ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1728-2276

КІБЕРНЕТИКА

9/2009

Засновано 1958 року

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для студентів, науковців, аспірантів, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики, студентів старших курсів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.

It's considered for teachers, scientific collaborators, aspirants and post-graduate students.

Адреса редколегії	**03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49**
Затверджено	**Вченою радою факультету кібернетики 20.10.2008 (протокол № 2)**
Атестовано	**Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02**
Зареєстровано	**Міністерством Інформації України. Свідоцтво про Державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97**
Засновник та видавець	**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02**
Адреса видавця	**01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28**

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.9

І.В. Бейко, д-р техн. наук, проф.
П.М. Зінько, канд. фіз.-мат. наук, доцент

ЧИСЕЛЬНІ АЛГОРИТМИ АСИМПТОТИЧНО-РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ З ПІДВИЩЕНОЮ ТОЧНІСТЮ

На основі теорії асимптотично-розв'язуючих операторів запропоновані нові алгоритми чисельного розв'язування задач Коші підвищеного ступеня точності. Наведені порівняльні результати чисельних розрахунків тестових задач.

Based on the theory asymptotically investigate operators proposed new algorithms for numerical solution of Cauchy problems of high degree of accuracy. These comparative results of numerical calculations of test problems.

Для побудови чисельних алгоритмів з підвищеною точністю для розв'язування задачі Коші

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t),t\right),\;\; x(t_0) = x^0 \in R^n,\;\; n \ge 1,\;\; t \ge t_0, \tag{1}$$

можна використовувати локальні асимптотичні наближення $p(t)$ (предиктор) до розв'язку $x(t)$ та відповідні процедури корекції (коректор) отриманого наближення $p(t)$ з метою підвищити точність скоректованого наближення. До такого класу чисельних алгоритмів відносяться і нові алгоритми з використанням асимптотично-розв'язуючих операторів F і G для підвищення точності локальних апроксимацій розв'язку задачі Коші в класі інтерполяційних поліномів Лагранжа та формул Тейлора.

Означення 1. Оператор $F(t,p,H,Z,Q)$ називають асимптотично-розв'язуючим для функції $v\left(x(t+H)\right)$ на розв'язках x задачі Коші $dx(\tau)/d\tau = f\left(x(\tau),\tau\right)$, $x(t) = x^0$, і для неперервної по τ функції $Z\left(Q(\tau)\right)$ на інтервалі $\tau \in [t, t+H]$, якщо для неперервних функцій p із околу x виконується асимптотичне рівняння

$$F(t,p,H,Z,Q) = v\left(x(t+H)\right) \;+\; \left(O(\|Z(Q)\|) + O(\|p-x\|)\right)H\,\|p-x\|.$$

Означення 2. Оператор $G(\tau)$ називають асимптотично-розв'язуючим оператором s-го порядку за параметром h в околі t для функції $v\left(x(t+h)\right)$, якщо виконується асимптотичне рівняння $G(h) = v\left(x(t+h)\right) + O(h^s)$.

Доведемо, що у випадку неперервних на інтервалі $\tau \in [t, t+H]$ функцій

$$Q(\tau),\;\; A(\tau) \triangleq f'_x\left(p(\tau),\tau\right),\;\; Z\left(Q(\tau)\right),$$

$$v\left(x(t+H)\right) \triangleq Q(t+H)x(t+H),\;\;\; Z\left(Q(\tau)\right) \triangleq dQ(\tau)/d\tau + Q(\tau)A(\tau),$$

та ліпшицевої по $p(\tau)$ матриці $f'_x\left(p(\tau),\tau\right)$, асимптотично-розв'язуючий оператор F визначається на неперервних функціях p із околу x за формулою

$$F(t,p,H,Z,Q) = Q(t+H)p(t+H) + \int_t^{t+H} Q(\tau)\left(f(p(\tau),\tau) - dp(\tau)/d\tau\right)d\tau.$$

Беручи до уваги рівняння $dx(\tau)/d\tau = f\left(x(\tau),\tau\right)$, $x(t) = p(t)$ маємо

$$\int_t^{t+H} \left(Q(\tau)\left(f\left(p(\tau),\tau\right) - dp(\tau)/d\tau\right)d\tau = \right.$$

$$= \int_t^{t+H} \left(Q(\tau)\left(f(p(\tau),\tau) - dp(\tau)/d\tau + dx(\tau)/d\tau - f\left(x(\tau),\tau\right)\right)d\tau = \right.$$

$$= \int_t^{t+H} Q(\tau)d\left(x(\tau) - p(\tau)\right) + \int_t^{t+H} Q(\tau)\left(f\left(p(\tau),\tau\right) - f\left(x(\tau),\tau\right)\right)d\tau.$$

Якщо $L > 0$ є константою Ліпшиця для ліпшицевої по $p(\tau)$ матриці $f'_x\left(p(\tau),\tau\right)$, то отримуємо

$$\| f\left(p(\tau),\tau\right) - f\left(x(\tau),\tau\right) + A(\tau)\left(p(\tau) - x(\tau)\right) \| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \left((d/d\lambda) f\left(p(\tau) + \lambda\left(x(\tau) - p(\tau)\right),\tau\right) + A(\tau)\left(p(\tau) - x(\tau)\right)\right)d\lambda \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \left(f'_x\left(p(\tau) + \lambda\left(x(\tau) - p(\tau)\right),\tau\right)\left(x(\tau) - p(\tau)\right) + A(\tau)\left(p(\tau) - x(\tau)\right)\right)d\lambda \right\| \le$$

$$\le \int_0^1 \| f'_x\left(p(\tau) + \lambda\left(x(\tau) - p(\tau)\right),\tau\right) - A(\tau) \| \, \| p(\tau) - x(\tau) \| d\lambda \le$$

$$\le L\,\| p(\tau) - x(\tau) \|^2 = O\left(\| p(\tau) - x(\tau) \|^2\right),$$

Отже,

$$\int_t^{t+H} Q(\tau)\left(f\left(p(\tau),\tau\right) - dp(\tau)/d\tau\right)d\tau =$$

$$= \int_t^{t+H} Q(\tau)d\left(x(\tau) - p(\tau)\right) + \int_t^{t+H} Q(\tau)A(\tau)\left(p(\tau) - x(\tau)\right)d\tau + \int_t^{t+H} O\left(\| p(\tau) - x(\tau) \|^2\right).$$

Це означає, що за нормою в класі неперервних функцій маємо

$$\int_t^{t+H} Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau =$$

$$=\int_t^{t+H}(dQ(\tau)/d\tau)(p(\tau)-x(\tau))d\tau+\int_t^{t+H}Q(\tau)A(\tau)(p(\tau)-x(\tau))d\tau+$$

$$+Q(t+H)x(t+H)-Q(t+H)p(t+H)+\mathrm{O}\big(\|p-x\|^2\big)H=$$

$$=\int_t^{t+H}(dQ(\tau)/d\tau+Q(\tau)A(\tau))(p(\tau)-x(\tau))d\tau+$$

$$+Q(t+H)x(t+H)-Q(t+H)p(t+H)+\mathrm{O}\big(\|p-x\|^2\big)H.$$

Звідси випливає $Q(t+H)x(t+H)=Q(t+H)p(t+H)+\int_t^{t+H}Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau+$

$$+\int_t^{t+H}(dQ(\tau)/d\tau+Q(\tau)A(\tau))(x(\tau)-p(\tau))d\tau+O\big(\|p-x\|^2\big)H=$$

$$=Q(t+H)p(t+H)+\int_t^{t+H}Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau+ \qquad (2)$$

$$+\int_t^{t+H}Z(Q(\tau))(p(\tau)-x(\tau))d\tau+O\big(\|p-x\|^2\big)H$$

і з урахуванням неперервності функцій $x(\tau), p(\tau)$ і $Z(Q(\tau))$ за нормами $\|Z(Q)\|, \|p-x\|$ неперервних функцій маємо

$$\int_t^{t+H}Z(Q(\tau))(p(\tau)-x(\tau))d\tau=O(\|Z(Q)\|)\|p-x\|H. \qquad (3)$$

Із рівностей (2), (3) та співвідношення $O\big(\|p-x\|^2\big)=O(\|p-x\|)\|p-x\|,$ випливає, що оператор

$$F(t,p,H,Z,Q)=Q(t+H)p(t+H)+\int_t^{t+H}Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau$$

задовольняє асимптотичне рівняння

$$F(t,p,H,Z,Q)=v(x(t+H))+H\big(O(\|Z(Q)\|)+O(\|p-x\|)\big)\|p-x\|$$

і є асимптотично-розв'язуючим оператором для $v(x(t+H))$ відносно $Z(Q)$ на розв'язку $x(t+H)$ задачі (1).

Доведемо також, що за умов

$$dQ(\tau)/d\tau=-Q(\tau)A(\tau)+\mathrm{O}(h^k),\ p(\tau)=x(\tau)+\mathrm{O}(h^l),\ p(t)=x(t),$$

асимптотично-розв'язуючий оператор $G(h)$ s-го порядку, $s=k+l+1,$ будується у випадку $l\le k$ за формулою

$$G(h)=Q(t+h)p(t+h)+\int_t^{t+H}Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau. \qquad (4)$$

Для цього скористаємося наступними отриманими вище рівняннями для асимптотично-розв'язуючого оператора

$$F(t,p,h,Z,Q)=Q(t+h)p(t+h)+\int_t^{t+H}Q(\tau)\big(f(p(\tau),\tau)-dp(\tau)/d\tau\big)d\tau,$$

$$F(t,p,h,Z,Q)=v(x(t+h))+\big(O(\|Z(Q)\|)+O(\|p-x\|)\big)\|p-x\|h,$$

з яких випливає

$$G(h)=F(t,p,h,Z,Q)=v(x(t+h))+\big(O(\|Z(Q)\|)+O(\|p-x\|)\big)\|p-x\|h.$$

З урахуванням рівнянь $dQ(\tau)/d\tau=-Q(\tau)A(\tau)+O(h^k),$ $p(\tau)=x(\tau)+O(h^l),$
отримуємо асимптотичне рівняння

$$G(h)=v(x(t+h))+h\big(O(\|Z(Q)\|)+O(\|p-x\|)\big)\|p-x\|=$$
$$=v(x(t+h))+h\big(O(h^k)+O(h^l)\big)O(h^l), \qquad (5)$$

із якого випливає, що за умов $l\le k$ справедливе асимптотичне рівняння

$G(h)=v(x(t+h))+O(h^{k+l+1})=v(x(t+h))+O(h^s).$ Отже, $G(h)$ є асимптотично-розв'язуючим оператором s-го порядку для функції $v(x(t+h))$.

Побудову асимптотично-розв'язуючого оператора для функції $v(x(t+h))=x(t+h)$ можемо здійснити за допомогою наближення p у класі інтерполяційних поліномів Лагранжа [1,12]. Інші способи розглянуті у [3,7,8]. Інтерполяційний поліном Лагранжа, який проходить через точки $x(t+ih),$ $i=\overline{0,n}$ має вигляд

$$p_{n+1}(\tau)=\frac{1}{h^n}\left[x(t)\frac{(\tau-t-h)\dots(\tau-t-nh)}{(-1)\cdot(-2)\dots(-n)}+\right.$$
$$+x(t+h)\frac{(\tau-t)(\tau-t-2h)\dots(\tau-t-nh)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)\dots(-(n-1))}+\dots \tag{6}$$
$$\left.+x(t+nh)\frac{(\tau-t)(\tau-t-h)\dots(\tau-t-(n-1)h)}{n\cdot(n-1)\dots2\cdot1}\right].$$

і апроксимує x на проміжку $[t,t+(n+1)h]$ з похибкою $O(h^{n+1})$. Беручи до уваги, що наближений розв'язок $x\left(t+(n+1)h\right)$ в момент часу $t+(n+1)h$ у відповідності з (4) обчислюється за формулою

$$x\left(t+(n+1)h\right)=p_{n+1}\left(t+(n+1)h\right)+\int\limits_t^{t+(n+1)h}\left[E-\left(\tau-t-(n+1)h\right)\times\right.$$
$$\left.\times f_x'\left(p_{n+1}\left(t+(n+1)h\right),t+(n+1)h\right)\right]\left[f\left(p_{n+1}(\tau),\tau\right)-\dot p_{n+1}(\tau)\right]d\tau, \tag{7}$$

де p_{n+1} визначається за формулою (6), $f_x'-$ матриця частинних похідних вектор-функції f, отримуємо, що похибка формули (7) дорівнює $O(h^{n+3})$.

Якщо для обчислення визначеного інтегралу скористатися формулою Ньютона-Котеса [1]

$$\int\limits_a^b g(\tau)d\tau\cong(b-a)\sum_{i=0}^r c_{i,r}g(t_i), \tag{8}$$

де $r+1-$ кількість вузлів інтегрування, $c_{i,r}$, $i=\overline{0,r}-$ константи, які задаються таблицею, $t_i=a+i(b-a)/r$, $i=\overline{0,r}$. то [1,12] похибка формули (8) при непарних r дорівнює $O(h^{r+2})$, а при парних $r-O(h^{r+3})$. Із врахуванням (8) формула (7) приймає вигляд наступної формули (9) з похибкою $O(h^{n+3})$

$$x\left(t+(n+1)h\right)=p_{n+1}\left(t+(n+1)h\right)+$$
$$+(n+1)h\sum_{i=0}^{n+1}c_{i,n+1}\left[f\left(p_{n+1}(t+ih),t+ih\right)-\dot p(t+ih)\right]-$$
$$-(n+1)h^2f_x'\left(p_{n+1}\left(t+(n+1)h\right),t+(n+1)h\right)\sum_{i=0}^{n+1}c_{i,n+1}(i-n-1)\times \tag{9}$$
$$\times\left[f\left(p_{n+1}(t+ih),t+ih\right)-\dot p_{n+1}(t+ih)\right].$$

Якщо скористатися інтерполяційним поліномом Лагранжа 2-го степеня

$$p_3(\tau)=\frac{1}{2h^2}\left[x(t)(\tau-t-h)(\tau-t-2h)-\right.$$
$$\left.-2x(t+h)(\tau-t)(\tau-t-2h)+x(t+2h)(\tau-t)(\tau-t-h)\right],$$

то прогнозний розв'язок $p_3(t+3h)$ і його похідна обчислюються за формулами

$$p_3(t+3h)=x(t)-3x(t+h)+3x(t+2h).$$
$$\dot p_3(\tau)=\left[x(t)(2\tau-2t-3h)-4x(t+h)(\tau-t-h)+\right.$$
$$\left.+x(t+2h)(2\tau-2t-h)\right]\Big/\left(2h^2\right),$$

і з врахуванням (7) отримуємо наступну формулу для наближеного розв'язку задачі Коші (1) з похибкою $O(h^5)$,

$$x(t+3h)=p_3(t+3h)+\int\limits_t^{t+3h}\left[E-(\tau-t-3h)f_x'\left(p_3(t+3h),t+3h\right)\right]\times$$
$$\times\left[f\left(p_3(\tau),\tau\right)-\dot p_3(\tau)\right]d\tau. \tag{10}$$

З цієї формули з урахуванням (9) випливає, що наступна формула (11) має похибку $O(h^5)$:

$$x(t+3h)=x(t)+3h\left\{f\left(x(t),t\right)+3f\left(x(t+h),t+h\right)+3f\left(x(t+2h),t+2h\right)+\right.$$
$$+f\left(p_3(t+3h),t+3h\right)+3f_x'\left(p_3(t+3h),t+3h\right)\left[h\left(f\left(x(t),t\right)+\right.\right. \tag{11}$$
$$\left.\left.\left.+2f\left(x(t+h),t+h\right)+f\left(x(t+2h),t+2h\right)\right)+2x(t)-2x(t+2h)\right]\right\}\Big/8.$$

Значення $f\left(x(t+3h),t+3h\right)$ можна обчислювати і за формулою

$$f\left(x(t+3h),t+3h\right)=f\left(p_3(t+3h),t+3h\right)+f_x'\left(p(t+3h),t+3h\right)\left[x(t+3h)-p_3(t+3h)\right] \tag{12}$$

без збільшення похибки.

Результати числових експериментів для осцилюючої системи

$$\begin{cases}\dot x_1(t)=-2x_2(t)+3t, & x_1(0)=2,\\ \dot x_2(t)=2x_1(t)+4, & x_2(0)=3\end{cases} \tag{13}$$

з розв'язком

$$x_1(t) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t,$$
$$x_2(t) = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t \qquad (14)$$

при $h = 10^{-2}$ наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Покоординатні відхилення наближених розв'язків задачі Коші, які отримані методами 4-го порядку точності від точного розв'язку

t	Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	Методи, які використовують поліноми Лагранжа 2-го степеня		
		Формула (10)	Формула (11)	Формули (11), (12)
0.03	-2.5100E-10	-1.4740E-09	-1.4740E-09	-1.4740E-09
	2.4900E-10	1.5270E-09	1.5270E-09	1.5270E-09
1.00	-4.7300E-09	-2.9427E-08	-2.9423E-08	-2.9423E-08
	-1.0800E-08	-6.3589E-08	-6.3547E-08	-6.3547E-08
3.00	-1.5247E-08	-8.7507E-08	-8.7481E-08	-8.7481E-08
	3.1916E-08	1.9334E-07	1.9343E-07	1.9343E-07
5.00	5.6872E-08	3.3728E-07	3.3742E-07	3.3742E-07
	-1.5547E-08	-9.9853E-08	-9.9803E-08	-9.9803E-08
7.00	-6.8478E-08	-4.1614E-07	-4.1608E-07	-4.1608E-07
	-4.6030E-08	-2.6729E-07	-2.6714E-07	-2.6714E-07
9.00	1.2771E-08	8.9938E-08	8.9963E-08	8.9963E-08
	1.0531E-07	6.3043E-07	6.3057E-07	6.3057E-07
10.00	-1.1231E-07	-6.7765E-07	-6.7765E-07	-6.7765E-07
	-3.5790E-08	-2.0060E-07	-2.0043E-07	-2.0043E-07

Числові методи четвертого і п'ятого порядків точності можна побудувати також за допомогою формули Тейлора із використанням формули

$$x(t+mh) = \int_t^{t+mh} \left[E - (\tau - t - mh) f_x'\left(p(t+mh), t+mh\right)\right] \times \left[f\left(p(\tau),\tau\right) - \dot p(\tau)\right] d\tau + p(t+mh), \qquad (15)$$

де $m-$ деяке натуральне число, $p(\tau)-$ вектор-функція, яка апроксимує розв'язок задачі Коші (1) на проміжку $[t, t+mh]$. Із формули (4) випливає, що якщо $p(\tau)$ апроксимує розв'язок задачі (1) з похибкою $O(h^s)$, тобто $\|x(\tau) - p(\tau)\| = O(h^s)$, $\tau \in [t, t+mh]$, то значення $x(t+mh)$ обчислене за формулою (15), апроксимує розв'язок задачі (1) з похибкою $O(h^{s+2})$.

Введемо позначення

$$\theta(\tau; m) = f_x'\left(p(t+mh), t+mh\right)\left[E - (\tau - t - mh)\right]\left[f\left(p(\tau),\tau\right) - \dot p(\tau)\right], \qquad (16)$$

$$L_k(\tau) = a_1\tau^k + a_2\tau^{k-1} + \ldots + a_k\tau + a_{k+1}. \qquad (17)$$

Відомо, що якщо функція $x(\tau)$ на проміжку $[t-mh, t+mh]$ має $(r+1)$-у обмежену похідну $x^{(r+1)}(\tau)$, то

$$x(\tau) = x(t) + (\tau - t)x'(t) + \frac{1}{2!}(\tau - t)^2 x''(t) + \ldots + \frac{1}{r!}(\tau - t)^r x^{(r)}(t) + O(h^{r+1}),$$
$$\tau \in [t - mh,\ t + mh].$$

Тому, якщо функцію $p(\tau)$ вибрати у вигляді

$$p(\tau) = x(t) + (\tau - t)x'(t) + \frac{1}{2!}(\tau - t)^2 x''(t) + \ldots + \frac{1}{r!}(\tau - t)^r x^{(r)}(t),$$

то вона апроксимує розв'язок задачі Коші (1) на проміжку $[t-mh, t+mh]$ з похибкою $O(h^{r+1})$.

Функція

$$p(\tau) = x(t) + (\tau - t)x'(t) + \frac{1}{2!}(\tau - t)^2 x''(t) \qquad (18)$$

апроксимує розв'язок задачі Коші (1) на проміжку $[t, t+h]$ з похибкою $O(h^3)$. Якщо покласти в (16) $m = 1$ то із формули (15), з врахуванням (18), одержимо формулу четвертого порядку точності:

$$x(t+h) = p(t+h) + \int_t^{t+h} \theta(\tau;1)d\tau, \qquad (19)$$

$$p(t+h) = x(t) + hf\left(x(t),t\right) + \frac{h^2}{2}x''(t). \qquad (20)$$

Замінимо в (19) обчислення інтегралу $\int_t^{t+h}\theta(\tau;1)d\tau$ обчисленням інтегралу $\int_t^{t+h} L_3(\tau)d\tau$. Для цього знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4 = \theta(t;1) = 0, \\ a_1(t+h)^3 + a_2(t+h)^2 + a_3(t+h) + a_4 = \theta(t+h;1), \\ 3a_1t^2 + 2a_2t + a_3 = \dot\theta(t;1), \\ 3a_1(t+h)^2 + 2a_2(t+h) + a_3 = \dot\theta(t+h;1) \end{cases} \qquad (21)$$

коефіцієнти a_i, $i = 1,\ldots,4$, підставимо їх значення у праву частину рівності

$$\int_t^{t+h} L_3(\tau)d\tau = \left(\frac{1}{4}a_1\tau^4 + \frac{1}{3}a_2\tau^3 + \frac{1}{2}a_3\tau^2 + a_4\tau\right)\Bigg|_t^{t+h}$$

і в результаті одержимо

$$\int_t^{t+h} L_3(\tau)d\tau = \frac{h}{12}\left(6\theta(t+h;1) - h\dot{\theta}(t+h;1)\right). \tag{22}$$

З використанням (21), (22) та точної для поліномів третього степеня формули [1, стор. 105–107]

$$\int_a^b \varphi(\tau)d\tau = \frac{b-a}{8}\left[\varphi(a) + 3\varphi\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3\varphi\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \varphi(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{6480}\varphi^{(4)}(\varsigma),$$
$$\varsigma \in [a,b],$$

отримуємо

$$\int_t^{t+h} \theta(\tau;1)d\tau = \frac{h}{12}\left[6\theta(t+h;1) - h\dot{\theta}(t+h;1)\right] + O(h^5). \tag{23}$$

Із (19), (16), (20) та (23), випливає наступна формула наближеного обчислення розв'язку задачі Коші (1) з похибкою $O(h^5)$.

$$\begin{aligned} x(t+h) = x(t) + \frac{h}{12}\Big\{&6f\left(x(t),t\right) + 6f\left(p(t+h),t+h\right) - \\ &-h\Big[\dot{f}\left(p(t+h),t+h\right) - x''(t) + f'_x\left(p(t+h),t+h\right)\times \\ &\times\Big[2f\left(x(t),t\right) - f\left(p(t+h),t+h\right) + 2hx''(t)\Big]\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{24}$$

де $p(t+h)$ обчислюється за формулою (20). Праву частину системи (1) на k-й ітерації алгоритму $(k \geq 2)$ обчислюємо тільки в одній точці $\left(p(t_{k-1}+h), t_{k-1}+h\right)$ (за виключенням першої ітерації, коли необхідно обчислювати $f\left(x(t_0),t_0\right)$ і $f\left(p(t_0+h),t_0+h\right)$), а потім обчислюємо f в точці $\left(x(t_{k-1}+h), t_{k-1}+h\right)$ за формулою

$$\begin{aligned} f\left(x(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right) = f\left(p(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right) + \\ +f'_x\left(p(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right)\left[x(t_{k-1}+h) - p(t_{k-1}+h)\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

В таблиці 2 наведені результати розрахунків для швидкоосцилюючої системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -10x_2(t)/(t-10)^2, \ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = 10x_1(t)/(t-10)^2, \ x_2(0) = 1 \end{cases} \tag{26}$$

з кроком інтегрування $h = 0{,}1$.

Таблиця 2

Абсолютні покоординатні відхилення наближених розв'язків від аналітичних

t	Метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності	Ітераційна формула (24)	Ітераційна формула (24) з врахуванням (25)	Ітераційна формула (20)
0.1	2.41E-11	3.54E-11	3.54E-11	8.38E-07
	3.15E-14	1.00E-13	1.00E-13	1.02E-06
0.5	1.74E-10	2.06E-10	2.06E-10	9.17E-07
	9.87E-13	8.00E-12	8.00E-12	1.28E-06
3.0	2.17E-09	4.15E-09	4.15E-09	1.74E-07
	1.01E-09	1.80E-09	1.80E-09	6.24E-06
7.0	8.67E-07	1.06E-06	1.06E-06	2.29E-04
	9.44E-07	1.32E-06	1.32E-06	2.94E-04
8.5	1.69E-04	2.25E-04	2.25E-04	2.81E-03
	2.61E-04	3.05E-04	3.05E-04	1.34E-02
9.0	3.82E-03	4.87E-03	4.87E-03	1.95E-02
	8.98E-03	1.01E-02	1.01E-02	1.15E-01

Для отримання методу п'ятого порядку точності беремо до уваги, що згідно формули

$$x(\tau) = x(t) + (\tau-t)x'(t) + \frac{(\tau-t)^2}{2!}x''(t) + \frac{(\tau-t)^3}{3!}x'''(t) + O(h^4), \quad \tau \in [t, t+2h],$$
$$x'''(t) = \left(x''(t+h) - x''(t)\right)/h + O(h)$$

функція

$$p(\tau) = x(t) + (\tau-t)x'(t) + \frac{(\tau-t)^2}{2}\left[1 - \frac{\tau-t}{3h}\right]x''(t) + \frac{(\tau-t)^3}{6h}x''(t+h), \tag{27}$$

апроксимує розв'язок задачі Коші на проміжку $[t, t+2h]$ з похибкою $O(h^4)$. Покладемо в (16) $m = 2$. Тоді із (15), враховуючи (16), одержимо формулу п'ятого порядку точності для розв'язування задачі Коші (1)

$$x(t+2h) = p(t+2h) + \int_t^{t+2h} \theta(\tau;2)d\tau, \tag{28}$$

де $p(t+2h)$ обчислюється за формулою

$$p(t+2h)=x(t)+2hf\left(x(t),t\right)+\frac{2}{3}h^2x''(t)+\frac{4}{3}h^2x''(t+h). \tag{29}$$

За допомогою (27)–(29) знайдемо формулу п'ятого порядку точності для обчислення наближеного розв'язку задачі Коші (1), яка не містить операції обчислення інтегралу $\int_t^{t+2h}\theta(\tau;2)d\tau.$ Для цього із системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1t^4+a_2t^3+a_3t^2+a_4t+a_5=\theta(t;2)=0, \\ a_1(t+h)^4+a_2(t+h)^3+a_3(t+h)^2+a_4(t+h)+a_5=\theta(t+h;2), \\ a_1(t+2h)^4+a_2(t+2h)^3+a_3(t+2h)^2+a_4(t+2h)+a_5=\theta(t+2h;2), \\ 4a_1t^3+3a_2t^2+2a_3t+a_4=\dot\theta(t;2)=0, \\ 4a_1(t+2h)^3+3a_2(t+2h)^2+2a_3(t+2h)+a_4=\dot\theta(t+2h;2) \end{cases} \tag{30}$$

обчислюємо коефіцієнти a_i, $i=1,\dots,5,$ значення яких підставляємо в рівняння

$$\int_t^{t+2h}L_4(\tau)d\tau=\left(\frac{1}{5}a_1\tau^5+\frac{1}{4}a_2\tau^4+\frac{1}{3}a_3\tau^3+\frac{1}{2}a_4\tau^2+a_5\tau\right)\Bigg|_t^{t+2h} \tag{31}$$

і в результаті отримаємо

$$\int_t^{t+2h}L_4(\tau)d\tau=\frac{h}{15}\Big(16\theta(t+h;2)+7\theta(t+2h;2)-h\dot\theta(t+2h;2)\Big). \tag{32}$$

З використанням формул (30), (32) і точної для поліномів четвертого степеня квадратурної формули наближеного обчислення інтегралів [1, стор. 107]

$$\int_a^b\varphi(\tau)d\tau=\frac{b-a}{90}\left(12\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)+32\left(\varphi\left(\frac{3a+b}{4}\right)+\varphi\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7\left(\varphi(a)+\varphi(b)\right)\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{1935360}(b-a)^7\varphi^{(6)}(\varsigma),\qquad \varsigma\in[a,b],$$

маємо

$$\int_t^{t+2h}\theta(\tau;2)d\tau=\frac{h}{15}\Big[16\theta(t+2h;2)+7\theta(t+2h;2)-h\dot\theta(t+2h;2)\Big]+O(h^7). \tag{33}$$

Отже, із (28) з урахуванням (16) та (29) отримуємо наступні формули наближеного обчислення розв'язку задачі Коші (1) з похибкою $O(h^6)$, яка не містить операції обчислення інтегралу

$$\begin{aligned} x(t+2h)&=p(t+2h)+ \\ &+\frac{h}{12}\Big\{-23f\left(x(t),t\right)+16f\left(p(t+h),t+h\right)+7f\left(p(t+2h),t+2h\right)+ \\ &+h\Big[-9x''(t)-20x''(t+h)-\dot f\left(p(t+2h),t+2h\right)\Big]+hf'_x\left(p(t+2h),t+2h\right)\times \\ &\times\Big[-18f\left(x(t),t\right)+16f\left(p(t+h),t+h\right)+f\left(p(t+2h),t+2h\right)-h\left(8x''(t)+12x''(t+h)\right)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$p(t+h)=x(t)+\frac{h}{6}\Big(6f\left(x(t),t\right)+h\left(2x''(t)+x''(t+h)\right)\Big). \tag{35}$$

На початку ітераційного процесу необхідно мати дві початкові точки $x(t_0)$ і $x(t_0+h)$. А на k-й ітерації ($k\ge 2$) (за виключенням першої ітерації) можна обчислювати праву частину системи (1) тільки в одній точці $\left(p(t_{k-1}+2h),t_{k-1}+2h\right)$, а потім покласти

$$\begin{aligned} f\left(p(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right)&=f\left(x(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right)+ \\ &+f'_x\left(x(t_{k-1}+h),t_{k-1}+h\right)\left[p(t_{k-1}+h)-x(t_{k-1}+h)\right], \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} f\left(x(t_{k-1}+2h),t_{k-1}+2h\right)&=f\left(p(t_{k-1}+2h),t_{k-1}+2h\right)+ \\ &+f'_x\left(p(t_{k-1}+2h),t_{k-1}+2h\right)\left[x(t_{k-1}+2h)-p(t_{k-1}+2h)\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

Інші формули наближеного обчислення розв'язку задачі Коші (1) п'ятого порядку точності можуть бути одержані по наведеній вище схемі. Наприклад, можна коефіцієнти a_i, $i=1,\dots,5,$ визначити із системи (30), в якій четверте рівняння має вигляд

$$4a_1(t+h)^3+3a_2(t+h)^2+2a_3(t+h)+a_4=\dot\theta(t+h;2), \tag{38}$$

або п'яте рівняння має вигляд (38). Результати числових експериментів розв'язування задачі Коші (26) методами п'ятого порядку точності з кроком $h=0{,}1$ наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Абсолютні покоординатні відхилення наближених розв'язків від аналітичних

t	Ітераційна формула (34)	Ітераційна формула (34) з урахуванням (36), (37)	Ітераційна формула (29)
0.2	2.75E-12	2.75E-12	1.00E-10
	2.80E-12	2.80E-12	1.03E-09
0.5	6.93E-12	6.93E-12	1.00E-10
	6.50E-12	6.50E-12	1.27E-09
3.0	3.52E-10	3.52E-10	7.55E-09
	1.02E-10	1.02E-10	7.38E-09
7.0	2.14E-07	2.14E-07	2.52E-06
	5.11E-07	5.11E-07	4.48E-06
8.5	2.29E-04	2.29E-04	1.09E-03
	3.14E-04	3.14E-04	3.74E-04
9.0	7.89E-03	7.89E-03	3.14E-02
	1.98E-02	1.98E-02	3.30E-03

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с. 2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с. 3. *Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983. – 512 с. 4. *Бейко И.В., Бейко М.Ф.* К численному построению оптимальных управлений // Моделирование нестационарных процессов. – К.: ИМ АН УССР, 1977. – С. 173–190. 5. *Бейко И.В.* Функции для оценивания полезности информации в конструктивной теории оптимальных агрегированных моделей // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №3. – С. 43–54. 6. *Бейко І.В.* Розвиток методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Кібернетика. – 2002. – Вип.3. – С. 10–15. 7. *Бейко И.В.* Применение разв'язывающих операторов для решения задачи Коши и построения экстремальных алгоритмов развязывающей декомпозиции // Вычислительная и прикладная математика. Респ. междувед. науч. сб. –1981, вып. 45. – С. 110–118. 8. *Зінько П.М.* Числові алгоритми побудови наближених розв'язків крайових задач за неявними схемами. Одновимірна задача // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 3. – С. 233–238. 9. *Зінько П.М.* Побудова явних різницевих схем для неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 177–181. 10. *Зінько П.М.* Неявна різницева схема для розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 186–191. 11. *Бейко І.В., Бодачівська Л.Ю., Зінько П.М.* Системний аналіз процесів підвищення техніко-експлуатаційних характеристик свердловин // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 101–104. 12. *Бейко И.В., Зинько П.Н., Щур В.И.* Методы разрешающих операторов для решения задачи Коши, использующие полиномы Лагранжа // Киевский университет им. Т. Шевченко. – Киев, 1986. – 39 с. – Рус. – Деп. в УКРНИИНТИ 22.06.86, №1468. 13. *Бейко И.В.* Численный анализ граф-операторных уравнений методом разрешающих операторов и *s*-экстремальных моделей // II Республиканская конференция „Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". – Киев: КГУ, 1978. – С. 124–125. 14. *Бейко І.В.* Уніфікована методологія розв'язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою) // Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment", AFCEA, Europe Seminar, Kiev, 28–30 May 1998. – С. 44–50. 15. *Зінько П.М.* Про використання алгоритмів теорії розв'язуючих операторів при моделюванні деяких радіотехнічних процесів // International conference "Problems of decision making under uncertainties", September 12–17, 2005, Berdyansk, Ukraine, 157–158 p. 16. *Зінько П.М.* Дослідження системи рівнянь Ходкіна–Хакслі з допомогою деяких алгоритмів теорії розв'язуючих операторів // International workshop "Problems of decision making under uncertainties", May 21–25, 2006, Shidnytsia, Ukraine, 104–105 p.

Надійшла до редколегії 19.12.2008

УДК 519.816(075.8)

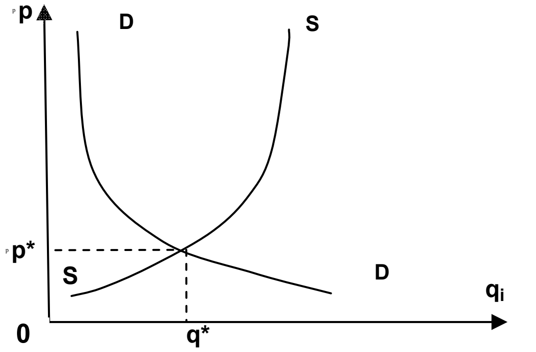
О.Ф. Волошин, д-р тех. наук, проф., О.В. Присяжнюк, канд. техн. наук, доц.

НЕЧІТКІ МОДЕЛІ РЕГУЛЬОВАНОЇ МОНОПОЛІЇ ПРИ ВИРОБНИЦТВІ КОЛЕКТИВНОГО ПРОДУКТУ

Розглядаються нечіткі постановки задач регульованої монополії, зокрема запропоновано нечітку модель визначення рівня виробництва колективного продукту

The regulated monopoly fuzzy settlement are considered, particular, a fuzzy model of production level collective product defining is suggested.

Вступ. В 2007 р. Нобелівська премія з економіки була присуджена американцям Л. Гурвіцю, Р. Маєрсону, Е.Маскіну за дослідження методів "оптимального розподілу ресурсів в умовах недосконалої конкуренції" або проблем "регульованої монополії". Досконала конкуренція за Вальрасом визначається наявністю великої кількості "малих" споживачів і виробників, які не можуть впливати на ринкову ціну, що визначається "моделлю Маршала" [1] (рис. 1).



p – ціна продукції;
q – об'єм продукції;
S – сукупна пропозиція;
D – сукупний попит;
p* – ринкова (рівноважна) ціна;
(p*,q*) – точка балансу "попит-пропозиція"

Рис. 1

Інтерес до моделей недосконалої конкуренції (зокрема, монополії, олігополії [1]) пов'язана з тим, що разом з недоліками (монополіст, впливаючи на ціни через обсяг випуску, прагне "роздягти" споживача) монополізм веде до підвищення ефективності виробництва (зростанням продуктивності праці, зниженням витрат і т.і.). Боротьба з монополізмом зводиться або до його законодавчого обмеження (встановленням "рівня монополізму"), або до позбавлення монополіста права впливати на ціни.

Регульована монополія при виробництві колективного продукту має на меті збалансування ринку за рахунок визначення оптимального рівня виробництва колективного продукту та встановлення при цьому індивідуальних цін на продукт.

Традиційні підходи до проблем регульованої монополії виходять з теорії конкурентної ринкової збалансованості. Для випадку виробництва колективного продукту це приводить до встановлення індивідуальних цін Ліндала [2]: кожному агенту приписується власна ціна на колективний продукт, що реалізується через податкову систему, і за цими цінами попит агентів на об'єм колективного продукт однаковий.

Метою даного дослідження є застосування до задач регульованої монополії нечіткого підходу [3,4], що дозволяє будувати моделі, які є "більш адекватними" реальній ситуації.

Постановка задачі. Розглядається така однопродуктова модель виробництва колективного продукту з одним ресурсом [2]:

$$u_i(M_i - x_i, y) \to \max,\ i \in N = \{\overline{1,n}\},\ n \ge 2,\ \sum_i x_i = c(y), \quad (1)$$

де M_i – початковий запас грошей і-го агента, x_i – його внесок у виробництво y одиниць колективного продукту вартістю $c(y)$, u_i – функція корисності i -го агента.

Накладаються звичні для моделей мікроекономіки обмеження [2] на функції c і u_i: $c(0)=0$, $c(y)$ не спадає і угнута; u_i зростає за кожною змінною $m_i = M_i - x_i$ та y і квазіугнута за їх сукупністю; функції c та u_i диференційовані. При цих умовах агрегування задачі колективного прийняття рішення (1) у вигляді адитивної згортки $U = \sum_i u_i$ приводить до Парето-оптимального розв'язку, що визначає "ефективну економіку" за Самуельсоном [1]: економіка ефективна, якщо покращення корисності (добробуту) будь-якого агента приводить до погіршення корисності хоча б одного іншого. Необхідні умови оптимальності є при цих припущеннях і достатніми та визначаються так званим рівнянням Самуельсона:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{iy}}{u_{ix}}(M_i - x_i, y) = c'(y),$$

де $u_{iy}(u_{ix})$ – частинна похідна u_i за колективним продуктом (за величиною "вільних" грошей m_i).

Ринок є збалансованим, якщо:

– А1. Кожен агент задовольняється одним і тим же рівнем колективного продукту y^*;

– А2. Сума індивідуальних платежів $\sum_{i \in N} x_i$ в точності покриває витрати на виробництво *c(y*)* колективного продукту об'ємом y^*.

Позначимо систему "індивідуальних цін Ліндала" через $p = (p_i)_{i\hat{I}N}$ [1].

Якщо розглянути випадок постійних доходів на збільшення масштабів виробництва $c(y) = \alpha y$, $\alpha = const$, то рівновага Ліндала $(p_1,...,p_n, y^*)$ визначається такими умовами [1]:

$$u_i(M_i - p_i y^*, y^*) = \max_{y>0} u_i(M_i - p_i y, y),\quad \sum_{i \in N} p_i = \alpha. \quad (2)$$

Перша умова означає, що попит агентів на колективний продукт однаковий, а друга – затрати повністю покриваються.

Враховуючи умови на функції u_i, маємо систему з $(n+1)$ рівняння відносно $(n+1)$ змінної $(p_1,...,p_n, y^*)$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} \Big/ \frac{\partial u_i}{\partial m_i} = p_i,\quad i = \overline{1,n},\quad \sum_{i \in N} p_i = \alpha. \quad (3)$$

У випадку квазілінійних переваг $u_i = b_i(y) + (M_i - p_i y)$, де $b_i(y)$ – грошовий еквівалент *y* одиниць колективного продукту, тобто для і-го агента немає значення: чи він отримує платіж в $b_i(y)$ грошових одиниць, чи споживає *y* одиниць суспільного продукту безкоштовно. Якщо $b_i(y)$ – угнуті та диференційовані, система (3) зводиться до такої:

$$b'_i(y) = p_i,\quad i = \overline{1,n},\quad \sum_{i \in N} p_i = \alpha. \quad (4)$$

Умова "збалансованості" А1, наслідком якої є система (4), видається штучною – в практичних задачах існування "об'єктивного" рівня об'єму суспільного продукту y^*, який задовольняв би всіх агентів, видається нереальним.

Нечіткі постановки задачі. Пропонуються "більш адекватні" постановки задачі (1), що базуються на нечіткому аналізі Лотфі-Заде[3]:

1.Кожен агент задає інтервал бажаних значень рівня суспільного продукту у вигляді

$$y_i \in Y_i = [y_i^{\min}, y_i^{\max}] \quad (5)$$

і y_i розглядається, як нечіткий параметр.

Пропонується до розгляду нечітка багатокритеріальна задача [3]:

$$|y^* - y_i| \to \min, i = \overline{1,n}, \quad (6)$$

з нечіткою множиною альтернатив (4), де індивідуальні ціни p_i (що реалізуються через податкові виплати і приймаються агентами як "об'єктивно-обумовлені") є чіткими параметрами.

2. Агенти погоджуються з "об'єктивно-обумовленим" рівнем y^* при умові збалансованості індивідуальних цін як нечітких параметрів, у вигляді:

$$p_i \in P_i = [p_i^{\min}, p_i^{\max}]. \quad (7)$$

У цьому випадку розглядається нечітка багатокритеріальна задача:

$$|p^* - p_i| \to \min,\ i = \overline{1,n}, \quad (8)$$

де p_i – найбільш бажане значення індивідуальної ціни для *i*-го агента.

3. Нечіткими розглядаються як параметри y^*, так і p^*. У приведених вище постановках з практичних міркувань доцільно розглянути і параметр α як нечіткий.

Форми представлення нечітких параметрів. Функції належності (ФН) параметрів у нечітких постановках прикладних задач розглядаються як дзвіноподібні, гаусовські, трикутні та трапецеїдальні [4].

Позначимо X_i – нечітке число, що відображає переваги i-го агента щодо бажаних значень параметрів виду (5) чи (7) в залежності від розглядуваної постановки задачі (1 чи 2). Нехай X_i описується парою параметрів

$$X_i = (\overline{x}_i, c_i)\,, \tag{9}$$

де $\overline{x}_i$ – центр інтервалу, c_i – його ширина, $c_i \ge 0$.

Найчастіше в економіко-математичних моделях розглядаються трикутні функції належності [4]. Нечіткі числа трикутної форми можуть бути, зокрема, симетричними і описуватися парою (9), але в загальному вигляді задаються i-м агентом трійкою чисел:

$$X_i = (x_i^H, \overline{x_i}, x_i^B)\,,$$

де x_i^H – нижня границя параметру; $\overline{x_i}$ – оптимальне значення; x_i^B – верхня границя параметру.

ФН трикутного вигляду для i-го агента задається аналітично у вигляді системи рівнянь та має вигляд (рис.2):

$$\mu_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < x_i^H \\ \dfrac{x - x_i^H}{\overline{x_i} - x_i^H} \text{ при } x_i^H \le x < \overline{x_i} \\ 1, \text{ при } x = \overline{x_i} \\ \dfrac{x_i^B - x}{x_i^B - \overline{x_i}} \text{ при } \overline{x_i} < x < x_i^B \\ 0, \text{ при } x > x_i^B \end{cases}$$

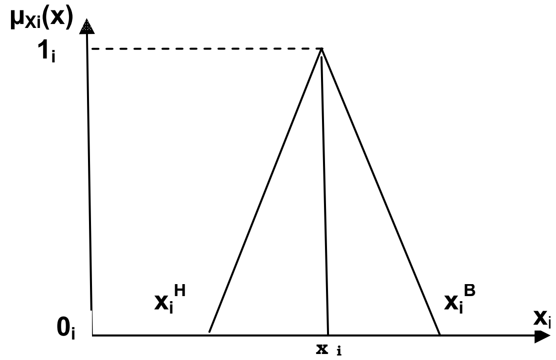


Рис. 2

У багатьох задачах доцільніше розглядати трапецієвидну форму ФН, яка будується за нечітким числом трапецієвидної форми:

$$X_i = (x_i^H,\ \overline{x_i}^H, \overline{x_i}^B\ x_i^B)\,,\quad \overline{x_i}^H < \overline{x_i}^B\,,$$

де $\overline{x_i}^H$ .. $\overline{x_i}^B$ – область оптимальних значень (зона "байдужості" у виборі величини колективного продукту).

Тому ми розглядаємо трапецієвидну функцію належності для кожного агента, яка задається такою системою рівнянь та має вигляд (рис.3):

$$\mu_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < x_i^H \\ \dfrac{x - x_i^H}{\overline{x_i} - x_i^H} \text{ при } x_i^H \le x < \overline{x_i}^H \\ 1, \text{ при } x \in [\overline{x_i}^H \ ..\ \overline{x_i}^B] \\ \dfrac{x_i^B - x}{x_i^B - \overline{x_i}^B} \text{ при } \overline{x_i}^B < x < x_i^B \\ 0, \text{ при } x > x_i^B \end{cases}$$

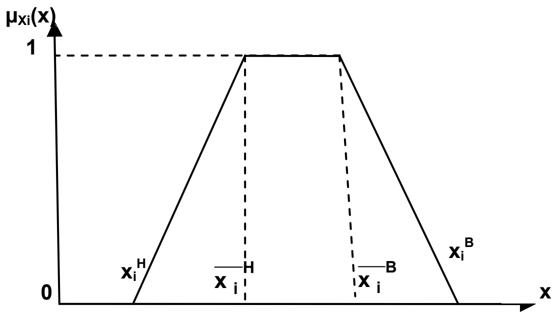


Рис. 3.

Випадок трикутної функції належності отримується як частинний випадок трапецієвидної функції при $\overline{x_i}^H = \overline{x_i}^B$.

Нечітка модель виробництва колективного продукту в умовах регульованої монополії. Розглянемо економіку виробництва колективного продукту для n=2 агентів в умовах постійних доходів на збільшення масштабів виробництва, тобто $c(y) = \alpha y$, $\alpha = const$. Агенти визначають свої переваги щодо прибутків у вигляді квазілінійних функцій $b_1(y)$ та $b_2(y)$.

Агенти також задають свої переваги щодо рівня колективного продукту у вигляді нечіткого числа трапецієвидного виду:

$$Y_i = (y_i^H,\ \overline{y_i}^H, \overline{y_i}^B\ y_i^B)\,,\quad \overline{y_i}^H < \overline{y_i}^B\,,\quad i = \overline{1,2}\,,$$

з відповідними ФН, представленими на рис. 3.

На першому етапі визначається колективна перевага, що відповідає множині значень області перетину відповідних ФН:

$$\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y) = \min_y(\mu_{Y_1}(y), \mu_{Y_2}(y))\,.$$

Можливі три варіанти перетину, що представлені нижче відповідними рисунками.

На рис. 4 представлено випадок, коли $\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y) = \varnothing$, тобто задача вироджена. Це відбувається за умов $y_2^H > y_1^B$ або $y_1^H > y_2^B$ і означає, що ринок незбалансований.

На рис. 5 представлено випадок, коли область перетину також являє собою трапецієвидну ФН вигляду з $\max_y(\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y)) = 1$. Цей випадок має місце за умов:

$$\overline{y_1}^B > \overline{y_2}^H \ \vee \ \overline{y_2}^B > \overline{y_1}^H \ \Rightarrow \ Y_1 \cap Y_2 = (y_2^H, \overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B, y_1^B), \text{ або}$$
$$\overline{y_2}^B > \overline{y_1}^H \ \vee \ \overline{y_1}^B > \overline{y_2}^H \ \Rightarrow \ Y_1 \cap Y_2 = (y_1^H, \overline{y_1}^H, \overline{y_2}^B, y_2^B).$$

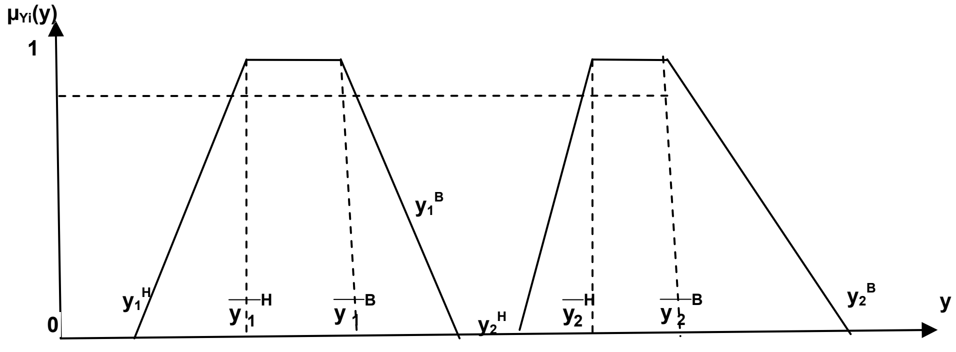


Рис. 4.

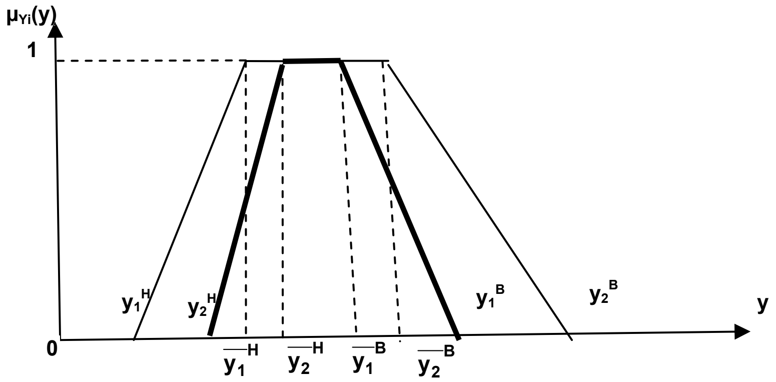


Рис. 5.

На рис. 6 представлено випадок, коли область перетину являє собою трикутну ФН вигляду з $\max_y(\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y)) = \beta$.

Цей випадок має місце за умов:

$$y_2^H < y_1^B \ \Rightarrow \ Y_1 \cap Y_2 = (y_2^H, \overline{y}, y_1^B), \text{ або } y_1^H < y_2^B \ \Rightarrow \ Y_1 \cap Y_2 = (y_1^H, \overline{y}, y_2^B).$$

Величину β, $\beta \in [0,1]$, можна інтерпретувати як степінь узгодженості думок агентів.

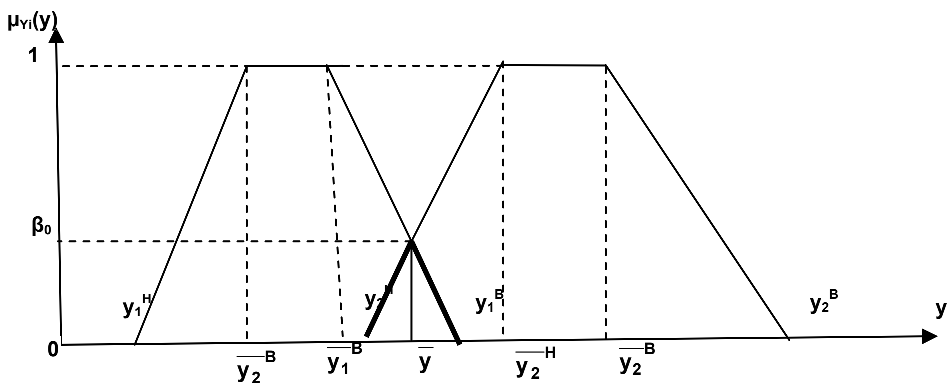


Рис. 6.

На другому етапі за умовами Самуельсона визначається значення необхідного рівня виробництва колективного продукту y^*, який забезпечує збалансованість ринку:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i'(y) = c'(y) \ \Rightarrow \ y^*.$$

Після цього проводиться процедура узгодження значення y^* з областю значень колективних переваг, представлених попередніми варіантами (рис. 5 та рис. 6).

Можливі три базові ситуації. Розглянемо їх детально для другого варіанту (рис. 8) можливого узгодження колективних переваг:

Ситуація 1 (рис. 7). $y^* \notin Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = (y_2^H, \overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B, y_1^B)$. Тобто $\inf | y^* - y_i |, i = \overline{1,n}$, досягається лише за граничного ступеня узгодженості $\beta_{\inf} = \min_y(\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y)) = 0$. У таких випадках потрібно вибрати мінімально прийнятний ступінь узгодженості $\beta_{\min}$ і, виходячи з нього, розв'язати (6).

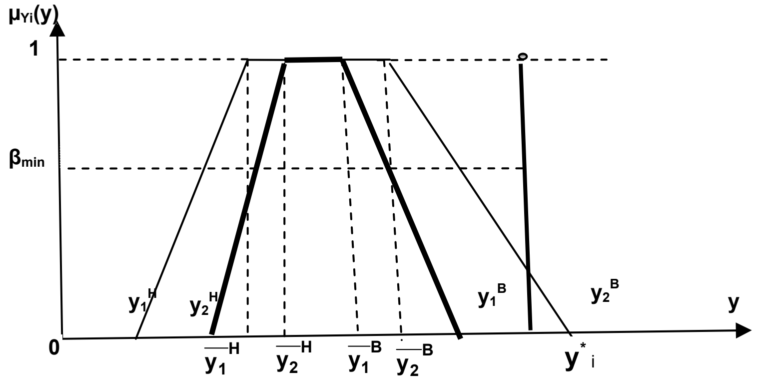


Рис. 7.

Ситуація 2 (рис. 8). $y^* \in Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = (y_2^H, \overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B, y_1^B)$, причому $y^* \in [\overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B]$. Тобто колективні переваги агентів є повністю узгодженими із значенням y^* з максимальним ступенем узгодження $\beta_{\max} = \max_y(\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y)) = 1$. Це означає, що значення оптимального рівня виробництва колективного продукту можна розглядати як будь-яке число з інтервалу $y^* \in [\overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B]$.

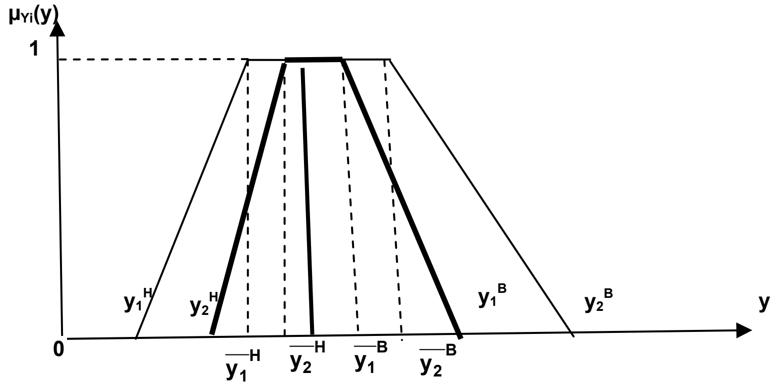


Рис. 8.

Ситуація 3 (рис. 9). $y^* \in Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = (y_2^H, \overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B, y_1^B)$, але $y^* \notin [\overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B]$. Тобто колективні переваги агентів є частково узгодженими із значенням y^* з максимальним ступенем узгодження $\beta_0 = \max_y(\mu_{Y_1 \cap Y_2}(y))$ на відповідному інтервалі $[y^{*H}, y^*]$, де y^{*H} можна знайти, розв'язавши відповідно рівняння $\frac{y^{*H} - y_2^H}{\overline{y_2} - y_2^H} = \beta_0$. Цей інтервал також можна зменшувати до $[\overline{y_2}^H, \overline{y_1}^B]$ за рахунок регулювання прийнятного ступеня узгодженості β, $1 < \beta < \beta_0$. Аналогічно, ситуації узгодження кінцевих значень колективних переваг та оптимального рівня y^* можна розглянути для варіанту 3 узгодження колективних переваг (у вигляді трикутної ФН, рис. 9).

Процедури локалізації області колективних переваг. Нехай n експертів задають свої переваги щодо рівня колективного продукту у вигляді нечіткого числа трапецієвидного виду:

$$Y_i = (y_i^H, \overline{y_i}^H, \overline{y_i}^B, y_i^B), \quad \overline{y_i}^H < \overline{y_i}^B, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

з відповідними ФН, представленими на рис. 3.

На основі інформації вигляду (10) можна сформувати агреговане нечітке число *Y*, наприклад, у спосіб, що базується на врахуванні всього "розмаху" індивідуальних оцінок, тобто

$$y^H = \min_i y_i^H, \quad \overline{y}^H = \min_i \overline{y_i}^H, \quad \overline{y}^B = \max_i \overline{y_i}^B, \quad y^B = \max_i y_i^B.$$

У цьому випадку отримується колективне нечітке число вигляду (10). Але при цьому нівелюються розподілення переваг експертів: чим більшим є розмах області, тим менш точно визначено *Y*.

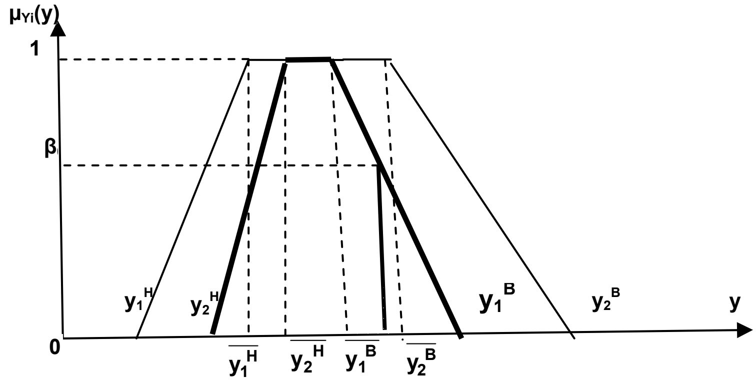


Рис. 9.

Інший підхід до визначення Y_k полягає у визначенні його граничних точок як центрів ваги відповідно індивідуальних чисел (10) за формулами:

$$y^H = \frac{\sum_i y_i^H}{n}, \quad \overline{y}^H = \frac{\sum_i \overline{y_i}^H}{n}, \quad \overline{y}^B = \frac{\sum_i \overline{y_i}^B}{n}, \quad y^B = \frac{\sum_i y_i^B}{n}.$$

В цьому випадку агреговане нечітке число Y може бути як трапецієвидної форми (коли $\overline{y}^H < \overline{y}^B$), так і трикутної форми (коли $\overline{y}^H \geq \overline{y}^B$).

Можна запропонувати двохетапну процедуру визначення агрегованого нечіткого числа Y [5].

На першому етапі індивідуальні нечіткі числа виду (10) агрегуються в точкові значення різними процедурами агрегування інтералів, зокрема:

– як центра ваги інтервалів:

$$y^C = \sum_i (y^B{}_i - y^H{}_i)(y^B{}_i + y^H{}_i) \Big/ 2\sum_i (y^B{}_i - y^H{}_i); \quad (11)$$

– як об'єднання інтервалів та визначення спільного центра:

$$y^S = (\min_i y^H{}_i + \max_i y^B{}_i) \Big/ 2; \quad (12)$$

–як точка рівномірних розрізів:

$$\sum_i (0, \min_i (y^R - y^H{}_i,\ y^B{}_i - y^H{}_i)) = \sum_i (0, \min_i (y^B{}_i - y^H{}_i,\ y^B{}_i - y^R)). \quad (13)$$

На другому етапі знаходяться агреговані нечіткі числа Y *за* допомогою різноманітних процедур "балансування" навколо результуючих точок, знайдених за формулами (11)–(13) шляхом уведення додаткових евристик, наприклад, визначенням мінімальних відстаней від результуючих точок до нижніх границь відповідних інтервалів на множині індивідуальних нечітких оцінок:

$$y^H = \min_i (y^\Phi - y^H{}_i), \quad \overline{y}^H = \min_i | y^\Phi - \overline{y}^H{}_i | \quad \overline{y}^B = \min_i | \overline{y}^B{}_i - y^\Phi | \quad y^B = \min_i (y^B{}_i - y^\Phi),$$

де $y^\Phi \in \{y^C,\ y^S,\ y^R\}$ і значення $y^C,\ y^S,\ y^R$ знайдено за формулами (11)–(13).

Висновок. У статті запропоновано узагальнення моделі виробництва колективного продукту в умовах недосконалої конкуренції шляхом розгляду її нечіткого варіанту. Це викликано тим, що детерміновані моделі видаються менш адекватними, оскільки визначають фіксовану величину колективного продукту, яку повинні прийняти всі агенти.

Пропонується діалогова процедура узгодження рівня колективного продукту, заданого інтервалами з пріоритетами вибору, що представляються трикутними та трапецієвидними функціями належності.

1. *Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Мікроекономіка. – К.: Вища школа, 2004.– 262с. 2. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений. – М.: Мир, 1991.– 464 с. 3. *Волошин О.Ф., Мащенко С.О.* Теорія прийняття рішень. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006.–304 с. 4. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. – К.: Издательский дом "Слово", 2008. – 344 с. 5. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Застосування процедур агрегування адитивних матриць парних порівнянь // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету / Вип. 16. – Кіровоград: КНТУ, 2005. – С. 276–280.

УДК 517.929

Г.А. Доленко
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

ПРОБЛЕМИ СИСТЕМНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

1. Суть завдань системної оптимізації

Суть постановки класичних оптимізаційних завдань полягає в знаходженні екстремального значення деякої критерійної функції в заданій і незмінній допустимій області допустимих рішень. При цьому можлива наявність множини критеріїв. На підставі рішення оптимізаційної задачі, особи, що приймають рішення (ОПР), виробляють стратегію керівництва системами.

Проте для більшості сучасних практичних завдань прийняття рішень така постановка не дає конструктивних результатів. Це пов'язано з тим, що допустима область і критерійні функції в процесі рішення можуть змінюватися, тобто система є нестаціонарною. Більш того, в їх цілеспрямованій зміні відповідно до заданої цільової установки і полягає основна змістовна суть процесу оптимізації.

Управління масштабними системами, проектування складного приладу, планування діяльності колективів і, взагалі, ухвалення складних рішень обумовлює, як правило, послідовне наближення до деякого бажаного стану або поведінки.

Вперше такий підхід до завдань оптимізації був запропонований Глушковим В.М. і названий системною оптимізацією [1]. Відзначимо деякі застосування технології системної оптимізації:

– при комплексному аналізі і цілеспрямованому формуванні умов розвитку організаційних систем, створенні комп'ютерної багаторівневої розподіленої системи підтримки прийняття рішень для розробки енергетичної програми країни з узагальненням на всі галузі [2] ;

– при створенні систем підтримки прийняття узгоджених рішень;

– при стратегічному плануванні і антикризовому управлінні підприємствами;

У практичних завданнях управління часто виникають несумісності різного роду. У цих несовместимостях виступають з одного боку – оргсистема, яка підлягає дослідженню і управлінню, а з іншої – неузгоджено з нею цільові установки. Залежно від ситуації і постановок завдань управління визначаються нові кількісно задані цілі розвитку, а також вимоги зовнішнього середовища, або інтереси інших систем, з якими відбувається взаємодія.

2. Методологія прийняття завдань системної оптимізації

2.1. Модель оргсистеми

Для статичних завдань оптимізації модель досліджуваної системи може бути задана у вигляді області допустимих рішень.

$$D_0 = \left\{ x : \ g_l \ (x) \le 0, \qquad \ell \in Q = \left\{1,...,m\right\}, \qquad x = \left\{ x_j, j \in J = \left\{1,...,n\right\}\right\} \ \right\} \tag{2.1}$$

і множини критеріїв

$$f = \left\{ f_i(x) \to \max, i \in I_1, \qquad f_i(x) \to \min, i \in I_2, \qquad I_2 \cup I_1 = I = \left\{1,...,M\right\}\right\} \tag{2.2}$$

де: $x \in R^n$ – вектор рішень; m – кількість обмежень; M – кількість критеріїв; I_1 – множина індексів критеріїв, які максимізуються; I_2 – множина індексів критеріїв, які мінімізуються.

Зауваження. Модель також може бути визначена у вигляді пари $\left\{D_0, f\right\}$ *, або у вигляді множини допустимих рішень* $\left\{D_0\right\}$ *без розгляду критеріїв* f . Цей випадок характерний для ситуацій, в яких не приймаються до уваги власні інтереси даної системи.

2.2. Модель цільових установок

Позначимо через G – модель цільових установок. Існують різні способи її формування. Вона може бути задана безпосередньо з використанням фіксованих бажаних значень критеріїв

$$f^* = \left\{ f_i(x), i \in I_1 \right\}:$$

$$G = \left\{ x : f^*_i \le f_i(x), i \in I_1, f^*_i \ge f_i(x), i \in I_2, x_j \ge 0, j \in J \right\};$$

з використанням інтервальних заданих значень критеріїв

$$\left[f_{i(н)}, f_{i(в)} \right], i \in I: \ G = \left\{ x : f_{i(н)} \le f_i(x) \le f_{i(в)}, i \in I, x_j \ge 0, j \in J \right\}; \tag{2.3}$$

з використанням заданого бажаного рішення

$$x^* = \left\{ x^*_j, j \in J \right\}: G = \left\{ x : x_j = x^*_j, j \in J \right\};$$

з використанням заданих інтервалів бажаних рішень

$$\left[x_{j(н)}, x_{j(B)} \right], j \in J: \ G = \left\{ x : x_{j(н)} \le x_j \le x_{j(в)}, j \in J \right\}.$$

2.3. Причини і умови виникнення завдань системної оптимізації

Завдання системної оптимізації виникає в наступних випадках:

– коли модель цільових установок несумісна з моделлю системи

$$G \cap D_0 = \varnothing$$

або, коли $G = \varnothing$;

– коли параметри, які характеризують допустиму область D_0 і множини критеріїв *f*, можуть змінюватися.

Позначимо

$Q_0 = \left\{ \ell : \ell \in Q, G \cap D_0 = \varnothing \right\}$, $\quad Q_0 \subset Q$ – підмножина індексів істотних обмежень в D_0

$I_0 = \left\{ i : i \in I, G = \varnothing \right\}$, $\quad I_0 \subset I$ – підмножина індексів критеріїв *f,*

Δp_l – вектори варіацій параметрів обмежень з індексами з Q_0 ,

$\Delta p_i \ \ i \in I_0$ – вектори варіацій параметрів критеріїв з індексами з множини I_0 ,

D_1 – нова область допустимих рішень,

f_1 – нова множина критеріїв,

$P_0 = \{\Delta p_l, l \in Q_0, \Delta p_i, i \in I_0\}$ – область обмежень на варіації параметрів D_0 і *f*, яку задає особа, що приймає рішення (ОПР), на основі реальних можливостей досліджуваної системи в процесі рішення задачі.

P – область обмежень на варіації параметрів, яка математично забезпечує побудову D_1, f_1 без урахування реальних можливостей P_0 по зміні параметрів системи.

2.4. Загальна постановка завдань системної оптимізації

Завдання системної оптимізації полягає в побудові нової моделі системи (позначимо її $\left\{D_1, f_1\right\}$) шляхом зміни параметрів згідно *G* так, щоб $D_1 \cap G \ne \varnothing$ (при $D_0 \cap G = \varnothing$, або коли $\in = \phi$).

Після побудови нової моделі системи, необхідно знайти її рішення щодо функцій f_1 в області D_1 .

2.5. Специфічні особливості завдань системної оптимізації.

1. Модель системи може бути представлена у вигляді $\{D_0, f\}$, коли її власні інтереси f не беруться до уваги.

2. Задається необхідний ступінь узгодженості D_1 і G: повна узгодженість $G \subset D_1$ або часткова узгодженість $D_1 \cap G \neq \varnothing$.

3. У практичних завданнях ОПР має різні можливості при формулювання області P_0 рішень оптимізаційних задач для однозначного вибору варіацій параметрів системи.

2.6. Загальна схема рішення задач системної оптимізації.

Загальна схема рішення задач системної оптимізації складається з наступних основних етапів.

І. Визначається, погіршуються або поліпшуються значення критеріїв f при зміні області D_0 моделі системи у напрямі G, яка відповідає вимогам ОПР.

При цьому можливі наступні три варіанти.

1. Всі рішення з G мають кращі значення по всіх критеріях в порівнянні з точками області D_0 (G "краще" D_0 по f).

2. Жодне рішення з G не дає одночасного поліпшення критеріїв в порівнянні з точками області D_0 (G "гірше" D_0 по f).

3. У G тільки частина рішень має кращі значення критеріїв в порівнянні з точками області D_0 ("змішаний " варіант).

ІІ. Хай модель цільових установок G задається безпосередньо в просторі критеріїв, наприклад, через бажані величини цільових функцій f або їх інтервали.

Залежно від способу завдання цільової установки визначається, чи існують взагалі рішення із значеннями по всіх критеріях f – *кращими* або рівними бажаним, або що належать вказаним інтервалам. Іншими словами з'ясовується, чи не є порожньою G. Якщо так, то слід формувати нову множину критеріїв f_1.

Якщо G задається безпосередньо в просторі рішень, то необхідність реалізації цього етапу відсутня.

ІІІ. Виділяються обмеження в (2.1), параметри яких необхідно змінити для забезпечення допустимості вимог G в новій області D_1. Назвемо такі обмеження істотними. Множина їх індексів позначається через Q_0.

IV. Будується область P варіацій параметрів істотних обмежень. До складу P повинні входити обмеження на варіації параметрів, які забезпечують допустимість крапок з G в новій області D_1. В області P повинні бути обмеження, які забезпечують збереження фізичної суті обмежень з індексами з Q_0, а також замкнутість і обмеженість нової області D_1 (D_0 є замкнутою і обмеженою).

На цьому ж етапі відбувається формування області допустимих варіацій параметрів P_0 для істотних обмежень в D_0 на основі інформації від ОПР, і експертів про можливість змін даної системи. В областях P і P_0 також повинні бути враховані ті параметри обмежень з індексами Q / Q_0, до змін яких може приводити управління параметрами істотних обмежень.

V. Якщо $P \cap P_0 = \varnothing$, то визначають нові значення параметрів істотних обмежень в D_0 і пов'язаних з ними шляхом побудови і рішення деяких оптимізаційних задач на множині $P \cap P_0$. Таким чином формується нова область допустимих рішень $D_1 : G \cap D_1 \neq \varnothing$. На D_1 визначають ефективні рішення по f, відповідно до моделі цільових установок G.

Відомо, що знаходження ефективних рішень багатокритерійної задачі може бути здійснене методом обмежень або при використанні мінімаксної згортки.

VI. Якщо $P \cap P_0 = \varnothing$, і ОПР може змінити модель директив G реалістичнішу з погляду отриманої при дослідженні системи інформації, то процес рішення задачі системної оптимізації починається спочатку.

При рішенні задачі системної оптимізації участь ОПР передбачається :

– при виборі способу завдання моделі цільових установок G і безпосередньому її формуванні;

– при побудові області P_0 обмежень на варіації параметрів;

– при виборі оптимізаційного завдання для однозначного визначення варіацій параметрів істотних обмежень.

Три таких неформалізованих момента присутні в кожній схемі рішення задачі системної оптимізації.

3. Системна оптимізація для лінійних завдань

3.1. Постановка завдання системної оптимізації для багатокритерійних завдань лінійного програмування.

Хай задана множина допустимих рішень D_0 :

$$D_0 = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^0 x_j \le b_l^0, l \in Q = \{1,...,m\}, j \in J = \{1,...,n\} \right\} \qquad (3.1)$$

і множина критеріїв:

$$f = \left\{ f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \max, i \in I = \{1,...,M\} \right\} . \qquad (3.2)$$

Параметри, які характеризують область D_0 і множину критеріїв f, можуть змінюватися на величини $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in Q, \Delta c_{ij}, i \in I, j \in J$ на які в процесі рішення накладаються додаткові обмеження P_0. Як і в загальній постановці завдання, вважаємо, що зміна області допустимих рішень D_0 і критерійних функцій f використовується тільки з метою досягнення бажаних для особи ОПР рішень G .

Зауваження. ОПР визначає G відповідно до найбільшого діапазону змін значень критеріїв, які досягаються на початковій області, де

$$f_{i(\min)} = \min_{x \in D_0} f_i(x),$$

$$f_{i(\max)} = \max_{x \in D_0} f_i(x),$$

$$f_i^0 = \begin{cases} f_{i(\min)}, i \in I_2 \\ f_{i(\max)}, i \in I_1, I_1 \cup I_2 = I \end{cases}$$

Не обмежуючи спільності, вважатимемо, що всі функції f максимізують.

Основною метою алгоритмів системної оптимізації для багатокритерійних завдань лінійного програмування, орієнтованих на різні способи завдання G є створення нової допустимої області D_1 (відповідно до первинної області D_0 і області варіацій параметрів P_0), в якій існуватимуть рішення із значеннями критерійних функцій не гірше за значення з множини, яка задана ОПР.

3.2. Алгоритм системної оптимізації з моделлю цільових установок в просторі рішень

Хай ОПР задає свої вимоги G через бажані значення рішення x^* із значеннями критерійних функцій $f_i^* = f_i(x^*)$, f_i^* $i \in I : x^* \notin D_0$.

Потрібно побудувати нову допустиму область D_1 відповідно до початкової області D_0 і обмежень на варіації її параметрів P_0 таку, в якій існує рішення x^k , при якому $f_i(x^k) \geq f_i^*, i \in I, x^* \in D_1$.

Завдання бажаної крапки x^* створює напрям пошуку рішення задачі багатокритерійної оптимізації, яке визначається вектором переваг критеріїв $\rho^* = \{\rho_i^*, i \in I\}$. Компоненти $\rho_i^*, i \in I$ знаходять по формулах

$$\rho_i = \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} w_j(x) / \sum_{q \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq q}} w_j(x), i \in I \tag{3.3}$$

де

$$w^* = \{w_i^* = w_i(f_i(x^*)), i \in I\}$$

$$w_i(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i(x) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0}, i \in I_2 \\ \dfrac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0 - f_{i(\min)}}, i \in I_1 \end{cases}$$

$w_i(\bullet)$ – монотонні перетворення множини критеріїв, $f_{i(\max)}, f_i^0, f_{i(\min)}, i \in I$ – максимальні, оптимальні і мінімальні значення критеріїв.

Позначимо x_0^k – ефективне рішення задачі, знайдене методом обмежень із заданим вектором $\rho = \rho^*$.

Оскільки $x^* \in D_0$, то вважатимемо, що

$$f_i = f_i(x^*) \geq f_i(x_0^k), i \in I \tag{3.4}$$

і хоч би одна з нерівностей строге. В цьому випадку говоритимемо, що x^* "краще", ніж x_0^k . Інакше завдання побудови нової області D_1 не виникає.

Визначимо номери обмежень Q_0 , які порушуються при підстановці в них $x = x^*$:

$$Q_0 = \{l : \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j^* > b_l, l \in Q\} .$$

Теорема 1. Якщо, $i \in I$ і хоч би одна нерівність строга, то допустимі рішення системи, які знаходяться на гіперплощинах з номерами з Q_0 , є ефективними рішеннями по множині критеріїв $\{f_i, i \in I\}$.

Таким чином для того, щоб x^* стало допустимим рішенням, необхідно змінити початкову область D_0 за рахунок варіацій параметрів обмежень з індексами з Q_0 . Ці зміни, згідно з теоремою 1, приводитимуть до поліпшення значень критеріїв.

Накладемо на варіації параметрів Δa_{lj} і Δb_l обмежень з номерами з множини Q_0 такі умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \Delta a_{lj} - \Delta b_l \leq b_l^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^0 x_j^*, l \in Q_0 \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \Delta b_l > -b_l^0, \quad \text{якщо } b_e^0 > 0, l \in Q_0, \\ \Delta b_l < \left| b_l^0 \right|, \quad \text{якщо } b_e^0 < 0, l \in Q_0 \\ \Delta a_{lj} > -a_{lj}^0, \text{ якщо } a_{lj}^0 > 0, j = 1,...,n, l \in Q_0 \\ \Delta a_{lj} < \left| a_{lj}^0 \right|, \text{ якщо } a_{lj}^0 < 0, j = 1,...,n, l \in Q_0 . \end{gathered} \tag{3.6}$$

Позначимо через P область зміни параметрів обмежень з номерами з множини, яка описується співвідношеннями (3.5) (3.6). Побудована таким чином область зміни параметрів необмежена і може мати необмежену кількість рішень. Умови (3.5) дозволяють зробити x^* допустимою в новій області D_1 (x^* у цій області задовольнятиме обмеженням Q_0 , обмеженням Q / Q_0 вона задовольняє за початковими умовами). Обмеження (3.6) необхідні для того, щоб при зміні параметрів з індексами з множини Q_0 сліди їх гіперплощин на осях $x_j, j = 1,...,n$ в просторі X залишилися на тих же напівосях (фізичний зміст обмежень не змінювався).

За допомогою ОПР формується область обмежень P_0 на варіації параметрів:

$$P_0 = \{\Delta a_{lj}, \Delta b_l, j = 1,...,n, l \in Q_0\}.$$

Якщо $P_0 \cap P \neq \varnothing$, то можна вирішити задачу побудови нової області D_1, в якій точка x^* буде допустимою. Неоднозначність вибору варіацій параметрів ліквідується шляхом формування і рішення додаткових задач оптимізації по вибору зміни параметрів початкової допустимої області D_0.

Якщо ж $P_0 \cap P \neq \varnothing$, то необхідно перезадавати область P_0, або вибирати нове бажане рішення x^*. Спеціально на цьому питанні зупинятися не будемо.

Для знаходження величин варіацій параметрів, сформулюємо додаткове завдання оптимізації, де в ролі критерію виберемо витрати, пов'язані із змінами параметрів моделі на одиницю їх вимірювання:

$$\Delta b = \{\Delta b_l, l \in Q_0\}, \Delta a = \{\Delta a_{lj}, l \in Q_0, j = 1,...,n\}.$$

Позначимо функцію витрат через $c(\Delta a, \Delta b)$. Тоді завдання вибору варіацій параметрів зводиться до завдання оптимізації:

$$\min_{\Delta a, \Delta b \in P \cap P_0} c(\Delta a, \Delta b). \quad (3.7)$$

Якщо функцію витрат $c(\Delta a, \Delta b)$ побудувати не можна, то завдання знаходження величин $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, j = 1,...,n, l \in Q_0$ можна сформулювати як багатокритерійне завдання, в якому кожен параметр виступає як окремий критерій, величина зміни якого $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, j = 1,...,n, l \in Q_0$ залежно від фізичної суті може або максимізуватися, або мінімізуватися.

Позначимо $F = \{\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in Q_0, j \in J\}$ множину критеріїв, яка сформульована по параметрах, при варіації яких здійснюється побудова нової допустимої області. Завдання вибору варіацій параметрів $\Delta a_{lj}, \Delta b_l$ зводиться до завдання багатокритерійної оптимізації по множині критеріїв

$$F = \{\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in Q_0, j \in J\} \quad (3.8)$$

з урахуванням обмежень $\Delta a, \Delta b \in P \cap P_0$.

Викладений підхід дозволяє будувати нову область D_1, в якій бажане рішення x^* буде допустимим.

4. Аналітичне конструювання регуляторів

У завданнях аналітичного конструювання оптимальних регуляторів функціонал якості зазвичай виражає міру відхилення збудженого рішення від програмного (оптимально розрахованого) . І існує нескінченна безліч заходів, які можуть бути вибрані для цієї оцінки.

Функціонал вибирається апріорі і є постулатом. Але, як відзначив Бертран Рассел, "метод постулювання має багато переваг, співпадаючих з тими, які властиві крадіжці, в порівнянні з чесною працею". Тому завдання аналітичного конструювання є практично корисним лише в тому випадку, якщо вдало вибраний функціонал якості.

У теорії регулювання розроблена система критеріїв, покладених в основу оцінки якості перехідного процесу.

1. Критерій – "час регулювання".
2. Критерій – "величина перерегулювання".
3. Критерій монотонності.
4. Критерій автономності.
5. Критерій технічної стійкості.

Серед функціоналів потрібно вибрати такі, при яких:

1) вирішується основне завдання і система оптимальна;
2) задовольняється задана система $\gamma-$ критеріїв.

Хай функціонали представляють множину квадратичних форм, Кожен $i-$ й критерій, що належить серії, вирізає в конусі K додатньо визначених матриць множини точок, Перетин таких множин (якщо він не порожній) визначає функціонал, що відповідає проблемі вибору. Велика частина вторинних критеріїв записується у формі ізопараметричних обмежень на відомі функціонали.

Як правило, класичне завдання оптимізації полягає в наступному. Заданий деякий фазовий простір, множина обмежень на змінні і функціонал (функція), екстремальне значення якого потрібно знайти. За певних умов на вигляд простору, заданих обмеженнях на змінні і вибраному функціоналі шукається крапка, в якій функціонал досягає екстремального значення.

Останнім часом стали розглядати зворотні завдання оптимізації. Передбачається, що точка фазового простору, в якій повинен досягатися екстремум, задана. Необхідно "мінімальним чином" змінити множину обмежень або навіть сам функціонал, щоб в заданій точці екстремум дійсно досягався. У роботі [7] вирішена часткова зворотна задача лінійно-квадратичної оптимізації динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями.

Завдання аналітичного конструювання регуляторів (лінійно-квадратичне завдання оптимізації) полягає в знаходженні функції управління лінійної системи

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \quad (4.1)$$

у вигляді зворотного зв'язку, при якому система (4.1) стає асимптотично стійкою і квадратичний функціонал якості

$$I[u(t)] = \int_0^\infty (x^T(s)Cx(s) + u^T(s)Du(s))ds \quad (4.2)$$

досягає мінімального значення. Тут C, D – деякі наперед задані додатньо визначені матриці відповідних розмірностей. З використанням принципу Беллмана отримане, що рішення задачі (4.1), (4.2) без обмежень має вигляд [5,6]

$$u_0[x(t)] = -D^{-1}B^T H_0 x(t) \quad (4.3)$$

де матриця H_0 є рішенням матричного рівняння Ріккаті

$$A^T H + HA - HBD^{-1}B^T H + C = 0 \ . \quad (4.4)$$

При цьому екстремальне значення функціонала (4.2) рівне

$$I\left[u_0(t)\right] = x_0^T H_0 x_0, \quad (4.5)$$

де x_0 – початкова точка траєкторії, тобто $x_0 = x(0)$.

Під зворотним завданням оптимізації по матриці B в завданні аналітичного конструювання регуляторів розумітимемо наступне. Вважаємо, що шукане оптимальне значення функціонала (4.2) відоме і рівне

$$I\left[u^*(t)\right] = x_0^T H^* x_0 \quad (4.6)$$

тобто фактично відома додатньо визначена матриця H^*. Потрібно знайти збурення ΔB системи (4.1), при якому для "збуреної" системи

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + (B + \Delta B)u(t)\,,\ x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m\ ,\ t \ge 0, \quad (4.7)$$

екстремальне значення функціонала (4.2) має вигляд (4.6). При частковому зворотному завданні вважатимемо, що на матрицю B обмеження не накладаються. Отриманий наступний результат.

Теорема 2. Часткове зворотне завдання лінійно-квадратичної оптимізації по матриці B вирішується тоді і тільки тоді, коли матриця $A^T H^* + H^* A + C$ додатньо невизначена $rankD \ge rankM$. При цьому рішення мають вигляд

$$\Delta B_i = Vdiag\left(\sqrt{M}\right)Rdiag\left(\pm\sqrt{d_1}, \pm\sqrt{d_2}, \ldots \pm\sqrt{d_m}\right)U^T - B \quad i = \overline{1, 2^m}\ . \quad (4.8)$$

Тут U – ортонормована матриця, що приводить D до діагональної, V – ортонормована матриця, що приводить до діагональної матрицю M

$$(diag\sqrt{M}\ )^T = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{m_m} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = (H^*)^{-1}\left(A^T H^* + H^* A + C\right)(H^*)\ ,$$

$d_i > 0$ – власні числа матриці D , $m_i \ge 0$, – власні числа матриці M $i = \overline{1, m}$, R – довільна ортонормированная матриця

Зауваження. У побудові матриці збурень ΔB присутні $i = \overline{1, 2^m}$ дискретне "свавілля" за рахунок взяття кореня і неперервне "свавілля" за рахунок вибору матриці R.

5. Зворотні завдання математичного моделювання

З точки зору причина-слідство всі завдання математичного моделювання можна розбити на два класи: прямі і зворотні завдання. Для прямих завдань відомі причини, потрібно знайти слідство. Як причини можуть бути.

1. Вид математичної моделі і її початковий стан (умови Коші).
2. Коефіцієнти диференціальних операторів, що описують моделі.
3. Граничні умови.
4. Геометрія завдання, що вивчається.

Як наслідки в завданнях фізики і механіки зазвичай використовуються такі змінні, як переміщення, напруга, деформація, температура і т.д.

Прямі завдання складають суть сучасних досліджень, які формувалися впродовж останніх років.

Для зворотних завдань ситуація інша. Відомі наслідки, потрібно знайти причини і визначити вказані чинники. При цьому використовується додаткова інформація про стан об'єкту. Завдання такого типу стали досліджуватися порівняно недавно. Можна привести наступну (умовну) класифікацію зворотних завдань.

1. Завдання визначення початкового стану системи по відомій динамічній моделі і законам її функціонування.
2. Коефіцієнтні зворотні завдання – завдання визначення коефіцієнтів диференціальних операторів по відомих рішеннях.
3. Граничні зворотні завдання, що є визначенням граничних умов рівнянь з розподіленими параметрами.
4. Завдання про визначення (уточнення) області функціонування системи.

На жаль, рішення багатьох зворотних задач (особливо нелінійних) може бути отримане лише приблизно, за допомогою чисельних розрахунків. Слід зазначити, що зворотні завдання, як правило, є некоректними, можлива відсутність єдиного рішення і нестійкість по відношенню до малих збурень початкових даних і коефіцієнтів систем. Похибка, що завжди властива вимірюванням, може зробити сильний вплив на оцінку параметрів систем.

Висновки і напрями майбутніх досліджень

Для сучасних завдань прийняття рішень характерно:

1. використання багатьох критеріїв (багатокритеріальність)
2. необхідність цілеспрямованої зміни допустимої області і параметрів критеріїв в процесі оптимізації
3. багаторівневість організаційних систем, як об'єкту дослідження і управління, розподіленість прийняття рішень по підсистемах і необхідність взаємодії, узгодження, координації рішень для моделей окремих рівнів.

Методи системної оптимізації надають математичну основу для підтримки прийняття рішень при управлінні розвитком розподілених багатокритерійних багаторівневих систем. Ефективність даного підходу підтверджується практикою застосування систем підтримки прийняття рішень різноманітного призначення.

Актуальні наступні напрями майбутніх досліджень:

- розробка методів системної оптимізації для динамічних систем
- розробка нечітких моделей системної оптимізації для розподіленого управління розвитком ієрархічних систем
- інтеграція алгоритмів системної оптимізації з техніками візуалізації інформаційних просторів в різних предметних областях з метою підвищення зручності, якості, оперативності процесу прийняття рішень ОПР.

1. *Глушков В.М.* Основы безбумажной технологии. – М.: Наука, 1982. – 552 с. 2. *Ириков В.А., Тренев В.Н.* Распределенные системы принятия решений. – М.: Фтзматлит, 1999.– 288 с. 3. *Глушков В.М., Михалевич В.С., Волкович В.Л., Доленко Г.А.* К вопросу системной оптимизации в многокритериальных задачах линейного программирования // Кибернетика, №3, 1982. – С.4–8. 4. *Глушков В.М., Михалевич В.С., Волкович В.Л., Доленко Г.А.* Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования при интервальном задании предпочтений // Кибернетика, №3, 1983. – С.1–5. 5. *Доленко Г.О., Хусаінов Д.Я.* Часткова обернена задача оптимізації в дискретних системах // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.6, 2005. – С.17–20. 6. *Доленко Г.О., Хусаінов Д.Я.* Деякі зауваження про обернену задачу лінійно-квадратичної оптимізації // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 2005. – С.172–176. 7. *Доленко Г.А., Хусаинов Д.Я.* Частичная обратная задача линейно-квадратичной оптимизации // Кибернетика и системный анализ, №3, 2005. – С.183–188.

УДК 519.6

М.М. Москальков, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Д. Утебаев, канд. фіз.- мат. наук, доц.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛАБОЙ МЕТРИКЕ

В работе получены оценки точности схем метода конечных элементов по пространственным и временной переменным для параболического уравнения. Погрешность метода оценивается в интегральной (слабой) норме, что позволило снизить требования гладкости к решению дифференциальной задачи по сравнению с обычной энергетической нормой.

M.N.Moskalkov, D.Utebaev. Study on convergence of finite element method for parabolic equation. In the study an estimated accuracy is obtained for schemes of finite element method by time variable and space variables for classical parabolic equation. Error of the method is estimated in integral (weak) norm that allows to reduce smoothness requirements to solution of differential problem in comparison with ordinary energy norm.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \le T\}, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \quad u = 0,\ x \in \Gamma = \partial\Omega,\ t \in [0,T],\end{gathered} \tag{1}$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) - q(x)u,\ k_1 \ge k(x) \ge k_0 > 0,\ k_1 \ge q(x) \ge 0, \quad p = 1,2,\dots$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи (1) [1]. Назовем обобщенным решением задачи (1) функцию $u(x,t)$, которая почти при каждом $t \in (0,T)$ принадлежит $H = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, обладает производной $\partial u / \partial t \in L_2(Q_T)$ и удовлетворяет почти всюду на $(0,T)$ соотношениям

$$(\frac{d}{dt}u(t), \vartheta) + a(u(t), \vartheta) = (f(t), \vartheta) \quad \forall \vartheta = \vartheta(x) \in H,\ u(0) = u_0\,. \tag{2}$$

Здесь $a(u(t), \vartheta) = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{p} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + q(x) u\, \vartheta \right) dx$. Пусть $H_h \subset H$ множество элементов вида $\vartheta_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x)$. Здесь $\{\varphi_i = \varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ – базис из кусочно-полиномиальных функций, являющихся многочленом степени k на каждом конечном элементе.

2. Исследование точности дискретизации по пространству. Поставим в соответствие (2) полудискретную задачу

$$(\frac{du_h}{dt}, \vartheta_h) + a(u_h, \vartheta_h) = (f, \vartheta_h), \quad \forall\ \vartheta_h \in H_h, t \in (0,T],\ u_h(0) = u_{0,h}. \tag{3}$$

Задаче (3) соответствует задача Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов приближенного решения $u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\varphi_i$ из H_h:

$$D\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t),\ u_h(0) = u_{0,h}, \tag{4}$$

где $u_h(t)$ – элемент из пространства H_h $\forall\ t$; D, A – операторы из H_h в H_h.

Теорема 1. Пусть $u(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$. Если сужение пространства H_h на отдельный конечный элемент является многочленом степени k, то для решения задачи (4) имеет место оценка точности

$$\sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - u_h(x,t')\|_0^2\, dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - u_h(x,t')]\, dt' \right\|_1 \le\ \le Mh^k \left\{ \|u(0)\|_k + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2\, dt'} \right\},\ \forall t \in [0,T],\ M = M(k_0, k_1, T).$$

Проинтегрируем тождество (2) и (3) по t от t_n до $t_{n+1}=t_n+\tau$. Применяя формулу интегрирования по частям и вычитая оба полученных тождества, получим:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left[-(u-u_h,\dot{\vartheta}_h)+a(u-u_h,\vartheta_h)\right]dt+(u-u_h,\vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=0,\ \forall\vartheta_h(x)\in H_h. \qquad (5)$$

Обозначим $z_h=u-u_h$, $e_h=u-u_I$, $\xi_h=u_I-u_h$, где $u_I=u_I(x,t)$ – интерполянт $u(x,t)$, т.е. $z_h=e_h+\xi_h$. Выберем пробную функцию

$$\vartheta_h(t)=-\int_t^s\xi_h(t')dt'\in H_h,\ t<s;\ \vartheta_h(t)=0,\ t\ge s,\quad \dot{\vartheta}_h(t)=\xi_h(t),\ \vartheta_h(s)=0.$$

Учитывая это и тождество $a(\dot{\vartheta}_h,\vartheta_h)=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}a(\vartheta_h,\vartheta_h)$, (5) можно записать в виде:

$$-\int_{t_n}^{t_{n+1}}(\xi_h,\xi_h)dt+\frac{1}{2}a(\vartheta_h,\vartheta_h)(t_{n+1})+(\xi_h,\vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=-(e_h,\vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}+$$
$$+\frac{1}{2}a(\vartheta_h,\vartheta_h)(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left[(e_h,\xi_h)-a(e_h,\vartheta_h)\right]dt. \qquad (6)$$

Просуммируем (6) по $n=\overline{1,m-1}$, где номер m соответствует моменту времени $s=m\tau$. Тогда с учетом свойства функции $\vartheta_h(t)$, начального условия $\xi_h(0)=0$ и выбирая функцию $w_h(t)=\int_0^t\xi_h(t')dt'\in H_h,\ t<s;\quad w_h(t)=0,\ t\ge s$, получим следующее энергетическое тождество:

$$\int_0^s(\xi_h,\xi_h)dt+\frac{1}{2}a(w_h,w_h)(s)=(e_h(0),w_h(s))-\int_0^s\left[(e_h,\xi_h)-a(e_h,w_h(t)-w_h(s))\right]dt.$$

Оценивая слагаемые в правой части с помощью неравенств Фридрихса, ε–неравенства и с учетом леммы Гронуола, получим оценку

$$\int_0^s(\xi_h,\xi_h)dt+a(w_h,w_h)(s)\le M\left((e_h(0),e_h(0))+\int_0^s(e_h,e_h)dt+\int_0^s a(e_h,e_h)dt\right),$$

где M – некоторая постоянная величина. Очевидно, что $k_0\|w_h(s)\|_1^2\le a(w_h,w_h)(s)\le k_1\|w_h(s)\|_1^2$, $(\xi_h,\xi_h)(s)=\|\xi_h(s)\|_0^2$, поэтому для погрешности имеем окончательную оценку:

$$\int_0^s\|\xi_h(t)\|_0^2dt+\left\|\int_0^s\xi_h(t)dt\right\|_1^2\le M\left(\|e_h(0)\|_0^2+\int_0^s\|e_h(t)\|_0^2dt+\int_0^s\|e_h(t)\|_1^2dt\right). \qquad (7)$$

Для решения $u(x,t)\in W_2^{k+1}(\Omega)\ \ \forall t\in[0,T]$ имеет место оценки [1]: $\|e_h(t)\|_0\le Mh^k\|u(t)\|_k$, $\|e_h(t)\|_1\le Mh^k\|u(t)\|_{k+1}$. Следовательно, на основании (7) и неравенства треугольника $\|z_h\|\le\|e_h\|+\|\xi_h\|$ имеет место утверждение теоремы.

3. Исследование точности по времени. Аппроксимируем задачу (4) разностной схемой (см. [2])

$$D\frac{\hat{y}-y}{\tau}-\frac{\tau^2}{12}A\frac{\hat{\dot{y}}-\dot{y}}{\tau}+A\frac{\hat{y}+y}{2}=\varphi_1,\ \gamma D\frac{\hat{\dot{y}}-\dot{y}}{\tau}+\alpha A\frac{\hat{y}-y}{\tau}+\beta A\frac{\hat{\dot{y}}+\dot{y}}{2}=\varphi_2,$$
$$y^0=u_0,\ \dot{y}^0=u_1. \qquad (8)$$

Здесь $y^n=y(t_n),\ \dot{y}^n=\dfrac{dy}{dt}(t_n),\quad \varphi_1=\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)dt,\quad \varphi_2=\dfrac{12}{\tau^3}\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)(s_1\vartheta_1+s_2\vartheta_2)dt$,

$$s_1=15\gamma-\frac{35}{3}\alpha,\ s_2=140\gamma-\frac{350}{3}\alpha,\ \vartheta_1=\frac{1}{2},\ \vartheta_2=\tau(\xi^3-\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi),\quad \xi=\frac{t-t_n}{\tau},$$
$$y(t)=y^n\varphi_{00}^n(t)+\dot{y}^n\varphi_{10}^n(t)+y^{n+1}\varphi_{01}^n(t)+\dot{y}^{n+1}\varphi_{11}^n(t),\ \varphi_{00}^n(t)=2\xi^3-3\xi^2+1,$$
$$\varphi_{01}^n(t)=3\xi^2-2\xi^3,\quad \varphi_{10}^n(t)=\tau(\xi^3-2\xi^2+\xi),\quad \varphi_{11}^n(t)=\tau(\xi^3-\xi^2).$$

Теорема 2. Пусть $A^*=A>0,\ D^*=D>0$ и выполнены условия устойчивости $\alpha=\tau^2/12,\quad \beta>0,\quad \gamma>0$. Тогда для решения схемы (8), такого, что $\dfrac{d^4u_h}{dt^4}(t)\in L_2[0,T]$, верна оценка

$$\sqrt{\int_0^s\|u_h(t)-y(t)\|_0^2dt}+\left\|\int_0^s[u_h(t)-y(t)]dt\right\|_1\le M\tau^4\left\{\|u_h(0)\|_0+\sqrt{\int_0^s\left\|\frac{d^4u_h}{dt^4}(t)\right\|_1^2dt}\right\}.$$

Обозначим H_τ подпространство функций аргумента t, являющихся кубическим эрмитовым сплайном на интервале $[t_n,t_{n+1}]$, $n=0,1,2,\ldots$. Для $y(t)$ имеет место тождество

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[-(y(t),\dot{\vartheta}_\tau)+a(y(t),\vartheta_\tau)\right]dt+(y(t),\vartheta_\tau)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=\int_{t_n}^{t_{n+1}}(f(t),\vartheta_\tau)dt,\ \forall\vartheta_\tau\in H_h^\tau . \tag{9}$$

Вычитая из (2) ($\vartheta=\vartheta_\tau$) тождество (9), имеем для погрешности $\zeta_\tau(t)=u_h(t)-y(t)$ тождество:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[-(\zeta_\tau(t),\dot{\vartheta}_\tau)+a(\zeta_\tau(t),\vartheta_\tau)\right]dt+(\zeta_\tau(t),\vartheta_\tau)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=0,\forall\vartheta_\tau(x,t)\in H_h^\tau . \tag{10}$$

Так как, $\zeta_\tau(t)=\xi_\tau(t)+e_\tau(t)$ то выбирая в (10) $\vartheta_\tau(t)=-\int_t^s \xi_\tau(t)dt',\ t<s;\ \ \vartheta_\tau(t)=0,\ t\ge s$ и проведя с полученным тождеством некоторые преобразования, получим такое энергетическое тождество:

$$\int_0^s(\xi_\tau,\xi_\tau)dt+\frac{1}{2}a(\vartheta_\tau,\vartheta_\tau)(0)=(e_\tau,\vartheta_\tau)(0)-\int_0^s\left[(e_\tau,\xi_\tau)-a(e_\tau,\vartheta_\tau)\right]dt .$$

Обозначим $w_\tau(t)=\int_0^t\xi_\tau(t')dt'\in H_h\ t<s,\ w_\tau(t)=0\ \ t\ge s$ и заметим, что $e_\tau(0)=u_h(0)-u_I^\tau(0)=u_{0,h}-u_{0,h}=0$. Тогда из последнего тождества получим

$$\int_0^t(\xi_\tau,\xi_\tau)dt+\frac{1}{2}a(w_\tau,w_\tau)(s)=-\int_0^s\left[(e_\tau,\xi_\tau)-a(e_\tau,w_\tau(t)-w_\tau(s))\right]dt . \tag{11}$$

Применяя, неравенство Коши-Буняковского, ε – неравенство и лемму Гронуола, из (11) получим следующую оценку

$$\int_0^s\|\xi_\tau(t)\|_0^2\,dt+\left\|\int_0^s\xi_\tau(t)dt\right\|_1^2\le M\left(\int_0^s\|e_\tau(t)\|_0^2\,dt+\int_0^s\|e_\tau(t)\|_1^2\,dt\right).$$

Дальше оценивая погрешность схемы (10) $\zeta_\tau(t)=\xi_\tau(t)+e_\tau(t)$ как в работе [3], на основе леммы Брэмбла-Гильберта [4] убедимся в справедливости теоремы.

4. О сходимости схемы. Заметим, что в оценке теоремы 2 погрешность зависит от решения $u_h(t)$ полудискретной задачи (4), тогда как желательно иметь требования гладкости для решения исходной задачи (1). Для этого воспользуемся оценкой (см. [5, с. 97])

$$\|u_h\|_k=\|u-u+u_h\|_k\le\|u\|_k+\|u-u_h\|_k\le\|u\|_k+Ch|u|_{k+1}\le\bar{C}\|u\|_{k+1},\ k=0,1 .$$

Следовательно, последняя оценка будет иметь вид

$$\sqrt{\int_0^s\|u_h(t)-y(t)\|_0^2\,dt}+\left\|\int_0^s\left[u_h(t)-y(t)\right]dt\right\|_1\le M\tau^4\left\{\|u(0)\|_1+\sqrt{\int_0^s\left\|\frac{d^4u}{dt^4}(t)\right\|_2^2dt}\right\}.$$

На основе теоремы 1 и 2 имеет место утверждение.

Теорема 3. Пусть $A^*=A>0,\ D^*=D>0$ и выполнены условия устойчивости $\alpha=\tau^2/12,\quad\beta>0,\quad\gamma>0$ схемы (8). Тогда для ее решения, аппроксимирующего решения задачи (1) такого, что

$$u(x,t)\in L_2\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\},\qquad\frac{\partial^4u}{\partial t^4}(x,t)\in L_2\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\},$$

верна оценка точности

$$\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')-y(x,t')\|_0^2\,dt'}+\left\|\int_0^t\left[u(x,t')-y(x,t')\right]dt'\right\|_1\le\le M\left\{\tau^4\left(\|u(0)\|_1+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4u}{\partial t^4}(t)\right\|_2^2dt}\right)+h^k\left(\|u(0)\|_k+\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2\,dt'}\right)\right\}.$$

1. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 С. 2. *Москальков М.Н., Утебаев Д.* Построения схем повышенной аппроксимации для нестационарных уравнений первого порядка // Вычислительная и прикладная математика. – Киев, 1981. – Вып.43. – С. 93–101. 3. *Москальков М.Н., Утебаев Д.* Исследование сходимости метода конечных элементов для уравнения Фохта в слабой метрике // Обчислювальна та прикладна математика. – Київ, 2007. – № 2(95). – С. 81–87. 4. *Самарский А.А, Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Наука, 1978. – 296 С. 5. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. –Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 544 P.

УДК 510.6, 681.3.06

М.С.Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С.С.Шкільняк, канд. фіз.-мат. наук, доц.
І.А. Антонова, асист.

ОПЕРАТОРИ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ В АЛГЕБРАХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Розглядаються алгебри предикатів різних рівнів абстракції. Досліджуються властивості та структури множин нерухомих і квазінерухомих точок монотонних та неперервних операторів над різними типами частково-впорядкованих множин: повна частково впорядкована множина, сумісно-повна решітка, повна решітка та інші.

The Predicate algebras of different abstraction levels are considered. The properties and structures of fixpoints and quasi-fixpoints sets of monotone and continuous operators for different types of the partially ordered sets: complete partially ordered set, consistently complete lattice, complete lattice and others, are investigated.

Рекурсія широко використовується в різних областях математики та інформатики, зокрема, для специфікації та верифікації програмних та апаратних систем. Традиційними проблемами, що виникають для рекурсивних рівнянь, є проблеми існування та опису всіх можливих розв'язків, зокрема, формулювання умов єдиності розв'язку.

Широке використання індуктивних та рекурсивних методів визначення предикатів спонукає до дослідження композицій, що визначаються різними операторами побудови нерухомих точок (ПНТ). Оператори побудови нерухомої точки успішно застосовуються в теоріях диференціальних та інтегральних рівнянь, останнім часом їх все частіше використовують в економіці (зокрема в економічному моделюванні), теорії ігор, верифікації систем тощо.

В попередній роботі [1] вивчались найменші нерухомі точки монотонного відображення на ω-областях. Це питання розглядалось з конструктивної точки зору, тому всі визначення базувалися на основі ланцюгів. В даній статті розглянемо нерухомі точки монотонних операторів на повній частково-впорядкованій множині (ПЧВМ). Також наведемо узагальнений варіант теореми Тарського про структуру множини нерухомих точок на різних типах частково-впорядкованих множин (ЧВМ) в формулюванні, яке не було знайдене в доступній літературі.

Всі невизначені тут поняття та позначення будемо розуміти в смислі [1, 2].

Висловлюємо подяку професору Д.Б. Бую за плідні дискусії з питань даної статті.

Оператори побудови нерухомої точки в традиційних логіках. Оператор побудови нерухомої точки можна розглядати також як метакомпозицію, яка за композиціями–аргументами будує нову композицію

Існують різні оператори ПНТ. Найбільш відомим є оператор побудови найменшої нерухомої точки (least fixed point). Також використовуються оператор інфляційної (наповненої) нерухомої точки (inflationary fixed point), оператор найбільшої нерухомої точки (greatest fixed point), та деякі інші [3].

Найчастіше нерухому точку (НТ) оператора φ розглядають в класичному розумінні, як точку *x*, що задовольняє рівнянню φ(*x*) = *x* [4–9]. За теоремою Тарського [4] у монотонного відображення (на повній гратці) завжди є найменша та найбільші нерухомі точки (див. напр. [5, 6]). Найменша НТ визначається, як перетин (інфінум) тих точок *x*, що не менші φ(*x*), а найбільша нерухома точка – як об'єднання (супремум) точок *x*, що не більше φ(*x*) [6].

Для немонотонного відображення можна побудувати інфляційну нерухому точку, яка отримується шляхом взяття границі послідовності відношень, проіндексованих за ординалами [3]. В [3] також даються визначення часткової, недетермінованої та альтернативної нерухомих точок. Такі нерухомі точки вводятьсяі як варіанти інфляційної НТ: часткова НТ задана на скінчених структурах, недетермінована – для недетермінованих операторів, альтернативна НТ запропонована як розширення недетермінованої НТ у випадку нескінченої кількості альтернатив і задається в термінах ігор

Розглянемо визначення нерухомих точок на множині предикатів класичної логіки першого порядку [3, 8]. Нехай *R* – символ відношення (предиката), *x* та *t* – кортежі предметних змінних та термів відповідно, довжини *k* яких співпадають з арністю *R*, ***A*** – структура (алгебраїчна система) на універсі *A*, φ(*R*, *x*)– формула, в яку *R* входить лише позитивно, *Pow*(A^k) – множина всіх *k*-арних відношень на *A*. Така φ(*R*, *x*) задає відображення Φ : *Pow*(A^k)→*Pow*(A^k) наступним чином: $\Phi(P) = \{a \mid (\boldsymbol{A}, P, a) \models \varphi\}$.

Залежно від властивостей відображення Φ виділяють наступні типи НТ.

1. *Найменша НТ*. Найменше відношення *R*, для якого $R(x) \leftrightarrow \varphi(R, x)$, називають найменшою нерухомою точкою оператора, що визначений формулою φ. Оператор ННТ – це $[lF_{R,x}\varphi](t)$, де всі входження змінних в *x* (окрім тих, що з'являються в *t*) та *R*, зв'язані. Семантика цієї формули така: $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \models [lF_{R,x}\varphi](t) \Leftrightarrow t^{\boldsymbol{A}}$ (кортеж елементів структури $\boldsymbol{A}$, що визначені термами *t*) є ННТ монотонного оператора, що визначений φ(*R*, *x*) на A^k.

ННТ можна отримати як границю послідовності відношень:

$$R_0 = 0, R_{\alpha+1} = \Phi(R_\alpha), R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta \quad \textbf{(для граничного ординала α) [3];}$$

2. *Найбільша НТ*. Формула $[gfp\, R\overline{x}.\varphi(R, \overline{x})](\overline{a})$ задає оператор НбНТ, якщо $\overline{a}$ міститься в найбільшій множині R, що задовольняє рівності $R = \{\overline{x} : \varphi(R, \overline{x})\}$. Найбільшу НТ можна отримати за допомогою апроксимаційного процесу, аналогічного для ННТ, але починаючи зі всіх кортежів структури необхідної арності [8].

3. *Інфляційна НТ*. Якщо Φ – немонотонне відображення, то границю послідовності відношень (проіндексованих за ординалами) $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Phi(R_\beta)$ називають інфляційною нерухомою точкою (ІНТ). В [8] така НТ називається немонотонною нерухомою точкою. Для будь-якого оператора *F* шукається відповідний йому зростаючий (інфляційний) оператор $F' : F'(S) = S \cup F(S)$. Такий оператор має НТ, яка для оператора *F* буде інфляційною НТ. Позначення оператора побудови інфляційної точки аналогічне до позначення $[lF_{R,x}\varphi](t)$ та має вигляд $[iF_{R,x}\varphi](t)$. Семантика: $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \models [iF_{R,x}\varphi](t) \Leftrightarrow$ кортеж елементів, що інтерпретують *t*, – це об'єднання послідовності відношень $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Phi(R_\beta)$ [3].

4. *Дефляційна нерухома точка* будується для $\varphi(R, \overline{x})$. Побудова цієї точки аналогічна побудові інфляційної НТ. Ітераційний процес починається з $R = A^k$ та завершується при знаходженні такого R, що $R \leftrightarrow R \cap F(R)$ [8].

5. *Часткова нерухома точка.* На скінчених структурах послідовність відношень $R_0 = 0, R_{\alpha+1} = \Phi(R_\alpha)$ (для деякого відображення Φ та скінченого ординала α) або збігається до НТ, або утворює цикл. Частковою нерухомою точкою (ЧНТ) буде границя цієї послідовності відношень R_i, якщо вона існує, або порожнє відношення, якщо такої границі не існує. Оператор побудови ЧНТ має вигляд $[pF_{R,x}\varphi](t)$ [3]. ЧНТ також називають неінфляційною нерухомою точкою [7].

6. *Недетермінована нерухома точка.* Логічний оператор nF застосовують до двох формул φ_0(*R*, *x*) та φ_1(*R*, *x*), що задають відображення Φ_0 та Φ_1, відповідно. Синтаксис: $[nF_{R,x}(\varphi_0, \varphi_1)](t)$. Семантика: формула $[nF_{R,x}(\varphi_0, \varphi_1)](t)$ істина в *A* тоді і тільки тоді, коли t^A є відношенням, що є недетермінованою нерухомою точкою двох відношень Φ_0 та Φ_1. Недетермінована нерухома точка (НдНТ) двох операторів Φ_0 та Φ_1 – це відношення, що є

об'єднанням $\bigcup\{R_c \mid \text{length}(c) < k^+ \text{та } R_c = R_{c\cdot 0} = R_{c\cdot 1}\}$, де послідовність R_c побудована за правилами $R_\varepsilon = 0, R_{c\cdot 0} = \Phi_0(R_c) \cup R_c, R_{c\cdot 1} = \Phi_1(R_c) \cup R_c, R_c = \bigcup_{b \prec c} R_b$ (довжина рядка *c* є граничним ординалом), *b* та *c* – бінарні рядки, k^+ – найменший нескінчений кардинал, більший за *k* [3].

7. *Альтернативна нерухома точка* (АНТ) є розширеним поняттям НдНТ, що допускає необмежену кількість альтернатив. Послідовність відношень R_c обчислюється так само, як і для НдНТ. Проте нерухома точка визначається не об'єднанням всіх цих відношень, а лише деяких їх частин. Алгоритм вибору відношень для об'єднання описаний в термінах ігор [3]. В [7] АНТ описана в термінах дерев.

Певні особливості має процес побудови НТ на реляційних структурах (структурах Кріпке), які широко використовуються для специфікації та верифікації програмних систем. Для знаходження нерухомої точки по структурі спеціальним чином розставляються мітки. Різні нерухомі точки на реляційних структурах описані в [6, 8, 9].

Класичний підхід до визначення нерухомих точок використовує спеціальні методи для предикатів, відмінні від загальних методів для функцій. Цей підхід орієнтований на класи тотальних функцій і предикатів та недостатньо задовольняє потребам сучасного програмування та моделювання, для яких характерні неповнота та частковість інформації про предметну область, мінливість та динамічність систем.

Таким чином, особливої актуальності набуває розбудова та дослідження операторів побудови нерухомої точки для набагато загальніших класів часткових функцій та предикатів, заданих на довільних наборах іменованих значень – квазіарних функцій та предикатів [2].

Композиційні алгебри часткових предикатів. Розглянемо деяку множину даних *D* (*D* трактується як можливий світ, а його елементи – як стани світу), множину часткових предикатів *Pr* на цій множині даних (предикати трактуються як властивості станів світу та відношення між ними), множину композицій *C* на множині предикатів.

Пару (*Pr*, *C*) назвемо композиційною алгеброю часткових предикатів. Такі алгебри є семантичною основою композиційно-номінативних логік (КНЛ). В цьому розумінні КНЛ можна назвати аксіоматичними системами композиційних алгебр часткових предикатів. Побудова таких алгебр дає змогу визначити мови КНЛ відповідного рівня: терми композиційної алгебри предикатів можуть розглядатися як формули мови логіки.

Основними семантичними проблемами теорії КНЛ є:

1) проблема виділення класів предикатів, які задаються на відповідному рівні абстракції в єдності їх інтенсіональних та екстенсіональних аспектів;

2) проблема експлікації класів композицій, які є адекватними відповідному рівню абстракції;

Нехай $Pr : D \to Bool$, де $Bool = \{F, T\}$ – множина часткових предикатів, заданих на деякій множині даних *D*, нехай $C : Pr^n \to Pr$ – множина композицій на цих предикатах.

Визначення 1. Під *композиційною алгеброю предикатів* будемо розуміти пару *AP* = (*Pr*, *C*), де *Pr* – множина часткових предикатів, *C* – множина композицій над предикатами.

Різні рівні абстракції задають різні класи композиційних алгебр. Згідно композиційно-номінативного підходу алгебри розглядаємо в семантико-синтаксичному стилі відповідно до принципу сходження від абстрактного до конкретного, починаючи з граничного абстрактного рівня трактування множини вхідних даних і поступово його конкретизуючи.

На номінативних рівнях дані конкретизуються як часткові відображення, що ставлять у відповідність предметним іменам предметні значення. В цьому випадку конкретизуємо множину D як множину ^VA всіх *V*-іменних множин над певною множиною базових даних *A*, де *V* – множина предметних імен.

Найабстрактнішим із номінативних рівнів є *реномінативний*. На цьому рівні ґонкретизуємо *Pr* як множину Pr^A *V*-квазіарних предикатів на *A* вигляду $^VA \to \{T, F\}$. Множину *C* конкретизуємо як множину *n*-арних композицій вигляду $(Pr^A)^n \to Pr^A$. Базовими композиціями реномінативного рівня є заперечення ¬, диз'юнкція ∨ та реномінація $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ [2].

Реномінативному рівню відповідає реномінативна алгебра *V*-квазіарних предикатів $(Pr^A; \neg, \vee, \&, R^{\bar{v}}_{\bar{x}})$

На *кванторному* рівні до композицій реномінативного рівня додаються композиції (операції) квантифікації $\exists x, \forall x$ [2]. Отримуємо кванторну алгебру *V*-квазіарних предикатів $(Pr^A; \neg, \vee, \&, \exists x, \forall x, R^{\bar{v}}_{\bar{x}})$

На функціонально-еквацiйному рівні *Pr* конкретизується як множина $Fn^A \cup Pr^A$, де Pr^A – множина *V*-квазіарних предикатів на *A*, Fn^A – множина *V*-квазіарних функцій на *A* вигляду $^VA \to A$. На цьому рівні до композицій кванторного рівня додаються композиції суперпозиції $S^{\bar{v}}$ та рівності = [2]. Виділяють два типи суперпозицій: суперпозиції функцій в предикати (результатом є предикат) та суперпозиції функцій в функції (результатом є функція).Для роботи з окремими компонентами даних природно виділити множину функцій розіменування $Nf^A = \{'v \mid v \in V\}$. Такі функції можна трактувати як спеціальні 0-арні композиції. У цьому випадку композиції реномінації можна промоделювати за допомогою суперпозицій та функцій розіменування. На функціонально-еквацiйному рівні отримуємо композиційні алгебри *V*-квазіарних функцій та предикатів – об'єкти вигляду $(Fn^A \cup Pr^A; \neg, \vee, \&, \exists x, \forall x, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}, S^{\bar{v}}, =)$

Розглянемо клас *Pr* та його властивості. Відношення на множині предикатів задаються через поняття графіку предиката.

Визначення 2. Два предикати *P* та *Q* *T-рівні* (*рівні в області істинності*), якщо вони приймають значення *T* на одних і тих самих даних:

$$P =_T Q \Leftrightarrow (\text{для будь-яких } d \in D\ P(d)\downarrow= T \Leftrightarrow Q(d)\downarrow= T\ ).$$

Відношення *T*-рівності є відношенням еквівалентності.

Визначення 3. Предикат *P* *T-менший або рівний* (*менший або рівний в області істинності*) предиката Q, якщо:

$$P \le_T Q \Leftrightarrow (P \le Q \quad \text{та} \quad P =_T Q).$$

Відношення $\le_T$ є відношенням часткового порядку.

Визначення 4. Частково-впорядковану підмножину *A* множини *S* називають:

1) ***направленою підмножиною***, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in A$ такий, що $a \le c$ та $b \le c$;

2) ***сумісною вгору підмножиною***, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in S$ такий, що $a \le c$ та $b \le c$. Будь-яка направлена підмножина є сумісною вгору;

3) ***сумісною вниз підмножиною***, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in S$ такий, що $c \le a$ та $c \le b$.

Зауваження. В [5] введені поняття направленої та сумісної підмножин. Ми розрізняємо сумісні вгору та, дуально, сумісні вниз підмножини.

Неважко переконатися, що ЧВМ $A \subseteq S$ – направлена (сумісна вгору або вниз), якщо будь-яка її скінчена непорожня підмножина має верхню границю, що належить *A* (скінчена непорожня підмножина має верхню або нижню границю, що належить S).

Визначення 5. Частково-впорядкована множина D з частковим порядком $\le$ – це:

1) $\Delta\Delta$-***область*** (***сумісно-повна уверх***, ***сумісно-повна верхня напіврешітка***), якщо для довільної непорожньої сумісної вгору підмножини $D' \subseteq D$ існує точна верхня границя;

2) Δ-***область*** (***повна уверх***, ***повна верхня напіврешітка***), якщо для довільної непорожньої підмножини $D' \subseteq D$ існує точна верхня границя;

3) $\nabla\nabla$-***область*** та ∇-***область*** задаються дуальним способом;

4) $\Delta\Delta/\nabla\nabla$-***область*** (***сумісно-повна решітка***), якщо множина D є сумісно-повною уверх та униз напіврешіткою;

5) $\Delta\Delta/\nabla$-***область*** (***повна частково-впорядкована множина***), якщо множина D є сумісно-повною уверх напіврешіткою та повною униз напіврешіткою;

6) $\Delta/\nabla\nabla$-***область***, якщо множина D є повною уверх напіврешіткою та сумісно-повною униз напіврешіткою;

7) Δ/∇-***область*** (***повна решітка***), якщо для довільної непорожньої підмножини $D' \subseteq D$ існують точні верхня і нижня границі.

Мнемоніка даних позначень полягає у наступному:

1) Δ – один трикутник вершиною вгору свідчить про те, що в множині є найбільший елемент. Існування найбільшого елемента випливає з умови Δ-області, що для довільної непорожньої підмножини існує точна верхня границя. Найбільший елемент буде точною верхньою границею всієї області;

2) $\Delta\Delta$ – два трикутника вершиною вгору свідчить про те, що в множині є кілька максимальних елементів. Тобто існування найбільшого елемента не є гарантованим;

3) Символи ∇ та $\nabla\nabla$ пояснюються аналогічно.

Зауваження. Найчастіше $\Delta\Delta/\nabla$-область називають повною частково-впорядкованою множиною (ПЧВМ, англ. – CPO), $\Delta\Delta$-область – pre-CPO, а Δ/∇-область – повною решіткою. Ми вводимо вказані вище позначення для узагальнення результатів досліджень на дуальний до ПЧВМ випадок.

В [5] CPO визначається через поняття направлених підмножин та існування найменшого елемента. В [10] поняття CPO визначається через поняття ланцюга, в якому вимагається існування найменшого елемента множини. Ми вводимо визначення через сумісні підмножини та існування їх точних граней, що краще задовольняє поставленим задачам при роботі з множиною предикатів. Такі визначення ми використовуємо і в інших наших статтях.

Таблиця 1

Таблиця співвідношень термінів

Термін та визначення	**Інші назви та визначення (джерело)**
$\Delta\Delta$-область $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня сумісна підмножина D.	Pre-CPO (pre-complete partial order) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня направлена підмножина D ([5]).
	dcpo (directed complete poset) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – направлена підмножина D ([11]).
Δ-область $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D.	Complete upper semilattice $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – підмножина D ([12]).
∇-область $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D.	Complete lower semilattice $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – підмножина D ([12]).
$\Delta\Delta/\nabla$-область 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня сумісна підмножина D; 2) $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D.	CPO (complete partial order) або ПЧВМ (повна частково-впорядкована множина) 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня направлена підмножина D; 2) В D існує найменший елемент ([5, 13]).
3)	CPO (complete partial order) 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – ланцюг з D; 2) В D існує найменший елемент ([10]).
4)	Consistently complete 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня сумісна підмножина D; 2) В D існує найменший елемент ([5]).

Продовження табл. 1

Термін та визначення	Інші назви та визначення (джерело)
5)	Pointed dcpo 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – направлена підмножина D; 2) В D існує найменший елемент ([11]).
	Directed complete semilattice 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – направлена підмножина D; 2) $\forall a, b \in D\ \exists a \wedge b$ ([11]).
	Complete semilattice 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – направлена підмножина D; 2) $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D ([11]).
Δ/∇-область 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D; $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – непорожня підмножина D.	Complete lattice або повна решітка 1) $\exists a \in D : a = \coprod D', \forall D'$, де D' – підмножина D; 2) $\exists a \in D : a = \prod D', \forall D'$, де D' – підмножина D ([5, 11, 12]).

Приклади.

1. Множина натуральних чисел з природним порядком $\leq$ є ∇-областю з найменшим елементом 0.

2. Множина цілих від'ємних чисел з природним порядком $\leq$ є Δ-областю з найбільшим елементом –1.

3. Підмножина натуральних чисел $A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 100\}$ з природним порядком $\leq$ є Δ/∇-областю з найменшим елементом 1 та найбільшим елементом 100.

4. Підмножина натуральних чисел $A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 100\}$ з порядком: $a \leq b \Leftrightarrow$ *a* ділить b, є ΔΔ/∇-областю з найменшим елементом 1 та максимальними елементами 51..100.

5. Підмножина натуральних чисел $A = \{x \in N \mid 0 \leq x \leq 20\} / \{1\} = \{0, 2, 3, 4, .., 20\}$ з порядком: $a \leq b \Leftrightarrow$ *a* ділить b, є Δ/∇∇-областю, в якій мінімальними елементами є прості числа 2,3,5,7,11,13,17,19 та найбільшим елементом 0.

6. Підмножина натуральних чисел $A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 100\}$ з порядком: $a \leq b \Leftrightarrow$ *a* ділить b, є ΔΔ/∇∇-областю, в якій мінімальними елементами виступають прості числа від 2 до 47, а максимальними елементами є числа від 51 до 100.

7. Множина цілих від'ємних чисел з природним порядком $\leq$, визначеним окремо для парних і непарних чисел (будь-які парне та непарне числа незрівнянні) є ΔΔ-областю з максимальними елементами –1 та –2.

8. Множина натуральних чисел з таким же порядком буде ∇∇-областю з мінімальними елементами 0 та 1.

Лема 1. Клас часткових предикатів *Pr* є ΔΔ/∇-областю (ПЧВМ).

Далі нам знадобиться спеціальне формулювання Леми Цорна, що наведене в [14].

Лема 2 (Цорн). Нехай *D* – частково-впорядкована множина, в якій кожний ланцюг має верхню границю (верхня границя ланцюга – елемент, що більший або рівний будь-якого елемента цього ланцюга). Тоді:

1) в множині *D* є максимальний елемент;

2) для кожного елемента $a \in D$ існує елемент $b \geq a$, що є максимальним в *D* [14].

Лема 3. Якщо (*D*, ≤) – ΔΔ-область, то:

1) в *D* існує максимальний елемент і кожен елемент з *D* мажорується максимальним елементом;

2) для довільної непорожньої сумісної вгору підмножини $D' \subseteq D$ існує максимальний елемент, який її мажорує.

3) в *D* існує максимальна сумісна вгору підмножина.

Доведення.

1) Будь-який непорожній ланцюг множини *D* є непорожньою сумісною вгору множиною, тому за означенням ΔΔ-області будь-який непорожній ланцюг $D' \subseteq D$ має точну верхню границю. Отже, згідно Леми 2 пункту 1, в множині *D* існує максимальний елемент d, і згідно Леми 2 пункту 2, для будь-якого елемента з *D* існує максимальний елемент з *D*, що мажорує його.

2) Виберемо деяку непорожню сумісну вгору множину *B*. За означенням ΔΔ-області, існує точна верхня границя цієї множини: $b = \coprod B$, і існує максимальний елемент m з *D*, що мажорує його: $m \geq b$ (п.1). Тому елемент m і буде максимальним елементом, який мажорує вибрану підмножину *B*.

3) Нижній конус d^{∇} елемента d є сумісною вгору множиною, так як для будь-яких двох елементів $a, b \in d^{\nabla}$ елемент d такий, що $d \geq a$ та $d \geq b$.

Цей нижній конус буде максимальною сумісною вгору множиною. Доведемо це від супротивного: нехай знайдеться сумісна вгору підмножина $A \subseteq D : d^{\nabla} \subset A$. $d \in d^{\nabla} \Rightarrow d^{\nabla} \neq \{\} \Rightarrow A \neq \{\} \Rightarrow$ За визначенням ΔΔ-області існує точна верхня границя підмножини *A*: $a = \coprod A$. $d^{\nabla} \subset A \Rightarrow a = \coprod A \geq \coprod d^{\nabla} = d$. Отже, $a \geq d$, але d – максимальний елемент множини *D*, тому $a = d$. $d = a \geq x, \forall x \in A \Rightarrow A \subseteq d^{\nabla}$ за означенням нижнього конуса елемента d, що суперечить припущенню.

Тому нижній конус d^{∇} максимального елемента d множини *D* є максимально сумісною вгору множиною.

Лема 3'. Якщо (*D*, ≤) – ∇∇-область, то:

1) в *D* існує мінімальний елемент і кожен елемент з *D* мінорується мінімальним елементом;

2) для довільної непорожньої сумісної вниз підмножини $D' \subseteq D$ існує мінімальний елемент, який її мінорує.

3) в *D* існує мінімальна сумісна вниз підмножина.

Доведення. Розглянемо дуальну область $\Xi' = (D, \geq)$. Ξ' є $\Delta\Delta$-областю.

За Лемою 3 в Ξ':

1) існує максимальний елемент, що буде мінімальним в (D, $\leq$);
2) кожен елемент a мажорується максимальним елементом, що є мінором для a та мінімальним елементом в (D, $\leq$);
3) для довільної непорожньої сумісної вгору підмножини існує максимальний елемент, який її мажорує. В (D, $\leq$) ця підмножина буде сумісною вниз, а знайдений елемент буде мінімальним мінорантом для неї;
4) існує максимальна сумісна вгору підмножина, що буде мінімальною сумісною вниз підмножиною в (D, $\leq$).

Лема 4. Нехай (D, $\leq$) – ЧВМ, $d \in D$.

1. Якщо (D, $\leq$) – $\Delta\Delta$-область, то:
   а) $d^{\Delta} = \{x \in D \mid x \geq d\}$ з порядком $\leq$ є $\Delta\Delta$-область;
   б) $d^{\nabla} = \{x \in D \mid x \leq d\}$ з порядком $\leq$ є Δ-область;
2. Якщо (D, $\leq$) – $\nabla\nabla$-область, то
   а) $d^{\Delta} = \{x \in D \mid x \geq d\}$ з порядком $\leq$ є ∇-область;
   б) $d^{\nabla} = \{x \in D \mid x \leq d\}$ з порядком $\leq$ є $\nabla\nabla$-область;
3. Якщо (D,$\leq$) – Δ-область, то
   а) $d^{\Delta} = \{x \in D \mid x \geq d\}$ з порядком $\leq$ є Δ/∇-областю;
   б) $d^{\nabla} = \{x \in D \mid x \leq d\}$ з порядком $\leq$ є Δ-область;
4. Якщо (D, $\leq$) – ∇-область, то
   а) $d^{\Delta} = \{x \in D \mid x \geq d\}$ з порядком $\leq$ є ∇-областю;
   б) $d^{\nabla} = \{x \in D \mid x \leq d\}$ з порядком $\leq$ є Δ/∇-областю.

Доведення.

1а) Виберемо в d^{Δ} сумісну вгору підмножину A. $A \subseteq d^{\Delta} \subseteq D$, тому A має точну верхню границю $a = \coprod A$ (за означенням $\Delta\Delta$-області). За означенням верхнього конуса і точної верхньої границі $\forall x \in A, d \leq x \leq a$. Тому ця границя належить d^{Δ}. Отже, верхній конус d^{Δ} є $\Delta\Delta$-областю.

1б) Будь-яка підмножина A нижнього конуса d^{Δ} буде сумісною вгору, так як $\forall a, b \in A, a \leq d \wedge b \leq d$. Тому A має точну верхню границю $a = \coprod A$ (за означенням $\Delta\Delta$-області). За означенням нижнього конуса $\forall x \in A, x \leq d$, тому d – верхня границя підмножини A. За означенням точної верхньої границі $a \leq d$. Тому за означенням нижнього конуса $a \in d^{\nabla}$. Отже, нижній конус d^{∇} будь-якого елемента $d \in D$ є Δ-областю.

3а) $d^{\Delta} \subseteq D \Rightarrow \exists m : m = \coprod d^{\Delta}$. В верхньому конусі d^{Δ} елемент d буде найменшим елементом.

Те, що d^{Δ} є Δ-областю доводиться аналогічно пункту 1. Доведемо, що d^{Δ} є ∇-областю. Виберемо деяку підмножину $A \subseteq d^{\Delta} \subseteq D$. Але d – нижня границя множини A, тому множина нижніх границь U підмножини A непорожня. За означенням Δ-області існує $l = \coprod_D U$. $d \in U \Rightarrow d \leq l \Rightarrow l \in d^{\Delta} \Rightarrow$ За означенням точної нижньої границі $l = \prod_{d^{\Delta}} A$. Отже, верхній конус d^{Δ} будь-якого елемента d з Δ-області D є Δ/∇-областю.

Інші пункти доводяться аналогічно.

Неперервні відображення та їх нерухомі точки. В теорії нерухомих точок визначальними є властивості неперервності та монотонності відображень.

Всі визначення та твердження, наведені в цьому розділі для загального класу функцій, справджуються і для предикатів як часткових функцій, що приймають значення на множині {T, F}.

Визначення 6. Відображення $\varphi : D \to D$, задане на частково-впорядкованій множині (D, $\leq$) **–** *монотонне*, якщо для будь-яких двох елементів a та b: $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Визначення 7. Відображення $\varphi : D \to D$, задане на частково-впорядкованій множині (D, $\leq$) – *сумісно-неперервне*, якщо для будь-якої сумісної вгору множини $\{d_i\}_{i \in I}$ з D виконується нерівність:

$$\coprod_{i \in I} \varphi(d_i) = \varphi\left(\coprod_{i \in I} d_i\right).$$

Множину нерухомих точок деякого відображення φ будемо позначати $fix(\varphi)$.

Визначення 8. Відображення $\varphi : Pr \to Pr$, задане на частково-впорядкованій множині $(Pr, \leq)$, – *T-неперервне* (неперервне в області істинності), якщо для будь-якої сумісної вгору множини предикатів $\{P_i\}_{i \in I}$ з *Pr* виконується нерівність:

$$\coprod_{i \in I} \varphi(P_i) \leq_T \varphi\left(\coprod_{i \in I} P_i\right).$$

Важливим випадком неперервності (*T*-неперервності) є ω-неперервність (*T*-ω-неперервність), що задаються в термінах ланцюгів предикатів [1].

Визначення 9. Елемент $d \in D$ є *нерухомою точкою* відображення $\varphi : D \to D$, якщо $d = \varphi(d)$.

Визначення 10. Предикат $P \in Pr$ є *T*-нерухомою точкою відображення $\varphi : Pr \to Pr$, якщо $P \leq_T \varphi(P)$.

Серед відомих теорем виділимо дві основні: Теорема Тарського-Кнастера та Теорема Тарського. Перша теорема пропонує конструктивний підхід для знаходження найменшої нерухомої точки неперервного оператора на повній частково-впорядкованій множині. Друга теорема гарантує існування і описує структуру області нерухомих точок монотонного відображення на повній решітці. Результати Теореми Тарського можна узагальнити для повних частково-впорядкованих множин та для ΔΔ/∇∇-області. Нижче наведемо доведення відповідних теорем, що проводяться аналогічно до доведень Тарського та є узагальненням інших існуючих результатів із проблем існування нерухомих точок монотонних відображень.

Для доведення теорем нам необхідні будуть додаткові множини, тому аналогічно термінології [5] введемо наступні визначення.

Визначення 11. *Множинами перед-нерухомих точок* назвемо:

1) $H = \{x \in D \mid x \leq \varphi(x)\}$ – *верхня множина перед-нерухомих точок* (*pre¯-fixpoint*);

2) $L = \{x \in D \mid \varphi(x) \leq x\}$ – *нижня множина перед-нерухомих точок* (*pre_-fixpoint*).

Лема 5. Нехай (*D*, ≤) – ЧВМ та $\varphi : D \to D$ – монотонна функція. Тоді:

1) $fix(\varphi) \subseteq H \subseteq D$;

2) $fix(\varphi) \subseteq L \subseteq D$;

3) $fix(\varphi) = H \cap L$;

4) $\varphi(fix(\varphi)) = fix(\varphi)$;

5) $\varphi(H) \subseteq H$;

6) $\varphi(L) \subseteq L$;

7) $\varphi(D) \subseteq D$;

8) $\varphi(H) \cap \varphi(L) = fix(\varphi)$.

Доведення. Пункти 1–3 випливають з побудови множин *H* та *L*.

Пункт 4 отримуємо з означення нерухомої точки.

За умовою φ – монотонна функція, що визначена та приймає значення в множині *D*, тому пункт 7 очевидний.

Доведемо пункт 5. Перевіримо $\forall x \in H, \varphi(x) \in H$. $\forall x \in H, x \leq \varphi(x)$ за побудовою множини *H*. Тому $\forall x \in H, \varphi(x) \leq \varphi(\varphi(x))$ за монотонністю відображення φ. Отже $\forall x \in H, \varphi(x) \in H$ за побудовою множини *H*.

Доведення пункту 6 проводиться дуально до доведення пункту 5.

Доведемо пункт 8.

1) $\forall a \in H \cap L : \begin{array}{c} a \in H \;\&\; a \in L \Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(H) \;\&\; \varphi(a) \in \varphi(L) \Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(H) \cap \varphi(L) \\ a \in H \cap L \Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(H \cap L) \end{array}$

$\Rightarrow \varphi(H \cap L) = \varphi(H) \cap \varphi(L)$

2) $fix(\varphi) = H \cap L \Rightarrow H \cap L = fix(\varphi) = \varphi(fix(\varphi)) = \varphi(H \cap L)$

З цих двох тверджень отримуємо наступний висновок: $fix(\varphi) = \varphi(H \cap L) = \varphi(H) \cap \varphi(L)$.

Твердження Леми 5 можна зобразити схематично:

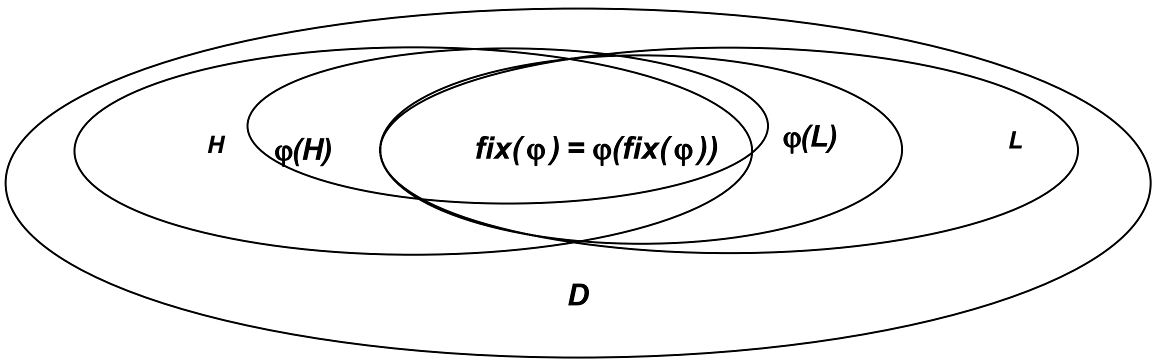


Рисунок 1. Співвідношення множин *D*, *H*, *L* та їх повних образів

Лема 6. Нехай (*D*, ≤) – ЧВМ та $\varphi : D \to D$ – монотонна функція.

1) Якщо (*D*, ≤) – ΔΔ-область, то (*H*, ≤) – ΔΔ-область;
2) Якщо (*D*, ≤) – Δ-область, то (*H*, ≤) – Δ-область.

Доведення. Нехай *A* – деяка сумісна вгору підмножина множини *H*. Доведемо, що $a = \coprod A \in H$. $A \subseteq H \subseteq D \Rightarrow$ *A* – сумісна вгору підмножина множини *D*, тому за означенням ΔΔ-області точна верхня границя $a = \coprod A$ існує і належить *D*. Точка *a* – точна верхня границя множини *A*, тому для всіх $x \in A$ має місце $x \le a$. За побудовою множини *H*: $x \le \varphi(x), \forall x \in A$. Тому для всіх $x \in A$ $x \le \varphi(x) \le \varphi(a)$ за монотонністю відображення φ. Отже, $\varphi(a)$ є верхньою границею для *A*. За означенням точної верхньої границі $a \le \varphi(a)$, тому $a \in H$ за побудовою множини *H*.

Отже, точна верхня границя будь-якої сумісної вгору підмножини з *H* належить *H*, тому (*H*, ≤) – ΔΔ-область за означенням.
П. 2) доводиться аналогічно.

Лема 6'. Нехай (*D*, ≤) – ЧВМ та $\varphi : D \to D$ – монотонна функція.

Якщо (*D*, ≤) – ∇∇-область, то (*L*, ≤) – ∇∇-область;
Якщо (*D*, ≤) – ∇-область, то (*L*, ≤) – ∇-область.
Доведення проводиться дуально до доведення Леми 6.

Розглянемо Теорему Тарського про структуру множини нерухомих точок монотонного оператора φ на повній решітці . Ця теорема гарантує при вказаних умовах існування хоча б однієї нерухомої точки, при чому множина *fix*(φ) є повною решіткою. Зокрема точна верхня границя всієї множини нерухомих точок дорівнює точній верхній границі верхньої множини перед-нерухомих точок, а точна нижня границя – точній нижній границі нижньої множини перед-нерухомих точок. Твердження про існування точних границь множини *fix*(φ) виділимо в дві окремі леми та наведемо аналогічні формулювання для випадку монотонного відображення на ΔΔ/∇∇-області.

Лема 7 (*узагальнення відповідного твердження у теоремі Тарського***)**. Монотонна функція φ на ΔΔ-області (*D*, ≤) має максимальну нерухому точку.

Доведення. Побудуємо множину $H = \{x \in D \mid x \le \varphi(x)\}$. За Лемою 6 (*H*,≤) – ΔΔ-область, а за Лемою 5 $\varphi(H) \subseteq H$, тому за Лемою 3 в *H* існує максимальний елемент і кожен елемент з *H* мажорується максимальним елементом з *H*.

Виберемо в *H* деякий максимальний елемент z і доведемо, що z – максимальна нерухома точка монотонного відображення φ в множині *D*. За побудовою множини *H*: $z \le \varphi(z)$. За монотонністю відображення φ: $\varphi(z) \le \varphi(\varphi(z))$. Тому $\varphi(z) \in H$. z – максимальний елемент множини *H*, тому елементів більших за z в *H* немає, отже $z = \varphi(z)$. Тобто, z – нерухома точка.

За Лемою 5: $fix(\varphi) \subseteq H$. z – нерухома точка і максимальний елемент з *H*, отже z – максимальна нерухома точка монотонного відображення φ на ΔΔ-області *D*.

Отже, будь-яка максимальна точка множини *H* буде нерухомою точкою, тому будь-яка точка множини $H = \{x \in D \mid x \le \varphi(x)\}$ мажорується максимальною нерухомою точкою.

Лема 7' (*узагальнення відповідного твердження Тарського***).** Монотонна функція φ на ∇∇-області (*D*, ≤) має мінімальну нерухому точку.
Доведення проводиться дуально до доведення Леми 7.

Лема 8 (*варіант леми Тарського***).** Нехай (*D*, ≤) – ∇-область, $\varphi : D \to D$ – монотонне відображення. Тоді в *D* є найменша нерухома точка.

Доведення. Нехай $L = \{x \in D \mid x \ge \varphi(x)\}$. За означенням ∇-області *D* існує точна нижня границі множини *L*. Позначимо її $l = \prod \{x \in D \mid x \ge \varphi(x)\}$. Тоді $l \le x, \forall x \in L$. Так як φ – монотонна функція, то $\varphi(l) \le \varphi(x) \Rightarrow \varphi(l) \le x$. Тому $\varphi(l)$ – нижня границя для *L* $\Rightarrow \varphi(l) \le l$ за означенням точної нижньої границі. За монотонністю φ $\varphi(\varphi(l)) \le \varphi(l)$. Отже, $\varphi(l) \in L$ за побудовою *L*. $\Rightarrow l \le \varphi(l)$ за означенням точної нижньої границі. Тому, $l = \varphi(l)$ за антисиметричністю часткового порядку ≤, а *l* – нерухома точка монотонного відображення $\varphi : D \to D$.

Доведемо, що ця нерухома точка є найменшою НТ. Нехай *a*∈*D* – деяка нерухома точка. Тому $a = \varphi(a) \Rightarrow a \in L \Rightarrow a \ge l.$ Отже, $l = \prod \{x \in D \mid x \ge \varphi(x)\}$ – найменша нерухома точка монотонного відображення φ на ∇-області (*D*, ≤). Таким чином, множина *D* має нерухому точку $l = \prod \{x \in D \mid x \ge \varphi(x)\}$.

Теорема 1 (*Кнастера–Тарського***).** Нехай (*D*, ≤) – ΔΔ/∇-область, $\varphi : D \to D$ – сумісно-неперервне відображення. Тоді в *D* є найменша нерухома точка. Ця точка позначається *lfp* φ та задається наступною формулою:

$$lfp\ \varphi = \coprod_{i<\omega} \varphi^{(i)}(\perp),$$

де $\varphi^{(0)}(\perp) = \perp, \varphi^{(1)}(\perp) = \varphi(\varphi^{(0)}(\perp)), ..., \varphi^{(i)}(\perp) = \varphi(\varphi^{(i-1)}(\perp)), i \ge 0.$

Лема 8' (*варіант леми Тарського*). Нехай (*D*, ≤) – Δ-область, $\varphi : D \to D$ – монотонне відображення. Тоді в *D* є найбільша нерухома точка.

Доведення проводиться дуально до доведення Леми 8.

Теорема 2 (*узагальнення відповідної теореми Тарського*). Для монотонної функції $\varphi : D \to D$ на ΔΔ/∇∇-області (*D*, ≤) множина її нерухомих точок є ΔΔ/∇∇-областю.

Доведення. За Лемою 5: $fix(\varphi) \subseteq D$. Тому *fix*(φ) є частково-впорядкованою множиною з порядком $\leq$. Доведемо, що кожна сумісна вгору підмножина нерухомих точок *A* має точну верхню границю, що є нерухомою точкою. $A \subseteq H = \{x \in D \mid x \leq \varphi(x)\}$. За Лемою 6 *H* – ΔΔ-область. За означенням ΔΔ-області існує точна верхня границя підмножини *A*: $a = \coprod_H A \in H$.

Розглянемо верхній конус елемента *a* в підмножині $H = \{x \in D \mid x \leq \varphi(x)\}$. Нехай $Z = \{x \in D \mid x \leq \varphi(x) \,\&\, a \leq x\}$. За побудовою множини *Z* $a \leq \varphi(a) \,\&\, \varphi(a) \leq \varphi(\varphi(a)) \Rightarrow \varphi(a) \in Z$. Отже, $\varphi(Z) \subseteq Z$. За Лемою 4 верхній конус *Z* з порядком $\leq$ є ΔΔ/∇-областю.

Тому за лемою 8 в *Z* існує найменша нерухома точка *p*. Так як $a \geq x, \forall x \in A$ за означенням точної верхньої границі та $p \geq a$ за означенням верхнього конуса, то *p* – верхня границя *A*.

Нехай *F* – множина верхніх границь підмножини *A* в множині *fix*(φ). Але *p* – нерухома точка монотонної функції φ, тому *F* не порожня. Виберемо деяке $q \in F$. $F \subseteq fix(x) \subseteq D$, тому *q* – верхня границя підмножини *A* в множині *D*. $a \leq q$ за означенням точної верхньої границі *a*, тому $q \in Z$ за означенням верхнього конуса елемента *a*. *p* – найменша нерухома точка монотонної функції φ в ΔΔ/∇-області ($Z, \leq$), тому $p \leq q$.

Таким чином, точка *p* – найменша верхня границя підмножини *A* в множині *fix*(φ), тобто *p* – точна верхня границя підмножини *A* в множині нерухомих точок *fix*(φ). Отже, (*fix*(φ), ≤) – є ΔΔ-областю.

Те, що кожна непорожня сумісна вниз підмножина нерухомих точок *B* має точну нижню границю, що є нерухомою точкою доводиться дуальним способом.

Отже, (*fix*(φ), ≤) – є ΔΔ/∇∇-областю.

Теорема 3 (*узагальнення відповідної теореми Тарського*). Для монотонної функції $\varphi : D \to D$ на ΔΔ/∇-області (*D*,≤) множина її нерухомих точок є ΔΔ/∇-областю.

Теорема 4 (*узагальнення відповідної теореми Тарського*). Для монотонної функції $\varphi : D \to D$ на Δ/∇∇-області (*D*,≤) множина її нерухомих точок є Δ/∇∇-областю.

Теорема 5 (*Тарського*). Для монотонної функції $\varphi : D \to D$ на Δ/∇-області (*D*, ≤) множина її нерухомих точок є Δ/∇-областю.

Отримані результати щодо співвідношення множин *H*, *L*, *fix*(φ) та d^{∇}, d^{Δ} в залежності від типу області *D* оформимо у вигляді наступної таблиці:

Таблиця 2

Залежність типу підмножин від типу області *D*

Тип області *D* \ Підмножина з *D*	*H*	*L*	*fix*(φ)	$d^{\Delta}, d \in D$	$d^{\nabla}, d \in D$
ΔΔ-область	ΔΔ-область		ΔΔ-область	ΔΔ-область	Δ-область
Δ-область	Δ-область		Δ-область	Δ/∇-область	Δ-область
∇∇-область		∇∇-область	∇∇-область	∇-область	∇∇-область
∇-область		∇-область	∇-область	∇-область	Δ/∇-область
ΔΔ/∇-область	ΔΔ-область	∇-область	ΔΔ/∇-область	ΔΔ/∇-область	Δ/∇-область
Δ/∇∇-область	Δ-область	∇∇-область	Δ/∇∇-область	Δ/∇-область	Δ/∇∇-область
ΔΔ/∇∇-область	ΔΔ-область	∇∇-область	ΔΔ/∇∇-область	ΔΔ/∇-область	Δ/∇∇-область
Δ/∇-область	Δ-область	∇-область	Δ/∇-область	Δ/∇-область	Δ/∇-область

Наведемо властивості композицій часткових предикатів стосовно неперервності та монотонності.

Теорема 6. 1) Композиції пропозиційної алгебри часткових предикатів є сумісно-неперервними та ω-неперервними.
2) Композиції реномінативної алгебри *V*-квазіарних предикатів є сумісно-неперервними та ω-неперервними.
Теорема 7. 1) Базові композиції кванторної алгебри предикатів є *T*-неперервними, отже і монотонними відображеннями.
2) Базові композиції функціонально-еквaційної алгебри предикатів є *T*-неперервними, отже і монотонними відображеннями.
Доведення теорем проводиться традиційним способом, тому його не наводимо.

Синтаксичні аспекти побудови *T*-нерухомої точки. Алгебри часткових предикатів є семантичною основою КНЛ. Побудова таких алгебр дає змогу визначити мови КНЛ відповідного рівня.

Будемо тут розглядати алгебру *V*-квазіарних предикатів *AP* з композиціями ¬, ∨, &, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi$.

В [1] продемонстровано, що будь-яка формула, побудована за допомогою операцій заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції та реномінації задає ω-неперервний оператор (композицію). Якщо формула Φ є *P*-екзистенційною для деякого предикатного символу *P*, то відповідний оператор є монотонний та ω-неперервний в області істинності.

Отже, якщо формула Φ є *P*-екзистенційною для деякого предикатного символу *P* з цієї формули, то її оператор Φ_A за теоремою 1 має *T*-нерухому точку з найменшою областю істинності, що знаходиться методом послідовних послідовних наближень.

Робота з квазінерухомими точками спрощує дослідження операторів нерухомих точок на множині часткових предикатів. В статті [1] всі визначення базувалися на основі ланцюгів. Будь-який ланцюг є сумісною вгору множиною. Результати статті [1] переносяться на визначення сумісно-неперервних операторів побудови нерухомих точок.

Теорема 8. Нехай Φ(*P*) – формула мови першого порядку. Тоді множина *fix*(Φ(*P*)) – ΔΔ/∇-область.

Наведені в [1] властивості формул дозволяють ввести наступні схеми аксіом:

- $lfp_P(\Phi) = \Phi(lfp_P(\Phi))$;
- *T*-$lfp_P(\Phi) \vee\perp$= Φ(*T*-$lfp_P(\Phi)$)∨⊥.

Теорема 9. 1) Якщо Φ є *P*-безкванторною формулою, то $lfp_P(\Phi) = \Phi(lfp_P(\Phi))$ є коректною схемою аксіом;

2) Якщо Φ є *P*-екзистенційною формулою, то *T*-$lfp_P(\Phi) \vee\perp$=Φ(*T*-$lfp_P(\Phi)$)∨⊥ є коректною схемою аксіом.

Побудовані схеми аксіом можуть бути використані для аксіоматизації мов предикатів, розширених операторами нерухомих та квазінерухомих точок $lfp_P(\Phi)$ та *T*-$lfp_P(\Phi)$. Ця проблема буде предметом розгляду наступних статей.

Висновки. В роботі розглянуто застосування операторів побудови нерухомої точки для композиційно-номінативних логік різних рівнів абстракції. Наводяться відповідні теореми щодо подання класів предикатів як ПЧВМ, неперервності та монотонності основних композицій предикатів, існування нерухомих та квазінерухомих точок, замкненості класів предикатів відносно операторів нерухомої точки та властивостей таких операторів. Отримані результати можуть бути плідно використані в мовах специфікацій програм.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С., Антонова І.А.* Композиційно-номінативні логіки з операторами нерухомої точки // Пробл. програмування. – 2008, – № 2–3. 2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Основи математичної логіки. – К., 2006. 3. *Dawar A., Gurevich Y.* Fixed point logics // The Bulletin of Symbolic Logic.– 2002. – Vol. 8, № 1. 4. *Tarski A.* A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application.– Pacific J. of Math 5. – 1955. 5. *Davey B.A., Priestley H.A.*. Introduction to Lattices and Order. Second edition. // Cambridge University Press, 2002. 6. *Грамберг О., Кларк Э.М., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model checking. – М., 2002. 7. *Abiteboul S., Vardi M.Y., Vianu V.* Fixpoint Logics, Relational Machines, and Computational Complexity. // Proceedings of the 7th IEEE symposium on structure in complexity theory, 1992. 8. *Gradel E., Kreutzer S.* Will Deflation Lead to Depletion? On Non-Monotone Fixed Point Inductions. // Logic in Computer Science, 2003. Proceedings. 18th Annual IEEE Symposium on Volume. Issue. – 2003. 9. *Schneider K.* Verification of Reactive Systems. Formal Methods and Algorithms. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 10. *Pfeifer H, Dold A, von Henke F.W., Rueb H.* Mechanized Semantics of Simple Imperative Programming Constructs. – Technical Report UIB 96-11, Universität Ulm, 1996. 11. *Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S.* Continuous Lattices and Domains: Encyclopedia of Mathematics and its Applications 93, Cambridge University Press, 2003. 12. *Brzozowski J.A.* De Morgan Bisemilattices. – Proceedings of the 30th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2000. 13. *Буй Д.Б., Кахута Н.Д.* Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій. // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки – 2006. – Вип 2. 14. *Верещагин Н.К., Шень А.* Начала теории множеств. – М., 2002.

Надійшла до редколегії 11.09.2008

УДК 519.21

І.Я. Усар, асп.

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ВХІДНИМ ПОТОКОМ В СИСТЕМАХ З ПОВТОРНИМИ ВИКЛИКАМИ

Розглянуто системи з повторними викликами з керованими інтенсивностями вхідного потоку. Отримано формули для ергодичного розподілу, які використовуються для розв'язування оптимізаційних задач з пороговою стратегією.

The retrial queues with controlled rates of input flow are considered. Existence condition of steady state distribution is obtained for such system. The formulae for steady state distributions were obtained. They have been used for solution of an optimal control problem with threshold strategy.

Вступ. Результати для систем з повторними викликами складають один з важливих розділів теорії масового обслуговування. Основні з цих результатів систематизовано в монографії [1]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в економіці, транспорті, в практиці проектування комп'ютерних мереж (локальних і глобальних), системах з замовленням в телефонії та мобільного зв'язку, для опису процесу посадки повітряних суден та інш. (див. наприклад [1], [4]-[6]). Це пояснює той факт, що за останні десятиліття теорія систем з повторними викликами набула значного розвитку.

Характерною рисою стохастичних систем, що розглядаються, є така: виклики, що надійшли в зайняту систему, через випадковий проміжок часу повторюють спробу потрапити на обслуговування. Такі виклики стають джерелами повторних викликів, що генерують вторинний вхідний потік.

Системи з повторними викликами відрізняються алгоритмом управління процесом обслуговування та типом розподілів, що відповідають тривалості основних операцій при надходженні і обробці викликів. Розширення області застосувань приводить до ускладнення моделей і до пошуку нових методів дослідження процесу обробки викликів.

Опис моделі. Основна модель, що розглядається в даній роботі, є двовимірний ланцюг Маркова $Q(t)=(Q_1(t),Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S=I\times J$, де $I=\{0,1,\ldots,m\}$, $J=\{0,1,\ldots\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j)(i',j')}$ ланцюга $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0,1,\ldots,m-1,\ j\in J$, то

$$q_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при}\quad (i',j')=(i+1,j),\\ i\mu, & \text{при}\quad (i',j')=(i-1,j),\\ j\nu, & \text{при}\quad (i',j')=(i+1,j-1),\\ -(\lambda_j+i\mu+j\nu), & \text{при}\quad (i',j')=(i,j),\\ 0, & \text{в інших випадках;}\end{cases}$$

2) якщо $i=m,\ j\in J$, то

$$q_{(m,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при}\quad (i',j')=(m,j+1),\\ m\mu, & \text{при}\quad (i',j')=(m-1,j),\\ -(\lambda_j+m\mu), & \text{при}\quad (i',j')=(m,j),\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Структуру інфінітезимальної матриці $Q=\left\|q_{(i,j)(i',j')}\right\|_{(i,j)(i',j')\in S}$ можна зобразити графічно.

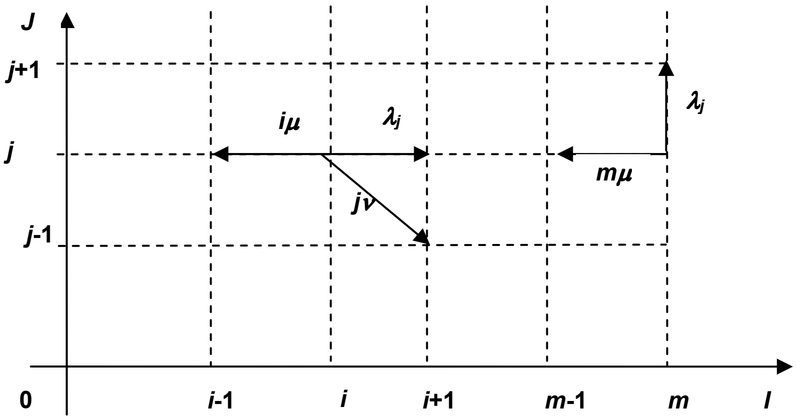


Рис.1. Граф інтенсивностей переходів для ланцюга $Q(t)$

Ланцюг Маркова $Q(t)=(Q_1(t),Q_2(t))$ є процесом обслуговування для системи з повторними викликами, яка складається з "m" обслуговуючих приладів. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ. Вхідний потік містить дві складові – первинну і вторинну. Інтенсивність λ_j потоку первинних викликів залежить від числа j – джерел повторних викликів. Кожне джерело повторних викликів генерує пуассонівський потік повторних викликів інтенсивності ν.

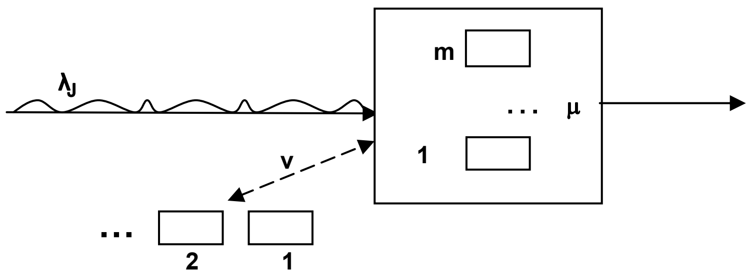


Рис. 2. Структура системи з повторними викликами

Компонента $Q_1(t)$ вказує на число зайнятих приладів у момент часу t в системі, $Q_2(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо кодувати як $M_Q / M / m / \infty$. Символ "∞" на останній позиції означає відсутність обмежень на число повторних викликів.

Умови існування ергодичного розподілу. З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$, $t \ge 0$.

Лема 1. Нехай $\lambda = \sup_j \lambda_j < \infty$. Тоді при $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення. Розглянемо в якості тест-функцій Ляпунова наступні функції

$$\varphi(i, j) = ai + j, \quad (i, j) \in S, \tag{1}$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій середній перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i', j') \neq (i, j)} q_{(i,j)(i',j')} \left(\varphi(i', j') - \varphi(i, j)\right)$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - i\mu a + j\nu(a-1), & 0 \le i \le m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, & i = m. \end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ для будь-якого $a \in \left(\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right)$ існує $\varepsilon > 0$, що $y_{ij} < -\varepsilon$ для всіх $(i, j) \in S$ за винятком скінченного числа станів (i, j). Таким чином для тест-функцій (1) виконуються умови теореми Твіді ([1], стор.97). Лему доведено.

Постановка оптимізаційних задач. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $M_Q / M / m / \infty$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

В зв'язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $0 = H_0 \le H_1 \le ... \le H_{N-1} < H_N = \infty$, $H' = (H_1, H_2, ..., H_{N-1})$, N - фіксоване число. Якщо в момент часу $t \ge 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1,...,N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує в i-ому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_i. Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел повторних викликів: $\lambda_j = h_i$, $j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1,...,N$.

Відповідний процес обслуговування і його характеристики будемо наділяти індексом H, $Q(t) = Q(t, H), \ldots$.

Нехай $S_1(t, H)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t;

$S_2(t, H)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_3(t, H)$ - число перемикань інтенсивності вхідного потоку.

Якщо існують границі $\lim_{t \to \infty} t^{-1} S_i(t, H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i = 1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$W(H) = C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \to \max, \tag{2}$$
$$0 = H_0 \le H_1 \le ... \le H_{N-1} < H_N = \infty, \quad H_i \in \{0,1,...\}, \quad i = 1,2,...,N-1,$$

де C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (2) є така багатопорогова стратегія H, яка максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для одноканальних систем з повторними викликами розглядалися в роботах [5], [6].

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми 1) граничні функціонали $S_i(H)$, $i = 1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності π_{ij}, $(i, j) \in I \times J$,

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} i\mu \, \pi_{ij}(H), \qquad S_2(H) = \sum_{i=1}^{N} h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i - 1} \pi_{mj}(H),$$

$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(h_i \pi_{mH_i - 1}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{m-1} \pi_{kH_i} \right).$$

Таким чином для розв'язку задачі (2) необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу для системи $M_Q / M / m / \infty$. З цього моменту зосередимо увагу на цій проблемі.

У загальному випадку при довільній формі залежності інтенсивності вхідного потоку від числа повторних викликів застосування методу генератрис, очевидно, неможливо. Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул ми будемо використовувати інший засіб – рівність потоків імовірностей через замкнений контур при стаціонарному режимі.

Формули для ергодичного розподілу. Розглянемо спочатку модель типу $M_Q / M / m / N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. При умові, що всі N місць зайнято, повторний виклик губиться і не отримує обслуговування в системі.

Інфінітезимальні характеристики $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$ для процесу обслуговування $Q^{(N)}(t) = \left(Q_1^{(N)}(t), Q_2^{(N)}(t)\right)$ в системі $M_Q / M / m / N$ дорівнюють:

1) якщо $i = 0,1,\dots,m-1, \quad j = 0,1,\dots,N$, то

$$q^{(N)}_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{при} \quad (i',j') = (i+1,j), \\ i\mu, & \text{при} \quad (i',j') = (i-1,j), \\ j\nu, & \text{при} \quad (i',j') = (i+1,j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu), & \text{при} \quad (i',j') = (i,j), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо $i = m, \quad j = 0,1,\dots,N-1$, то

$$q^{(N)}_{(m,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{при} \quad (i',j') = (m,j+1), \\ m\mu, & \text{при} \quad (i',j') = (m-1,j), \\ -(\lambda_j + m\mu), & \text{при} \quad (i',j') = (m,j), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

3) якщо $i = m, \quad j = N$, то

$$q^{(N)}_{(m,N)(i',j')} = \begin{cases} m\mu, & \text{при} \quad (i',j') = (m-1,N), \\ -m\mu, & \text{при} \quad (i',j') = (m,N), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Процес $Q^{(N)}(t)$ приймає значення в скінченній множині станів $S^{(N)} = I \times J^{(N)}, \quad J^{(N)} = \{0,1,\dots,N\}$, і є ергодичним. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi^{(N)}_{ij}, \quad (i,j) \in S^{(N)}$.

Нехай $A(j)$, $j = 0,1,\dots,N-1$ - тридіагональна матриця виду

$$A(j) = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2}^{(-)} & a_{m-2}^{(0)} & a_{m-2}^{(+)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1}^{(-)} & a_{m-1}^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$a_i^{(0)} = \lambda_j + i\mu + j\nu, \quad i = 0,1,\dots,m-1,$$

$$a_i^{(+)} = -\lambda_j, \quad i = 0,1,\dots,m-2,$$

$$a_i^{(-)} = -i\mu, \quad i = 1,2,\dots,m-1,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матриці розмірності $(m \times m)$.

Через $D(N)$ будемо позначати трикутну матрицю

$$D(N)=\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(N\nu+\lambda_N) & 2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -N\nu & -(N\nu+\lambda_N) & 3\mu & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -(N\nu+\lambda_N) & (m-1)\mu \end{pmatrix}.$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'^{(N)}(j)=\left(\pi_{0j}^{(N)},\pi_{1j}^{(N)},\dots,\pi_{m-1j}^{(N)}\right),\quad G'^{(N)}(j)=\frac{\pi'^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}}=\left(G_{0j}^{(N)},G_{1j}^{(N)},\dots,G_{m-1j}^{(N)}\right),$$

$\overline{1}(m-1)-(m-1)-$ вимірний вектор, що складається з одиниць,
$e_i(m-1)-(m-1)-$ вимірний вектор, i –та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю.

Через $\overline{1}, e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності m.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j>0,\quad j=0,1,\dots,$ то для будь-якого N стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(N)},\quad (i,j)\in S^{(N)}$ можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \pi_{1N}^{(N)} \\ \pi_{2N}^{(N)} \\ \dots \\ \pi_{m-1N}^{(N)} \end{pmatrix}=\pi_{0N}^{(N)}D^{-1}(N)\left(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)\right),\quad \pi_{mN}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu}G'(N)\left(N\nu\overline{1}+\lambda_N e_m\right),\tag{3}$$

$$\pi_j'^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\,\nu^{N-j}}{j!}G'^{(N)}(N)T(N-1)\times\dots\times T(j),\quad j=0,1,\dots,N-1,\tag{4}$$

$$\pi_{mj}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\,\nu^{N-j}}{\lambda_j\, j!}G'^{(N)}(N)T(N-1)\times\dots\times T(j+1)\overline{1},\quad j=0,1,\dots,N-1,\tag{5}$$

де $$\pi_{oN}^{(N)}=\left\{G'^{(N)}(N)\left(\overline{1}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\dots\times T(j+1)[T(j)+\frac{1}{\lambda_j}]\overline{1}+\frac{1}{m\mu}(N\nu\overline{1}+\lambda_N e_m)\right)\right\}^{-1}, \tag{6}$$

$$G^{(N)}(N)=\begin{pmatrix} 1 \\ D^{-1}(N)\left(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)\right)\end{pmatrix},\tag{7}$$

$$T(j)=\left[B+\frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j),\quad j=0,1,\dots,N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)}=\widetilde{\pi}_{ij},\ G_{ij}^{(N)}=\widetilde{G}_{ij},\quad (i,j)\in S^{(N)}$. Для кожного $k=0,1,\dots,m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k=\{(0,N),(1,N),\dots,(k,N)\}$ та $\overline{E}_k=S^{(N)}\setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([3], стор.49), будемо мати

$$N\nu\widetilde{\pi}_{0N}+N\nu\widetilde{\pi}_{1N}+\dots+N\nu\widetilde{\pi}_{k-1N}+(N\nu+\lambda_N)\widetilde{\pi}_{kN}=(k+1)\mu\widetilde{\pi}_{k+1N},\quad k=0,1,\dots,m-1.\tag{8}$$

Для $\widetilde{G}_{ij}=\dfrac{\widetilde{\pi}_{ij}}{\widetilde{\pi}_{0N}},\quad (i,j)\in S^{(N)}$ перші $(m-1)$ рівняння із системи (8) мають вигляд

$$\begin{cases} \mu \tilde{G}_{1N} = N\nu + \lambda_N \\ -(N\nu + \lambda_N)\tilde{G}_{1N} + 2\mu \tilde{G}_{2N} = N\nu \\ -N\nu \tilde{G}_{1N} - (N\nu + \lambda_N)\tilde{G}_{2N} + 3\mu \tilde{G}_{3N} = N\nu \\ \ldots \\ -N\nu \tilde{G}_{1N} - \ldots - N\nu \tilde{G}_{m-3N} - (N\nu + \lambda_N)\tilde{G}_{m-2N} + (m-1)\mu \tilde{G}_{m-1N} = N\nu \end{cases} \quad (9)$$

Відносно $\tilde{G}_{1N}, \ldots, \tilde{G}_{m-1N}$ розв'язком (9) буде

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{1N} \\ \ldots \\ \tilde{G}_{m-1N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N)\left(N\nu \bar{1}(m-1) + \lambda_N e_1(m-1)\right),$$

що дає нам (7).

З (8) при $k = m-1$ знаходимо

$$\tilde{G}_{mN} = \frac{1}{m\mu}\tilde{G}'(N)(N\nu\bar{1} + \lambda_N e_m). \quad (10)$$

Знайдемо тепер $\tilde{G}_{mj}$, коли $j = 0,1,..N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)} = \{(\alpha,\beta) \in S^{(N)} : \beta \le j\}$ і $\overline{S}_j^{(N)} = S^{(N)} \setminus S_j^{(N)}$. Знову використовуючи рівність потоків імовірності через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j \tilde{\pi}_{mj} = (j+1)\nu \tilde{\pi}_{0j+1} + \ldots + (j+1)\nu \tilde{\pi}_{m-1j+1},$$

або

$$\lambda_j \tilde{G}_{mj} = (j+1)\nu \tilde{G}_{0j+1} + \ldots + (j+1)\nu \tilde{G}_{m-1j+1}.$$

Звідки отримаємо

$$\tilde{G}_{mj} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j}\tilde{G}'(j+1)\bar{1}, \quad j = 0,1,..,N-1. \quad (11)$$

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\tilde{S}^{(N)} = \{0,1,\ldots,m-1\} \times \{0,1,\ldots N-1\}$. Відповідні рівняння для G_{ij}, $(i,j) \in \tilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu)\tilde{G}_{0j} = \mu \tilde{G}_{1j}, \quad i = 0, \quad (12)$$

$$(\lambda_j + i\mu + j\nu)\tilde{G}_{ij} = (j+1)\nu \tilde{G}_{i-1j+1} + \lambda_j \tilde{G}_{i-1j} + (i+1)\mu \tilde{G}_{i+1j}, \quad i = 1,2,\ldots,m-2. \quad (13)$$

При $i = m-1$ з урахуванням (11)

$$\left(\lambda_j + (m-1)\mu + j\nu\right)G_{m-1j} = (j+1)\nu G_{m-2j+1} + \lambda_j G_{m-2j} + \frac{(j+1)m\mu\nu}{\lambda_j}G'(j+1)\bar{1}. \quad (14)$$

Систему (12) - (14) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$\tilde{G}'(j)A(j) = (j+1)\nu \tilde{G}'(j+1)\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j}C\right] \text{ або}$$

$$\tilde{G}'(j) = (j+1)\nu \tilde{G}'(j+1)\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j) = (j+1)\nu \tilde{G}'(j+1)T(j), \; j = 0,1,\ldots,N-1. \quad (15)$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (15) буде послідовність векторів

$$\tilde{G}'(j) = \frac{N!\,\nu^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j), \quad j = 0,1,\ldots,N-1. \quad (16)$$

Підставляючи праву частину (16) в (11), маємо

$$\tilde{G}_{mj} = \frac{N!\,\nu^{N-j}}{j!\,\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j+1)\bar{1}, \quad j = 0,1,\ldots,N-1. \quad (17)$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей $\tilde{\pi}_{ij}$, $(i,j)\in S$, яка виглядає так: $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{N}\tilde{\pi}_{ij}=1$, може бути переписана наступним чином

$$\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{G}_{iN}+\tilde{G}_{mN}+\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{G}_{mj}+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{G}_{ij}=\tilde{\pi}_{0N}^{-1}.$$

Підставляючи сюди вирази з формул (10), (16) та (17) отримаємо

$$\tilde{\pi}_{0N}=\Big\{\tilde{G}'(N)\bar{1}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!\,\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\bar{1}+$$

$$+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j)\bar{1}+\frac{1}{m\mu}\tilde{G}'(N)(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_m)\Big\}^{-1}$$

або

$$\tilde{\pi}_{0N}=\left\{\tilde{G}'(N)\left(\bar{1}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)[T(j)\bar{1}+\frac{1}{\lambda_j}\bar{1}]+\frac{1}{m\mu}(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_m)\right)\right\}^{-1} \tag{18}$$

Співвідношення (3) – (6) є безпосереднім наслідком (10), (16)-(18).
Теорему доведено.

Стаціонарний розподіл систем $M_Q/M/2$ з повторними викликами. Очевидно, формули (3)-(6) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. Застосуємо отриманий результат до систем $M_Q/M/2/N$ та $M_Q/M/2/\infty$. У даному випадку можна провести більш детальний аналіз і отримати явні формули.

Не порушуючи загальності, будемо вважати $\mu=1$.
Позначимо

$$A_i(j)=\begin{cases}\prod_{k=i}^{j-1}\dfrac{1+\rho_k+\lambda_{k+1}+(k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k+k\nu)^2+k\nu]}, & i<j,\\ 1, \quad i=j,\end{cases}$$

де $\rho_k=\dfrac{\lambda_k}{2\mu}=\dfrac{\lambda_k}{2}$ - завантаження системи первинними викликами, коли черга $Q_2(t)=k$.

Наслідок 1. Якщо $\lambda_j>0$, $j=0,1,...$, то для будь-якого N стаціонарні імовірності для $M_Q/M/2/N$ - системи з повторними викликами дорівнюють

$$\pi_{0j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\,\nu^{N-j}A_j(N)}{j!},\quad \pi_{1j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\,\nu^{N-j}(\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}, \tag{19}$$

$$\pi_{2j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\,\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{j!\,\lambda_j},\quad j=0,1,...,N-1, \tag{20}$$

$$\pi_{1N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}(\lambda_N+N\nu),\qquad \pi_{2N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{2},$$

$$\pi_{0N}^{(N)}=\Big\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{j!\,\lambda_j}+$$

$$+\frac{1}{2}\Big((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu\Big)\Big\}^{-1}.$$

Доведення. Для системи $M_Q/M/2/N$ з повторними викликами при умові $\mu = 1$ маємо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu & -\lambda_j \\ -1 & 1+\lambda_j + j\nu \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \lambda_j + j\nu & -\lambda_j \\ -1 & 1+\lambda_j + j\nu \end{vmatrix} = (\lambda_j + j\nu)(1+\lambda_j + j\nu) - \lambda_j = (\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu,$$

то

$$A^{-1}(j) = \frac{1}{(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu} \begin{pmatrix} 1+\lambda_j + j\nu & \lambda_j \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$$

і матриця $T(j)$ буде мати вигляд

$$T(j) = \left[B + \frac{2}{\lambda_j} C\right] A^{-1}(j) = \left[B + \rho_j^{-1} C\right] A^{-1}(j) =$$

$$= \frac{1}{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]} \begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \quad j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Нехай $D(j) = \begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \quad j = 0,1,\ldots.$

Легко переконатись, що для будь-яких $j = 0,1,\ldots$ виконується рівність

$$D(j+1)D(j) = (1+\rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) \begin{pmatrix} 1+\rho_{j+1} & (1+\rho_{j+1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$D(m) \times \ldots \times D(j+1)D(j) = \prod_{k=j}^{m-1} (1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu) \begin{pmatrix} 1+\rho_m & (1+\rho_m)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix},$$

для $m > j$, а тому

$$T(N-1) \times \ldots \times T(j+1)T(j) = \frac{1}{1+\rho_{N-1} + \lambda_N + N\nu} \prod_{k=j}^{N-1} \frac{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]} \times \begin{pmatrix} 1+\rho_{N-1} & (1+\rho_{N-1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{A_j(N)}{1+\rho_{N-1} + \lambda_N + N\nu} \begin{pmatrix} 1+\rho_{N-1} & (1+\rho_{N-1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \quad j = 0,1,\ldots,N-1. \tag{21}$$

З перших двох рівнянь системи (9) маємо

$$\tilde{G}'(N) = (\tilde{G}_{0N}, \tilde{G}_{1N}) = (1, \lambda_N + N\nu).$$

Неважко переконатись, що

$$\tilde{G}'(N) \begin{pmatrix} 1+\rho_{N-1} & (1+\rho_{N-1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix} = (1+\rho_{N-1} + \lambda_N + N\nu)(1, \lambda_j + j\nu),$$

тому

$$\tilde{G}'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j) = A_j(N)(1, \lambda_j + j\nu), \tag{22}$$

$$\tilde{G}_{2j} = \frac{N!\,\nu^{N-j}}{j!\,\lambda_j} \tilde{G}'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j+1)\overline{1} = \frac{N!\,\nu^{N-j}}{j!\,\lambda_j} A_{j+1}(N)(1, \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)\overline{1}. \tag{23}$$

Тепер з (18) отримаємо

$$\tilde{\pi}_{0N} = \left\{ \tilde{G}'(N)\left(\bar{1} + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)[T(j)\bar{1} + \frac{1}{\lambda_j}\bar{1}] + \frac{1}{m\mu}(N\nu\bar{1} + \lambda_N e_m) \right)\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ (1,\lambda_N + N\nu)\bar{1} + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}A_{j+1}(N)}{j!}(1,\lambda_{j+1} + (j+1)\nu)\left[\frac{1}{\lambda_j}\bar{1} + \frac{1}{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]}\times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}\bar{1} \right] + \frac{1}{2}(1,\lambda_N + N\nu)(N\nu\bar{1} + \lambda_N e_m) \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 1 + \lambda_N + N\nu + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}A_{j+1}(N)}{j!}\left(\frac{(1+\lambda_j + j\nu)(1+\rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)}{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]} + \frac{1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu}{\lambda_j} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\right) \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 1 + \lambda_N + N\nu + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j + j\nu)A_j(N)}{j!} + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{j!\,\lambda_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\right) \right\}^{-1}.$$

Співвідношення (19), (20) можуть бути отримані з (3)-(6) та (21)-(23).

Наслідок доведено.

Розглянемо тепер систему $M_Q/M/2/\infty$. З леми 1 випливає, що вона буде ергодичною, якщо $\sup_j \lambda_j/2 < 1$. Для того, щоб знайти зображення для ергодичного розподілу нам потрібно у формулах наслідку 1 перейти до границі при $N \to \infty$. При виконанні умов леми 1 і $N \to \infty$ стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні імовірності для системи $M_Q/M/2/\infty$. Результати роботи [7] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку.

Тут нам буде необхідний наступний результат.

Лема 2. Нехай $\sup_j \lambda_j/2 < 1$. Тоді

$$\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i + i\nu}{\nu^i i!\,A_j(i)} = \sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i + i\nu}{\nu^i i!}\prod_{k=j}^{i-1}\frac{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} < \infty \tag{24}$$

для довільного $j = 1,2,\ldots$

Доведення. В наших умовах існує таке $\rho < 1$, що $\rho_k \le \rho$. Для довільного k маємо

$$\frac{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} < \frac{\rho\ [(2+k\nu)^2 + k\nu]}{(k+1)\nu} = \rho k\nu\frac{k\nu + 5 + 4/k\nu}{(k+1)\nu}. \tag{25}$$

Оскільки $\frac{k\nu + 5 + 4/k\nu}{(k+1)\nu} \to 1$ якщо $k \to \infty$, то з (25) випливає, що знайдеться таке $\hat{\rho} < 1$, що

$$\frac{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} \le \hat{\rho}k\nu$$

для всіх достатньо великих k. А тому ряд у лівій частині (24) буде збігатись, якщо буде збігатись наступний ряд

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{\nu^i i!} \prod_{k=j}^{i-1} \widehat{\rho} k\nu .$$

Останній ряд можна переписати так

$$\frac{1}{(j-1)!(\widehat{\rho}\nu)^j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)\widehat{\rho}^i}{i} .$$

А він, очевидно, збігається.

Неважко показати, що

$$P_j \equiv \lim_{N\to\infty} \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(j)}{\nu^i i!} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{A_j(i)\nu^i i!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\nu^i \lambda_i i!} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{A_j(i+1)\nu^i \lambda_i i!} \right\}^{-1} . \tag{26}$$

Дійсно, використовуючи зображення для $\pi_{0N}^{(N)}$ наслідку 1, маємо

$$\lim_{N\to\infty} \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) = \left\{ \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(N)}{\nu^i i! A_j(N)} + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\nu^i \lambda_i i! A_j(N)} \right\}^{-1} \tag{27}$$

Легко переконатись, що коли $i, j < N$, то

$$\frac{A_i(N)}{A_j(N)} = \begin{cases} A_i(j) & \text{якщо} \quad i < j, \\ A_i(i) = 1 & \text{якщо} \quad i = j, \\ A_j^{-1}(i) & \text{якщо} \quad i > j. \end{cases}$$

Тому

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(N)}{\nu^i i! A_j(N)} = \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(j)}{\nu^i i!} + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=j+1}^{N} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{\nu^i i! A_j(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(j)}{\nu^i i! A} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{\nu^i i! A_j(i)}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\nu^i \lambda_i i! A_j(N)} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\nu^i \lambda_i i!} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)}{\nu^i \lambda_i i! A_j(i+1)}.$$

Із цих співвідношень та (27) випливає (26). З (26) та наслідку 1 отримаємо.

Наслідок 2. Якщо для $M_Q / M / 2 / \infty$ - системи з повторними викликами $\mu = 1$, $\lambda_j > 0$, $j = 0,1,...$, $\sup_j \lambda_j < 2$, то для неї існують стаціонарні імовірності

$$\pi_{0j}=\frac{P_j}{\nu^j j!},\qquad \pi_{1j}=\frac{(\lambda_j+j\nu)P_j}{\nu^j j!},\qquad \pi_{2j}=\frac{(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)P_j}{\nu^j\lambda_j j!}\cdot\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}{1+\rho_j+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu},$$

де

$$P_j=\left\{\sum_{i=0}^{j}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{\nu^i i!}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{A_j(i)\nu^i i!}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\nu^i\lambda_i i!}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{A_j(i+1)\nu^i\lambda_i i!}\right\}^{-1}.$$

Розглянемо на конкретних прикладах порогову стратегію, коли зміна інтенсивності вхідного потоку пов'язана з пересуванням одного порогу $H_1=H$. Тоді цільова функція буде мати вигляд

$$W(H)=C_1\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m}i\,\pi_{ij}-C_2\left(h_1\sum_{j=0}^{H}\pi_{mj}+h_2\sum_{j=H+1}^{N}\pi_{mj}\right)-C_3\left(h_1\pi_{mH}+(H+1)\nu\sum_{i=0}^{m-1}\pi_{iH+1}\right).$$

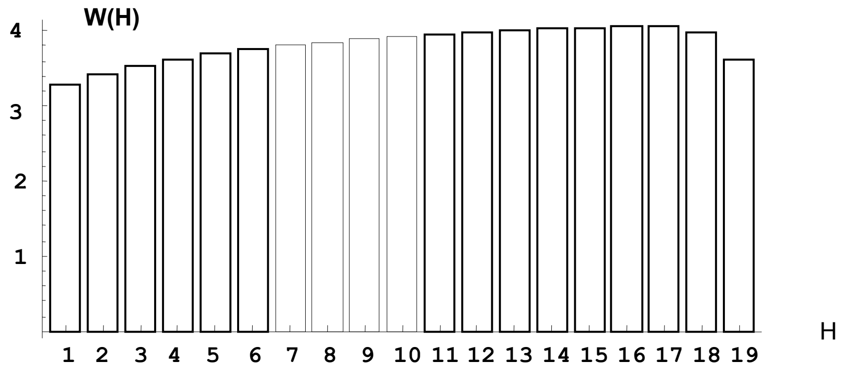
Розглянемо випадок керування системою $M_Q/M/2/20$. Параметри системи дорівнюють $h_1=2.5$; $h_2=0.5$; $\mu=1$; $\nu=0.1$, а коефіцієнти вартості: $C_1=6$, $C_2=2$, $C_3=4$.

Підрахунок дає наступні значення:
$W(1)=3.29487$; $W(2)=3.42729$; $W(3)=3.53285$; $W(4)=3.61861$; $W(5)=3.68956$; $W(6)=3.74924$;

$W(7)=3.80022$; $W(8)=3.84437$; $W(9)=3.88309$; $W(10)=3.91744$; $W(11)=3.94823$; $W(12)=3.97605$;

$W(13)=4.00132$; $W(14)=4.02418$; $W(15)=4.04396$; $W(16)=4.05742$; $W(17)=4.05189$; $W(18)=3.97815$;

$W(19)=3.61672$, або в графічному зображенні



Отже, для $H=16$ значення цільової функції буде максимальним.

Розглянемо інший приклад. Параметри системи дорівнюють $N=20$, $h_1=4$; $h_2=0.5$; $\mu=1$; $\nu=0.1$, а коефіцієнти вартості: $C_1=6$, $C_2=2$, $C_3=4$.

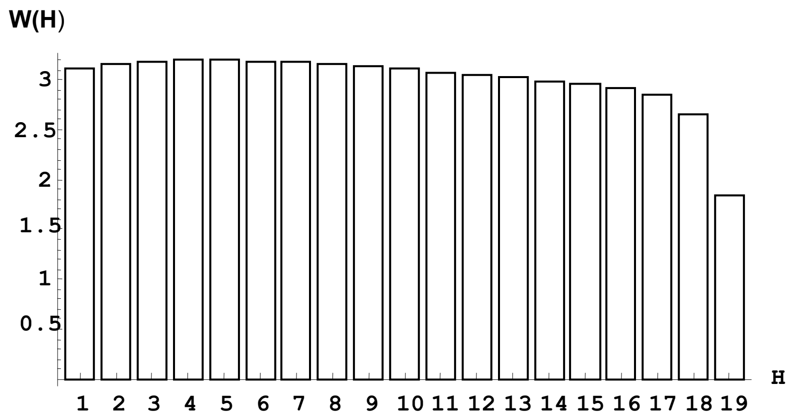
Графік показує значення цільової функції, а далі наведено її числові значення.

$W(1)=3.10832$; $W(2)=3.1579$; $W(3)=3.18552$; $W(4)=3.19712$; $W(5)=3.19702$; $W(6)=3.18834$;

$W(7)=3.17337$; $W(8)=3.15382$; $W(9)=3.13095$; $W(10)=3.10571$; $W(11)=3.07882$; $W(12)=3.05079$;

$W(13)=3.02192$; $W(14)=2.99205$; $W(15)=2.95971$; $W(16)=2.91864$; $W(17)=2.84471$; $W(18)=2.64105$;

$W(19)=1.83259$,



Тепер максимальне значення цільової функції буде для $H = 4$.

1. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p. 2. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. – М.: РУДН, 1995. – 529 с. 3. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Мир, 1993. – 336 с. 4. *Anisimov V.V., Artalejo J.R.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182. 5. *В.И. Клименок* Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1. – С. 25-30. 6. *А.Н. Дудин, В.И. Клименок* Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – № 2. – С. 25–31. 7. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами. – М.: Наука, 1983. – 232 с.

Надійшла до редколегії 10.10 2008

УДК 517.9

С.М. Чуйко

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Стаття присвячена дослідженню проблеми знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків нелінійних нетерових крайових задач для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Одержано конструктивні умови існування розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для систем диференціальних рівнянь з перемиканнями та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Запропоновано збіжні ітераційні алгоритми побудови розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для систем імпульсних диференціальних рівнянь.

The abstract is devoted to the problem of finding constructive conditions for existence and construction solutions of non-linear boundary-value problems for the systems of differential equations with impulse influence. The constructive conditions for the existence of solutions Noetherian semi-nonlinear boundary-value problem for the semi-nonlinear system of the differential equations with switching and impulse influence have been proved. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the Noetherian semi-nonlinear boundary-value problems for the impulse differential equations have been proposed.

Досліджено задачу про знаходження умов існування і побудову розв'язків [1 – 5]

$$z(\cdot,\varepsilon)\in C^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}\}_I,\ \ z(t,\cdot)\in C[o,\varepsilon_0]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями

$$dz/dt = A_i(t)z + f_i(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon),\ t\neq\tau_i,\ i=1,2,\ \dots,\ p, \qquad \mathbf{(1)}$$

які задовольняють крайову умову

$$Lz(\bullet,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\bullet,\varepsilon),\varepsilon),\ \ \alpha\in R^m \qquad (2)$$

і при $\varepsilon = 0$ перетворюються на розв'язки породжуючої задачі

$$dz_0/dt = A_i(t)z_0 + f_i(t),\ t\neq\tau_i,\ i=1,2,\ \dots,\ p\ ,\ \ Lz_0(\bullet) = \alpha. \qquad (3)$$

Тут $A_i(t)$ – неперервна за винятком точок τ_i матриця (в точках τ_i матриця $A_i(t)$, можливо, зазнає розриви першого роду), $Lz(\cdot,\varepsilon)$ – лінійний векторний функционал вигляду

$$Lz(\bullet,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i z(\bullet,\varepsilon),$$

де $\ell_i z(\cdot,\varepsilon)$: $C[\tau_i,\tau_{i+1}[\ \to R^m$, $f_i(t)$ – неперервна, за винятком точок τ_i вектор-функція (в точках τ_i функція $f_i(t)$, можливо, зазнає розриви першого роду). Нелінійна вектор-функція $Z(z,t,\varepsilon)$ неперервно-диференційовна по першому аргументу в малому околі розв'язку породжуючої задачі, непрерервна по другому аргументу на відрізку $[a,b]$ за винятком точок τ_i та неперервно-диференційовна по третьому аргументу на відрізку $[o,\varepsilon_0]$. Нелінійний векторний функціонал

$$J(z(\bullet,\varepsilon),\varepsilon): C^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}\}_I \to R^m,\ m \geq n$$

неперевно-диференційовний по першому аргументу (у сенсі Фреше) в малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперевно-диференційовний по другому аргументу в малому додатному околі нуля.

Поставлена задача узагальнює відомі задачі про знаходження умов існування і побудову розв'язків слабконелінійних крайових задач з невиродженим імпульсним впливом [1,2] та впливом типу "interface conditions" [6], а також задачі про знаходження неперервно-диференційовних розв'язків слабко-нелінійних крайових задач [2].

Позначимо $X_0(t)$ – нормальну $(X_0(a)=I_n)$ фундаментальну матрицю однорідної частини системи (3), $Q = [\ell_0 X_0(\cdot), \ell_1 X_0(\cdot), \dots, \ell_p X_0(\cdot)]$ – $(\mathrm{m}\times\mathrm{n(p+1)})$ - вимірну матрицю та її ортопроектор [4] $P_Q = \mathrm{col}\,[P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \dots, P_Q^{(p)}]: R^{n(p+1)} \to N(Q)$ розміром $(\mathrm{n(p+1)}\times\mathrm{n(p+1)})$), а також діагональні блоки цього ортопроектору $P_Q^{(i)} = \ell_i X_0(\cdot)$. Припустимо також, що

$$\max \mathrm{rank}\, P_Q^{(i)} = \ell_i X_0(\cdot) = \mathrm{rank}\, P_Q^{(i_0)},\ \| X_0(\tau_{i_0}+0)P_Q^{(i_0)} \| = p_0.$$

Матрицю [4,5]

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(0)}, & t \in [a,\tau_1[, \\ \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(1)}, & t \in [\tau_1,\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(p)}, & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

назвемо нормованою ($\| X(\tau_{i_0}+0)\| = 1$) фундаментальною матрицею задачі (3).

Лема 1. *За умови $P_Q \neq 0$ однорідна частина ($f_i(t)=0$, $\alpha=0$) задачі (3) має сім'ю розв'язків $z_0(t,c) = X(t)c,\ c \in R^n$.*

Лема 2. *У критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова [4,5]*

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - LK[f(s)](\cdot)\} = 0 \tag{4}$$

і для кожного $c_r \in R^r$ має розв'язок $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f_i(s);\alpha](t)$, де $P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$ – $(m\times m)$ - вимірна матриця-ортопроектор, $P_{Q_d^*}$ – $(d\times m)$ - вимірна матриця-складена з d – лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*}, $r = \max \mathrm{rank}\, X_i(t),\ i = 1, 2, \dots, p,$

$$G[f_i(s);a](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + K[f_i(s)](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + K[f_i(s)](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_0(t)\bar{\gamma}_p + K[f_i(s)](t), & t \in [\tau_p;b[, \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна [3–5] задачі (3), $\mathrm{col}\,(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p) = Q^+\{\alpha - LK[f_i(s)](\cdot)\};$

$$K[f_i(s)](t) = \int_a^t X_0(t)X_0^{-1}(s)f_i(s)ds$$

– оператор Гріна диференціальної системи (3), $X_r(t)$ – $(n\times r)$ - вимірна матриця, складена з r лінійно-незалежних стовпців матриці $X_i(t)$.

Необхідні умови існування розв'язків вихідної задачі (1), (2) визначає наступна лема.

Лема 3. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє зазначеним вище вимогам і має розв'язок z(t,·)∈ C[o,ε₀], який при ε =0 перетворюється на породжуючий* $z_0(t,c_r^*)$ *з константою* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$. *За цих умов випадку вектор* c_r^* *задовольняє рівнянню*

$$F_0(c_r^*) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\bullet,c_r^*),0) - LK[Z(z_0(s,c_r^*),s,0)](\cdot)\} = 0\ . \tag{7}$$

Приклад 1. Умови леми 3 виконуються для задачі

$$dz/dt = \varepsilon\cos^2 z,\ \ t\in[-1;1],\ \ t\neq 0,\ \ Lz(\cdot) = \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{8}$$

де

$$Lz(\cdot,\varepsilon) = \begin{cases} z(-1,\varepsilon) \\ z(-0,\varepsilon) \end{cases},\ \ \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg}\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)\equiv 1,\ t\in[-1;1]$ лінійної частини диференціальної системи (5.12) визначає матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ P_{Q_d^*} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рядки ортопроектора P_Q визначають нормовану фундаментальну матрицю

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & t\in[-1;0[, \\ 0, & t\in[0;1] \end{cases}$$

задачі (5.12). Оскільки $P_{Q^*}\neq 0$, то має місце критичний випадок. Оператор Гріна задачі Коші для лінійної частини диференціального рівняння (5.12) з довільною неоднорідністю $f_i(t)$

$$K\left[f_0(s)\right](t) = \int_{-1}^t f_0(s)\ \ ds,\ t\in[-1,0],\ K\left[f_1(s)\right](t) = 0\int_0^t f_1(s)\ \ ds,\ t\in[0,1]$$

визначає рівність

$$LK[Z(z_0(s,c_r),s,0)](\cdot) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (5.11) у випадку задачі (5.12) $F_0(c_r) := 1+\cos^2 0 = 2$ не має дійсних коренів. Отже, згідно з теоремою 5.3.1 слабконелінійна задача (5.12) не має шуканих розв'язків.

Розв'язок $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі породжуючого $z_0(t,c_r^*)$. Для знаходження збурення $x(t,\varepsilon)\in C^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}, C[0,\varepsilon_0]$ одержуємо крайову задачу

$$dx/dt = A_i(t)x + \varepsilon Z(z_0+x,t,\varepsilon),\ t\neq\tau_i,\ \ Lx(\bullet,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\bullet,c_r^*) + x(\bullet,\varepsilon),\varepsilon).$$

Використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом вектор-функції *Z(z,t,ε)* в малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперервну диференційовність за третім аргументом на відрізку *[o,ε₀]*, одержуємо розвинення

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Тут

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}},\ \ A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}}.$$

Залишок $R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ більш високого порядку малості за x та ε в околі точок $x=0$ й $\varepsilon=0,$ ніж перші три члени розвинення, тому

$$\left.R_1(z,t,\varepsilon)\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0,\ \ \left.\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0,\qquad \left.\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом векторного функціоналу $J(z(\bullet,\varepsilon),\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі та його неперервну диференційовність за другим аргументом на відрізку *[o, ε₀]*, виділяємо лінійні $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ та $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)$ частини цього функціоналу і член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0)=J(z(\cdot,0),0)$ нульового порядку за ε в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$:

$$J(z_0(\bullet,c_r^*)+x(\bullet,\varepsilon),\varepsilon)=J(z_0(\bullet,c_r^*),0)+\ell_1 x(\bullet,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\bullet,c_r^*))+J_1(z_0(\bullet,c_r^*)+x(\bullet,\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ більш високого порядку малості за x і ε в малому околі точок $x=0$ і $\varepsilon=0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\,=\,0}}=0,\quad \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\,=\,0}}=0,\quad \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\,=\,0}}=0.$$

Достатні умови існування шуканих розв'язків вихідної задачі (1), (2) визначає наступна теорема.

Теорема. *Нехай для породжуючої задачі (3), (4) має місце критичний випадок і виконуються умови леми 3. В цьому разі для кожного вектора* $c_r^*\in R^r$ *за умов* $P_{B_0^*}=0$ *та* $F_1(c_r^*)=0$ *крайова задача (1), (2) має принаймні єдиний розв'язок* $z(t,\varepsilon):\ \ z(t,0)\equiv z_0(t,c_r^*)$. *Тут*

$$F_1(c_r^*)=P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_1 G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);J(z_0(\bullet,c_r^*),0)](\cdot)-LK[A_1(s)G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);J(z_0(\bullet,c_r^*),0)](s)](\cdot)\},$$

$$B_0=P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot)-LK[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\}-$$

$(d\times r)-$ *вимірна матриця,* $P_{B_0^*}:R^d\to N(B_0^*)-$ *ортопроектор. Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного для* $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$ *ітераційного процесу* $z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon),\ k=1,2,\ldots,$ *де*

$$x_1(t,\varepsilon)=\varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t);$$

$$x_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_1}+x_2^{(1)}(t,\varepsilon),\ \ x_2^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G[A_1(s)x_1+\varepsilon A_2(z_0);\ \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0)](t),$$

$$c_{r_1}=-B_0^+P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-LK[A_1(s)x_2^{(1)}+\varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*))+R_1(z_0+x_1,s,\varepsilon)](\cdot)\}+P_\rho c_\rho,$$

$$x_{k+2}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_{k+1}}+x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon),\ x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G[A_1(s)x_{k+1}+\varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*))+R_1(z_0+x_k,s,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t),$$

$$c_{r_{k+2}}=-B_0^+P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-LK[A_1(s)x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*))+R_1(z_0(s,c_r^*)+x_k(s,\varepsilon,s,\varepsilon)](\cdot)\}+P_\rho c_\rho,\ldots.$$

Тут $c_\rho(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon^*],\ \ P_\rho-\ \ (r\times\rho)$- матриця, складена з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{B_0}:R^r\to N(B_0)$.

Теорема узагальнює відповідні твердження зі статті [6] на випадок систем із перемиканнями. Актуальність одержаного твердження пов'язана з широким інтересом до так званих гібридних систем [7,8], частинним випадком яких є досліджена задача (1), (2).

Приклад 2. *Умови теореми виконуються для задачі*

$$dz/dt=A_i(t)z+\varepsilon z\ln z,\ \ t\in[-1;1],\ \ t\neq 0,\ \ Lz(\cdot)=\alpha, \tag{9}$$

де

$$A_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[-1;0[,\\ 2t-1, & t\in[0;1]\end{cases},\quad Lz(\cdot,\varepsilon)=\begin{cases}z(-1,\varepsilon)\\ z(+0,\varepsilon)-z(1,\varepsilon)\end{cases},\quad \alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Нормальна фундаментальна матриця

$$X_0(t)=\begin{cases}1, & t\in[-1;0]\\ e^{t^2-t}, & t\in[0;1]\end{cases}$$

лінійної частини диференціальної системи (9) визначає матриці

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q^{+}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ P_Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad P_{Q*}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Рядки ортопроектора P_Q визначають нормовану фундаментальну матрицю

$$X_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[-1;0]\\ e^{t^2-t}, & t\in[0;1]\end{cases}$$

задачі (9). Оскільки $P_{Q^*}\neq 0$, то має місце критичний випадок. Оператор Гріна задачі Коші для лінійної частини диференціального рівняння (9) з довільною неоднорідністю $f_i(t)$ має вигляд

$$K\big[f_0(s)\big](t)=\int_{-1}^{t} f_0(s)\,ds,\quad t\in[-1{,}0],\ K\big[f_1(s)\big](t)=0\int_{t}^{t} f_1(s)\,ds,\quad t\in[0{,}1].$$

Породжуючи задача

$$dz_0/dt=A_i(t)z_0,\quad t\in[-1;1],\quad t\neq 0,\quad Lz_0(\cdot)=\alpha$$

для слабконелінійної крайової задачі (9) роз'язна, оскільки виконується умова (4). Роз'язок породжуючої задачі $z_0(t,c)=X_i(t)c+G[o;\alpha],\quad c\in R^1$ має зображення

$$z_0(t,c)=\begin{cases}1, & t\in[-1;0],\\ ce^{t^2-t}, & t\in[0;1]\end{cases}.$$

Рівняння (7) для задачі (9)

$$F_0(c)=\int_{-1}^{0}1\cdot\ln 1\,ds+\int_0^1 e^{s-s^2}ce^{s^2-s}\ln(ce^{s^2-s})ds=c\ln c-\frac{c}{6}=0$$

не має тривіального розв'язку $c^*=0.$ Єдиний нетривіальний розв'язок $c_1^*=e^{\frac{1}{6}}\approx 1{,}18\,136$ цього рівняння фіксує породжуючий розв'язок

$$z_0(t,c^*)=\begin{cases}1, & t\in[-1;0],\\ c^*\cdot e^{t^2-t}, & t\in[0;1]\end{cases}$$

і визначає похідну

$$A_1(t)=\begin{cases}1, & t\in[-1;0],\\ t^2-t+\dfrac{7}{6}, & t\in[0;1],\end{cases}$$

яка, в свою чергу, приводить до константи $B_0=1$. Оскільки $B_0\neq 0$, то умова (5.20) виконується. Перше наближення до відхилення від породжуючого розв'язку має зображення

$$x_1(t,\varepsilon)=\begin{cases}0, & t\in[-1;0],\\ \varepsilon e^{\frac{1}{6}}e^{t^2-t}\left(\dfrac{t}{6}+\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}\right), & t\in[0;1].\end{cases}$$

Оскільки умова збіжності $F_1(c_r^*)=0$ виконується, то згідно з теоремою, задача (9) має єдиний розв'язок. Друге наближення до відхилення від породжуючого розв'язку зобразимо у вигляді

$$x_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_1}+x_2^{(1)}(t,\varepsilon),\ x_2^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

при цьому

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon)=\begin{cases}0,\ t\in[-1;0],\\ \varepsilon^2\cdot e^{t^2-t}\cdot e^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{1}{18}\cdot t^6-\frac{1}{6}\cdot t^5+\frac{19}{72}\cdot t^4-\frac{1}{4}\cdot t^3+\frac{7}{72}\cdot t^2\right),\ t\in[0;1].\end{cases}$$

Функцію $c_{r_1}(\varepsilon)=B_0^+P_{Q_d^*}LK[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)$ не можна виразити через елементарні функції, але можна знайти чисельно. Таким чином, друге наближення до розв'язку задачі (9)

$$z_2(t,\varepsilon)=e^{t^2-t}\left(e^{\frac{1}{6}}+c_{r_1}(\varepsilon)\right)+x_2^{(1)}(t,\varepsilon),\quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_2^{(2)}(t,\varepsilon)$$

знайдено в явному вигляді з точністю до константи $c_{r_1}(\varepsilon)$. Останню константу можна знайти чисельними методами, наприклад $c_{r_1}(0,1)\approx-0,000\,032\,816,\ c_{r_1}(0,5)\approx-0,000\,820\,389.$ Оцінити величини нев'язок перших трьох наближень до розв'язку крайової задачі (9) можна також з використанням середньоквадратичних нев'язок розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2)

$$\Delta(z_i(\cdot,\varepsilon))=\{\|A(t)x_i(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_i(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-dx_i(t,\varepsilon)/dt\|^2_{C[-1;1]}+$$
$$+\|\ell_1x_i(\cdot)-J(z_0(\cdot,c_r^*)+x_i(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\|^2_{R^1}\}^{\frac{1}{2}},\ i=0,1,2\,.$$

Оскільки $Lz_i(\cdot,\varepsilon)\equiv 0$ за $i=0,1,2$, то середньоквадратичні нев'язки набувають вигляду

$$\Delta(z_i(\cdot,\varepsilon))=\|A(t)x_i(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_i(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-dx_i(t,\varepsilon)/dt\|_{C[-1;1]}\,.$$

Норму скалярної функції $\varphi(t)$ аналогічно [2] вважатимемо рівною $\|\varphi(t)\|=\sup\limits_{[-1;,1]}|\varphi(t)|$. За $\varepsilon=0,1$ знаходимо середньоквадратичні нев'язки перших трьох наближень до розв'язку задачі (9)

$$\Delta(z_0(\cdot,c_r^*))=\sup_{[-1,1]}(\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,\varepsilon))=\varepsilon\cdot\max_{[0;1]}(Z(z_0(t,c_r^*),t,\varepsilon))\approx 0,0196\,893.$$

Аналогічно

$$\Delta(z_1(\cdot,\varepsilon))=\sup_{[-1;1]}(A(t)x_1(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-dx_1(t,\varepsilon)/dt)\approx 0,000\,163\,663\,,$$

$$\Delta(z_2(\cdot,\varepsilon))=\sup_{[-1;1]}(A(t)x_2(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-dx_2(t,\varepsilon)/dt)\approx 4,01\,074\cdot10^{-6}.$$

Для $\varepsilon=0,01$ середньоквадратичні нев'язки перших трьох наближень до розв'язку крайової задачі (9) значно зменшуються

$$\Delta_0(\varepsilon)\approx1,96893\,128\cdot10^{-3},\quad \Delta_1(\varepsilon)\approx1,63\,550\cdot10^{-6},\quad \Delta_2(\varepsilon)\approx4,01\,054\cdot10^{-9}.$$

Послідовне суттєве зменшення середньоквадратичних нев'язок перших трьох наближень свідчить про збіжність ітераційної процедури до розв'язку крайової задачі (9).

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с. 2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV. 317 p. 3. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифферен-циальные уравнения, 2001, – **37**, – № 3. – С. 1132 – 1135. 4. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук (РАН). – 2001. – **379**. – №2. – С. 170 – 172. 5. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – Т 10. – № 1, С. 51 – 65. 6. *Чуйко О.С.* Слабконелінійні крайові задачі з імпульсним впливом загального вигляду // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – № 5, – 2004. С. 51 – 52. 7. *Van der Schaft A., Schumaher H.* An introduction to hybrid systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences. № 251. Berlin, 2000. 7.Myshkis A.D. On the relation between systems with switching and hybrid systems // Funct. Differ. Equ. – 2004. – № 11. – P. 467 – 473.

УДК 681.3.06

О.С. Шкільняк, асист.

СЕМАНТИЧНІ АСПЕКТИ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ І ТЕМПОРАЛЬНИХ ЛОГІК

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем вивчаються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки. Пропонується спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи для логік реномінативного та кванторного рівнів. Досліджуються семантичні властивості транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік.

On the basis of integrated intensional-extensional approach to construction of logical and program systems composition nominative modal and temporal logics are studied. A special refinement of the notion of a composition nominative modal system for logics of renominative and quantifier levels is proposed. Semantic properties of composition nominative transitional and temporal logics are investigated.

Розвиток інформаційних технологій в наш час веде до всебічного розширення сфери застосування математичної логіки. Апарат математичної логіки засвідчує високу ефективність при розв'язанні різноманітних задач моделювання та програмування. Це робить актуальною проблему побудови нових логічних формалізмів, орієнтованих на потреби моделювання різноманітних предметних областей та специфікації програмних систем. Таку побудову природно вести на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу [1]. Його основою є спільний для логіки та програмування композиційно-номінативний підхід [2], розширений принципом інтегрованості інтенсіонального та екстенсіонального аспектів. Застосування інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу дає змогу на єдиній методологічній основі будувати широкий спектр логічних формалізмів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності.

В останні роки для аналізу й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини все більше використовуються модальні та темпоральні логіки. Особливого значення такі логіки набувають у зв'язку зі створенням та розвитком сучасних інформаційних та програмних систем. Апарат модальних та темпоральних логік ефективно використовується для моделювання складних динамічних систем, специфікації програмних систем. На базі темпоральної логіки збудовано низку систем та мов специфікації програм (Temporal Logic, Petri nets, TLA+, TLS, StateCharts, GIL, CSP).

На основі синтезу можливостей композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів та модальних логік запропоновані [3] композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, виділяються КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого – транзиційні КНМЛ. Композиційно-номінативні темпоральні логіки можуть трактуватися як окремий випадок транзиційних КНМЛ.

В пропонованій роботі на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу досліджуються семантичні властивості композиційно-номінативних модальних та темпоральних логік пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів.

Поняття, які не визначаються у статті, тлумачаться в сенсі робіт [2–4].

Композиційно-номінативні модальні системи. Центральним поняттям композиційно-номінативної модальної логіки є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Такі системи описують світи розгляду модальної логіки і є моделями цих світів.

Порівняно із [3, 4], дамо дещо інше визначення композиційно-номінативної модальної системи. Відмінність полягає у тому, що світами (станами світу) будуть алгебраїчні системи. Це проявиться на номінативних рівнях.

Під *композиційно-номінативною модальною системою* у загальному випадку розуміють [3, 4] об'єкт вигляду M = (Cms, Ds, Dns). Тут:

– Cms – композиційна модальна система, яка задає семантичні аспекти світу;

– Ds – дескриптивна система КНМС, яка визначає множину стандартних дескрипцій (формул мови модальної логіки);

– Dns – денотаційна система КНМС, яка визначає значення кожної стандартної дескрипції на семантичній моделі.

Композиційна модальна система уточнюється як об'єкт вигляду Cms = (S, R, Pr, C). Тут:

– S – множина світів (або станів єдиного світу);

– R – множина відношень на станах світу (обмежимося тут відношеннями вигляду $R \subseteq S \times S^n$) ;

– Pr – множина предикатів на даних станів світу;

– C – множина композицій на Pr.

Якщо множина композицій зафіксована, композиційну модальну систему будемо позначати у вигляді (S, R, Pr) і називати *модальною системою*.

Множина композицій КНМС визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями. Обмежимося тут 1-арними базовими модальними композиціями. Кожна така модальна композиція ⌘ кожному предикату $P \in Pr$ ставить у відповідність предикат ⌘(P), значення якого в кожному конкретному стані $\alpha \in S$ визначається значеннями предиката P в певних станах світу таких, що α та ці стани перебувають у певних пов'язаних із ⌘ відношеннях з R.

Композиції КНМС пропозиційного рівня визначаються базовими модальними композиціями та базовими пропозиційними композиціями $\neg$, $\vee$. Композиції $\neg$ та $\vee$ задаються стандартно з урахуванням частковості предикатів.

Для випадку КНМС номінативного рівня множину станів світу S конкретизуємо як множину алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина V-квазіарних еквітонних предикатів вигляду ${}^V\!A_\alpha \to \{T, F\}$.

У цьому випадку $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів на даних станів світу.

Множину $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ трактуємо як множину базових даних світу.

Зауважимо, що в [2, 3] множина станів світу трактується як множина іменних даних вигляду ${}^{V}A$, де A – множина базових даних світу. Множина Pr розглядається як множина V-квазіарних еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}A \to \{T, F\}$.

Номінативний рівень розпадається на низку підрівнів. Детальніше розглянемо тут КНМС реномінативного та кванторного рівнів.

Композиції КНМС реномінативного рівня визначаються базовими модальними композиціями, базовими пропозиційними композиціями $\neg$, $\vee$ і композицією реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

На кванторному рівні додатково з'являються композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$. При цьому дія кванторів на предикат в стані світу обмежена базовими даними цього стану. Композиції квантифікації задаються стандартно з урахуванням частковості предикатів.

Вибираючи ті чи інші базові модальні композиції та пов'язані з ними відношення з R, можна отримати [3, 4] відповідні різновидності КНМС.

Наприклад, узявши загальні модальні композиції $\Box$ (необхідно) і $\diamond$ (можливо) та множину R з єдиного бінарного відношення, отримуємо загальні (алетичні) КНМС.

КНМС із модальними композиціями $\Box_{\uparrow}$ (завжди буде), $\Box_{\downarrow}$ (завжди було), $\diamond_{\uparrow}$ (колись буде) і $\diamond_{\downarrow}$ (колись було) природно назвати темпоральними КНМС.

Пропозиційні КНМС. Для КНМС пропозиційного рівня множину станів світу S можна конкретизувати як множину абстрактних алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A, Pr_{\alpha})$, де Pr_{α} – множина абстрактних предикатів вигляду $A \to \{T, F\}$. Множина Pr – це множина $\bigcup_{\alpha \in S} Pr_{\alpha}$.

Мова пропозиційної модальної логіки описується [4] наступним чином.

Алфавіт мови складається з множини Ps предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$ та множини Ms символів базових модальних композицій.

Множину Ms назвемо *модальною сигнатурою* КНМС.

Множину Fpm формул мови пропозиційної модальної логіки визначимо індуктивно:

1) кожний $P \in Ps$ є формулою; такі формули називають *атомарними*;

2) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формули;

3) нехай Φ – формула, $\text{⌘} \in Ms$; тоді $\text{⌘}\Phi$ – формула.

Для уточнення Dns задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I : Ps \times S \to Pr$.

Символи $\neg$, $\vee$ та символи базових модальних композицій інтерпретуються як відповідні композиції.

Відображення I продовжимо до відображення $Jm : Fpm \times S \to Pr$:

1) $Jm(P, \alpha) = I(P, \alpha)$ для кожного $P \in Ps$;

2) $Jm(\neg\Phi, \alpha) = \neg\,(Jm(\Phi, \alpha))$;

3) $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

4) для формул вигляду $\text{⌘}\Phi$ для кожного $a \in A$ значення $Jm(\text{⌘}\Phi, \alpha)(a)$ визначається значеннями $Jm(\Phi, \delta)(a)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з R.

Таким чином, поняття КНМС пропозиційного рівня можна уточнити як об'єкт вигляду

$$M = ((S, R, Pr, C), Fpm, Jm).$$

Тип пропозиційної КНМС визначається її модальною сигнатурою й однотипністю відношень із R для кожного символу базової модальної композиції.

Можна вважати, що пропозиційні КНМС одного типу мають однакову множину Fpm.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

Формула Φ істинна в пропозиційній КНМС M, якщо для довільних $\alpha \in S$ та $a \in A$ маємо $\Phi_{\alpha}(a) \cong T$. Цей факт позначаємо $M \models \Phi$.

Формула Φ усюди істинна, якщо $M \models \Phi$ для всіх КНМС M одного типу.

Те, що формула Φ усюди істинна, позначаємо $\models \Phi$

Значення $\Phi_{\alpha}(a)$ в пропозиційній КНМС визначається значеннями $\Psi_{\alpha}(a)$ для підформул Ψ формули Φ чи значеннями $\Phi_{\beta}(a)$ для деяких станів β. Визначальним є те, що при цьому використовується один і той же елемент $a \in A$. Істинність формули Φ в пропозиційній КНМС означає однаковість значень $\Phi_{\alpha}(a)$ для довільних $a \in A$.

Таким чином, можна обмежитись розглядом пропозиційних КНМС, у яких стани світу – це абстрактні алгебраїчні системи з 1-елементним носієм. Відповідним чином уточнюються множини Pr_{α} та Pr. Це, в свою чергу, дозволяє трактувати стани світу як абстрактні елементи і задавати відображення інтерпретації атомарних формул у вигляді $I_v : Ps \times S \to \{T, F\}$, тобто за допомогою істиннісних оцінок, як це робиться в традиційних модальних логіках пропозиційного рівня. Відображення $I_v : Ps \times S \to \{T, F\}$ тоді продовжується до відображення $J_v : Fpm \times S \to \{T, F\}$:

1) $J_v(P, \alpha) = J_v(P, \alpha)$ для кожного $P \in Ps$;

2) $J_v(\neg\Phi, \alpha) = \neg(J_v(\Phi, \alpha))$;

3) $J_v(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(J_v(\Phi, \alpha), J_v(\Psi, \alpha))$;

4) для формул вигляду $\text{⌘}\Phi$ значення $J_v(\text{⌘}\Phi, \alpha)$ визначається значеннями $J_v(\Phi, \delta)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з R.

Формула Φ істинна в пропозиційній КНМС M, якщо для всіх $\alpha \in S$ маємо $J_v(\Phi, \alpha) = T$.

КНМС кванторного та реномінативного рівнів. Уточнимо поняття КНМС на *кванторному* рівні.

Мова КНМЛ кванторного рівня описується [4] наступним чином.

Алфавіт мови складається з множини *V* предметних імен, множини *Ps* предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ і множини *Ms* символів базових модальних композицій.

Множина *Fm* формул мови КНМЛ кванторного рівня визначається індуктивно:

1) кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

2) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формули;

3) нехай Φ – формула; тоді $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ (Φ) – формула;

4) нехай Φ – формула; тод $\exists x\Phi$ – формула;

5) нехай Φ – формула, $⌘ \in Ms$; тоді $⌘\Phi$ – формула.

Для кожного $p \in Ps$ визначається множина його синтетично неістотних предметних імен за допомогою тотального відображення $\mu : Ps \rightarrow 2^V$. Таке відображення продовжується до $\mu : Fm \rightarrow 2^V$ (див. [4]).

Пару $\sigma = (Ps, \mu)$ називають сигнатурою синтетичної неістотності кванторної КНМС.

Символи модальних композицій утворюють модальну сигнатуру кванторної КНМС.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою, однотипністю відношень із *R* для кожного символу базової модальної композиції та сигнатурою синтетичної неістотності.

Для уточнення *Dns* задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I: Ps \times S \rightarrow Pr$. При цьому $I(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Символи $\neg$, $\vee$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ та символи базових модальних композицій інтерпретуються як відповідні композиції. Таке *I* продовжимо до $Jm : Fm \times S \rightarrow Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$. Маємо:

1) $Jm(p, \alpha) = I(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $Jm(\neg\Phi, \alpha) = \neg\,(Jm(\Phi, \alpha))$;

3) $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee\,(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

4) $Jm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi, \alpha) = R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,(Jm(\Phi, \alpha))$;

5) Для формул вигляду $\exists x\Phi$ маємо:

$$Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси для формул вигляду $\forall x\Phi$ отримуємо:

$$Jm(\forall x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

6) Для формул вигляду $⌘\Phi$ значення $Jm(⌘\Phi, \alpha)(d)$ визначається значеннями $Jm(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із $⌘$ відношеннях з *R*.

Таким чином, поняття КНМС кванторного рівня можна уточнити як об'єкт вигляду

$$M = ((S, R, Pr, C), Fm, Jm).$$

Формула Φ істинна в стані α, якщо Φ_α – істинний предикат. Це позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ істинна в КНМС *M*, якщо для довільних $\alpha \in S$ предикат Φ_α – істинний.

Формула Φ усюди істинна, якщо $M \models \Phi$ для всіх КНМС *M* одного типу.

Те, що формула Φ усюди істинна, позначаємо $\models \Phi$

Уточнимо поняття КНМС на *реномінативному* рівні.

Алфавіт мови КНМЛ реномінативного рівня складається з множини *V* предметних імен, множини *Ps* предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ і множини *Ms* символів базових модальних композицій. Множина *Fm* формул мови такої логіки визначається індуктивно (див. пп. 1–3 і 5 визначення мови КНМЛ кванторного рівня).

Для реномінативних КНМС для кожного $p \in Ps$ за допомогою тотального відображення $\mu : Ps \rightarrow 2^V$ визначається множина його синтетично неістотних предметних імен. Така функція продовжується до функції $\mu : Fm \rightarrow 2^V$ так, як це описано для кванторного рівня, з тою лише відмінністю, що відсутній пункт для формул вигляду. $x\tilde{\Phi}$ Відображення інтерпретації $I : Ps \times S \rightarrow Pr$ продовжується до $Jm : Fm \times S \rightarrow Pr$ так, як і для кванторного рівня (див. пп. 1–4, 6).

Поняття істинної в КНМС формули та всюди істинної формули для випадку КНМС реномінативного рівня аналогічні відповідним визначенням для КНМС кванторного рівня.

Транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. Важливим випадком КНМС є *транзиційні модальні системи* (ТМС) [3, 4]. Вони лежать в основі транзиційних модальних логік. У межах транзиційних модальних логік можуть розглядатися і традиційні модальні логіки.

Для ТМС множина *R* відношень на станах світу складається з відношень вигляду $R \subseteq S \times S$, які природно назвати *відношеннями переходу*.

Для ТМС звичайно виділяємо певний $\alpha_0 \in S$, який називаємо *початковим станом*.

Якщо *R* складається з єдиного бінарного відношення, яке позначатимемо $\triangleright$, то таку ТМС називають *стандартною*.

Стандартні ТМС із базовими модальними композиціями $\Box$ і $\Diamond$ називають *загальними* ТМС.

Уточнимо відображення інтерпретації Jm стосовно формул вигляду $\Box\Phi$ та $\Diamond\Phi$для загальних ТМС.

Для кожних $\alpha\in S$ та $d\in {}^{V}A_\alpha$ визначимо:

$$Jm(\Box\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Jm(\Diamond\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha\rhd\beta$, то для кожного $d\in {}^{V}A_\alpha$ вважаємо $Jm(\Box\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ та $Jm(\Diamond\Phi,\alpha)(d)\uparrow$.

Введені поняття можуть бути конкретизовані на різних рівнях абстракції. Зокрема, отримуємо стандартні ТМС та загальні ТМС пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів.

Для загальних ТМС пропозиційного рівня можна трактувати стани світу як абстрактні елементи і задавати відображення інтерпретації атомарних формул у вигляді $I_V: Ps\times S \to\{T, F\}$. У цьому випадку відображення інтерпретації $J_V: Fpm\times S\to\{T, F\}$ стосовно формул вигляду $\Box\Phi$ та $\Diamond\Phi$ задамо так.

$$J_V(\Box\Phi,\alpha) = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$J_V(\Diamond\Phi,\alpha) = \begin{cases} F, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Стандартні ТМС кванторного рівня будемо також скорочено записувати у вигляді $M = (S, R, A, I)$, де $A=\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ – множина базових даних світу.

Стандартні ТМС пропозиційного рівня скорочено записуватимемо у вигляді $M = (S, R, I)$.

Як і в традиційних атлетичних модальних логіках, композиції $\Box$ і $\Diamond$ пов'язані такими співвідношеннями: $\neg\Diamond P = \Box\neg P$ та $\neg\Box P = \Diamond\neg P$.

Отже, для випадку загальних ТМС можна обмежитись єдиною базовою модальною композицією, наприклад, $\Box$. Тоді $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

Теорема 1. *Для довільних* Φ, α *та* $d\in {}^{V}A_\alpha$ *виконується* $R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi(d) = \Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi(d)$.

В цьому формулюванні рівність розуміємо як строгу. Розглянемо всі можливі випадки.

Нехай $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = F$. Тоді $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v\mapsto d(x)) = F$, звідки для деякого стану $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$. Але із $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = T$ випливає, що для такого β необхідно $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\beta(d) = T$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = T$. Отримали суперечність. Із $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$ випливає, що для кожного γ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)\gamma(d) = \Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$, звідки неможливо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$. Знову суперечність.

Нехай $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = F$. Тоді для деякого стану $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\beta(d) = F$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$. Але із $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ випливає, що $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v\mapsto d(x)) = T$, тому для такого β необхідно $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = T$. Маємо суперечність. Із $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$ випливає $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$, тому для кожного γ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $\Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$, звідки неможливо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$. Знову суперечність. Таким чином, отримуємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = F \Leftrightarrow (\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = F$.

Нехай $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = T$. Якщо $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, то для кожного γ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\gamma(d) = F$, причому $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\beta(d)\uparrow$ хоч для одного β такого, що $\alpha\rhd\beta$, звідки для такого β маємо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$. Але із $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ маємо $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla v\mapsto d(x)) = T$, тому для такого β мусить бути $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = T$. Маємо суперечність.

Неможливість $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ та $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = F$ була показана раніше.

Нехай $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = T$. Якщо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, то $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$, тому для кожного γ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $\Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x)) = F$, причому $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$ хоч для одного β такого, що $\alpha\rhd\beta$. Але із $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\alpha(d) = T$ для такого β маємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_\beta(d) = T$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x)) = T$. Маємо суперечність.

Неможливість $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi)_\alpha(d) = T$ та $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi)_\alpha(d) = F$ вже показана раніше.

Таким чином, $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow (\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi)_\alpha(d) = T$. Отже, ми отримали $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi)_\alpha(d) = (\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi)_\alpha(d)$.

Наслідок 1. *Для довільних* Φ, α *та* $d\in{}^VA_\alpha$ *виконується* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi(d) = \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi(d)$.

Наслідок 2. *Для довільних* α *та* Φ *виконується* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ *та* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$.

Наслідок 3. *Для довільних* α *та* Φ *маємо* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ *та* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$.

Маємо $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Box\leftrightarrow\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$. Але $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi$ означає: для кожного $d\in{}^VA_\alpha$ якщо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi)_\alpha(d)\downarrow$, то $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi)_\alpha(d) = T$; $\alpha \models\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ означає: для кожного $d\in{}^VA_\alpha$ якщо $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi)_\alpha(d)\downarrow$, то $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi)_\alpha(d) = T$. Отже, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi \Leftrightarrow \alpha \models\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$. Аналогічно доводимо $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$.

Наслідок 4. *Для довільної загальної ТМС M маємо*: $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ *та* $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi \leftrightarrow\Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$.

Наслідок 5. *Формули* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ *та* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Diamond\Phi \leftrightarrow\Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$ *усюди істинні.*

Таким чином, можна проносити символи реномінації через символи модальних композицій, що за умови нескінченності множини тотально неістотних імен дає змогу перетворити формулу до класичноподібного вигляду, коли символи реномінації застосовні тільки до символів базових предикатів.

Теорема 2. *Для довільної загальної ТМС M маємо*: $M \models\Box\forall x\Phi\rightarrow\forall x\Box\Phi$.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in S$ та $d\in{}^VA_\alpha$ маємо $(\Box\forall x\Phi)_\alpha(d) = T$ та $(\forall x\Box\Phi)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що для деякого $a\in A_\alpha$ маємо $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla x\mapsto a) = F$, тому для деякого стану $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a) = F$. Із визначеності $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a)$ випливає $d\nabla x\mapsto a\in{}^VA_\beta$, звідки $a\in A_\beta$. Але із $(\Box\forall x\Phi)_\alpha(d) = T$ випливає, що згідно $\alpha\rhd\beta$ для стану β маємо $(\forall x\Phi)_\beta(d) = T$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto b) = T$ для всіх $b\in A_\beta$. Позаяк $a\in A_\beta$, це вірно і для a, тому $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a) = T$. Отримали суперечність.

Наслідок 1. *Формула* $\Box\forall x\Phi\rightarrow\forall x\Box\Phi$ *усюди істинна.*

Наслідок 2. *Формула* $\exists x\Diamond\Phi\rightarrow\Diamond\exists x\Phi$ *усюди істинна.*

Теорема 3. *Для довільної загальної ТМС M маємо*: $M \models \exists x\Box\Phi\rightarrow\Box\exists x\Phi$.

Доведення теореми 3 проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Формула вигляду $\Box\forall x\Phi\rightarrow\forall x\Box\Phi$ – це конверсія відомої [5] формули Баркан $\forall x\Box\Phi\rightarrow\Box\forall x\Phi$. Таким чином, конверсія формули Баркан істинна в кожній загальній КМС. У той же час відомо, що вона спростовується на деяких реляційних моделях алетичної модальної логіки [5]. Проте суперечності тут немає, адже ми розглядаємо *часткові* предикати. При $d\notin{}^VA_\beta$ ми вважаємо значення $\Phi_\beta(d)$ невизначеним, а в реляційній моделі традиційної алетичної модальної логіки таке значення вважається хибним.

Приклад 1. Формула Баркан $\forall x\Box\Phi\rightarrow\Box\forall x\Phi$ не є всюди істинною.

Формула $\forall x\Box\Phi\rightarrow\Box\forall x\Phi$ спростовується в такій загальній ТМС. Нехай $S = \{\alpha, \beta\}$, де $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{a, b\}$. Нехай $R = \{\alpha\rhd\beta\}$. Візьмемо ПС p, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a]) = T$, $p_\beta([x\mapsto a]) = T$, $p_\beta([x\mapsto b]) = F$. $(\forall x\, p)_\beta([x\mapsto a]) = F$, звідки $(\Box\forall x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$. Згідно $R = \{\alpha\rhd\beta\}$ із $p_\beta([x\mapsto a]) = T$ випливає $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$. Позаяк $A_\alpha = \{a\}$, звідси отримуємо $(\forall x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$. Отже, $(\forall x\Box p\rightarrow\Box\forall x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, звідки $\alpha \not\models\forall x\Box p\rightarrow\Box\forall xp$.

Звідси як наслідок отримуємо: формула $\Diamond\exists x\Phi\rightarrow\exists x\Diamond\Phi$ не є усюди істинною.

Приклад 2. Формула $\Box\exists x\Phi\rightarrow\exists x\Box\Phi$ не є всюди істинною.

Формула $\Box\exists x\Phi\rightarrow\exists x\Box\Phi$ спростовується в такій загальній ТМС. Нехай $S = \{\alpha, \beta\}$, де $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{a, b\}$. Нехай $R = \{\alpha\rhd\beta\}$. Візьмемо ПС p, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a]) = F$, $p_\beta([x\mapsto a]) = F$, $p_\beta([x\mapsto b]) = T$. Тоді $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, звідки $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$ згідно $A_\alpha = \{a\}$. Але згідно $p_\beta([x\mapsto b]) = T$ маємо $(\exists x\, p)_\beta([x\mapsto a]) = T$, звідки $(\Box\exists x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$. Отже, $(\Box\exists x\, p\rightarrow\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, тому $\alpha \not\models(\Box\exists x\, p\rightarrow\exists x\Box p$.

Залежно від умов, які накладаються на $\rhd$, можна визначати різні типи загальних ТМС. Розглянемо тут випадки, коли відношення $\rhd$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним.

Якщо відношення $\rhd$ рефлексивне, то в назві ТМС пишемо символ *R*; якщо відношення $\rhd$ транзитивне, то в назві ТМС пишемо символ *T*; якщо $\rhd$ симетричне, то в назві ТМС пишемо символ *S*. Таким чином, отримуємо системи: *R*-ТМС, *T*-ТМС, *S*-ТМС, *RT*-ТМС, *RS*-ТМС, *TS*-ТМС, *RTS*-ТМС.

Зауважимо, що *R*-ТМС подібні до класичної *T*-модельної структури, *RS*-ТМС – до *B*-модельної структури, *RT*-ТМС – до *S*4-модельної структури, *RTS*-ТМС – до *S*5-модельної структури.

Темпоральні композиційно-номінативні модальні логіки. Розглянемо тепер окремий, дуже важливий випадок транзиційних модальних логік –темпоральні, або часові модальні логіки.

СТМС із базовими модальними композиціями $\Box_\uparrow$ (завжди буде), $\Box_\downarrow$ (завжди було), $\Diamond_\uparrow$ (колись буде) і $\Diamond_\downarrow$ (колись було) називають темпоральними КНМС.

Композиції $\Box_\uparrow$, $\Box_\downarrow$, $\Diamond_\uparrow$, $\Diamond_\downarrow$ називають базовими часовими композиціями. Вони пов'язані такими самими співвідношеннями, як і у випадку традиційної темпоральної логіки:

$$\neg\Diamond_\uparrow P = \Box_\uparrow\neg P; \qquad \neg\Diamond_\downarrow P = \Box_\downarrow\neg P;$$

$\neg\Box_{\uparrow}P = \Diamond_{\uparrow}\neg P$; $\qquad\qquad \neg\Box_{\downarrow}P = \Diamond_{\downarrow}\neg P$.

Таким чином, для темпоральних КНМС можна вважати базовими часові композиції $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$. Тоді композиції $\Diamond_{\uparrow}$ та $\Diamond_{\downarrow}$ є похідними часовими композиціями. Як і для випадку традиційної темпоральної логіки, вони визначаються через базові так: $\Diamond_{\uparrow}P$ означає $\neg\Box_{\uparrow}\neg P$, $\Diamond_{\downarrow}P$ означає $\neg\Box_{\downarrow}\neg P$.

Для темпоральних КНМС відображення інтерпретації Jm стосовно формул вигляду $\Box_{\uparrow}\Phi$, $\Box_{\downarrow}\Phi$, $\Diamond_{\uparrow}\Phi$, $\Diamond_{\downarrow}\Phi$ уточнимо наступним чином. Для кожних $\alpha\in S$ та $d\in{}^{V}A_{\alpha}$ визначимо:

$$Jm(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Jm(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta \rhd \alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Jm(\Diamond_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Jm(\Diamond_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta \rhd \alpha, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta \rhd \alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Конкретизуючи введені поняття на різних рівнях абстракції, отримуємо темпоральні КНМС пропозиційного, реномінативного й кванторного рівнів.

Для темпоральних КНМС пропозиційного рівня при трактуванні станів світу як абстрактних елементів задамо відображення інтерпретації атомарних формул у вигляді $I_V: Ps\times S \to\{T, F\}$. У цьому випадку відображення $J_V: Fpm\times S \to\{T, F\}$ стосовно формул вигляду $\Box_{\uparrow}\Phi$, $\Box_{\downarrow}\Phi$, $\Diamond_{\uparrow}\Phi$, $\Diamond_{\downarrow}\Phi$ задамо так.

$$J_V(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha) = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$J_V(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha) = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta \rhd \alpha \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$J_V(\Diamond_{\uparrow}\Phi,\alpha) = \begin{cases} F, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$J_V(\Diamond_{\downarrow}\Phi,\alpha) = \begin{cases} F, \text{ якщо } J_V(\Phi,\delta) = F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta \rhd \alpha, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta \rhd \alpha \text{ та } J_V(\Phi,\delta) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для випадку темпоральних КНМС справджуються відповідним чином переформульвані твердження наведених вище теорем для загальних ТМС. Зокрема, аналогом теореми 1 є

Теорема 4. *Для випадку темпоральних КНМС для довільних* Φ, α *та* $d\in{}^{V}A_{\alpha}$ *виконується* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\uparrow}\Phi(d) = \Box_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi(d)$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\downarrow}\Phi(d) = \Box_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi(d)$.

Наслідок 1. *Для випадку темпоральних КНМС для довільних* Φ, α *та* $d\in{}^{V}A_{\alpha}$ *виконується* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\uparrow}\Phi(d) = \Diamond_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi(d)$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\downarrow}\Phi(d) = \Diamond_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi(d)$.

Наслідок 2. *Для випадку темпоральних КНМС для довільних* α *та* Φ *маємо* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Diamond_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$ та $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Diamond_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$.

Наслідок 3. *Для випадку темпоральних КНМС для довільних* α *та* Φ *маємо*: $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\uparrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$, $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Diamond_{\downarrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi$.

Наслідок 4. *Для довільної темпоральної КНМС M маємо*: $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $M \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$.

Наслідок 5. *Формули* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\downarrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\uparrow} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$ *усюди істинні.*

Аналогічним чином переформульовуються твердження теорем 2 і 3, відповідні наслідки і приклади.

Як і для випадку загальних ТМС, залежно від властивостей відношення $\triangleright$ отримуємо відповідні класи темпоральних КНМС.

Якщо відношення $\triangleright$ рефлексивне, то в назві темпоральної КНМС пишемо символ *R*; якщо відношення $\triangleright$ транзитивне, то в назві темпоральної КНМС пишемо символ *T*; якщо $\triangleright$ симетричне, то пишемо *S*. Таким чином, отримуємо системи *R*-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Висновки. В роботі на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем розглянуто композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки. Запропоновано спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи для логік реномінативного та кванторного рівнів. Досліджено семантичні властивості транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік. Пропоновані логіки є потужним апаратом для адекватного опису й моделювання предметних областей, ефективним засобом специфікації програмних систем.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем – Пробл. рограмування. – 2007, № 2. 2. *Никитченко Н.С.* Предикатные композиционно–номинативные системы // Пробл. программирования. – 1999. – № 2. 3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки. – Пробл. программирования. – 2002, № 1–2. 4. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Основи математичної логіки. – К., 2006. 5. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М., 1981.

Н а у к о в е   в и д а н н я

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 9

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

**Підписано до друку 16.04.10. Формат 60x84$^{1/8}$. Вид. № 251. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 5,33. Зам. № 29-5088.**

**Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; (38044) 239 31 58; факс (38044) 239 31 28
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua**