називають  $\Theta$ -передгауссовими.

Наступні дві теореми, які містять умови вибіркової неперервності процесу  $X$  в сенсі означень 3.1.11, 3.1.12 в [2], використовуються для доведення основної теореми 4 про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів.

**Теорема 2.** Нехай  $X(t)$ ,  $t \in T$ , – сепарабельний  $\Theta$ -передгауссовий випадковий процес,  $H(u)$  –  $u$ -ентропія на  $(T, \theta)$ ,  $a \geq 1$ ,  $\delta \equiv \min(a, 2)$ . Якщо для всіх  $\varepsilon > 0$  виконується умова

$$\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(u) du < +\infty, \quad (3)$$

то процес  $X(t)$ ,  $t \in T$ , є вибірково неперервним з імовірністю 1 на  $(T, \theta)$ .

Теорема 2 є частинним випадком леми 2 та теореми 2 зі статті [4].

**Теорема 3.** Нехай  $T = [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , а  $X = (X(t), t \in T)$  – сепарабельний  $\Theta$ -передгауссовий випадковий процес. Якщо існує неспадна функція  $\sigma(h)$ ,  $h > 0$ ,  $\sigma(0) = 0$ , така, що

$$\sup_{\{t, s \in T: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h), \quad (4)$$

$$\int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left( \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty \quad (5)$$

для будь-якого  $\varepsilon > 0$ , де  $\delta \equiv \min(a, 2)$ ,  $a \geq 1$ , то траєкторії процесу  $X$  є неперервними з імовірністю 1 в просторі  $(T, \theta)$ .

**Доведення.** Якщо процес  $X$  є сепарабельним на  $[a, b]$ , то з (4) випливає, що він є сепарабельним на  $(T, \theta)$ .

Для  $u$ -ентропії  $H(u) = \ln N(u)$  маємо таку нерівність на  $[a, b]$

$$N(u) \leq \frac{b-a}{2u} + 1, \quad (6)$$

тому виконання умови (3) впливає з виконання умови (5).

#### 4. Збіжність вейвлет розкладів

Використовуючи теорему 1 про збіжність вейвлет розкладів детермінованих функцій та теорему 3 про вибірку неперервності випадкових процесів, можна довести теореми про рівномірну збіжність з імовірністю 1 вейвлет розкладів  $\Theta$ -передгауссових випадкових процесів.

**Теорема 4.** Нехай  $X \equiv (X(t), t \in \mathbb{R})$  –  $\Theta$ -передгауссовий випадковий процес,  $R = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$  – розбиття числової прямої, де  $B_k = [a_k, a_{k+1})$ ,  $a_{k+1} - a_k \geq s_1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $s_1 > 0$  – деяка константа, і крім того виконуються такі умови:

1) існують такі неперервні зростаючі функції  $\sigma_k(x)$ ,  $x > 0$ ,  $\sigma_k(0) = 0$ , що на кожному  $B_k$

$$\sup_{\{t, s \in B_k: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma_k(h);$$

2) існують числа  $\delta = \min(a, 2)$ ,  $a \geq 1$  (див. озн. 2),  $w_{0k} \equiv \sigma_k(\sup_{t \in B_k} |t_{0k} - t|)$ ,  $t_{0k} \in B_k$  такі, що збігається ентропій-

ний інтеграл

$$\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma_k^{(-1)}(u)) du < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0; \quad (7)$$

3) існує додатна опукла функція  $c(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , що для досить великих  $x$ :  $c(kx) \leq c(x)y(k)$ , де  $y(x)$ ,  $x > 0$  – деяка невід'ємна функція,  $k > 0$  – деяка стала, і крім того існують такі числа  $0 < A_k < \min(1, w_{0k}^{2(2-a)})$ ,  $p_k \in (0, 1)$ ,  $\kappa \in (0, 1)$ , що збігаються такі ряди:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\theta_1(t_{0k})}{c^\kappa(a_k)}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_{0k}}{c^\kappa(a_k)(1-p_k)}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\psi_k(p_k)}{c(a_k)(1-p_k)}, \quad (8)$$

$$\text{де } \psi_k(p_k) \equiv \frac{w_{0k}}{(1-p_k)R_k} \max \left( w_{0k} J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k} p_k); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_k} \gamma} \frac{(1-p_k)R_k}{w_{0k}} \left[ w_{0k} J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k} p_k) \right]^\delta \right) +$$

$$+(1-p_k)R_k J_{1-\frac{1}{\delta}}(w_{0k}p_k), \quad J_r(\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon H^r(\sigma_k^{(-1)}(u)) du, \quad R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k}; \quad (9)$$

3) на інтервалі  $I \equiv [a, b]$  існує така неспадна функція  $\sigma_I(x)$ ,  $x > 0$ ,  $\sigma_I(0) = 0$ , що для будь-якого  $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\{t,s \in I: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma_I(h), \quad \int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left( \frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty; \quad (10)$$

4)  $\phi \in f$ -вейвлетом, а  $\psi$  –  $m$ -вейвлетом, що відповідає  $\phi$ , для яких виконується умова  $S$  та  $\int_{\mathbb{R}} c(x) \Phi(|x|) dx < +\infty$ .

Тоді з імовірністю 1 існують величини  $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\phi_{0k}(t)} dt$ ,  $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\psi_{jk}(t)} dt$  і має місце збіжність

$$X_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x)$$

рівномірно на кожному інтервалі  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ .

**Доведення.** З теореми 3 та припущення (10) випливає, що траєкторії процесу  $X$  є неперервними з імовірністю 1. З теореми 3.1 [3] та умов (7), (8) випливає, що з імовірністю 1  $|X(t)| < \xi c(t)$ , (11) де  $\xi > 0$  і  $P\{\xi < \infty\} = 1$ . Таким чином, твердження теореми 4 випливає з (11) та теореми 1.

Розглянемо тепер квазістаціонарний (стаціонарний) випадковий процес. Очевидно, що умови теореми 4 повинні значно спроститися, що і буде показано в наступній теоремі 5, яка є дуже важливим частинним випадком для застосування.

**Теорема 5.** Нехай  $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$  – розбиття числової прямої з теореми 4, причому  $|B_k| \leq |B_{k+1}|$ ,  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  – квазістаціонарний (стаціонарний) сепарабельний  $\Theta$ -передгауссовий випадковий процес, для якого існує неперервна зростаюча функція  $\sigma(x)$ ,  $x > 0$ ,  $\sigma(0) = 0$  та константа  $w$ , що

$$\sup_{|t-s| \leq h} \Theta(X(t) - X(s)) = \sup_{|t-s| \leq h} \theta(t, s) \leq \sigma(h), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \theta_1(t) \leq \tau < +\infty, \quad (12)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma \left( \sup_{t, s \in B_k} |t - s| \right) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(|a_{k+1} - a_k|) \leq w < +\infty,$$

і, крім того, виконується умова 4) теореми 4, існують числа  $\delta = \min(a, 2)$ ,  $1 \leq a \leq 2$  (див. ozn. 2)  $p \in (0, 1)$ ,  $\kappa \in (0, 1)$  такі, що збігається інтеграл

$$\int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty, \quad \varepsilon > 0, \quad (13)$$

та така додатна зростаюча функція  $c(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , що для достатньо великих  $x$ :  $c(kx) \leq c(x)y(k)$ , де  $y(t)$ ,  $t > 0$  – деяка додатна функція така, що збігаються ряди

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-\kappa}(a_k); \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1} - a_k + 1). \quad (14)$$

Тоді з імовірністю 1 існують величини  $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\phi_{0k}(t)} dt$ ,  $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\psi_{jk}(t)} dt$  і має місце збіжність

$$X_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x) \text{ рівномірно на кожному інтервалі } [\alpha, \beta].$$

**Доведення.** Теорема 5 випливає з теореми 4. Дійсно, оскільки при  $a \geq 1$  і  $\delta = \min(a, 2)$  маємо  $1 \leq \delta \leq 2$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\delta} \leq 1$ ,  $0 \leq 1 - \frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{2}$ ,  $N(\varepsilon) > 1$  для всіх  $\varepsilon > 0$  і  $N(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ , то  $H(\varepsilon) = \ln(N(\varepsilon)) > 0$  і  $H(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ .

Використаємо теореми 2 та 3. Якщо виконується умова (13), то також виконується і (7). Більше того, з (6) можна отримати, що  $\varepsilon J_r(\varepsilon) \leq \int_0^\varepsilon \ln^r \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du$  та  $\varepsilon J_{1-\frac{1}{\delta}}(\varepsilon) \leq \varepsilon J_{\frac{1}{\delta}}(\varepsilon) \leq \varepsilon J_1(\varepsilon)$  для будь-яких  $\varepsilon > 0$ .

З (12) випливає

$$w_{0k} \equiv \sigma_k \left( \sup_{t \in B_k} |t_{0k} - t| \right) \leq w. \quad (15)$$

Оскільки випадковий процес  $X(t)$  є квазістаціонарним (стаціонарним), то при  $1 \leq a \leq 2$  можна замість  $A_k$ ,  $w_{0k}$  в (9) вибрати константи  $A_0 > 0$  та  $\hat{w} > 0$  (див. (12), (15)). Тоді отримаємо

$$\psi_k(p) \leq \frac{\hat{w}}{(1-p)} \max \left( \hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0} \gamma} \frac{(1-p)R_k}{\hat{w}} \left[ \hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p) \right]^\delta \right) + (1-p) R_k J_{\frac{1}{1-\delta}}(\hat{w}p), \text{ де}$$

$$R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k} \leq \tau + \frac{\hat{w}}{1-p}. \text{ Справді, оскільки } |B_k| \leq |B_{k+1}|, \text{ то } |w_{0k}^{2(2-a)}| \leq |w_{0k+1}^{2(2-a)}| \text{ і } A_k \geq A_0 \neq 0. \text{ Тому } \frac{1}{A_k} \leq \frac{1}{A_0}.$$

Таким чином

$$\psi_k(p) \leq \max \left( \frac{\hat{w}}{\tau p(1-p) + p\hat{w}} \int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0} \gamma p^\delta} \left[ \int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta + \frac{\tau(1-p) + \hat{w}}{\hat{w}p} \int_0^{\hat{w}p} H^{1-\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right),$$

$$\text{за умови, що збігаються інтеграли } \int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du, \left[ \int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta, \int_0^\varepsilon H^{1-\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du.$$

Дійсно, з (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta &\leq \left[ \int_0^\varepsilon \left[ \ln \left( \frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \left[ \int_0^\varepsilon \left[ \ln(a_{k+1}-a_k+1) + \ln \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \\ &\leq \left[ \int_0^\varepsilon \left[ \ln(a_{k+1}-a_k+1) \right]^\frac{1}{\delta} du + \int_0^\varepsilon \left[ \ln \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta = \left[ \varepsilon \left[ \ln(a_{k+1}-a_k+1) \right]^\frac{1}{\delta} + \int_0^\varepsilon \left[ \ln \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \\ &\leq C_\delta \left[ \varepsilon^\delta \ln(a_{k+1}-a_k+1) + \left( \int_0^\varepsilon \ln^\frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right)^\delta \right] < +\infty, (16) \end{aligned}$$

де  $C_\delta > 0$  – деяка константа. Отже, умова (7) виконується.

Слід зауважити, що  $a_{k+1} - a_k \geq s_1$  і  $0 < \ln(s_1 + 1) \leq \ln(a_{k+1} - a_k + 1)$ . З (16) та (14) випливає, що

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ c^{-1}(a_k) \left[ \int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta \right\} \leq C_\delta \varepsilon^\delta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1} - a_k + 1) + C_\delta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \left( \int_0^\varepsilon \ln^\frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right)^\delta < +\infty,$$

тобто виконуються і умови (8).

Очевидно, що (10) також виконується. Таким чином, всі умови теореми 4 виконуються і теорема 5 доведена.

**Приклад.** Нехай  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  – сепарабельний  $\Theta$ -передгауссовий випадковий процес;

$$\sigma(h) = \frac{b_1}{\left( \ln \left( b_2 + \frac{1}{h} \right) \right)^\beta}, \text{ де } b_1 > 0, b_2 \geq 2, \beta > \frac{1}{\delta}; c(t) = \ln^d(|t|), d > \frac{1}{\kappa}. \text{ Визначимо відрізки } B_k \text{ так: } a_k = \text{sign}(k) e^{|k|},$$

$k \in \mathbb{Z}$ . Тоді виконуються всі умови теореми 5 і справедливий її висновок, тобто з імовірністю 1 існують величини

$\alpha_{0k}, \beta_{jk}$  і має місце збіжність  $X_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x)$  рівномірно на кожному інтервалі  $[\alpha, \beta]$ .

$$\text{Справді, обернена до } \sigma(h) \text{ функція має вигляд } \sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{\exp \left\{ \left( \frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2}.$$

$$\text{Оскільки } \frac{1}{2} \left( \exp \left\{ \left( \frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2 \right) + 1 = \frac{1}{2} \exp \left\{ \left( \frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - \frac{1}{2} b_2 + 1 \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ \left( \frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} \text{ для } b_2 \geq 2, \text{ то умова (13) має вигляд}$$

$$\int_0^\varepsilon \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \left( \exp \left\{ \left( \frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2 \right) + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \leq \int_0^\varepsilon \left( \ln \frac{1}{2} + \left( \frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta} \right)^\frac{1}{\delta} du \leq \int_0^\varepsilon \left( \ln \frac{1}{2} \right)^\frac{1}{\delta} du + \int_0^\varepsilon \left( \frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta \delta} du = \varepsilon \left( \ln \frac{1}{2} \right)^\frac{1}{\delta} + \frac{\beta \delta}{\beta \delta - 1} b_1^\frac{1}{\beta \delta} \varepsilon^\frac{\beta \delta - 1}{\beta \delta} < +\infty.$$

Очевидно, що  $\frac{1}{c(a_k)} = \frac{1}{|k|^d}$  і  $\ln(a_{k+1} - a_k + 1) = \ln(e^{k+1} - e^k + 1) \leq \ln(2e^k(e-1)) = k + C_1$ , де  $C_1 > 0$  – деяка константа.

Розглянемо перший ряд в (14):  $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c^{-\kappa}(a_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{\kappa d}}$ , який збігається для  $\kappa d > 1 + \delta_1$ , де  $\kappa \in (0, 1)$ , а  $\delta_1 > 0$

– деяка константа. Тоді другий ряд в (14), тобто ряд  $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1} - a_k + 1) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{k}{|k|^d} = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{d-1}}$  збігається для  $d - 1 > 1 + \delta_2$ , де  $\delta_2 > 0$  – деяка константа.

Отже, умова (14) виконується для  $d > \frac{1}{\kappa} + \frac{\delta_1}{\kappa}$ ,  $\kappa \in (0, 1)$ , що і слід було показати.

## 5. Висновки

В даній статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів  $\Theta$ -передгауссових випадкових процесів на скінчених інтервалах. В подальших дослідженнях становить інтерес уточнення теореми 4 та доведення відповідних теорем про збіжність вейвлет розкладів  $\Theta$ -передгауссових випадкових процесів. Слід зазначити, що важливим буде отримання подібних результатів для інших класів випадкових процесів.

1. Козаченко Ю. В. Лекції з вейвлет аналізу. –К., 2004. 2. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes, AMS, Providence, RI., 2000. 3. Dariyuchuk I.V., Kozachenko Yu. V. Estimates for the distribution of the supremum of a  $\Theta$ -pre-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 15, No. 2, 2008. 4. Kozachenko Yu. V., Livins'ka O.I. Analytic properties of certain classes of stochastic processes from the space  $Pred_\Theta(\Omega)$  // Theor. Probability and Math. Statist., No. 51, 1995. 5. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I. On uniform convergence of wavelet expansions of  $\Phi$ -sub-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 14, No. 3, 2005.

Надійшла до редколегії 19.11.2007

УДК 519.21

М. Моклячук, д-р фіз.-мат. наук, Н. Щестюк канд. фіз.-мат. наук  
e-mail: mmp@univ.kiev.ua

## РОБАСТНА ФІЛЬТРАЦІЯ ОДНОРІДНИХ ТА ОДНОРІДНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ

*Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів випадкових полів.*

*Problem of estimation of the functional on the unknown values of a random field from observations of the homogeneous and correlated random fields is investigated. The least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of the linear functional are found for various classes of random fields.*

## 1. Вступ

Задачі оцінювання випадкових полів мають широке застосування при розгляді проблем кодування та обробки сигналів, проблем розпізнавання образів зображень, у задачах теорії автоматичного регулювання, метеорології, океанографії, статистичної гідромеханіки та економетрики. Теорію прогнозування стаціонарних процесів та випадкових полів досліджено у роботах Н. Вінера, Ю.А. Розанова, М. Г. Крейна, А. М. Яглома, М.П. Ядренка. Але запропоновані у тих роботах методи оцінювання стохастичних процесів та випадкових полів можна використовувати лише за умови відомої спектральної щільності. В більшості практичних задач точної інформації про спектральні щільності випадкових процесів (полів) немає, а є лише деякі статистичні характеристики процесів (полів). Тоді, в умовах спектральної невизначеності доцільно застосовувати підхід, за яким шукають оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такий метод набув терміну мінімаксного. Огляд результатів з мінімаксної (робастної) обробки інформації можна знайти у С.А.Кассам та Г.В.Пур [1]. У статті Ю.Франка [5] проблема мінімаксної екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. У роботах [2,3] досліджувались задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень дискретних та неперервних випадкових полів за даними спостережень поля у спеціальних областях з шумом. Для знаходження мінімаксних оцінок було зроблено припущення про некорельованість полів, що спостерігаються. Проте в більшості випадків результати спостережень утворюють однорідне поле  $\xi(u, v)$ , що є корельованим з  $\eta(u, v)$ .

У даній роботі досліджується задача мінімаксної фільтрації лінійного функціоналу  $A\xi = \sum_{k,j \in E} a(k, j)\xi(k, j)$  від невідомих значень однорідного випадкового поля  $\xi(s, t)$ , за даними спостережень поля  $\xi(u, v) + \eta(u, v)$  при  $(u, v) \in Z^2$ ,  $\xi(u, v)$  та  $\eta(u, v)$  – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. За допомогою методів субдиференціального числення знайдені формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних (робастних) спектральних характеристик для певних класів спектральних щільностей.

## 2. Оптимальні лінійні оцінки функціоналів за умови відомої матриці спектральних щільностей.

Нехай спостерігається випадкове поле  $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$  при  $(u, v) \in Z^2$ , де  $\xi(u, v)$  та  $\eta(u, v)$  – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей



$$W(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) & f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \\ f_{\eta\xi}(\lambda, \mu) & f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Лінійна оцінка  $\hat{A}\xi$  функціоналу  $A\xi = \sum_{k,j \in E} a(k,j)\xi(k,j)$  за даними спостережень поля  $\xi(u,v) + \eta(u,v)$  при  $(u,v) \in Z^2$  має вигляд  $\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda, \mu) Z_{\xi}(d\lambda, d\mu)$ , де  $Z_{\xi}(\Delta_1, \Delta_2)$  - ортогональна випадкова міра,  $h(\lambda, \mu)$  - спектральна характеристика оцінки  $\hat{A}\xi$ . Функція  $h(\lambda, \mu)$  належить підпростору  $L_2(f_{\xi\xi})$ , породженому функціями  $e^{i(u\lambda+v\mu)}$  при  $(u,v) \in Z^2$ ,  $h(\lambda, \mu) = \sum_{(u,v) \in E} h(u,v) e^{-i(u\lambda+v\mu)}$ . З умов ортогонального проектування, яким має задовольняти оптимальна функція  $h(\lambda, \mu)$  випливає, що

$$h(\lambda, \mu) = \frac{A(\lambda, \mu) f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)} \quad (2)$$

Спектральна характеристика  $h(\lambda, \mu)$  оптимальної лінійної оцінки функціонала  $A\xi$  мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(W, h(W)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) + 2 \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu \quad (3)$$

### 3. Мінімаксний підхід до задач лінійної оцінки функціоналів.

Якщо матриця спектральних щільностей  $W(\lambda, \mu)$  (1) точно не відома, але відомо, що вона належить до деякого класу  $D_W$  матриць спектральних щільностей, то доцільно знаходити мінімаксні (робастні) оцінки, що дають найменшу похибку для всіх матриць з деякого класу  $D_W$  матриць можливих спектральних щільностей [5].

Для заданої множини матриць спектральних щільностей  $D_W$  матрицю  $W_0(\lambda, \mu)$  будемо називати найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціоналу  $A\xi$ , якщо  $\Delta(W_0) = \Delta(h(W_0); W_0) = \max_{W \in D_W} \Delta(h(W); W)$ . Спектральну характеристику  $h^0(\lambda, \mu)$  оптимальної оцінки функціоналу  $A\xi$  будемо називати мінімаксною (робастною), якщо  $\min_{h \in H_D} \sup_{W \in D_W} \Delta(h; W) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h^0; W)$ .

Найменш сприятлива матриця  $W_0$  з опуклої множини матриць спектральних щільностей  $D_W$  та мінімаксна спектральна характеристика  $h^0 = h(W_0)$  утворюють сідлову точку  $(h^0, W_0)$  функції  $\Delta(h; W)$  на множині  $H_D \times D_W$ . Нерівності сідлової точки  $\Delta(h^0; W) \leq \Delta(h^0; W_0) \leq \Delta(h; W_0)$  для  $\forall h \in H_D \quad \forall W \in D_W$  виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(h(W_0); W_0) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h(W_0); W). \quad (4)$$

Задача на умовний екстремум (4) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [5]

$$\Delta_D(W) = -\Delta(h(W_0); W) + \delta(W|D_W) \rightarrow \inf,$$

де  $\delta(W|D_W)$  - індикаторна функція множини  $D_W$ . Розв'язок цієї задачі визначається умовою  $0 \in \partial \Delta_D(W_0)$ , де  $\partial \Delta_D(W_0)$  - субдиференціал опуклого функціоналу  $\partial \Delta_D(W)$  в точці  $W_0$ . Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб точка  $(W_0)$  належала множині мінімумів опуклої функції

### 4. Мінімаксні оцінки для фіксованих $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ , $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ .

Нехай щільності  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$  фіксовані, а щільність  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$  - невизначена. Розглядаючи (3) можна прийти до висновку, що  $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$ ,  $\forall \mu \in [-\pi, \pi]$  найменш сприятливою  $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$  буде  $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ . Зрозуміло, що в цьому випадку  $\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = 0$ . Тоді розглянемо

$$\Delta(h(W_0); W) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - 2|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|} d\lambda d\mu \quad (7)$$

як функцію від  $|f_{\xi\eta}|$ . Позначимо  $f(\lambda, \mu) = |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ ,  $c_0(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0) = f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ ,

$$c_1(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0) = f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu).$$

Отже, (7) матиме вигляд  $\Delta(h(f_0), f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - f(\lambda, \mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu$ .

#### 4.1. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon}(\lambda)$ .

Нехай відомо, що  $f = |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$  належить моделі  $\varepsilon$  – околу в просторі  $L_2$ , тобто  $f \in D_{2\varepsilon}$ ,

$$D_{2\varepsilon} = \left\{ f(\lambda, \mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu \leq \varepsilon(\lambda), \forall \lambda \in [-\pi, \pi] \right\},$$

де  $u(\lambda, \mu)$  — невід’ємна функція на  $L^\infty(\mu)$  для всіх  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Відомо, що субдиференціал індикаторної функції  $\delta(f|D_{2\varepsilon})$  у точці  $f_0$  має вигляд [5]

$$\partial\delta(f_0|D_{2\varepsilon}) = \begin{cases} \{0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu < \varepsilon(\lambda) \\ \{\gamma(\lambda)\phi_0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon(\lambda) \end{cases}, \quad (8)$$

де  $\phi_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))f(\lambda, \mu) d\mu$ ,  $\gamma(\lambda)$  — невід’ємна вимірна функція Лагранжа..

За умови, що маємо фіксовані  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ , а отже обмежені  $c_0(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0)$ ,  $c_1(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0)$ , функціонал  $\Delta(h(f_0); f)$  є неперервним лінійним функціоналом у просторі  $L_2$ . Задача визначення найменш сприятливої в  $D_{2\varepsilon}(\lambda)$  спектральної щільності  $f_0$  при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала  $A\xi$  зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\tilde{\Delta}(h(f_0); f) = -\Delta(h(f_0); f) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - f(\lambda, \mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu.$$

на множині спектральних щільностей  $D_{2\varepsilon}(\lambda)$ . Для цього можна знайти мінімальне значення  $\Delta(h(f_0); f)$  для кожного  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  в кожній точці множини  $D_{2\varepsilon}(\lambda)$ . Для всіх  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  маємо

$$\tilde{\Delta}'(h(f_0); f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta})f_0(\lambda, \mu) + c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta})}{(c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f_0(\lambda, \mu))^2} f(\lambda, \mu) d\mu.$$

Враховуючи (8) одержуємо, що  $f_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon}$  є найменш сприятливою щільністю, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda) \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi],$$

та існує така  $\gamma_1(\lambda) \geq 0$ , що для всіх варіацій  $f(\lambda, \mu)$  щільності  $f_0(\lambda, \mu)$  та для  $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$  виконується рівняння

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1 f_0(\lambda, \mu) + c_0}{(c_1 - 2f_0(\lambda, \mu))^2} f(\lambda, \mu) d\mu = \gamma_1(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} (f^0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu)) f(\lambda, \mu) d\mu.$$

Звідси

$$|A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1 f_0(\lambda, \mu) + c_0}{(c_1 - 2f_0(\lambda, \mu))^2} = \gamma_1(\lambda) (f^0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu)) \quad (9).$$

Отже, справджується наступна теорема.

**Теорема 1.** Якщо  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$  є фіксованими,  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \in D_W = D_{2\varepsilon}(\lambda)$  та задовольняє умову мінімальності [4], то спектральна щільність  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$  є найменш сприятливою в  $D_W = D_{2\varepsilon}(\lambda)$  при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала  $A\xi$ , якщо  $f_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon}$  є розв’язком рівняння (9),

$$\gamma_1(\lambda) \neq 0, \text{ якщо } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]. \text{ Функція } h(f_0), \text{ обчислена за формулою (2),}$$

є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала  $A\xi$ .

#### 4.2 Найменш сприятливі щільності в класі $D_u^v(W)$ .

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей  $D_W = D_u^v(W)$ .

$D_v''(W) = \left\{ f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \mid v(\lambda, \mu) \leq |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq u(\lambda, \mu) \right\}$ , для фіксованих  $f_{\xi\xi}$ ,  $f_{\eta\eta}$ .

Якщо дослідити функцію, визначену (7) на монотонність, то маємо, що підінтегральна функція  $\frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - 2|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|}$  як функція від  $|f_{\xi\eta}|$  досягає екстремуму при  $|f_{\xi\eta}| = \frac{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} \pm \sqrt{(f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta})^2}}{2} = \frac{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} \pm |f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta}|}{2}$ .

Зрозуміло, що супремум для підінтегральної функції буде досягатися для  $\min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$ . Отже, функція, визначена (7) буде зростати при  $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$  і спадати при  $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \geq \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$ . Нерівність  $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq \sqrt{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)}$  впливає з додатної визначеності матриці  $D_W$ .

Якщо позначити  $L(\lambda, \mu) = \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$ , то найменш сприятливою буде щільність  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ , де

$$|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| = \begin{cases} v(\lambda, \mu), & L(\lambda, \mu) \leq v(\lambda, \mu) \\ L(\lambda, \mu), & v(\lambda, \mu) \leq L(\lambda, \mu) \leq u(\lambda, \mu) \\ u(\lambda, \mu), & u(\lambda, \mu) \leq L(\lambda, \mu) \end{cases} \quad (10)$$

Отже, справджується наступна теорема.

**Теорема 2.** Якщо  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$  є фіксованими, а  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \in D_W = D_v''(W)$ , то спектральна щільність  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ , де  $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$  задовольняє (10) буде найменш сприятливою в класі  $D_W = D_v''(W)$ . Мінімакс-ну спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку можна обчислити за формулами (2), (3) відповідно.

## 5. Висновки.

У статті досліджується задача мінімаксного оцінювання функціонала  $A\xi$  від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. За умови, що щільності  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$  фіксовані, а щільність  $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$  належить моделі  $\varepsilon$  – околу в  $L_2$  або класу  $D_v''(W)$  знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала  $A\xi$ . Надалі бажано дослідити випадок, коли точні значення щільностей  $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ ,  $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$  також невідомо, але відомо деякі обмеження на ці щільності.

1. Кассам С.А., Пур Г.В. Робастные методы обработки сигналов: Обзор // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике. - 1985. - Т.73. № 3. - С. 54-110. 2. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Про задачу фільтрації випадкових полів // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки, - 2002, вип. № 5, с. 116-126. 3. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Про фільтрацію випадкових полів дискретного аргументу // Вісник. Математика. Механіка., - 2003, вип. № 9-10, с. 117-123. 4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, 1990. - 272 с. 5. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series // Z. Wahr. Verw. Geb. - 1985. - Vol. 68. - P. 337-364.

Надійшла до редколегії 24.01.2008

УДК 539.3

В. Андрущенко, пров. інж., Д. Лібов, студ., М. Якименко, асп.  
andron@univ.kiev.ua, yanko@univ.kiev.ua

## ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРІВ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ КОРОТКИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ

**Запропоновано методику визначення частотних характеристик пружних циліндрів. Збудження коливань та знімання резонансних характеристик здійснюється за допомогою заклеєних на торцях циліндра п'єзокерамічних дисків. Узгодження результатів експериментів із даними розрахунків, широко відомих в літературі, підтверджує ефективність експериментального та теоретичного підходу.**

**Technique for determining of frequency spectra elastic cylinders is proposed. Vibrations excitation and resonance characteristics taking is accomplished by means of glued piezoceramic disks. Concordance between experimental results and widely known in literature data of calculations confirm effectiveness of experimental and theoretical approaches.**

## 1. Вступ

При проектуванні технічних пристроїв регулярно виникають задачі, пов'язані із застосуванням коротких циліндрів. Прикладами таких приладів є, наприклад, гравітаційні антени [4], п'єзокерамічні резонатори та випромінювачі ультразвукових хвиль [11], резонансні перетворювачі для деформування поверхні адаптивних дзеркал оптичних систем [8], п'єзоелектричні генератори (струму та напруги) [2], модулятори лазерного випромінювання та інше.

Залежно від задач, що розв'язуються, виникають ті чи інші практичні проблеми. Так, наприклад, при конструюванні гравітаційних антен виникають задачі вибору оптимальної геометрії не тільки із умов мінімального впливу дисипації енергії у вузлах її кріплення, але й забезпечення моночастотності. В якості чутливого елемента гравітаційної антени часто використовується багатотонний суцільний циліндр із спеціального алюмінієвого сплаву, в якого меха-

© В. Андрущенко, Д. Лібов, М. Якименко, 2008

нічна добротність досягає тисяч одиниць. Переміщення обох торців циліндра реєструються за допомогою ємнісних датчиків, чутливість котрих може досягати реєстрації зміщення при броунівському русі молекул повітря на частоті першої поздовжньої форми коливань циліндра.

Знання власних частот циліндричних зразків може бути використано для визначення пружних сталих металевих зразків у формі скінчених циліндрів. Методики визначення модуля зсуву  $G$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu$  за відношенням декількох власних частот подаються, наприклад, в роботі [14].

У всіх вище наведених прикладах циліндричне тіло здійснює коливальні рухи і знання їх характеристик (як на поверхні так і в об'ємі) надзвичайно важливе. Необхідно відмітити, що виникнення та визначення точок (областей), де виникають максимальні нормальні та дотичні напруження можливе в більшості практичних випадках тільки за умови проведення теоретичних розрахунків. Питання про те, наскільки точними можуть бути такі розрахунки, які математичні моделі найкращим чином описують фізичний процес деформування суцільних циліндрів із різними співвідношеннями діаметра до довжини є актуальними на сьогоднішній день.

В даній роботі пропонується теоретичний розв'язок задачі про вимушені коливання ізотропного циліндра скінченої довжини та експериментальна методика визначення власних частот коливань.

## 2. Об'єкт дослідження, цілі та задачі

Об'єктом дослідження був обраний суцільний циліндр із співвідношенням діаметра до довжини 1:2.812. На перший погляд, хоча такий циліндр не підходить для описання одновимірною моделлю, тим не менше навіть при таких співвідношеннях перша поздовжня форма коливань (стрижнева) визначається відомою формулою [7] з точністю до декількох відсотків. Другою причиною вибору такого співвідношення є те, що краєві форми коливань на обох торцях вже чітко проявляються і не являються сильно зв'язаними між собою, так як вони є експоненціально згасаючими вздовж довжини циліндра. Їх вивчення представляє для нас неабиякий інтерес.

З такою метою досліджуваний циліндр мав розміри 35,95 мм (діаметр):101,1 мм (довжина) і був виготовлений із алюмінієвого сплаву типу Д16Т. Цей сплав був вибраний внаслідок його високої механічної добротності  $Q_{\text{мех}}$ , що складає тисячі одиниць. Досліджуваний циліндр був виготовлений із бруса діаметром 50 мм на токарному станку підвищеної точності, з похибкою не більше 0,01 мм. Неплощинність торців відносно поздовжньої осі не гірше  $\pm 30$  кутових секунд. Клас чистоти поверхні – не гірше восьмого. На даному етапі досліджень, коли не ставилася задача отримання граничних характеристик по збереженню максимально можливої добротності замість ємнісних датчиків [4, 10] для електричного збудження і прийому були використані дві тонкі п'єзокерамічні пластини складу "НБС-3" (діаметр 39.8 мм, товщина 1.0 мм, поляризовані по товщині), які були наклеєні на торці епоксидною смолою. З метою зменшення товщини епоксидного клею, пластини під час заклеювання притискувалися вантажем вагою 5 кг. По нашим підрахункам товщина епоксидного клею не перевищила 0.05 мм, а на більшій площі була меншою. Після підсушування і витримки для стабілізації властивостей протягом декількох діб циліндричний зразок був готовий для проведення дослідів (рис.1). Необхідно було зняти резонансний спектр пружних коливань, провести його аналіз і виділити основні резонанси (тони), а також порівняти з результатами теоретичних дослідів.

## 3. Експериментальна установка і методика досліджень



Рис.2. Експериментальна установка з генератором X1-46

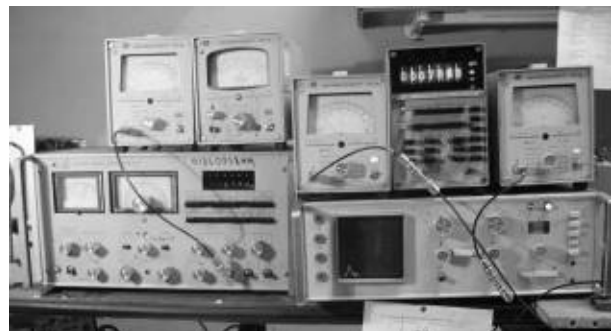


Рис.3. Експериментальна установка з генератором ГЗ-117

Експериментальна установка (рис.2) подібна до тієї, що описана в [1]. На рис.4 зображено блок-схему експериментальної установки для зняття амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та форм коливань. Зокрема зображено: генератор змінної частоти (ГКЧ-46), індикатор (Х1-46), підсилювач потужності (У7-3), частотомір (ЧЗ-57), вольтметр (ВЗ-38), двокоординатний самопис (Н-306),  $R_{\text{ш}}$  – струмовий резистор величиною 15 Ом, ПЕ1 та ПЕ2 – п'єзоелементи на торцях досліджуваного циліндра із дюралюмінію, Вк1 – тумблер для шунтування струмового резистора, Вк2 – тумблер для підключення на вимірювання або вхідної напруги (із ПЕ2) або вхідного струму (через ПЕ1). При

перемиканні із вимірювання по напрузі на вимірювання по струму вимикачі Вк1 та Вк2 перемикаються синхронно. Положення на рисунку відповідає вимірюванню на АЧХ при реєстрації струму.

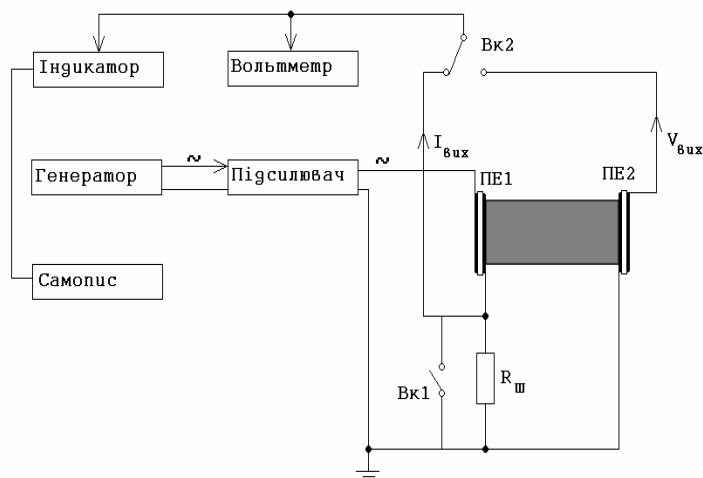


Рис.4 Блок-схема експериментальної установки

Цікаво відмітити, що добротність циліндричного резонатора з алюмінієвого сплаву така, що при подачі напруги 1 В на один із п'єзоелементів, інтенсивність збудження буде такою, що вихідна напруга на іншому п'єзоелементі буде досягати 4 В – на крайовій моді 77,34 кГц, а на першій поздовжній, для порівняння, тільки 0,4 В. Основна частина цієї напруги створюється радіальною компонентою деформації наклеєної круглої п'єзокерамічної пластини і в першому наближенні можна підрахувати рівень переміщень (в мікронах), а також еквівалентні механічні радіальні напруження, які необхідно було б прикласти до п'єзодиску для створення потенціалу рівного 4 В.

Щодо оцінки механічної добротності досліджуваного циліндру з алюмінієвого сплаву на першій поздовжній моді коливань слід зауважити, що під час проведення експериментальних досліджень було виявлено, що коректне визначення форми резонансного піку, і відповідно, визначення частот, на яких рівень сигналу зменшується в  $1/\sqrt{2}$  рази відносно максимального, викликає труднощі. Це пов'язано зі стабільністю генератора (пристрій Х1–46). Більш чітко вид АЧХ і добротність були визначені за допомогою генератора ГЗ–117 (рис.3). Безсумнівно, що механічна добротність алюмінієвого сплаву і, відповідно, циліндру із нього виготовленого буде ще вище (у декілька разів), якщо торці не будуть задемпфовані п'єзокерамікою і тонким шаром епоксидної смоли. П'єзоелементи виконують роль приєднаної маси і приєднаної жорсткості. Оскільки маса пластинок значно менша, ніж маса циліндру, пониження першої поздовжньої моди буде якісно не суттєвим, тим більше це майже не впливає на форми коливань.

#### 4. Результати експериментальних досліджень.

В результаті експериментів було отримано АЧХ суцільного алюмінієвого циліндра, збуджуваного за допомогою приклеєних на торцях тонких п'єзокерамічних дисків. Перед заклеюванням п'єзодисків було отримано також їх власні частоти, що склали 57,49 кГц, 151,49 кГц, 240,70 кГц, 328,59 кГц, 415,57 кГц (також див. [12]). По співвідношенню цих частот можна розрахувати при необхідності модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, що є важливим для врахування жорсткостей приєднаних мас та їх впливу на частоти власних коливань системи циліндр – п'єзодиски.

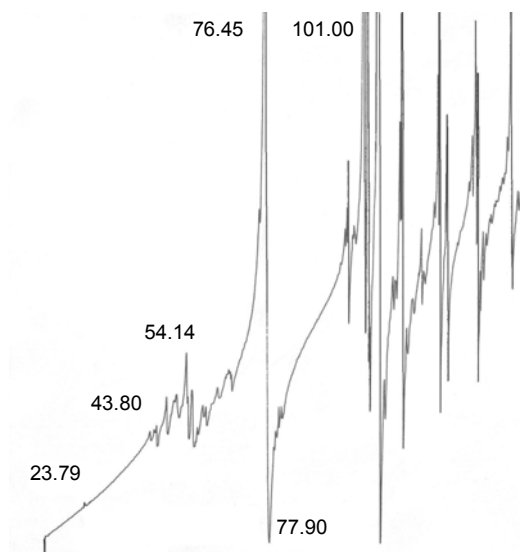


Рис.5. АЧХ суцільного циліндра із алюмінієвого сплаву (Д16Т), реєстрація струму

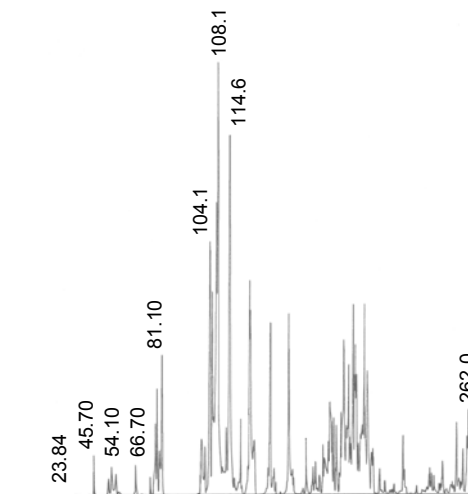


Рис.6. АЧХ, знята при збудженні одного п'єзоелемента (ПЕ1) і реєстрації сигналу з іншого п'єзоелемента (ПЕ2)

Спершу АЧХ була знята по струму через резистор  $R=15$  Ом. Рис.5. видно, що частотний спектр дуже щільний (багато резонансів), а перші інтенсивні резонанси можна побачити з частоти 76 кГц. В районі 23 кГц спостерігається невеликий сплеск, а на частотах 43 – 54 кГц менш високодобротні резонанси.

Подібна АЧХ отримується при подачі живлення на один п'єзоелемент (рис.6), а сигнал з іншого п'єзоелемента при цьому використовується для реєстрації вихідної напруги.

Із рис.5 та 6 видно, що резонанс на частоті 23 кГц проявляється не чітко і не досягає свого максимуму. Більш якісно цей резонанс був зафіксований окремо, у вузькій смузі змінення частоти за той же проміжок часу, коли коливна система у вигляді циліндричного резонатора встигала виходити на встановлений режим. Амплітудно-частотна характеристика першої поздовжньої моди коливань приведена на рис.7. Зашумування сигналу пов'язане з перешкодами, що виникають від генератора розгортки. У ручному режимі налаштування на частоту таких кидків сигналу не спостерігається, що дозволяє впевнено визначати резонансну частоту з точністю  $\pm 1$  Гц та знаходити точки  $f_a$  і  $f_b$

на рис.7, де рівень сигналу зменшується в  $1/\sqrt{2}$  рази для знаходження механічної добротності. У нашому випадку резонансна частота рівна  $f_{рез} = 23,792$  кГц і  $Q_{мех} = \frac{f_{рез}}{\Delta f} = \frac{23792}{11} = 2163$ , де  $\Delta f = f_b - f_a = 23798 - 23787 = 11$  Гц.

В нашому випадку можуть збуджуватися також парні і непарні гармоніки основного тону, тобто  $f_2 = f_{рез}^1 * 2 = 2 * 23792$  кГц = 47,584 кГц, а  $f_3 = f_{рез}^1 * 3 = 71,376$  кГц. Нам не вдалося виявити першої крутильної та першої згинної форми коливань циліндру, котрі можуть збуджуватися внаслідок несиметрії властивостей алюмінієвого сплаву, спотворення викривленої форми циліндра, недосконалого підклеєння п'єзоелементів, що каже про якісне виготовлення зразка. Була отримана оцінка ступеня пропорційності між вхідними напругами та вихідними. При подачі на п'єзоелемент ПЕ1 напруги величиною 1 В, на виході ПЕ2 напруга дорівнювала 0,36 В (резонансна частота підтримувалася постійною), при подачі 2 В ми маємо 0,72 В і при подачі 3 В – 1,1 В, що вказує на лінійну залежність, яка забезпечує моночастотність.

5. Теоретичне дослідження власних форм та частот осесиметричних коливань пружного циліндра

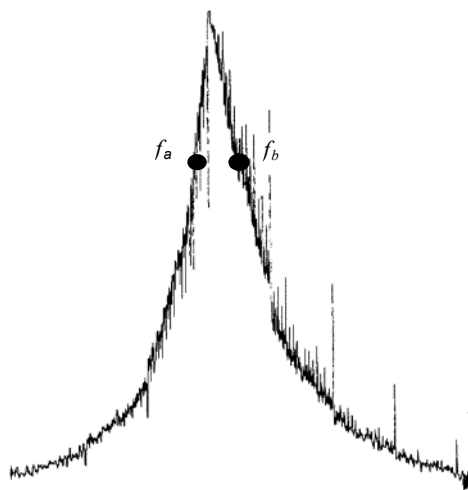


Рис.7. АЧХ першої поздовжньої моди коливань на частоті 23,79 кГц

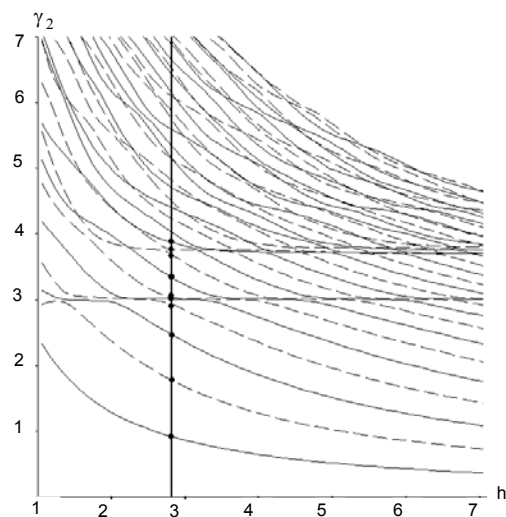


Рис.8. Частотний спектр

Спектр та власні форми коливань циліндра  $0 \leq r \leq a$ ,  $|z| \leq H$  вивчалися різними методами (чисельними та аналітичними) в багатьох публікаціях. Огляд майже необмеженої кількості робіт можна знайти в роботах [3; 5; 14]. Нижче ми наводимо лише основні формули методу суперпозиції. Детальні викладки містяться в роботах [5; 6].

Рівняння Ламе для амплітуд (множник  $\exp(-i\omega t)$  опущено) вектора переміщень  $\vec{u}(r, z)$  має відомий вигляд

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} + \frac{\rho}{G} \omega^2 \vec{u} = 0 \quad (1)$$

Згідно методу суперпозиції розв'язок цього векторного рівняння для граничних умов в навантаженнях (тут подано вираз лише для симетричного відносно серединної площини циліндра руху) має вигляд

$$u_r(r, z) = A_0 J_0(\gamma_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_1(q_1 r) + B_n I_1(q_2 r)] \cos(k_n z) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_j \frac{\lambda_j}{p_1} \text{ch}(p_1 z) + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \text{ch}(p_2 z) \right] J_1(\lambda_j r),$$

$$u_z(r, z) = C_0 \sin(\gamma_1 z) + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j \text{sh}(p_1 z) + D_j \text{ch}(p_2 z)] J_0(\lambda_j r) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \frac{k_n}{q_1} I_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{k_n} I_0(q_2 r) \right] \sin(k_n z), \quad (2)$$

де  $q_i^2 = k_n^2 - \gamma_i^2$ ,  $p_i^2 = \lambda_j^2 - \gamma_i^2$ ,  $i=1,2$ ;  $k_n = \frac{\pi n}{h}$ ,  $J_1(\lambda_j) = 0$

Через  $J_0, J_1$  позначено функції Бесселя першого роду, відповідно нульового та першого порядків, через  $I_0, I_1$  – модифіковані функції Бесселя.

Подальше виконання граничних умов призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A_n, B_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) та  $C_j, D_j$  ( $j=1,2,\dots$ ). Умова рівності нулю визначника цієї системи дає резонансні частоти для циліндра скінченної довжини.

На рис. 8 зображено результати обрахунків частотного спектру для ізотропного циліндра із коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 1/3$ , що відповідає коефіцієнту Пуассона для сплаву Д16Т [13].

Вздовж осі абсцис відкладено безрозмірну довжину  $h = H/a$ , вздовж осі ординат – безрозмірну частоту  $\gamma_2 = \omega a / c_2$ .

Суцільні лінії зображують вітки, що відповідають симетричній задачі, пунктирні – антисиметричній. Вертикальна пряма показує довжину циліндра, що досліджувався в експерименті.

Основні резонанси циліндра, які отримані при збудженні тонкою суцільною п'єзопластиною, приклеєною на його торці, наведено в Табл. 1. Там же подано результати теоретичних розрахунків. За рахунок приєднаних мас на торцях (п'єзодисків) частоти циліндра понижуються в порівнянні із розрахунковими.

Достатня точність співпадання теоретичних та експериментальних дозволяє більш точно визначати розрахунковим шляхом коефіцієнт Пуассона ізотропних суцільних циліндрів по експериментальному спектру резонансних частот.

**Таблиця .1 Резонансні частоти коливань суцільного алюмінієвого циліндра із п'єзоелементами на торцях**

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{\text{exp}}$ , кГц	23,84	45,73	66,80	77,34	78,48	81,10	91,3	99,6
$f_{\text{theor}}$ , кГц	24,85	48,11	67,15	80,02	82,8	83,34	91,07	100,57

## 6. Висновки.

Запропоновані методики експериментального та теоретичного дослідження спектра власних частот пружного циліндра скінченної довжини дають результати, що надійно узгоджуються між собою для перших восьми-десяти мод коливань, та дозволяють більш точно визначати модулі пружності матеріалу, з якого виготовлено циліндр.

1. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Мелешко В.В., Никитенко В.Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом // Акуст. вистик. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 3–11. 2. Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применения. – М., 1981. 3. Берман Л. Ультразвук. – М., 1957. 4. Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Панов В.И. Системы с малой диссипацией. – М., 1981. 5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К., 1981. 6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. журн. – 1978. – Т. 24, Вып. 6. – С. 60–68. 7. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. – М., 1955. 8. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А., Рудницкий Б.Е. Оптические адаптивные системы. – М., 1989. 9. Никаноров С.П., Кардашев Б.К. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. – М., 1985. 10. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М., 1972. 11. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кичуи. – М., 1972. 12. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т.1, ч.А. : Методы и приборы ультразвуковых исследований – М., 1959. 13. Физические величины : Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; под. ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М., 1991. 14. Nieves F.J., Gascon F., Bayon A. Measurement of the dynamic elastic constants of short isotropic cylinders // J. Sound Vib. – 2003. – Vol. 265. – P. 917–933.

Надійшла до редколегії 29.11.2007

УДК 532.5

В. Антонова, доц., О. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук  
Email: alex\_z\_ua@ukr.net

## ТРАНСПОРТУВАННЯ ЗАВИХОРЕНОЮ ТЕЧІЄЮ ЧАСТОЧОК ЗАВИСІ У КУТІ

*У роботі розглянуто частинна задача про транспортування завихореною течією часточок придонної ілістої або піщаної зависі у куті.*

*In the article some problem about transportation by a vortex fluid flow of particles of sand or slurry suspension in area of corner.*

### 1. Вступ

Розглядається система, у якій дисперсійним середовищем є газ або рідина, а дисперсією – тверді часточки, концентрація яких є порівняно невеликою. Такі системи відносяться до класу проточних дисперсійних систем і називаються потоками газової зависі твердих часточок. Систематичне дослідження дисперсних потоків розпочато порівняно недавно і пов'язано, в основному, з вимогами різних технологічних процесів, розвитком нової техніки, вдосконаленням ліній пневмотранспорту та газоочистки. Великий інтерес викликає рух рідини чи газу із часточками, які знаходяться у зваженому стані у потоці, у природних умовах (пилові бурі, спеціальні заметілі, повітря з часточками пилу тощо) Таким чином потоки зависей є об'єктом вивчення для технологів, інженерів-геофізиків, метеорологів, гідрологів, сантехніків та лікарів. Інтерес, який проявляється у сучасній науці і техніці до проточних наскрізних дисперсійних систем можна пояснити наступними факторами.

1. Такі системи відрізняються повною проточністю як суцільного так і дисперсійного середовищ. Тому вони дозволяють перейти до неперервних процесів, забезпечити протиток у різноманітних технологічних та теплових процесах; дисперсійні потоки можна використовувати у якості робочого тіла.

2. Потоки з часточками пилу можуть бути наслідком (у ряді випадків – небажаним) реалізації певних пехнологічних процесів. У будь-якому випадку ефективність цих процесів залежить від правильної організації та використання потоків газозависей.

3. За відсутністю обмежень з боку технології можна у певних, але достатньо широких межах, здійснювати ефективне керування властивостями газового потоку шляхом вибору якості і кількості твердих часточок, які спеціально додаються (вводяться) до потоку.

4. Дослідження та вивчення поведінки твердих часточок у потоках має важливе значення для розробки засобів попередження забруднення атмосфери

В останні десятиріччя досягнуто певного прогресу у дослідженні дисперсних потоків. У цей період з'явилися вітчизняні і зарубіжні роботи, які присвячені систематичному і спільному розгляду теоретичних уявлень, які склалися, і накопичених експериментальних даних, аналізу та узагальненню даних, які вже є, та розробці більш правильних фізичних уявлень, а також – методологічних, розрахункових та конструкторських рекомендацій.

Більш докладний розгляд вказаних проблем наведено у [3]. Часточки, які переносяться потоком, за характером їх руху розподіляються на три види [4]:

- ✓ донні, які переміщуються перекошуванням;
- ✓ придонні (сольтуючі), які переміщуються "стрибками" так, що довжина стрибка в декілька разів перевищує його висоту;
- ✓ завислі, які рухаються у потоці на порівняно великі відстані у вигляді зависі.

На сьогодні найменш вивченими, з нашого погляду, є другий тип переміщення часточок. До такого типу течій відносяться течії, які розглянуто у роботі [9], де наведено результати експериментальних досліджень та запропонована математична модель для розрахунку руху вагомих часточок. Вивчення дрейфу на основі методики чисельного експерименту складає значні труднощі. Математичні моделі, на яких базується вивчення транспортування вагомих часточок у потоці рідини або газу, відносяться до так званих спряжених задач, коли одночасно необхідно розв'язувати крайову задачу для визначення поля швидкостей носія (гідродинамічна задача) та систему звичайних нелінійних рівнянь руху часточок (механічна задача).

Природно, що у загальній постановці ця задача важко розв'язується з причини нелінійності диференціальних рівнянь та наявності вільних границь.

У роботі зроблено спробу проведення чисельних розрахунків на основі спрощених математичних моделей зі збереженням головних особливостей проблеми – нелінійності та наявності вільних границь.

## 2. Постановка задачі та основні рівняння

Розглядається рух часточок у придонній області біля негладких утворень донного рельєфу. У цих утвореннях виникають зони, заповнені рідиною, рух якої носить вихровий характер. У певний момент часу придонні часточки починають рухатися через цю зону. В результаті взаємодії, траєкторія руху часточок зазнає змін під впливом руху завихореної рідини. За мету ставиться побудова траєкторій руху часточки з урахуванням впливу рухомого потоку.

Як і раніше [2], будемо застосовувати такі позначення: індексом "  $f$  " знизу будемо позначати параметри основної течії, а індексом "  $p$  " знизу — параметри, які відносяться до часточок зависі.

Нехай у деякій внутрішній завихореній області, яка заповнена рухомою рідиною з густиною  $\rho_f = \text{const}$ , починає рухатися сферична частка радіусу  $a_p$ , щільність речовини часточки —  $\rho_p$ , маса —  $m_p = 4/3 \pi \rho_p a_p^3$ .

Як показано у роботі [1], за умови  $\rho_p / \rho_f > 1$ , диференціальні рівняння руху часточки для визначення  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -\frac{3}{4} C_f \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{a_f} \Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) (u_p - u_f), \\ \ddot{y}_p = -\frac{3}{4} C_f \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{a_f} \Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) (v_p - v_f) - g \left( 1 - \frac{\rho_p}{\rho_f} \right). \end{cases} \quad (1)$$

де позначено:  $u_p = \frac{dx_p}{dt}$ ,  $v_p = \frac{dy_p}{dt}$ ,  $\dot{x}_p = \frac{d\dot{x}_p}{dt}$ ,  $\dot{y}_p = \frac{d\dot{y}_p}{dt}$ ,  $C_f$  – коефіцієнт опору тертя;  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) = \sqrt{(u_p - u_f)^2 + (v_p - v_f)^2}$ .

Система має інтегруватися з наступними початковими умовами: у момент часу  $t = t_0$  задається початкове положення часточки  $x(t_0), y(t_0)$  та величина компонент швидкості вільноту  $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)$ :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = u_0, \\ y(t_0) = y_0, & \dot{y}(t_0) = v_0. \end{cases} \quad (2)$$

У данному випадку до уваги взяті основні сили взаємодії – сила опору та сила ваги. У такому разі задача знаходження траєкторій часточки зводиться до інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) з початковими умовами (2). Наступні кроки щодо знаходження розв'язку задач залежать від конкретного вигляду функцій  $u_f$  та  $v_f$ , значення яких має визначатися з розв'язку гідродинамічної задачі.

Через те, що виникають певні складності при розв'язанні таких математичних проблем, зупинимось, як і у [2], на модельних задачах, для яких представлення компонент  $u_f$  та  $v_f$  вектора швидкості рідини, що рухається, можливі у замкнутому вигляді. В першу чергу це стосується робіт [6 – 8].



### 3. Внутрішня течія у гострому куті

Розглядається течія, яка утворюється у гострому куті з конфігурацією, що зображена на рис.1. У Внутрішня частина гостого кута  $\theta$  заповнена завихориною рідиною з інтерсивністю вихорю  $\omega$ . Захоплення часточок відбувається або з нижньої поверхні кута, або в області потоку, прилеглий до неї.

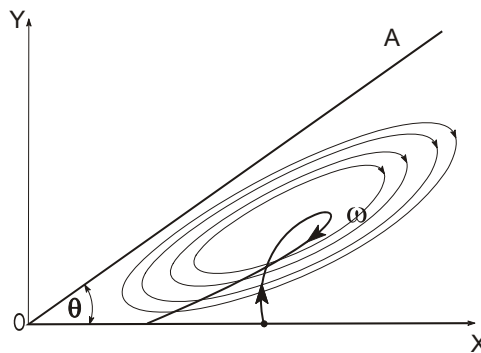


Рис. 1.

Виберемо початок декартової системи координат  $(x, y)$  точці  $O$  (рис 1). Одночасно з декартовою системою координат розглядається полярна система  $(r, \theta)$ , початок якої збігається з початком декартової системи координат.

Для внутрішньої області, що зображена на рис 1, функція току  $\psi(r, \theta)$  у полярних координатах буде мати наступний вигляд

$$\psi(r, \theta) = -\frac{\omega r^2}{2\pi} [\sin(2\theta) \ln(r^2) + 2\theta \cos(2\theta) + \pi \sin^2(\theta)], \quad (3)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ ,  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ . В такому разі компоненти швидкості  $u_f = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_f = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , які входять складовими до виразу (1) з урахуванням визначення функції току (3), можна записати

$$u_f = -\frac{\omega}{\pi} \left( x \ln(x^2 + y^2) - 2y \arctg \frac{y}{x} + x + \pi y \right), \quad v_f = -\frac{\omega}{\pi} \left( y \ln(x^2 + y^2) - 2x \arctg \frac{y}{x} + y \right) \quad (4)$$

Для кутової конфігурації (рис 1), компонентам швидкості потоку можна надати вигляд  $u_f = \frac{\omega}{2}(x \tg \theta - 2y)$ ,  $v_f = -\frac{\omega}{2}x \tg \theta$ . У роботі [2] викладено наведено процедуру зведення математичної моделі до безрозмірного вигляду. Якщо ввести безрозмірні змінні  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $x = \tilde{x}L$ ,  $y = \tilde{y}L$ ,  $t = \tilde{t}T$ , де через  $L$  і  $T$  позначено характерні параметри задачі, то після підстановки змінних  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  до рівнянь (1) отримуємо систему

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} = -E^* \tilde{\Phi}(\tilde{x} - \tilde{u}), \\ \ddot{\tilde{y}} = -E^* \tilde{\Phi}(\tilde{y} - \tilde{v}) - G^* \end{cases} \quad (5)$$

яка інтегрується з наступними початковими умовами

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = x_n, \quad \dot{\tilde{x}}(0) = u_n, \\ \tilde{y}(0) = y_n, \quad \dot{\tilde{y}}(0) = v_n. \end{cases} \quad (6)$$

Коефіцієнти  $E^*$ ,  $G^*$ , які входять до правої частини системи рівнянь (5), утворені з характерних масштабів

$$E^* = \frac{3}{4} C_f \frac{\rho_\infty a}{\rho_0 a_0} = \frac{18}{\text{Re}}, \quad G^* = \frac{1}{\text{Fr}} \left( 1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right), \quad \tilde{\Phi} = \left[ (\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{u}})^2 - (\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{v}})^2 \right]^{1/2}, \quad \text{Fr} = \frac{L}{gT^2},$$

де через  $\text{Re}$  та  $\text{Fr}$  позначено, відповідно, число Рейнольдса і число Фруда. Вираз  $\frac{1}{\text{Fr}^2} \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \right)$ , з урахуванням початкового обертання частки на момент захоплення її потоком, легко перетворити до вигляду  $\frac{1}{\text{Fr}^2 \omega_0 \tilde{\rho}} (\tilde{\rho} - 1) \tilde{\omega}^2$ , де  $\tilde{\omega} = \omega_0 / \omega$  - відношення кутової

швидкості обертання частки до кутової швидкості вихорю. Залежно від вибору характерного масштабу наведена система (5) може описувати або відрив часточки з поверхні дна, якщо за характерний масштаб вибрано  $a_0$ , або унесення часточки від похилої стінки кута, якщо за характерний масштаб вибрано параметри кута. Наведена система (5) з початковими умовами (6) розв'язується чисельно. Як впливає з представлення (5), головними визначальними параметрами задачі є  $C_f$  та  $\text{Fr}$ . У роботі [3] наведені формули, які визначають залежність коефіцієнта тертя часточ-

ки від числа Рейнольда. Так при значеннях  $Re_p > 500$ ,  $c_f = 0.44$  (закон Ньютона), а при  $Re_p < 2$ ,  $c_f = \frac{24}{Re_p}$  (закон

Симпсона). За більш точне значення коефіцієнта  $c_f$  можна вважати значення  $c_f = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_p \right)$

#### 4. Результати

Чисельні розрахунки було виконано у широкому діапазоні визначальних параметрів. Досліджувався вплив основних параметрів задачі при різних початкових умовах, зокрема – при різних значеннях параметрів вертикальної швидкості, за різних кутів вильоту, початкової точки, з якої починається рух часточки та різних значеннях величини кута  $\theta$ . Частина результатів наведена на рис.2 – рис.5.

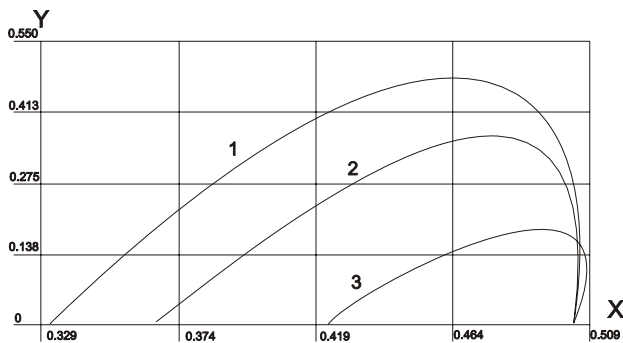


Рис. 2. Траєкторії руху за різних значень вертикальної складової початкової швидкості  $v_0$

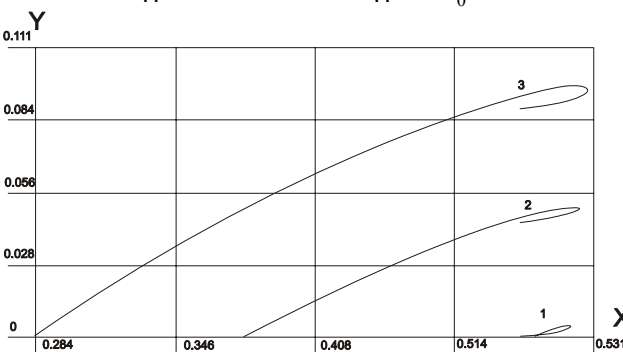


Рис. 4. Траєкторії руху за різних початкових положень  $x(t_0), y(t_0)$

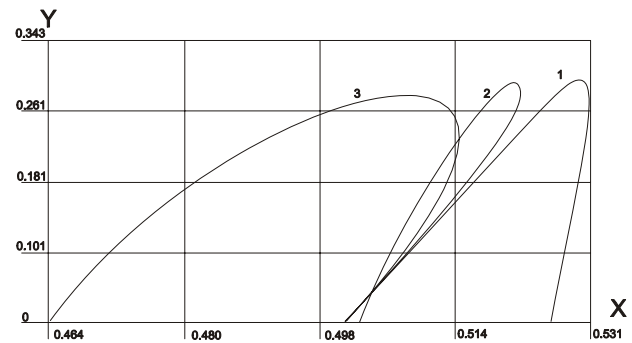


Рис.3. Вплив величини кута  $\theta$  на форму траєкторії

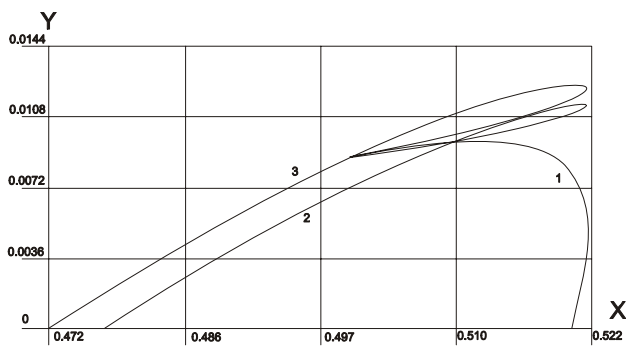


Рис. 5. Траєкторії руху за різних початкових вертикальної складової початкової швидкості  $v_0$  для  $x(t_0) = 0.5, y(t_0) = 0.2$

На рис. 2 наведено траєкторії руху часточок, які мають різні значення вертикальної складової початкової швидкості при незмінній початковій позиції  $x(t_0) = 0.5$ . За більших значень  $v_0$  точка падіння на дно ближче до початку кута – крива 1. Значний вплив на траєкторії руху справляє і величина кута  $\theta$  (рис.3), оскільки часточка, яка потрапляє у потік, взаємодіє з різними областями завихореної течії ( $30^\circ$  – крива 3,  $45^\circ$  – крива 2 та  $60^\circ$  – крива 1). Для  $\theta = 45^\circ$  траєкторія набуває петлеподібної форми. Такі ж зміни траєкторії можуть відбуватися і для випадку, коли часточка починає рух з різних положень (рис.4 – криві 1, 2 та 3 відповідають значенням  $y(t_0)$  0, 0.05 та 0.1) або з різними значеннями початкової швидкості (рис.5 – криві 1, 2 та 3 відповідають збільшенню значення  $v_0$  за сталого значення  $u_0$ ) для часточки, яка починає рух з точки у середині потоку.

#### 5. Висновки

Побудована математична модель транспортування часток дає можливість з достатньою точністю отримувати результати у режимі реального часу, що дозволяє використовувати таку модель при розробці різних експертних систем швидкої оцінки, зокрема – екологічного стану на забрудненій території

1 Антонов А.М., Бурковська В.Л., Копистиря М.П., Дослідження переміщення вагомих часточок у рухомій рідині., Вісник КУ, Серія фізико-математичні науки, Вип.3, 2000 р. 2 Антонов А.М., Зайцев О.В., Транспортування завихореною течією часточок зависі, Вісник КНУ, серія Математика, Механіка, випуск 15-16, 2006 3 Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. Изд. "Мир", М., 1975 с. 378 с. 4 Динамика и термика речных потоков. Изд. "Наука", М., 1972 с.143. 5 Коул Дж.Методы возмущений в прикладной математике, М., "Мир", 1972. 6 Чернышенко С.И. О приближенном способе расчета завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // МЖГ, NI, 1982 7 Чернышенко С.И., Расчет отрывных течений маловязких жидкостей с помощью модели Бетчелора, Изв. АН СССР, МЖГ 1984 №2 с.39-45 8 Chernyshenko S., Stratefield Sadovskii flow in a channel, J.Fluid Mech, 1993, vol.250 pp. 423-431 9 Nalpanis Philip, Hunt J.R., Barret C.F., Saltating particles over flat beds, J.Fluid Mech., 1993, vol.251 pp 661-685

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф., І. Лоос, канд. фіз.-мат. наук, С. Корнєєв, асп.  
Mol\_LV@univ.kiev.ua

## НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

*Побудована нелінійна двовимірною модель магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності пластини. Наведено числовий приклад.*

*The two-dimensional nonlinear problem of magnetoelasticity of circular plate is constructed. A resolving system of nonlinear differential equations of magnetoelasticity of circular plate has been obtained. Numerical example is given.*

### 1. Вступ.

Важливе місце у механіці спряжених полів займають питання вивчення руху суцільного середовища з врахуванням електромагнітних ефектів. Дослідження з механіки зв'язаних полів в тілах, що деформуються, мають як фундаментальний, так і прикладний характер, що надає їм особливу актуальність. Значний розвиток отримали дослідження процесів деформації електропровідних гнучких тіл під дією силових і електромагнітних навантажень.

Нижче розглянемо задачу із цього класу – розрахунок напружено-деформованого стану гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості за двома напрямками, яка знаходиться в нестационарному магнітному полі та під дією нестационарного електромагнітного струму від зовнішнього джерела.

В процесі деформації пластини відбувається зміна форми її поверхні, що приводить до зміни напрямку струму, тобто змінюється електромагнітне поле пластини, виникають вихрові струми, які, взаємодіючи з зовнішнім магнітним полем, приводять до появи пондеромоторних сил Лоренца. Ці сили змінюють стан тіла і його електромагнітне поле. Тому електромагнітні і механічні поля взаємозв'язані і дія їх на пластину визначається з розв'язків системи, яка складається з рівнянь механіки і рівнянь електродинаміки. Зв'язаність полів обумовлена тензором напружень Максвелла та силою Лоренца.

Розв'язувальна система рівнянь, яка описує напружено-деформований стан пластини, визначається нелінійною системою диференціальних рівнянь гіперболо-параболічного типу десятого порядку зі змінними коефіцієнтами і представлена в нормальній формі.

Запропонований нижче підхід до чисельного розв'язання базується на послідовному застосуванні схеми Ньютона-Рунса, методу квазілінеаризації, методу прямих та методу дискретної ортогоналізації [3].

При побудові розв'язувальної системи рівнянь магнітопружності пластини віднесемо її серединну площину до полярної системи координат  $r, \theta$  і скористаємося результатами робіт [1,2,3,4]. За розв'язувальні функції виберемо

зусилля  $N_r, S$  і  $\hat{Q}_r$ , де  $\hat{Q}_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$ , момент  $M_r$ , переміщення  $u, v, w$ , кут повороту нормалі  $\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$ , а та-

кож напруженість електричного поля  $E_r$  та індукції магнітного поля  $B_z$ . Вибір цих функцій за розв'язувальні дає можливість розглядати широкий клас граничних умов без ускладнення розрахункової схеми. Далі вихідні рівняння [3] будуються відносно першої похідної шуканих функцій за радіальною координатою  $r$ .

Як результат отримуємо розв'язувальну систему типу Коші у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r - \frac{\nu}{r} u - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \vartheta_r^2; \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v + \frac{2(1+\nu)}{Eh} S + \frac{1}{r} \vartheta_r \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -\vartheta_r; \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r} \vartheta_r; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} - (P_s + \rho F_s^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} S + \frac{E}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{Eh}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \hat{Q}_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \hat{Q}_r - \frac{Eh^2}{2r^3(1+\nu)} \left[ 0,5 \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{h}{6} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_r}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{2r^3} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) - \frac{Eh^2}{2r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Eh^3}{12r^3} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{E}{r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
 & -\frac{Eh}{r^3} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} N_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{r^3} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\
 & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \vartheta_r + S \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - (P_z + \rho F_z^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 & \frac{\partial M_r}{\partial r} = -\frac{1-\nu}{r} M_r - \frac{Eh^2}{4r^2(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{Eh^3}{12r^2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\
 & + \frac{Eh^3}{12r^2} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) + \bar{Q}_r + N_r \vartheta_r - \frac{1}{r} S \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\
 & \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{r} E_\theta - \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \theta} B_z + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \\
 & + \frac{1}{r^2 \sigma \mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r \sigma \mu} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{rh}; \\
 & \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\sigma \mu E_\theta + \sigma \mu \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}.
 \end{aligned}$$

Тут:  $B_z$  – нормальна складова магнітної індукції;  $B_r^\pm, B_\theta^\pm$  – відомі складові магнітної індукції на поверхнях пластини;  $\sigma$  – електрична провідність;  $\mu$  – магнітна проникливість;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $h = h(r, \theta)$  – товщина пластини.

Компоненти проекції сили Лоренца мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \rho F_s^\wedge &= h J_{\theta CT} B_z + \sigma h \left\{ E_\theta B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 - \right. \\
 & - \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}; \\
 \rho F_\theta^\wedge &= -h J_{r CT} B_z + \sigma h \left\{ -E_r B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_z - \frac{\partial v}{\partial t} B_z^2 + \right. \\
 & + \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\}; \\
 \rho F_z^\wedge &= 0,5 h \left[ J_{r CT} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\theta CT} (B_r^+ + B_r^-) \right] + 0,5 \sigma h \left[ E_r (B_\theta^+ + B_\theta^-) - E_\theta (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\
 & + \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z + \frac{\partial v}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_z \left. \right] - 0,25 \sigma h \frac{\partial w}{\partial t} \left[ (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + (B_r^+ + B_r^-)^2 \right] - \\
 & - \frac{\sigma h}{12} \frac{\partial w}{\partial t} \left[ (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + (B_r^+ - B_r^-)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Тут:  $J_{r CT}, J_{\theta CT}$  – складові густини електричного струму від зовнішнього джерела.

Для визначення сталих у загальному розв'язку системи (1) необхідно задати початкові умови та по п'ять граничних умов на торцях пластини  $r = r_0$  і  $r = r_N$ , які обмежують пластину. Для функцій, які характеризують механічну частину задачі, граничні умови задаються як у звичайній теорії пластин. Для електромагнітної групи рівнянь можуть задаватись значення для індукції магнітного поля; для напружень електричного поля або їх комбінація.

Для знаходження розв'язків крайової задачі використовується методика викладена в роботі [3]. Використовуючи запропоновану методику, дослідимо напружений стан кільцевої алюмінієвої пластини змінної жорсткості, яка знаходиться під дією сталого магнітного поля  $\vec{B} = (B_{r0}, B_{\theta0}, B_{z0})$  і нормальної складової механічної сили  $P_z$ .

Нехай товщина пластини змінюється за законом

$$h = h_0 (1 + 0,1 \cos \theta) \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{r}{r_N} \right).$$

Параметри пластини і матеріала вибираємо наступні:

$$h_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; r_0 = 0,49 \text{ м}; r_N = 0,86 \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu = 0,34; \sigma = 3,63 \cdot 10^7 \text{ (Омм)}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$\omega = 3,1416 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}; \rho = 2670 \text{ кг/м}^3; B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}; P_z = 10 \text{ Н/м}^2.$$

Граничні умови задаємо у вигляді:

$$u = v = 0, M_r = 0; \hat{Q}_r = 0, B_z = 0,5 \sin \omega t, \quad \text{при} \quad r = r_0;$$

$$u = v = w = 0, M_r = 0, B_z = 0, \quad \text{при} \quad r = r_N;$$

Початкові умови:

$$\vec{N}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0; \quad \dot{\vec{N}}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\text{де } \vec{N} = \{u, v, w, \Theta_r, N_r, S, \hat{Q}_r, M_r E_\theta, B_z\}^T.$$

Розв'язки задачі визначались на інтервалі часу  $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ , шаг інтегрування за часом вибирався рівним  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . В силу симетрії по  $\theta$  граничних умов та параметрів пластини, задача розв'язувалась на інтервалі  $[0, \pi]$ .

При розв'язанні нелінійних задач магнітопружності на першому кроці за часом за початкове наближення в ітераційному процесі розв'язується стаціонарна лінеаризована крайова задача. На наступних кроках – за початковий вибирається розв'язок, отриманий на попередньому кроці, що є розв'язком уже нелінійної крайової задачі. Вибір такої системи істотно зменшує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання задачі.

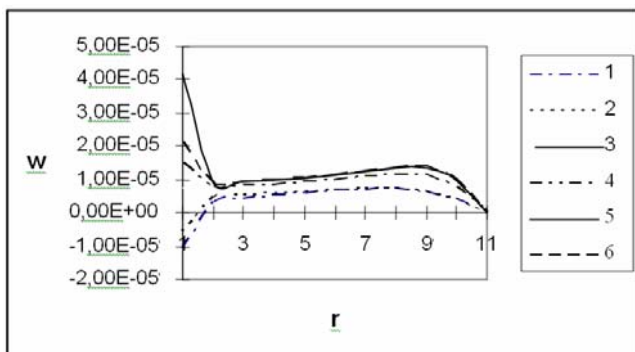


Рис.1. Лінійний розподіл  $w(r, \theta)$

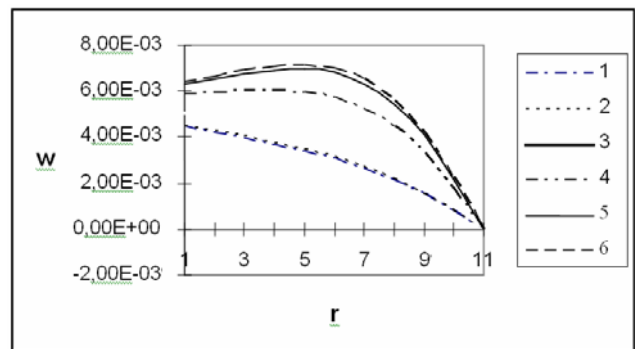


Рис.2. Нелінійний розподіл  $w(r, \theta)$

На рис. 1 та рис. 2 показано розподіл прогину  $w(r, \theta)$  у відповідні моменти часу. На рисунках крок по осі абсцис  $\Delta r = 0,037 \text{ м}$ ; лінія 1 – відповідає значенню кута  $\theta = 0$ ; лінія 2 –  $\theta = \pi/10$ ; лінія 3 –  $\theta = 2\pi/5$ ; лінія 4 –  $\theta = 7\pi/10$ ; лінія 5 –  $\theta = 9\pi/10$ ; лінія 6 –  $\theta = \pi$ .

На рис. 1 наведено розподіл  $w(r, \theta)$  для лінеаризованої стаціонарної задачі при  $t = 0$  та при дії на пластину магнітної індукції  $B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}$ , визначеної із розв'язання зовнішньої стаціонарної задачі магнітопружності.

На рис. 2 наведено розв'язок нелінійної крайової задачі для прогину  $w(r, \theta)$  в момент часу  $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$  при дії зовнішньої магнітної індукції  $B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}$ . Цей розв'язок отриманий з шостої ітерації.

### Висновки.

Наведені результати дозволяють оцінити напружено-деформований стан гнучкої кільцевої пластини, яка знаходиться в магнітному полі. Отримані результати підтверджують гіпотези магнітопружності, які використані при побудові нелінійної системи магнітопружності оболонки, і говорять про можливість застосування використаної методики для розв'язання такого класу задач.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М., 1977. 2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок. – К.: Либідь, 1993. – 231 с. 3. Molchenko L.V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells // Int. Appl. Mech. -2005. -41, № 5. -Р. 490-495. 4. Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. – К., 1994.

## ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОПЕРЕНОСУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

*Запропоновано узагальнений підхід до постановки задачі електропереносу з розривним розв'язком. Показано ефективність та зручність для чисельного розв'язання такого узагальнення.*

*General problems statement of charge transfer with discontinuous solutions proposed. Effectiveness and convenience for numerical solution is demonstrated.*

## 1. Вступ.

Розриви розподілених характеристик полів (температури, концентрації, електричного потенціалу, тиску й ін.) у математичних описах різноманітних фізичних процесів можуть бути обумовлені різними причинами. Найпоширеніший варіант розривного розв'язку виникає при побудові математичних моделей процесів переносу в шарувато-неоднорідних середовищах, що мають на межі контакту середовищ тонкий (у порівнянні з характерними геометричними розмірами середовищ) слабо проникний прошарок. При чисельному розв'язанні такого роду контактних задач врахування в області розв'язку тонких прошарків вимагає невиправданого подрібнення сітки, тому зазвичай в таких випадках будується спрощена модель прошарку, використання якої дозволяє виключити цей прошарок з області розв'язку диференціальної задачі. Наявність у класичній постановці задач тепло-, масо- і електропереносу умов спряження розв'язку на межі контакту шарувато-неоднорідних середовищ вимагає при чисельному розв'язанні апроксимації нормальних компонент векторів питомих потоків субстанції, що викликає певні труднощі при побудові й реалізації обчислювальних алгоритмів. З цього погляду доцільно переформулювати класичні постановки відповідних задач так, щоб однаковим чином описати процеси переносу у всій багатошаровій системі в цілому, виключивши при цьому умови спряження як атрибут математичної постановки задачі. Дана робота присвячена побудові узагальненої моделі для задачі електропереносу з розривним розв'язком.

## 2. Моделі розривного розв'язку.

Для побудови моделей прошарку, як правило, використовується гіпотеза про квазіодновимірний характер протікання процесу переносу субстанції через прошарок. Характерним прикладом моделі прошарку є задача розрахунку скалярного потенціалу  $\varphi$  електромагнітного поля в системі "анод – дугова плазма". На межі між металевим анодом і плазмою електричної дуги існує тонкий прианодний прошарок, у якому, відповідно до узагальненого закону Ома, електричний струм може бути направлений проти вектора напруженості електричного поля [4].

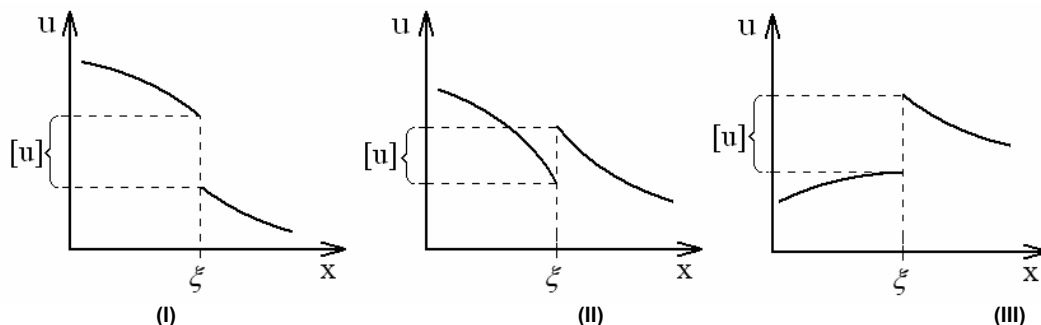


Рис. 1. Схеми розриву розв'язку в точці  $x = \xi$  (I – прямий стрибок; II – зворотний стрибок; III – комбінований стрибок)

В [1] запропоновано спрощену модель прианодного прошарку, відповідно до якої стрибок  $[\varphi]_\Gamma$  (тут і далі стрибок функції  $f(\bar{x})$  на межі  $\Gamma$  позначається через  $[f]_\Gamma$ ) потенціалу електричного поля в цьому прошарку нелінійно залежить від величини нормальної до межі анода компоненти  $j_n|_\Gamma$  вектора щільності електричного струму  $\vec{j} = -\sigma \text{grad} \varphi$ , де  $\sigma$  – питома електрична провідність, тобто

$$[\varphi]_\Gamma = G(j_n|_\Gamma). \quad (1)$$

При цьому припускається, що  $j_n|_\Gamma$  є неперервним на межі  $\Gamma$  контакту анода із плазмою. Модель анодного шару (1) робить задачу розрахунку потенціалу  $\varphi$  нелінійною, і приводить до так званого зворотного стрибка, одновимірний варіант якого схематично зображено на Рис. 1 (II). Між знаками  $[\varphi]_\Gamma$  й  $(\text{grad} \varphi)_n|_\Gamma$  у цьому випадку виконується наступне співвідношення:  $\text{sign}[\varphi]_\Gamma = -\text{sign}(\text{grad} \varphi)_n|_\Gamma$ , що й виправдовує назву "зворотний стрибок".

Варто також зазначити, що у випадку задач для рівнянь з частинними похідними з розривними розв'язками можливі також і інші види стрибка: прямий стрибок (Рис. 1 (I)), такий стрибок виникає, наприклад, у задачі про неідеальний контакт двох теплопровідних тіл; ще один приклад стрибка розв'язку, назовемо його комбінованим (Рис. 1 (III)), дає, наприклад, задача розподільної дифузії, що виникає при описі сегрегації розчинних включень у процесі кристалізації сплавів.

### 3. Узагальнені постановки задач з розривними розв'язками.

Нехай  $R_n$  –  $n$ -вимірний евклідів простір,  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – декартові координати,  $\Omega \subset R_n$  – область розв'язку задачі, яку не обмежуючи загальності можемо вважати двошаровою:  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , через  $\Gamma$  позначимо межу розділу підобластей  $\Omega_1, \Omega_2$ . Всім ідентифікаторам змінних, що стосуються підобластей  $\Omega_1, \Omega_2$ , присвоїмо індекси 1 і 2 відповідно. Позначимо через  $u(\bar{x})$  шуканий розв'язок задачі, а через  $\vec{q}(\bar{x})$  – питомий потік субстанції. Будемо вважати функцію  $u(\bar{x})$  досить гладкою всюди в  $\Omega$ , за винятком можливо межі  $\Gamma$ , на якій вона має стрибок  $[u(\bar{x})]_\Gamma$ , при цьому припускається, що  $[u(\bar{x})]_\Gamma$  як функція координат межі  $\Gamma$  є неперервною. У кожній з підобластей  $\Omega_1, \Omega_2$  визначимо питомий потік у такий спосіб  $\vec{q}_m = -k_m \text{grad } u_m$ ,  $m = 1, 2$ , вважаючи при цьому, що оператор  $\text{grad}$  визначений у класичному розумінні як функція точки  $\bar{x} \in \Omega_1, \Omega_2$ . Коефіцієнти  $k_m(\bar{x})$ ,  $m = 1, 2$ , також вважаємо досить гладкими й такими, що  $k_m(\bar{x}) \geq C > 0$ . Нехай у кожній з підобластей  $\Omega_m$  функції  $u_m(\bar{x})$  (потенціал електричного поля) задовольняють рівнянням

$$\text{div}(k_m \text{grad } u_m) = f_m(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_m, \quad m = 1, 2. \quad (2)$$

На межі  $\Gamma$  покладемо неперервність нормальної до  $\Gamma$  компоненти вектора питомого потоку, тобто

$$q_{1n}|_{\Gamma_+} = q_{2n}|_{\Gamma_-}. \quad (3)$$

У лінійній постановці задачі для розрахунку потенціалу електричного поля на відміну від (1) будемо вважати, що на межі  $\Gamma$  задана різниця потенціалів  $[u]_\Gamma$  як функція координат межі  $\Gamma$

$$[u]_\Gamma = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma. \quad (4)$$

На зовнішній границі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  будемо вимагати виконання деяких граничних умов, конкретний вид яких для подальшого викладу не має значення; при цьому передбачається, що розв'язок задачі в класичній постановці існує і єдиний.

Введемо у  $\Omega$  функції  $u(\bar{x})$ ,  $\vec{q}(\bar{x})$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $k(\bar{x})$ , які існують у  $\Omega$  як функції точки всюди, за винятком межі  $\Gamma$ , у такий спосіб:  $\psi(\bar{x}) = \psi_m(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in \Omega_m$ , де  $\psi(\bar{x})$  – одна з перерахованих вище функцій. Узагальнені частинні похідні  $\frac{D}{Dx_i}$  функції  $u(\bar{x})$  в області  $\Omega$  визначаються в такий спосіб [5]:

$$\frac{Du}{Dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + [u]_\Gamma^{(i)} \gamma_i \delta(\Gamma), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (5)$$

де  $[u]_\Gamma^{(i)}$  – стрибок розв'язку функції  $u(\bar{x})$  у напрямку осі  $Ox_i$  (надалі будемо вважати  $[u]_\Gamma^{(i)} = [u]_\Gamma$ ,  $i = \overline{1, n}$ ),  $\gamma_i = \cos(\vec{n}, \vec{x}_i)$  – напрямні косинуси нормалі до  $\Gamma$ ,  $\delta(\Gamma)$  –  $\delta$  функція Дірака, зосереджена на гіперповерхні  $\Gamma$   $(n-1)$ -го виміру. Користуючись (5), уведемо в  $\Omega$  узагальнений градієнт  $GRAD_-$  розривної функції  $u(\bar{x})$

$$GRAD_- u = \text{grad } u + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma). \quad (6)$$

Так як  $-k \text{grad } u = \vec{q}(\bar{x})$ , то з (6) випливає

$$GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma), \quad (7)$$

де  $\rho(\bar{x}) = k^{-1}(\bar{x})$  має сенс питомого опору середовища.

Отже, узагальнені рівняння в лінійній постановці, що описують розподіл потенціалу електричного поля у двошаровому середовищі "анод – дугова плазма", можна записати у вигляді

$$\begin{cases} -\text{DIV } \vec{q} = f, \\ GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma), \end{cases} \quad (8)$$

використовуючи при цьому як узагальнений закон Ома вираз (7). Під узагальненим розв'язком системи рівнянь (8) будемо розуміти вектор щільності струму  $\vec{q}(\bar{x})$  та скалярний потенціал електромагнітного поля  $u(\bar{x})$ , які задовольняють в сенсі теорії узагальнених функцій рівнянням (8) і граничним умовам, заданим на  $\partial\Omega$ . Вважається, що  $[u]_\Gamma$ , як функція координат межі  $\Gamma$ , є неперервною на  $\Gamma$ . При розв'язуванні реальних задач електропереносу в системі "анод – дугова плазма" потрібно враховувати нелінійну залежність (1) стрибка потенціалу від щільності струму. Ітераційний процес по нелінійності передбачає на кожній ітерації розв'язання лінійних рівнянь виду (8).

### 4. Однорідні різницеві схеми на узагальнених розв'язках.

У цьому розділі ми обмежимося побудовою різницевої схеми для досить простої одновимірної тестової задачі, однак основні підходи до розробки методів чисельного розв'язку переносяться також і на випадок більш складних багатовимірних задач. Для оцінки фактичної точності такої схеми розглянемо характерну тестову задачу, що має точний розв'язок.

Розглянемо одновимірний варіант узагальненої постановки (8) задачі про розподіл потенціалу  $u$  електричного поля в системі "анод – дугова плазма"

$$-\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{D_- u}{Dx} = -\rho q + [u]_{\xi} \delta(x - \xi), \quad 0 < x < l; \quad u(0) = 0, \quad u(l) = u_0, \quad (9)$$

де  $\frac{D_- u}{Dx}$  – узагальнена похідна,  $q$  – щільність струму,  $u$  – потенціал електричного поля,  $\rho = \rho(x)$  – питомий електричний опір середовища,  $\xi \in (0, l)$  – положення межі розділу метал – плазма,  $[u]_{\xi}$  – стрибок потенціалу на цій межі (анодний бар'єр). У випадку  $\rho(x) = \rho_1 = \text{const}$ ,  $0 < x < \xi$ ,  $\rho(x) = \rho_2 = \text{const}$ ,  $\xi < x < l$  задача (9) має простий аналітичний розв'язок:

$$u(x) = \begin{cases} -q\rho_1 x, & 0 < x < \xi, \\ -q(\rho_1 \xi + \rho_2(x - \xi)) + [u]_{\xi}, & \xi < x < l, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{де } q = \frac{[u]_{\xi} - u_0}{\rho_1 \xi + \rho_2(l - \xi)}.$$

На відрізку  $[0, 1]$  введемо сітку  $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = 1\}$ . Інтегруючи перше з рівнянь (9) на відрізку  $[x_i - 0.5h, x_i + 0.5h]$ , отримаємо сітковий аналог закону збереження у вигляді

$$-\frac{q(x_i + 0.5h) - q(x_i - 0.5h)}{h} = 0. \quad (11)$$

З другого рівняння впливають наближені рівності

$$q(x_i + 0.5h) \approx -a_{i+\frac{1}{2}} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + a_{i+\frac{1}{2}} \frac{[u]_{\xi}}{h} \beta_i, \quad (12)$$

$$\text{де } a_{i+\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x) dx \right]^{-1}, \quad \beta_i = 1 \text{ якщо } \xi \in (x_i, x_{i+1}), \quad \beta_i = 0 \text{ якщо } \xi \notin (x_i, x_{i+1}).$$

З (11), (12) і граничних умов отримаємо різницеву схему

$$\frac{1}{h} \left[ a_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = 0, y_N = 0. \quad (13)$$

Нехай  $x_m < \xi < x_{m+1}$ , тоді права частина сіткового рівняння (13) обчислюється в такий спосіб:  $\varphi_i = 0$  якщо  $i \neq m, m+1$ ,  $\varphi_m = \phi_m$ ,  $\varphi_{m+1} = -\phi_m$ , де  $\phi_m = a_{m+\frac{1}{2}} \frac{[u]_{\xi}}{h^2}$ .

На Рис. 2 порівнюється аналітичний й чисельний розв'язок одновимірної задачі (9) при заданій величині стрибка електричного потенціалу на межі метал – плазма  $[u]_{\xi} = 2 \text{ V}$  та наступних значеннях параметрів задачі:

$$\rho_1 = 0,0025 \Omega \cdot \text{cm}, \quad \rho_2 = 0,0333 \Omega \cdot \text{cm}, \quad u_0 = -5 \text{ V}, \quad l = 1 \text{ cm}, \quad \xi = 0.5 \text{ cm}. \text{ Нехай } u_i^{(h)} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx - \text{проекція роз-}$$

в'язку диференціальної задачі на сітку,  $z_i = y_i - u_i^{(h)}$  – похибка чисельного розв'язку. Можна показати, що в визначеному вище класі коефіцієнтів має місце нерівність  $\|z\|_C \leq Mh$ , де  $M = \text{const}$ . Отже, різницева схема (13) рівномірно сходиться на узагальненому розв'язку задачі (9) і має перший порядок точності. Для доведення цієї нерівності похибка апроксимації оцінюється в слабкій суматорній метриці [3], залучення якої пов'язане з тим, що локальна похибка апроксимації в околі розриву розв'язку становить  $O\left(\frac{1}{h}\right)$ . Наведена вище оцінка точності різницевої схеми

утворюється з урахуванням того, що кількість точок сітки з аномальною похибкою апроксимації залишається кінцевою при  $h \rightarrow 0$ . У випадку  $f(x) \equiv 0$  різницева схема (13) у класі кусково-сталих коефіцієнтів є точною. У загальному випадку  $\rho(x) \in W_2^{-1}(0, 1)$ ,  $f(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $u(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $q(x) \in W_2^1(0, 1)$  вдається довести лише збіжність різницевої схеми (без встановлення порядку точності).

На Рис. 2 також представлено чисельний розв'язок задачі (9) з урахуванням нелінійної залежності (1) стрибка потенціалу від щільності електричного струму  $q$ , функціональний вид якої наведений в [1], а використовувані чисельні значення показані на Рис. 4.

Розв'язок нелінійної сіткової задачі було отримано методом ітерацій, при цьому на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувалась лінійна задача (13).

При чисельному моделюванні фізичних процесів, що протікають, наприклад, в умовах дугового зварювання металів, задача про розподіл потенціалу в системі "анод – дугова плазма" стає багатомірною і вимагає врахування складної геометрії межі розділу провідних середовищ. Зокрема, моделювання процесу електропереносу в системі "електродний дріт – плазма електричної дуги" при зварюванні електродом, що плавиться, може бути проведено на основі рівнянь (8), які у випадку осьової симетрії задачі можуть бути записані в циліндричній системі координат, по-



казаної на Рис. 3 (при записі першого рівняння (8) урахується, що  $f \equiv 0$ ). На цьому ж рисунку відображені використовувані граничні умови.

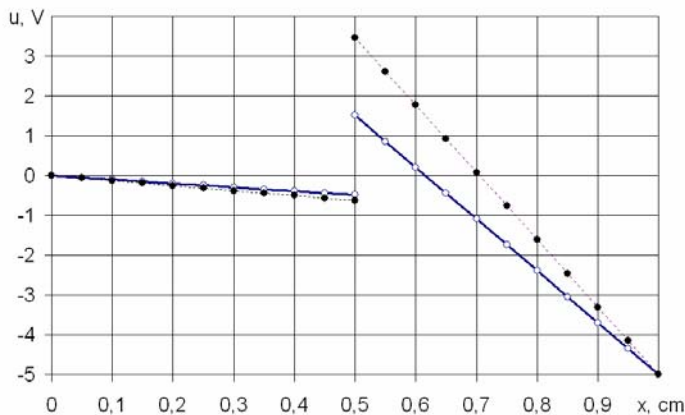


Рис. 2. Розподіл потенціалу в системі "анод – дугова плазма" (суцільна лінія – точний розв'язок лінійної задачі,  $\circ$  – чисельний розв'язок лінійної задачі;  $\bullet$  – чисельний розв'язок нелінійної задачі)

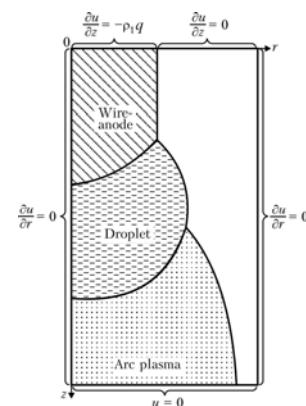


Рис. 3. Схематичне зображення системи "електродний дріт – крапля – плазма електричної дуги" при зварюванні електродами, що плавиться

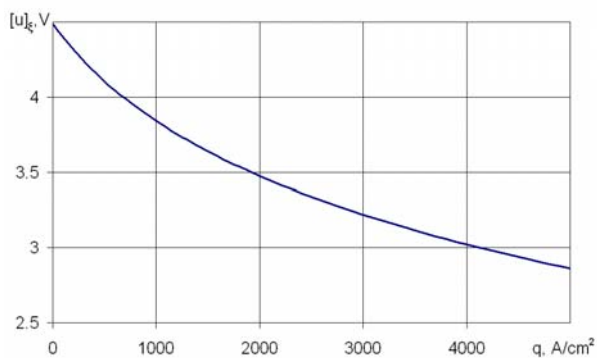


Рис. 4. Залежність анодного падіння потенціалу від щільності електричного струму

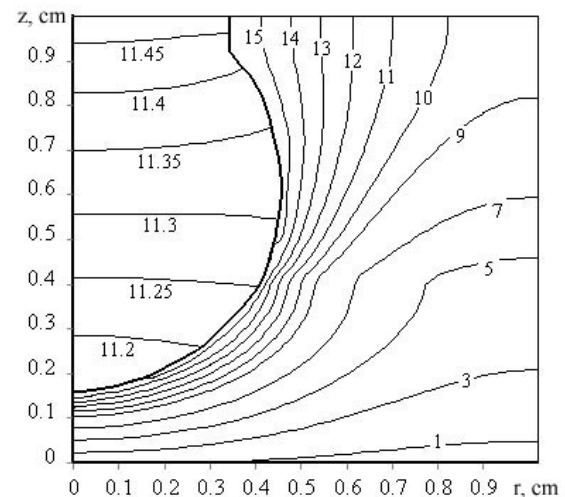


Рис. 5. Поле потенціалу в системі "електродний дріт – крапля – плазма електричної дуги" при зварюванні електродами, що плавиться

Результати чисельного розв'язання двовимірної задачі про розподіл потенціалу в розглянутій системі з урахуванням нелінійної залежності анодного падіння від щільності струму на аноді (див. Рис. 4) проілюстровані на Рис. 5 у вигляді ізоліній потенціалу електричного поля.

### 5. Висновки та завдання подальших досліджень.

Запропонована в даній статті узагальнена задача електропереносу в шарувато-неоднорідному середовищі з розривним розв'язком базується на природному з фізичної точки зору описі процесів переносу субстанції за допомогою системи рівнянь першого порядку, одне з яких (скалярне) являє собою закон збереження субстанції, а друге (векторне) – узагальнений феноменологічний закон Ома. Феноменологічний закон, записаний для розривного потенціалу в термінах питомих опорів, враховує на межі розділу середовищ наявність зосереджених факторів (наприклад, зосередженого опору). Саме такий опис дозволяє істотно розширити клас допустимих вхідних даних задач електропереносу, і, відповідно, клас допустимих рішень.

Відмінною рисою запропонованої узагальненої постановки є наскрізний (однорідний) опис процесів переносу у всій багатошаровій системі в цілому, без використання в явному вигляді умов сполучення на межі розриву розв'язку. Завдяки цьому вдається будувати однорідні обчислювальні алгоритми чисельного розв'язку (методом кінцевих різниць або методом кінцевих елементів). Точність різницьових схем наскрізного рахунку, побудованих на цій основі перевірено на характерній тестовій задачі, що має точний розв'язок.

1. Кривцун И. В. Модель испарения металла при дуговой, лазерной и лазерно-дуговой сварке // Автоматическая сварка. – 2001. – № 3. – С. 2-9.  
2. Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399. 3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М., 1977. 4. Dinulescu, H. A. & Pfender, E. Analysis of the anode boundary layer of high intensity arcs. // Appl. Phys. – 1980. – № 51. – P. 3149-3157. 5. Schwartz, L. Théorie des distributions. – Paris, 1950. – Т.

## ВПЛИВ ТЕПЛОВИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ АКТИВНОГО ДЕМПФІРУВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ЖОРСТКИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ ТОРЦІВ

*У даній роботі досліджується вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування вимушених коливань круглої пластини з жорстким закріпленням торців. З використанням класичних варіаційних методів одержано формули для амплітуди коливань пластини та різниці потенціалів, що підводиться до актуатора для компенсації рівномірного поверхневого тиску.*

*The influence of temperature boundary conditions on efficiency of active damping of forced vibrations of circular plate is investigated. Applying the classical variation methods, the simple formulas for the amplitude of this plate and the difference of potentials of actuator to compensate for harmonic surface pressure is obtained.*

### 1. Вступ.

У сучасній техніці для обмеження амплітуд вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій ефективно використовуються активні методи, коли в структуру пасивного (без п'єзоефекту) тонкостінного елемента з металічного, полімерного чи композитного матеріалу вводяться п'єзоактивні включення. Одні з них виконують функції сенсора, що дають інформацію про механічний стан елемента, а інші – функції так званих актуаторів. Існує два основних методи активного демпфірування стаціонарних і нестационарних коливань тонкостінних елементів. Один із них полягає у сумісному використанні сенсорів та актуаторів. При цьому до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна першій похідній від різниці потенціалів сенсора або струму. Тоді змінюються дисипативні характеристики тонкої пластини, в результаті чого зменшується амплітуда коливань. Керуючи амплітудою та фазою електричного збудження, можна підсилювати або зменшувати амплітуду механічних коливань найбільш енергоємних мод. Одним із важливих факторів, який може суттєво вплинути на ефективність демпфірування механічних коливань тонкостінного елемента, являються температурні ефекти. Зміна температури може бути обумовлена взаємодією елемента із зовнішнім середовищем і дисипативним розігрівом через внутрішні втрати в матеріалах. Слід зауважити, що тонкостінні елементи із полімерних матеріалів та композити на їх основі, дуже чутливі до зміни температури. Важливість впливу температури пов'язана з тим, що при досягненні температурою точки Кюрі п'єзоматеріал втрачає своє функціональне призначення, так що сенсор не дає інформацію про механічний стан пластини, а актуатор не може компенсувати механічне навантаження за допомогою підведеної до нього різниці потенціалів.

У даній статті розглядається задача про активне демпфірування вимушених гармонічних резонансних коливань суцільної круглої в'язкопружної пластини з жорстким закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано варіаційним методом. На основі аналізу результатів розв'язку конкретної задачі досліджено вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування коливань за допомогою розподілених сенсорів та актуаторів.

### 2. Постановка задачі.

Загальна теорія активного демпфірування вимушених коливань тонких пластин за допомогою сумісного використання п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів подана в статті [3]. Пасивний шар вважаємо орто-тропним металічним, полімерним або композитним, а п'єзоактивні – трансверсально-ізотропними і поляризованими по товщині пластини. Деформації та кути повороту вважаються настільки малими, що кінематичні співвідношення між деформаціями і переміщеннями – лінійні. При цьому лінійними є й рівняння руху. Приймаються ті ж позначення та гіпотези, що й в [1].

Обмежимося випадком згинних коливань круглої пластини, що складається з пасивного середнього шару товщиною  $h_0$ , і верхнього та нижнього протилежно поляризованих п'єзоактивних шарів однакової товщини  $h_1$ . Властивості цих п'єзос шарів відрізняються тільки знаками п'єзоефектних констант. На пластину діє рівномірно розподілений поверхневий тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом. Матеріал пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури.

Термомеханічна поведінка пластини описується такою нелінійною системою диференціальних рівнянь в полярній системі координат:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[ D \left( \rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ D \left( \nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \right] - (\tilde{\rho} h) a^4 \omega^2 w + a^4 p_0(\rho) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} - \frac{2\alpha a^2}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E''(T) h^3}{24 a^2 (1 - \nu^2) (\lambda h)} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{d^2 w'}{d\rho^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \frac{d^2 w'}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

Тут  $w$  – поперечний прогин,  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  – згинна жорсткість,  $\gamma$  – густина матеріалу,  $\omega$  – частота коливань,  $E, \nu$  – комплексний модуль та коефіцієнт Пуассона,  $T$  – температура дисипативного розігріву,  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою  $T_C$ ,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $a$  – радіус пластини.

Нехай контур пластини жорстко закріплений, а температура на ньому дорівнює  $T_C$ . Тоді механічні й теплові граничні умови матимуть вигляд:

$$w=0, \quad \frac{d w}{d \rho}=0 \quad (\rho=1), \quad (3)$$

$$T=T_C. \quad (4)$$

Будемо вважати, що нанесені на сенсор нескінченно тонкі електроди розімкнуті. Тоді різниця потенціалів, яку показує сенсор при коливаннях пластини, матиме вигляд:

$$V_S = - \frac{h_1 (h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \frac{d_{31}}{S_{11}(1-\nu)} \left( \frac{d^2 w}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d w}{d \rho} \right) \rho d \rho}{2 \int_0^{\rho_1} \epsilon_{33} (1 - k_p^2) \rho d \rho}. \quad (5)$$

Тут використані позначення монографії [2].

### 3. Аналітичний розв'язок задачі.

Для розв'язку системи (1)-(2) можна використати варіаційні методи, задавши відповідні вирази для прогину і для температури з деякими невідомими параметрами, для яких шляхом мінімізації функціоналів знаходяться нелінійні алгебраїчні рівняння.

Так, при коливаннях круглої пластини на першій резонансній частоті вираз для прогину вибираємо у стандартному для такої пластини вигляді:

$$w = A (1 - \rho^2)^2. \quad (6)$$

Тоді температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з такого рівняння:

$$\frac{d^2 T}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d \rho} - \frac{2 \alpha a^2}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{4 \omega h^2 |A|^2}{3(1-\nu) a^2 \lambda} (G_0'' - G_1'' T) f(\rho) = 0. \quad (7)$$

Тут

$$f(\rho) = (2 + 2\nu) - (8 + 8\nu) \rho^2 + (10 + 6\nu) \rho^4. \quad (8)$$

До нього слід додати граничні умови (4).

Розв'язок такої крайової задачі зводиться до мінімізації функціоналу:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{d \theta}{d \rho} \right)^2 + \Psi_2(\rho) \theta^2 - 2 \Psi_3(\rho) \theta \right] \rho d \rho, \quad (9)$$

$$\text{де } \theta = T - T_C, \quad (10)$$

$$\text{а } \Psi_2(\rho) = \Psi_4 + \Psi_1 f(\rho), \quad \Psi_3(\rho) = \Psi_0 f(\rho), \quad \Psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{(\lambda h)},$$

$$\Psi_1 = \frac{4 \omega h^2 G_1''}{3 (1-\nu) a^2 \lambda} |A|^2, \quad \Psi_0 = \frac{4 \omega h^2}{3 (1-\nu) a^2 \lambda} \tilde{G}_0'', \quad \tilde{G}_0'' = G_0'' - G_1'' T_C \quad (11)$$

Задамо температуру у вигляді:

$$\theta = T_1 (1 - \rho^2). \quad (12)$$

Тоді для параметра  $T_1$  одержимо вираз:

$$T_1 = \frac{C_1 \tilde{x}}{C_0 + C_2 \tilde{x}}, \quad \tilde{x} = |A|^2, \quad (13)$$

де

$$C_0 = 1 + \frac{1}{6} \Psi_4, \quad C_1 = \left( 1 + \frac{\nu}{12} \right) \Psi_0, \quad C_2 = \left( \frac{1}{6} + \frac{\nu}{10} \right) \Psi_1. \quad (14)$$

Тут введено позначення:

$$\Psi_0 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_0'', \quad \Psi_1 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_1'', \quad \Psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{\lambda h}. \quad (15)$$

Крайова задача механіки зводиться до варіаційної задачі:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (D' + iD'') \left[ \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] - (\tilde{\rho} h) a^4 \omega^2 w^2 - \right. \\ \left. - 2p_0(\rho) a^4 w - 2M_0 a^2 \nabla^2 w \right\} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A = \frac{P_0}{A_1 + i A_2}, \quad (17)$$

$$\text{де } A_1 = B_1 - b_1 T_1, \quad A_2 = B_2 - b_2 T_1, \quad B_1 = \frac{64 D'_0}{a^4} - \frac{3}{5} (\gamma h) \omega^2,$$

$$B_2 = \frac{64 D''_0}{a^4}, \quad b_1 = \frac{96 D'_1}{a^4} \left( \frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} \right), \quad b_2 = \frac{96 D''_1}{a^4} \left( \frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} \right). \quad (18)$$

Як видно з функціоналу (16), для компенсації механічного навантаження до актуатора необхідно підвести різницю потенціалів:

$$V_A = - \frac{a^2 \int_0^1 p_0(\rho) w \rho d\rho}{\frac{1}{2} (h_0 + h_1) \int_0^1 \gamma_{31}(\rho) \nabla^2 w \rho d\rho}. \quad (19)$$

Для розрахунку різниці потенціалів актуатора потрібно використати наведені вище формули, в які не обхідно підставити знайдені вирази для амплітуди й температури.

#### 4. Додаткове демпфірування.

Для введення додаткового демпфірування вимушених коливань використовується описана вище техноло-гія, коли прикладена до актуатора різниця потенціалів  $V_A$  пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора  $\dot{V}_S$ :

$$V_A = -G_S \dot{V}_S, \quad G_S = G G_e. \quad (20)$$

При цьому в рівнянні руху появляється член, пропорційний швидкості зміни амплітуди зміщення. В (20)  $G_e$  - опір підсилювача, а  $G$  вибирається з умови найбільш швидкого затухання вільних коливань або суттєвого зменшення вимушених коливань.

У варіаційному принципі (16) фігурує величина  $M_0$ :

$$M_0 = B V_A, \quad B = (h_0 + h_1) \gamma_{31}. \quad (21)$$

Для нестационарних коливань  $w = A(t) \tilde{w}(x, y)$ . Для стаціонарних коливань  $A(t) = A e^{i\omega t}$ . При цьому для нестационарних і стаціонарних коливань відповідно матимемо формули:

$$M_0 = -m_0 F \dot{A}(t), \quad M_0 = -m_0 i\omega F A e^{i\omega t}. \quad (22)$$

$$\text{Тут } m_0 = G_S \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2, \quad (23)$$

$$F = \iint_{(s_1)} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (24)$$

Для визначення  $M_0$  потрібно обчислити інтеграл  $F$  по площі сенсора, який залежить від граничних умов і апроксимації прогину.

Для круглої пластини з жорстким закріпленням торців:  $\tilde{w}(\rho) = (1 - \rho^2)^2$ . А тому

$$F = 8 \pi \rho_1^2 (1 - \rho_1^2). \quad (25)$$

Для дослідження впливу додаткового затухання на демпфірування вимушених коливань пластини в одержаних вище співвідношеннях (18) потрібно замінити величину  $B_2$  на величину

$$\tilde{B}_2 = B_2 + G_2. \quad (26)$$

Додаткове затухання характеризується величиною  $G_2$ , яка розраховується або з варіаційного принципу (16) або методом Бубнова-Гальоркіна з використанням наведених вище виразів для  $M_0$ .

Застосовуючи ці методи, для круглої пластини з жорстким закріпленням торця знаходимо

$$G_2 = \frac{24}{a^2} G_S \gamma_{31}^2 \omega (h_0 + h_1)^2 \rho_1^2 (1 - \rho_1^2) F. \quad (27)$$

Таким чином, крім згасання, яке породжується гістерезисними втратами в матеріалах, за рахунок  $G_2$  з'являється додаткове згасання, яким можна керувати у досить широких межах.

Для прикладу розглянемо тришарову пластину з поліетиленовим середнім шаром і двома зовнішніми шарами протилежної поляризації з п'єзокераміки ЦТС<sub>7</sub>БС-2. У випадку круглої пластини з жорстким закріпленням торців, коли на контурі пластини задана постійна температура, взято такі характеристики: радіус пластини  $a = 0.0536$  м, товщина пластини  $h = 0.01$  м, з температурою  $T_C = 20^\circ\text{C}$ , нормальний поверхневий тиск  $p_0 = 2500$  Па.

При врахуванні впливу температури дисипативного розігріву й залежності властивостей матеріалу від температури в околі частоти лінійного резонансу  $\omega_p = 4109$  с<sup>-1</sup>, маємо амплітудно-частотні характеристики (Рис. 1) для різних значень параметра  $G_2$  (верхня крива –  $G_2 = 0$ , середня крива –  $G_2 = 0,5 B_2$ , нижня крива –  $G_2 = 1,5 B_2$ ). Аналізуючи ці графіки, слід відмітити наявність впливу нелінійності із-за термомеханічної спряженості, хоча ця нелінійність практично не приводить до появи областей неоднозначності. При цьому амплітуда коливань пластини на частоті лінійного резонансу значно зменшується, хоча максимальні значення амплітуди коливань залишаються майже незмінними, але досягаються вони при менших частотах. Рис.1 відповідає амплітудно-частотній характеристиці для коефіцієнту теплообміну із зовнішнім середовищем  $\alpha = 0.5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$  з температурою  $T_C = 20^\circ\text{C}$ . Якщо взяти  $\alpha = 2.5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$  (Рис.2), то спостерігається зменшення модуля амплітуди коливань на частоті лінійного резонансу.

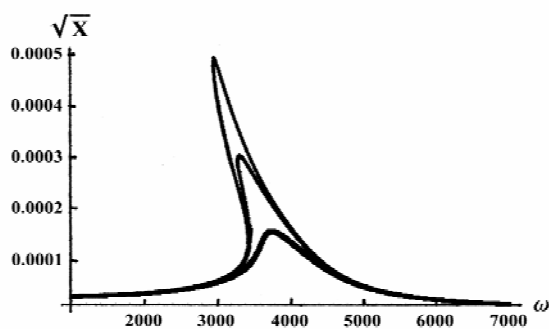


Рис.1. Амплітудно-частотна характеристика при  $\alpha = 0.5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$ ,  $a = 0,1072$  м

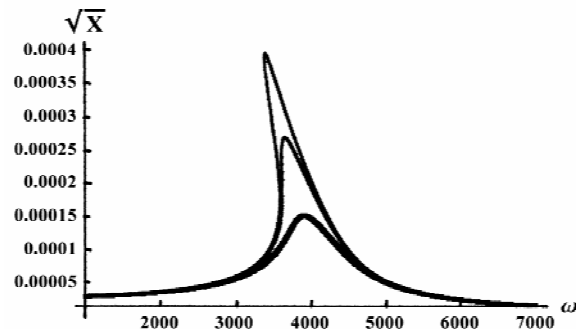


Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика при  $\alpha = 2.5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$ ,  $a = 0,1072$  м

## 5. Висновки.

Введення додаткового згасання суттєво зменшує амплітуду коливань. Як видно з наведених графіків, врахування термомеханічної спряженості приводить до помітного впливу нелінійності, так, що з'являються області неоднозначності в амплітудно-частотних характеристиках. При цьому збільшення коефіцієнта теплообміну приводить до зменшення впливу не лінійності та амплітуди коливань.

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. – К., 1988. 2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К., 1986. 3. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пластин с распределенными сенсорами и актуаторами при моногар-моническом нагружении // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 6.

Надійшла до редколегії 25.11.07

**ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ  
АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА**



2 січня 2008 року виповнилося 70 років від дня народження видатного українського математика, дійсного члена Національної академії наук України та Європейської академії наук, академіка-секретаря Відділення математики НАН України, директора Інституту математики НАН України Анатолія Михайловича Самойленка.

Ювіляр народився в селі Потіївка Радомишльського району на Житомирщині. Закінчивши малинську середню школу, він вступає на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г.Шевченка. Однак невдовзі, прослухавши курс вищої математики, юнак переглядає свої погляди щодо майбутньої професії і переводиться на механіко-математичний факультет. Тут він знайомиться з академіком Ю.О. Митропольським і під його керівництвом робить перші кроки у велику науку.

У 1960 році після закінчення університету з відзнакою Анатолій Михайлович вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР, за три роки успішно захищає кандидатську дисертацію, а ще за чотири стає одним із наймолодших докторів наук на теренах колишнього Радянського Союзу.

З 1963 по 1974 рік А.М. Самойленко працює в Інституті математики. Тут за короткий час він стає одним із лідерів всесвітньо відомої наукової школи Крилова-Боголюбова-Митропольського.

У 1974 році учений переходить з Інституту математики на постійну роботу до Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка і протягом подальших 13 років очолює кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь. З його приходом розпочався новий, чи не найяскравіший етап розвитку кафедри. Під керівництвом А.М. Самойленка стрімко активізується наукова робота, діяльність аспірантури; інтенсивно працює республіканський семінар з диференціальних рівнянь, студентські наукові гуртки; наукові роботи студентів кафедри здобувають цілу низку нагород на Всесоюзних та Республіканських конкурсах.

Займаючись розбудовою кафедри, А.М. Самойленко водночас веде інтенсивний науковий пошук, а здобуті результати невідкладно впроваджує в навчальний процес. Усі, хто мав нагоду в той час вчитися у нього, відзначають, що Самойленко-педагог володів чудовим умінням протягом кількох вступних лекцій найкоротшим шляхом підводити слухача до передових рубежів сучасної математики. Особливо яскраво цей його талант проявився у змістовних і глибоких спеціальних курсах, присвячених проблемам теорії багаточастотних коливань. Разом із тим маститий учений вважав своїм неодмінним обов'язком читати нормативний курс "Диференціальні рівняння" студентам-другокурсникам. Його енергійна й емоційна манера викладу матеріалу під час лекцій незмінно викликала справжнє захоплення аудиторії.

Плідна багатогранна науково-педагогічна діяльність А.М. Самойленка на посаді завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету безперечно сприяла піднесенню його авторитету в наукових колах. У 1978 році його обирають членом-кореспондентом АН УРСР, а у 1985 році він у складі авторського колективу вчених очолюваного ним підрозділу стає лауреатом Державної премії УРСР у галузі науки і техніки.

Після повернення у 1987 році до Інституту математики А.М.Самойленко вже через рік стає його директором. У 1995 році Анатолія Михайловича обирають дійсним членом Національної академії наук України, а з 2006 року він є академіком-секретарем Відділення математики НАНУ.

А.М. Самойленко збагатив математичну науку фундаментальними результатами у багатьох її розділах. Так, у 1960-х під впливом робіт А.М. Колмогорова, В.І. Арнольда, М.М. Боголюбова і Ю. Мозера він спільно з Ю.О.Митропольським провів глибокі дослідження з теорії багаточастотних нелінійних коливань скінченно диферен-

ційовних неконсервативних систем і розв'язав низку надзвичайно складних задач, пов'язаних із так званою проблемою малих знаменників. У 1965 році А.М. Самойленко запропонував чисельно-аналітичний метод відшукування періодичних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь, який зараз носить у сучасній науковій літературі його ім'я. Обґрунтовуючи цей метод, учений отримав близькі до непокращуваних умови його збіжності, а разом і умови топологічного характеру, які гарантують існування точного періодичного розв'язку та його наближень. Згодом у великому циклі статей і монографій, написаних А.М.Самойленком та його учнями, було переконливо продемонстровано універсальність та високу ефективність чисельно-аналітичного методу як засобу розв'язання періодичних та багатоточкових крайових задач для широких класів рівнянь, зокрема, рівнянь із запізненням, різницевих, інтегродиференціальних і диференціально-функціональних рівнянь, рівнянь з імпульсним впливом, рівнянь із частинними похідними та інших.

Важливе місце у науковому доробку А.М. Самойленка посідають питання теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Йому належить розробка ефективного методу дослідження проблеми збереження інваріантних торів при збуреннях. В основу свого підходу А.М. Самойленко поклав запропоноване ним поняття функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі. Апарат функцій Гріна надалі знайшов ефективне застосування в працях А.М. Самойленка та його учнів при аналізі дискретних, імпульсних, злічених динамічних систем, систем у банаховому просторі, диференціальних рівнянь із запізненням. З цього погляду можна вважати цілком виправданим використання вже усталеного в науковій літературі терміну "функція Гріна-Самойленка".

Досліджуючи поведінку траєкторій в околі інваріантного тороїдального многовиду нелінійної динамічної системи, А.М. Самойленко знайшов вельми загальні умови її зведення до канонічної форми, яка має структуру згаданого вище лінійного однорідного розширення.

Згодом А.М. Самойленком та його учнями була розроблена змістовна теорія, яка пояснює, зокрема, як пов'язані між собою такі суттєві характеристики розширення, як експоненційна дихотомія і розщеплюваність, володіння (знакозмінною) функцією Ляпунова, існування функції Гріна-Самойленка, існування інваріантного перерізу відповідного неоднорідного розширення при довільній неоднорідності.

У 1970-х у співавторстві Ю.О. Митропольським учений розробляє асимптотический метод розкладання за малим параметром формального перетворення, яке зводить слабко нелінійну багаточастотну коливну систему до нормальної форми як у нерезонансному, так і в резонансному випадках.

Ще один напрямок досліджень А.М. Самойленка у сфері нелінійних коливань стосується обґрунтування методу усереднення і вивчення резонансних явищ у багаточастотних системах, включаючи системи з повільно змінними параметрами. Тут, насамперед, привертають увагу виведені ним тонкі оцінки осцилюючих інтегралів, необхідні для вивчення процесу проходження траєкторією резонансних підмножин фазового простору. Саме з допомогою різних варіантів оцінок подібного типу А.М. Самойленком та його учнями отримано нові глибокі результати з обґрунтування методу усереднення в багаточастотних коливних системах.

З дослідженнями ученого та його учнів періоду 1970-х – 1980-х років по праву пов'язують виникнення та становлення теорії імпульсних диференціальних систем. Монографія А.М. Самойленка та М.О. Перестюка "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием" (1987) стала першою в світовій літературі книгою, в якій було викладено основні положення теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Пізніше у 1995 році цю монографію було доповнено новими результатами і перекладено англійською мовою.

Характерною рисою наукової творчості А.М. Самойленка є гармонійне поєднання досліджень переважно теоретичного характеру із розробкою ефективних конструктивних методів. Яскраві докази на підтвердження цієї тези можна знайти в його відомій монографії "Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы", яка побачила світ у видавництві "Наука" 1987 року (переклад англійською мовою: *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations*. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1991). Так, не обмежуючись теоремами існування збурених інваріантних торів, автор розробляє й обґрунтовує наближений проекційно-ітераційний метод відшукування інваріантних торів у вигляді збіжної послідовності тригонометричних поліномів.

Талант А.М. Самойленка як ученого й організатора науки яскраво проявляється у його вмінні одночасно керувати дослідницькою роботою відразу кількох груп учених, які працюють над розв'язанням широкого кола проблем сучасної математики. Результатом цієї діяльності останніх років стали численні праці вчених школи Самойленка з таких актуальних напрямків математичної науки, як нетерові крайові задачі, якісна теорія стохастичних диференціальних рівнянь та їх інваріантних множин, інтегровні скінченно і нескінченновимірні гамільтонові системи, груповий аналіз нелінійних еволюційних рівнянь тощо.

Ми маємо змогу згадати лише деякі із наукових результатів А.М.Самойленка – адже бібліографія праць ученого перевищує 400 назв, у тому числі 30 монографій.

Проводячи активну наукову роботу в очолюваному ним інституті, науково-педагогічну діяльність у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка та Національному технічному університеті України "КПІ", Анатолій Михайлович завжди приділяв і продовжує приділяти багато уваги вихованню молодих наукових кадрів. Під його керівництвом було виконано й успішно захищено 24 докторських і 76 кандидатських дисертацій.

Багаторічна праця А.М.Самойленка на ниві освіти і науки відзначена орденом Дружби Народів (1984) та орденом "За заслуги" III ступеня (2003), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987). Він є лауреатом Державних премій України в галузі науки й техніки (1985, 1996), Республіканської премії імені М. Островського (1968), премій Національної академії наук України: імені М. Крилова (1981), імені М. Боголюбова (1998), імені М. Лаврентьева (2000), імені М.В. Остроградського (2004). Його удостоєно звання "Заслужений діяч науки і техніки України" (1998) та звання "Соросівський професор" (1998).

Своє 70-річчя ювіляр зустрів сповнений нових творчих задумів та енергії. Ми бажаємо Анатолію Михайловичу доброго здоров'я, щастя та успіхів, і ще довгих років яскравої та плідної діяльності.

М.Ф. Городній, І.О. Парасюк, М.О. Перестюк,  
В.Г. Самойленко, О.М. Станжицький

**ДО 65-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ  
ВОЛОДИМИРА ВАСИЛЬОВИЧА КИРИЧЕНКА**



17 червня 2007 року виповнилося 65 років від дня народження професора кафедри геометрії механіко-математичного факультету лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки доктора фізико-математичних наук, професора Володимира Васильовича Кириченка.

Кириченко В.В. народився в місті Пенза (Росія) в сім'ї військовослужбовця. Батько – Кириченко Василь Дмитрович (1918 – 1995), доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки УРСР, генерал-лейтенант, мати – Кириченко Марія Федорівна (1920 – 1997).

У 1959 році Кириченко В.В. закінчив СШ № 107 в місті Ленінграді і в тому же році вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у грудні 1964 року.

Після здобуття вищої освіти Кириченко В.В. з січня 1965 року по серпень 1967 року навчався в аспірантурі Інституту математики АН УРСР (науковий керівник – член-кореспондент АН СРСР, доктор фізико-математичних наук, професор Д.К. Фаддєєв).

З 1 вересня 1967 року Кириченко В.В. працює в Київському університеті, з вересня 1988 р. по січень 2006 р. завідував кафедрою геометрії. З січня 2006 р. – професор кафедри геометрії.

У 1968 році Кириченко В.В. успішно захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а в 1986 році – дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук на тему "Модулі та структурна теорія кілець". У 1974 році отримав вчене звання доцента, а у 1990 році – професора.

Кириченко В.В. – визначний вчений. Йому належить провідна роль в розвитку структурної теорії кілець, де він ефективно застосував методи теорії зображень. Він ввів поняття сагайдака та первинного сагайдака кільця, що дозволило йому розробити повну та завершену структурну теорію таких важливих класів кілець, як спадкові, напівланцюгові та напівдистрибутивні та розв'язати відому проблему Л.А.Скорнякова про будову нетерових кілець, над якими всі скінченнопороджені модулі є напівланцюговими. Розроблена Кириченком В.В. (спільно з Дроздом Ю.А. і Ройтером А.В.) теорія басових та квазі-басових порядків нині стала класичною та отримала подальший розвиток у закордонних алгебраїчних школах, зокрема, в Японії.

Наукові праці Кириченка В.В. широко відомі в Україні та світі. Він автор понад 200 наукових та науково-методичних праць, серед яких п'ять монографій ("Конечномерные алгебры" (у співавт., 1980), "Finite Dimensional Algebras" (у співавт., 1994), "Rings and Modules" (у співавт., 2001), "Algebras, Rings and Modules", том 1 (у співавт., 2004), "Algebras, Rings and Modules", том 2 (у співавт., 2007)), три з яких видано в престижному міжнародному видавництві "Springer" англійською мовою.

Кириченко В.В. створив наукову школу з застосувань геометричних методів у структурній теорії кілець. Серед його учнів 3 доктора та 23 кандидати наук

Володимир Васильович багато уваги приділяє науково-методичній роботі: він є співавтором навчального посібника з аналітичної геометрії та редактором двох видань збірника задач з аналітичної геометрії. Ці посібники видано українською мовою з грифом Міністерства освіти та науки України для математичних спеціальностей університетів. Крім цього, він видав вісім навчально-методичних посібників з різних питань алгебри та геометрії.



Професор В.В. Кириченко є одним з ініціаторів проведення Міжнародних алгебраїчних конференцій в Україні. Ці конференції користуються великою популярністю серед алгебраїстів. В останній (шостій) конференції, яка проходила в липні 2007 року в місті Кам'янець-Подільський, брали участь фахівці з 19 держав світу.

Кириченко В.В. веде активну роботу як редактор наукового журналу "Algebra and Discrete Mathematics" та член редколегій багатьох наукових журналів і видань, серед яких "Известия Гомельского университета", "Известия АН Республики Молдовы", "Математичні Студії", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки", науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Більше 30 років Кириченко В.В. член спеціалізованих наукових рад по захисту кандидатських та докторських дисертацій, у 2001 – 2006 роках він був головою спеціалізованої вченої ради при Київському національному університеті.

Володимир Васильович нагороджений двома Почесними грамотами Київського національного університету імені Тараса Шевченка, має подяку від Президії НАН України за активну участь у проведенні Першого українського математичного конгресу у 2001 році, у 2007 році у складі авторського колективу він удостоєний звання лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки.

Зичимо Володимирі Васильовичу міцного здоров'я і нових творчих успіхів у його науковій і науково-організаційній діяльності.

Редакційна колегія

**ДО 80-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ  
АНТОНА ЮРІЙОВИЧА ЛУЧКИ**



17 лютого 2008 року виповнилось 80 років від дня народження Лучці Антону Юрійовичу, доктору фізико-математичних наук, професору, провідному науковому співробітнику відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України, відомому математику, учаснику Великої Вітчизняної війни.

А.Ю. Лучка народився в с. Росільна Богородчанського району Івано-Франківської області у сім'ї селянина. Любов до математики виникла в ранньому віці, коли ще навчався в Росільнянській школі (1935 – 1942).

Трудову діяльність розпочав з вересня 1944 р., працюючи інспектором відділу соціального забезпечення Солотвинського райвиконкому. В період з 1945 – 1949 р.р. працював вчителем Росільнянської семирічної школи і паралельно навчався в Станіславському педагогічному училищі. Закінчивши успішно училище у 1949 р., поступив без екзаменів на фізико-математичний факультет Станіславського учительського інституту, був сталінським стипендіатом. Після закінчення з відзнакою вчительського інституту в 1951 р., працював учителем математики в середній школі м. Івано-Франківська (1951 – 1957) і в ці ж роки навчався на заочному відділенні фізико-математичного факультету Чернівецького університету.

Після закінчення з відзнакою університету у 1957 році поступив в аспірантуру Інституту математики АН УРСР у відділ диференціальних рівнянь. Його науковим керівником був видатний вчений математик і механік член-кореспондент АН УРСР Ю.Д. Соколов, який своєю ерудицією, високою культурою, громадянською мужністю значно вплинув на формування наукового світогляду молодого науковця.

З 1957 р. все подальше життя Антона Юрійовича пов'язане з Інститутом математики. У цій славетній науковій установі А.Ю.Лучка навчався в аспірантурі (1957 – 1960), працював у відділі диференціальних рівнянь на посадах молодшого (1960 – 1962), старшого (1963 – 1986), а з 1987 по даний час – провідного наукового співробітника.

А.Ю.Лучка у 1961 р. захистив кандидатську дисертацію "О теории и применениях метода осреднения функциональных поправок", а в 1984 р. – докторську дисертацію "Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений". Йому присвоєно звання старшого наукового співробітника (1965) та звання професора (1991).

А.Ю. Лучка вніс помітний вклад у розвиток математики у галузях диференціальних та інтегральних рівнянь, обчислювальної математики та історії математики. Його наукові праці присвячені створенню ефективних наближених методів розв'язування широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних та функціонально-диференціальних.

А.Ю. Лучка створив загальну теорію методів проекційно-ітеративного типу для лінійних рівнянь у банаховому просторі; обґрунтував застосування цих методів до нелінійних рівнянь з повністю неперервними операторами, рів-

нянь зі слабкою нелінійністю, рівнянь з монотонними операторами; розробив обчислювальні алгоритми для диференціальних та інтегральних рівнянь і на їх базі побудував ефективні чисельні методи; створив варіаційно-ітеративні та варіаційно-градієнтні методи для операторних рівнянь в гільбертовому просторі; розробив чисельні варіанти цих методів для конкретних класів задач математичної фізики; дослідив застосування проєкційно-ітеративних методів до диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями, до диференціальних рівнянь з імпульсною дією; розвинув теорію операторних рівнянь з обмеженнями та розробив методи побудови їх розв'язків.

Результати своїх наукових досліджень А.Ю. Лучка опублікував у 180 наукових працях та 4 монографіях, одна з яких перевидана англійською мовою, і висвітлював їх на багатьох різноманітних наукових конференціях, з'їздах, симпозіумах, семінарах та в наукових центрах.

Наукові результати А.Ю.Лучки одержали визнання як в Україні, так і за її межами. За цикл праць, присвячених розвитку аналітичних методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь А.Ю. Лучці присуджена премія імені М.М. Крилова АН УРСР за 1989 рік.

А.Ю. Лучка на протязі 35 років (1964–1998) сумлінно виконував обов'язки вченого секретаря спеціалізованих вчених рад із захисту кандидатських та докторських дисертацій у Інституті математики, а протягом 1993–1998 років був членом експертної ради з математики ВАК України.

Поряд з науковою діяльністю А.Ю. Лучка виконував значну педагогічну роботу. Він працював за сумісництвом у Київському технологічному інституті легкої промисловості (1962–1970) та Київському національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова (1990–2004).

Протягом тридцяти років, з 1973 по 2003 рр. А.Ю.Лучка читав лекції зі спеціальних курсів з теорії наближених методів розв'язання інтегральних і диференціальних рівнянь, керував курсовими, бакалаврськими, дипломними та магістерськими роботами студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Лекції А.Ю.Лучка завжди викликали великий інтерес слухачів, оскільки він будував їх за принципом доступності і таким чином, щоб у студентів розвивалось логічне мислення та з'являлись елементи наукової творчості, при цьому йому вдавалося порівняно просто викласти досить складні математичні результати без надмірного узагальнення матеріалу і вдало поєднати складні теоретичні факти із розв'язанням конкретних задач практики.

А.Ю.Лучка неодноразово призначався головою Державних екзаменаційних комісій у Київському та Чернівецькому національних університетах, Івано-Франківському та Дрогобицькому педагогічних інститутах.

А.Ю.Лучка вів активну педагогічну діяльність також і у напрямку підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації. Під його керівництвом успішно захищені 29 кандидатських дисертацій, його учні успішно працюють в наукових установах і вузах України.

В даний час Антон Юрійович продовжує плідно працювати на посаді провідного наукового співробітника відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України, активно проводить наукові дослідження з теорії наближених методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, щедро ділиться своїми знаннями і досвідом із молодими науковцями.

Побажаємо Антону Юрійовичу доброго здоров'я, щастя, нових творчих успіхів на науковій і педагогічній ниві і багатьох років життя.

Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.,  
Самойленко В.Г., Ферук В.А.

Наукове видання



**ВІСНИК**  
**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**  
**МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА**

**Випуски 19-20**

**Друкується за авторською редакцією**

**Верстку здійснено на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка**

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

**Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 234 31 28**



Підписано до друку 21.08.08. Формат 60x84<sup>1/8</sup>. Вид. № 321. Гарнітура Arial. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 13,48. Обл.-вид. арк. 20. Зам. № 28-4507.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"  
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43  
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; факс (38044) 239 31 28  
E-mail: [vydav\\_polygraph@univ.kiev.ua](mailto:vydav_polygraph@univ.kiev.ua)  
WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>