

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для студентів, науковців, аспірантів, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики, студентів старших курсів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.

It's considered for teachers, scientific collaborators, aspirants and post-graduate students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	О.К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. АПН України
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); А.В. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А. Белов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.Б. Буй, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.; С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; І.М. Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України; В.Н.Редько, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.І. Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.А. Номіровський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 15.10.07 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

Антосяк П. Локалізація інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів у задачі знаходження медіани Кемені-Снелла	4
Волошин О., Присяжнюк О. Процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів критеріїв для нечітких моделей вибору в задачах споживання ..	7
Гарашенко Ф., І. Хітько Критерії практичної стійкості лінійних динамічних систем з імпульсною дією	10
Джалладова І. Побудова функцій Ляпунова для систем різницевих рівнянь	15
Івохін Є. Про оптимізацію побудови лінійних систем порівняння	22
Козоріз В., Кузьмич О. Моделювання та аналіз мімічних виразів емоцій обличчя людини	30
Крак Ю., Бармак О., Єфімов Г. Інформаційна технологія розпізнавання емоційної міміки на обличчі людини	37
Куценко І. Стійка процедура інтерполяційної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці	42
Ляшко С., Стеля О. Оптимізація дренажу підтоплених територій	45
Хусаїнов Д., Діблік Й., Ружичкова М., Кузьмич О. Отримання оцінок збіжності збурень розв'язків звичайних диференціальних рівнянь методом функцій Ляпунова	49
Шатирко А. До структурно схематичного підходу в моделюванні динамічних систем	55
Швець О. Інтераційні схеми апроксимації сигналів у випадку нарощування системи базисних функцій	59

CONTENTS

Antosyak P.

Localization of intervals of change in optimal ranges of objects
in tasks of finding the median of Kemeni-Shella4

Voloshin O., Prisyazhnyuk O.

Localization procedure of weight coefficients vector in criterions for illegible selection models in tasks of consumption7

Garaschenko F., Hitko I.

Practical stability criterions of linear dynamical systems with impulse operation10

Dzhalladova I.

Construction of Lyapunov function for systems
of difference equations15

Ivoxin E.

On optimization of construction linear comparison systems22

Kozoriz V, Kuzmich O.

Stability estimation in accelerating systems of free charge30

Kruch U., Barmack O., Efimov G.

Modeling and analyzing peoples mimicry emotions expressions on one's face37

Kutsenko I.

Stable procedure of interpolation many-derivate spline-function on chaotic grid42

Lyashko S., Stelya O.

Optimization of drainage in submerge territory45

Khusainov D., Diblik J., Ruzickova M., Kuzmich O.

Perturbation convergence estimates construction of solutions in ordinary differential equations
by method of Lyapunov functions49

Shatyrla A.

On the structural schematic approach in modeling of dynamical system55

Shvets O.

Iterative schemas in approximation of signals in case of accumulation the basis function systems59

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ІНТЕРВАЛІВ ЗМІНИ ОПТИМАЛЬНИХ РАНГІВ ОБ'ЄКТІВ У ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ МЕДІАНИ КЕМЕНІ-СНЕЛЛА

У роботі сформульовано і обґрунтовано необхідні умови оптимальності для задачі знаходження медіани Кемени-Снелла. Запропоновано процедури локалізації інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів, на основі яких розроблено алгоритм скорочення множини допустимих варіантів. Приводяться результати експериментальних досліджень.

In the given research the necessary optimum conditions for the sum on finding Kemeni-Snell's median are formulated and reasoned out. On the basis of procedures of localizing intervals of the change of optimum rang of objects the algorithm of shortening the plurality of possible variants is created. The results of experimental researches are given.

Вступ

Для задачі колективного вибору цікавим є питання наступного змісту: яке "максимально" ("мінімально") можливе місце може посісти об'єкт в колективному порядку, побудованому за тим чи іншим правилом? До цього наштовхує і той цікавий факт [1], що переможець (найгірший) за Кондорсе (якщо останній існує) не може бути найгіршим (переможцем) за правилом Борда. Або іншими словами: переможець (найгірший) за Кондорсе посідає місце в колективному порядку, побудованому за правилом Борда, не нижче за передостаннє (не вище за друге).

Постановка задачі

Нехай на фіксованій множині об'єктів $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ експертами, нормовані коефіцієнти компетентності α_l , $l \in L = \{1, \dots, m\}$ яких відомі, задані матриці строгих попарних порівнянь P^l , $l \in L$. Елементи $p_{ij}^l \in \{-1, 1\}$ матриць P^l – це результат порівняння l -им експертом об'єктів o_i та o_j , $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$: $p_{ij}^l = 1$, якщо на думку l -го експерта об'єкт o_i кращий за o_j , інакше $p_{ij}^l = -1$.

Розглянемо задачу знаходження медіани Кемени-Снелла в наступній постановці [2]:

$$(i_1^*, \dots, i_n^*) \in KS \cong \underset{(i_1, \dots, i_n) \in \Omega}{\text{Arg max}} \{F(i_1, \dots, i_n)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k i_j}, \quad (1)$$

де $a_{i_k i_j} = \sum_{l \in L} \alpha_l p_{i_k i_j}^l$; Ω – множина всіх можливих перестановок множини індексів I ; $(i_1, \dots, i_n)$ – елемент множини

Ω (варіант задачі (1)).

Теоретичні результати

Теорема (Необхідні умови оптимальності задачі (1)). Для кожного оптимального варіанту $(i_1^*, \dots, i_n^*)$ задачі (1) для $\forall t, h \in I$, $t < h$, виконуються наступні нерівності:

$$\sum_{j=t+1}^h a_{i_t^* i_j^*} \geq 0, \quad (2)$$

$$\sum_{j=t}^{h-1} a_{i_h^* i_j^*} \leq 0. \quad (3)$$

Доведення. Нехай $(i_1^*, \dots, i_n^*)$ довільний оптимальний варіант задачі (1). Спочатку покажемо справедливість умови (2). Виберемо довільні індекси $t, h \in I$, $t \neq h$. Для визначеності, не обмежуючи загальності, покладемо $t < h$ і розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} & F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_t^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_h^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) - F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_t^*, i_h^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) = \\ &= \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} + \sum_{j=t+1}^{h-1} a_{i_t^* i_j^*} + a_{i_t^* i_h^*} + \sum_{j=h+1}^n a_{i_t^* i_j^*} + \sum_{k=t+1}^{h-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} + \sum_{j=h+1}^n a_{i_h^* i_j^*} + \sum_{k=h+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} - \\ & - \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} - \sum_{k=t+1}^{h-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} - \sum_{k=t+1}^{h-1} a_{i_k^* i_t^*} - a_{i_h^* i_t^*} - \\ & - \sum_{k=t+1}^{h-1} \sum_{j=h+1}^n a_{i_k^* i_j^*} - \sum_{j=h+1}^n a_{i_h^* i_j^*} - \sum_{j=h+1}^n a_{i_t^* i_j^*} - \sum_{k=h+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n a_{i_k^* i_j^*} = \\ &= a_{i_t^* i_h^*} + \sum_{j=t+1}^{h-1} a_{i_t^* i_j^*} - \sum_{k=t+1}^{h-1} a_{i_k^* i_t^*} - a_{i_h^* i_t^*} = 2 \sum_{j=t+1}^h a_{i_t^* i_j^*}. \end{aligned} \quad (4)$$

Із оптимальності варіанта $(i_1^*, \dots, i_n^*)$ та виразу (4) отримуємо правильність співвідношення (2).

Якщо ж розглянути варіант $(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_h^*, i_t^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*)$, то за аналогією з (4) із рівності:

$$F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_t^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_h^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) - F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_h^*, i_t^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) = -2 \sum_{j=t}^{h-1} a_{i_h i_j}^{**}$$

отримуємо (3). Теорему доведено.

Зауваження 1. Слід відмітити, що виконання умов (2), (3) дає можливість не розглядати варіанти вигляду $(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_h^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_t^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*)$ для $\forall t, h \in I, t < h$. Дійсно, розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} & F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_t^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_h^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) - F(i_1^*, \dots, i_{t-1}^*, i_h^*, i_{t+1}^*, \dots, i_{h-1}^*, i_t^*, i_{h+1}^*, \dots, i_n^*) = \\ & = \sum_{j=t+1}^{h-1} a_{i_t i_j}^{**} + a_{i_t i_h}^{**} - \sum_{j=t+1}^{h-1} a_{i_h i_j}^{**} - a_{i_h i_t}^{**} = \sum_{j=t+1}^h a_{i_t i_j}^{**} + (-\sum_{j=t}^{h-1} a_{i_h i_j}^{**}) \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Справедливість (5) забезпечує невід'ємність обох доданків у (5) – в силу виконання відповідно умов (2) і (3).

Процедури локалізації інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів.

Означення 1. Для $\forall R \leq r, R, r \in I$ множину $\{R, R+1, \dots, r-1, r\}$ назовемо інтервалом $[R, r]$ зміни рангів.

Зауваження 2. Для інтервалів зміни рангів справедливими залишаються всі поняття та позначення теорії множин. Виберемо довільний об'єкт з індексом $i \in I$.

Означення 2. Ранг $r_i \in I$ назовемо оптимальним рангом i -го об'єкта, якщо існує оптимальний варіант $(i_1^*, i_2^*, \dots, i_{r_i-1}^*, i_{r_i}^* = i, i_{r_i+1}^*, \dots, i_{n-1}^*, i_n^*) \in KS$.

Множину всіх оптимальних рангів i -го об'єкта позначимо через $\mathfrak{R}_i$.

Нехай

$$r_i^* = \arg \max_{j \in \mathfrak{R}_i} j, \quad R_i^* = \arg \min_{j \in \mathfrak{R}_i} j,$$

відповідно, мінімальний та максимальний оптимальні ранги i -го об'єкта.

Означення 3. Інтервал зміни рангів $[R_i^*, r_i^*]$ назовемо інтервалом зміни оптимальних рангів i -го об'єкта.

Під локалізацією інтервалу зміни оптимальних рангів i -го об'єкта будемо розуміти процедуру побудови такого інтервалу $[R_i^{(k_i^{loc})}, r_i^{(k_i^{loc})}]$, що

$$I \supseteq \dots \supseteq [R_i^{(k_i^{loc}-1)}, r_i^{(k_i^{loc}-1)}] = [R_i^{(k_i^{loc})}, r_i^{(k_i^{loc})}] \supseteq [R_i^*, r_i^*].$$

На кожному k_i -му ($k_i \geq 1$) кроці процедури локалізації інтервалу зміни оптимальних рангів i -го об'єкта будемо розглядати питання про можливість $R_i^{(k_i-1)} \in \mathfrak{R}_i$ та $r_i^{(k_i-1)} \in \mathfrak{R}_i$.

Нехай $V_{i(n-1)}^q$ ($1 \leq q \leq n-1$) – множина всіх можливих розміщень без повторень множини індексів $I \setminus \{i\}$ із $(n-1)$ -го елемента по q . Елемент множини $V_{i(n-1)}^q$ будемо записувати $(i_1, \dots, i_q)$.

Нехай extr – це $\max$ або $\min$. Позначимо

$$S_{iq}^{(k_i)} = \underset{(i_1, \dots, i_q) \in DV_{iq}^{(k_i)}}{\text{extr}} \sum_{j=1}^q a_{ii_j}, \quad (6)$$

де $DV_{iq}^{(k_i)} = \{(i_1, \dots, i_q) \mid (R_i^{(k_i-1)} + j) \in DI_{ijq}^{(k_i)}, j = \overline{1, q}\}, \quad DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [R_i^{(k_i-1)} + 1, R_i^{(k_i-1)} + q],$ для

$\forall j \in I \setminus \{i\}$, якщо (6) – задача на максимум. Інакше $DV_{iq}^{(k_i)} = \{(i_1, \dots, i_q) \mid (r_i^{(k_i-1)} - j) \in DI_{ijq}^{(k_i)}, j = \overline{1, q}\},$

$DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [r_i^{(k_i-1)} - q, r_i^{(k_i-1)} - 1],$ для $\forall j \in I \setminus \{i\}$.

Зауваження 3. Всі викладки та обґрунтування будемо здійснювати для задачі на максимум, оскільки для відповідної задачі на мінімум все робиться аналогічно. Надалі довільний елемент множини $V_{i(n-1)}^q$ будемо називати варіантом задачі (6). Варіант $(i_1, \dots, i_q) \in DV_{iq}^{(k_i)}$ назовемо допустимим варіантом задачі (6). Допустимий варіант, який є розв'язком (6) будемо називати оптимальним варіантом задачі (6).

Твердження 1 (Достатні умови локалізації).

I. Для задачі (6) на максимум. Якщо $S_{iq}^{(k_i)} < 0$ хоча б для одного $q \in \{1, r_i^{(k_i-1)} - R_i^{(k_i-1)}\}$, то $R_i^{(k_i-1)} \notin \mathfrak{R}_i$.

II. Для задачі (6) на мінімум. Якщо $S_{iq}^{(k_i)} > 0$ хоча б для одного $q \in \{1, r_i^{(k_i-1)} - R_i^{(k_i-1)}\}$, то $r_i^{(k_i-1)} \notin \mathfrak{R}_i$.

Доведення. Нехай для деякого (але довільного) $q^* \in \{1, r_i^{(k_i-1)} - R_i^{(k_i-1)}\}$ виконується $S_{iq^*}^{(k_i)} < 0$. Припустимо протилежне. Нехай $R_i^{(k_i-1)} \in \mathfrak{R}_i$. Це означає, що існує оптимальний варіант $(i_1^*, \dots, i_{R_i^{(k_i-1)}}^* = i, \dots, i_n^*) \in KS$ задачі (1).

Розглянемо варіант $(i_1, \dots, i_q) \in V_{i(n-1)}^q$ задачі (6), де $i_j = i_{R_i^{(k_i-1)+j}}^*$, $j = \overline{1, q^*}$. Із оптимальності варіанту $(i_1^*, \dots, i_n^*) \in KS$ впливає оптимальність рангу $R_i^{(k_i-1)} + j$ для всякого об'єкту з індексом $i_{R_i^{(k_i-1)+j}}^* = i_j$, $j = \overline{1, q^*}$. Тоді $(R_i^{(k_i-1)} + j) \in [R_{i_j}^*, r_{i_j}^*] \subseteq [R_{i_j}^{(k_{i_j})}, r_{i_j}^{(k_{i_j})}]$, $j = \overline{1, q^*}$, а, отже, $(R_i^{(k_i-1)} + j) \in DI_{ii_j q}^{(k_i)}$, $j = \overline{1, q^*}$. Таким чином, $(i_{R_i^{(k_i-1)+1}}^*, \dots, i_{R_i^{(k_i-1)+q^*}}^*) \in DV_{iq^*}^{(k_i)}$.

Для оптимального варіанту $(i_1^*, \dots, i_n^*) \in KS$ виконуються необхідні умови оптимальності (2), (3) задачі (1) і, зокрема, наступні:

$$\sum_{j=R_i^{(k_i-1)+1}}^{R_i^{(k_i-1)+q^*}} a_{ii_j}^* \geq 0. \quad (7)$$

Але (7) суперечить умові $S_{iq^*}^{(k_i)} < 0$. Отримано протиріччя. Аналогічно доводиться друга частина. Твердження доведено.

Набір індексів $\{i_1^o, \dots, i_h^o\}$, $1 \leq h \leq q$, $i_j^o \neq i_t^o$ для $j \neq t$ назовемо оптимальним для задачі (6), якщо існує такий оптимальний варіант $(i_1^*, \dots, i_q^*)$ задачі (6), що

$$\forall 1 \leq j \leq h \exists 1 \leq t_j \leq q: i_j^o \neq i_{t_j}^*. \quad (8)$$

Беручи до уваги це визначення, маємо. Якщо $i_1^o = \arg \text{extr}_{j \in I \setminus \{i\}} a_{ij}$ та $DI_{ii_1 q}^{(k_i)} \neq \emptyset$, то набір $\{i_1^o\}$ є оптимальним для задачі (6). Нехай $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o\}$, $1 < h \leq q$, – оптимальний набір для задачі (6), і нехай $i_h^o = \arg \text{extr}_{j \in I \setminus \{i, i_1^o, \dots, i_{h-1}^o\}} a_{ij}$ та

$DI_{ii_h q}^{(k_i)} \neq \emptyset$. Покладемо

$$DI_{ii_h q}^{(k_i)} \not\subset \bigcup_{j=1}^{h-1} DI_{ii_j q}^{(k_i)}. \quad (9)$$

У цьому випадку $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o, i_h^o\}$ також є оптимальним набором для задачі (6).

Дійсно. Із оптимальності набору $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o\}$ впливає існування оптимального варіанту $(i_1^*, \dots, i_q^*)$ задачі (6), для якого виконується (8). Із правила вибору індексу i_h^o впливає, що $i_j^o \neq i_h^o$, для $\forall 1 \leq j \leq h-1$, а, отже, для набору $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o, i_h^o\}$ також виконується $i_j^o \neq i_t^o$, для $\forall j \neq t$. Залишається показати існування такого індексу t_h , що $i_h^o = i_{t_h}^*$. Правило вибору індексу i_h^o , умова (9) та оптимальність варіанту $(i_1^*, \dots, i_q^*)$ забезпечують для

$\forall j \in DI_{ii_h q}^{(k_i)} \setminus \bigcup_{j=1}^{h-1} DI_{ii_j q}^{(k_i)}$ рівність $a_{ii_h^o} = a_{ii_j}^*$, що гарантує оптимальність варіанту $(i_1^*, \dots, i_{h-1}^*, i_h^o, i_{t_h+1}^*, \dots, i_q^*)$, для $\forall t_h \in DI_{ii_h q}^{(k_i)} \setminus \bigcup_{j=1}^{h-1} DI_{ii_j q}^{(k_i)}$. Таким чином, в якості t_h можна вибрати довільний індекс із $DI_{ii_h q}^{(k_i)} \setminus \bigcup_{j=1}^{h-1} DI_{ii_j q}^{(k_i)}$.

Для оптимальності $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o, i_h^o\}$ необхідно, щоб $\bigcup_{j=1}^{h-1} DI_{ii_j q}^{(k_i)} \geq h$ (це впливає із структури множини допустимих варіантів). Більше того. Із визначення оптимального набору впливає, що оптимальним буде також довільний набір $\{i_{h_1}^o, \dots, i_{h_g}^o\}$ такий, що $\{i_{h_1}^o, \dots, i_{h_g}^o\} \subset \{i_1^o, \dots, i_h^o\}$. Отже, для оптимальності $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o, i_h^o\}$ необхідно, щоб для

$\forall \{i_{h_1}^o, \dots, i_{h_g}^o\} \subset \{i_1^o, \dots, i_h^o\}$ виконувалось $\bigcup_{j=1}^g DI_{ii_{h_j} q}^{(k_i)} \geq g$. У цьому випадку, зокрема, якщо

$$|\{j \mid DI_{ii_j q}^{(k_i)} \subseteq DI_{ii_{h_g} q}^{(k_i)}, j \in \{1, \dots, h-1\}\}| = |DI_{ii_{h_g} q}^{(k_i)}|,$$

то набір індексів $\{i_1^o, \dots, i_{h-1}^o, i_h^o\}$ не може бути оптимальним.

Розглянемо простішу задачу.

$$S_{iq}^{(k_i)} = \text{extr}_{(i_1, \dots, i_q) \in DV_{iq}^{(k_i)}} \sum_{j=1}^q a_{ii_j}, \quad (10)$$

де $DI_{iq}^{(k_i)} = \{(i_1, \dots, i_q) \mid DI_{iiq}^{(k_j)} \neq \emptyset, j = \overline{1, q}\}$ та $DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [R_i^{(k_i-1)} + 1, R_i^{(k_i-1)} + q]$, для $\forall j \in I \setminus \{i\}$, якщо (6) – задача на максимум, інакше $DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [r_i^{(k_i-1)} - q, r_i^{(k_i-1)} - 1]$, для $\forall j \in I \setminus \{i\}$.

Для задачі (10) також залишається справедливим твердження (2) і, на відміну від попередньої задачі, для неї вже буде розв'язком набір $\{i_1^o, \dots, i_q^o\}$, де $i_j^o = \arg \max_{j \in I \setminus \{i_1^o, \dots, i_{j-1}^o\}} a_{ij}$ та $DI_{iiq}^{(k_j)} \neq \emptyset, j = \overline{1, q}$.

Враховуючи означення інтервалу зміни рангів, умова $DI_{ijq}^{(k_i)} \neq \emptyset, j \in I \setminus \{i\}$ (для задачі (10) на максимум) еквівалентна виконанню нерівності $(R_i^{(k_i-1)} + 1) \leq R_j^{(k_j)} \leq (R_i^{(k_i-1)} + q)$ або $(R_i^{(k_i-1)} + 1) \leq r_j^{(k_j)} \leq (R_i^{(k_i-1)} + q)$, і в цьому випадку маємо

$$DI_{ijq}^{(k_i)} = [\max\{R_j^{(k_j)}, R_i^{(k_i-1)} + 1\}, \min\{r_j^{(k_j)}, R_i^{(k_i-1)} + q\}].$$

Якщо $DI_{ijq}^{(k_i)} = \emptyset, j \in I \setminus \{i\}$, то за визначенням покладемо $|DI_{ijq}^{(k_i)}| = 0$, інакше потужність $DI_{ijq}^{(k_i)}$ рівна:

$$|DI_{ijq}^{(k_i)}| = \min\{r_j^{(k_j)}, R_i^{(k_i-1)} + q\} - \max\{R_j^{(k_j)}, R_i^{(k_i-1)} + 1\} + 1.$$

Очевидно також, що $DI_{ihq}^{(k_i)} \subseteq DI_{itq}^{(k_i)}, h \neq t, h, t \in I \setminus \{i\}$ еквівалентно виконанню системи нерівностей:

$$\begin{cases} \max\{R_h^{(k_h)}, R_i^{(k_i-1)} + 1\} \geq \max\{R_t^{(k_t)}, R_i^{(k_i-1)} + 1\}, \\ \min\{r_h^{(k_h)}, R_i^{(k_i-1)} + q\} \leq \min\{r_t^{(k_t)}, R_i^{(k_i-1)} + q\}. \end{cases}$$

Обчислювальний експеримент

В обчислювальному експерименті розв'язувались задачі із кількістю об'єктів від 3 до 500 (кількість можливих варіантів для задачі розмірності n становить $n!$). Кількість груп експертів змінювалась від 3 до 5, а кількість експертів у відповідних групах від 1 до 10. Всі експерти вважалися рівно компетентними. Вхідні дані генерувалися випадковим чином – за допомогою датчика псевдо випадкових чисел. В експерименті було розв'язано 100 тестових задач. Враховуючи високу ступінь неузгодженості думок експертів при таких вхідних даних, в середньому множину можливих варіантів було скорочено на 14%, максимально – на 25%, а мінімально на 10%. Тринадцять задач було розв'язано.

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 304 с. 2. Антосяк П.П. До правил голосування Кондорсе і Борда. // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 4. – С. 50–55. Надійшла до редколегії 31.01.2008

УДК 519.62

О. Волошин, д-р техн. наук, проф.
О. Присяжнюк, канд. техн. наук, доц.

ПРОЦЕДУРИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ВЕКТОРА ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ КРИТЕРІЇВ ДЛЯ НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ ВИБОРУ В ЗАДАЧАХ СПОЖИВАННЯ

Розглянуто процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів критеріїв, що базуються на представленні функції корисності адитивною згортою і є адаптованими до нечіткої моделі вибору.

The author analyzes the localization procedures of the vector of weighting criteria coefficients which are based on presenting the function of value by additive reduction adapted to fuzzy models of choice.

Вступ

Типовою задачею в теорії споживання традиційно вважається [1] задача побудови (визначення, відновлення) функції корисності споживача, яка визначає його переваги відносно певного набору товарів. При цьому розглядаються, як правило, „навчальні” вибірки, тобто векторні набори товарів $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, кожна компонента яких є кількістю одиниць відповідних товарів, n – їх кількість. Ціни товарів та бюджетні обмеження вважаються заданими.

Вибір споживача характеризується відношенням переваги R , тобто про кожні два набори товарів він може вказати наявність (або ступінь) переваги або ж їх рівноцінність. Вважається, що свій вибір споживач здійснює у відповідності з власною функцією корисності $U(x)$, значення якої на навчальній вибірці $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідає індивідуальній оцінці користувача для цього набору. Задача споживача полягає у виборі такого споживачького набору, що максимізуватиме його функцію корисності при заданому бюджетному обмеженні:

$$\begin{cases} U(x) \rightarrow \max, \\ px \leq I, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

де p – вектор цін, I – дохід споживача.

Проблема оцінки об'єктів в рамках теорії корисності зводиться до проблеми аксіоматичного обґрунтування та побудови функції корисності споживача. Класичні методи, що застосовуються для визначення функції корисності, яка представляє бінарне відношення переваг R ($U(x^1) \geq U(x^2) \Leftrightarrow x^1 R x^2$ для $\forall x^1, x^2 \in X$), в загальному випадку є досить обтяжливими. Підставою для їх застосування, зокрема, є достатні умови існування функції корисності, які задаються, наприклад, теоремою Дебре [1]: відношення переваги повинно бути повним, транзитивним та неперервним, множина рішень – зв'язною. Якщо умови теореми Дебре не виконуються і не існує функції корисності, яка б представляла відношення R , застосування класичних методів обмежене. Тому пропонується такий підхід до розв'язування

сформульованої задачі: при оцінці об'єктів експерт (свідомо чи підсвідомо) має на увазі його векторну оцінку. Пропонується процедура формалізації проблеми шляхом заміни «векторної оцінки корисності» адитивною згортокою і тоді задача зводиться до локалізації вагових коефіцієнтів цієї згортки.

Постановка задачі

Нехай на множині товарів $X \subseteq R_+^n$ розглядається скінчений набір споживчих товарів (навчальна вибірка). Вважаються заданими ціни товарів та бюджетне обмеження на сумарну вартість одиниць товарів у виборці. Нехай $\bar{X}$ – множина навчальних вибірок, x^j , $j \in J$, де J – множина індексів вибірок, сформована в рамках бюджетних обмежень. Кожна вибірка $x^j \in X$, $j \in J$, характеризується своїм розподілом одиниць для кожного товару $x^j = (x^{j_1}, \dots, x^{j_i}, \dots, x^{j_n})$. Множину індексів вибірки позначимо I , $I = \{1, \dots, n\}$. Кожній вибірці $x^j \in X$, $j \in J$, ставиться у відповідність її векторна оцінка у просторі товарів Ω^n .

У подальшому розглядаємо не саму множину значень одиниць товарів $x^j \in X$, $j \in J$, а відповідну їй множину $\omega(x^{j_i})$, $i \in I$, $j \in J$, де ω – деяке монотонне перетворення, що визначає ступінь відхилення кількісних характеристик товарів у нормалізованому виді в інтервалі $[0, 1]$.

Нехай споживач (експерт) послідовно задає свої переваги на множині $\bar{X}$ у вигляді нечіткого бінарного відношення R .

Якщо розглядати «векторну» функцію корисності у вигляді нечіткої адитивної згортки, то задача зводиться до уточнення вагових коефіцієнтів згортки (1)–(2):

$$x^1 R x^2 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^1) \leq \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^2), \quad x^1, x^2 \in X, \quad (1)$$

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n), \quad i \in I, \quad \rho_i > 0, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1, \quad (2)$$

де (2) – нормований вектор відносної важливості параметрів об'єктів для твердження експерта про відношення нечіткої переваги між об'єктами.

Таким чином, задача полягає в локалізації вагових коефіцієнтів згортки (1)–(2). Подібна задача розглядалась в [2], в цій статті пропонується узагальнення методу для нечітких моделей вибору в задачах споживання.

Процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів. Основою процедур є гіпотеза про «ідеальну точку», яка відображає «ідеальну вибірку» у просторі товарів (вектор переваг в просторі переваг), цілісний «образ» якої має споживач. Припускається, що при порівнянні навчальних вибірок споживач порівнює саме їх ступінь наближення в деякій метриці до «ідеальної» вибірки з оптимальним розподілом товарів.

Нехай особа, що приймає рішення (ОПР), вважає, що вибірка x^1 є більш переважною, ніж вибірка x^2 , а μ – ступінь переваги, $\mu \in [0, 1]$. Позначимо це через $\mu_{\succ}(x^1, x^2)$. Тоді $1 - \mu_{\succ}(x^1, x^2)$ задає ступінь переваги вибірки x^2 над x^1 . Введемо евристику: будемо вважати, що із суб'єктивного судження споживача про перевагу вибірки x^1 над вибіркою x^2 випливає справедливості нерівності (1). Тоді у випадку нечіткого відношення переваги $\mu_{\succ}(x^1, x^2)$ між вибірками x^1 і x^2 будемо вважати справедливим:

$$\mu_{\succ}(x^1, x^2) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \rho_i \frac{\omega(x^{j_i})}{\mu} \leq \sum_{i \in I} \rho_i \frac{\omega(x^{j_i})}{1 - \mu}. \quad (3)$$

Необхідно побудувати на основі відношень переваг, які постійно уточнюються ОПР, інтервали припустимих значень вагових коефіцієнтів параметрів об'єктів (гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів – ГВК) у вигляді:

$$\rho \in K = \prod_{i \in I} [\rho_i^H, \rho_i^B], \quad \rho = (\rho_i, i \in I), \quad 0 < \rho_i^H \leq \rho_i^B < 1, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1, \rho_i > 0, i \in I. \quad (5)$$

Вважається, що при заданні переваг ОПР послідовна в своїх судженнях, зокрема, задає відношення переваг між вибірками, які задовольняють властивості транзитивності. Оскільки попарне порівняння вибірок відбувається за допомогою адитивної згортки (1) і ГВК в результаті процедури покроково звужується ($K^{s+1} \subseteq K^s$, $s = 1, 2, \dots$), то транзитивність відношення зберігається.

Для перетворення всіх значень одиниць товарів $x^{j_i} \in X$, $i \in I$, $j \in J$, до нормалізованого виду в інтервалі $[0, 1]$ застосуємо формулу [3]:

$$\omega(x^{j_i}) = \frac{x_i^{\text{opt}} - x_i^{j_i}}{x_i^{\text{opt}} - x_i^0}, \quad (6)$$

де $x_i^j \in X$, $i \in I$, $j \in J$; $x_i^{\text{opt}} \in X$, $i \in I$, – найбільш бажана кількість одиниць i -го товару на множині можливих вибірок; $x_i^0 \in X$, $i \in I$, – найменш бажана кількість одиниць i -го товару на множині можливих вибірок. Вважатимемо, що x^{opt} та x^0 можуть бути заданими безпосередньо ОПР на множині навчальних вибірок.

З урахуванням (6) узагальнений критерій, що відображає сумарне відхилення $x^j \in X$, $j \in J$, від оптимальних значень запишеться як

$$D(x^j, x^{\text{opt}}) = \sum_{i \in I} \rho_i \omega(x^{j_i}) = \sum_{i \in I} \rho_i \frac{x_i^{\text{opt}} - x_i^{j_i}}{x_i^{\text{opt}} - x_i^0}, \quad j \in J.$$

Остання формула є метрикою наближення вектора $x^j \in X$, $j \in J$, який подає розподіл товарів в j -й вибірці до деякого ідеального (оптимального) вектору розподілу товарів $x^{opt} = (x^{opt}_1, x^{opt}_2, \dots, x^{opt}_n)$, зважених у просторі товарів. Формула (3) для нечіткого відношення переваги між вибірками $\mu_{\omega}(x^1, x^2)$ запишеться у вигляді:

$$\frac{D(x^1, x^{opt})}{D(x^2, x^{opt})} = \frac{\sum_{i \in I} \rho_i \omega(x^1_i)}{\sum_{i \in I} \rho_i \omega(x^2_i)} \leq \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Останню нерівність можна інтерпретувати таким чином: твердження «вбірка x^1 є більш переважною, ніж вибірка x^2 , з степенем переваги μ » означає, що у просторі товарів Ω^n точка, яка відповідає вибірці x^1 , знаходиться ближче до ідеальної точки, ніж точка, що відповідає x^2 зі степенем $\frac{\mu}{1 - \mu}$.

Означення 1. Вибірki $x^1 \in X$ та $x^2 \in X$ називаються рівноцінними, якщо у «зваженому» просторі товарів Ω^n відповідні їм точки знаходяться на однаковій відстані від точки, яка відповідає ідеальній вибірці.

Означення 2. Вибірka $x^2 \in X$ називається μ -рівноцінною вибірці $x^1 \in X$, якщо у «зваженому» просторі товарів Ω^n точки

$$\omega(a^2) \frac{\mu}{1 - \mu} = \left\{ \omega(a^2_1) \frac{\mu}{1 - \mu}, \omega(a^2_2) \frac{\mu}{1 - \mu}, \dots, \omega(a^2_n) \frac{\mu}{1 - \mu} \right\} \text{ та } \omega(a^1) \text{ рівноцінні.}$$

Процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів (2) зводяться до двох підпроцедур: підпроцедуру уточнення інтервалів вагових коефіцієнтів (4) та підпроцедуру відсіювання з початкової множини навчальних вибірок «неперспективних» вибірок. Підпроцедури базуються відповідно на твердженнях 1 та 2, наведених нижче.

Твердження 1. Вектор переваг, що відповідає μ -рівноцінним вибіркам в просторі переваг R^n , відділяє границі інтервалів зміни вагових коефіцієнтів товарів.

Доведення. Позначимо множини індексів, що відповідають товарам з навчальних вибірок $x^1 \in X$ та $x^2 \in X$ через $I_1 = (i : \omega(x^1_i) > \omega(x^2_i)) \neq \emptyset$, $I_2 = (i : \omega(x^1_i) \leq \omega(x^2_i)) \neq \emptyset$, $i \in I = I_1 \cup I_2$. Нерівність (2) можна переписати з урахуванням уточнення множин індексів таким чином:

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^1_i) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^1_i) \leq \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^2_i) + \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^2_i) \quad (7)$$

Тоді умова μ -рівноцінності вибірок x^1 і x^2 запишеться як

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^1_i) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^1_i) = \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^2_i) + \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(x^2_i) \quad (8)$$

Перейти від (7) до (8) можна, збільшивши вагові коефіцієнти товарів, що належать до множини індексів I_1 та, відповідно, зменшивши вагові коефіцієнти товарів, що належать до множини індексів I_2 . Таким чином, вагові коефіцієнти товарів ρ_i , $i \in I_1$, досягнуть своїх верхніх меж, а вагові коефіцієнти товарів ρ_i , $i \in I_2$, відповідно, своїх нижніх меж.

Оскільки $\omega(x^1_i)$, $\omega(x^2_i)$, $i \in I$, є фіксованими величинами, а $\rho_i^s \in K^s$, то отриману рівність можна записати як

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(x^1_i) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(x^1_i) = \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(x^2_i) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(x^2_i). \quad (9)$$

Узагальнюючи (9) на випадок μ -рівноцінності вибірок x^1 і x^2 , отримаємо

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(x^1_i) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(x^1_i) = \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(x^2_i) + \frac{\mu}{1 - \mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(x^2_i), \quad (10)$$

де $\rho_i^{(s)B}$, $\rho_i^{(s)H}$, $i \in I$, – відповідно верхня та нижня межі i -го інтервалу вагових коефіцієнтів на s -му кроці алгоритму. Рівність (10) еквівалентна рівності (8).

Таким чином, ГВК на $s+1$ кроці стане рівним

$$K^{s+1} = \prod_{i \in I_1} [\rho_i^{(s)H}, \rho_i^{(s+1)B}] \times \prod_{i \in I_2} [\rho_i^{(s+1)H}, \rho_i^{(s)B}]. \quad (11)$$

Рівняння (9) доводить справедливості твердження 1: знайдені застосуванням даного методу вагові коефіцієнти дійсно визначають межі ГВК.

Оскільки відомо лише факт переваги ОПР, заданий у формі (3), то для визначення компонент вектора $\rho = (\rho_i, i \in I)$, зробимо припущення про справедливості к нерівностей вигляду:

$$\rho_i \omega(x^1_i) + \rho_j \omega(x^1_j) \leq \frac{\mu}{1 - \mu} (\rho_i \omega(x^2_i) + \rho_j \omega(x^2_j)), \quad (12)$$

де $k = k_1 \cdot k_2$; k_1 – кількість товарів з індексами i , $i \in I_1$; k_2 – кількість товарів з індексами j , $j \in I_2$.

Очевидно, що виконання системи нерівностей (12) є достатньою умовою для виконання нерівності (7).

Перейдемо в системі рівнянь (12) до рівностей та виключимо k - $n-1$ рівність за правилом: на кожному кроці виключається рівність, яка максимізує вираз:

$$\max((\omega(a^1_i) - \omega(a^2_i)), i \in I_1, \omega(a^2_j) - \omega(a^1_j), j \in I_2).$$

Остання умова означає, що відкидаються рівності, які створюють невиправдано великі прирости ваги одних товарів за рахунок інших.

Додамо в систему $n-1$ нерівностей вигляду (12) в якості n -го рівняння умову нормування вагових коефіцієнтів (5), перейдемо від них до рівностей та, зробивши відповідні перетворення, остаточно отримаємо систему з n рівнянь виду:

$$\rho_i (\omega(a^1_i) - \frac{\mu}{1-\mu} \omega(a^2_i)) - \rho_j (\frac{\mu}{1-\mu} \omega(a^2_j) - (\omega(a^1_j))) = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1, \rho_i > 0, i \in I.$$

З системи рівнянь (13) однозначно визначаються компоненти вектора вагових коефіцієнтів $\rho = (\rho_i, i \in I)$, який за твердженням 1, обмежує у векторному просторі R^n інтервали вагових коефіцієнтів товарів навчальної вибірки.

З урахуванням описаного, очевидна справедливність наступного твердження.

Твердження 2. Умовою відсіювання вибірок $\omega^j, j \in J$, з множини X_s є неналежність ГВК вектора, який проходить через початок координат та точку $\omega(x^j)$, $x^j \in X_s, j \in J$, тобто $\rho(\omega(x^j)) \notin K(s+1)$. Вектор вагових коефіцієнтів визначається за формулою, наведеною в [3]:

$$\rho = \rho(\omega(x^j)) = \{\rho_i : \rho_i = \prod_{\substack{t \in I \\ t \neq i}} \omega(x^j_t) / \sum_{\substack{q \in I \\ l \neq q}} \prod_{l \in I} \omega(x^j_l)\}.$$

Процедура локалізації вектора вагових коефіцієнтів зводиться до наступної людино-машинної процедури.

Крок 1. Виділення скінченної множини навчальних вибірок $\bar{X}$ на нескінченній множині споживчих товарів. Початковий гіперкуб вважається одиничним.

Крок 2. Вибір ОПР двох вибірок x^1 та x^2 з множини навчальних вибірок $\bar{X}$ в ГВК K^s , $s=1,2,\dots$ (крок звуження ГВК) з фіксацією факту переваги або еквівалентності.

Крок 3. Побудова рівнянь виду (13). Знаходження розв'язку системи рівнянь.

Крок 4. Уточнення границь ГВК за формулою (11). Якщо гіперкуб $K^{(s+1)}$ задовольняє ОПР, то закінчення процедури. Інакше перехід до наступного кроку.

Крок 5. Виділення множини «перспективних» вибірок $X^{(s+1)}$ ($X^{(s+1)} \subseteq X^{(s)}$) в ГВК K^{s+1} та представлення їх ОПР для вибору чергових двох вибірок з указуванням відношення переваги між ними.

Крок 6. Приєднання вибірок, вказаних експертом на попередньому кроці до множини розглянутих, та дослідження на отриманій множині умови транзитивності. Якщо транзитивність не порушується, то збільшення номеру ітерації $s=s+1$ та перехід до кроку 2. Якщо ж транзитивність порушується, то виключення цих вибірок з множини розглянутих та перехід на крок 6.

Ітераційний процес завершується, коли експерта задовольняють знайдені інтервали зміни вагових коефіцієнтів товарів.

Запропоновані процедури не потребують повної матриці попарних порівнянь навчальних вибірок та дозволяють на множині нечітких бінарних відношень відновити функцію корисності споживача. Окрім того, відображення вектора вагових коефіцієнтів у вигляді інтервалів дозволяє адекватно відображати рівень невизначеності в нечітких моделях вибору.

1. Пономаренко О.І. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. – К.: Наукова думка, 1994. – 242 с. 2. Присяжнюк Е.В. Процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів для нечітких моделей вибору // Proceeding of the XIIIth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution". – 2007. – Varna, Bulgaria. – P. 579-584. 3. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем. – К.: Наукова думка, 1993. – 312 с.

Надійшла до редколегії 31.01.2008

УДК 517.925.51

Ф. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.,
І. Хітько, канд. фіз.-мат. наук.

КРИТЕРІЇ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

*Розглядаються задачі практичної стійкості лінійних імпульсних систем.
Practical stability problems of linear dynamic system with impulse effects are considered.*

Вступ

Останнім часом спостерігається значне підвищення інтересу до вивчення систем з розривними траєкторіями. Це зумовлено тим, що імпульсні системи керування та імпульсні обчислювальні пристрої посіли досить значне місце в сучасній техніці. Імпульсні системи виникають в багатьох задачах природознавства, при розгляді яких відповідні математичні моделі містять умови, що описують вплив зовнішніх сил імпульсної природи, тривалістю дії яких можна знехтувати.

Якщо на траєкторії системи накладаються фазові обмеження, то доцільно для дослідження таких систем застосовувати методи практичної стійкості [1,2]. Це дозволяє будувати оцінки оптимальних областей стійкості, а також в заданому класі знаходити області чутливості та допусків на параметри в параметричних системах [1,3,4].

Розвиток теорії оптимізації динаміки пучків відбувався завдяки працям Т.Ф. Ананьїної, Б.М. Бублика, Ф.Г. Гаращенко, М.Ф. Кириченка, О.Б. Куржанського, Д.О. Овсяннікова та їх численних учнів. Однак важливі класи задач, в яких досліджуються проблеми оптимізації пучка траєкторій динамічних систем з імпульсною дією та пов'язані з ними питання побудови чисельних алгоритмів залишаються відкритими. В даній роботі досліджуються питання практичної стійкості лінійних динамічних систем з імпульсною дією та побудови оптимальних оцінок множин практичної стійкості розв'язків таких систем.

Постановка задачі

Розглянемо лінійну систему з імпульсною дією:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$$x(t_k + 0) = B_k x(t_k), k = \overline{1, N-1}, \quad (2)$$

де $A(t)$ – неперервна на $[t_0; T]$ матриця розмірності $n \times n$, B_k – постійні неособливі матриці розмірності $n \times n$, $k = \overline{1, N-1}$.

Згідно означення стійкості нульового розв'язку за Ляпуновим, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що як тільки $\|x_0\| < \delta$, відповідна траєкторія не покидає ε -околу фазового простору при $t \geq t_0$. Для аналізу поведінки системи важливо дослідити залежність між δ та ε і встановити допустимий інтервал часу, на якому розв'язки задовольняють умові $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ при $\|x_0\| < \delta$. У такій постановці множина початкових умов і фазові обмеження вибираються у вигляді кульок радіусу δ та ε відповідно. В загальному, важливо перевірити залежність між початковими даними та відповідними розв'язками при фіксованих δ та ε . Таким чином, приходимо до поняття практичної стійкості системи, для якої є важливим й те, що динаміка процесу може розглядатися на скінченному інтервалі часу.

В подальших викладах будемо використовувати наступні позначення: $\text{int}E$ – сукупність внутрішніх точок множини E , ∂E – межа множини E , $S_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| = r\}$, $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$ – відповідно сфера та круг в просторі R^n радіусу r з центром в точці a .

Будемо розглядати множину початкових значень у вигляді еліпсоїда $\{x : x^T B x \leq c^2\}$. Тут B – додатньо визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$.

Означення 1. [1] Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) називається $\{c; B; \Phi_i; t_0; T\}$ – стійким, якщо для будь-якої точки $x_0 = x(t_0) \in \{x : x^T B x \leq c^2\}$ відповідний розв'язок $x(t) \in \Phi_i$ для всіх $t \in [t_0; T]$.

Надалі будемо розглядати фазові обмеження у формі [1,5]:

$$\Gamma_i = \{x : |l_s^T(t)x| \leq 1, s = \overline{1, M}, t \geq t_0, \quad (3)$$

$$\Psi_i = \{x : \psi(x, t) \leq 1, t \geq t_0. \quad (4)$$

Тут $l_s(t)$ – неперервні вектор-функції розмірності n , $M \geq n$, і серед функцій $\{l_s(t)\}_{s=1}^M \in n$ лінійно незалежних, $\psi(x, t)$ – неперервні по t разом зі своїми похідними $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ функції, Ψ_i – обмежена опукла множина, яка містить $x(t) \equiv 0, t \geq t_0$. Надалі у роботі при розгляді фазових обмежень (3), (4) будемо говорити про $\{c; B; \Gamma_i; t_0; T\}$ – стійкість та $\{c; B; \Psi_i; t_0; T\}$ – стійкість відповідно.

Критерії практичної стійкості лінійних динамічних систем з імпульсною дією. Нехай $U(t, t_0)$ – розв'язок матричної задачі Коші $\frac{dU}{dt} = A(t)U, U(t_0, t_0) = E$. Тоді фундаментальна матриця системи (1), (2), нормована за моментом часу t_0 буде мати вигляд [6]:

$$X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) = U(t, t_{k-1}) \times \prod_{j=k-1}^1 B_j U(t_j, t_{j-1}), t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N},$$

а розв'язок системи (1), (2) можна записати у вигляді

$$x(t) = X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})x_0, t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, x(t_0 + 0) = x_0. \quad (5)$$

Введемо позначення

$$Q_k(t) = X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})B^{-1}X_k^T(t, t_0, t_1, \dots, t_{k-1}), t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}.$$

Оскільки B – симетрична матриця, то Q_k теж симетрична.

Критерій 1. Для того щоб нульовий розв'язок системи (1), (2) був $\{c; B; \Gamma_i; t_0; T\}$ – стійким необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{k=1, N} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{s=1, M} [l_s^T(t) Q_k(t) l_s(t)]^{-1}. \quad (6)$$

Доведення. Траєкторія $x(t) \in \Gamma_i$ тоді і тільки тоді, коли [1,7]

$$\max_{x \in \{x : x^T Q_k^{-1}(t)x \leq c^2\}} |l_s^T(t)x| \leq 1, t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, s = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Обчислимо максимум $|l_s^T(t)x|$ використовуючи функцію Лагранжа $L = l_s^T(t)x + \lambda(x^T Q_k^{-1}(t)x - c^2)$. Для цього прирівняємо до нуля частинні похідні від функції Лагранжа по x та λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = l_s(t) + 2\lambda Q_k^{-1}(t)x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T Q_k^{-1}(t)x - c^2 = 0. \quad (8)$$

Розв'язавши одержану систему рівнянь (8), отримаємо:

$$\lambda = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{l_s^T(t) Q_k(t) l_s(t)},$$

$$x = \pm c l_s^{-1}(t) \sqrt{l_s^T(t) Q_k(t) l_s(t)} = \pm \frac{c Q_k(t) l_s(t)}{\sqrt{l_s^T(t) Q_k(t) l_s(t)}}. \quad (9)$$

Підставивши (9) у (7) та провівши відповідні перетворення будемо мати:

$$c^2 \leq \frac{1}{l_s^T(t)Q_k(t)l_s(t)}, t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, s = \overline{1, M},$$

що рівносильно умові (6). Критерій доведено.

Відмітимо, що в критерії 1 та в наступних викладках $l_s^T(t_{k-1})Q_k(t_{k-1})l_s(t_{k-1}) = \lim_{t \rightarrow t_{k-1}+0} l_s^T(t)Q_k(t)l_s(t), k = \overline{1, N}$. Дана

границя існує, так як функція $l_s^T(t)Q_k(t)l_s(t)$, неперервна та обмежена на інтервалі $(t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, s = \overline{1, M}$.

Для нелінійних фазових обмежень (4) справедливе твердження.

Критерій 2. Нульовий розв'язок системи (1), (2) $\{c; B; \Psi; t_0; T\}$ – стійкий тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$c^2 \leq \min_{k=1, N} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{y \in \{y: \Psi(y, t)=1\}} \frac{(\text{grad}_x^T \Psi(y, t)y)^2}{\text{grad}_x^T \Psi(y, t)Q_k(t)\text{grad}_x \Psi(y, t)}.$$

Доведення. Фазові обмеження можна представити у вигляді:

$$\Psi_t = \{x: \Psi(x, t) \leq 1\} = \{x: \text{grad}_x^T \Psi(y, t)x \leq \text{grad}_x^T \Psi(y, t)y, \forall y(\Psi(y, t)=1)\}, t \in [t_0; T] \quad (10)$$

Далі повторюємо міркування, які використовувалися при доведенні критерію 1. Критерій доведено.

Розглянемо лінійну динамічну систему з імпульсною дією, яка в моменти впливу імпульсної дії змінює структуру:

$$\frac{dx}{dt} = A^{(k)}(t)x, t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}, \quad (11)$$

$$x(t_k + 0) = B_k x(t_k), k = \overline{1, N-1}, \quad (12)$$

де $A^{(k)}(t)$, – неперервні на $(t_{k-1}; t_k]$ матриці розмірності $n \times n$, $k = \overline{1, N}$, B_k – постійні неособливі матриці розмірності $n \times n$, $k = \overline{1, N-1}$.

В цьому випадку фундаментальну матрицю системи (11), (12), нормовану за моментом часу t_0 можна записати таким чином:

$$X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) = U_k(t, t_{k-1}) \times \prod_{j=k-1}^1 B_j U_j(t_j, t_{j-1}), t \in (t_{k-1}; t_k], k = \overline{1, N}.$$

Тут $U_k(t, t_{k-1})$, $k = \overline{1, N}$ – розв'язок матричної задачі Коші

$$\frac{dU_k}{dt} = A^{(k)}(t)U_k, t \in (t_{k-1}; t_k], U_k(t_{k-1}, t_{k-1}) = E.$$

Провівши аналогічні міркування як для системи (1), (2), можна отримати такі ж точно за виглядом критерії для системи (11), (12). Відмінність полягає лише в формулах обчислення фундаментальної матриці.

Оптимальні оцінки множини практичної стійкості динамічних систем з імпульсною дією. Розглянемо задачу побудови множини всіх початкових точок таких, що відповідні траєкторії не покидають заданих фазових обмежень.

Означення 2. [5] Множина $G_* \subseteq \Phi_{t_0}$ називається максимальною за включенням множиною $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2), якщо:

1) траєкторія $x(t) \equiv 0 \in \{G_*, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкою;

2) для довільної множини $G_0 \subseteq \Phi_{t_0}$ такої, що нульовий розв'язок системи (1), (2) $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкий, виконується включення $G_0 \subseteq G_*$.

Визначивши область G_* ми розв'яжемо задачі про практичну стійкість окремих розв'язків, а також про $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкість для будь-якої множини початкових даних $G_0 \subseteq G_*$.

В деяких важливих випадках область початкових даних належить класу зіркових множин. Крім того, при чисельних розрахунках областей стійкості отримуються зіркові множини, які є апроксимацією шуканих областей.

Позначимо $L_x = \{u \in R^n: u = \lambda x, \lambda \geq 0, x \in R^n \setminus \{0\}\}$.

Означення 3. Множина $E \subseteq R^n$ називається строго зірковою, якщо вона є замкнутою, $0 \in \text{int} E$ і для будь-якого $x \in R^n \setminus \{0\}$ або $L_x \subset E$, або існує єдина точка $z \in L_x$ така, що $z \in \partial E$.

Нехай E – зірковий компакт. Тоді [5]

а) для будь-якого $l \in S_1(0)$ існує єдине $\alpha > 0$ таке, що $\alpha l \in \partial E$ і $\alpha = \max_{\lambda l \in E} \lambda$;

б) функція $\lambda_E(x) = \max_{\lambda \frac{x}{\|x\|} \in E, \lambda > 0} \lambda$ неперервна і додатна на $R^n \setminus \{0\}$.

Відображення $\lambda_E(x)$ будемо називати деформацією, або функцією деформації зіркового компакту E ,

$$\lambda_E(x) = p^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \text{ де } p(x) - \text{функція Мінковського множини } E, x \in R^n \setminus \{0\}.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. Нехай дано лінійну імпульсну систему (1), (2). Якщо Φ_t – опуклі множини, $t \in [t_0; T]$, то G_* є опуклою множиною.

Доведення. Розв'язок системи (1), (2) має вигляд (5). Візьмемо дві довільні точки $\{x_1, x_2\} \subset G_*$. Тоді $x_i(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0; T]$, $x_i(t) = X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})x_i$, $i = 1, 2$. Так як Φ_t опуклі, то $\lambda x_1(t) + (1 - \lambda)x_2(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0; T]$ для довільного $\lambda \in [0; 1]$, тобто $X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in \Phi_t$, $t \in [t_0; T]$. Звідси маємо, що $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G_*$, тобто G_* – опукла. Теорему доведено.

З теореми 1 випливає, що для лінійних динамічних систем з імпульсною дією при фазових обмеженнях (3), (4) максимальна за включенням множина практичної стійкості G_* є опуклою.

При розрахунку максимальних за включенням множин практичної стійкості будемо використовувати поняття стійкості за напрямком [1,5].

Означення 4. Нульовий розв'язок системи (1), (2) називається $\{\lambda, l, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійким в напрямку l , якщо $x(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0; T]$ для всіх $x_0 = \bar{\lambda}l$, $\bar{\lambda} \in [0; \lambda]$.

Якщо множина G_* є опуклою або зірковою, то для будь-якого $l \in S_1(0)$ нульовий розв'язок системи (1), (2) буде $\{\lambda_*(l), l, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійким, де $\lambda_*(l)$ – функція деформації множини G_* . В цьому випадку оптимальну за включенням множину практичної стійкості можна шукати у вигляді $G_* = \{x \in R^n : x = \lambda l, \lambda \in [0; \lambda_*(l)], l \in S_1(0)\}$.

Розглянемо систему (1), (2) у випадку лінійних фазових обмежень (3).

Критерій 3. Для того щоб нульовий розв'язок системи (1), (2) був $\{\lambda, l, \Gamma_t, t_0, T\}$ – стійким в напрямку l необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$\lambda \leq \min_{k=1, \overline{N}} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{s=1, \overline{M}} |l_s^T(t) X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})|^{-1}. \quad (13)$$

Доведення. Необхідність. Запишемо розв'язок системи (1), (2) у формі Коші (5). З того, що $x(t) \in \Gamma_t$, $t \in [t_0; T]$, випливає:

$$|l_s^T(t)x| = |l_s^T(t)X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})x_0| \leq 1, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, N}, s = \overline{1, M}.$$

Тоді, за означенням $\{\lambda, l, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкості нульового розв'язку системи, отримуємо:

$$\lambda \leq \frac{1}{|l_s^T(t)X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})|}, t \in (t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, N}, s = \overline{1, M}.$$

Остання нерівність виконується для всіх t, k, s , тому (13) теж виконується. Необхідність доведено.

Достатність доводиться шляхом зворотніх міркувань. Критерій доведено.

Наслідок 1. Функція деформації оптимальної за включенням множини практичної стійкості має вигляд

$$\lambda_*(l) = \min_{k=1, \overline{N}} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{s=1, \overline{M}} |l_s^T(t)X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})|^{-1},$$

причому $\lambda_*(l) = \lambda_*(-l)$, $l \in S_1(0)$.

При нелінійних фазових обмеженнях Ψ_t справедливий критерій.

Критерій 4. Нульовий розв'язок системи (1), (2) $\{\lambda, l, \Psi_t, t_0, T\}$ – стійкий в напрямку l тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$\lambda \leq \min_{k=1, \overline{N}} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{y \in \{y : \Psi(y, t) = 1\}} \frac{\text{grad}_x^T \Psi(y, t)y}{\text{grad}_x^T \Psi(y, t)X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})l},$$

$\text{grad}_x^T \Psi(y, t) > 0$, $\forall y (\Psi(y, t) = 1)$, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N}$.

Доведення. Запишемо множину фазових обмежень у вигляді (10). Далі аналогічно доведенню критерію 3.

Наслідок 2. Функція деформації оптимальної за включенням множини має вигляд:

$$\lambda_*(l) = \min_{k=1, \overline{N}} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{y \in \{y : \Psi(y, t) = 1\}} \frac{\text{grad}_x^T \Psi(y, t)y}{\text{grad}_x^T \Psi(y, t)X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})l}, \quad l \in S_1(0).$$

На основі сформульованих умов стійкості за напрямком приведемо алгоритм чисельного розрахунку максимальної за включенням множини практичної стійкості розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Алгоритм 1. (чисельний розрахунок максимальної за включенням множини практичної стійкості).

Крок 1. Вводимо сітку τ на проміжку $[t_0; T]$, та сітку ω на одиничній сфері $S_1(0)$.

Крок 2. Знаходимо фундаментальну матрицю системи $X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})$, $k = \overline{1, N}$.

Крок 3. Обчислюємо функцію деформації $\lambda_*(l)$ для всіх $l \in \omega$. Мінімум по t береться для всіх $t \in \tau$.

Крок 4. Будуємо апроксимацію максимальної за включенням множини практичної стійкості

$$\bar{G}_* = \{x \in R^n : x = \lambda l, 0 \leq \lambda \leq \lambda_*(l), l \in \omega\}.$$

Оптимізація динаміки заряджених пучків у прискорююче-фокусуєчих системах. Як відомо, рух заряджених частинок без врахування кулонівських сил при кусково-постійній амплітуді симетричного прискорюючого поля описується системою [1]:

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = u_k \cos \varphi, t_{k-1} < \xi < t_k, k = \overline{1, N}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, t_{k-1} < \xi < t_k, k = \overline{1, N},$$

$$\frac{dr_1}{d\xi} = r_2, t_{k-1} < \xi < t_k, k = \overline{1, N}, \quad \frac{dr_2}{d\xi} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} r_2 u_k \cos \varphi, t_{k-1} < \xi < t_k, k = \overline{1, N},$$

$$r_2(t_k + 0) = r_2(t_k - 0) - \frac{\gamma(t_k)}{\gamma^2(t_k) - 1} \frac{u_{k+1} - u_k}{2} r_1(t_k) \cos \varphi(t_k), k = \overline{1, N-1}, \quad r_2(0+0) = r_2(0), r_2(t_N - 0) = r_2(t_N).$$

Тут ξ – безрозмірна незалежна змінна, u_k – напруженість прискорюючого поля на інтервалі $t_{k-1} < \xi < t_k$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{|V|}{c}, \quad |V|^2 = V^T V, \quad \eta = \frac{Ze}{m_0}, \quad c - \text{швидкість світла}, \quad \varphi = \frac{2\pi c}{\lambda}(t - t^*) - \varphi(0) - \text{фаза прискорюючої хвилі},$$

яка діє на частинку в момент t , t^* – час проходження хвилі від початкової точки $\xi = 0$ у точку ξ , $\varphi(0)$ – фаза прискорюючої хвилі, при якій іон входить у прискорюючий процес, λ – довжина хвилі прискорюючого поля, r_1, r_2 – радіальна координата та швидкість частинки, T_N – кінцевий момент функціонування системи.

Перші два рівняння характеризують позаддовжній рух, а два останні – радіальний.

Розглянемо задачу знаходження максимальної області захвату частинок в процес прискорення за радіальними складовими. Виявляється, що по самій постановці дана задача співпадає з задачею практичної стійкості в оптимізаційній постановці.

У нашому випадку модель руху частинок має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f^{(k)}(x, t, \alpha), \\ \frac{dy}{dt} &= A^{(k)}(x, t, \alpha)y, \end{aligned} \quad t \in (t_{k-1}, t_k), k = \overline{1, N} \quad (14)$$

$$y(t_k + 0) = B^{(k)}(x, t_k, \alpha)y(t_k - 0), k = \overline{1, N-1}. \quad (15)$$

Тут x – вектор позаддовжніх координат розмірності 2, y – вектор радіальних складових розмірності 2, α – вектор параметрів оптимізації. На фазові координати другої підсистеми (14) накладена одна з умов [1]:

$$\Gamma_t = \{y : |l_s^T(t)y| \leq 1, s = \overline{1, M}\}, t \geq t_0, \quad (16)$$

$$\Psi_t = \{y : \psi(y, t) \leq 1\}, t \geq t_0. \quad (17)$$

Для позаддовжньої координати x початкові умови вибираються з замкнутої обмеженої множини M_0 , а для вектора радіальних складових y необхідно визначити область захвату частинок в процес прискорення.

Переформулюємо деякі означення наведені вище для використання в даній конкретній задачі.

Означення 5. Множина початкових даних

$$G_0 = \{y : y^T B y \leq c^2\}$$

називається областю захвату частинок в процес прискорення, якщо для всіх початкових умов $x(0) \in M_0$ виконується $y(t) \in \Psi_t$ (або $y(t) \in \Gamma_t$) для всіх $y(0) \in G_0$.

Означення 6. Множина

$$G_0^l = \{y : y = \bar{\lambda} l, 0 < \bar{\lambda} \leq \lambda\}$$

називається областю захвату частинок в процес прискорення в напрямку l за радіальними складовими, якщо $y(t) \in \Psi_t$ (або $y(t) \in \Gamma_t$) для всіх $y(0) \in G_0^l$ та $x(0) \in M_0$.

Наведемо для випадку лінійних обмежень критерій, який дозволяє розраховувати області захвату частинок в процес прискорення в силу сформульованих означень.

Критерій 5. Для того, щоб множина $G_0 = \{y : y^T B y \leq c^2\}$ була областю захвату частинок в процес прискорення за радіальними координатами при обмеженнях (16), необхідно і достатньо виконання умови

$$c^2 \leq \min_{x(0) \in M_0} \min_{k=1, N} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{s=1, M} [l_s^T(t) Q_k(t) l_s(t)]^1.$$

Тут $Q_k(t) = X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) B^{-1} X_k^T(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})$, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N}$, $X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})$ – фундаментальна матриця системи (14) з імпульсною дією (15).

Доведення критерію проводиться аналогічно доведенню критерію 1. Критерій для нелінійних обмежень формулюється і доводиться аналогічно.

Вище було показано, що для лінійних динамічних систем з імпульсною дією при опуклих або зіркових фазових обмеженнях задача оптимізації початкової множини практичної стійкості еквівалентна задачі про стійкість за напрямком для всеможливих $l \in S_1(0)$. Тому для чисельного розрахунку максимальних областей захвату частинок в процес прискорення можна користуватися наступним твердженням, яке випливає із сказаного вище.

Теорема 2. Максимальна по включенню множина захвату частинок в процес прискорення за радіальними координатами має вигляд

$$G_* = \{y : y = \bar{\lambda} l, 0 < \bar{\lambda} \leq \lambda, l \in S_1(0)\},$$

де при обмеженнях (16) $\lambda = \min_{x(0) \in M_0} \min_{k=1, N} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{s=1, M} |t_s^T(t) X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})|^{-1}$,

при обмеженнях (17) $\lambda = \min_{x(0) \in M_0} \min_{k=1, N} \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \min_{y \in \{y: \psi(y, t) = 1\}} \frac{\text{grad}_x^T \psi(y, t) y}{\text{grad}_x^T \psi(y, t) X_k(t, t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})}$,
 $\text{grad}_x^T \psi(y, t) > 0, \forall y(\psi(y, t) = 1), t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, N$.

Висновки

В даній роботі сформульовано та доведено критерії практичної стійкості для лінійних динамічних систем з імпульсною дією, побудовано конструктивні алгоритми для оцінки областей практичної стійкості. Як приклад застосування теоретичних результатів розглянута задача оптимізації області захвату частинок в процес прискорення в прискорюючо-фокусуєчих системах.

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.:Наук. думка, 1985. – 304 с. 2. Гаращенко Ф.Г. О численном подходе решения задач устойчивости на конечном интервале времени // Докл. АН УССР. – Сер.А. – 1981. – №11. – С.78–81. 3. Гаращенко Ф.Г., Пичур В.В. Анализ оптимальных свойств практической устойчивости динамических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – №5. – С.79–94. 4. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач практической устойчивости численными методами и оптимизация динамики пучков // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т.51, №5. – С.717–723. 5. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пичур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: Вид.-пол. центр "Київський університет", 2000. – 197 с. 6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с. 7. Гаращенко Ф.Г., Хитко И.В. Практическая устойчивость импульсных систем // Кибернетика и вычислительная техника. – 2003. – Вып. 138. – С.48–56.

Надійшла до редколегії 18.09.2007

УДК 517.929

І. Джалладова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто задачу знаходження квадратичних функцій Ляпунова для системи різницеви рівнянь. Побудовано загальний алгоритм. Детально розглянуто лінійні стаціонарні системи із сталим запізненням.

Considered the problem finding of quadratic Lyapunov's function for the system of difference equations. Constructing general algorithm. Considered of linear stationary system with constant delay.

Вступ

Метод функцій Ляпунова є надзвичайно ефективним апаратом при дослідженні динаміки лінійних і нелінійних динамічних систем, що не залежать явно від часу. Але його використання при дослідженні динаміки нестационарних динамічних систем наштовхнулось на досить великі труднощі. Це пов'язано з тим, що виникає потреба дослідження знаковизначеності функцій, які залежать від часу.

В роботі викладається метод функцій Ляпунова стосовно систем лінійних різницеви рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Досліджується стійкість розв'язків цих систем.

1. Побудова функцій Ляпунова для стаціонарної системи лінійних різницеви рівнянь.

Розглянемо систему лінійних різницеви рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = AX_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

Задамо додатно визначену квадратичну форму

$$w(X) \equiv X^* B X.$$

Функцію Ляпунова шукаємо також у вигляді квадратичної форми

$$V(X) = X^* C X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^* B X_k, \quad X \equiv X_0. \quad (2)$$

Якщо матриця B додатно визначена, то квадратична форма, що визначена рівністю (2) задовольняє всім вимогам стосовно класичної функції Ляпунова. Дійсно, відокремивши перший доданок, отримаємо вираз

$$V(X) = X^* B X + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k+1}^* B X_{k+1}$$

або

$$V(X) = X^* B X + \sum_{k=0}^{\infty} (A X_k)^* B (A X_k) = X^* B X + V(A X).$$

Звідси одержуємо, що для першої різниці в силу системи (1) буде виконуватись

$$\Delta V(X) \equiv V(A X) - V(X) = -w(X),$$

або

$$\Delta V(X) = -w(X). \quad (3)$$

З рівняння (3) отримаємо матричне рівняння,

$$A^* C A - C = -B, \quad B > 0, \quad (4)$$

яке називається *матричним різницеви рівнянням Ляпунова* [1]. Рівняння (4) будемо записувати у вигляді

$$C = B + A^* C A. \quad (5)$$

Дослідження цього рівняння дозволяє знаходити умови існування функції Ляпунова у вигляді квадратичної форми.

Теорема 1. Нехай $C > 0$ довільна додатно визначена матриця. Якщо $\lambda_{\max}$ — найбільший, $\lambda_{\min}$ — найменший корінь алгебраїчного рівняння

$$\det(B - \lambda C) = 0,$$

а матриця B дорівнює $B = C - A^*CA$, то для розв'язків X_k , $k = 1, 2, \dots$ системи рівнянь (1) справедливі оцінки

$$(1 - \lambda_{\max})^k X_0^* C X_0 \leq X_k^* C X_k \leq (1 - \lambda_{\min})^k X_0^* C X_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Доведення. Маємо оцінки

$$\lambda_{\min} v(X) \leq w(X) \leq \lambda_{\max} v(X). \quad (7)$$

З рівняння

$$w(X) = v(X) - v(AX), \quad v(AX) \geq 0$$

випливає, що $w(X) \leq v(X)$, тобто

$$\lambda_{\max} = \max_X \frac{w(X)}{v(X)} \leq 1, \quad 1 - \lambda_{\max} \geq 0.$$

Відніmemo з усіх членів нерівностей (7) величину $v(X)$

$$(\lambda_{\min} - 1)v(X) \leq w(X) - v(X) \leq (\lambda_{\max} - 1)v(X)$$

і одержимо нерівність

$$(1 - \lambda_{\min})v(X) \geq v(AX) \geq (1 - \lambda_{\max})v(X),$$

яку можна переписати у виді

$$(1 - \lambda_{\min})v(X_k) \geq v(X_{k+1}) \geq (1 - \lambda_{\max})v(X_k).$$

Інтегруючи цю нерівність одержимо оцінки (6), тобто твердження теореми 1.

Теорема 2. Для того, щоб нульовий розв'язок системи різницьових рівнянь (1) був асимптотично стійким, необхідно і достатньо, щоб при додатно визначеній матриці $B > 0$ існувала симетрична, додатно визначена матриця $C > 0$, що задовольняє рівняння Ляпунова (5)

Доведення. Якщо B – додатно визначена матриця, то справедлива нерівність

$$\lambda_{\min} = \min_X \frac{X^* B X}{X^* C X} > 0, \quad 0 < 1 - \lambda_{\min} < 1.$$

Тому з оцінки

$$X_k^* C X_k \leq (1 - \lambda_{\min})^k X_0^* C X_0 \quad (8)$$

випливає граничне співвідношення $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = 0$. З нерівності (8) можна знайти оцінку

$$\|X_k\| \leq \sqrt{(1 - \lambda_{\min})^k \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \|X_0\|.$$

Достатність доведена.

Нехай нульовий розв'язок системи різницьових рівнянь (1) асимптотично стійкий. При цьому збігається ряд (2) або збігається матричний ряд

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} (A^*)^n B A^n = B + A^* B A + (A^*)^2 B A^2 + \dots$$

Оскільки B додатно визначена матриця, то C також додатно визначена. Необхідність доведена.

Теорема 3. Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних різницьових рівнянь (1) був асимптотично стійким необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з еквівалентних умов:

1. Усі власні числа матриці A були по модулю менше одиниці;
2. При $B > 0$ збігався матричний ряд $C = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k B A^k$;
3. При будь-якій матриці $B > 0$ матричне рівняння (4) мало розв'язок $C > 0$.
4. При деякій матриці $B > 0$ рівняння (4) мало розв'язок $C > 0$.
5. При довільній матриці $C_0 > 0$ будь-який розв'язок C_k ($k = -1, -2, \dots$) різницьового рівняння

$$C_k = B + A^* C_{k+1} A \quad (k = -1, -2, -3, \dots)$$

прямує до сталої матриці C .

6. Будь-який розв'язок різницьового рівняння

$$D_{k+1} = A D_k A^*$$

прямує до нуля при $k \rightarrow +\infty$.

Для асимптотичної стійкості розв'язків системи різницьових рівнянь (1) достатньо, щоб при деякій матриці $C > 0$ виконувалася умова

$$C - A^* C A > 0.$$

Доведення. З теореми 2 випливає, що існування розв'язків $C > 0$ при заданій матриці $B > 0$ рівняння Ляпунова (4) еквівалентно збіжності методу послідовних наближень

$$C_k = B + A^* C_{k+1} A, \quad C_0 \geq 0, \quad C = \lim_{k \rightarrow -\infty} C_k \quad (k = -1, -2, \dots).$$

Розглянемо однорідну частину цього різницевого матричного рівняння

$$C_k = A^* C_{k+1} A \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

і введемо спряжене до нього матричне різницеве рівняння

$$D_{k+1} = A D_k A^* \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (10)$$

якому задовольняє матриця $D_k = X_k X_k^*$. Будь-які розв'язки систем (9), (10) задовольняють рівності

$$D_k \circ C_k = \text{const} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Дійсно, в силу властивостей скалярного добутку матриць одержимо рівність

$$C_k \circ D_k = A^* C_{k+1} A \circ D_k = C_{k+1} \circ A D_k A^* = C_{k+1} \circ D_{k+1},$$

що доводить справедливість рівності. Асимптотична стійкість нульового розв'язку рівняння (9) при $k \rightarrow -\infty$ еквівалентна стійкості нульового розв'язку спряженого матричного рівняння (10) при $k \rightarrow +\infty$.

2. Побудова функцій Ляпунова для нестационарної системи лінійних різницевих рівнянь

Метод функцій Ляпунова виявився досить ефективним при дослідженні стійкості лінійних і нелінійних динамічних систем, що не залежать явно від часу. Але його використання при дослідженні стійкості нестационарних динамічних систем нашоується на значні труднощі. В статті запропоновано нове означення стійкості розв'язків. Розглянемо нестационарну систему лінійних різницевих рівнянь

$$X_{k+1} = A_k X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Означення 1.. Нульовий розв'язок системи (11) будемо називати L_2 -стійким, якщо для будь-якого з розв'язків X_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|X_k\|^2 < \infty. \quad (12)$$

Задамо додатно визначену квадратичну форму

$$w(k, X_k) = X_k^* B_k X_k, \quad B_k > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

що задовольняє умовам

$$\alpha \|X_k\|^2 \leq w(k, X_k) \leq \beta \|X_k\|^2 \quad (\alpha > 0) \quad (13)$$

Визначимо функцію Ляпунова за допомогою залежності

$$v(k, X) = \sum_{n=k}^{\infty} w(n, X_n), \quad X_k = X. \quad (14)$$

Відокремлюючи перший доданок ряду (14), приходимо до рівняння

$$v(k, X_k) = w(k, X_k) + v(k+1, X_{k+1}),$$

яке можна записати у вигляді

$$v(k, X_k) = w(k, X_k) + v(k+1, A_k X_k). \quad (15)$$

Оскільки функція Ляпунова $v(k, X)$ є квадратичною формою

$$v(k, X_k) = X_k^* C_k X_k,$$

то з рівняння (15) знаходимо різницеве рівняння для матриці C_k

$$C_k = B_k + A_k^* C_{k+1} A_k. \quad (16)$$

Теорема 4. Нехай квадратична форма $w(k, X_k)$ задовольняє умову (13). Для того, щоб нульовий розв'язок системи різницевих рівнянь (11) був L_2 -стійким необхідно і достатньо, щоб існувала функція Ляпунова.

$$v(k, X_k) = X_k^* C_k X_k, \quad C_k > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

що задовольняє рівняння (16).

Доведення. Необхідність очевидна, тому що зі збіжності ряду (12) випливає збіжність ряду у залежності (14), що визначає функцію Ляпунова.

Нехай існує послідовність невід'ємних симетричних матриць $C_k \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), які задовольняють різницеве рівняння (15). З рівняння (14) запишемо співвідношення

$$v(k, X_k) = \sum_{n=k}^N w(n, X_n) + v(N+1, X_{N+1}) \quad (N > k),$$

з якого випливає нерівність

$$\sum_{n=k}^N w(n, X_n) \leq v(k, X_k).$$

Зі збіжності ряду при $N \rightarrow +\infty$ випливає збіжність ряду (12), що і доводить справедливість теореми.

Оскільки зі збіжності ряду (12) випливає, що загальний член ряду прямує до нуля, то з L_2 -стійкості випливає асимптотична стійкість розв'язків системи різницевих рівнянь (11). Обернене твердження невірне, що ілюструє наступний приклад.

Приклад 1. Лінійне різницеве рівняння

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}} x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

має загальний розв'язок $x_k = (k+1)^{-\frac{1}{2}} x_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Нульовий розв'язок рівняння (17) асимптотично стійкий, але не є L_2 -стійким, тому що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^2}{1+k}$$

розбігається. Можна безпосередньо переконатися, що рівняння Ляпунова

$$c_k = b_k + c_{k+1} \left(\frac{k+1}{k+2} \right), \quad b_k \geq \alpha > 0$$

не може мати розв'язків $c_k \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

3. Побудова функцій Ляпунова для системи лінійних стохастичних різницевих рівнянь
Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь з нестационарними випадковими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = A(k, \zeta_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

де ζ_k — марковський неоднорідний ланцюг, що приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з імовірностями, які задовольняють систему різницевих рівнянь

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js}(k) p_s(k) \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$$

Означення 2. Нульовий розв'язок системи лінійних різницевих рівнянь (18) називається L_2 -стійким, якщо для будь-якого розв'язку X_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) системи з обмеженим початковим значенням $\langle \|X_0\|^2 \rangle$ збігається ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \|X_k\|^2 \rangle. \quad (19)$$

Для дослідження цього виду стійкості виявилось зручним використати вище побудованої функції Ляпунова. Якщо нульовий розв'язок системи (18) L_2 -стійкий, то виконане співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \|X_k\|^2 \rangle = 0$$

і тому нульовий розв'язок системи рівнянь (18) буде асимптотично стійким в середньому квадратичному.

Теорема 5. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (18) був L_2 -стійким, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} D_k, \quad D_k \equiv \langle X_k X_k^* \rangle. \quad (20)$$

Доведення. Оскільки

$$Sp D_k = \langle \|X_k\|^2 \rangle,$$

то зі збіжності матричного ряду (20) з невід'ємними діагональними елементами впливає збіжність ряду (19). І, навпаки, тому, що виконується нерівність

$$\langle x_j x_s \rangle \leq \frac{1}{2} (\langle x_j^2 \rangle + \langle x_s^2 \rangle)$$

зі збіжності ряду (19) впливає збіжність ряду (20), Тому зі збіжності діагональних елементів у матричному ряді (20) впливає збіжність недиагональних елементів. Теорема доведена.

Уведемо додатно визначену квадратичну форму

$$w(k, X_k) = X_k^* B_k X_k = B_k \circ X_k X_k^*,$$

що задовольняє умови

$$\lambda_1 \|X_k\|^2 \leq w(k, X_k) \leq \lambda_2 \|X_k\|^2 \quad (\lambda_1 > 0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Оскільки при будь-яких $N \geq 0$ виконані нерівності

$$\lambda_1 \sum_{i=0}^N \langle \|X_i\|^2 \rangle \leq \sum_{k=0}^N \{w(k, X_k)\} \leq \lambda_2 \sum_{k=0}^N \langle \|X_k\|^2 \rangle, \quad (21)$$

то при $\lambda_1 > 0$ збіжність ряду (21) буде рівносильна збіжності ряду

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k) \rangle. \quad (22)$$

Теорема 6. Нехай квадратична форма задовольняє умові (21). Для того, щоб нульовий розв'язок системи (18) був L_2 -стійким необхідно і достатньо, щоб при обмеженому значенні $\langle \|X_0\|^2 \rangle$ збігався ряд (22).

Доведення. Розглянемо квадратичну форму

$$w(k, X_k, \zeta_k) = X_k^* B_k(k, \zeta_k) X_k = B_k(k, \zeta_k) \circ X_k X_k^*,$$

що залежить від марковського ланцюга ζ_k . Якщо виконані умови

$$\lambda_1 \|X_k\|^2 \leq w(k, X_k, \zeta_k) \leq \lambda_2 \|X_k\|^2 \quad (\lambda_1 > 0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

і збігається ряд

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \zeta_k) \rangle,$$

то нульовий розв'язок системи рівнянь буде L_2 -стійким.

Оскільки марковський ланцюг ζ_k приймає тільки значення $\theta_1, \dots, \theta_n$, то позначимо

$$B_s(k) \equiv B(k, \theta_s), \quad w_s(k, X) \equiv w(k, X, \theta_s) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Умови (23) рівносильні умовам

$$\lambda_1 E \leq B_s(k) \leq \lambda_2 E \quad (\lambda > 0; s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\lambda_1 \|X_k\|^2 \leq w_s(k, X_k) \leq \lambda_2 \|X_k\|^2 \quad (\lambda_1 > 0; s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Визначимо функції Ляпунова за формулами

$$v_s(k, X) = \sum_{j=k}^{\infty} \langle w(j, X_j, \zeta_j) | X_k = X, \zeta_k = \theta_s \rangle \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (24)$$

де квадратична форма

$$w(k, X_k, \zeta_k) = X_k^* B(k, \zeta_k) X_k,$$

задовольняє умовам (23).

Якщо відомі функції Ляпунова $v_s(0, X)$ ($s = 1, \dots, n$), то значення функціонала (24) можна знайти за допомогою залежності

$$v = \int \sum_{s=1}^n v_s(0, X) f_s(0, X) dX, \quad (25)$$

де $f_s(0, X)$ ($s = 1, \dots, n$) — частинні щільності розподілу системи випадкових величин (X_0, ζ_0) . Функції $v_s(k, X)$ ($s = 1, \dots, n$) залежать тільки від виду функцій

$$w_s(k, X) = w(k, X, \theta_s) \quad (s = 1, \dots, n)$$

і від значень марковського ланцюга ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) і не залежать від імовірнісного розподілу випадкових величин (X_0, ζ_0) .

Уведемо позначення для частинних значень матриці $A(k, \zeta_k)$

$$A_s(k) \equiv A(k, \theta_s) \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 7. Нехай існують функції Ляпунова (24). Тоді вони задовольняють систему функціональних рівнянь

$$v_s(k, X) = w_s(k, X) + \sum_{l=1}^n \pi_{ls}(k) v_l(k+1, A_s(k)X). \quad (26)$$

Доведення. Виділимо в сумі (24) перший доданок $v_i(k, X)$. З імовірністю $\pi_{ls}(k)$ марковський ланцюг ζ_k переходить зі стану θ_s в стан θ_l ($l = 1, \dots, n$). Тому будуть справедливі рівності

$$v_s(k, X) = w_s(k, X) + \sum_{l=1}^n \pi_{ls}(k) \sum_{j=k+1}^{\infty} \langle w(j, X_j, \zeta_j) | X_k = X, X_{k+1} = A_s(k)X, \zeta_k = \theta_s, \zeta_{k+1} = \theta_l \rangle,$$

що еквівалентно системі рівнянь (26).

Функції Ляпунова $v_s(k, X)$ ($s = 1, \dots, n$) є квадратичними функціями від X

$$v_s(k, X) = X^* C_s(k) X \quad (s = 1, \dots, n). \quad (27)$$

Підставляючи вираження (27) у систему рівнянь (26), приходимо до системи рівнянь для матриць $C_s(k)$

$$C_s(k) = B_s(k) + \sum_{l=1}^n \pi_{ls}(k) A_s^*(k) C_l(k+1) A_s(k) \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Теорема 8. Якщо система рівнянь (28) при деяких матрицях $B_s(k)$, що задовольняють систему нерівностей

$$\lambda_1 E \leq B_s(k) \leq \lambda_2 E \quad (\lambda_1 > 0; s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots),$$

має додатно визначені розв'язки $C_s(k)$ ($s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$), то нульовий розв'язок системи лінійних різницьових рівнянь є L_2 -стійким.

Доведення. Система рівнянь (28) еквівалентна системі функціональних рівнянь (25), яку можна вирішувати методом послідовних наближень

$$v_s^{(j+1)}(k, X) = w_s(k, X) + \sum_{l=1}^n \pi_{ls}(k) v_l^{(j)}(k+1, A_s(k)X) \\ v_s^{(0)}(k, X) \equiv 0 \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Збіжність методу послідовних наближень еквівалентна збіжності рядів (25). Зі збіжності випливає L_2 -стійкість розв'язків системи різницевого рівняння.

Обернене твердження очевидне. З L_2 -стійкості розв'язків системи випливає існування функцій Ляпунова $v_s(k, X)$ ($s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$) додатно визначених і обмежених при всіх значеннях $k = 0, 1, 2, \dots$.

Наслідок. Нехай для стаціонарної системи різницевого рівняння

$$X_{k+1} = A(\zeta_k)X_k, \det A(\zeta_k) \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

де марковський ланцюг ζ_k визначається стаціонарною системою різницевого рівняння, за допомогою залежностей

$$v_s(k, X) = \sum_{j=k}^{\infty} \langle w(X_j; \zeta_j) X_k = X, \zeta_k = \theta_s \rangle \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

визначені функції Ляпунова

$$v_s(k, X) = X^* C_s(k) X \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (31)$$

Тут функції $w(X, \zeta) = X^* B(\zeta) X$ задовольняють умовам

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq w_s(X) \leq \lambda_2 \|X\|^2 \quad (\lambda_1 > 0), w_s(X) \equiv w(X, \theta_s), \quad (s = 1, \dots, n),$$

або

$$\lambda_1 E \leq B_s \leq \lambda_2 E, \quad B_s \equiv B(\theta_s) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Функції (31) задовольняють систему функціональних рівнянь

$$v_s(k, X) = w_s(X) + \sum_{l=1}^n \pi_{ls} v_l(k+1, A_s X) \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots), \quad (32)$$

які еквівалентні системі матричних рівнянь

$$C_s(k) = B_s + \sum_{l=1}^n \pi_{ls} A_s^* C_l(k+1) A_s \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (33)$$

Існування додатно визначених розв'язків $C_s(k)$ ($s = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$) системи різницевого матричних рівнянь (33) еквівалентно існуванню додатного розв'язку системи матричних рівнянь

$$C_s = B_s + \sum_{l=1}^n \pi_{ls} A_s^* C_l A_s, \quad B_s > 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (34)$$

Наслідок. Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних різницевого рівнянь з кусочно-сталими випадковими коефіцієнтами, що залежать від марковського однорідного ланцюга ζ_k , обумовленим системою рівнянь (170), був L_2 -стійким, необхідно і достатньо, щоб при деяких додатно визначених матрицях $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) система матричних рівнянь (34) мала додатно визначені розв'язки $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$).

Теорема 9. Система моментних рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s(k) A_s^* \quad (j = 1, \dots, n; k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (35)$$

є спряженою до системи різницевого рівнянь

$$C_s(k) = \sum_{l=1}^n \pi_{ls} A_s^* C_l(k+1) A_s \quad (s = 1, \dots, n; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (36)$$

Доведення. Розглянемо перетворення

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_j(k+1) \circ C_j(k+1) &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s(k) A_s^* \circ C_j(k+1) = \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{js} A_s^* C_j(k+1) A_s \circ D_s(k) = \sum_{s=1}^n C_s(k) \circ D_s(k) \end{aligned}$$

Звідси випливає, що система рівнянь (35) є спряженою до системи різницевого рівнянь (36).

З теореми випливає, що асимптотична стійкість нульового розв'язків системи різницевого рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s(k) A_s^*$$

еквівалентна асимптотична стійкості нульового розв'язку системи (33). Звідси випливає важливий результат.

Теорема 10. Нехай коефіцієнти системи лінійних різницевого рівнянь (29) залежать від однорідної марковського ланцюга ζ_k , визначеного системою рівнянь (30). Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (29) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь (34) при $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) мала додатно визначений розв'язок $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$).

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (29) асимптотично стійкий в середньому квадратичному. Тоді нульовий розв'язок системи моментних рівнянь асимптотично стійкий при $k \rightarrow +\infty$, а нульовий розв'язок системи (35) асимптотично стійкий при $k \rightarrow -\infty$. Отже, будь-який розв'язок системи матричних різницевого рівнянь (33) при $k \rightarrow -\infty$ асимптотично прямує до стаціонарних розв'язків C_s ($s = 1, \dots, n$), що задовольняють системі (34). Якщо в

системі (33) покладемо $C_s(0) = 0$ ($s = 1, \dots, n$), то при $k \rightarrow -\infty$ з умов $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) випливає, що $C_s(k) > 0$ і $C_s(k) > B_s > 0$. І система рівнянь (34) буде мати додатно визначені розв'язки $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$). Звідси випливає L_2 -стійкість розв'язків системи різницьових рівнянь (29).

Вірно і обернене твердження, тому що з L_2 -стійкості розв'язків системи рівнянь (34) випливає асимптотична стійкість розв'язків системи (29).

Таким чином, для системи лінійних різницьових рівнянь (29) з кусочно-стійкими марковськими коефіцієнтами асимптотична стійкість у середньому квадратичному еквівалентна L_2 -стійкості розв'язків, що доводить твердження теореми 10.

Отримані результати дозволяють сформулювати наступний результат, що дає ефективний критерій дослідження стійкості розв'язків системи лінійних різницьових рівнянь з випадковими кусково-сталими коефіцієнтами.

Теорема 11. Нехай коефіцієнти системи лінійних різницьових рівнянь

$$X_{k+1} = A(\zeta_k)X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (37)$$

залежать від значень однорідного скінченнозначного марковського ланцюга ζ_k , що приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з імовірностями,

$$p_s(k) = P\{\zeta_k = \theta_s\} \quad (s = 1, \dots, n)$$

що задовольняють систему різницьових рівнянь

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} p_s(k)$$

Для того, щоб нульовий розв'язок системи різницьових рівнянь був L_2 -стійким і асимптотично стійким в середньому квадратичному, необхідно і достатньо виконання наступних еквівалентних умов:

1. Щоб система матричних рівнянь

$$C_s = B_s + \sum_{l=1}^n \pi_{ls} A_s^* C_l A_s; \quad B_s > 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (38)$$

при будь-яких симетричних матрицях $B_s > 0$ мала розв'язки $C_s > 0$.

2. Щоб система рівнянь (37) при деяких значеннях симетричних матриць $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) мала розв'язки $C_s > 0$.

3. Щоб при розв'язуванні системи рівнянь (37) збігався метод послідовних наближень

$$C_s(k-1) = B_s + \sum_{e=1}^n \pi_{es} A_s^* C_e(k) A_s \quad (k = 0, -1, -2, \dots), \quad C_s(0) = 0, \quad C_s = \lim_{k \rightarrow -\infty} C_s(k) \quad (s = 1, \dots, n).$$

4. Щоб монотонний оператор L у просторі матриць C

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad LC = \begin{pmatrix} \pi_{11} A_1^* C_1 A_1 & \pi_{21} A_1^* C_2 A_2 & \dots & \pi_{n1} A_1^* C_n A_n \\ \pi_{12} A_2^* C_1 A_1 & \pi_{22} A_2^* C_2 A_2 & \dots & \pi_{n2} A_2^* C_n A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{1n} A_n^* C_1 A_1 & \pi_{2n} A_n^* C_2 A_2 & \dots & \pi_{nn} A_n^* C_n A_n \end{pmatrix}$$

$$C_s = C_s^* \quad (s = 1, \dots, n)$$

був стискаючим.

5. Щоб будь-який розв'язок системи однорідних різницьових рівнянь

$$C_s(k-1) = \sum_{e=1}^n \pi_{es} A_s^* C_e(k) A_s \quad (k = 0, 1, 2, \dots; s = 1, \dots, n) \quad (39)$$

при $k \rightarrow -\infty$ прямував до нульового.

6. Щоб будь-який розв'язок системи однорідних різницьових рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s(k) A_s^* \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$$

при $k \rightarrow +\infty$ прямував до нульового.

7. Щоб при будь-яких симетричних матрицях $B_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$) система матричних рівнянь

$$D_j = B_j + \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s A_s^* \quad (j = 1, \dots, n) \quad (40)$$

мала розв'язками додатно визначені матриці $D_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$).

8. Щоб при деяких матрицях $B_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$), система рівнянь (40) мала розв'язки $D_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$).

9. Щоб при розв'язуванні системи матричних рівнянь (40) збігався метод послідовних наближень

$$D_j(k+1) = B_j + \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_s D_s(k) A_s^* \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad D_j(0) = 0, \quad D_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} D_j(k) \quad (j = 1, \dots, n).$$

10. Щоб монотонний оператор L^* у просторі матриць D

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix}, \quad L^* D = \begin{pmatrix} \pi_{11} A_1 D_1 A_1^* & \pi_{12} A_2 D_2 A_2^* & \dots & \pi_{1n} A_n D_n A_n^* \\ \pi_{21} A_1 D_1 A_1^* & \pi_{22} A_2 D_2 A_2^* & \dots & \pi_{2n} A_n D_n A_n^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{n1} A_1 D_1 A_1^* & \pi_{n2} A_2 D_2 A_2^* & \dots & \pi_{nn} A_n D_n A_n^* \end{pmatrix}$$

$$D_j = D_j^* \quad (j = 1, \dots, n)$$

був стискующим.

11. Для L_2 -стійкості розв'язків системи різницевого рівняння (37) достатньо, щоб при деяких симетричних матрицях $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) виконувалися нерівності

$$C_s - \sum_{e=1}^n \pi_{es} A_s^* C_e A_s > 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с. 2. Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. — М.: РУДН, 1996. — 258 с. 3. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функции Ляпунова. — Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с. 4. Зубов В. И. Методы Ляпунова и их применения. — Л.: Из-во ЛГУ, 1957. — 241 с.

Надійшла до редколегії 31.01.2008

УДК 517.9

Є. Івохін, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ПОРІВНЯННЯ

В роботі розглянуто способи побудови лінійних систем порівняння та їх оптимізацію. Отримано необхідні та достатні умови стійкості систем порівняння. Досліджено умови оптимізації функцій Ляпунова, що складають векторну функцію Ляпунова.

The methods of construction of the linear systems of comparison and their optimization are considered in work. The necessary and sufficient terms of stable of the systems of comparison are got. Explored terms of optimization of Lyapunov functions, which are include to the vector function of Lyapunov.

Застосування методу векторних функцій Ляпунова (ВФЛ) [1] для дослідження багатомірних систем лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$x' = Ax, x \in R^N. \quad (1)$$

передбачає розбиття вихідної системи на підсистеми, побудову функцій Ляпунова для кожної підсистеми і аналіз відповідної системи порівняння (СП)

$$y' = Py, y \in R^m, m < N. \quad (2)$$

Добре відомі і широко використовуються різні способи побудови векторних функцій Ляпунова і систем порівнянь, що базуються на заданні їх структури. Серед них найбільш поширеними є метод побудови системи порівняння Бейлі [2] та метод Фурасова [3]. Передбачається, що система (1) може бути представлена у вигляді сукупності підсистем меншої розмірності

$$x'_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} x_j, i = \overline{1, m}, x_i \in R^{n_i}, \sum_{i=1}^m n_i = N \quad (3)$$

За компоненти ВФЛ приймаються функції Ляпунова для ізольованих підсистем

$$x'_i = A_i x_i, i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

а система порівняння будується на основі оцінок похідної ВФЛ в силу повної системи. При цьому, якщо СП, яка формується, асимптотично стійка, то вихідна система (1) також буде асимптотично стійкою [1]. В протилежному випадку про стійкість системи (1) нічого сказати неможна.

Будемо будувати функції Ляпунова для підсистем (4) у вигляді квадратичних форм

$$v_i = (x_i, H_i x_i), i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

з додатньо визначеними, симетричними матрицями $H_i, i = \overline{1, m}$.

Якщо матриці $A_i, i = \overline{1, m}$ гурвіцеві, то знаходження функцій Ляпунова зводиться до розв'язку матричних рівнянь Ляпунова

$$A_i^T H_i + H_i A_i = -C_i, i = \overline{1, m} \quad (6)$$

з довільними додатно визначеними, симетричними матрицями $C_i, i = \overline{1, m}$ в правій частині.

Аналіз систем порівняння показав, що вигляд СП залежить від вибору функцій Ляпунова, що входять до ВФЛ. За умов покращення вибору функцій Ляпунова з урахуванням інтегрального критерію [4] система порівняння досить часто може бути покращена з точки зору запасу стійкості.

Означення 1. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, розмірності n називається додатною (невід'ємною), якщо $p_{ij} > 0$ ($p_{ij} \geq 0$), $i, j = \overline{1, n}$.

Означення 2. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, розмірності n називається позитивною (М-матрицею), якщо $p_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Для додатних (невід'ємних) і позитивних матриць будемо використовувати традиційні позначення $P > (\geq) 0$. Неважко помітити, що для довільної позитивної матриці $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, матриця $R = P + \gamma E$, де $\gamma \geq -\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p_{ii} < 0}} p_{ii}$,

E – одинична матриця, буде невід'ємною матрицею $R \geq 0$, тобто $r_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1,n}$.

Розглянемо метод Бейлі. Зафіксуємо розбиття матриці A системи (1) на підсистеми (3). Система порівняння має вигляд [2]

$$y' = Py, \quad (7)$$

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}},$$

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_{\min}(C_i)/(2 * \lambda_{\max}(H_i)), & i = j, \\ \frac{2 * \lambda_{\max}^2(H_i)}{\lambda_{\min}(H_j) * \lambda_{\min}(C_i)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \|B_{ik}\|^2, & i \neq j, \end{cases} \quad (8)$$

де $\lambda_{\max}(\bullet), \lambda_{\min}(\bullet)$ – максимальне і мінімальне власні числа відповідних матриць.

На основі вигляду СП можна отримати ефективний критерій перевірки стійкості систем порівняння Бейлі і визначити спосіб покращення якості цієї стійкості.

Теорема 1 (критерій стійкості СП Бейлі). Для того, щоб система порівняння Бейлі (7), (8) була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$2^{2m}(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(H_i) S_i + 2^{2m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j) S_j + 2^{2m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l) S_l + \dots < 1, \quad (9)$$

$$\text{де } q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}, i = \overline{1,m}, S_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \|B_{ik}\|^2, i = \overline{1,m}. \quad (10)$$

Доведення. Для елементів матриці P системи порівняння Бейлі справедливі умови $p_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1,n}, i \neq j$. Це означає, що матриця P є позитивною, і для дослідження її стійкості можна використати критерій Севаст'янова-Котелянського [5]. За ним для асимптотичної стійкості СП необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$p_{11} < 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \det P > 0. \quad (11)$$

Покажемо необхідність виконання умови (9). Нехай СП (7), (8) асимптотично стійка. Тоді справедливими є нерівності (11). Виносимо з кожного стовпця множник $1/\lambda_{\min}(H_j), j = \overline{1,m}$, а потім з кожного рядка

$\frac{2 * \lambda_{\max}^2(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)}, i = \overline{1,m}$, і враховуючи, що $p_{11} < 0$, перетворимо систему нерівностей (11) до вигляду

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}^2(C_1)\lambda_{\min}(H_1)}{4\lambda_{\max}^3(H_1)S_1} & 1 & & \\ 1 & -\frac{\lambda_{\min}^2(C_2)\lambda_{\min}(H_2)}{4\lambda_{\max}^3(H_2)S_2} & & \\ & & \dots & \\ (-1)^m & 1 & & -\frac{\lambda_{\min}^2(C_m)\lambda_{\min}(H_m)}{4\lambda_{\max}^3(H_m)S_m} \end{vmatrix} > 0. \quad (12)$$

Для довільного $r = \overline{2, m}$ нескладно перевірити справедливості співвідношень [6]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \alpha_r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^r \alpha_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^r \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \alpha_l + 2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k>j>i}}^r \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^r \alpha_l + \dots + (-1)^r (r-2) \sum_{i=1}^r \alpha_i + (-1)^{r+1} (r-1). \quad (13)$$

Підставляючи значення $\alpha_i = -\frac{1}{4S_i q^2(H_i)}$, $i = \overline{1, m}$ в (13), отримаємо систему нерівностей

$$2^k (k-1) \prod_{i=1}^r q^2(H_i) S_i + 2^{k-2} (k-2) \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k q^2(H_j) S_j + 2^{k-4} (k-3) \sum_{i,j=1}^k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^k q^2(H_l) S_l + \dots < 1/2^k, \quad (14)$$

$$k = \overline{2, m},$$

або

$$2^{2k} (k-1) \prod_{i=1}^k q^2(H_i) S_i + 2^{2k-2} (k-2) \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k q^2(H_j) S_j + 2^{2k-4} (k-3) \sum_{i,j=1}^k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^k q^2(H_l) S_l + \dots < 1, \quad k = \overline{2, m},$$

де $q(H_i)$, $i = \overline{1, m}$ визначені в (10). Таким чином, необхідність доведено.

Далі покажемо, що при виконанні останньої нерівності в (14)

$$2^m (m-1) \prod_{i=1}^m q^2(H_i) S_i + 2^{m-2} (m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j) S_j + 2^{m-4} (m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l) S_l + \dots < 1/2^m,$$

усі інші нерівності при $k = \overline{2, m-1}$, також виконуються, і, як наслідок, справедливі нерівності (11).

Дійсно, виходячи з того, що всі доданки в лівій частині нерівності (9) є невід'ємними, маємо

$$2^{m-2} (m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j) S_j + 2^{m-4} (m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l) S_l + \dots < 1/2^m.$$

З першої суми виділяємо доданок, що містить $\prod_{j=1}^{m-1} q^2(H_j) S_j$. Тоді

$$2^{m-1-1} (m-1-1) \prod_{i=1}^{m-1} q^2(H_i) S_i + 2^{m-1-3} (m-1-2) \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} q^2(H_j) S_j + \dots < 1/2^m.$$

Помножимо ліву і праву частину нерівності на 2 і отримаємо

$$2^{m_1} (m_1 - 1) \prod_{i=1}^{m_1} q^2(H_i) S_i + 2^{m_1-2} (m_1 - 2) \sum_{i=1}^{m_1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_1} q^2(H_j) S_j + \dots < 1/2^{m_1}, \quad (15)$$

де $m_1 = m - 1$.

Очевидно, що ця нерівність співпадає з передостанньою нерівністю в (14). Це означає, що визначник $m-1$ порядку задовольняє умові

$$(-1)^{m-1} \begin{vmatrix} p_{11} \dots & p_{1m-1} \\ p_{m-1,1} \dots & p_{m-1,m-1} \end{vmatrix} > 0.$$

Виділяючи з лівої частини нерівності (9) доданки за виключенням перших двох і проводячи аналогічні дії, отримаємо справедливість нерівності

$$(-1)^{m-2} \begin{vmatrix} p_{11} \dots & p_{1m-2} \\ p_{m-2,1} \dots & p_{m-2,m-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо систему нерівностей (14). Таким чином, при виконанні умови (9) справедливі нерівності (14) і система порівняння Бейлі (7),(8) буде асимптотично стійкою.

Теорему доведено.

Інший спосіб побудови лінійної системи порівняння був запропонований В.Д. Фурасовим [3]. Нехай підсистеми (4) асимптотично стійкі. Тоді система порівняння Фурасова буде мати вигляд

$$y' = Py, \quad (16)$$

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}},$$

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_{\min}(C_i)/(2 * \lambda_{\max}(H_i)), & i = j, \\ \sqrt{\lambda_{\max}(H_i)/\lambda_{\min}(H_j)} \|B_{ij}\|, & i \neq j, \end{cases} \quad (17)$$

У цьому випадку справедливе твердження, яке визначає критерій стійкості СП Фурасова.

Теорема 2 (перший критерій стійкості СП Фурасова). Для того, щоб система порівняння (16), (17) була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей

$$\begin{aligned} & 2^r \Delta_r \prod_{i=1}^r q(H_i) + 2^{r-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{r-1} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left(\sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_{r-1} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \dots t_{j_{r-1} j_1} \right) q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \dots q(H_{i_{r-1}}) + \\ & + 2^{r-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{r-2} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left(\sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_{r-2} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{r-2}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \dots t_{j_{r-2} j_1} \right) q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \dots q(H_{i_{r-2}}) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ j \neq i}}^r t_{ij} t_{ji} q(H_i) q(H_j) < 1, \quad r = \overline{2, m},$$

$$\text{де } q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}, i = \overline{1, m}, \Delta_r = (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & \dots & t_{1r} \\ t_{21} & 0 & \dots & t_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & 0 \end{vmatrix}, r = \overline{2, m}, \quad (19)$$

$$t_{ij} = \|B_{ij}\|, i, j = \overline{1, m}, i \neq j.$$

Доведення. Матриця P системи порівняння Фурасова є позитивною. Для дослідження стійкості СП знову використаємо критерій Севаст'янова-Котелянського. За ним для асимптотичної стійкості СП необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності (11).

Покажемо необхідність виконання умов (18). Нехай СП (16), (17) асимптотично стійка. Тоді справедливими є нерівності (11). Виносимо з кожного стовпця множник $1/\sqrt{\lambda_{\min}(H_j)}$, $j = \overline{1, m}$, а потім з кожного рядка $\sqrt{\lambda_{\max}(H_i)}$, $i = \overline{1, m}$, і враховуючи, що $p_{11} < 0$, перетворимо систему нерівностей (14) до вигляду

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2\lambda_{\max}(H_1)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & \|B_{12}\| & \dots & \|B_{1m}\| \\ \|B_{21}\| & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}} & \dots & \|B_{2m}\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|B_{m1}\| & \|B_{m2}\| & \dots & -\frac{\lambda_{\min}(C_m)}{2\lambda_{\max}(H_m)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_m)}{\lambda_{\max}(H_m)}} \end{vmatrix} > 0, \quad (20)$$

$$(-1)^m \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2\lambda_{\max}(H_1)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & \|B_{12}\| & \dots & \|B_{1m}\| \\ \|B_{21}\| & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}} & \dots & \|B_{2m}\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|B_{m1}\| & \|B_{m2}\| & \dots & -\frac{\lambda_{\min}(C_m)}{2\lambda_{\max}(H_m)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_m)}{\lambda_{\max}(H_m)}} \end{vmatrix} > 0.$$

Для довільного $r = \overline{2, m}$ справедливі нерівності [6]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & t_{12} & \dots & t_{1r} \\ t_{21} & \alpha_2 & \dots & t_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & \alpha_r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^r \alpha_i - \sum_{\substack{i, j=1 \\ j > i}}^r t_{ij} t_{ji} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^r \alpha_l + \sum_{\substack{i, j, k=1 \\ k > j > i}}^r t_{ij} t_{jk} t_{ki} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^r \alpha_l + \dots + (-1)^{r+1} \Delta_r, \quad (21)$$

де $\alpha_i = -\frac{\lambda_{\min}(C_i)}{2\lambda_{\max}(H_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_i)}{\lambda_{\max}(H_i)}}$, $t_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, $\Delta_r, r = \overline{2, m}$ – величини визначників порядку r , $r = \overline{2, m}$, з нульовими діагональними елементами $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Підставляючи значення $\alpha_i, i = \overline{1, m}$, отримаємо систему нерівностей

$$\begin{aligned} & 2^r \Delta_r \prod_{i=1}^r q(H_i) + 2^{r-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{m-1} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left(\sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \dots t_{j_{m-1} j_1} \right) q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \dots q(H_{i_{m-1}}) + \\ & + 2^{r-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{m-2} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left(\sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_{m-2} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{m-2}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \dots t_{j_{m-2} j_1} \right) q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \dots q(H_{i_{m-2}}) + \dots \\ & + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^r t_{ij} t_{ji} q(H_i) q(H_j) < 1, \quad r = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $q(H_i), i = \overline{1, m}$ визначені в (19). Таким чином, необхідність доведено.

Для доведення достатності зауважимо, що при виконанні нерівностей (18) справедливими є нерівності (20). За таких умов за критерієм Севаст'янова-Котелянського система порівняння Фурасова (16), (17) буде асимптотично стійкою. Теорему доведено.

Умови стійкості багатомірних систем (1) у вигляді СП Бейлі (7), (8) є більш жорсткими по відношенню до умов, що визначені в СП Фурасова (16), (17) [3]. Це означає, що у випадку асимптотичної стійкості СП Бейлі система порівняння Фурасова також буде асимптотично стійкою. Однак, пом'якшення вимог до процедури побудови системи порівняння у формі (16), (17) не дає можливості отримати необхідну та достатню умову стійкості СП, аналогічну до теореми 1.

З іншої сторони, припустимо, що для дослідження системи (1) побудована лінійна система порівняння Фурасова з матрицею $P = \{p_{ij}\}_{i, j=1, \overline{m}}$ у вигляді (16), (17). Сформуємо позитивну матрицю $R = \{r_{ij}\}_{i, j=1, \overline{m}}$ з елементами

$$r_{ij} = \begin{cases} p_{ii}, & i = j, \\ \sqrt{\lambda_{\max}(H_i) / \lambda_{\min}(H_j)} Z_i, & i \neq j, \end{cases} \quad (23)$$

де $Z_i = \max_{1 \leq j \leq m} \|B_{ij}\|, i = \overline{1, m}$, $H_i, i = \overline{1, m}$ – додатно визначені, симетричні матриці квадратичних функцій Ляпунова для ізолюваних підсистем (4).

Визначимо величину $\gamma \geq -\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p_{ii} < 0}} p_{ii}$. Очевидно, що матриці $\bar{P} = P + \gamma E$ і $\bar{R} = R + \gamma E$ будуть невід'ємними і, як слідує з теореми Перрона-Фробеніуса [5], мають максимальні за модулем невід'ємні дійсні власні числа. Крім цього, нескладно перевірити, що $\bar{P} \leq \bar{R}$, і справедлива нерівність $\lambda_{\max}(\bar{P}) \leq \lambda_{\max}(\bar{R})$ [5]. Це означає, що $\lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max}(R)$ і у випадку гурвіцеовості матриці R матриця P також буде гурвіцеовою.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3 (другий критерій стійкості СП Фурасова). Для того, щоб система порівняння (16), (17) була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$2^m (m-1) \prod_{i=1}^m q(H_i) Z_i + 2^{m-1} (m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j) Z_j + 2^{m-2} (m-3) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_l) Z_l + \dots < 1, \quad (24)$$

$$\text{де } q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}, i = \overline{1, m}, Z_i = \max_{1 \leq j \leq m} \|B_{ij}\|, i = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Доведення. Матриця P системи порівняння Фурасова (16), (17) і матриця R (23) є позитивними, при чому $P \leq R$. Проаналізуємо спектральні властивості матриці R . Використаємо критерій Севаст'янова-Котелянського. За ним для асимптотичної стійкості лінійної системи $y' = Ry$ необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$r_{11} < 0, \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \det R > 0. \quad (26)$$

Покажемо необхідність виконання умови (24). Нехай система $y' = Ry$ асимптотично стійка. Тоді справедливими є нерівності (26). Виносимо з кожного стовпця множник $1/\sqrt{\lambda_{\min}(H_j)}, j = \overline{1, m}$, а потім з кожного рядка $\sqrt{\lambda_{\max}(H_i)} Z_i, i = \overline{1, m}$, і враховуючи, що $p_{11} < 0$, перетворимо систему нерівностей (26) до вигляду

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2Z_1\lambda_{\max}(H_1)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2Z_2\lambda_{\max}(H_2)} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}} \end{vmatrix} > 0, \quad (27)$$

$$(-1)^m \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2Z_1\lambda_{\max}(H_1)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2Z_2\lambda_{\max}(H_2)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -\frac{\lambda_{\min}(C_m)}{2Z_m\lambda_{\max}(H_m)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_m)}{\lambda_{\max}(H_m)}} \end{vmatrix} > 0.$$

Використовуючи співвідношення (13) для довільного $r = \overline{2, m}$ і підставляючи значення діагональних елементів $\alpha_i = -\frac{1}{2Z_i q(H_i)}$, $i = \overline{1, m}$ з (27), отримаємо систему нерівностей

$$2^r(z-1)\prod_{i=1}^r q^2(H_i)Z_i + 2^{r-1}(r-2)\sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r q^2(H_j)Z_j + 2^{r-2}(r-3)\sum_{i,j=1}^r \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^r q(H_l)Z_l + \dots < 1 \quad (28)$$

де $q(H_i)$, $i = \overline{1, m}$ визначені в (25). Остання нерівність в (28) співпадає з (24). Таким чином, необхідність доведено.

Для доведення достатності покажемо, що при виконанні останньої нерівності в (28)

$$2^m(m-1)\prod_{i=1}^m q(H_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2)\sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3)\sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(H_l)Z_l + \dots < 1$$

усі інші нерівності при $r = \overline{2, m-1}$ також виконуються, і, як наслідок, справедливими є нерівності (26) та (27).

Дійсно, виходячи з того, що всі доданки в лівій частині нерівності (24) є невід'ємними, маємо

$$2^{m-1}(m-2)\sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3)\sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l > i \\ l \neq j}}^m q(H_l)Z_l + \dots < 1.$$

З першої суми виділяємо доданок, що містить $\prod_{j=1}^{m-1} q(H_j)Z_j$. Тоді

$$2^{m-1}(m-1-1)\prod_{i=1}^{m-1} q(H_i)Z_i + 2^{m-1-1}(m-1-2)\sum_{i=1}^{m-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} q(H_j)Z_j + \dots < 1,$$

або

$$2^{m_1}(m_1-1)\prod_{i=1}^{m_1} q(H_i)S_i + 2^{m_1-2}(m_1-2)\sum_{i=1}^{m_1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_1} q(H_j)S_j + \dots < 1$$

де $m_1 = m-1$. Ця нерівність співпадає з передостанньою нерівністю в (28). Це означає, що визначник $m-1$ порядку задовольняє умові

$$(-1)^{m-1} \begin{vmatrix} p_{11} \dots & p_{1m-1} \\ p_{m-1,1} \dots & p_{m-1,m-1} \end{vmatrix} > 0.$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо систему нерівностей (26). Таким чином, при виконанні умови (24) справедливі нерівності (26) і система $y' = Ry$ асимптотично стійка. Виходячи з того, що $\lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max}(R)$ матриця P системи порівняння Фурасова (16), (17) буде гурвіцевою, а система – асимптотично стійкою. Теорему доведено.

Як вже було сказано вище, із стійкості СП слідує стійкість вихідної системи. Зворотне твердження вірно не завжди, тобто метод ВФЛ носить достатній характер. Зрозуміло, виникає бажання отримати такі умови у вигляді СП, які б були найбільш близькими до необхідних. Аналіз систем порівняння показав, що вигляд СП залежить від вибору функцій Ляпунова, які входять до ВФЛ.

Нехай для системи (1) побудована СП Бейлі (7), (8). Функції Ляпунова квадратичного вигляду (5) $v_1(x_1), v_2(x_2), \dots, v_m(x_m)$ складають векторну функцію Ляпунова. Припустимо, що в результаті застосування деякої процедури отримано інші функції Ляпунова $\bar{v}_i(x_i) = (x_i^T, \bar{H}_i x_i), i = \overline{1, m}$.

Теорема 4. Якщо для двох векторних функцій Ляпунова справедливі співвідношення $q(H_i) \geq q(\bar{H}_i), i = \overline{1, m}$, і хоча б для одного $j = \overline{1, m}$ $q(H_j) < q(\bar{H}_j)$, то рівень стійкості СП Бейлі, побудованої по функціям $\bar{v}_i(x_i), i = \overline{1, m}$, буде вищий за рівень стійкості вихідної СП Бейлі.

Доведення. Розглянемо СП (7), (8). Критерієм її стійкості є виконання нерівності (9). Очевидно, що при заданому розбитті системи (1) на підсистеми (3), тобто при фіксованих $S_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \|B_{ik}\|^2, i = \overline{1, m}$ із зменшенням значень

$$q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}, i = \overline{1, m}, \text{ величина лівої частини нерівності (9) зменшується.}$$

Можливі 2 випадки.

1. СП Бейлі асимптотично стійка. Тоді при виконанні умов теореми буде справедливим співвідношення

$$\begin{aligned} 1/2^m &> 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(H_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l)S_l + \dots > \\ &> 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(\bar{H}_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(\bar{H}_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(\bar{H}_l)S_l + \dots \end{aligned}$$

Звідси

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(\bar{H}_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(\bar{H}_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(\bar{H}_l)S_l + \dots < 1/2^m \quad (29)$$

і система порівняння Бейлі, побудована за функціями $\bar{v}_i(x_i) = (x_i^T, \bar{H}_i x_i), i = \overline{1, m}$, також буде асимптотично стійкою.

2. СП нестійка. Тоді

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(H_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l)S_l + \dots \geq 1/2^m.$$

Якщо виконуються умови теореми, то

$$\begin{aligned} 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(\bar{H}_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(\bar{H}_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(\bar{H}_l)S_l + \dots < \\ < 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(H_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(H_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(H_l)S_l + \dots \end{aligned}$$

і, як наслідок, в результаті зміни функцій Ляпунова, що складають ВФЛ, можна побудувати або асимптотично стійку СП Бейлі (за умов виконання (29)), або систему порівняння, що має менший рівень нестійкості у вигляді

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q^2(\bar{H}_i)S_i + 2^{m-2}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q^2(\bar{H}_j)S_j + 2^{m-4}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q^2(\bar{H}_l)S_l + \dots - 1/2^m \geq 0,$$

що може служити оцінкою якості отриманої СП Бейлі. Теорему доведено.

Аналогічний результат можна отримати і для СП Фурасова (16), (17). Припустимо, що для системи (1) побудовано дві векторні функції Ляпунова з функцій квадратичного вигляду $v_i(x_i) = (x_i^T, H_i x_i), i = \overline{1, m}$ та $\bar{v}_i(x_i) = (x_i^T, \bar{H}_i x_i), i = \overline{1, m}$.

Теорема 5. Якщо для двох векторних функцій Ляпунова виконуються співвідношення $q(H_i) \geq q(\bar{H}_i), i = \overline{1, m}$, і хоча б для одного $j = \overline{1, m}$ $q(H_j) < q(\bar{H}_j)$, то рівень стійкості СП Фурасова, побудованої по функціям $\bar{v}_i(x_i), i = \overline{1, m}$, буде вищий за рівень стійкості вихідної СП Фурасова.

Доведення. Розглянемо СП Фурасова (16), (17). Критерієм її стійкості є виконання нерівності (24). Очевидно, що при заданому розбитті системи (1) на підсистеми (3), тобто при фіксованих $Z_i = \max_{1 \leq j \leq m} \|B_{ij}\|, i = \overline{1, m}$, із зменшенням

значень $q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}, i = \overline{1, m}$ величина лівої частини нерівності (18) зменшується.

Можливі два випадки.

1) СП Фурасова асимптотично стійка. Тоді при виконанні умов теореми справедливе співвідношення

$$1 > 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(H_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(H_l)Z_l + \dots >$$

$$> 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(\overline{H}_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(\overline{H}_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(\overline{H}_l)Z_l + \dots$$

$$\text{Звідси} \quad 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(\overline{H}_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(\overline{H}_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(\overline{H}_l)Z_l + \dots < 1 \quad (30)$$

і СП Фурасова, побудована по функціям $\overline{v}_i(x_i) = (x_i^T, \overline{H}_i x_i), i = \overline{1, m}$, також буде асимптотично стійкою.

Нескладно показати, що при збільшенні $q(H_i), i = \overline{1, m}$ можна отримати СП, яка не буде асимптотично стійкою.

2) СП Фурасова нестійка. Тоді

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(H_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(H_l)Z_l + \dots \geq 1$$

Якщо виконано умови теореми 5, то

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(\overline{H}_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(\overline{H}_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(\overline{H}_l)Z_l + \dots <$$

$$< 2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(H_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(H_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(H_l)Z_l + \dots$$

Очевидно, що при зміні функцій Ляпунова, які складають векторну функцію Ляпунова, може бути отримана або асимптотично стійка СП (за умов виконання нерівності (30)), або, в протилежному випадку, СП, що має менший рівень нестійкості у вигляді величини

$$2^m(m-1) \prod_{i=1}^m q(\overline{H}_i)Z_i + 2^{m-1}(m-2) \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m q(\overline{H}_j)Z_j + 2^{m-2}(m-3) \sum_{i,j=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^m q(\overline{H}_l)Z_l + \dots - 1 \geq 0,$$

яка може служити оцінкою якості побудованої системи порівняння Фурасова (16), (17). Теорему доведено.

Таким чином, при виконанні умов теорем довільну систему порівняння можна покращити у розумінні запасу стійкості. Для цього вибір функцій Ляпунова для підсистем (4) потрібно здійснювати з урахуванням критерію якості у вигляді

$$q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}} \rightarrow \min_{H_i, C_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (31)$$

де додатньо визначені, симетричні матриці $H_i, C_i, i = \overline{1, m}$, зв'язані матричними рівняннями Ляпунова $A_i^T H_i + H_i A_i = -C_i, i = \overline{1, m}$.

При цьому, як вже було відзначено, умови стійкості багатомірних систем (1) у вигляді СП Бейлі (7),(8) є більш жорсткими по відношенню до умов, що визначені в СП Фурасова (16), (17) [3]. Це означає, що за умов асимптотичної стійкості СП Бейлі система порівняння Фурасова також буде асимптотично стійкою. Перевіримо це за допомогою отриманих вище тверджень.

Нехай систему (1) представлено у вигляді двох підсистем (3). За умов асимптотично стійких систем порівняння Бейлі (7), (8) та Фурасова (16), (17) справедливі співвідношення

$$2^2 q(H_1)q(H_2)Z_1 Z_2 < 1 \quad (32)$$

де $q(H_i)$, $S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ij}\|$, $Z_i = \max_{1 \leq j \leq m} \|B_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $m = 2$ - визначені в (10) та (25) відповідно.

Виходячи з того, що $Z_1 = \|B_{12}\|$, $Z_2 = \|B_{21}\|$, $S_1 = \|B_{12}\|^2$, $S_2 = \|B_{12}\|^2$, нерівності (32), (33) перепишемо у вигляді

$$2^2 q(H_1) q(H_2) \|B_{12}\| \|B_{21}\| < 1,$$

$$2^4 q(H_1) q(H_2) \|B_{12}\|^2 \|B_{21}\|^2 < 1,$$

які є тотожними.

У випадку розбиття системи (1) на m ($m > 2$) підсистем умови, які отримані для системи порівняння Бейлі, є дійсно більш жорсткими порівняно з умовами другого критерію стійкості СП Фурасова, що перевіряється звичайним виписуванням відповідних умов для конкретних значень m .

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240с. 2. Bailey F.N. The application of Lyapunov second method to interconnected systems // Journ. SIAM Contr. — Ser.A. — Vol.3. — №3. — 1966. — Р.443–462. 3. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 248с. 4. Ивохин Е.В. К вопросу об оптимизации построения линейных систем сравнения // Дифференциальные уравнения. — 1986. — Т.22. — №11. — С. 2000–2001. 5. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с. 6. Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1966. — 385 с.

Надійшла до редколегії 28.09.2007

УДК 517.929

В. Козоріз, д-р фіз.-мат. наук, проф.
О. Кузьмич, канд. фіз.-мат. наук

ОЦІНКА СТІЙКОСТІ ПРИСКОРЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ВІЛЬНОГО ЗАРЯДУ

Проведено аналіз руху вільного заряду з трьома степенями свободи під дією кулонівських сил пар нерухомих зарядів, які рівновіддалені один від одного і від осі прискорення, розміщуючись в одній площині. Знайдено умови, за яких при послідовному відключенні найближчої притягуючої пари зарядів прямотлінійна траєкторія руху заряду є стійкою. Одержано розв'язок незбуреного руху та проведено оцінку розв'язку розглянутої динамічної системи.

The motion of a free charge possessing three degrees of freedom is analyzed. The charge is accelerated by Coulomb's forces of charges pairs fixed equidistantly with each other and acceleration axis, and placing in the same plane. Conditions under which the nearest attracting pair must be successively switched off to avoid the rectilinear motion instability are found. Task solution for the unperturbed motion is derived and the solution estimate of the considered dynamic system is carried out.

1. Опис моделі.

Прискорювальна система утворюється нерухомими парами зарядів, кожна з яких кулонівським притяганням наближає вільний заряд а потім послідовно миттєво відключається по мірі його наближення для створення прискорюючого ефекту. Пари нерухомих зарядів розміщені в одній площині з однаковим кроком і симетрично осі прискорення. В ідеалі (одновимірний рух в напрямку прискорення) для максимального прискорюючого ефекту відключення кожної найближчої прискорюючої пари могло б відбуватись в момент досягнення нульової відстані між нею та вільним зарядом в напрямку прискорення. Проте, оскільки заряд вільний, сили, що діють в напрямку, перпендикулярному напрямку прискорення, можуть розвинути нестійкість і суттєво змінити динамічну поведінку. Тому в практичному сенсі важливо встановити границю, якій, для гарантованої стійкості прискорення, необхідно задовольнити відключенням силової дії тих нерухомих зарядів, яка призводить до появи і розвитку нестійкості. Найбільш простим формальним варіантом розв'язку цієї проблеми є розгляд динамічної системи у вигляді декількох підсистем, які відрізняються правими частинами диференціальних рівнянь руху, тобто діючими на вільний заряд силами і початковими умовами для кожної з них. Фізично це означає, що та пара нерухомих зарядів, сили яких призводять до розвитку нестійкості, миттєво відключається, а рух заряду під дією сил інших пар зарядів залишається стійким відносно збурень, перпендикулярних напрямку прискорення.

На основі формалізму Лагранжа можна отримати таку систему рівнянь руху вільного заряду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\sum_{i=0}^n \frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{x}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a+z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \\ \ddot{y} &= -\sum_{i=0}^n \frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(ip-y)}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(ip-y)}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a+z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \\ \ddot{z} &= -\sum_{i=0}^n \frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(a-z)}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a+z)}{\left[x^2 + (ip-y)^2 + (a+z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

де m – маса заряду; x, y, z – декартові координати (степені свободи); a – відстань нерухомого заряду до осі Oy ; ip , де $i = \overline{0, n}$, – відстань від початку координат до нерухомих пар зарядів в напрямку прискорення (осі Oy); $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ – величини зарядів. Нижче буде розглянуто чотири пар нерухомих зарядів, тобто випадок $N = 4$.

Нехай відстань $a \ll p$. По мірі руху заряду по осі Oy на нього діють притягуючі пари, які по черзі вимикаються при досягненні зарядом певних значень координат y , що є межами областей стійкості системи в полі дії притягуючих пар. Будемо розглядати динаміку рухомого заряду в полі дій наборів притягуючих пар як функціонування окремих підсистем гібридної динамічної системи.

Припускаємо спочатку, що рух заряду відбувається в площині yOz . Одержимо:

$$\ddot{y} = -\sum_{i=0}^n \frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(ip-y)}{\left[(ip-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(ip-y)}{\left[(ip-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

$$\ddot{z} = -\sum_{i=0}^n \frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(a-z)}{\left[(ip-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a+z)}{\left[(ip-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Отже, одержали гібридну систему, яка описується двома нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку, $i = \overline{0,3}$. Прямолінійна траєкторія руху заряду $y = y(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, $z = 0$, $\dot{z} = 0$ як допустимий частинний розв'язок цієї системи, в загальному випадку при $t \rightarrow \infty$ може бути нестійкою.

Розглянемо випадок, коли заряд рухається лише під дією найближчої притягуючої пари. Нехай при цьому по мірі наближення рухомого заряду одночасно з вимиканням найближчої пари відбувається вмикання наступної пари зарядів, яка тепер являється притягуючою, і т.д. Будемо розглядати динаміку рухомого заряду в полі дії кожної притягуючої пари як функціонування окремої підсистеми гібридної динамічної системи. Одержимо:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(ip-y)}{\left[(ip-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(ip-y)}{\left[(ip-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \ddot{z} = -\frac{qq_i}{m} \left\{ \frac{-(a-z)}{\left[(ip-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a+z)}{\left[(ip-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{cases}, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (2)$$

Позначимо підсистеми гібридної системи таким чином: систему, що функціонує на проміжку $0 < t < t_1$ позначимо через A_1 ; на проміжку $t_1 < t < t_2$ — A_2 ; на проміжку $t_2 < t < t_3$ — A_3 ; на проміжку $t_3 < t < t_4$ — A_4 .

Здійснимо оцінку розв'язку гібридної системи (2) в кінцевий момент функціонування методом функцій Ляпунова виду $V(x, t) = e^{y^T} x^T x$, використовуючи умову "зшивання" розв'язків. Для цього приведемо підсистеми до лінійного вигляду, використовуючи розклад в ряд Тейлора в околі особливих точок, та знайдемо моменти часу, в які, для умови збереження стійкості в напрямку осі Oz , повинно відбутись перемикання з однієї підсистеми на іншу.

2. Одержання розв'язку незбуреного руху системи.

Розглянемо першу підсистему гібридної системи (2), тобто рух заряду на першій ділянці. Система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{qq_3}{m} \left\{ \frac{-(3p-y)}{\left[(3p-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(3p-y)}{\left[(3p-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \ddot{z} = -\frac{qq_3}{m} \left\{ \frac{-(a-z)}{\left[(3p-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a+z)}{\left[(3p-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{cases}, \quad 0 \leq t < t_1.$$

Неважко перевірити, що якщо частинка починає рухатись вздовж осі Oy з початковими умовами $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, то вона весь час залишатиметься на цій осі. Інакше кажучи, незбурений рух $z(t) \equiv 0$ визначається лише одним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{y}_1 = -2Q^2 \frac{y_1}{\left[y_1^2 + a^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad Q^2 = \frac{qq_3}{m} > 0, \quad y_1 = 3p - y.$$

Помножимо обидві частини цього диференціального рівняння на $2y_1' dt$. Тоді отримаємо

$$2\ddot{y}_1 y_1' dt = -4Q^2 \frac{y_1}{\left[y_1^2 + a^2\right]^{\frac{3}{2}}} y_1' dt,$$

або

$$d(\dot{y}_1)^2 = -4Q^2 \frac{y_1}{[y_1^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} dy_1.$$

Після інтегрування одержаний виразу, маємо перший інтеграл вигляду

$$(\dot{y}_1)^2 = -4Q^2 \int_{y_1^0}^{y_1} \frac{y_1}{[y_1^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} dy_1 = \frac{4Q^2}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} + c.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{1}{2}(\dot{y}_1)^2 - \frac{2Q^2}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} = c.$$

Як відомо, якщо перший інтеграл рівняння руху другого порядку має вигляд $\frac{1}{2}(\dot{y}_1)^2 + \Pi(y_1) = c$,

то функція $z = \Pi(y_1)$ є потенціальною енергією системи, і якщо в точці $y_1 = 0$ вона має мінімум, стан рівноваги є стійким. В розглянутому випадку

$$\Pi(y_1) = -\frac{2Q^2}{\sqrt{y_1^2 + a^2}}.$$

В точці $y_1 = 0$ функція дорівнює $\Pi(0) = -\frac{2Q^2}{a} < 0$, а при $y_1 \rightarrow \pm\infty$ буде $\Pi(y_1) \rightarrow -0$. Таким чином, рівняння

$$\ddot{y}_1 = -2Q^2 \frac{y_1}{[y_1^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

допускає стан рівноваги $y_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, який є стійким.

Спробуємо знайти розв'язки рівняння незбуреного руху. Поклавши

$$c = \dot{y}_1^2(0) - \frac{4Q^2}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}},$$

перепишемо рівняння першого порядку у вигляді

$$(\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_1^2(0)) = 4Q^2 \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} \right].$$

Звідси

$$(\dot{y}_1 - \dot{y}_1(0))(\dot{y}_1 + \dot{y}_1(0)) = 4Q^2 \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} \right].$$

Отже, маємо два диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - \dot{y}_1(0) &= 2Q \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} \right], \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_1(0) &= 2Q \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} \right] \end{aligned}$$

або

$$\dot{y}_1 - \frac{2Q}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} = \dot{y}_1(0) - \frac{2Q}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}}, \quad \dot{y}_1 + \frac{2Q}{\sqrt{y_1^2 + a^2}} = \frac{2Q}{\sqrt{y_1^2(0) + a^2}} - \dot{y}_1(0).$$

Розглянемо перше рівняння. В частинному випадку $J_0 = 0$, розділивши змінні, отримаємо: $\sqrt{y_1^2 + a^2} dy = 2Q dt$.

Звідси

$$\int \sqrt{y_1^2 + a^2} dy = 2Qt + c.$$

Обчислимо інтеграл, здійснивши заміну $y_1 = a(\operatorname{sh}\xi)$, де функція $\operatorname{sh}\xi$ є гіперболічним синусом. Отримаємо

$$\int (a^2 \operatorname{sh}^2 \xi + a^2)^{\frac{1}{2}} a(\operatorname{ch}\xi) d\xi = a^{\frac{3}{2}} \int \operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} \xi d\xi.$$

Використовуючи залежність

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} [2E(\alpha, r) - F(\alpha, r)], \quad \alpha = \arccos \frac{1 - \operatorname{sh} 2ax}{1 + \operatorname{sh} 2ax}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

де $F(\varphi, k)$ – еліптичний інтеграл 1-го роду, $E(\varphi, k)$ – еліптичний інтеграл 2-го роду, одержимо

$$a^{\frac{3}{2}} \int ch^{\frac{3}{2}} \xi d\xi = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} [2E(\alpha, r) - F(\alpha, r)], \quad \alpha = \arccos \frac{1 - sh\xi}{1 + sh\xi}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, після інтегрування отримаємо частинний вигляд розв'язку рівняння незбуреного руху у неявному вигляді:

$$a^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \{2E(\alpha, r) - F(\alpha, r)\} = 2Qt + c, \quad \alpha = \arccos \frac{a - 3p + y}{a + 3p - y}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

розв'язавши яке, можна отримати $y = \varphi(t, c)$.

3. Визначення областей стійкості.

Визначимо області стійкості незбуреного руху системи (1). Використовуючи теорію стійкості за частиною змінних [1, 2], розкладемо потенціальну енергію системи в ряд Тейлора та знайдемо умови, при яких $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i} > 0$. Результатом розкладу буде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i} = \frac{2}{\sqrt{i^2 p^2 - 2ipy + y^2 + a^2}} + \frac{x^2}{(i^2 p^2 - 2ipy + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(ip - y)^2 - 2a^2}{((ip - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} z^2.$$

Знайдемо умови, за яких $-\frac{(ip - y)^2 - 2a^2}{((ip - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} z^2 > 0$, розглядаючи кожну з підсистем окремо. Покладемо $a = 1, p = 1$.

Тоді:

– для першої підсистеми ($n = 0$) одержимо: $-\frac{y^2 - 2a^2}{(y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} z^2 > 0$. Звідси $|y| > 1,4$. В нашому випадку необхідно вибрати умову $y > 1,4$;

– для другої підсистеми $n = 1$, тому повинно бути $\frac{y^2 - 2}{(y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1 - y)^2 - 2}{((1 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} > 0$, звідки $y > 2,3$.

– для третьої підсистеми $n = 2$. Одержимо: $\frac{y^2 - 2}{(y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1 - y)^2 - 2}{((1 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(2 - y)^2 - 2}{((2 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} > 0$. Звідси $y > 3,25$.

– для $n = 3$ матимемо: $\frac{y^2 - 2}{(y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1 - y)^2 - 2}{((1 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(2 - y)^2 - 2}{((2 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(3 - y)^2 - 2}{((3 - y)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} > 0$. Звідси $y > 4,1$.

Визначимо області стійкості незбуреного руху системи (2). Нехай перша підсистема ($i = 3$) починає функціонувати в момент $t_0 = 0$. Як відзначалось вище, потенціальна енергія системи має вигляд

$$U(x, y, z) = -\frac{qq_3}{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(3p - y)^2 + (a - z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(3p - y)^2 + (a + z)^2}} \right\}.$$

Знайдемо координати y критичної точки області стійкості на прямій $z = 0$. Умова $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0$ має вигляд

$$\left[(3p - y)^2 + (a - z)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{2(a - z)^2 - (3p - y)^2}{(3p - y)^2 + (a - z)^2} + \left[(3p - y)^2 + (a + z)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{2(a + z)^2 - (3p - y)^2}{(3p - y)^2 + (a + z)^2} < 0.$$

В аналітичному вигляді розв'язати отриману нерівність не уявляється можливим. Розглянемо пряму $z = 0$. На цій прямій

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial z} \right|_{z=0} = -2 \frac{qq_3}{m} \left\{ 3 \left[(3p - y)^2 + a^2 \right]^{\frac{5}{2}} a^2 - \left[(3p - y)^2 + a^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Тому отримаємо нерівність

$$3 \left[(3p - y)^2 + a^2 \right]^{\frac{5}{2}} a^2 - \left[(3p - y)^2 + a^2 \right]^{\frac{3}{2}} < 0.$$

Її розв'язком буде $y_1 < y < y_2$, $y = 3p - a\sqrt{2}$, та $y = 3p + a\sqrt{2}$.

Таким чином при русі заряду досить близько від осі Oy на проміжку $y_2 < y < \infty$ має місце його притягання до осі (стійкість за змінною z). Оскільки при досягненні найближчої границі області стійкості, а саме точки $y_1 = 3p + a\sqrt{2}$, притягуюча здатність відповідної пари зарядів нейтралізується, то розв'язок $y_1 = 3p - a\sqrt{2}$ не розглядається. Для

інших підсистем координати меж областей стійкості визначаються аналогічним чином. Вони дорівнюють $y_2 = 2p + a\sqrt{2}$, $y_3 = p + a\sqrt{2}$, $y_4 = a\sqrt{2}$.

4. Визначення параметрів прискорювальної системи

Для визначення параметрів системи (2) спочатку проведемо лінеаризацію її підсистем. Далі з умови мінімуму потенціальної енергії системи визначимо координати перемикання підсистем. Після цього, задавши початкові умови першої підсистеми та знайшовши шляхом розв'язку відповідних задач Коші початкові умови для наступних підсистем, визначимо моменти перемикання інших підсистем. І, нарешті, використовуючи значення моментів часу перемикань, здійснимо оцінку розв'язку системи.

1. Лінеаризація підсистем гібридної системи.

Спочатку проведемо лінеаризацію підсистеми A_i , ($i = 3$), час функціонування якої належить проміжку $0 < t < t_1$. В цьому випадку вона має вигляд

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{qq_3}{m} \left\{ \frac{-(3p-y)}{\left[(3p-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(3p-y)}{\left[(3p-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \ddot{z} = -\frac{qq_3}{m} \left\{ \frac{-(a-z)}{\left[(3p-y)^2 + (a-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a+z)}{\left[(3p-y)^2 + (a+z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{cases}, \quad 0 \leq t < t_1.$$

Викликає інтерес поведінка системи в околі найближчої притягуючої пари. Тому лінеаризуємо дану систему в околі її особливої точки $z = 0$, $y = 3p$, розклавши в ряд Тейлора. Обмежившись лінійними членами розкладу в ряд Тейлора в точці $y = 3p$, одержимо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2qq_3}{a^3m}(y-3p), \quad \ddot{z}(t) = \frac{4qq_3}{a^3m}z.$$

Зведемо її до системи першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2 \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{2qq_3}{a^3m}(y_1-3p) \\ \dot{z}_1(t) = z_2 \\ \dot{z}_2(t) = \frac{4qq_3}{a^3m}z_1, \end{cases}$$

Отже, матриця A_i для цієї системи має вигляд:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2qq_3}{a^3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4qq_3}{a^3m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Власними числами системи лінійного наближення будуть

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega, \quad \lambda_3 = \sqrt{2}\omega, \quad \lambda_4 = -\sqrt{2}\omega, \quad \omega = \sqrt{2\frac{qq_3}{a^3m}} > 0.$$

Як видно із зовнішнього вигляду, однорідна система "розщеплюється" на дві незалежні підсистеми, розв'язками яких будуть

$$\begin{aligned} y_1^0(t) &= c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, & y_2^0(t) &= c_1 \omega \cos \omega t - c_2 \omega \sin \omega t, \\ z_1^0(t) &= c_3 e^{-\sqrt{2}\omega t} + c_4 e^{\sqrt{2}\omega t}, & z_2^0(t) &= -\sqrt{2}c_3 \omega e^{-\sqrt{2}\omega t} + \sqrt{2}c_4 \omega e^{\sqrt{2}\omega t}. \end{aligned}$$

Перша підсистема відповідає за процес руху вздовж осі Oy . Легко бачити, що цей рух є коливальним і це повністю відповідає фізичній суті розглянутої задачі.

Друга підсистема відповідає за рух системи вздовж осі Oz . Для системи лінійного наближення існує додатне власне число. Таким чином за теоремою про лінійне наближення рух в цьому напрямку є нестійкий.

Взагалі кажучи, існують гібридні системи, які складені з нестійких підсистем, але за рахунок вдалого переключення гібридна система може бути асимптотично стійкою. І навпаки, з декількох асимптотично стійких підсистем можна сконструювати нестійку гібридну систему. Це вдається за допомогою вибору ділянок стійкості та нестійкості певних підсистем. Але фазовий портрет другої підсистеми являє собою особливу точку типу "сідло", сепаратиси якого є прямими $z_2 = \pm \sqrt{2}\omega z_1$.

Причому сепаратриса $z_2 = \sqrt{2}\omega z_1$, яка знаходиться в додатній чверті, є нестійкою. Таким чином, довільний розв'язок з додатними початковими умовами прямує до нескінченності (причому монотонно), і спроектувати стійку гібридну систему за рахунок вибору перемикачів не вдається. Але провести оцінку величини збурень [1] можливо.

Лінеаризація інших підсистем проводиться за аналогічною схемою. Матриці лінійного наближення відрізняються лише величиною притягуючих зарядів. Отже,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2qq_2}{a^3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4qq_2}{a^3m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2qq_1}{a^3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4qq_1}{a^3m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2qq_0}{a^3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4qq_0}{a^3m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Визначення моментів перемикачів.

Обмежившись лінійними членами розкладу в ряд Тейлора в точці $y = ip$ розглядаємо набір систем диференціальних рівнянь

$$\ddot{y} = -2\frac{qq_i}{a^3m}[y - ip], \quad \ddot{z} = 4\frac{qq_i}{a^3m}z, \quad i = 3, 0.$$

Моменти часу перемикачів будемо визначати таким чином:

Перша підсистема. Для першої підсистеми маємо такі дані $i = 3, j = 0, t_0 < t < t_1$.

Початкове значення часу рівне: $t_0 = 0$. Початкове значення координати рівне: $y_0 = 4p$. Початкове значення швидкості рівне: $y'_0 = 0$. Кінцеве значення координати рівне: $y_1 = 3p + a\sqrt{2}$. Необхідно знайти кінцеве значення часу функціонування. Згідно позначень:

$$\omega_3^2 = \frac{2qq_3}{a^3m}, \quad L_3 = 3p \cdot \omega_3^2.$$

Одержимо наступну задачу Коші:

$$\ddot{y}(t) + \omega_3^2 y = L_3,$$

при

$$y(0) = y_0 = 4p, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язок задачі Коші дорівнює

$$y_1(t) = (y_0 - 3p) \cos \omega_3 t + 3p. \quad (3)$$

Момент часу перемикачів дорівнює

$$t_1 = \frac{1}{\omega_3} \arccos\left(\frac{y_1 - 3p}{y_0 - 3p}\right) = \frac{1}{\omega_3} \arccos\left(\frac{a\sqrt{2}}{p}\right).$$

Крім того, необхідно визначити кінцеве значення швидкості в кінцевий момент $t = t_1$, яке використовуватиметься як одна з крайових умов для наступної підсистеми. Для цього продиференціюємо одержане рівняння руху (3) і визначимо функцію швидкості:

$$v_1(t) = \dot{y}_1(t) = (3p - y_0) \omega_3 \sin \omega_3 t.$$

Отже, кінцеве значення швидкості в момент $t = t_1$ дорівнює

$$v_1(t_1) = y'_1 = (3p - y_0) \omega_3 \sin\left(\omega_3 \arccos\left(\frac{a\sqrt{2}}{p}\right)\right).$$

Друга підсистема. Маємо наступні дані: $i = 2, j = 1, t_1 < t < t_2$, початкове значення часу рівне:

$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \arccos\left(\frac{a\sqrt{2}}{p}\right)$, початкове значення координати рівне: $y_1 = 3p + a\sqrt{2}$, кінцеве значення координати рівне:

$y_2 = 2p + a\sqrt{2}$, початкове значення швидкості рівне: $y'_1 = v_1 = (3p - y_0) \omega_3 \sin\left(\omega_3 \arccos\left(\frac{a\sqrt{2}}{p}\right)\right)$. Знаходимо кінцевий момент t_2 . Маємо:

$$\omega_2^2 = \frac{2qq_2}{a^3m}, \quad L_2 = 2p \cdot \omega_2^2.$$

Одержимо наступну задачу Коші:

$$\ddot{y}(t) + \omega_2^2 y = L_2,$$

при

$$y(t_1) = y_1 = 3p + a\sqrt{2}, \quad y'(t_1) = y'_1 = (3p - y_0) \omega_3 \sin\left(\omega_3 \arccos\left(\frac{a\sqrt{2}}{p}\right)\right).$$

Розв'язок її має вигляд

$$y_2(t) = (y_1 - 2p) \cos[\omega_2(t - t_1)] + \frac{y_1'}{\omega_2} \sin[\omega_2(t - t_1)] + 2p,$$

а момент часу $t = t_2$ дорівнює

$$t_2 = \frac{1}{\omega_2} \left(\arccos \frac{y_1'}{\omega_2 \sqrt{(y_1 - 2p)^2 + \left(\frac{y_1'}{\omega_2}\right)^2}} + \arccos \frac{y_2 - 2p}{\sqrt{(y_1 - 2p)^2 + \left(\frac{y_1'}{\omega_2}\right)^2}} \right) + \frac{1}{\omega_1} \arccos \left(\frac{a\sqrt{2}}{p} \right).$$

Третя підсистема. Маємо наступні дані: $i = 1$, $j = 2$, $t_2 < t < t_3$, початкове значення часу рівне: $t = t_2$, початкове значення координати: $y_2 = 2p + a\sqrt{2}$, кінцеве значення координати рівне: $y_3 = p + a\sqrt{2}$, початкове значення швидкості рівне: $y_2'(t) = v_2 = (p + a\sqrt{2})\omega_2 \sin(\omega_2(t - t_1)) + y_1' \cos(t - t_1) + 2p$. Знаходимо час t_3 .

Позначимо:

$$\omega_3^2 = \frac{2qq_1}{a^3m}, \quad L_3 = p \cdot \omega_3^2.$$

Одержимо наступну задачу Коші:

$$\ddot{y}(t) + \omega_3^2 y = L_3,$$

при

$$y(t_2) = y_2 = 2p + a\sqrt{2},$$

Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y_3(t) = (p + a\sqrt{2}) \cos[\omega_3(t - t_2)] + \frac{y_2'}{\omega_3} \sin[\omega_3(t - t_2)] + p,$$

а момент часу $t = t_3$ дорівнює

$$t_3 = \frac{1}{\omega_3} \left(\arccos \frac{y_2'(t_2)}{\omega_3 \sqrt{(p + a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{y_2'(t_2)}{\omega_3}\right)^2}} + \arccos \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(p + a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{y_2'(t_2)}{\omega_3}\right)^2}} \right) + t_2.$$

Четверта підсистема. Маємо наступні дані: $i = 0$, $j = 3$, $t_3 < t < t_4$, початкова координата $y_3 = p + a\sqrt{2}$, кінцева координата: $y_4 = a\sqrt{2}$, початкова швидкість: $y_3'(t) = v_3 = -(p + a\sqrt{2})\omega_3 \sin(\omega_3(t - t_2)) + y_2'(t_2) \cos(t - t_2)$. Знаходимо час t_4 .

Позначимо:

$$\omega_4^2 = \frac{2qq_0}{a^3m}, \quad L_4 = p \cdot \omega_4^2.$$

Маємо рівняння

$$\ddot{y}(t) + \omega_4^2 y = L_4,$$

при відповідних початкових умовах. Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y_4(t) = (p + a\sqrt{2}) \cos[\omega_4(t - t_3)] + \frac{y_3'}{\omega_4} \sin[\omega_4(t - t_3)] + p,$$

а момент часу $t = t_4$ дорівнює

$$t_4 = \frac{1}{\omega_4} \left(\arccos \frac{y_3'(t_3)}{\omega_4 \sqrt{(p + a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{y_3'(t_3)}{\omega_4}\right)^2}} + \arccos \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(p + a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{y_3'(t_3)}{\omega_4}\right)^2}} \right) + t_3.$$

УДК 004.8

Ю. Крак, д-р фіз.-мат. наук, проф., О. Бармак., Г. Єфімов, канд. .фіз.-мат. наук

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ МІМІЧНИХ ВИРАЗІВ ЕМОЦІЙ ОБЛИЧЧІ ЛЮДИНИ

В роботі представлено цілісну інформаційну технологію аналізу мимічних виразів емоцій на обличчі людини. Міміка емоційних станів людини представлена у вигляді лінійної комбінації деяких базових станів. Параметри моделі отримуються за допомогою методу гнучких шаблонів з використанням NURBS-кривих. Довільна емоція конкретної людини розпізнається як опукла комбінація станів запропонованого базового простору.

В роботі розглядається задача моделювання мимічних виразів емоцій згідно запропонованого у [1] формального опису базових емоцій. Для пошуку простору характеристичних ознак, побудови базису цього простору, відтворення похідних емоційних станів з наступним застосуванням опуклої комбінації, пропонується наступне [2,3]:

- створення множини фотографічних зображень мимічних проявів на обличчі, які відповідають ситуаціям, у яких виникають базові емоції, опис міміки, властиві цим емоціям;
- аналіз отриманої множини з метою виявлення областей, які містять характеристичні ознаки емоцій та їх опис;
- створення у просторі характеристичних ознак базису для наступного розкладу по ньому довільних векторів мимічних проявів емоційних станів (як опуклої комбінації базисних емоційних станів);

В [2] запропоновано для моделювання міміки емоційних станів людини використовувати лінійну опуклу комбінацію деяких базових станів. В ході цих досліджень було отримано 21 характеристичну ознаку, комбінація яких утворює базис мимічних виразів емоцій. Тобто, мимічні вирази емоції (Em) були представлені у вигляді вектора:

$$Em_i^n = (\mu_1, \dots, \mu_{21}), i = 1 \dots 8, \text{ де} \quad (1)$$

$\mu_j \in [0;1]$ – характеристична мимічна ознака (при $\mu=0$ – немає ознаки, а при $\mu=1$ вплив ознаки максимальний); перелік ознак наведений в таблиці 1.

Набір 8-ми векторів, утворює базис (B_{ij} , де $i=1, \dots, 21, j=1, \dots, 8$) простору мимічних проявів емоційних станів.

Таким чином, довільний вектор $b=(\mu_1, \dots, \mu_{21})$, отриманий шляхом аналізу зображення з якимось емоційним станом, можна розкласти по базису B і отримати опис емоції, як опуклої комбінації:

$$x = (B^T B)^{-1} B^T b, \text{ за умови} \quad (2)$$

$$\det((B^T B)^{-1}) > 0, \text{ де} \quad (3)$$

B – базисна матриця емоційних станів (таблиця 1);

B^T – транспонована матриця B ;

b – вектор, який описує мимічний прояв довільного емоційного стану;

$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$, де α_i – коефіцієнти опуклої комбінації ($\sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0;1]$) для кожної з 8-ми базових емоцій.

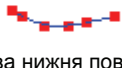
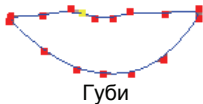
У запропонованій в [2] моделі базис простору мимічних ознак емоційних станів будується на основі апріорного досвіду експериментатора, вимагає певної кваліфікації і, відповідно, дає неоднозначний результат – констатація одного і того ж емоційного м'язового прояву у різних людей розрізняється. Для того щоб перейти від феноменологічного визначення характеристичних мимічних ознак до певної їх формалізації, у [3] запропоновано використати власну модифікацію методу моделей, які деформуються. В якості параметричних кривих, для виділення характерних ознак рис обличчя, запропоновано використати моделі які задаються з допомогою нерівномірних раціональних базисних сплайнів – NURBS-кривих [4,5]:

В рамках проведених досліджень була побудована модель, яка складається з гнучких шаблонів – NURBS-кривих. Виходячи з того, що опорні точки NURBS-кривої однозначно визначають саму криву – до розгляду брались тільки вектори опорних точок. Для побудови базису були використані наступні вектори опорних точок (Таблиця 1):

Таблиця 1 Мимічні прояви для формування базових емоцій.

ознака	Опис мімічних проявів в розрізі областей обличчя			Для брів, очей та роту – вектори опорних точок p_i^j Для зморшок – $\mu_j \in [0;1]$ (при $\mu=0$ – немає зморшки, а при $\mu=1$ зморшка максимальна)	
	Область обличчя		Мімічний прояв		
μ_1	Об- ласть чола і брів	Чоло	Зморшки в центрі чола		
μ_2			Одна горизонтальна зморшка		
μ_3			Між бровами вертикальна зморшка		
μ_4		Брови	Внутрішні кутики підняті ввєрх	$p_i^1, i = 0 \dots 4$	
μ_5			Опущенні та зведені		
μ_6			Припідняті		
μ_7			Підняті та зведені		
μ_8	Об- ласть очей (очі, повіки, основа	Верхні повіки	Внутрішні кутики підняті	$p_i^2, i = 0 \dots 5$	
μ_9			Напружені		
μ_{10}			Підняті (видно склеру)		
μ_{11}			Припідняті		

Закінчення табл. 1

Ознака	Опис мімічних проявів в розрізі областей обличчя			Для брів, очей та роту – вектори опорних точок p_i^j Для зморшок – $\mu_j \in [0;1]$ (при $\mu=0$ – немає зморшки, а при $\mu=1$ зморшка максимальна)	
	Область обличчя	Мімічний прояв			
μ_{12}	Область очей (очі, повіки, основа носа)	Нижні повіки	Припідняті та ненапружені	$p_i^3, i = 0 \dots 5$	 Ліва нижня повіка
μ_{13}			Припідняті та напружені		
μ_{14}		Зморшки	"Гусячі лапки" біля зовнішніх кутків		
μ_{15}			Зморшка під повіками		
μ_{16}	Нижня частина обличчя (ніс, щоки, рот)	Рот	Закритий, губи стиснуті	$p_i^4, i = 0 \dots 16$	 Губи
μ_{17}			Розкритий		
μ_{18}		Губи (лінія, кутики)	Кутики губ відтягнуті в сторони та припідняті		
μ_{19}			Розтягнуті та напружені		
μ_{20}			Кутики губ опущені		
μ_{21}		Зморшки	Зморшка від носа до кутків губ		

У [2,3] запропонована математична модель та цілісна інформаційна технологія для автоматичного визначення довільного емоційного стану конкретної людини, як опуклої комбінації деяких базових станів. Для цього, з допомогою математичної моделі та оригінального програмного забезпечення, створюється базовий простір емоційних станів конкретної людини. В подальшому, довільний емоційний прояв цієї людини розкладається, як опукла комбінація емоційних станів в цьому просторі. Але, в цій моделі, гнучкі шаблони налаштовувалися на прояв конкретної міміки з допомогою ручного редагування певної кількості параметрів – контрольних точок NURBS-кривих на поверхні зображення. Подальші дослідження у цьому напрямку були направлені на модифікацію методу контурних моделей, які деформуються. Для цілей автоматичного деформування моделей було запропоновано використовувати апроксимацію В-сплайн кривих [4].

§1. В-сплайн апроксимація кривих

Скористаємося простою властивістю NURBS-кривих: при $w_i = 1$ NURBS-крива зводиться до В-сплайн кривої. Ця проста властивість впливає з ідентичності опорних точок (p_i) в однорідній формі і рівності знаменника 1. Беручи до уваги, що при моделюванні гнучких шаблонів приймалося $w_i = 1$, то для спрощення апроксимації можна перейти до В-сплайн кривих.

Задача В-сплайн апроксимації є задачею підгонки В-сплайн кривої з K опорними точками $p = [p_0, \dots, p_{K-1}]^T$ до точкової кривої $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, де $M > K$ (зазвичай $M \gg K$) для значень параметра $u_0, \dots, u_{M-1}$. Така задача апроксимації приводить до перевизначеної системи лінійних рівнянь $N \cdot p = d$:

$$\begin{bmatrix} N_0(u_0) & \dots & N_{K-1}(u_0) \\ N_0(u_1) & \dots & N_{K-1}(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0(u_{M-1}) & \dots & N_{K-1}(u_{M-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $N_i(u)$ – В-сплайн базисна функція

Одним зі шляхів отримання перевизначеної системи лінійних рівнянь (4) є:

$$N^T N \cdot p = N^T \cdot d, \text{ звідки} \quad (5)$$

$$p = (N^T N)^{-1} \cdot N^T d, \text{ при} \quad (6)$$

$$\det(N^T N) \neq 0 \quad (7)$$

Для застосування В-сплайн апроксимації потрібно вміти отримувати на зображенні точкові криві $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, які відповідають потрібним контурам, з тим, щоб далі застосувати перетворення (5–7).

§2. Технології оконтурення та скелетизації зображень

Існує багато технологій для отримання на зображенні точкових кривих $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, які відповідають контурам брів, очей та роту. В основному вони базуються на отриманні контуру зображення як різкої границі між елементами зображення (з допомогою згорток, аналізу кольору тощо) з наступною скелетизацією (отриманням контуру одиничної товщини).

В даній роботі, для оконтурення зображення пропонується застосувати імітацію роботи зорових рецепторів ока людини. Відомо [6], що очне яблуко знаходиться в неперервному мікрорусі. Питання про ці мікрорухи має неоднозначне трактування. Можна передбачити, що ці мікрорухи є необхідною умовою функціонування апарату виділення контурів на зображенні. Для перевірки цього заставимо рецептори сітківки штучного ока зафіксувати запропоноване зображення, потім, незначним чином (наприклад, на 1 точку) здвинемо зображення в сторону, і знову дамо можливість рецепторам ока зафіксувати його. В цей момент на виходах рецепторів з'явиться відносна зміна сигналу. Візьмемо значення змін рецепторів та занесемо їх у відповідні точки на зображенні – отримаємо контури зображення (Рис. 1):



Рис. 1. Зображення до та після оконтурення

Імітація вмісту рецепторів на сітківці ока проходить наступним чином. Є зображення та напрямок мікроруку (наприклад, діагонально на M точок). Спочатку конкретний рецептор «бачить» точку з координатами (x, y) , а після мікроруку – з координатами $(x-M, y-M)$. Різниця кольорових площин між вхідною точкою та точкою, яка виявилась на її місці в результаті мікроруку, – це і є відносна зміна вхідного дратівного сигналу (для конкретного рецептора).

Отримані таким чином контури потрібно привести до «скелетного» вигляду. Тобто потрібно виділити деяку середню лінію, яка б правильно відображала структуру контуру. Для цього застосуємо відомий алгоритм Зонга-Суня [7]. Отриманий таким чином «скелет» контуру губ зображено на рис. 2.



Рис. 2. Точкова крива губ, отримана після скелетизації контуру.

Основна ідея алгоритму Зонга-Суня полягає в тому, що на кожному кроці, проходячи по зображенню рамкою 3×3 , перевіряється приналежність кожного пікселя до границі заданої зв'язної області. Якщо умови перевірки виконуються, то піксель вилучається з області. Незважаючи на кількість виконаних кроків, область залишиться зв'язаною, у крайньому випадку вона виродиться в лінію товщиною в один піксель.

§3. Технологія аналізу мімічних виразів емоцій

Для аналізу мімічних виразів емоцій запропонована наступна цілісна інформаційна технологія [2,3]:

- 1) для конкретної людини отримуємо множину із восьми фотографічних зображень обличчя, на якому відтворена мімічна реакція на ситуації які відповідають базовим емоціям: радість, горе, надія, страх, задоволення, гнів, інтерес, зневага;
- 2) у відповідному програмному забезпеченні нормуємо фотографічні зображення (по відстані між центрами очей);
- 3) за допомогою відомих технологій оконтурення та скелетування зображень (§2), отримуємо контури наступних частин обличчя: зморшки в області чола, брови, верхні повіки, нижні повіки, зморшки «гусячі лапки» біля зовнішніх кутиків очей, зморшки під повіками, рот, зморшки від носа до кутиків губ;
- 4) використовуючи гнучкі шаблони у вигляді NURBS-кривих [3] та B-сплайн апроксимацію (§1) отримуємо множину опорних точок NURBS-кривої для шаблонів, які характеризують кожну з восьми базових емоцій (таблиця 1):

$p_i^{1,(e)} = [x_i^{1,(e)}, y_i^{1,(e)}]^T, i = 0 \dots 4, e = 1 \dots 8$ – шаблон лівої брови для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{2,(e)} = [x_i^{2,(e)}, y_i^{2,(e)}]^T, i = 0 \dots 5, e = 1 \dots 8$ – шаблон лівої верхньої повіки для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{3,(e)} = [x_i^{3,(e)}, y_i^{3,(e)}]^T, i = 0 \dots 5, e = 1 \dots 8$ – шаблон лівої нижньої повіки для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{4,(e)} = [x_i^{4,(e)}, y_i^{4,(e)}]^T, i = 0 \dots 16, e = 1 \dots 8$ – шаблон губів для 8-ми емоційних станів;

та для опису зморшок отримаємо деякі характеристичні мімічні ознаки (таблиця 1):

$\mu^{(e)} = [\mu_1^{(e)}, \mu_2^{(e)}, \mu_3^{(e)}, \mu_{14}^{(e)}, \mu_{15}^{(e)}, \mu_{21}^{(e)}]^T, e = 1 \dots 8$ – характеристичні мімічні ознаки (таблиця 1);

- 5) з восьми отриманих множин опорних точок NURBS-кривих (шаблонів) та вектора характеристичних мімічних ознак для зморшок побудуємо базис емоційних станів (B) конкретної людини:

$$B = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} & \dots & \mu^{(8)} \\ p^{1,(1)} & \dots & p^{1,(8)} \\ p^{2,(1)} & & p^{2,(8)} \\ p^{3,(1)} & & p^{3,(8)} \\ p^{4,(1)} & & p^{4,(8)} \end{bmatrix}, \text{ де } p^{j,(k)} = \begin{cases} p_0^{j,(k)} & j = 1 \dots 4 \\ \vdots & \\ p_{n_j}^{j,(k)} & n_1 = 4, n_2, n_3 = 5, n_4 = 16 \end{cases}, \text{ де } k = 1 \dots 8 \quad (8)$$

В подальшому, для аналізу довільного зображення обличчя цієї людини: повторимо пункти 1–4 для зображення довільної емоції та отримаємо вектор:

$$b = \begin{bmatrix} \mu^{(*)} \\ p^{1,(*)} \\ p^{2,(*)} \\ p^{3,(*)} \\ p^{4,(*)} \end{bmatrix}, \text{ де } p^{j,(*)} = \begin{cases} p_0^{j,(*)} & j = 1 \dots 4 \\ \vdots & \\ p_{n_j}^{j,(*)} & n_1 = 4, n_2, n_3 = 5, n_4 = 16 \end{cases}, \text{ де } \quad (9)$$

Розкладемо його по побудованому базису В (8):

$$B^T B \cdot x = B^T \cdot b, \text{ звідки} \quad (10)$$

$$x = (B^T B)^{-1} \cdot B^T b, \text{ при} \quad (11)$$

$$\det((B^T B)^{-1}) > 0 \quad (12)$$

Коефіцієнти розкладу $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ будуть вказувати на конкретний вклад кожної з восьми базових емоцій у довільну емоцію b .

§4. Результати дослідження.

За умови переходу від феноменологічного опису емоцій до ситуацій, у яких емоції виникають, була створена множина фотографічних зображень базових емоцій ([1], §1).

Далі, з отриманих зображень виділялися, описаними вище способами (§2), необхідні для подальшої обробки, контури (брови, очі, губи тощо). Рис. 3 містить контури правої брови для емоцій: радість, горе, надія, страх, задоволення.



На рис. 4 контури правої брови представлені у вигляді точкової кривої.

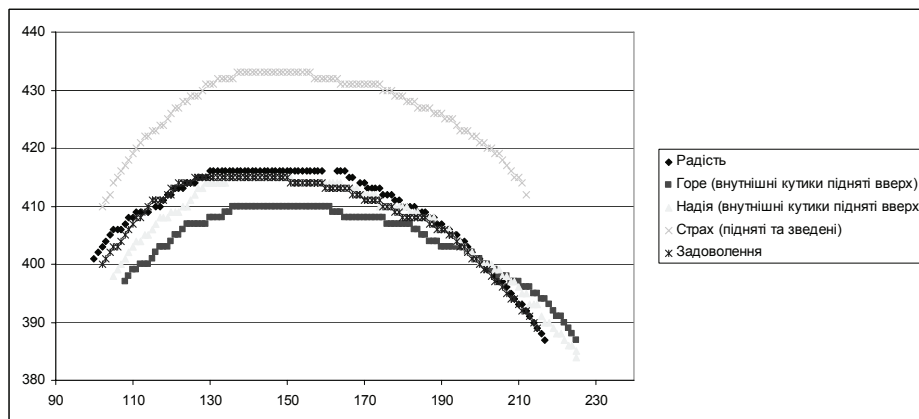


Рис.4. Графік точкових кривих правої брови для деяких емоцій

На графіку видно, що положення отриманих контурів правої брови відповідають опису міміки емоцій. Тобто видно, що для емоцій задоволення та радості особливого прояву міміки немає, для емоцій горя та надії – внутрішні кутики підняті догори, а для емоції страху – брова піднята та зведена.

До отриманих контурів застосовувались перетворення (5-7) для отримання множин керуючих точок NURBS-кривих. Рис. 5 містить графік контуру та відповідну цьому контуру NURBS-криву для положення правої брови при емоції радості.

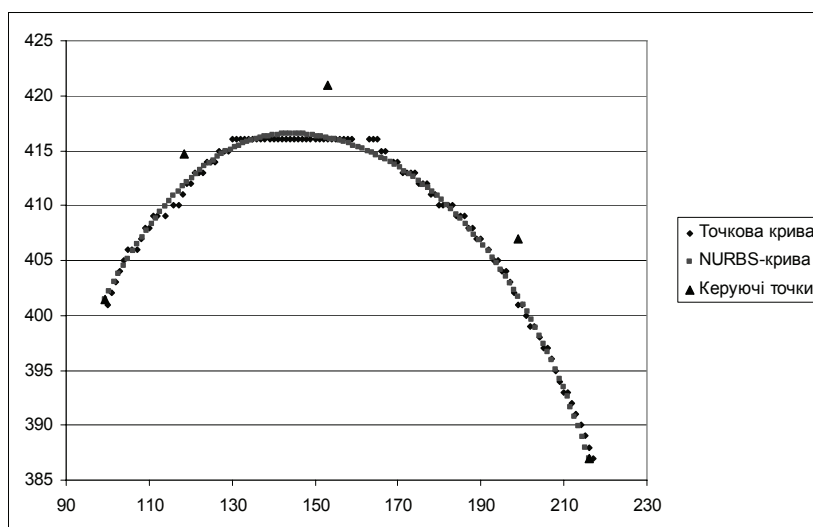


Рис. 5. Графік контуру правої брови

Рис. 6 містить результат прив'язки гнучких шаблонів (NURBS-кривих) до відповідних фрагментів обличчя для всіх базових емоцій.

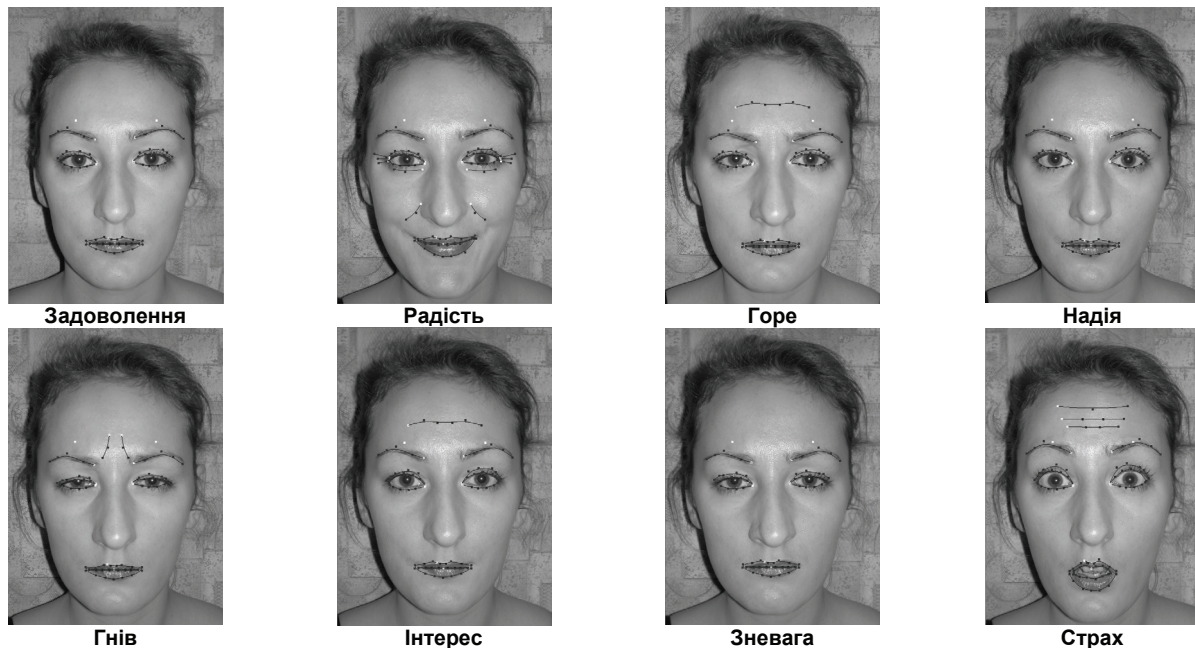


Рис. 6. Представлення базових емоцій у контурному вигляді з допомогою NURBS кривих для конкретного актора

З восьми отриманих множин опорних точок NURBS-кривих (шаблонів) та вектора характеристичних мімічних ознак для зморшок був побудований базис (8) емоційних станів (В) конкретної людини.

Аналогічним чином, з фотографічного зображення довільної емоції, що відтворює ситуацію, у якій виникає відчуття провини (Рис. 7), був побудований відповідний вектор b (9).



Рис. 7. Відтворення ситуації у якій виникає емоція провини

Застосовуючи перетворення (10–12) був проведений розклад отриманого вектора b по базису B .

Для емоційного стану «провина» були отримані наступні коефіцієнти опуклої комбінації базових станів:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.7, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0.3, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0, \sum_{i=1}^8 \alpha_i = 1, \text{ де } \alpha_i - \text{відповідають наступним}$$

емоційним станам: радість, горе, надія, страх, задоволення, гнів, інтерес та зневага. Згідно [1], стан, який складається з комбінацій задоволення ($\alpha_5 = 0.3$) та горя ($\alpha_2 = 0.7$) відповідає емоції «провина».

Висновки

Запропонована математична модель та цілісна інформаційна технологія для автоматичного визначення довільного емоційного стану конкретної людини, як опуклої комбінації деяких базових станів. Для цього, з допомогою математичної моделі та оригінального програмного забезпечення, створюється базовий простір емоційних станів конкретної людини. В подальшому, довільний емоційний прояв цієї людини розкладається як опукла комбінація емоційних станів в цьому просторі.

Для побудови базису простору емоційних станів використовуються гнучкі шаблони контурів основних зон обличчя. Гнучкі шаблони предствленні з допомогою NURBS-кривих. Налаштування шаблону на точковий контур конкретного зображення проходить з допомогою В-сплайн апроксимації, шляхом розв'язку перевизначеної неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Запропонована технологія має практичну цінність в системах візуального контролю за операторами складних виробництв (атомна енергетика тощо) для автоматичного контролю за їх емоційним станом.

1. Леонтьев В.О. Классификация эмоций. – Одесса: Инновационно-ипотечный центр, 2002. – 84 с. 2. Крак Ю.В., Бармак О.В., Єфімов Г.М. Синтез мімічних виразів емоцій на основі формальної моделі // Штучний інтелект. – 2007. – №2. 3. Крак Ю.В., Бармак О.В., Єфімов Г.М. Використання контурних моделей для побудови базису простору мімічних виразів емоцій // Штучний інтелект. – 2007. – №4. – С. 288–296. 4. Piegl, Les and Tiller, Wayne. The NURBS Book, 2nd Edition, – Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1996. 5. C. deBoor, "A Practical Guide to Splines". –New York, Springer-Verlag, 1978. 6. Демидов В.Е. Как мы видим то, что видим. – М.: Знание, 1987. – 240 с. 7. T. Y. Zhang, C. Y. Suen. A fast parallel algorithm for thinning digital patterns // Commun. ACM, vol. 27, no. 3, pp. – 1984. –236–239.

СТІЙКА ПРОЦЕДУРА ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ НА ХАОТИЧНІЙ СІТЦІ

Представлена більш стійка процедура побудови інтерполяційної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці. Використано властивості щільної квадратної матриці великої розмірності, в результаті інверсії якої знаходиться сплайн-функція.

The more steady procedure of construction of interpolation multidimensional spline-function on chaotic net is represented. Characteristics of dense square matrix of largeness as a result of inversion of which the spline – function is fined are used.

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset R^n$ - деяка обмежена n - вимірна область, $\bar{P} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(N)})^*$ - система розташованих в Ω точок.

Інтерполяційний сплайн $\sigma(P) \in W_2^m(\Omega)$, $P \in R^n$, визначається з умов

$$\sigma(P^{(i)}) = r_i, i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \delta)^2 d\Omega = \min_{W_2^m(\Omega)}, \quad (2)$$

де $r_i = f(P^{(i)})$, $i = \overline{1, N}$, f - інтерпольована функція; D - оператор одноразового диференціювання, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^*$ - мультиіндекс, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$; $W_2^m(\Omega)$ - простір Соболева, що складається з функцій, m - а узагальнена похідна яких сумована з квадратом в області Ω [1], $*$ - символ транспонування.

Конкретний вигляд інтерполяційного сплайну складається з двох частин – функцій Гріна оператора з лівої частини рівності (2) та його поліноміального ядра [2]:

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^N \lambda_i G_{m,n}(P - P^{(i)}) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \nu_\alpha P^\alpha, \quad (3)$$

в якому $P^\alpha = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$, $P^* = (P_1, \dots, P_n)$, $P_k^{\alpha_k}$ - k - та координата в α_k -ій степені, $\sum_{|\alpha| \leq m-1}$ – сума всіх можливих

комбінацій n - вимірних поліномів сумарної степені $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ не вище $m-1$, яка має всього $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$ складових;

$$G_{m,n}(x-P) = \begin{cases} \|x-P\|^{2m-n} \ln \|x-P\|, n=2k, \\ \|x-P\|^{2m-n}, n=2k-1 \end{cases}. \quad (4)$$

Тут $\|x-P\| = [\sum_{i=1}^n (x_i - P_i)^2]^{\frac{1}{2}}$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^*$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$. Для неперервності функцій Гріна $G_{m,n}(x-P)$ необхідно виконання умови $m > n/2$.

Введемо для коефіцієнтів ν з формули (3) суцільну лінійну індексацію. Тоді значення коефіцієнтів λ_i , $i = \overline{1, N}$ та ν_l , $l = \overline{1, \mathcal{G}}$,

$$\mathcal{G} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \quad (5)$$

визначаються з двох простих алгебраїчних умов: рівностей (1), що означають співпадіння значень сплайн – функції в заданих точках $\bar{P}$ та умови ортогональності функцій поліноміального ядра між собою на цих же точках. В матричній формі це має такий вигляд:

$$C \cdot \bar{\lambda} = \bar{r}, \quad (6)$$

де матриця C розмірністю $(N + \mathcal{G}) \times (N + \mathcal{G})$, наприклад для $n = 2$ і відповідно $m = 2$, має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & G_{m,n}(P^{(1)} - P^{(2)}) & \dots & G_{m,n}(P^{(1)} - P^{(N-1)}) & G_{m,n}(P^{(1)} - P^{(N)}) & 1 & x_1 & y_1 \\ G_{m,n}(P^{(2)} - P^{(1)}) & 0 & \dots & G_{m,n}(P^{(2)} - P^{(N-1)}) & G_{m,n}(P^{(2)} - P^{(N)}) & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,n}(P^{(N-1)} - P^{(1)}) & G_{m,n}(P^{(N-1)} - P^{(2)}) & \dots & 0 & G_{m,n}(P^{(N-1)} - P^{(2)}) & 1 & x_N & y_N \\ G_{m,n}(P^{(N)} - P^{(1)}) & G_{m,n}(P^{(N)} - P^{(2)}) & \dots & G_{m,n}(P^{(N)} - P^{(N-1)}) & 0 & 1 & x_N & y_N \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} & y_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P^{(i)} = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g)^*$, $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N, 0, 0, \dots, 0)^*$ – вектори розмірністю $N + g$ кожний. Щоб система (6) мала розв'язок, необхідно виконання умови: $N \geq g$.

Знайдені коефіцієнти $\lambda_i, i = \overline{1, N}$ та $\nu_l, l = \overline{1, g}$ слід підставити в формулу (3), яка, наприклад, для двохвимірної випадку має вигляд

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] + \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

При обчисленні значень $\sigma(P)$ для парного n в інтерполяційній точці $P^{(i)}$ чи ε – близькій до неї точці відповідний елемент суми слід замінити нулем. (Для чисельних розрахунків вибрано $\varepsilon = 10^{-16}$).

Наведений чисельний алгоритм побудови багатовимірних сплайн-функцій на хаотичній сітці можна використовувати лише для випадку $m \geq [n/2] + 1$ (при тестуванні похибка менше 20 % [3]), інакше похибка стає більшою за результат. За такого співвідношення між m та n відбувається надто швидке зростання числа g , що обчислюється за формулою (5), а за ним і розмірності матриці C – як мінімум до $4 \times g^2$.

Таблиця. Мінімально необхідні кількість точок та кількість елементів матриці C , яку необхідно обертати для розрахунку багатовимірних сплайн-функцій на хаотичній сітці.

Розмірність простору n	Необхідні значення коефіцієнту гладкості m	Мінімально необхідна кількість точок g	Мінімально необхідна кількість елементів матриці C $4 \times g^2$
2	2	3	36
3	2	4	64
4	3	15	900
5	3	21	1764
6	4	84	28224
7	4	120	57600
8	5	495	980100

Виникає необхідність чисельного обертання щільної квадратної матриці великої розмірності. В загальному випадку отримуємо ситуацію: чим більше розмірність матриці, тим більш нестійкою є чисельна процедура знаходження оберненої до неї. Тому для підвищення стійкості чисельної процедури доцільно максимально зменшити розмірність матриці, для якої будемо шукати обернену.

Загальна схема розв'язування задачі. Щільна симетрична матриця великої розмірності C з формули (6) та обернена до неї симетрична матриця $V = C^{-1}$ можуть бути представлені в такій структурній формі:

$$C = \begin{pmatrix} A_{g,g}^{(1)} & A_{g,N-g}^{(2)} & B_{g,g}^{(1)} \\ A_{N-g,g}^{(2)*} & A_{N-g,N-g}^{(4)} & B_{N-g,g}^{(2)} \\ B_{g,g}^{(1)*} & B_{g,N-g}^{(2)*} & 0_{g,g} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{g,g}^{(1)} & V_{g,N-g}^{(2)} & W_{g,g}^{(1)} \\ V_{N-g,g}^{(2)*} & V_{N-g,N-g}^{(4)} & W_{N-g,g}^{(2)} \\ W_{g,g}^{(1)*} & W_{g,N-g}^{(2)*} & F_{g,g} \end{pmatrix}.$$

Їх добуток дасть в результаті одиничну матрицю розмірністю $(N + g) \times (N + g)$: $E = \begin{pmatrix} E_{g,g} & 0_{g,N-g} & 0_{g,g} \\ 0_{N-g,g} & E_{N-g,N-g} & 0_{N-g,g} \\ 0_{g,g} & 0_{g,N-g} & E_{g,g} \end{pmatrix}$. Тут

$A_{g,N-g}^{(2)}$ – матриця $A^{(2)}$ розмірністю $g \times (N - g)$ відповідно, $A_{N-g,g}^{(2)*}$ – транспонована до неї матриця, а $0_{g,g}$ та $E_{g,g}$ – відповідно нуль-матриця та одинична матриця розмірністю $g \times g$.

Розпишемо ліву та праву частини рівняння $C^*V = E$ поелементно:

$$A_{g,g}^{(1)} \cdot V_{g,g}^{(1)} + A_{g,N-g}^{(2)} \cdot V_{N-g,g}^{(2)*} + B_{g,g}^{(1)} \cdot W_{g,g}^{(1)*} = E_{g,g} \quad (7)$$

$$A_{g,g}^{(1)} \cdot V_{g,N-g}^{(2)} + A_{g,N-g}^{(2)} \cdot V_{N-g,N-g}^{(4)} + B_{g,g}^{(1)} \cdot W_{g,N-g}^{(2)*} = 0_{g,N-g}, \quad (8)$$

$$A_{g,g}^{(1)} \cdot W_{g,g}^{(1)} + A_{g,N-g}^{(2)} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} + B_{g,g}^{(1)} \cdot F_{g,g} = 0_{g,g}, \quad (9)$$

$$A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot V_{g,g}^{(1)} + A_{N-g,N-g}^{(4)} \cdot V_{N-g,g}^{(2)*} + B_{N-g,g}^{(2)} \cdot W_{g,g}^{(1)*} = 0_{N-g,g}, \quad (10)$$

$$A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot V_{g,N-g}^{(2)} + A_{N-g,N-g}^{(4)} \cdot V_{N-g,N-g}^{(4)} + B_{N-g,g}^{(2)} \cdot W_{g,N-g}^{(2)*} = E_{N-g,N-g} \quad (11)$$

$$A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot W_{g,g}^{(1)} + A_{N-g,N-g}^{(4)} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} + B_{N-g,g}^{(2)} \cdot F_{g,g} = 0_{N-g,g}, \quad (12)$$

$$B_{g,g}^{(1)*} \cdot V_{g,g}^{(1)} + B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot V_{N-g,g}^{(2)*} = 0_{g,g} \quad (13)$$

$$B_{g,g}^{(1)*} \cdot V_{g,N-g}^{(2)} + B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot V_{N-g,N-g}^{(4)} = 0_{g,N-g} \quad (14)$$

$$B_{g,g}^{(1)*} \cdot W_{g,g}^{(1)} + B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} = E_{g,g} \quad (15)$$

Із формул (13)–(15) відповідно випливають очевидні рівняння:

$$V_{g,g}^{(1)} = -B_{g,g}^{(1)*-1} \cdot (B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot V_{N-g,g}^{(2)*}), \quad (16)$$

$$V_{N-g,g}^{(2)} = -B_{g,g}^{(1)*-1} \cdot (B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot V_{N-g,N-g}^{(4)}), \quad (17)$$

$$W_{g,g}^{(1)} = -B_{g,g}^{(1)*-1} \cdot (E_{g,g} - B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}). \quad (18)$$

Підставляємо вираз для матриці $W_{g,g}^{(1)}$ з формули (18) в рівняння (9) і отримуємо представлення матриці $F_{g,g}$ через матрицю $W_{N-g,g}^{(2)}$

$$F_{g,g} = -B_{g,g}^{(1)-1} \cdot [A_{g,g}^{(1)} \cdot (-B_{g,g}^{(1)*-1}) \cdot (E_{g,g} - B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}) + A_{g,N-g}^{(2)} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}]. \quad (19)$$

Із формули (12) отримаємо залежність

$$W_{N-g,g}^{(2)} = -A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot (A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot W_{g,g}^{(1)} + B_{N-g,g}^{(2)} \cdot F_{g,g}).$$

Після підстановки виразів для матриць $W_{g,g}^{(1)}$ та $F_{g,g}$ з формул (18) та (19) відповідно, отримаємо рівняння для визначення $W_{N-g,g}^{(2)}$

$$W_{N-g,g}^{(2)} = -A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot \{ A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot (-B_{g,g}^{(1)*-1}) \cdot (E_{g,g} - B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}) + B_{N-g,g}^{(2)} \cdot (-B_{g,g}^{(1)*-1}) \cdot [A_{g,g}^{(1)} \cdot (-B_{g,g}^{(1)*-1}) \cdot (E_{g,g} - B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}) + A_{g,N-g}^{(2)} \cdot W_{N-g,g}^{(2)}] \}. \quad (20)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} S_{N-g,g} &= A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot B_{g,g}^{(1)*-1}, \\ L_{N-g,g} &= A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot B_{N-g,g}^{(2)} \cdot B_{g,g}^{(1)*-1}, \\ P_{N-g,g} &= L_{N-g,g} \cdot A_{g,g}^{(1)} \cdot B_{g,g}^{(1)*-1}. \end{aligned}$$

Виконаємо дії в правій частині рівняння (20), групуючи зліва всі коефіцієнти при $W_{N-g,g}^{(2)}$, Отримаємо

$$W_{N-g,g}^{(2)} + S_{N-g,g} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} + P_{N-g,g} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} - L_{N-g,g} \cdot A_{g,N-g}^{(2)} \cdot W_{N-g,g}^{(2)} = S_{N-g,g} - P_{N-g,g}.$$

З останнього рівняння неважко отримати очевидну залежність одного блоку оберненої матриці V від блоків даної C :

$$W_{N-g,g}^{(2)} = [E_{N-g,N-g} + S_{N-g,g} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*} + P_{N-g,g} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*} - L_{N-g,g} \cdot A_{g,N-g}^{(2)}]^{-1} \cdot (S_{N-g,g} - P_{N-g,g}). \quad (21)$$

З рівняння (11) випливає така рівність

$$V_{N-g,N-g}^{(4)} = A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot (E_{N-g,N-g} - A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot V_{g,N-g}^{(2)} - B_{N-g,g}^{(2)} \cdot W_{g,N-g}^{(2)*}).$$

Підставляємо в останню рівність представлення матриці $V_{g,N-g}^{(2)}$ згідно рівняння (17), отримуємо

$$V_{N-g,N-g}^{(4)} = A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot (E_{N-g,N-g} + A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot B_{g,g}^{(1)*-1} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*} \cdot V_{N-g,N-g}^{(4)} - B_{N-g,g}^{(2)} \cdot W_{g,N-g}^{(2)*}). \quad (22)$$

Введемо позначення:

$$R_{N-g,N-g} = E_{N-g,N-g} - A_{N-g,N-g}^{(4)-1} \cdot A_{N-g,g}^{(2)*} \cdot B_{g,g}^{(1)*-1} \cdot B_{g,N-g}^{(2)*}.$$

Розкривши дужки в правій частині рівняння (22) і зібравши в ній подібні члени з $V_{N-g,N-g}^{(4)}$, отримуємо

$$V_{N-g,N-g}^{(4)} = R_{N-g,N-g}^{-1} \cdot (A_{N-g,N-g}^{(4)-1} - B_{N-g,g}^{(2)} \cdot W_{g,N-g}^{(2)*}). \quad (23)$$

Для знаходження явного вигляду $V_{N-g,N-g}^{(4)}$ треба лише підставити транспоновану матрицю $W_{N-g,g}^{(2)*}$ з рівності (21) в представлення (23).

Матриці $W_{g,g}^{(1)*}$ та $F_{g,g}$ знаходимо за формулами (18) та (19) відповідно, підставляючи в них представлення матриці $W_{g,N-g}^{(2)}$ згідно рівняння (21)

Матрицю $V_{g,N-g}^{(2)}$ визначаємо за формулою (17) шляхом підстановки в неї представлення матриці $V_{N-g,N-g}^{(4)}$ з рівності (23).

Висновки. В такий спосіб повністю визначається вся матриця $V = C^{-1}$ розмірності $(N+g) \times (N+g)$. При цьому, як випливає з формул (16)–(23), треба обертати матриці лише розмірності $g \times g$ та $(N-g) \times (N-g)$.

1. Люстерник Л.А., Соболев В.Н. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с. 2. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с. 3. Куценко И.А. Особенности численной интерполяции функций с помощью многомерных сплайнов на хаотичной сетке. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2001. – Вып. 133. – С. 40–45.

Надійшла до редколегії 17.09.2007

УДК 519.632.8

С. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
О. Стеля, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ОПТИМІЗАЦІЯ ДРЕНУВАННЯ ПІДТОПЛЕНИХ ТЕРИТОРІЙ

Запропонований чисельний метод оптимізації відбору ґрунтових вод дренажем при розв'язуванні обернених задач фільтрації ґрунтових вод. Розроблене програмне забезпечення застосоване для ділянки, підтопленої водами штучного водосховища.

A numerical method for optimization of groundwater withdrawal in inverse groundwater filtration problems is proposed. The software developed is applied to a site affected by groundwater rising in a man-made water reservoir.

Підтоплення земель та населених пунктів в Україні є однією з гострих екологічних проблем. Причиною виникнення підтоплення в басейні Дніпра є, зокрема, підняття води в штучно створених водосховищах. Вирішення проблеми на сучасному науково-технічному рівні вимагає обґрунтування оптимальних схем дренажу територій, які повинні забезпечувати постійну підтримку допустимого рівня ґрунтових вод. Математичні моделі руху ґрунтових вод, чисельні методи їх розв'язування та відповідне програмне забезпечення є на цей час достатньо розвинутими для їх

© С. Ляшко, О. Стеля, 2009

практичного застосування. Наступним кроком в розвитку гідрогеологічного моделювання є об'єднання моделей ґрунтових вод з методами оптимізації для вирішення проблем управління ґрунтовими водами. Це об'єднання дає можливість урахувати складну поведінку системи ґрунтових вод і визначити найкращу стратегію управління при поставлених цілях і обмеженнях. Методи оптимізації знайшли різноманітне застосування в таких областях водного господарства, як відновлення забруднених ґрунтових вод, управління дренажем на іригаційних системах і підтоплених територіях, раціональний розподіл водних ресурсів та формування політики використання ґрунтових вод.

В роботі [1] моделі управління ґрунтовими водами згруповані в три категорії: управління динамікою ґрунтових вод, управління якістю води, оптимальна політика використання ґрунтових вод. У цій же роботі описані два основних підходи до розв'язування задач управління ґрунтовими водами, а саме: включення моделі ґрунтових вод як обмеження в модель оптимізації та використання матриці відгуку і моделі ґрунтових вод як зовнішньої моделі. На цей час багато публікацій присвячені вирішенню проблем у цій області. В роботі [2] представлений метод визначення оптимального розташування свердловин і стаціонарного режиму відкачки для осушення ділянки, що використовує скінченнорізницьку апроксимацію як обмеження в моделі лінійного програмування. В [3] методи оптимізації та моделювання застосовані для вирішення екологічної проблеми в долині Сан-Бернардіно (Каліфорнія), де зменшення використання ґрунтових вод в сільському господарстві разом з високим рівнем опадів призвело до підтоплення. У цьому випадку визначення ефективного режиму відкачки для зменшення гідралічних напорів на ураженій території проводилось методом лінійного програмування разом з нестационарною багатопарною моделлю потоку ґрунтових вод. Огляд вирішення проблем управління водними ресурсами (використання ґрунтових вод для водопостачання, відновлення якості ґрунтових вод) об'єднанням моделі ґрунтових вод з методом лінійної оптимізації наведений в [4]. В [5] метод оптимізації застосований для визначення оптимальної стратегії сумісного використання поверхневих і ґрунтових вод для забезпечення стійкої іригації (отримання максимального прибутку від землеробства) в долині Якві (Мексика) в умовах недостатньої кількості поверхневих вод у посушливі роки. Інтегрована модель поверхневих і ґрунтових вод була зв'язана з об'єднаною моделлю оптимізації, що вирішувалась методами нелінійної оптимізації з урахуванням як фізичних, так і агрономічних обмежень. В роботі [6] на доповнення до [5] вирішувалась проблема багатопольової довгострокової оптимізації: забезпечення стійкої іригації в посушливі роки і раціональне використання ґрунтових і поверхневих вод в умовах невизначеності (як недостатнього, так і надмірного) річкового стоку. Оптимальна стратегія визначалась методом стохастичної оптимізації.

В даній роботі сформульована та розв'язана задача оптимізації дренажу, що ґрунтується на моделі планового потоку ґрунтових вод. Під оптимізованим дренажем будемо розуміти такий об'єм відбору ґрунтових вод дренажними свердловинами, при якому поверхня ґрунтових вод підтримується на заданому рівні. Задача зводиться до пошуку мінімуму функціоналу градієнтним методом. Наведений приклад застосування розробленого чисельного методу та програмного комплексу для розв'язання задачі оптимізації дренажу підтопленої території.

Модель планового потоку ґрунтових вод – та оптимізаційна задача. В основу математичної моделі для визначення рівня ґрунтових вод покладене двовимірне стаціонарне рівняння потоку ґрунтових вод в плані. Рівняння розглядається в області Ω змінних x_1, x_2 із зовнішньою границею Γ

$$\sum_{n=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(k u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) = \sum_{m=1}^p q_m \delta(x - r_m), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

де $u(x)$ – гідралічний напір, що визначає поверхню ґрунтових вод безнапірного горизонту, k – коефіцієнт фільтрації середовища, q_m – об'єм води, що відбирається m -тою дренажною свердловиною ($0 \leq q_m \leq Q$), $\delta(x - r_m)$ – дельта-функція Дірака в точці r_m , точки $x = r_m$, $m = \overline{1, p}$, визначають положення дренажних свердловин в області. На границі області задається умова

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Область може містити внутрішню водойму Ω_1 з границею Γ_1 , яка разом з нею знаходиться в Ω . На границі Γ_1 задається умова

$$u(x) = g_0 = \text{const}, \quad x \in \Gamma_1.$$

Для визначення оптимального режиму дренування необхідно знайти об'єм відбору води кожною з m дренажних свердловин, при якому функція $u(x)$ в заданій підобласті (підтопленій ділянці) $\bar{\Omega}_0 \in \Omega$ буде якомога ближче до функції $H(x) = R(x) - H_0$, де $R(x)$ – функція рельєфу в $\bar{\Omega}_0$, H_0 – задана константа. Для пологого рельєфу можна покласти $H(x) = \text{const}$, $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_0$. Тоді задача зводиться до пошуку мінімуму функціоналу:

$$J(q) = \int_{\bar{\Omega}_0} (u_q(x) - H(x))^2 dx. \quad (3)$$

Мінімум (3) знаходиться за умови, що функція $u_q(x)$ задовольняє крайовій задачі (1)–(2) при заданих значеннях q_m , $m = \overline{1, p}$. Для знаходження мінімуму функціоналу використовується метод проєкції градієнта [7]. Для цього записується приріст функціоналу (3):

$$\Delta J(q) = J(q + \Delta q) - J(q) = \int_{\bar{\Omega}_0} 2(u_q - H(x)) \Delta u dx + \int_{\bar{\Omega}_0} (\Delta u)^2 dx,$$

де Δu – приріст функції u , що відповідає приросту Δq . Функція Δu в лінійному наближенні задовольняє крайовій задачі:

$$\sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \left(k u \frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(k \Delta u \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right) = \sum_{m=1}^p \Delta q_m \delta(x - r_m), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Для знаходження компонентів градієнта функціоналу використовується спряжена задача. Застосування такого підходу до різних задач математичної фізики, а також його обґрунтування можна знайти в роботах [8,9,10]. Опис програмного комплексу та приклади розв'язування задач наведені в [11]. Задача, спряжена до крайової задачі (4)–(5), записується наступним чином:

$$\sum_{n=1}^2 k u_q \frac{q^2 \psi}{q x_n^2} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$\text{де } f(x) = \begin{cases} 2(u_q(x) - H(x)), & x \in \bar{\Omega}_0, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0. \end{cases}$$

Крайова умова на розв'язок $\Psi(x)$ рівняння (6) визначається умовою (5) і записується у вигляді:

$$\Psi(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

Градiєнт функціоналу визначається через розв'язок спряженої задачі як

$$J'(q) = \bar{\Psi},$$

де $\bar{\Psi} = (\Psi_{r_1}, \Psi_{r_2}, \dots, \Psi_{r_p})$ – значення функції спряженого стану в точках r_m . При цьому уточнення значень q_m здійснюється за формулою:

$$q^{z+1} = P_U(q^z - \alpha_0 J'(q^z)),$$

де $\alpha_0 > 0$ – множник, що обирається з міркувань збіжності, $U = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_p) \mid 0 \leq q_m \leq Q, m = \overline{1, p}\}$.

Різницеві задачі та ітераційна процедура їх розв'язування. Для розв'язування прямої та спряженої крайових задач використовується скінченнорізничевий метод. В області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ вводиться нерівномірна сітка

$\bar{\omega}_{h_i h_j} = \omega_{h_i h_j} \cup \gamma$, де h_i, h_j – кроки сітки в напрямках x_1, x_2 . Сітка будується таким чином, щоб точки r_m співпадали з вузлами сітки $\omega_{h_i h_j}$.

Побудова консервативної різницевої схеми для задачі (1)–(2) здійснюється інтегро-інтерполяційним методом [12]. Згідно з цим методом різницеві рівняння у внутрішніх вузлах сіткової області для рівняння (1) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} & (k(y_{i+1j} + y_{ij})(y_{i+1j} - y_{ij})/h_i - k(y_{ij} + y_{i-1j})(y_{ij} - y_{i-1j})/h_{i-1})/\bar{h}_i/2 + \\ & + (k(y_{ij+1} + y_{ij})(y_{ij+1} - y_{ij})/h_j - k(y_{ij} + y_{ij-1})(y_{ij} - y_{ij-1})/h_{j-1})/\bar{h}_j/2 = \sum_m^p q_{i_m j_m} / \bar{h}_{i_m} / \bar{h}_{j_m}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{h}_i = (h_{i-1} + h_i)/2, \quad \bar{h}_j = (h_{j-1} + h_j)/2, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j}.$$

У граничних вузлах сіткової області розв'язок різницевої задачі задовольняє умові:

$$y_{ij} = g(x_{1i}, x_{2j}), \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma. \quad (9)$$

Різницєва задача для спряженого рівняння записується наступним чином:

$$\begin{aligned} & k y_{ij} ((\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij})/h_i - (\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j})/h_{i-1})/\bar{h}_i + \\ & + ((\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij})/h_j - (\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1})/h_{j-1})/\bar{h}_j = f_{ij} \\ & (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j}, \\ & \varphi_{ij} = 0, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$f_{ij} = \begin{cases} 2(y_{ij} - H_{ij}), & (x_{1i}, x_{2i}) \in \bar{\omega}_{0h_i h_j}, \\ 0, & (x_{1i}, x_{2i}) \in \bar{\omega}_{0h_i h_j} \setminus \bar{\omega}_{0h_i h_j}, \end{cases}$$

$\bar{\omega}_{0h_i h_j}$ – множина вузлів різницевої сітки, які належать підтопленій ділянці.

Для розв'язування різницевих задач (8), (9) та (10) використовується метод установлення [13], згідно з яким ці задачі записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} & (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k)/\tau = (k(y_{i+1j}^{k+1} + y_{ij}^{k+1})(y_{i+1j}^{k+1} - y_{ij}^{k+1})/h_i - k(y_{ij}^{k+1} + y_{i-1j}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{i-1j}^{k+1})/h_{i-1})/\bar{h}_i/2 + \\ & + (k(y_{ij+1}^{k+1} + y_{ij}^{k+1})(y_{ij+1}^{k+1} - y_{ij}^{k+1})/h_j - k(y_{ij}^{k+1} + y_{ij-1}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{ij-1}^{k+1})/h_{j-1})/\bar{h}_j/2 - \sum_m^p q_{i_m j_m} / \bar{h}_{i_m} / \bar{h}_{j_m}, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j}, \\ & y_{ij}^{k+1} = g(x_{1i}, x_{2j}), \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma \end{aligned} \quad (11)$$

та

$$\begin{aligned} & (\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{ij}^k)/\tau = \kappa y_{ij}^{k+1} ((\varphi_{i+1j}^{k+1} - \varphi_{ij}^{k+1})/h_i - (\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{i-1j}^{k+1})/h_{i-1})/\bar{h}_i + \\ & + ((\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij})/h_j - (\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1})/h_{j-1})/\bar{h}_j - f_{ij}, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j}, \\ & \varphi_{ij}^{k+1} = 0, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

де τ відповідає кроку за часом в різницевих схемах для нестационарних крайових задач, $\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots$, y_{ij}^0 , та φ_{ij}^0 – початкові умови.

Для розв'язування систем нелінійних різницевих рівнянь (11) на кожному кроці методу установлення застосовується комбінація методів Ньютона та послідовної верхньої релаксації (ПВР) [14], а для розв'язування системи лінійних різницевих рівнянь (12) – метод ПВР:

$$y_{ij}^{k+1s+1} = y_{ij}^{k+1s} - \omega_1 F_{ij}^{k+1s} (y_{ij-1}^{k+1s+1}, y_{i-1j}^{k+1s+1}, y_{ij}^{k+1s}, y_{i+1j}^{k+1s}, y_{ij+1}^{k+1s}) / (\partial F_{ij}^{k+1s} / \partial y_{ij}^{k+1s}), (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y_{ij}^{k+1s+1} &= g(x_{1i}, x_{2j}), \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma, \\ \varphi_{ij}^{k+1s+1} &= \varphi_{ij}^{k+1s} - \omega_2 \Phi_{ji}^{k+1s} (\varphi_{j-1i}^{k+1s+1}, \varphi_{ji-1}^{k+1s+1}, \varphi_{ji}^{k+1s}, \varphi_{ji+1}^{k+1s}, \varphi_{j+1i}^{k+1s}) / a_{ij}^{k+1s}, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_{h_i h_j}, \\ \varphi_{ij}^{k+1s+1} &= 0, \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

де $s = 0, 1, 2, \dots$, ω_β – параметр релаксації, $\beta = 1, 2$,

$$\begin{aligned} F_{ij}^{k+1} (y_{ij-1}^{k+1}, y_{i-1j}^{k+1}, y_{ij}^{k+1}, y_{i+1j}^{k+1}, y_{ij+1}^{k+1}) &= (k(y_{i+1j}^{k+1} + y_{ij}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{ij-1}^{k+1}) / h_i - k(y_{ij}^{k+1} + y_{i-1j}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{i-1j}^{k+1}) / h_{i-1}) / h_i / 2 + \\ &+ (k(y_{ij+1}^{k+1} + y_{ij}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{ij+1}^{k+1}) / h_j - k(y_{ij}^{k+1} + y_{ij-1}^{k+1})(y_{ij}^{k+1} - y_{ij-1}^{k+1}) / h_{j-1}) / h_j / 2 - \sum_m^p q_{imjm} / h_{im} / h_{jm} - (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k) / \tau = 0, \\ \Phi_{ij}^{k+1} (\varphi_{ij-1}^{k+1}, \varphi_{i-1j}^{k+1}, \varphi_{ij}^{k+1}, \varphi_{i+1j}^{k+1}, \varphi_{ij+1}^{k+1}) &= \\ &= \kappa y_{ij}^{k+1} (((\varphi_{i+1j}^{k+1} - \varphi_{ij}^{k+1}) / h_i - (\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{i-1j}^{k+1}) / h_{i-1}) / h_i + \\ &+ ((\varphi_{ij+1}^{k+1} - \varphi_{ij}^{k+1}) / h_j - (\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{ij-1}^{k+1}) / h_{j-1}) / h_j) - f_{ij} - \\ &- (\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{ij}^k) / \tau = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

$\partial F_{ij}^{k+1s} / \partial y_{ij}^{k+1s}$ – діагональний елемент матриці Якобі нелінійного відображення, яке задається компонентами F_{ij}^{k+1} ,

$$\partial F_{ij}^{k+1s} / \partial y_{ij}^{k+1s} = -\kappa y_{ij}^{k+1s} ((1/h_i + 1/h_{i-1}) / h_i + (1/h_j + 1/h_{j-1}) / h_j) - 1/\tau,$$

a_{ij}^{k+1} – діагональний елемент матриці системи рівнянь (12)

$$a_{ij}^{k+1} = -\kappa ((y_{ij}^{k+1} / h_i + y_{ij}^{k+1} / h_{i-1}) / h_i + (y_{ij}^{k+1} / h_j + y_{ij}^{k+1} / h_{j-1}) / h_j) - 1/\tau \quad (**)$$

При цьому задаються такі початкові наближення:

$$y_{ij}^{k+1,0} = y_{ij}^k, \quad \varphi_{ij}^{k+1,0} = \varphi_{ij}^k.$$

Таким чином, ітераційний алгоритм розв'язування задачі складається з наступних кроків:

- задаються початкові значення q_m^0 , y_{ij}^0 , та φ_{ij}^0 ;
- знаходиться розв'язок y_{ij}^{k+1} задачі (8)–(9);
- знаходиться розв'язок φ_{ij}^{k+1} задачі (10);
- уточнюються q_m , $m = \overline{1, p}$ за правилом:

$$q_m^{z+1} = \begin{cases} 0, & (q_m^z - \alpha_0 \varphi_{imjm}^{k+1}) < 0, \\ q_m^z - \alpha_0 \varphi_{imjm}^{k+1}, & 0 \leq (q_m^z - \alpha_0 \varphi_{imjm}^{k+1}) \leq Q, \\ Q, & (q_m^z - \alpha_0 \varphi_{imjm}^{k+1}) > Q, \quad z = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ітераційна процедура повторюється доти, доки не буде виконаною умова $\max_q |J'(q)| < \varepsilon_g$, де ε_g – задане мале число.

Результати розрахунку оптимізованого дренажу. Запропонований метод був застосований до задачі оптимізації дренажу підтопленої ділянки частини міста Ржищева, викликаного підвищенням рівня води в Канівському водосховищі, що стало основним чинником підняття ґрунтових вод. Область 1010x860 метрів, в якій здійснюється моделювання, має криволінійну ділянку границі, що співпадає з береговою лінією водосховища та прямолінійні ділянки, вибрані на достатній відстані від водосховища та зони впливу дренажу (Рис. 1). Область містить внутрішню водойму Ω_1 , що утворена старим руслом річки.

Незначне сезонне коливання рівня води у водосховищі дозволяє розглядати сталий режим руху ґрунтових вод в області. Відбір ґрунтових вод здійснюється за допомогою дренажних свердловин, фіксована схема розташування яких пов'язана із забудовою території та мережею доріг. Всього дренажна мережа складається з 24 свердловин, розташованих вздовж вулиць підтопленої частини міста (Рис.1б).

У чисельних розрахунках коефіцієнт фільтрації приймав значення 14.4 метрів за добу, абсолютна відмітка поверхні водосховища 91.4 метра. Поверхня внутрішньої водойми підтримується на постійній відмітці 85.1 метра. На прямолінійних відрізках границі області задається сталий напір, визначений шляхом спостережень за станом ґрунтових вод.

Для реалізації розробленого алгоритму використовується нерівномірна прямокутна зв'язна різницева сітка, яка налічує 6552 вузла. Сітка будується таким чином, щоб точніше урахувати криволінійну ділянку границі області та границю внутрішньої водойми γ_1 . За наявності внутрішньої водойми уточнення розв'язків різницевих рівнянь за формулами (13) та (14) здійснюється у вузлах сітки $\omega_{h_i h_j} \setminus \omega_{1h_i h_j}$, де $\omega_{1h_i h_j}$ – множина вузлів, які належать водоймі. У вузлах $(x_{1i}, x_{2j}) \in \gamma_1$ $y_{ij} = g_0$, – для вихідної задачі та $\varphi_{ij} = 0$ – для спряженої задачі.

Для великих територій, які містять різноманітні озера та канали, використання нерівномірних сіток для їх урахування є недоцільним. У цьому випадку добре себе зарекомендував метод фіктивних областей у комбінації з рівномірною сіткою [15].

В чисельних розрахунках параметри алгоритму приймали такі значення:

$\omega_1 = \omega_2 = 0.9$, $\alpha = 0.8$, $q_m^0 = 0.15 \text{ м}^3/\text{добу}$, $m = 1.24$, $Q = 1500 \text{ м}^3/\text{добу}$, $\tau = 0.25$ доби, $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ (входить в критерій зупинки ітераційних методів (13), (14)), $\varepsilon_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ (входить в критерій зупинки методу установлення). $\varepsilon_s = 3.0 \cdot 10^{-2}$ – для досягнення такої точності знадобилось близько трьох тисяч ітерацій.

Для візуалізації та інтерпретації результатів моделювання використане програмне забезпечення, яке дає можливість користувачам автоматизовано відображати результати моделювання в географічній інформаційній системі у вигляді ізоліній або у чисельному вигляді на цифровій карті місцевості. Таке представлення результатів моделювання дає можливість оперативно оцінювати ефективність обраної схеми дренажу та технічні можливості її практичної реалізації.

На рисунку 1а зображений фрагмент карти підтопленої частини міста з нанесеними на неї розрахованими ізолініями поверхні ґрунтових вод без урахування дренажу. З порівняння відміток поверхні землі в метрах з відмітками ізоліній видно, що на значній території ґрунтові води знаходяться ближче трьох метрів від поверхні, що є недопустимим для населених пунктів.

На рисунку 1б наведений фрагмент цифрової карти з ізолініями поверхні ґрунтових вод після розв'язування задачі оптимізації. Визначені модельним шляхом об'єми відбору води, необхідні для підтримки поверхні ґрунтових вод у центральній частині області на відмітці 88 метрів, наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Свердловина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q м ³ /добу	865	816.6	441.9	991.4	310.4	56.7	239.7	657.9	807.3	531.4	626.2	0.0
Свердловина	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
q м ³ /добу	489.1	471.4	1348.7	300.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

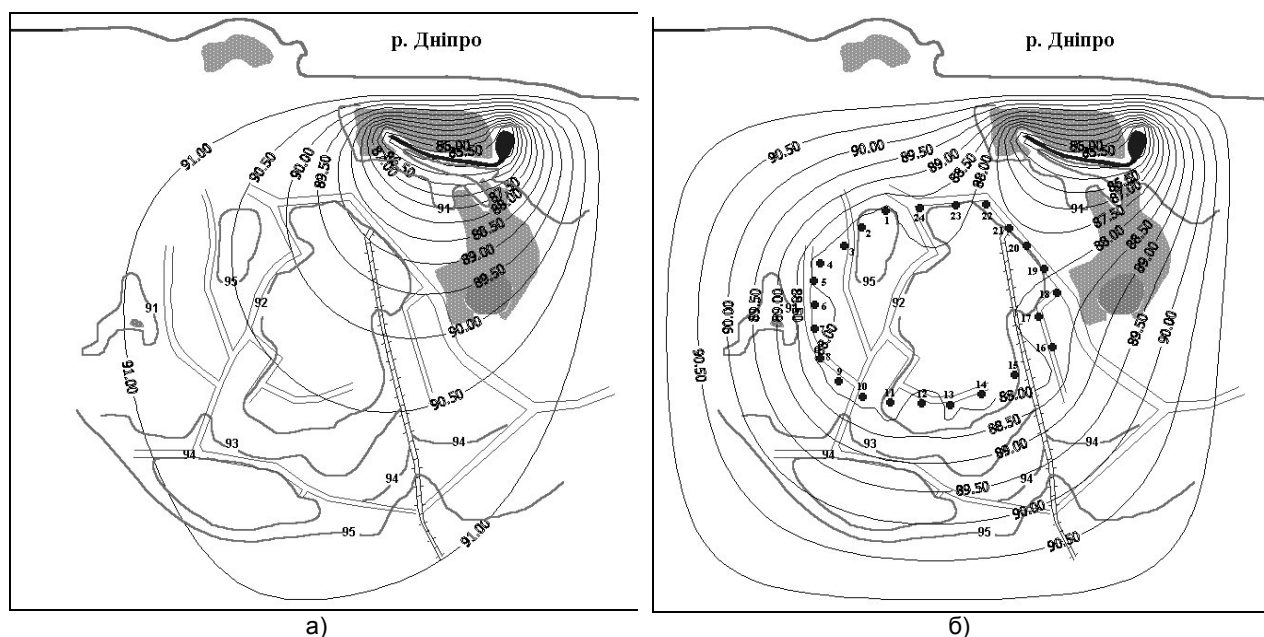


Рис. 1. а) результати моделювання без дренажу, б) результати моделювання дренажу з оптимізацією

Розроблений графічний інтерфейс моделі дозволяє легко змінювати як кількість дренажних свердловин та їх розташування на місцевості, так і всі інші вихідні параметри.

Перевірка адекватності результатів моделювання досліджуваному явищу ґрунтується на їх порівнянні з даними спостережень за станом ґрунтових вод до створення водосховища. Проведені порівняння свідчать, що результати моделювання вільної поверхні ґрунтових вод добре узгоджуються з натурними даними.

Висновки. Розвинутий в роботі апарат моделювання реальних явищ підтоплення населених пунктів був успішно застосований для оптимізації дренажу підтопленої ділянки. В результаті розрахунків був встановлений об'єм відбору води, необхідний для підтримки нормативного рівня вільної поверхні ґрунтових вод. Знайдена модельним шляхом вільна поверхня ґрунтових вод дозволяє контролювати (шляхом її порівняння з даними спостережень за станом ґрунтових вод) дію дренажу протягом всього часу експлуатації дренажної системи.

Використання географічної інформаційної системи дає можливість з необхідною для моделювання точністю задавати в моделі наявні гідрогеологічні умови та об'єкти, що впливають на режим ґрунтових вод, та переглядати ре-

зультати моделювання. Проведене дослідження дозволяє сподіватись на успішне використання розробленої методики до інших об'єктів з підвищеним рівнем ґрунтових вод або таких, що знаходяться під загрозою підтоплення. Розроблене програмне забезпечення може використовуватись для планування дренажу урбанізованих територій з урахуванням різних гідрогеологічних факторів та умов сучасної забудови.

Подальшим розвитком запропонованого підходу до оптимізації дренажу є його розвинення на нестационарні задачі, які виникають, наприклад, при оптимізації дренажу на зрошуваних землях.

1. Gorelick S. M. A review of distributed parameter groundwater management modeling methods, *Water Resour. Res.*, 19: 305–319, 1983. 2. Aguado E., Remson I., Pikul M.F., Thomas W.A., Optimal pumping for aquifer dewatering, *J. Hydraul. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* HY7-100: 860–877, 1974. 3. Danskin, W.R., and J.R. Freckleton, Ground-water-flow modeling and optimization techniques applied to high ground-water problems in San Bernardino, California, in *Selected papers in the hydrologic sciences*, Subitzky S. (ed.), U.S. Geol. Sur. Water-Supply Paper 2340, 165–177, 1992. 4. Ahlfeld D.P., Heidari M., Applications of optimal hydraulic control to groundwater systems, *J. Water Resour. Planning Manage. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 120: 350–365, 1994. 5. Schoups G., Addams C. L., Minjares J. L., and Gorelick S. M., Sustainable conjunctive water management in irrigated agriculture: Model formulation and application to the Yaqui Valley, Mexico, *Water Resour. Res.*, vol. 42, W10417, doi:10.1029/2006WR004922, 2006. 6. Schoups G., Addams C. L., Minjares J. L., and Gorelick S.M., Reliable conjunctive use rules for sustainable irrigated agriculture and reservoir spill control, *Water Resour. Res.*, vol. 42, W12406, doi:10.1029/2006wr005007, 2006. 7. Васильев Ф.П., Методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1981. – 400 с. 8. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 286 с. 9. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наукова думка, 1998. – 310 с. 10. Самарский А.А., Вабищевич В.П., Численные методы решения обратных задач математической физики. – М: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с. 11. Ляшко С.И., Стеля О.Б., Нечаев О.М., Пришляк К.О. Програмне забезпечення для задач оптимального керування для рівнянь еліптичного та параболічного типів // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – № 4. – 2001 р. – С. 279–282. 12. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654 с. 13. Самарский А.А., Андреев В.Б., Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с. 14. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с. 15. Stelya O., Stelya L., Khartchenko S., A map-based groundwater flow model of the Krasnoznamensk irrigation system, 2nd International Conference APLIMAT 2003, February 5–7, 2003, Bratislava, Slovak Republic, part II, pp. 651–654.

Надійшла до редколегії 26.03.2008

УДК 517.929

Хусаїнов Д., д-р фіз.-мат. наук, професор,
Діблік Й., д-р фіз.-мат. наук, професор,
Ружичкова М., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Кузьмич О., канд. фіз.-мат. наук

ОТРИМАННЯ ОЦІНОК ЗБІЖНОСТІ ЗБУРЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

Вступ

Один з основних методів дослідження стійкості нульового розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь, другий метод Ляпунова, дозволяє по деякій наперед заданій функції, що називається функцією Ляпунова, і її повний похідний в силу системи рівнянь динаміки робити висновок про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) досліджуваного розв'язку. Зазвичай на функцію Ляпунова накладається умова додатної визначеності та існування нескінченно малої вищої границі, а на її повну похідну – умова від'ємної визначеності (недодатності). Геометрична інтерпретація цих умов наступна. Існує скрізь щільна система поверхонь рівня функції Ляпунова, що не розширюються (умова позитивної визначеності) і не стискається (умова нескінченно малої вищої границі), яка охоплює початок координат. І векторне поле системи направлене строго всередину (повна похідна від'ємна) або може дотикатися до поверхонь рівня (повна похідна недодатна).

У прикладних задачах більш істотним є не стільки встановлення факту стійкості розв'язків систем, як обчислення характеристик, що характеризують перехідні процеси. Іноді стійкий розв'язок має настільки неприйнятні характеристики, що не може бути реалізований.

Розглянемо лінійну стаціонарну систему вигляду

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad \dot{y}(t) = \alpha x(t) - y(t).$$

При довільному α система має власні числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ і є асимптотично стійкою. В той же час величина α істотно впливає на перехідні процеси в системі. Чим більше α , тим більшою є „величина перерегулювання”, тобто „максимальний викид амплітуди” збурених розв'язків від положення рівноваги. Дійсно, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad y(t) = x_0 \alpha e^{-t} + y_0 e^{-t}, \quad x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0).$$

Максимальний „викид” відбувається при $t^* = 1 - \frac{y_0}{x_0 \alpha}$ і дорівнює

$$x(t^*) = x_0 \exp\left\{\frac{y_0}{x_0 \alpha} - 1\right\}, \quad y(t^*) = x_0 \alpha \exp\left\{\frac{y_0}{x_0 \alpha} - 1\right\},$$

тобто

$$|z(t^*)| = |x_0| \sqrt{1 + \alpha^2} \exp\left\{\frac{y_0}{x_0 \alpha} - 1\right\}, \quad |z(t^*)| = \sqrt{x^2(t^*) + y^2(t^*)}.$$

Легко бачити, що він істотно залежить від параметра α .

При використанні методу функцій Ляпунова величини розв'язків системи оцінюються нерівністю

$$|z(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |z(0)| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(h)} t\right\},$$

при

$$|z(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)},$$

тобто максимальний „викид” не перевищує

$$|z(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Тут H – симетрична, додатно визначена матриця, що є розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + H A = -C$$

при довільній додатно визначеній матриці C . Величини $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – мінімальне і максимальне власні числа відповідних симетричних додатно визначених матриць. Для даної системи покладемо

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді матричне рівняння має вигляд

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Його розв'язком буде

$$h_{11} = 2 + \alpha^2, \quad h_{12} = \alpha, \quad h_{22} = 2,$$

тобто

$$H = \begin{bmatrix} 2 + \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2} \left[(4 + \alpha^2) + \alpha \sqrt{4 + \alpha^2} \right], \quad \lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2} \left[(4 + \alpha^2) - \alpha \sqrt{4 + \alpha^2} \right], \quad \lambda_{\min}(C) = 4,$$

$$\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \frac{\sqrt{4 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{4 + \alpha^2} - \alpha}, \quad \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)} = \frac{4}{(4 + \alpha^2) + \alpha \sqrt{4 + \alpha^2}}.$$

Мажорантна оцінка дорівнює

$$|z(t)| \leq \frac{\sqrt{4 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{4 + \alpha^2} - \alpha} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \exp \left\{ - \frac{4}{(4 + \alpha^2) + \alpha \sqrt{4 + \alpha^2}} t \right\}$$

і також істотно залежить від величини α . Максимальний „викид” оцінюється величиною

$$|z(t^*)| \leq \sqrt{\frac{4 + \alpha^2 + \alpha}{4 + \alpha^2 - \alpha}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Таким чином видно, що метод функцій Ляпунова істотніше оцінює динаміку систем, ніж величини власних чисел. Він дозволяє визначити так звану „усереднену величину”, яка характеризує і максимальний „викид” системи і швидкість збіжності розв'язків до положення рівноваги. Зважаючи на це, отримав розвиток напрям, пов'язаний з обчисленням оптимальних оцінок таких перехідних характеристик як величина перерегулювання, інтегральна характеристика розв'язку, час перехідного процесу та ін.

Одними з найбільш простих видів гібридних систем є системи, динаміка яких описується звичайними диференціальними рівняннями з часовим законом перемикавання. При моделюванні (побудові моделей) з використанням апарату гібридних систем виникають наступні проблеми.

По-перше, гібридні системи, як правило, описуються диференціальними рівняннями з розривною правою частиною. Тому виникає проблема коректності розуміння їх розв'язків. У разі, коли розриви відбуваються по часовій змінній, тобто фактично розглядаються системи з часовим законом перемикавання, проблема дещо спрощується. Якщо на кожному з часових проміжків виконуються умови продовжуваності, під розв'язком гібридної системи розуміється неперервна, кусково неперервно диференційовна функція (розв'язок в сенсі Каратеодорі). Якщо розриви відбуваються по фазових змінних, то проблема коректності розв'язку стає актуальнішою. Можливі режими „перемикавання”, „ковзання” і „взагалі невизначені ситуації”.

По-друге, при побудові оцінок збіжності (або розбіжності) з використанням другого методу Ляпунова виникає проблема побудови самої функції і отримання відповідних оцінок.

1. Для дослідження систем з часовим перемиканням діють таким чином.

а) При можливості будується одна функція Ляпунова для всіх або хоча б для сусідніх підсистем. Якщо побудувати одну функцію Ляпунова для сусідніх i -ї та $i+1$ -ї підсистем не вдається, то слід підібрати сталу c таким чином, щоб поверхні рівня $V_i(x, t_i) = c$ і $V_{i+1}(x, t_i) = c$ функцій Ляпунова $V_i(x, t)$ і $V_{i+1}(x, t)$ у момент перемикавання співпадали, тобто відбувалося „зшивання” функцій Ляпунова на сусідніх часових інтервалах.

б) Якщо вищезазначене виконати неможливо, то сталі c_i і c_{i+1} вибираються так, щоб поверхня рівня $V_i(x, t_i) = c_i$ попередньої функції Ляпунова в момент $t = t_i$ містилася всередині поверхні рівня $V_{i+1}(x, t_i) = c_{i+1}$ наступної функції Ляпунова, тобто щоб одна „трубка”, що є поверхнею рівня функції Ляпунова на i -му проміжку часу в момент $t = t_i$ містилась усередині іншої „трубки”, що є поверхнею рівня функції Ляпунова на наступному $i+1$ -му проміжку часу. Оскільки функції додатно визначені і оцінка відбувається на скінченному проміжку часу, то це можна зробити завжди.

2. Набагато складніші проблеми виникають при побудові оцінок збурень для гібридних систем з фазовими перемикаваннями.

а) Як і для систем з часовим перемиканням, найбільш бажаним є побудова однієї функції Ляпунова, яка використовується для всіх підсистем. Якщо вдається формалізувати обчислення повної похідної у моменти розриву і показати, що в цілому вона недоводатна, то для оцінки динаміки можна вибрати одну з поверхонь рівня, що містить усередині себе початкове положення $(x(t_0), t_0)$.

б) Якщо єдину функцію Ляпунова побудувати не вдається, то для кожної з областей $G_i = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0\}$, $i = \overline{1, m}$, $\bigcup_{i=1, m} G_i = R^n$, на які розбитий фазовий простір R^n , будується окрема функція Ляпунова $V_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$. Кожна

з таких окремих функцій $V_i(x, t)$ не зобов'язана бути додатно визначеною в тому сенсі, що при довільному фіксованому $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ її поверхня рівня не обов'язково є замкнутою поверхнею, що містить початок координат. При цьому окремі функції Ляпунова вибираються так, щоб на границях $\partial G_i = \{x \in R^n : g_i(x) = 0\}$ поверхні рівня сусідніх функцій співпадали, тобто виконувалася умова „зшивання”. В цьому випадку загальна функція Ляпунова

$$V(x, t) = \begin{cases} V_1(x, t), & x \in G_1, \\ V_2(x, t), & x \in G_2, \\ \dots & \dots \\ V_m(x, t), & x \in G_m. \end{cases}$$

є кусковою неперервно диференційовною функцією, поверхні рівня якої при довільному фіксованому $t = T$ являють собою скрізь щільну множину замкнутих поверхонь, що містять початок координат (додатно визначену функцію). Якщо після довизначення повної похідної в точках розриву узагальнена похідна буде недодатна, то таким чином „зшита” функція Ляпунова використовується для отримання оцінок динаміки гібридної системи.

с) Якщо „зшивання” поверхонь рівня окремих функцій Ляпунова на границях $\partial G_i = \{x \in R^n : g_i(x) = 0\}$ неможливе, то, як і у попередньому випадку, для кожної з областей, G_i , $i = \overline{1, m}$ будується окрема функція Ляпунова $V_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$. І під час переходу розв'язків по ланцюжку $G_i \rightarrow G_{i+1}$ необхідно, щоб частину поверхні рівня наступної підсистеми „накривала” частина поверхні рівня попередньої підсистеми. Побудована таким чином послідовність „шматків” поверхонь рівня дозволяє отримати оцінку динаміки розв'язків, які вона мажорує.

3. Нарешті, якщо перемикання відбуваються по змішаних змінних, тобто по поверхнях $\partial G_i^t = \{x, t \in R^n \times R^+ : g_i(x, t) = 0\}$ в розширеному фазовому просторі, то три вказаних випадки зберігаються.

Розглянемо методологію побудови оцінки динаміки для окремих підсистем.

Лінійні стаціонарні системи звичайних диференціальних рівнянь

1. Стійкі стаціонарні системи. Автономна функція Ляпунова.

Розглянемо систему лінійних однорідних стаціонарних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = Ax, \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n. \quad (1.1)$$

Відомо, що якщо система асимптотично стійка, тобто власні числа $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$ характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

або

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

задовольняють умові $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то завжди існує додатно визначена функція Ляпунова квадратично-го вигляду $V_0(x) = x^T H x$, повна похідна якої в силу системи (1.1) є від'ємно визначеною квадратичною формою

$$\frac{dV_0(x(t))}{dt} = -x^T C x(t),$$

Матриця H , що входить у функцію Ляпунова, може бути знайдена при розв'язанні матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + H A = -C. \quad (1.2)$$

Поверхні рівня функції Ляпунова

$$\partial V_0^\alpha = \{x \in R^n : V(x) = \alpha\} \quad \text{або} \quad \partial V_0^\alpha = \{x \in R^n : x^T H x = \alpha\} \quad \alpha > 0$$

у фазовому просторі R^n є сім'єю еліпсів, а в розширеному фазовому просторі $R^n \times R^+$ сім'єю циліндрів

$$\partial V_t^\alpha = \{(x, t) \in R^n \times R^+ : V(x) = \alpha, t \geq 0\} \quad \text{або} \quad \partial V_t^\alpha = \{(x, t) \in R^n \times R^+ : x^T H x = \alpha, t \geq 0\}.$$

І, якщо матриці H і C додатно визначені, то векторне поле системи (1.1) направлене строго всередину еліпсів, і з використанням власних чисел матриць H і C можна оцінювати величину збурень траєкторій.

За допомогою квадратичної функції Ляпунова $V_0(x) = x^T H x$ довільний розв'язок $x(x_0, t)$ систем (1.1), що задовольняє початковим умовам, оцінюється нерівністю

$$|x(x_0, t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\min}(H)} t}, \quad (1.3)$$

тобто показник швидкості збіжності розв'язків і величина перерегулювання дорівнюють

$$\gamma(H) = -\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)}, \quad \sqrt{\phi(H)} = \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}.$$

2. Функція Ляпунова, побудована на інтегралах системи.

Найбільш точну оцінку збурень системи можна отримати з використанням функції Ляпунова, побудованої на інтегралах системи. Розглянемо неавтономну функцію Ляпунова виду $V(x, t) = x^T H(t) x$, в якій матриця $H(t)$ має вигляд $H(t) = e^{-A^T t} e^{-A t}$. Оскільки загальний розв'язок лінійної стаціонарної системи (1.1) має вигляд $x(t) = e^{A t} c$, де c – довільна стала, то повна похідна функції Ляпунова $V(x, t) = x^T H(t) x$ уздовж розв'язків системи тотожно дорівнює нулю,

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) = x^T(t) \left[\frac{d}{dt} H(t) + A^T(t) H(t) + H(t) A(t) \right] x(t) \equiv 0, \quad C(t) \equiv \Theta,$$

тобто функція Ляпунова є інтегралом системи. В цьому випадку бічні поверхні еліпсів в розширеному фазовому просторі R^{n+1} складаються з інтегральних кривих і оцінки є непокривуваними. Вони мають вигляд

$$|x(x_0, t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H(t))}{\lambda_{\min}(H(t))}} |x_0| \quad (1.4)$$

Недоліком методу є труднощі при побудові матричних експоненціалів e^{At} , що є фундаментальними матрицями розв'язків лінійної стаціонарної системи (1.1).

3. Функція Ляпунова з коефіцієнтом стиснення. Оцінки розбіжності нестійких систем.

Якщо вибрати функцію Ляпунова, не що володіє нескінченно малою вищою границею, а навпаки „стискується” при $t \rightarrow +\infty$, то оцінка „стиснення” функції Ляпунова дасть оцінку збіжності розв'язків до початку координат. Наприклад, можна вибрати функцію Ляпунова у вигляді неавтономної квадратичної форми $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$, $\gamma > 0$. Тоді поверхня рівня $V(x, t) = \alpha$, або $e^{\gamma t} x^T H x = \alpha$ буде „стисненням конусом”, причому стиснення поверхонь відбувається по експоненціальному закону $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Повна похідна функції Ляпунова $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$ в силу лінійної стаціонарної системи (1.1) має вигляд

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \gamma e^{\gamma t} x^T(t) H x(t) + e^{\gamma t} x^T(t) (A^T H + H A) x(t).$$

Оскільки

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(H) |x(t)|^2 \leq V(x(t), t) \leq e^{\gamma t} \lambda_{\max}(H) |x(t)|^2,$$

то, використовуючи матричне рівняння (1.2), для повної похідної отримуємо наступну нерівність

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t), t)}{dt} &= \gamma e^{\gamma t} x^T(t) H x(t) - e^{\gamma t} x^T(t) C x(t) \leq \\ &\leq \gamma V(x(t), t) - e^{\gamma t} \lambda_{\min}(C) |x(t)|^2 \leq \left(\gamma - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \right) V(x(t), t). \end{aligned}$$

Умова від'ємної визначеності похідної, тобто входження розв'язків всередину поверхонь рівня квадратичної функції Ляпунова має вигляд

$$\gamma - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \leq 0.$$

Показник $e^{\gamma t}$, $\gamma > 0$ у функції Ляпунова $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$ визначає „стиснення” поверхні рівня $V(x, t) = \alpha$ функції Ляпунова до стану рівноваги $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. І, як випливає з наведеної вище нерівності, для отримання оцінок стійкості найбільш прийнятним є

$$\gamma(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}.$$

Таким чином, для оцінки затухання розв'язків лінійних систем можна використовувати неавтономну функцію Ляпунова $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$. Величина γ знаходиться з умови недодатності похідної.

4. Нестійкі системи.

Нехай матриця A лінійної нестационарної системи (1.1) не є асимптотично стійкою. Причому, якщо існує хоча б одне власне число з додатною дійсною частиною, то розв'язки розбігаються по експоненціальному закону. Проте встановити мажорантні оцінки розбіжності за допомогою функції Ляпунова є можливим. Якщо взяти в якості функції Ляпунова $V(x, t) = e^{-\gamma t} x^T H x$, $\gamma > 0$, то її повна похідна в силу системи має вигляд

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = -e^{-\gamma t} x^T(t) (\gamma H - A^T H - H A) x(t)$$

і за рахунок вибору параметра $\gamma > 0$ її можна зробити від'ємно визначеною. Для цього досить покласти

$$\gamma \geq 2 \frac{|HA|}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \left(\gamma \geq 2 |A| \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right).$$

І оцінка „невиходу” з поверхні рівня $V(x, t) = \alpha$, тобто оцінка розбіжності розв'язків має вигляд

$$|x(x_0, t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| e^{\gamma t}. \quad (1.5)$$

Лінійні нестационарні системи.

1. Нестационарні системи. Неавтономні функції Ляпунова.

Розглянемо системи лінійних нестационарних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

Нехай матриця $A(t)$ неперервна при $t \geq t_0$ і обмежена. Це гарантує існування і єдиність розв'язку системи (1.4), який може бути записаний у вигляді

$$x(t) = X(t)c,$$

д $X(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків, тобто матриця, складена з лінійно незалежних векторів-розв'язків. При дослідженні стійкості системи (2.14) функцію Ляпунова можна вибирати у вигляді $V_0(x, t) = x^T H(t)x$. Її повна похідна в силу системи (2.1) має вигляд

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = x^T(t) \left[\frac{dH(t)}{dt} + A^T(t)H(t) + H(t)A(t) \right] x(t).$$

І, якщо матричне рівняння

$$\frac{dH(t)}{dt} + A^T(t)H(t) + H(t)A(t) = -C(t) \quad (2.2)$$

при деякій додатно визначеній матриці $C(t)$ матиме розв'язком додатно визначену матрицю $H(t)$, то система (2.1) є асимптотично стійкою. Умовами додатної визначеності матриць $H(t)$ і $C(t)$ вважатимемо

$$\begin{aligned} \lambda_0 |x|^2 &\leq \lambda_{\min}[H(t)] |x|^2 \leq x^T H(t)x \leq \lambda_{\max}[H(t)] |x|^2, \\ \mu_0 |x|^2 &\leq \lambda_{\min}[C(t)] |x|^2 \leq x^T C(t)x \leq \lambda_{\max}[C(t)] |x|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

За вказаних умов для похідної функції Ляпунова матиме місце нерівність

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} \leq -\lambda_{\min}[C(t)] |x|^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}[C(t)]}{\lambda_{\max}[H(t)]} V(x(t), t).$$

Відповідно, справедлива нерівність

$$V(x(t), t) \leq V_0(x(t_0), t_0) e^{-\int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\min}[C(s)]}{\lambda_{\max}[H(s)]} ds}, \quad t \geq t_0.$$

Звідси, знову використовуючи (1.6), для розв'язків $x(x_0, t_0, t)$ системи (2.1), як і для автономної системи (1.1), отримуємо оцінку

$$|x(x_0, t_0, t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}[H(t)]}{\lambda_{\min}[H(t)]}} |x_0| e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\min}[C(s)]}{\lambda_{\max}[H(s)]} ds}, \quad t \geq t_0. \quad (2.4)$$

2. Функції Ляпунова, побудовані на інтегралах системи.

Як і для автономних систем, найбільш точна оцінка збурень може бути отримана з використанням функції Ляпунова, побудованої на інтегралах системи. Нехай загальний розв'язок неавтономної системи (2.1) має вигляд $x(t) = X(t)\epsilon$, де $X(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (2.1). Тоді в якості функції Ляпунова можна взяти $V(x, t) = x^T H(t)x$, в якій матриця $H(t)$ має вигляд

$$H(t) = [X^{-1}(t)]^T X^{-1}(t). \quad (2.5)$$

Оскільки вона побудована з використанням фундаментальної матриці, то повна похідна такої функції Ляпунова в силу системи (2.1) тотожно дорівнює нулю, тобто функція Ляпунова є інтегралом системи. І найбільш точні оцінки розв'язків (як і в автономному випадку) мають вигляд (1.4), тобто

$$|x(x_0, t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H(t))}{\lambda_{\min}(H(t))}} |x_0|,$$

де матриця $H(t)$ визначена в (2.5). На жаль, як і в попередньому випадку, проблемою є побудова фундаментальної матриці розв'язків.

3. Неавтономні функції Ляпунова з коефіцієнтом стискання.

Розглянемо неавтономну функцію Ляпунова квадратичного вигляду $V(x, t) = g(t)x^T H(t)x$ з функцією $g(t)$, що задовольняє умовам $0 < g_0 \leq g(t) < +\infty$, $t \geq t_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$. Її повна похідна в силу системи (1.4) матиме вигляд

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = g'(t)x^T(t)H(t)x(t) + g(t)x^T(t) \left[\frac{dH(t)}{dt} + A^T(t)H(t) + H(t)A(t) \right] x(t).$$

Як і раніше, припускаємо, що існує додатно визначена матриця $C(t)$, при якій матричне диференціальне рівняння Ляпунова (1.5) має розв'язком додатно визначену матрицю $H(t)$. Тоді

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \frac{g'(t)}{g(t)} V(x(t), t) - g(t)x^T(t)C(t)x(t).$$

Знову використовуючи нерівності квадратичних форм, отримуємо

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} \leq \left(\frac{g'(t)}{g(t)} - \frac{\lambda_{\min}[C(t)]}{\lambda_{\max}[H(t)]} \right) V(x(t), t). \quad (2.6)$$

Показник $g(t)$ у функції Ляпунова $V(x, t) = g(t)x^T H(t)x$ слід вибирати виходячи з умови

$$\frac{g'(t)}{g(t)} - \frac{\lambda_{\min}[C(t)]}{\lambda_{\max}[H(t)]} \leq 0. \quad (2.7)$$

Оцінка збіжності має вигляд

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq \frac{g(t_0)}{g(t)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}[H(t)]}{\lambda_{\min}[H(t)]}} |x_0|$$

Умова стійкості має вигляд

$$\frac{1}{g(t)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}[H(t)]}{\lambda_{\min}[H(t)]}} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

4. Нестійкі системи.

Нехай система (2.1) не є асимптотично стійкою, або не вдалося знайти розв'язок матричного диференціального рівняння Ляпунова для неавтономних систем, при якому правою частиною буде від'ємно визначена матриця. Тоді, як і у попередньому випадку, в якості функції Ляпунова можна вибрати $V(x, t) = g(t)x^T H(t)x$, де $H(t)$ – деяка додатно визначена матриця. Для повної похідної функції $V(x, t)$ буде виконуватися нерівність (2.6). І якщо функцію $g(t)$ вибрати з умови (2.7), то розв'язки системи входять всередину поверхонь рівня функції Ляпунова. Проте умова стійкості (2.8) вже може не виконуватися, а при виконанні умови

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

отримаємо оцінку “розбіжності” нестійких розв'язків.

Нелінійні стаціонарні системи.

Нехай маємо нелінійну стаціонарну систему загального вигляду

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n. \quad (3.1)$$

Векторна функція $f(x)$ задовольняє умові Ліпшица і $f(0) = 0$, тобто

$x(t) \equiv 0$ є розв'язком системи. Припускаємо, що існує додатно визначена функція $V_0(x)$, повна похідна якої в силу системи (1.1.8) задовольняє нерівності

$$\frac{dV_0(x(t))}{dt} \leq -w(x(t)), \quad (2.2)$$

де $w(x)$ також додатно визначена функція. Якщо функції $V_0(x)$ і $w(x)$ є функціями класу Хана, тобто існують монотонно зростаючі, неперервні, визначені на позитивній напівосі функції скалярного аргументу $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$, такі що

$$a(|x|) \leq V_0(x) \leq b(|x|), \quad c(|x|) \leq w(x), \quad (3.2)$$

і $a(0) = b(0) = c(0) = 0$, то для похідної функції Ляпунова виконується

$$\frac{dV_0(x(t))}{dt} \leq -c[b^{-1}(V_0(x(t)))] \quad (3.3)$$

де $b^{-1}(\cdot)$ – функція, обернена до $b(\cdot)$. Припустимо, що інтегральна нерівність

$$\int_{V(x(0))}^{V(x(t))} \frac{dV}{c[b^{-1}(v)]} \leq -dt$$

має розв'язок

$$F[V(x(t))] - F[V(x_0)] \leq -t.$$

Звідси

$$V(x(t)) \leq F^{-1}[F[V(x_0)] - t], \quad t \geq 0.$$

Знову використовуючи нерівності (3.4), отримуємо

$$|x(x_0, t)| \leq a^{-1}(F^{-1}[F[b(|x_0|)] - t]), \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Одержана оцінка розв'язків узагальнює розглянуті раніше оцінки. Проте вона має, в основному, методологічний характер, оскільки проводиться для кожної системи (3.1) і кожної функції Ляпунова $V_0(x)$ окремо, а її конструктивність залежить від конкретного виду функцій.

Візьмемо функцію Ляпунова вигляду $V(x, t) = g(t)V_0(x)$. Функція $g(t)$, як і в попередньому розділі, задовольняє умовам $0 < g_0(t) < +\infty$, $t \geq 0$. Повна похідна таким чином вибраної функції $V(x, t)$ в силу системи (3.1) має вигляд

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} \leq g'(t)V_0(x(t)) - g(t)w(x(t)) = \frac{g'(t)}{g(t)}V(x(t), t) - g(t)w(x(t)).$$

Враховуючи властивості функції $w(x)$, одержуємо диференціальну нерівність

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} \leq \frac{g'(t)}{g(t)}V(x(t), t) - g(t)c\left[b^{-1}\left(\frac{V(x(t), t)}{g(t)}\right)\right]. \quad (3.6)$$

Отримана диференціальна нерівність має розв'язком наступний вираз

$$V(x(t), t) \leq V(x_0, 0)e^{\int_0^t \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} d\xi} - \int_0^t e^{\int_s^t \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} d\xi} g(s)c\left[b^{-1}\left(\frac{V(x(s), s)}{g(s)}\right)\right] ds. \quad (3.7)$$

Функцію $g(t)$ слід вибрати з умови

$$\frac{g'(t)}{g(t)}V(x(t), t) - g(t)c\left[b^{-1}\left(\frac{V(x(t), t)}{g(t)}\right)\right] \leq 0. \quad (3.8)$$

При її виконанні забезпечується входження розв'язків всередину поверхонь рівня. Оцінки збіжності одержуються при дослідженні нерівності (3.7).

1. Хусаинов Д.Я. Некоторые задачи оптимизации функций Ляпунова. – В сб.: Исследование операций и АСУ, в.25. – К.: Изд.-во "Вища школа" при КГУ, 1985. – С.44-48. 2. Сарыбеков Р.А. Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сибирский мат. журнал, Т.18, №.5, 1977. – С.1159-1167. 3. Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А. 39. Юнькова Е.А., Хусаинов Д.Я. Численное построение экстремальной функции Ляпунова // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.1, К.: Изд.-во "Вища школа" при КГУ, 1982. – С.105-108. 4. Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А. Об одном методе нахождения решения уравнения Ляпунова с заданным спектром // Украинский математический журнал, Т.36, №4, 1984. – С.528-531. 5. Хусаинов Д.Я., Ивохин Е.В. Об одном алгоритме нахождения функции Ляпунова, дающей экстремальную интегральную оценку // Вестник КГУ. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.4, К.: Изд.-во "Вища школа" при КГУ, 1985. – С.62-67. 6. Хусаинов Д.Я., Ивохин Е.В. Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова // Кибернетика, №2, 1985. – С.7-10. 7. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, Изд.-во МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с. 8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., Наука, 1985. – 223 с. 9. Пакшин П.В. 10. Langerak R., Polderman J.W., Krilavicius T. Stability analysis for hybrid automata using optimal Lyapunov Functions. – Dynamical System Modelling and Stability Investigation. Thesis of Conference Reports. May 27-30, 2003. – pp. 420.

Надійшла до редколегії 26.08.2008

УДК 517.929.4

Шатирко А. канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.

ДО СТРУКТУРНО СХЕМАТИЧНОГО ПІДХОДУ В МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано структурно схематичний підхід для етапу побудови моделі процесу математичного моделювання динамічних систем. Використано метод простору станів. Наведено методи побудови схем та рівнянь для простіших випадків, та показано ідеологію побудови математичних моделей багатоконтурних систем.

Structural schematic approach is offered for the stage of construction of model of mathematical modeling process of the dynamic systems. The method of state space is utilized. The methods of construction of schemes and equations are illustrated for more simple cases, and ideology of construction of mathematical models of the multicontour systems is demonstrated.

Теорія математичного моделювання, як окремий науковий напрям, з'явилася не так давно і лише починає формуватись. Хоча вже на сьогодні відомо багато цікавих результатів в різних дисциплінарних галузях: техніці [6,11], хімії, хімічній технології та виробництві [3,4,5], біології [10], економіці й екології [8,9]. В усіх цих роботах показано як максимально використовуючи знання кожної конкретної галузі застосувати їх до побудови математичної моделі того чи іншого процесу. Принципово для дослідженого науковця побудувати просто математичну модель не є надто складним завданням, та й результат може бути неоднозначним. Набагато складніше вибрати одну єдину математичну модель яка з одного боку достатньо проста в дослідженні, а з іншого найбільш адекватно описує реальний процес. Але, як показує досвід, для початківця, студента старшокурсника, випускника – саме задача конструювання моделі виявляється архіскладною (мається на увазі етап переходу від опису гуманірного до формального математичного запису). Допомогти вирішити цю проблему можуть сучасні навчальні посібники [1,12], які в першу чергу орієнтовані на специфіку кожної предметної галузі, та наукові роботи в яких чітко сформульовані принципи та виписано поетапно процес математичного моделювання [2,7].

Останнім часом набула широкого розвитку група методів моделювання, які базуються на теоретико-множинному підході до опису поведінки динамічних систем, та дозволяють найефективніше використовувати комп'ютерну техніку як інструмент інженерної практики розрахунків.

Та на жаль й досі побудова рівнянь стану досліджуваних систем взагалі не є достатньо формалізованою процедурою, і будь-якому досліднику необхідно при цьому проявити неабияке мистецтво. Цей творчий етап – це фактично нульовий, початковий етап в сучасній теорії моделювання систем [13].

Одним з найбільш поширених в інженерії способів побудови рівнянь стану досліджуваної системи є представлення її у вигляді структурної схеми системи в фазових змінних (змінних простору станів). Така структурна схема складається звичай з інтеграторів, підсилювачів та суматорів, та інших елементарних ланок [3,6]. Існує багато різновидів схем моделювання для однієї й тієї ж системи [7], звідси й неоднозначність опису динамічних систем за допомогою рівнянь стану.

В цій роботі зупинимось на розгляді методів побудови математичних моделей динамічних систем керування з одним входом й виходом за допомогою структурних схем в змінних стану, динаміка яких може бути описана звичайним диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (1)$$

при початкових умовах

$$y(0) = y_0, y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}; m < n$$

або системою звичайних диференціальних рівнянь.

Метод комбінування похідних.

Розглянемо спочатку більш простий випадок, коли початкові умови рівняння (1) нульові. При цьому рівняння (1) в операторній формі переписується як

$$A(p)Y(p) = B(p)U(p), \quad (2)$$

де

$$A(p) = p^n + \sum a_i p^i; \quad B(p) = \sum b_i p^i.$$

Представимо рівняння (2) у вигляді $Y(p)/B(p) = U(p)/A(p)$. Це рівняння замінимо наступними двома:

$$Y(p)/B(p) = X(p), \quad U(p)/A(p) = X(p),$$

де $X(p)$ – зображення допоміжної змінної $x(t)$. В диференціальній формі останні два рівняння приймуть вигляд:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = u(t), \quad (3)$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) = y(t) \quad (4)$$

Таким чином, замість розв'язку рівняння (1) можна розв'язати рівняння (3), (4). Побудуємо структурну схему розв'язку рівняння (3), для чого розв'яжемо його відносно старшої похідної

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = -a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} - a_{n-2} \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} - \dots - a_0 x(t) + u(t). \quad (5)$$

Припустимо, що n – та похідна функції $x(t)$ відома, тоді, подаючи її на ланцюжок послідовно з'єднаних інтеграторів, на виході кожного наступного інтегратора будемо мати похідні від функції $x(t)$ більш низьких порядків. Якщо кожну з цих похідних помножити на відповідний коефіцієнт a_i й утворити їх від'ємну суму разом з функцією $u(t)$, тоді отримаємо праву частину рівняння (5), тобто n – ту похідну функції $x(t)$, яка раніше припускалась відомою. Функція $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (1), отримується лінійною комбінацією похідних від $x(t)$, взятих з коефіцієнтами b_i у відповідності з рівнянням (4). Структурна схема розв'язку рівнянь (3), (4) приведена на рис.1.

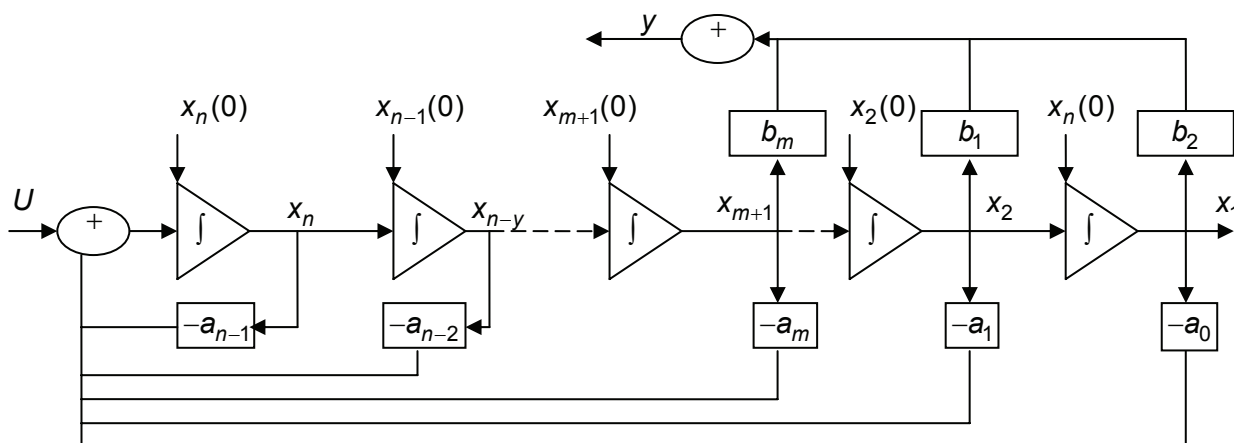


Рис.1. Структурна схема в змінних стану для метода комбінування похідних

При ненульових початкових умовах рівняння (1) необхідно їх перевести в початкові умови рівняння (3). Припускаючи, що рівняння (3), (4) еквівалентні до (1) й при ненульових початкових умовах, запишемо ці рівняння в операторній формі:

$$\begin{aligned} A(p)Y(p) + Y_0(p, a) &= B(p)U(p), \\ A(p)X(p) + X_0(p, a) &= U(p), \\ B(p)X(p) + X_0(p, b) &= Y(p), \end{aligned} \quad (6)$$

де $Y_0(p, a)$, $X_0(p, a)$, $X_0(p, b)$ – поліноми початкових умов.

Підставляючи $U(p)$ й $Y(p)$ з останніх двох рівнянь (6) в перше, отримаємо

$$A(p)[B(p)X(p) + X_0(p, b)] + Y_0(p, a) = B(p)[A(p)X(p) + X_0(p, a)]$$

З цього рівняння знаходиться тотожна рівність, за якою визначаються початкові умови рівняння (3) за відомими початковими умовами (1):

$$Y_0(p, a) = B(p)X_0(p, a) - A(p)X_0(p, b) \quad (7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p цієї рівності, знаходимо початкові умови $x_i(0)$ інтеграторів структурної схеми рис.1.

Застосування цього метода для побудови рівнянь стану не потребує перетворення рівняння (1). Можна безпосередньо по вигляду рівняння (1) скласти схему в змінних стану, бо його коефіцієнти i є коефіцієнтами структурної схеми в змінних стану. Перерахунок початкових умов провадиться згідно рівняння (7).

Метод послідовного інтегрування.

Запишемо рівняння (1) в операторній формі при нульових початкових умовах у вигляді

$$p^n Y(p) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i Y(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i U(p),$$

звідки

$$Y(p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^{n-1}} [b_i U(p) - a_i Y(p)], \quad b_i = 0 \text{ при } i > m. \quad (8)$$

Складемо ланцюжок з n послідовно з'єднаних інтеграторів. Сигнал на виході крайнього правого інтегратора прийемо за $y(t)$. Виконання рівності (8) забезпечується у тому випадку, якщо на вхід крайнього лівого інтегратора подати різницю $b_0 u(t) - a_0 y(t)$, на вхід наступного – різницю $b_1 u(t) - a_1 y(t)$ та вихід попереднього інтегратора і т.д. Структурна схема розв'язку рівняння (8) тоді прийме вигляд який показано на рис.2.

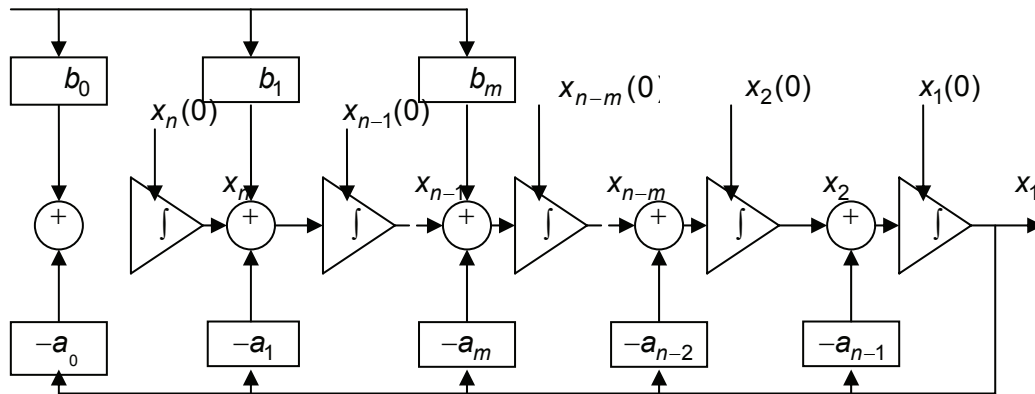


Рис. 2 Схема в змінних стану для метода послідовного інтегрування

Якщо знову вибрати в якості змінних стану $x(t)$ виходи інтеграторів структурної схеми рис.2, то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) - a_{n-1}x_1(t); \\ x_2'(t) &= x_3(t) - a_{n-2}x_1(t); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_{n-1}'(t) &= x_{n-m+1}(t) - a_m x_1(t) + b_m u(t); \\ x_n'(t) &= -a_0 x_1(t) + b_0 u(t); \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \quad (10)$$

При ненульових початкових умовах рівняння (1) початкові умови інтеграторів структурної схеми визначаються співвідношенням [6]

$$x_i(0) = \sum_{k=0}^i a_{n-k} y_0^{(i-k)}.$$

Як і для метода комбінування похідних, коефіцієнти рівняння (1) є одночасно й коефіцієнтами структурної схеми в змінних стану.

Метод розкладу передаточної функції на елементарні дроби

Достатньо перспективним підходом для синтезу систем методом простору станів є побудова структурної схеми в змінних стану шляхом розкладу передаточної функції на елементарні дроби. Ідея його полягає в наступному. Рівняння (1) представляється у вигляді передаточної функції

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (11)$$

Розкладемо цю передаточну функцію на елементарні дроби

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = d + \frac{c_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(p - \lambda_2)} + \dots + \frac{c_n}{(p - \lambda_n)},$$

Звідси

$$Y(p) = dU(p) + \left[\frac{c_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(p - \lambda_2)} + \dots + \frac{c_n}{(p - \lambda_n)} \right] U(p). \quad (12)$$

Коефіцієнт d буде відмінний від нуля тільки при $m = n$.

Структурна схема в змінних стану рівняння (12) показана на рис.3.

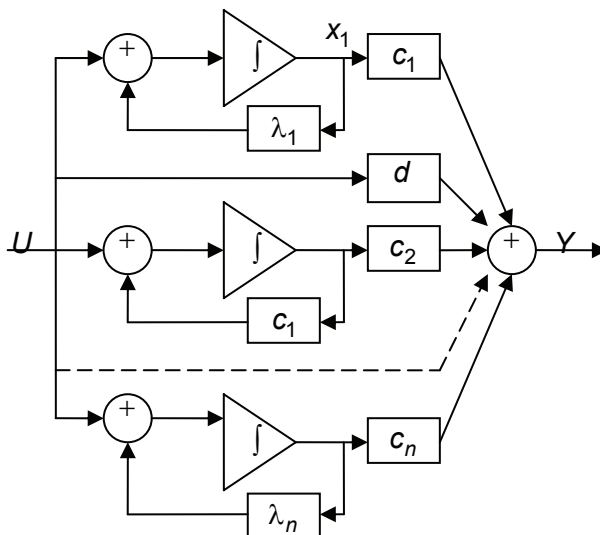


Рис.3 Схема в змінних стану для методу розкладу передаточної функції на елементарні дробі

Рівняння стану мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad (13)$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + du. \quad (14)$$

Рівняння стану багатоконтурних систем

Найбільшим чином проявляються переваги метода простору станів при побудові моделей складних багатовимірних й багатоконтурних систем.

Доцільно для моделювання складних систем застосовувати наступний порядок складання рівнянь стану. Зазвичай задано *функціональну* схему системи, аналіз якої треба виконати. Від функціональної схеми шляхом визначення рівнянь динаміки (передаточних функцій) елементів цієї системи можна перейти до алгоритмічної схеми. Така схема дає можливість зберегти взаємні зв'язки елементів функціональної схеми системи й одночасно отримати математичний опис її динаміки. Потім для всіх елементів системи складаються структурні схеми в змінних стану, які поєднуються між собою таким чином, як і елементи досліджуваної системи. Такий метод побудови рівнянь стану має важливу перевагу. Вона складається в тому, що деякі змінні стану будуть відповідати реальним змінним системи, що дає можливість прослідити їх поведінку в часі після розв'язку рівнянь стану. Нагальну ілюстрацію цього методу на конкретній технічній задачі можна знайти в [6].

1. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання. Навчальний посібник – Запоріжжя, 2004. – 140 с. 2. Белов Ю.А., Хусаїнов Т.Д., Шатирко А.В. Структурне моделювання в динамічних системах // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, 2007. – С. 2–6. 3. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии. – К.: Вищ. шк., 1973. – 280 с. 4. Верлань А.Ф., Москалюк С.С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с. 5. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с. 6. Козырев В.Д. Применение цифровых ЭВМ при исследовании автоматических систем РЭС. – К.: КВИРТУ ПВО, 1976. – 183 с. 7. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Фазис, 2000. – 411 с. 8. Ляшенко О.І. Математичне моделювання динаміки відкритої економіки. – Рівне: Волинські обереги, 2005. – 360 с. 9. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под. ред. А.А.Самарского, Н.Н.Моисеева, А.А.Петрова. – М.: Наука, 1986. – С. 7–196. 10. Новосельцев В.Н. Математическое моделирование в биологии: системы способные жить и умирать // Автоматика и телемеханика. – 2006. № 6. – С. 3–26. 11. Федоткин У.М., Бурлей У.Ю., Рюмшин Н.А. Математическое моделирование технологических процессов. Теория реакторов, рециркуляция и погранслоя – К.: Техника, 2003. – 424 с. 12. Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В. Моделювання динамічних систем. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 68 с. 13. D.Basmadjian, R.Farnood The Art of Modeling in Science and Engineering with Mathematica 2nd ed. // Chapman&Hall,CRC. – New York, 2007. – 509 p.

Надійшла до редколегії 21.08.2008

ІТЕРАЦІЙНІ СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ СИГНАЛІВ У ВИПАДКУ НАРОЩУВАННЯ СИСТЕМИ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

*Розглядаються ітераційні схеми апроксимації сигналів.
Iterative signals approximation schemes are considered.*

Вступ

При розв'язуванні цілого ряду задач цифрової обробки інформації [1] виникає потреба в розвитку нових математичних підходів, які дають можливість розробити більш якісні алгоритми. Це стосується, перш за все, швидкодії запропонованих алгоритмів, їх робастності, конструктивності при програмуванні, і т.д.

Як правило, при обробці експериментальної інформації виникає задача її апроксимації [2, 3], тобто представлення вхідного сигналу в залежності від параметрів в стисnutій формі. При цьому дуже часто вибирають систему базисних функцій на основі якої і проводиться апроксимація. Самі структурно-задані або лінійно-незалежні функції, їх кількість, визначені параметри розкладу по вимірним сигналам можуть використовуватися при їх розпізнаванні та класифікації. Важливим в задачах апроксимації є вибір самої системи базисних функцій, їх кількості, які б найкраще апроксимували той чи інший сигнал.

Наприклад, при розпізнаванні мовних сигналів виникають дві основні проблеми. Перша – визначення систем базисних функцій для найкращої апроксимації звуку. Друга – на основі визначених сукупностей базисних (можливо й параметрично заданих) функцій розпізнати вимірювані мовні сигнали. Алгоритми повинні бути не лише робастними та конструктивними, а й допускати розпаралелювання. Це дасть змогу в реальному часі більш ефективно розпізнавати мовні сигнали.

В статті запропоновано ітераційний алгоритм для визначення базисних функцій, який ґрунтується на нових підходах в області дослідження псевдообернених та проєкційних операторів [4, 5]. Отримана різницева динамічна модель зі змінною структурою (змінюється вимірність системи), на основі якої можна вибирати базисні функції.

Постановка задачі. Припустимо, що в деякі моменти $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$, тут N – фіксоване число, ми вимірюємо скалярну величину $x(t)$, тобто маємо виміри

$$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_N = x(t_N). \quad (1)$$

Задача полягає в тому, щоб апроксимувати цю залежність $x(t) \approx \varphi(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, використовуючи систему базисних функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots \quad (2)$$

лінійними комбінаціями

$$x(t) \approx \varphi(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t). \quad (3)$$

При цьому будемо вважати, що n – невідоме і може змінюватися від 1 до якогось (на практиці) числа M . Хоч і вивчення асимптотичних властивостей при $M \rightarrow \infty$ теж є доцільним.

Зрозуміло, що невідомі параметри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ будемо визначати згідно співвідношень (1), але при цьому необхідно враховувати, що кількість базисних функцій з (2), яку необхідно брати для апроксимації експериментальних даних, є невідомою. Таким чином, для обчислення коефіцієнтів в (3) будемо розглядати систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t_k) = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Як зазначалось вище, в співвідношеннях (4) число n змінюється від 1 до M , причому для досягнення мети не обов'язково використовувати всі базисні функції. Виявляється, що для визначення структури базисних функцій, тобто для знаходження параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, можна записати різницеву динамічну систему зі змінною структурою.

Ітераційна схема для розв'язування задачі апроксимації. Запишемо систему (4) в векторно-матричній формі. Для цього введемо наступні позначення

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \dots & \varphi_n(t_N) \end{pmatrix} \quad \text{– відома матриця розмірності } N \times n,$$

$b^{(N)T} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – N -вимірний вектор вимірюваних даних, $\alpha^{(n)T} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – вектор невідомих параметрів розмірності n на n -ій ітерації, де T – знак транспонування. Для визначення $\alpha^{(n)}$ запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь в матричній формі

$$A^{(n)} \alpha^{(n)} = b^{(N)}. \quad (5)$$

Розв'язок системи (5) можна записати через псевдообернену матрицю $A^{(n)+}$ розмірності $n \times N$

$$\alpha^{(n)} = A^{(n)+} b^{(N)}. \quad (6)$$

Долучимо до розглянутої схеми (2) ще одну базисну функцію $\varphi_{n+1}(t)$. Тоді кількість рівнянь в системі типу (4) не зміниться, але невідомих параметрів буде на один більше

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(t_k) = x_k, k = \overline{1, N}. \quad (7)$$

По аналогії систему (7) запишемо у векторно-матричній формі

$$A^{(n+1)} \alpha^{(n+1)} = b^{(N)}, \quad (8)$$

де $A^{(n+1)} = (A^{(n)}, a^{(n+1)})$ – матриця розмірності $N \times (n+1)$, $a^{(n+1)T} = (\varphi_{n+1}(t_1), \varphi_{n+1}(t_2), \dots, \varphi_{n+1}(t_N))$ – відомий вектор розмірності N , $\alpha^{(n+1)T} = (\alpha^{(n)T}, \alpha_{n+1})$ – $(n+1)$ – вимірний вектор шуканих змінних на $(n+1)$ -ій ітерації.

Розв'язок системи (8) можна записати через псевдообернену матрицю $A^{(n+1)+}$

$$\alpha^{(n+1)} = A^{(n+1)+} b^{(N)}. \quad (9)$$

Так як в цьому випадку псевдообернена матриця $A^{(n+1)+}$ виражається через псевдообернену та проєкційні матриці на n -ій ітерації, то для пошуку вектора невідомих параметрів можна записати різницеву схему. Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Для корекції вектора невідомих параметрів при послідовному розширенні системи базисних функцій і незмінних вимірах сигналу, справедливою є наступна ітераційна схема

$$\alpha^{(n+1)} = Q^{(n)} \alpha^{(n)} + u^{(n)}, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

з наступними початковими умовами для скалярної величини $\alpha^{(1)}$

$$\alpha^{(1)} = \frac{A^{(1)T}}{A^{(1)T} A^{(1)}} b^{(N)}. \quad (11)$$

Отже, для корекції параметрів ми записали лінійну однорідну різницеву систему зі змінною вимірністю фазового простору. Тобто матриця $Q^{(n)}$ не є квадратною, а має розмірність $(n+1) \times n$.

Доведення сформульованої теореми полягає в тому, щоб визначити матрицю $A^{(n+1)+}$ через $A^{(n)+}$ та відповідні проєкційні оператори $Z(A^{(n)})$ та $R(A^{(n)})$ на n -ій ітерації і підставити в (9).

Доведення ітераційної схеми (10) ґрунтується на наступних співвідношеннях

$$\begin{aligned} (A^{(n)+})^T &= (A^{(n)T})^+, (A^{(n)+})^+ = A^{(n)}, E_N - (A^{(n)T})^+ A^{(n)T} = Z(A^{(n)T}), \\ E_n - A^{(n)+} A^{(n)} &= Z(A^{(n)}), \\ R(A^{(n)}) &= A^{(n)+} (A^{(n)+})^T, R(A^{(n)T}) = (A^{(n)T})^+ (A^{(n)+})^T, \end{aligned} \quad (12)$$

де $A^{(n)}$ – матриця розмірності $N \times n$, E_n та E_N – одиничні матриці відповідної розмірності.

Згідно формул (12)

$$A^{(n+1)+} = \left\{ \left[(A^{(n)}, a^{(n+1)})^T \right]^+ \right\}^T = \left[\left(\begin{matrix} A^{(n)T} \\ a^{(n+1)T} \end{matrix} \right)^+ \right]^T. \quad (13)$$

Відповідно до теоретичних викладок [4, 5] розглянемо два випадки.

Випадок 1. Припустимо, що для матриці $A^{(n)}$ має місце співвідношення

$$a^{(n+1)T} Z(A^{(n)}) a^{(n+1)} > 0. \quad (14)$$

Тоді матриця $Q^{(n)}$ та вектор $u^{(n)}$, розмірностей $(n+1) \times n$ та $(n+1)$ відповідно, мають вигляд

$$Q^{(n)} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{A^{(n)+} a^{(n+1)} a^{(n+1)T} Z^T (A^{(n)T}) b^{(N)}}{a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} \\ \frac{a^{(n+1)T} Z^T (A^{(n)T}) b^{(N)}}{a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для цього випадку проекційні матриці $Z(A^{(n+1)})$ та $R(A^{(n+1)})$ обчислюються ітераційно за наступними формулами

$$Z(A^{(n+1)}) = Z(A^{(n)} \quad a^{(n+1)T}) = Z(A^{(n)T}) - \frac{Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)} a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T})}{a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}}, \quad (17)$$

$$R(A^{(n+1)}) = R(A^{(n)} \quad a^{(n+1)}) = R(A^{(n)T}) - \frac{Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)} a^{(n+1)T} R(A^{(n)T})}{a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} - \\ - \frac{R(A^{(n)T}) a^{(n+1)} a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T})}{a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} + \frac{Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)} a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T})}{(a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)})^2} \cdot (1 + a^{(n+1)T} R(A^{(n)T}) a^{(n+1)}). \quad (18)$$

Випадок 2. Розглянемо випадки, коли матриця $A^{(n)}$ задовольняє умові

$$a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)} = 0. \quad (19)$$

У цьому випадку матриця $Q^{(n)}$ та вектор $u^{(n)}$ мають розмірності $(n+1) \times n$ та $(n+1)$ відповідно й обчислюються, згідно (13) за формулами:

Матриця $Q^{(n)}$ має вигляд (15);

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{A^{(n)+} a^{(n+1)} a^{(n+1)T} Z^T (A^{(n)T}) b^{(N)}}{1 + a^{(n+1)T} R(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} \\ \frac{a^{(n+1)T} R^T (A^{(n)T}) b^{(N)}}{1 + a^{(n+1)T} Z(A^{(n)T}) a^{(n+1)}} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Проекційні матриці $Z(A^{(n+1)})$ та $R(A^{(n+1)})$ обчислюються наступним чином

$$Z(A^{(n+1)}) = Z(A^{(n)} \quad a^{(n+1)}) = Z(A^{(n)T}), \quad (21)$$

$$R(A^{(n+1)}) = R(A^{(n)} \quad a^{(n+1)}) = R(A^{(n)T}) - \frac{R(A^{(n)T}) a^{(n+1)} a^{(n+1)T} R(A^{(n)T})}{1 + a^{(n+1)T} R(A^{(n)T}) a^{(n+1)}}. \quad (22)$$

Згідно формул (12) для ітераційних процедур (17), (18) та (21), (22) необхідно обчислити $Z(A^{(1)})$ та $R(A^{(1)})$

$$Z(A^{(1)T}) = Z(a^{(1)T}) = E_N - \frac{A^{(1)} A^{(1)T}}{(A^{(1)T} A^{(1)})^2} = E_N - \frac{a^{(1)} a^{(1)T}}{(a^{(1)T} a^{(1)})^2} \quad (23)$$

$$R(A^{(1)T}) = R(a^{(1)T}) = \frac{A^{(1)}}{A^{(1)T} A^{(1)}} \cdot \frac{A^{(1)T}}{A^{(1)T} A^{(1)}} = \frac{A^{(1)} A^{(1)T}}{(A^{(1)T} A^{(1)})^2} = \frac{a^{(1)} a^{(1)T}}{(a^{(1)T} a^{(1)})^2}. \quad (24)$$

Дослідження збіжності ітераційної схеми. Запропоновану ітераційну схему (10) можна досліджувати на збіжність за допомогою аналога другого методу Ляпунова для різницевого рівняння. При цьому вважатимемо, що $\bar{\alpha}$ – розв’язок нашої задачі, тобто $\alpha^{(m)} \rightarrow \bar{\alpha}$ при $m \rightarrow \infty$. Тоді заміною

$$\alpha^{(m)} = y^{(m)} + \bar{\alpha}^{(m)} \quad (25)$$

систему (10) можна записати у нових змінних

$$y^{(m+1)} = f^{(m)}(y^{(m)}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Тут $\bar{\alpha}^{(m)}$ – вектор, складений з перших m компонент вектора $\bar{\alpha}$.

Задача аналізу збіжності різницевої схеми (10) буде еквівалентною дослідженню стійкості дискретної системи рівнянь (26). При цьому $y^{(m)} = 0, m = 1, 2, \dots$ називають незбуреним розв’язком.

Означення 1. Незбурений рух системи (26) називають стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке p та $\delta(\varepsilon) > 0$, що на розв’язках системи (26) виконується нерівність $\|y^{(m)}\| < \varepsilon, m = p, p+1, \dots$ при умові $\|y^{(p)}\| < \delta$ (тут і далі під $\|y^{(m)}\|$ будемо розуміти евклідову норму вектора $y^{(m)}$).

Якщо, крім означення 1, на розв’язках системи (26) виконується умова $\lim_{m \rightarrow \infty} \|y^{(m)}\| = 0$ при $\|y^{(p)}\| < \bar{\delta}$, де $0 < \bar{\delta} \leq \delta$, то незбурений рух системи (26) називають асимптотично стійким за Ляпуновим. Справедливі наступні теореми [6, 7].

Теорема 2. Нехай в області

$$Y_\rho^{(m)} = \{y^{(m)} : \|y^{(m)}\| < \rho\}, m = p, p+1, \dots \quad (27)$$

для системи різницевого рівняння (26) можна вказати додатно визначену послідовність функцій Ляпунова $V_m(y^{(m)}), m = p, p+1, \dots$, а її перша різниця, на розв’язках розглянутої системи, буде недодатною, тобто

$$\Delta V_m = V_{m+1}(y^{(m+1)}) - V_m(y^{(m)}) = V_{m+1}(f^{(m)}(y^{(m)})) - V_m(y^{(m)}) \leq 0, m = p, p+1, \dots, \quad (28)$$

то незбурений розв’язок є стійким за Ляпуновим.

Теорема 3. Якщо ж при умовах попередньої теореми щодо послідовності функцій Ляпунова $V_m(y^{(m)}), m = p, p+1, \dots$ перша різниця $\Delta V_m, m = p, p+1, \dots$ на розв’язках системи (26) є від’ємно визначеною, то незбурений розв’язок системи (26) є асимптотично стійким.

Необхідно відмітити, що для нашого випадку послідовність функцій Ляпунова можна вибирати у вигляді

$$V_m^{(1)} = y^{(m)T} B^{(m)} y^{(m)}, m = p, p+1, \dots, \quad (29)$$

де $B^{(m)}$ – деякі додатно визначені симетричні матриці розмірностей $m \times m$.

Теорема 4. Якщо $\bar{\alpha}$ – розв’язок системи (4) для будь-якого $m \geq p$, то система різницевого рівняння для збуреного руху, тобто відносно векторів $y^{(m)}$, буде мати вигляд

$$y^{(m+1)} = L^{(m)} y^{(m)}, m = p, p+1, \dots \quad (30)$$

Доведення сформульованої теореми проводиться шляхом підстановки (25) в (10) та врахування співвідношень

$$a^{(k)T} \bar{\alpha} = x_k, k = p, p+1, \dots \quad (31)$$

Таким чином, для цього випадку дослідження збіжності ітераційної процедури (10) при збурених початкових даних еквівалентно аналізу стійкості лінійної різницевої системи (30). Згідно принципу стиснених відображень Банаха різницева система (30) буде асимптотично стійкою, якщо

$$\|L^{(m)} y^{(m)}\| < \|y^{(m)}\|, m = p, p+1, \dots \quad (32)$$

Для конструктивної перевірки умов (32) можна скористатися наступною теоремою.

Теорема 5. Якщо $\bar{\alpha}$ задовольняє співвідношенням (31), то для асимптотичної збіжності ітераційної процедури (10) у цілому (для будь-яких початкових даних) повинна виконуватись одна з нерівностей:

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1}^{m+1} |l_{ij}^{(m)}| < 1, m = p, p+1, \dots; \quad (33)$$

$$\max_{j=1,2,\dots,m} \sum_{i=1}^{m+1} |l_{ij}^{(m)}| < 1, m = p, p+1, \dots; \quad (34)$$

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i(L^{(m)T} L^{(m)}) < 1, m = p, p+1, \dots, \quad (35)$$

де $\lambda_i(L^{(m)T} L^{(m)}), i = 1, 2, \dots, m$ – власні значення матриці $L^{(m)T} L^{(m)}$, $L^{(m)} = \{l_{ij}^{(m)}\}_{i=1, j=1}^{m+1, m}$.

Доведення теореми 5 випливає з принципу стиснених відображень (32). Фактично співвідношеннями (33)–(36) задаються умови, що відповідна норма оператора $L^{(m)}$ повинна бути меншою одиниці.

Висновки. Таким чином, в роботі запропонована різницева динамічна модель зі змінною вимірністю фазового простору для апроксимації експериментальних даних. Збіжність такої ітераційної схеми можна досліджувати на основі другого методу Ляпунова. Цією процедурою можна скористатися для оптимального вибору базисних функцій за якими відбувається апроксимація вимірюваних сигналів.

1. Задирака В.К. Цифровая обработка сигналов. – К.: Наук. думка, 1993. – 294 с.
2. Ахизер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
3. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИАКАП, 1991. – 432 с.
4. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98–107.
5. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 4. – С. 107–124.
6. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
7. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 246 с.

Надійшла до редколегії 18.09.2007

Наукове видання



ВІСНИК КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 8

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, 6-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28



Підписано до друку 7.10.08. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № 251. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 5,33. Зам. № 29-4974.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, 6-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; (38044) 239 31 58; факс (38044) 239 31 28
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua