

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для науковців, аспірантів, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики, студентів старших курсів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numerical methods modeling of processes are presented.

It's considered for teachers, scientific collaborators, aspirants and post-graduate students.

<b>ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР</b>	О.К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. АПН України
<b>РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ</b>	Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); А.В. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А. Белов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.Б. Буй, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.; С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; І.М. Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.Н. Редько, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України; Є.О. Лебедев, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.І. Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.А. Номіровський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
<b>Адреса редколегії</b>	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
<b>Затверджено</b>	Вченою радою факультету кібернетики 16.10.06 (протокол № 2)
<b>Атестовано</b>	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02
<b>Зареєстровано</b>	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
<b>Засновник та видавець</b>	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
<b>Адреса видавця</b>	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

---

## ЗМІСТ

---

<b>Бєлов Ю.А., Хусаїнов Т.Д., Шатирко А.В.</b> Структурне моделювання в динамічних системах .....	4
<b>Василенко Г.А.</b> Фазова динаміка та синхронізація в системі глобально зв'язаних осциляторів .....	7
<b>Доценко С.І., Закусило О.К.</b> Мінімізація середньої тривалості проходження в системі з двох машин $(n 2 F \bar{F})$ .....	14
<b>Івохін Є.В., Косинський К.О., Івохін Д.Є.</b> Аналіз структури моделей гібридних ієрархічних систем, побудованих на основі мереж Петрі .....	16
<b>Карнаух Т.О.</b> Дійсні числа та функції, обчислювані з поверненням .....	23
<b>Козоріз В.В., Ляшко С.І., Грицай І.В.</b> Математична модель руху вагону на магнітному підвісі .....	26
<b>Москальков М.М., Утебаєв Д.</b> Метод скінчених елементів для рівняння з сильною дисперсією .....	33
<b>Коварж І.В., Іванов А.Ф., Хусаїнов Д.Я.</b> Постановка крайових задач та задач Коші для рівнянь параболічного типу з запізненням .....	37
<b>Терещенко В.М., Анікєєва Л.О.</b> Геометричний підхід в розробці постріляційних баз даних .....	41
<b>Хусаїнов Д.Я., Кузьмич О.І.</b> Оцінки розв'язків стійких систем нейтрального типу .....	48
<b>Чуйко С.М.</b> Метод найменших квадратів в теорії некоректно поставлених крайових задач .....	51
<b>Джалладова І.А.</b> Умови існування асимптотичних систем для рівнянь із запізненням .....	53

---

## CONTENTS

---

<b>Belov Y.A., Khusainov T.D., Shatyko A.V.</b> Structural design is in the dynamical systems .....	4
<b>Vasylenko G.A.</b> Phase dynamics and synchronization in the system of the globally linked oscillators.....	7
<b>Dotsenko S.I., Sakusylo O.K.</b> Minimization of middle duration of passing is in the system of two machines $(n 2 F \overline{F})$ .....	14
<b>Ivokhyin Y.V., Kosynsky K.V., Ivokhyn D.Y.</b> Analysis of structure of models of the hybrid hierarchical systems, built on the basis of Petri networks .....	16
<b>Karnaukh T.O.</b> Real numbers and functions, calculated with back.....	23
<b>Kozoriz V.V., Lyashko S.I., Grytsay I.V.</b> The mathematical passenger car traffic model on magnetic levitation .....	26
<b>Moskalkov M.M., Utebaev D.</b> Finite element method for equation with strong dispersion .....	33
<b>Kovarzh I.V., Ivanov A.F., Khusainov D.Y.</b> The setting of boundary and Cauchy problems for partial equation with pure delay .....	37
<b>Tereshchenko V.M., Anykiva L.A.</b> Geometrical approach in the development of postrelational databases .....	41
<b>Khusainov D.Y., Kuzmych O.I.</b> Estimations of solutions of neutral type stable systems .....	48
<b>Chuiko S.M.</b> Least-squares method in the theory of incorrect linear boundary value problem.....	51
<b>Dzhalladova I.A.</b> Exist conditions for asymptotic system for equation with lag .....	53

## СТРУКТУРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

*Розглянуто та систематизовано поняття моделі взагалі, типів моделей, етапи процесу математичного моделювання, основні вимоги до математичної моделі. Наведено сучасні підходи до розробки різних типів математичних моделей.*

*A model concept is considered and systematized in general. It is investigated the types of models, stages of process of mathematical design, the basic requirements to the mathematical model. Modern approaches are resulted to development of different types of mathematical models.*

**Вступ.** Математичне моделювання є одним з нових наукових напрямів, що з'явилися останнім часом. Якщо в таких класичних галузях, як математичний аналіз, геометрія, диференціальні рівняння основний математичний апарат уже сформовано, то теорія математичного моделювання як окремих наукових напрям лише починає формуватись. У роботі окреслено основні поняття та методи математичного моделювання, зроблено спробу визначити структуру теорії, основні напрями її розвитку.

### 1. Поняття моделі. Математична модель

Моделюванням називається заміна одних об'єктів (оригіналів) іншими (моделями) і дослідження властивостей об'єктів за їх моделями. Теорія моделювання є взаємопов'язаною сукупністю положень, означень, методів і засобів побудови та вивчення моделей. Ці положення, означення, методи та засоби, як і самі моделі, є об'єктами теорії моделювання [11].

Поняття "модель" використовується широко й має різні застосування. Під моделлю об'єкта зазвичай розуміють інший об'єкт, що імітує деякий набір властивостей об'єкта, який моделюється [3, 4]. Модель не може й не повинна повторювати всі характеристики оригіналу, інакше губиться сенс моделювання. Моделі будуються й досліджуються для отримання результатів, які можна застосовувати до вихідного об'єкта.

Основна мета моделювання – одержати можливість дослідження та аналізу функціонування окремих характеристик реального об'єкта. Об'єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, однак для дослідження визначальною є невелика їх частина. Тому перед дослідником постає задача виділити основні властивості й перенести їх на модель [7, 8, 11].

**Типи моделей. Математична модель.** Усі моделі можна розділити на дві категорії: експериментальні та теоретичні. Теоретичні моделі описуються мовою тієї чи іншої дисциплінарної галузі. Розрізняють фізичні, біологічні, економічні моделі тощо. Розглянемо окремо математичні. Сьогодні у практиці дослідників прийнято на підставі моделі дисциплінарної галузі записувати відповідну математичну модель. Основною перевагою математичної моделі є можливість досліджувати властивості й поведінку моделі в усіх чи багатьох ситуаціях, спираючись на розроблені формальні методи досліджень. Використовуючи математичний апарат, можна спробувати вийти за межі побутової логіки та отримати якісно нові результати, міру адекватності яких допомагає визначити точність математичних методів. Крім того, обчислювальні експерименти з використанням математичних моделей дозволяють докладніше та глибше вивчати об'єкти.

Особливо значущим математичне моделювання стає тоді, коли об'єкт дослідження існує в єдиному примірнику, проведення експерименту є дуже тривалим або його ціна – занадто високою.

Створення математичної моделі можна вважати швидше творчим, ніж формальним актом дослідника, тому що для того ж самого об'єкта можна записати кілька нееквівалентних моделей. Об'єкт можна описувати, використовуючи різний математичний апарат. Наприклад, вибрати неперервну або дискретну, детерміновану або стохастичну модель. Цей вибір надалі визначає як метод дослідження, так і можливість отримати ті чи інші результати.

За підходами до створення розрізняють два типи математичних моделей: *структурну й функціональну*. Структурна модель з певною точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При побудові такої моделі структуру об'єкта спрощують, щоб отримати можливість вивчати модель. У результаті вона повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів.

Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом, що моделюється у різних ситуаціях при різних впливах. Аналіз структури об'єкта при цьому не проводиться. Така математична модель буде стовідсотково повторювати поведінку об'єкта тільки в ті моменти, коли є результати спостережень за ним. Прикладом може бути модель типу *чорної скрині*.

Обидва типи моделей мають переваги та недоліки. Функціональну модель зазвичай побудувати легше, але вона може втратити свою адекватність за межами області експериментального дослідження. З іншого боку, складніший структурний підхід дозволяє створити модель, що залишиться адекватною в багатьох ситуаціях.

### 2. Процес математичного моделювання

Процес математичного моделювання є досить складним. Кожен етап його взаємодіє з іншими, і результати одного етапу визначають результати та можливість проведення інших.

Цей процес потрібно розглядати послідовно. Однак на кожному з етапів дослідник, перш ніж перейти до наступного, ітеративно може повернутися до попередніх етапів, поки не отримає задовільний результат. На кожній ітерації знаходяться та виправляються помилки, степінь адекватності зростає. На етапі аналізу дисциплінарної галузі можна записати кілька моделей різних типів. Однак на етапі тестування тип моделі змінюється рідко. Якщо процес проходить задовільно, то неадекватність має бути виявлена на ранніх етапах. На останніх етапах потрібно лише підвищити точність одного з параметрів.

**Аналіз дисциплінарної галузі.** Одним з основних етапів, що визначає останній, є аналіз ситуації. Процес математичного моделювання починається з аналізу дисциплінарної галузі. На цьому етапі визначається об'єкт досліджен-

ня, виділяються всі компоненти середовища, у якому знаходиться об'єкт, аналізуються вплив середовища та можливі стани об'єкта.

**Побудова моделі.** На наступному етапі формулюється модель дисциплінарної галузі. Об'єкт дослідження замінюють його моделлю. У моделі описано, які властивості об'єкта є важливими з погляду дослідника. Для побудови структурної математичної моделі в моделі дисциплінарної галузі треба описати структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів та вихідні сигнали.

**Постановка задач математичного моделювання.** Далі будують математичну модель. Вона існує у формі записів з використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що властиві його складовим частинам, тощо.

**Дослідження математичної моделі.** Залежно від мети моделювання і предметного опису об'єкта математична модель може бути динамічною, тобто описувати динаміку процесу, та статичною, тобто у формі співвідношень, що не змінюються за часом. Для запису моделі використовують диференціальні рівняння, алгебраїчні або стохастичні співвідношення тощо. Для кожного типу моделей використовують відповідний математичний апарат аналізу одержаної моделі. Певні теоретичні методи надають можливість отримати нові знання про об'єкт.

**Комп'ютерне моделювання.** Як правило, після розробки математичної моделі проводять чисельний експеримент. Спочатку математичну модель готують до чисельного експерименту (диференціальні рівняння за допомогою різнице-вих схем переводять до дискретних, збирають необхідну статистику, готують початкові умови тощо). Далі проводять чисельні розрахунки моделі за різних умов і допустимих початкових значень. Отримані результати обробляються.

**Тестування моделі.** Визначається міра адекватності, тобто відповідність моделі до об'єкта, що моделюється. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. З іншого боку, модель має правильно описувати об'єкт з кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей має сенс вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей суттєвим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Крім того, важливо показати, що для моделі виконуються вже відомі закони дисциплінарної галузі, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони дисциплінарної галузі, як закон Ньютона у фізиці, або результати, що отримані з використанням інших методів дослідження.

**Аналіз та інтерпретація результатів.** На підставі результатів теоретичного дослідження та чисельних експериментів треба сформулювати результати одержаних досліджень. Це можуть бути доведені закономірності, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним може бути неочікуваний результат, який пощастило отримати саме за рахунок застосування математичного моделювання та використання методів математичного дослідження.

### 3. Основні вимоги до математичної моделі

Математична модель має задовольняти певні вимоги. Вони мають, в основному, суб'єктивний характер і визначаються метою моделювання та існуючими обмеженнями. Розглянемо деякі з них.

**Адекватність.** Модель має задовольняти умову адекватності відносно вибраних характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

– відповідний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками (напр., стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта);

– правильний якісний опис з відповідною мірою точності.

Таким чином, адекватність моделі визначається не тільки об'єктом та моделлю, але також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді говорять про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

**Невраховані фактори.** Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які він вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття *стійкості моделі*, що означає здатність моделі зберігати свої якісні властивості при збуренні її параметрів або структури. Існує деяка область зміни параметрів.

**Простота та оптимальність моделі.** Під простотою розуміють обсяг зусиль, що повинен вкласти дослідник у вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності інколи необхідно створювати громіздку систему з великою кількістю рівнянь, які важко досліджувати. Модель є достатньо простою, якщо сучасні методи дослідження дозволяють із розумними затратами та достатньою точністю провести якісний та кількісний аналіз вибраних характеристик і осмислити результат.

**Ієрархія змінних.** Значимість різних змінних і параметрів може бути різною. Частина змінних, які з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними.

Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни у часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та простору. Виходячи із заданої часової шкали, розрізняють *нормальні, повільні та швидкі* змінні. Надалі повільні змінні можна розглядати в моделі як параметри.

Швидкі змінні розділяють на короткочасні та довготермінові. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють важливу роль при аналізі перехідних процесів, які зв'язують один стаціонарний режим з іншим [5].

За аналогією пропонують класифікацію змінних за мірою просторового впливу [1, 2]: *близько, далеко, дуже далеко*. Таким чином устанавлюється деяка ієрархія змінних. Часто ефективним методом розв'язування задач ієрархії змінних може бути перехід від складної моделі з великою кількістю "мікрозмінних" до простішої моделі з невеликою кількістю "макрозмінних". Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул, до рівнянь у часткових похідних, що використовують поняття температури та щільності.

**Інші вимоги.** Дослідники відзначають інші фактори, що впливають на властивості та розвиток моделі, наприклад феноменологічні та напівемпіричні закони. Ці закони існують у дисциплінарній галузі й від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі.

Одне з основних питань, що постає в процесі побудови моделі – це питання про параметри, що характеризують стан об'єкта чи процесу та про кількість степенів вільності, під якою розуміють кількість однорідних скалярних параметрів. Кількість параметрів може бути скінченною або нескінченною. Незважаючи на те, що реальні об'єкти зазвичай мають нескінченну кількість параметрів, дослідники намагаються працювати зі скінченною кількістю, оскільки це значно полегшує аналіз.

#### 4. Типи математичних моделей та методологія конструювання

Основою моделювання є теорія подібності, яка стверджує, що абсолютна подібність має місце лише за умови заміни одного об'єкта іншим, точно таким самим. При моделюванні абсолютна подібність не має місця, вимагається лише, щоб модель достатньо адекватно відображала властивості функціонування об'єкта, що досліджується. Залежно від характеру процесів, типи математичного моделювання можна поділити на *детерміновані* та *стохастичні*, *статичні* та *динамічні*, *дискретні*, *дискретно-неперервні* та *неперервні*. Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, у яких передбачається повна відсутність випадкових впливів. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізується низка реалізацій випадкового процесу та оцінюються його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій. Статичне моделювання передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будується математична модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому. Динамічне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу. Дискретні, дискретно-неперервні та неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у часткових похідних, різниці рівняння, рівняння з післядією та інтегральні. Вигляд математичної моделі залежить не тільки від природи реального об'єкта, але також від задач і можливостей дослідника та необхідної достовірності й точності розв'язку задачі.

На сучасному етапі при розробці математичних моделей використовують такі підходи.

**Балансовий підхід.** У його основі лежить припущення, що приріст змінної, яка описує процес, дорівнює різниці функції, що забезпечує збільшення кількості (функція приросту) та функції, що забезпечує зменшення кількості (функція смертності). Якщо розглядати проміжок часу  $\Delta t$ , то

$$x(t + \Delta t) - x(t) = B(t, x(t), \Delta t) - D(t, x(t), \Delta t).$$

У цьому рівнянні  $B(t, x(t), \Delta t)$  – збільшення фазової змінної, а  $D(t, x(t), \Delta t)$  – її зменшення.

**Гамільтонів (варіаційний) підхід.** Найкращі результати у математичному моделюванні динамічних процесів отримані в класичній механіці [6]. Це обумовлено, перш за все, історичними особливостями. Усі перші наукові роботи були пов'язані з морською навігацією, рухом планет тощо. Ці галузі розвивались давно, тому математичний апарат розв'язку притаманних ним проблем повністю усталений. Для виведення рівнянь руху був запропонований формалізм Гамільтона, що добре себе зарекомендував. Він полягає в такому. Якщо система у фазовому просторі змінює стан з положення  $x_0$  у момент часу  $t_0$  до положення  $x_1$  у момент  $t_1$ , то інтеграл (сума) рухів має бути мінімальним:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min.$$

Функція  $L(t, x(t), x'(t))$  називається функцією Лагранжа й має вигляд різниці кінетичної та потенційної енергій. Необхідна умова максимуму функціонала  $I[x(t)]$  має вигляд рівності нулю його першої варіації. На підставі цього твердження математична модель динаміки процесу приймає вигляд рівняння Ейлера – Лагранжа

$$L_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x, x') = 0.$$

Методологія побудови достатньо широкого класу математичних моделей описується так. На основі кінетичної та потенційної енергій складають функцію Лагранжа. Математична модель при цьому описується диференціальними рівняннями другого порядку у звичайних або часткових похідних [6, 10].

**Моделі, що базуються на фундаментальних законах природи.** Найрозповсюдженіший метод побудови моделей полягає у застосуванні фундаментальних законів природи та конкретної ситуації [9, 10]. Ці закони загальноновизнані та підтверджені історією, тому природно їх використати. До них належать, наприклад, закони збереження енергії, матерії, імпульсу тощо, закони Ньютона та закон Гука.

**Застосування методу аналогій.** Один з підходів, що широко використовуються при побудові математичних моделей – це метод аналогій. Якщо при спробі моделювати деякий об'єкт складно чи неможливо використати фундаментальні закони природи чи варіаційні принципи, то можна використати принцип "схожості". Застосування аналогій до раніше вивчених явищ – це один з плідних підходів у моделюванні.

**Ієрархичний підхід.** Тільки у виняткових випадках вдається побудувати модель. Як правило, через багатofакторність процесу, складність залежностей і кількість зв'язків це зробити неможливо. Тому природним стає підхід *від простого до складного*. При такому підході будують ланцюг (ієрархію) моделей, що поступово ускладнюються, кожна з яких включає попередню як частковий випадок.

**Лінійні та нелінійні моделі.** Моделювання з використанням лінійних систем проводиться головним чином з таких причин [9]:

За певних обмежень (малі часові проміжки) нелінійні процеси завжди можна апроксимувати лінійними (криву можна замінити відрізками прямих).

Точні розв'язки лінійних систем можна визначити в аналітичній формі.

Для лінійних систем існують ефективні методи оцінки збурень.

Розроблено високоякісні чисельні методи розв'язку лінійних систем (комп'ютерне моделювання).

Аналітичні методи розв'язку нелінійних систем існують, скоріше, як виключення, ніж як правило. Навіть якщо можна отримати розв'язок нелінійної системи в аналітичному вигляді, то виникають труднощі при її якісному дослідженні.

Одним з найбільш використовуваних математичних апаратів для моделювання процесів у динаміці є лінійні системи. Як правило, це системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з розподіленими параметрами, різнице-вих рівнянь. Останнім часом використовуються системи диференціально-функціональних рівнянь, зокрема диференціально-різнице-вих із запізненням і нейтрального типу. Можна сказати, що хороші математичні результати та математична теорія в цілому побудовані тільки для лінійних систем. Незважаючи на відмінність математичної суті кожного з типів лінійних систем, їм притаманні деякі загальні властивості.

До основних властивостей однорідних систем належать такі:

**Лінійність.** Лінійна комбінація розв'язків з довільними сталими буде розв'язком лінійної системи.

**Розмірність.** Розв'язки системи утворюють лінійний простір. Довільний розв'язок можна виразити лінійною комбінацією базисних векторів цього простору.

До властивостей неоднорідних систем належать:

Властивість суперпозиції. **Лінійна комбінація розв'язків системи з різними входами буде розв'язком системи з лінійною комбінацією входів.**

Динаміка системи визначається лінійною комбінацією базисних розв'язків і входу.

Крім того, загальними властивостями є:

**Властивість продовжуваності.** Довільний розв'язок лінійної системи можна продовжити на весь проміжок часу  $t \geq t_0$ . Тут  $x = x(t_0)$  – початковий стан системи.

**Властивість стійкості.** Одночасно всі розв'язки системи або стійкі, або нестійкі. Тому має сенс поняття стійкої системи.

При побудові математичних моделей досить загальним підходом є блочний принцип. Згідно з ним будь-яка модель достатньо складного реального об'єкта (нелінійна, багатовимірна, ...) структурно може бути розкладена на деякі підмоделі, або так звані "елементарні" блоки, які окремо досліджуються із самого початку. Заключним етапом у цьому випадку є об'єднання отриманих "елементарних" блоків в єдину систему рівнянь математичного опису об'єкта. Перевагою блочного принципу математичного описання є те, що на стадії проектування модель можна ускладнювати або спрощувати, легко маніпулюючи блоками, рухаючись згідно з основною схемою оформлення моделі.

1. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Панова Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – К., 1976.
2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Панова Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – К., 1976.
3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М., 1978.
4. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. – М., 1973.
5. Занг Вей Бин. Синергетическая экономика. Время и переменные в экономической нелинейной теории. – М., 1999.
6. Краснощеклов П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М., 2000.
7. Лебідь Р.Д., Жуков І.А., Гудій М.М. Математичні методи в моделюванні систем. – К., 2000.
8. Мак-Лоун Р.Р., Креггс Дж., Нобл Б. и др. Математическое моделирование. – М., 1979.
9. Самарский А.А., Михайлов М.М. Математическое моделирование. – М., 1997.
10. Хусайнов Д.Я., Харченко И.И., Шатирко А.В. Моделирование динамических систем. – К., 2004.
11. Эндрюс, Мак-Лоун. Математическое моделирование. – М., 1979.

Надійшла до редакції 03.11.2006

УДК 517.9

Г.А. Василенко, мол. наук. співроб.

## ФАЗОВА ДИНАМІКА ТА СИНХРОНІЗАЦІЯ В СИСТЕМІ ГЛОБАЛЬНО ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

*Проведено дослідження синхронізації в дискретній системі Курамото; зокрема, для двовимірної системи знайдено границі області синхронізації у площині параметрів системи.*

*Synchronization in the discrete Kuramoto system has been investigated; in particular, for the two-dimensional system the boundaries of the synchronization region in the parameter plane were obtained.*

**Вступ.** Системи зв'язаних осциляторів широко використовуються при моделюванні складних нелінійних процесів та явищ з усіх галузей науки й техніки. Ансамблі зв'язаних осциляторів служать як моделі для формування просторово-часових зразків і простих форм турбулентності. Наприклад, в економічних задачах системи зв'язаних осциляторів можуть бути використані для пояснення, як різні сектори економіки пристосовують один до одного свої індивідуальні цикли продукту через обмін товарами, одиницями капіталу, змінні відсоткові ставки чи ціни на сировину. Аналогічно в біологічних науках є важливим розуміти, як групи клітин або функціональних одиниць, кожна з яких відображає складні нелінійні динамічні явища, можуть взаємодіяти одна з одною, щоб виробити узгоджену реакцію на вищому організаційному рівні. Добре відомо, наприклад, що синхронізовані хвилі, які поширюються всією поверхнею серця, впливають на узгодженість діяльності клітин м'язів і регулярність скорочень.

Фазова синхронізація є одним із фундаментальних та універсальних явищ у фізиці, інженерії, біології, економіці та інших галузях науки й техніки [3]. Синхронізація виникає, коли деякі коливальні системи взаємодіють і впливають одна на одну таким чином, що досягається стан, коли їх коливання відбуваються узгоджено – стан синхронізації. Відомими прикладами синхронізації є явища, коли два настінних годинники синхронізуються внаслідок взаємодії через стіну, і синхронізація обертання Місяця з його орбітальним рухом (Місяць завжди повернутий одним і тим самим боком до Землі). Радіоприймач функціонує через синхронізацію свого внутрішнього осцилятора з періодом радіохвилі так, щоб можна було визначити переданий сигнал і перетворити його на звук. У даній роботі досліджується явище фазової синхронізації в нелінійній системі зв'язаних осциляторів (або годинників), для кожного з яких динаміка описується рівнянням зсуву на колі.

Японський вчений Й. Курамото досліджував особливий клас систем, що моделюють коливання скінченної амплітуди та фази зі слабким збуренням або слабкою взаємодією, і запропонував метод, який дозволяє спрощено опису-

© Г.А. Василенко, 2007

вати фазову динаміку таких систем [6]. Курамото досліджував синхронізацію періодичних автоколивачів за допомогою періодичного зовнішнього збурення. Основний ефект полягає в захопленні фази коливачів, унаслідок чого частота автоколивачів повністю збігається з частотою зовнішньої сили. Коротко опишемо суть методу, запропонованого Курамото [3, 6]. Коливання натуральних осциляторів при  $t \rightarrow \infty$  є строго періодичними, тому доцільним є ввести фазу  $\phi$  для орбіти граничного циклу кожного осцилятора таким чином, щоб періодичний рух на циклі відповідав сталому зростанню фази, тобто  $d\phi / dt = \omega$ . Незважаючи на досить вільне означення фази, ця величина надає нам важливу інформацію про динаміку системи. Наприклад для того, щоб визначити, чи є пара осциляторів взаємно синхронізованою до ідентичної частоти, досить розглянути різницю фаз даних осциляторів: якщо різниця обмежена, то осцилятори синхронізовані, якщо необмежена – не синхронізовані.

**Модель Курамото з неперервним часом.** Курамото [6] показав, що для систем майже ідентичних осциляторів граничного циклу зі слабким зв'язком довготермінова динаміка моделюється фазовими рівняннями такого універсального вигляду:

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\psi_j - \psi_i) \quad \text{mod } 2\pi,$$

де  $i = \overline{1, N}$ ,  $\psi_i$  – фазові змінні на  $N$ -вимірному торі,  $\omega_i$  – частоти, що є константами,  $\Gamma_{ij}(\cdot)$  – функції зв'язку. У такій системі можливе використання різних функцій зв'язку. Курамото зазначив, що найзручнішим для дослідження є випадок середнього поля, і запропонував використання моделі з глобальним зв'язком типу синуса фазових різниць

$$\Gamma_{ij}(\psi_j - \psi_i) = \frac{K}{N} \sin(\psi_j - \psi_i),$$

де  $K$  – параметр зв'язку, і сила зв'язку між кожною парою є пропорційною  $N^{-1}$ . Таким чином, моделлю Курамото [6] називають систему вигляду

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де  $\psi_i$  – фазові змінні на  $N$ -вимірному торі,  $\omega_i$  – частоти,  $K \geq 0$  – параметр зв'язку.

**Основні властивості системи Курамото.** Система Курамото є важливою моделлю для дослідження взаємної синхронізації зв'язаних осциляторів [3, 7, 9] і виявляє таку динаміку: при достатньо малих значеннях параметра зв'язку синхронізація в системі відсутня, але зі збільшенням  $K$  відбувається перехід до кластерного стану, потім при певному значенні зв'язку всі осцилятори синхронізуються й надалі коливаються з однаковою частотою, що визначається

$$\text{як } \Omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i.$$

Для дослідження фазової синхронізації в системі (1) варто вивчати взаємодію осциляторів один з одним, а тому, не втрачаючи загальності, можемо зафіксувати один осцилятор і через заміну змінних перейти до системи для різниць фазових змінних  $\psi_j$ . Дійсно, щоб розглянути різниці рівнянь, віднімемо від першого рівняння системи кожне наступне і введемо нові змінні, що є різницями фаз осциляторів:

$$\varphi_i = \psi_1 - \psi_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2)$$

і позначимо різниці частот таким чином:  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ . Отримаємо

$$\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_{i+1} = \omega_1 - \omega_{i+1} + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N (\sin(\psi_j - \psi_1) - \sin(\psi_j - \psi_{i+1})), \quad (3)$$

де  $i = \overline{1, N-1}$ . Ураховуючи, що  $\psi_j - \psi_{i+1} = \psi_j - \psi_1 + \psi_1 - \psi_{i+1} = \varphi_i - \varphi_{j-1}$ , і перший член суми визначається як  $\sin(\psi_1 - \psi_1) - \sin(\psi_1 - \psi_{i+1}) = -\sin \varphi_i$ , отримаємо

$$\dot{\varphi}_i = \Delta_i - \frac{K}{N} \left( \sin \varphi_i + \sum_{j=1}^{N-1} (\sin \varphi_j + \sin(\varphi_i - \varphi_j)) \right). \quad (4)$$

Таким чином, при дослідженні фазової синхронізації в  $N$ -вимірній системі Курамото доцільним є розглядати  $(N-1)$ -вимірну систему, яка описує динаміку фазових різниць.

**Дискретна модель Курамото.** Разом із системами диференціальних рівнянь значний інтерес для дослідників становлять системи різницевих рівнянь, або відображень. Вони моделюють велику кількість прикладних задач, що належать до найрізноманітніших галузей природознавства. Зокрема, різницеві рівняння використовують для моделювання складних коливальних процесів, особливо в тих випадках, коли застосування звичайних диференціальних рівнянь є проблематичним. Дискретні моделі є простішими та зручнішими для чисельного дослідження, оскільки, застосовуючи мінімум обчислювальних і графічних засобів, можна побачити поведінку розв'язків різницевих рівнянь, дослідити їх біфуркації при зміні параметрів. У той же час, порівняно із системами з неперервним часом, різницеві рівняння, як правило, демонструють більш складну та багату динаміку.

У даній роботі досліджується дискретний аналог системи Курамото, і таку модель можна отримати, провівши дискретизацію системи Курамото за часом. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що крок за часом є рівним одиниці, і замінимо похідну за часом різницею  $\dot{\psi}_i = \psi_i^{(n+1)} - \psi_i^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .



Таким чином, приходимо до дискретної моделі Курамото:

$$\psi_i^{(n+1)} = \psi_i^{(n)} + \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j^{(n)} - \psi_i^{(n)}) \pmod{2\pi}, \tag{5}$$

де  $\psi_i^{(n)}$  – фазові змінні на  $N$ -вимірному торі,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\omega_i$  – частоти,  $K \geq 0$  – параметр зв'язку.

Нашою метою є дослідити явище фазової синхронізації для даної системи. Для  $N$ -вимірної динамічної системи явище повної синхронізації полягає в тому, що у процесі ітерації з часом усі фазові змінні починають коливатися синхронно.

**Означення.** У системі (5) має місце режим *повної синхронізації*, якщо для всіх  $i, j \in \mathbb{Z}_N^+ = \{1, 2, \dots, N\}$  виконується  $|\psi_i^{(n)} - \psi_j^{(n)}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , і траєкторія  $\psi^{(n)}$  системи (5) є обмеженою.

Повна синхронізація є лише простим виявом набагато загальнішого явища  $k : m$  синхронізації, яке можна означити так.

**Означення.** У системі (5) має місце режим *фазової  $k : m$  синхронізації*, якщо для всіх  $i \in \mathbb{Z}_{N-1}^+ = \{1, 2, \dots, N-1\}$  та  $n \geq 1$  виконується  $|k\psi_i^{(n)} - m\psi_{i+1}^{(n)}| < \text{const}$ , і траєкторія  $\psi^{(n)}$  системи (5) є обмеженою [8].

За аналогією з випадком неперервного часу, у дискретній системі Курамото можна понизити розмірність, перейшовши до системи для фазових різниць. Введемо нові змінні  $\varphi_i^{(n)} = \psi_1^{(n)} - \psi_{i+1}^{(n)}$ , позначимо  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ , де  $i = \overline{1, N-1}, n \in \mathbb{Z}^+$ .

Після такої заміни змінних приходимо до  $(N-1)$ -вимірної системи різницевих рівнянь

$$\varphi_i^{(n+1)} = \varphi_i^{(n)} + \Delta_i - \frac{K}{N} \left( \sin \varphi_i^{(n)} + \sum_{j=1}^{N-1} \left( \sin \varphi_j^{(n)} + \sin(\varphi_j^{(n)} - \varphi_i^{(n)}) \right) \right), \tag{6}$$

де змінні  $\varphi_i^{(n)}$  обчислюються за модулем  $2\pi$ ,  $i = \overline{1, N-1}, n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Динаміка системи двох зв'язаних осциляторів.** Розглянемо систему двох зв'язаних осциляторів, динаміка кожного з яких описується відображенням зсуву на колі:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2\pi\nu_1 + \frac{K}{2} \sin(y_n - x_n) \\ y_{n+1} &= y_n + 2\pi\nu_2 + \frac{K}{2} \sin(x_n - y_n), \end{aligned} \tag{7}$$

де обидві змінні  $x$  та  $y$  обчислюються за модулем  $2\pi$ ;  $\nu_1, \nu_2 \in [0, 2\pi)$  – відповідні частоти фазових осциляторів,  $K \geq 0$  – сила зв'язку. Розглядається нелінійний зв'язок типу синусу фазових різниць, оскільки така форма зв'язку природно виникає в моделях зв'язаних осциляторів з неперервним часом [2].

Синхронізацію осциляторів можна виразити за допомогою різниці між фазовими змінними  $x_n$  та  $y_n$ . Якщо відняти друге рівняння системи (7) від першого, то отримаємо рівняння для фазової різниці  $x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n + 2\pi(\nu_1 - \nu_2) - K \sin(x_n - y_n)$  або, після заміни змінних  $z_n = x_n - y_n$ , позначивши  $\Delta = \nu_1 - \nu_2$ :

$$z_{n+1} = z_n + 2\pi\Delta - K \sin z_n, \tag{8}$$

де  $z$  обчислюється за модулем  $2\pi$ . Не втрачаючи загальності, вважаємо, що  $\nu_1 \geq \nu_2$ , і тому розглядаємо невід'ємні значення різниці частот  $\Delta$  та нелінійності  $K$ . Для зручності надалі введемо позначення:  $f(z) := z + 2\pi\Delta - K \sin z$ .

Таким чином, приходимо до висновку, що динаміка фазової різниці описується відображенням Арнольда [1, 2, 5], і синхронізації системи (7) можна досягнути, наприклад, зі значеннями параметрів, для яких відображення (8) має притягувальну нерухому точку, що є в цьому випадку синхронізуючим аттрактором.

**Фазова синхронізація та механізми її втрати. Існування та стійкість нерухомої точки.** Розглянемо умови та області фазової синхронізації в системі (7). Відображення Арнольда (8) описує динаміку фазової різниці для системи зв'язаних осциляторів (7) і, залежно від значень параметрів, виявляє періодичну, квазіперіодичну або хаотичну поведінку. Якщо розглядати два ідентичних осцилятори в (7), тобто  $\nu_1 = \nu_2$ , то відображення (8) має нерухому точку  $z^* = 0$ , яка відповідає повній синхронізації в (7):  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для осциляторів з різними частотами  $\nu_1$  і  $\nu_2$

за певних умов на ці значення існує нерухома точка  $z^* = \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$ , а її стійкість, якщо вона має місце, означає,

що осцилятори синхронізуються, але з ненульовою фазовою різницею  $|z_n| \rightarrow z^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Також існує нестійка

нерухома точка  $z_1^* = \pi - \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$ .

**Твердження 1.** Для відображення (8) є справедливими твердження:

1. Нерухома точка  $z^* = \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$  існує тоді й тільки тоді, коли  $K \in [2\pi\Delta, +\infty)$ ;

2. Нерухома точка  $z^* = \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$  є стійкою тоді й тільки тоді, коли  $K \in [2\pi\Delta, 2\sqrt{1+\pi^2\Delta^2})$ , і при

$K = 2\sqrt{1+\pi^2\Delta^2}$  вона втрачає стійкість у біфуркації подвоєння періоду.

**Доведення.** 1. Безпосередньо з формули відображення (8) можна записати рівняння для визначення координати нерухокої точки  $z^* = f(z^*)$ :  $z^* = z^* + 2\pi\Delta - K \sin z^*$ , звідки легко отримати  $z^* = \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$  та

$z_1^* = \pi - \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K}$ . Значення  $z^*$  є визначеним тоді й тільки тоді, коли аргумент функції  $\arcsin$  є меншим ніж 1 за

модулем  $\left| \frac{2\pi\Delta}{K} \right| \leq 1$ . Таким чином, при невід'ємній різниці  $\Delta$  нерухома точка  $z^*$  існує тоді й тільки тоді, коли виконується

нерівність  $K \geq 2\pi\Delta$ .

2. Для дослідження стійкості нерухокої точки запишемо вираз для похідної функції  $f(z)$ :  $f'(z) = 1 - K \cos z$ . Нерухома точка  $z^*$  є стійкою тоді й тільки тоді, коли виконується нерівність  $|f'(z^*)| < 1$  [4], розв'язуючи яку, отримуємо

$$\left| 1 - K \cos \left( \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K} \right) \right| < 1 \Leftrightarrow \left| 1 - K \sqrt{1 - \left( \sin \left( \arcsin \frac{2\pi\Delta}{K} \right) \right)^2} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - K \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi\Delta}{K} \right)^2} < 1$$

$\Leftrightarrow -1 < 1 - \sqrt{K^2 - (2\pi\Delta)^2} < 1$  і, за умови  $K \geq 2\pi\Delta$ , знаходи-

мо  $\sqrt{K^2 - (2\pi\Delta)^2} < 2 \Leftrightarrow K^2 - (2\pi\Delta)^2 < 4 \Leftrightarrow K^2 < 4 + 4\pi^2\Delta^2 \Leftrightarrow K < 2\sqrt{1 + \pi^2\Delta^2}$ . Таким чином, нерухома точка є

стійкою при  $K \in [2\pi\Delta, 2\sqrt{1 + \pi^2\Delta^2})$ . При  $K = 2\sqrt{1 + \pi^2\Delta^2}$   $f'(z^*) = -1$ , і за теоремою про біфуркацію подвоєння

періоду [4] встановлюємо, що відбувається саме така біфуркація. ■

**Синхронізовані та десинхронізовані періодичні орбіти.** Дослідимо періодичні цикли відображення (8). Як відомо з теорії одновимірних динамічних систем [1, 2, 5], зі збільшенням параметра  $K$  відображення Арнольда демонструє каскад біфуркацій подвоєння періоду та перехід до хаосу. Нерухома точка втрачає стійкість у біфуркації подвоєння періоду, у якій народжуються один стійкий та один нестійкий цикли з періодом 2. При подальшому збільшенні параметра  $K$  відбувається каскад біфуркацій подвоєння періоду, доки динаміка не стає хаотичною.

На рис. 1 окреслено область стійкості точки  $z^*$ , яка є частиною області синхронізації фаз із числом обертання  $p = 0$ . Область синхронізації, яку також називають *язиком Арнольда*, має своєю границею лінію  $K = 2\pi\Delta$ , що є лінією біфуркації *сідло-вузол* для стійкої та нестійкої нерухомих точок, які існують усередині області синхронізації. На рисунку ця лінія має позначення *SN* (від перших літер англійської назви біфуркації – *saddle-node*). Вона є нижньою лінією десинхронізації, і для таких значень параметрів, що  $K < 2\pi\Delta$ , не існує жодної нерухокої точки. Верхньою границею області стійкості нерухокої точки  $z^*$  є крива біфуркації подвоєння періоду *PD* (*period-doubling*).

На відміну від системи Курамото з неперервним часом, для якої синхронізація має місце лише при існуванні стійкої нерухокої точки, для відображення (8) періодичні орбіти, що народились у біфуркаціях подвоєння періоду, теж приводять до синхронізації системи (7).

**Лема 1.** Нехай для відображення (8) існує єдиний обмежений атрактор, що є або періодичним циклом, або хаотичним рухом, для якого виконується  $\exists C > 0 : |z_n| < C \quad \forall n$ . Тоді в системі (7) з відповідними значеннями параметрів має місце фазова 1 : 1 синхронізація.

**Доведення.** Повернемося до змінних  $x_n$  та  $y_n$ . Існування та стійкість  $q$ -періодичної орбіти відображення (8) означає, що фазова різниця  $z_n = x_n - y_n$  змінюється між  $q$  сталими значеннями. Для обмежених стійкої періодичної орбіти або хаотичної траєкторії відображення (8) наступна фазова різниця є обмеженою  $|x_n - y_n| < C$ . Оскільки в системі не існує інших атракторів, то всі траєкторії притягуються до такого синхронізованого стану, і відбувається фазова 1 : 1 синхронізація осциляторів (7). ■

Слід розрізняти періодичні орбіти відображення (8) з нульовим і ненульовим числами обертання. Лише орбіти, що мають нульове число обертання, є обмеженими й відповідають фазовій синхронізації в системі, і вони існують, коли значення параметрів вибрано всередині язика Арнольда для числа обертання нуль. Поза цією областю можна окреслити інші тонші області значень параметрів, при яких існують стійкі періодичні орбіти з ненульовими числами

обертання. Такі області називають областями синхронізації мод, але наявність цих стійких циклів не приводить до дійсної синхронізації осциляторів, оскільки, якщо розглядати відображення (8) на  $R^1$ , то таким циклам відповідатимуть траєкторії, що прямують до нескінченності при  $n \rightarrow \infty$ . Будемо називати такі періодичні цикли *десинхронізованими*. На рис. 1 зображено області синхронізації мод – так звані язики Арнольда для чисел обертання  $\rho = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ . Кожен язик Арнольда виходить із точки  $(\frac{p}{q}, 0)$  для цілих  $p$  і  $q$  та відповідає існуванню стійкої та нестійкої періодичних орбіт періоду  $q$  з числом обертання  $\frac{p}{q}$ .

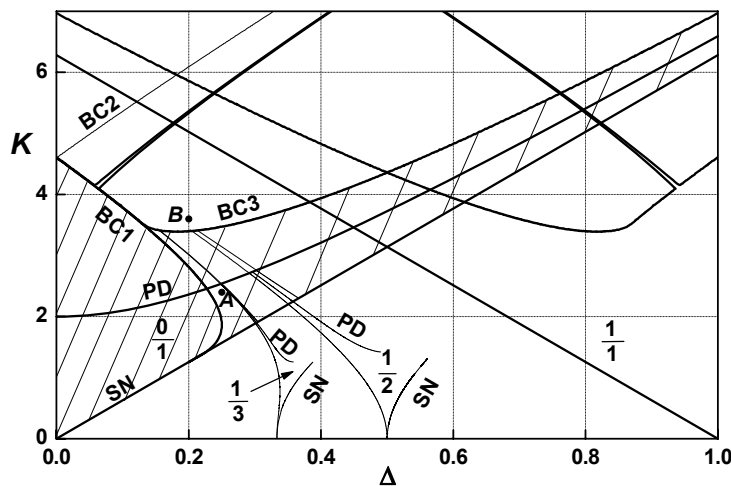


Рис. 1. Область фазової синхронізації системи (7) (позначено щільною штриховкою), область співіснування синхронізованих і десинхронізованих траєкторій (рідка штриховка) та біфуркаційні криві для відображення Арнольда (8): SN – сідло-вузол, PD – подвоєння періоду, BC – гранична криза; дроби вказують числа обертання для відповідних язиків Арнольда; тт. А, В показують значення параметрів для графіків на рис. 2

Для значень параметрів між областями синхронізації мод система виявляє квазіперіодичну поведінку, і фазова різниця  $z_n$  змінюється на інтервалі  $[0, 2\pi)$ , але ніколи не повертається до свого початкового значення. Таким чином, для цих значень параметрів не відбувається синхронізації осциляторів (7).

При значеннях  $K$  таких, що  $K < 1$ , відображення (8) має обернене, язики Арнольда не перетинаються, і система демонструє лише періодичну або квазіперіодичну динаміку. Нас також цікавлять більші значення  $K$ , оскільки при  $K \geq 1$  можна знайти істотні області фазової синхронізації. Більше того, при цих значеннях параметрів відбуваються деякі цікаві явища, які неможливі для оборотної системи та системи з неперервним часом.

Поza лінією  $K = 1$  відображення (8) стає необоротним, а області синхронізації мод накладаються одна на одну. Це означає, що при значеннях параметрів з області перетину язиків Арнольда з нульовим і ненульовим числами обертання одночасно існують синхронізовані та десинхронізовані траєкторії. Тому при дослідженні динаміки системи зв'язаних осциляторів важливим є окреслити такі області співіснування синхронізації та десинхронізації і знайти область параметрів, при яких існують лише синхронізовані цикли.

**Область фазової синхронізації.** Для того, щоб окреслити область тих значень параметрів, при яких у системі існують лише синхронізуючі атрактори, дослідимо механізми виникнення десинхронізованих траєкторій і визначимо ті значення параметрів, при яких вони виникають. Відомо, що десинхронізовані траєкторії виникають унаслідок так званої біфуркації граничної кризи [4]. Для зручності запису позначимо криву граничної кризи BC1 (*boundary crisis*) (рис. 1) BC1:  $\Delta = g(K)$ , а через  $K^*$  – значення  $K$  у точці перетину цієї кривої з лінією біфуркації сідло-вузол SN:  $K = 2\pi\Delta$ . Визначимо вираз для кривої BC1 та  $K^*$  точніше у твердженні 2.

**Твердження 2.** Нехай для параметрів відображення (8) виконується умова  $\Delta \in [0, \tilde{g}(K))$ , де  $\tilde{g}(K)$  визначається так:

$$\tilde{g}(K) = \begin{cases} \frac{K}{2\pi} & \text{якщо } K \leq K^*, \\ g(K) & \text{якщо } K > K^*, \end{cases}$$

де  $K^*$  задовольняє співвідношення  $K^* - \arccos \frac{1}{K^*} + \sqrt{K^{*2} - 1} - \frac{\pi}{2} = 0$ , а крива BC1 –  $g(K)$  задається в неявному вигляді як BC1:  $f(z^{(\max)}) = z^{(u)} + 2\pi$ , де  $z^{(u)}$  – значення нестійкої нерухомої точки з інтервалу

$[0, 2\pi)$ :  $z^{(u)} = -\arcsin\left(2\pi\frac{\Delta}{K}\right) + \pi$ , а  $z^{(\max)}$  – точка, у якій функція  $f(z)$  набуває максимального значення на інтервалі  $[0, 2\pi)$ :  $z^{(\max)} = -\arccos\frac{1}{K} + 2\pi$ .

Виконання вищенаведених умов є необхідним і достатнім для того, щоб для відображення Арнольда (8) існував єдиний синхронізуючий атрактор, який є або періодичним циклом, або обмеженим хаотичним атрактором. Таким чином, у системі осциляторів (7) має місце фазова 1 : 1 синхронізація.

**Доведення.** Графік відображення Арнольда (8) на рис. 2 а) пояснює виникнення десинхронізованих траєкторій. За малих значень різниці  $\Delta$  і значень  $K$  усередині язика Арнольда з числом обернання  $\rho = 0$  синхронізуючим атрактором є нерухома точка або періодичні орбіти, що народилися в біфуркаціях подвоєння періоду, і не існує жодного десинхронізованого атрактора [9]. Явище повної фазової синхронізації відповідає ситуації, коли всі траєкторії притягуються до стійкої нерухомої точки. При збільшенні значення різниці частот  $\Delta$  у системі відбувається біфуркація граничної кризи, при якій максимум функції  $f(z)$  відображення Арнольда стає рівним значенню нестійкої нерухомої точки  $z^{(u)} + 2\pi$ . На рис. 1 відповідною біфуркаційною кривою є перша крива біфуркацій граничної кризи BC1. Як показано на рис. 2 а), після цієї біфуркації утворюється вікно, через яке траєкторії можуть рухатися на нескінченність і не бути притягненими нерухомою точкою. Таким чином, поза кривою цієї біфуркації існують інші атрактори, а отже, щоб окреслити область єдиності синхронізуючого атрактора, необхідно визначити значення параметрів, за яких відбувається описана біфуркація й виникають десинхронізовані траєкторії.

Визначимо аналітичний вираз для кривої біфуркації BC1. Значення  $z^{(\max)}$ , у якому функція  $f(z)$  набуває максимуму, визначається зі співвідношення  $f'(z^{(\max)}) = 0 \Rightarrow 1 - K \cos z^{(\max)} = 0$ . Ураховуючи умову  $z^{(\max)} \in [0, 2\pi)$ , знаходимо

$$z^{(\max)} = -\arccos\frac{1}{K} + 2\pi.$$

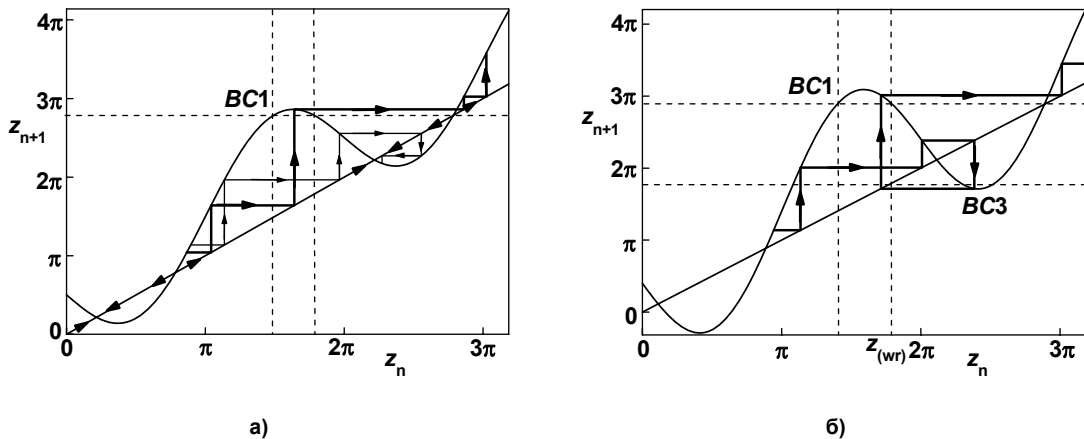


Рис. 2. Поява десинхронізованих орбіт відображення (8) при біфуркаціях граничної кризи BC1 та BC3; значення параметрів для графіка функції  $f(z)$  відповідають: (а) – точці А з рис. 1, (б) – точці В з рис. 1

Нестійку нерухома точку знаходимо з умови  $f(z^{(u)}) = z^{(u)} \Rightarrow 2\pi\Delta - K \sin z^{(u)} = 0 \Rightarrow z^{(u)} = -\arcsin\left(2\pi\frac{\Delta}{K}\right) + \pi$ .

Значення  $K^*$  визначимо з умови перетину кривої BC1 з лінією SN:

$$\begin{cases} f(z^{(\max)}) = z^{(u)} + 2\pi \\ K = 2\pi\Delta \end{cases}$$

$$-\arccos\frac{1}{2\pi\Delta} + 2\pi + 2\pi\Delta - 2\pi\Delta \sin\left(-\arccos\frac{1}{2\pi\Delta} + 2\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$-\arccos\frac{1}{2\pi\Delta} + 2\pi\Delta + 2\pi\Delta \sqrt{1 - \frac{1}{(2\pi\Delta)^2}} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

звідки знаходимо співвідношення для  $K^*$ :  $K^* - \arccos\frac{1}{K^*} + \sqrt{K^{*2} - 1} - \frac{\pi}{2} = 0$ .

Таким чином, позначивши через  $\tilde{g}(K)$  об'єднання кривої  $BC1$  та лінії  $SN$ :

$$\tilde{g}(K) = \begin{cases} \frac{K}{2\pi} & \text{якщо } K \leq K^*, \\ g(K) & \text{якщо } K > K^*, \end{cases}$$

отримуємо, що при  $\Delta \in [0, \tilde{g}(K))$  для відображення Арнольда (8) існує єдиний синхронізуючий атрактор, який, згідно з властивостями відображення, є або періодичним циклом, або обмеженим хаотичним атрактором, і за левою 1 у системі осциляторів (7) має місце фазова 1 : 1 синхронізація. ■

Друга лінія граничної кризи  $BC2$  на рис. 1 відповідає аналогічній ситуації, але для мінімального значення, що зрівнюється зі значенням  $z^{(u)} - 2\pi$ . Легко визначити, що  $z^{(\min)} = \arccos \frac{1}{K}$ , і таким чином, біфуркаційна крива  $BC2$  визначається рівнянням  $BC2: f(z^{(\min)}) = z^{(u)} - 2\pi$ .

Розглянемо умови повної втрати синхронізації та визначимо криву біфуркації, у якій зникають останні синхронізовані траєкторії системи.

**Область співіснування синхронізації та десинхронізації; повна десинхронізація.** Як показано на рис. 2 а, після першої кризи  $BC1$ , залежно від початкових значень, траєкторія відображення (8) може бути відразу ж притягнута до стійкої нерухокої точки  $z^{(s)}$ , або вона може зробити один чи більше обертів навколо кола й лише потім притягнутися до  $z^{(s)}$ . Очевидно, що обидві ці можливості приводять до нульового числа обертання розглядуваної траєкторії. Крім цього, траєкторія може продовжувати нескінченне обертання, тобто прямувати до нескінченності у відповідному піднятті з кола  $[0, 2\pi)$  до  $R^1$ . Така поведінка спричиняє ненульове число обертання і, як наслідок, десинхронізацію. Таким чином, для одних і тих самих значень параметрів поза лінією  $BC1$  можна знайти траєкторії з різними числами обертання, і це залежить від початкової точки, з якої рахується траєкторія. Така ситуація означає співіснування синхронізації та десинхронізації. Позначимо область такого співіснування як  $S\&D$  (*synchronization & desynchronization*).

**Твердження 3.** Нехай значення параметрів відображення Арнольда (8) вибрано всередині області  $S\&D$ , що обмежена кривою  $BC1$ , лінією  $SN$   $K = 2\pi\Delta$  і кривою  $BC3$ , що задається в неявному вигляді як  $BC3: f(z^{(\min)}) = z^{(wr)}$ , де  $z^{(\min)}$  – мінімальне значення функції  $f$  на інтервалі  $[0, 2\pi)$ , а  $z^{(wr)}$  – значення правої границі вікна, утвореного після граничної кризи  $BC1$ , і це значення обчислюється чисельно зі співвідношення  $f(z^{(wr)}) = z^{(u)} + 2\pi$ .

Тоді для відображення (8), залежно від початкових значень, співіснують синхронізовані та десинхронізовані траєкторії, які приводять, відповідно, до фазової синхронізації та десинхронізації в системі (7), і поза межами області  $S\&D$  та області фазової синхронізації, визначеної твердженням 2, не існує інших областей фазової синхронізації.

**Доведення.** Як було показано в доведенні твердження 2, для відображення (8) зі значеннями параметрів за кривою  $BC1$  виникають десинхронізовані траєкторії, але також існують атрактори, що приводять до синхронізації системи (7). Лінія біфуркації граничної кризи  $BC3$  із рис. 1, що також позначена як верхня лінія десинхронізації, відповідає ситуації, коли мінімальне значення функції  $f$  досягає вікна, що утворилося після першої граничної кризи, як показано на рис. 2. Унаслідок цього траєкторії підходять до нестійкої нерухокої точки  $z^{(u)} + 2\pi$  після другої ітерації, і в системі настає повна десинхронізація [4]. На рис. 2 зображено траєкторії та графіки відображення (8) до і після граничної кризи  $BC3$ . Перед біфуркацією  $BC3$  нерухома точка вже втратила свою стійкість, але існують інші синхронізуючі атрактори та десинхронізовані траєкторії, які виникли після першої граничної кризи  $BC1$ . Після кризи  $BC3$  уже не існує жодного синхронізуючого атрактора, і майже всі за мірою Лебега траєкторії мають ненульове число обертання та прямують до нескінченності. Як наслідок, для значень параметрів поза кривою  $BC3$  синхронізація не відбувається.

Крива повної десинхронізації  $BC3$  визначається співвідношенням  $BC3: f(z^{(\min)}) = z^{(wr)}$ , де  $z^{(\min)}$  – мінімальне значення функції  $f$  на інтервалі  $[0, 2\pi)$ , а  $z^{(wr)}$  – значення правої границі вікна, утвореного після граничної кризи  $BC1$ , і воно обчислюється чисельно зі співвідношення  $f(z^{(wr)}) = z^{(u)} + 2\pi$ . ■

Таким чином, твердження 2 і 3 визначають області фазової синхронізації та співіснування синхронізації та десинхронізації.

**Висновки.** Досліджено фазову динаміку системи глобально зв'язаних осциляторів. Описано основні властивості системи Курамото, проведено дискретизацію системи за часом, детальніше досліджено фазову динаміку двовимірної дискретної моделі. Запропоновано та обґрунтовано метод визначення області фазової синхронізації. Досліджено та описано поведінку траєкторій системи, існування стійких положень рівноваги, синхронізованих і десинхронізованих циклів, механізми досягнення й втрати синхронізації.

При дослідженні даної системи динаміка дискретної моделі порівнюється з поведінкою розв'язків системи з неперервним часом. Варто відмітити, що існування мультістабільності та хаосу у двовимірній системі Курамото з неперервним часом є неможливим, а отже динаміка дискретної системи є суттєво складнішою.

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1978. 2. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I: Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. – 1961. – № 25(1). – С. 21-86. 3. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление // Техносфера. – М., 2003. 4. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – К., 1986. 5. Devaney R. An introduction to chaotic dynamical systems // Addison-Wesley, Redwood City. – 1989. 6. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence // Springer. – Berlin, 1984. 7. Maistrenko Yu., Popovych O., Burylko O., Tass P. Mechanism of Desynchronization in the

Finite-dimensional Kuramoto Model // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93, No 8. 8. *Osipov G., Kurths J.* Regular and chaotic phase synchronization of coupled circle maps // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 65, 016216. 9. *Strogatz S.H.* From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators // Physica D. – 2000. – Vol. 143. – P. 1-20.

Надійшла до редколегії 16.02.2007.

УДК 519.21

С.І. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц., О.К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф.

### МІНІМІЗАЦІЯ СЕРЕДНЬОЇ ТРИВАЛОСТІ ПРОХОДЖЕННЯ В СИСТЕМІ З ДВОХ МАШИН

*Розглянуто систему конвеєрного типу, що складається з двох машин, і мінімізацію середньої тривалості проходження робіт. При цьому відбувається лише часткове поліпшення вихідного розкладу, що не гарантує знаходження оптимального.*

*Two-stage pipeline system is considered. For this system so called Johnson problem is common result in Operations Research. We consider another criteria – average passage minimization, which appears more sophisticated problem. Unfortunately, only local not global minimum is guaranteed.*

**Вступ.** У теорії розкладів існує важливий клас задач, які досліджують роботу, що складається з послідовності операцій, кожна з яких виконується відповідною машиною. У таких випадках сукупність машин називають *системою конвеєрного типу*, якщо машини занумеровані таким чином, що для кожної машини операція  $K$  виконується машиною з більшим номером, ніж операція  $J$  при  $J < K$ .

Прикладом такої системи може бути складальна лінія. Як конвеєрна система може розглядатися будь-яка сукупність машин, що виконують усі роботи в однаковому порядку. Для такої системи зовсім не обов'язково, щоб кожна робота складалася з операцій, що виконуються на одній машині, або щоб усі роботи починались і закінчувались на певних машинах. Істотним є лише те, що всі переміщення робіт, пов'язані з їхнім закінченням на одній машині та початком виконання на іншій, відбувалися неодмінно в одному напрямку.

Серед задач, що виникають при розгляді систем конвеєрного типу, найвідомішою є задача мінімізації максимальної тривалості проходження для двох машин, яка носить назву задачі Джонсона і формулюється так:

Нехай є  $n$  робіт, кожна з яких характеризується парою  $(A_i, B_i)$ , де  $A_i, B_i$  – тривалості виконання частини роботи першою та другою машинами відповідно. Треба мінімізувати максимальний час проходження робіт (тобто інтервал часу від початку виконання першої роботи на першій машині до закінчення останньої роботи на другій машині).

Ця задача є розв'язаною в загальному випадку, і оптимальний порядок проходження робіт визначається алгоритмом Джонсона.

**Алгоритм Джонсона.** Треба спочатку знайти мінімальне з чисел  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ . Якщо це буде  $A_i$ , то робота з номером  $i$  буде першою в оптимальному розкладі, якщо  $B_i$  – то останньою (якщо мінімум досягається одночасно для  $A_i$  та  $B_i$ , то байдуже, буде ця робота першою чи останньою). Викреслюючи  $i$ -ту роботу зі списку, повторюємо цю операцію знову і т. д.

**Мінімізація середньої тривалості проходження.** Ця задача є складнішою, ніж розглянута вище задача мінімізації максимальної тривалості, і в загальному випадку для неї відсутній конструктивний алгоритм, подібний Джонсонівському. Позитивним моментом при дослідженні даної задачі є те, що середня тривалість проходження є регулярним критерієм, отже розклад слід шукати серед таких розкладів, для яких порядок виконання робіт на двох машинах збігається.

Упорядкування за алгоритмом Джонсона може давати значення середнього часу проходження, далекі від оптимального.

Перед тим, як переходити до загального випадку конвеєрної системи, що виконує  $n$  робіт, розглянемо частинний випадок двох робіт. У цьому випадку існують лише два розклади  $S$  та  $S'$ , наведені нижче:

Розклад $S$			
Машина 1	$A_1$	$A_2$	
Машина 2		$B_1$	$B_2$

Розклад $S'$			
Машина 1	$A_2$	$A_1$	
Машина 2		$B_2$	$B_1$

У розкладі  $S$  сума тривалостей проходження двох робіт дорівнює

$$\bar{F} = 2A_1 + B_1 + B_2 + \max(A_2, B_1),$$

а в розкладі  $S'$  вона дорівнює

$$\bar{F}' = 2A_2 + B_1 + B_2 + \max(A_1, B_2).$$

Зрозуміло, що перша робота має передувати другій, якщо  $\bar{F} < \bar{F}'$ , тобто

$$2A_2 - 2A_1 + \max(A_1, B_2) - \max(A_2, B_1) > 0 \tag{1}$$

Нагадаємо, що у випадку однієї машини середній час проходження є мінімальним при неспадному порядку проходження робіт. У даному ж випадку недостатньо розглядати лише перші операції робіт для складання оптимального розкладу, оскільки відоме співвідношення  $A_2 > A_1$  (1) може виконуватись або не виконуватись залежно від значень  $B_1, B_2$ . Аналогічно, недостатньо того, що  $B_2 > B_1$  або  $A_2 + B_2 > A_1 + B_1$ , що показує наступний контрприклад. Нехай

$B_1 = 0, A_2 = B_2, A_1 = A_2 + B_2 - \varepsilon$ . Тоді

$$A_2 + B_2 > A_1 + B_1 \text{ але } 2A_2 - 2A_1 + \max(A_1, B_2) - \max(A_2, B_1) = -A_2 + \varepsilon < 0.$$

Виявляється, що умова  $A_2 \geq A_1, B_2 \geq B_1$  є достатньою для виконання (1).

**Доведення.** Нехай  $A_2 \geq A_1, B_2 \geq B_1$ , тоді

$$\begin{aligned} 2A_2 - 2A_1 + \max(A_1, B_2) - \max(A_2, B_1) &\geq 2A_2 - 2A_1 + \max(A_1, B_1) - \max(A_2, B_1) \geq \\ &\geq 2A_2 - 2A_1 + A_1 - A_2 = A_2 - A_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Доведене твердження є достатнім, але не необхідним. Дійсно, (1) справедливо при  $A_1 = 1, B_1 = 3, A_2 = 4, B_2 = 2$ .

Розглянемо узагальнення одержаних результатів на випадок довільної кількості робіт. При цьому будемо дотримуватись таких скорочень:

BP – вихідний розклад, AP – альтернативний розклад, СТПР – сумарна тривалість проходження робіт.

**Теорема 1.** Нехай для деякого вихідного розкладу  $(1, \dots, n)$   $A_k \geq A_n$  та  $B_k \geq B_n$ . Тоді середній час проходження робіт у AP  $(1, 2, \dots, k-1, n, k+1, \dots, n-1, k)$  не більший, ніж у BP.

**Доведення.** Розглянемо частинний випадок  $n = 4$ .

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_4 & A_3 & A_2 \\ B_1 & B_4 & B_3 & B_2 \end{pmatrix}$$

Нехай  $A_2 \geq A_4, B_2 \geq B_4$ .

Для першої роботи порядок проходження другої та четвертої робіт є байдужим.

Для третьої роботи при переході до AP час проходження не збільшується, оскільки всі члени, що знаходяться під знаком  $\max$  у формулі Джонсона у BP, будуть не менші відповідних членів AP.

Покажемо, що сумарний час проходження другої та четвертої робіт не збільшується, тобто

$$\begin{aligned} &\max(A_1 + B_1 + B_2, A_1 + A_2 + B_2) + \\ &+ \max(A_1 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + B_2 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + A_3 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_4) \geq \\ &\geq \max(A_1 + B_1 + B_4, A_1 + A_4 + B_4) + \\ &+ \max(A_1 + B_1 + B_4 + B_3 + B_2, A_1 + A_4 + B_4 + B_3 + B_2, A_1 + A_4 + A_3 + B_3 + B_2, A_1 + A_4 + A_3 + A_2 + B_2). \end{aligned}$$

Скористаємось тотожністю  $\max(x_1, \dots, x_n) + t = \max(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t)$  та додамо до лівої та правої частин останньої нерівності член  $B_4 - B_2$ , але в лівій частині додамо його до першого максимуму, а в правій – до другого:

$$\begin{aligned} &\max(A_1 + B_1 + B_4, A_1 + A_2 + B_4) + \\ &+ \max(A_1 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + B_2 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + A_3 + B_3 + B_4, A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_4) \geq \\ &\geq \max(A_1 + B_1 + B_4, A_1 + A_4 + B_4) + \\ &+ \max(A_1 + B_1 + B_3 + 2B_4, A_1 + A_4 + B_3 + 2B_4, A_1 + A_4 + A_3 + B_3 + B_4, A_1 + A_4 + A_3 + A_2 + B_4). \end{aligned}$$

Члени, що знаходяться під знаком максимуму в лівій частині, більше або дорівнюють відповідним членам правої частини, отже, нерівність доведена.

Доведення для довільного  $n$  повністю повторює наведену вище схему, тільки під знаком максимуму буде більше членів і викладки будуть більш громіздкими ■.

**Теорема 2.** Нехай для деякої пари сусідніх робіт BP виконуються співвідношення  $A_k \geq A_{k+1}, B_k \geq B_{k+1}$  та  $\min(A_k, B_{k+1}) \geq \min(A_{k+1}, B_k)$ . Тоді перехід до AP  $(1, 2, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n)$  не збільшує СТПР.

**Доведення.** Порівняємо BP та AP. При цьому будемо порівнювати суми за траєкторіями, що ведуть з лівого верхнього в правий нижній кут наведених матриць. Кожній такій траєкторії відповідає член, що знаходиться під знаком максимуму у формулі Джонсона.

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & \dots & A_n \\ B_1 & \dots & B_{k-1} & B_k & B_{k+1} & \dots & B_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_{k+1} & A_k & \dots & A_n \\ B_1 & \dots & B_{k-1} & B_{k+1} & B_k & \dots & B_n \end{pmatrix}.$$

Для траєкторій, де "поворот униз" відбувається або до  $k$ , або після  $k+1$ , відповідні члени збігаються.

Розглянемо дві траєкторії, що проходять через елементи  $A_k$  та  $B_{k+1}$  у BP, і відповідні дві траєкторії AP, що проходять через  $A_{k+1}$  та  $B_k$ . Для того, щоб AP був "не гірше", ніж BP, достатньо, щоб виконувалась умова

$$\max(A_k + B_k + B_{k+1}, A_k + A_{k+1} + B_{k+1}) \geq \max(A_{k+1} + B_{k+1} + B_k, A_{k+1} + A_k + B_k) \tag{2}$$

Нехай  $S = A_k + B_k + A_{k+1} + B_{k+1}$ , тоді (2) набуває вигляду

$$\max(S - A_{k+1}, S - B_k) \geq \max(S - A_k, S - B_{k+1}),$$

що рівнозначно умові  $\min(A_{k+1}, B_k) \leq \min(A_k, B_{k+1})$ .

Таким чином, тривалість проходження кожної з робіт від  $[k+2]$  до  $[n]$  не збільшилась. Крім того, оскільки за припущенням теореми  $A_k \geq A_{k+1}, B_k \geq B_{k+1}$ , то, згідно з теоремою 1, СТПР від  $[1]$  до  $[k+1]$  не збільшилась, отже СТПР усіх робіт також не збільшилась ■.

**Зауваження.** Умови теореми можна переформулювати в еквівалентному вигляді:

$$(A_k \geq A_{k+1}) \& (B_k \geq B_{k+1}) \& ((B_{k+1} \geq A_{k+1}) \vee (B_{k+1} = B_k)).$$

Дійсно, нехай  $A_k \geq A_{k+1}, B_k \geq B_{k+1}, \min(A_k, B_{k+1}) \geq \min(A_{k+1}, B_k)$ . Остання умова еквівалентна системі нерівностей  $A_k \geq \min(A_{k+1}, B_k), B_{k+1} \geq \min(A_{k+1}, B_k)$ . Перша нерівність виконується автоматично, оскільки  $A_k \geq A_{k+1} \geq \min(A_{k+1}, B_k)$ . Друга рівносильна сукупності  $(B_{k+1} \geq A_{k+1}) \vee (B_{k+1} \geq B_k)$ . Друга частина даної сукупності виконується лише тоді, коли  $B_{k+1} = B_k$ . Згідно з еквівалентністю перетворень дві умови теореми є рівносильними.

**Теорема 3.** Нехай для деякого ВР  $j < k - 1, A_j \geq A_k, B_j \geq B_k, (n - k - 1)(B_j - B_k) \leq (k - j - 1)\min(A_j - A_k, B_j - B_k)$ . Тоді перехід до АР  $(1, \dots, j - 1, k, j + 1, \dots, k - 1, j, k + 1, \dots, n)$  не збільшує СТПР.

**Доведення.** Порівняємо ВР та АР.

$$\begin{pmatrix} \dots & A_j & \dots & A_k & \dots \\ \dots & B_j & \dots & B_k & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dots & A_k & \dots & A_j & \dots \\ \dots & B_k & \dots & B_j & \dots \end{pmatrix}.$$

При переході до АР:

1) СТПР із [1] по [j - 1] не зміниться.

2) Сума тривалостей проходження робіт [j] та [k] не збільшиться згідно з Т1.

3) Час проходження кожної з робіт з [j + 1] по [k - 1] не збільшиться або навіть зменшиться. Якщо розглянути одну з таких робіт, то при переході до АР кожний член, що знаходиться під знаком *Max* у формулі Джонсона, зменшується на одну з величин:  $A_j - A_k, B_j - B_k$  або  $(A_j - A_k) + (B_j - B_k)$ . Таким чином, час проходження однієї роботи зменшується принаймні на величину  $\min(A_j - A_k, B_j - B_k, (A_j - A_k) + (B_j - B_k)) = \min(A_j - A_k, B_j - B_k)$ . Усього між роботами [j] та [k] знаходиться  $k - j - 1$  робіт, отже СТПР цих робіт зменшиться принаймні на величину  $\tau_1 = (k - j - 1)\min(A_j - A_k, B_j - B_k)$ .

4) Час проходження робіт з [k + 1] по [n] може збільшитись. Якщо розглянути одну з таких робіт, то при переході до АР кожний член, що знаходиться під знаком *max* у формулі Джонсона, змінюється на одну з величин:  $(A_k + A_j + B_j) - (A_j + A_k + B_k) = B_j - B_k$  або  $(A_k + B_k + B_j) - (A_j + B_j + B_k) = A_k - A_j$ , або  $(A_k + B_j) - (A_j + B_k)$ , або не змінюється. Таким чином, час проходження однієї роботи збільшиться на величину, не більшу ніж  $\max(B_j - B_k, A_k - A_j, (A_k + B_j) - (A_j + B_k), 0) = B_j - B_k$ , а СТПР робіт із [k + 1] по [n] збільшиться на величину, не більшу ніж  $\tau_2 = (n - k - 1)(B_j - B_k)$ . Достатньою умовою того, що СТПР усіх робіт не збільшиться, є  $\tau_1 \geq \tau_2$  ■.

**Теорема 4.** Нехай для деякого ВР  $A_1 > A_k, B_1 > B_k$ ,

$(n - k - 1)(B_1 - B_k) \leq (k - 2)(A_1 - A_k)$ . Тоді перехід до АР  $(k, 2, k - 1, k + 1, \dots, n)$  не збільшує СТПР.

**Доведення.** При  $j = 1$  повторюється доведення Т3, лише в п. 3 під знаком мінімуму зникає член  $B_j - B_k$ , і таким чином умова  $\tau_1 \geq \tau_2$  набуває вигляду

$$(n - k - 1)(B_1 - B_k) \leq (k - 2)(A_1 - A_k) \quad \blacksquare.$$

**Висновки.** Використання теорем 1-4 дозволяє побудувати евристичний алгоритм поліпшення розкладу за критерієм мінімізації середньої тривалості проходження робіт. Першим етапом є виявлення пар робіт, що задовольняють одну з теорем 1-4, та їхня перестановка. Другий етап починається, коли вичерпано можливості першого, і полягає в прямому обчисленні доцільності перестановки сусідніх робіт і здійсненні таких перестановок. Складність обчислень як першого, так і другого етапів становить  $O(n^2)$

1. Доценко С.І., Закусило О.К. Теорія розкладів : Навч. посіб. для студентів ф-ту кібернетики КНУ. – Електронна бібліотека КНУ // [www.unicyb.kiev.ua/library](http://www.unicyb.kiev.ua/library). 2. Жданова Е.Г. Теория расписаний. – М., 2000 // [http://www.mista.ru/student/shedule\\_theory.rar](http://www.mista.ru/student/shedule_theory.rar). 3. Закусило О.К. Задача Джонсона // У світі мат. – 1975. – Вип. 5. 4. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М., 1975.

Надійшла до редакції 02.02.2007.

УДК 517.9

Є.В. Івохін, канд. фіз.-мат. наук, К.О. Косинський, асп.,  
Д.Є. Івохін, студент

### **АНАЛІЗ СТРУКТУРИ МОДЕЛЕЙ ГІБРИДНИХ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМ, ПОБУДОВАНИХ НА ОСНОВІ СІТОК ПЕТРІ**

*Розглянуто підхід до розв'язання задачі керування у дворівневих гібридних ієрархічних системах з антагоністичними критеріями функціонування підсистем. Запропоновано схему зміни обмежень у моделях керування сукупністю зв'язаних об'єктів на основі принципів сіток Петрі.*

*Approach is considered for the decision of management task in the hybrid hierarchical systems of two-levels with the criteria of antagonisms of functioning of subsystems. The chart of change of limitations is offered in case of control of connected objects on the basis of principles of Petri nets.*

Вивчення процесів керування складними системами зумовило появу поняття ієрархічної структури взаємодії окремих складових (підсистем) системи та привело до формулювання специфічних для такого підходу математичних та інженерних проблем [4].



Однією з характерних особливостей складних ієрархічних систем є наявність у кожній підсистемі власної задачі керування. У даному випадку для керування процесами на рівні підсистем послідовно розв'язуються три основні задачі: отримання даних про об'єкт, аналіз структури й визначення процесів керування, а також використання результатів дослідження для оптимізації функціонування підсистем. Однак наявність у підсистем стратегій самоорганізації часто приводить до виникнення конфліктів в їх діях. Це, як правило, пов'язано з антагоністичністю критеріїв функціонування підсистем, що, у свою чергу, приводить до необхідності вирішення проблем узгодження їх діяльності.

Досить часто [5] розв'язування задач управління в складних ієрархічних системах здійснюють на прикладі дворівневих систем, що складаються з однієї підсистеми верхнього рівня та  $M$  підсистем нижнього. Такий підхід можна пояснити, з одного боку, відносно простотою аналізу функціонування дворівневих ієрархічних систем, а з іншого – відповідністю більшості реальних систем до дворівневої моделі взаємодії окремих їх складових. Варто зауважити, що, навіть у випадках складнішої структури, процеси функціонування в ієрархічній системі можуть бути зображені у вигляді сукупності співвідношень підсистем двох рівнів.

Аналізу ієрархічних систем керування та дослідженню процесів взаємодії окремих підсистем присвячено багато наукових робіт [3, 4, 7]. Докладно вивчено проблеми керування та координації процесів функціонування в таких системах. Однак хотілося б звернути увагу на те, що недостатньо вивчено сутність задач самоорганізації підсистем і вплив антагоністичних факторів їх діяльності на функціонування системи в цілому.

Цікавою моделлю поведінки сукупності об'єктів, що зв'язані ланцюгами впливу, є сіткова модель К. Петрі [6]. Формально сіткою Петрі називається трійка  $S = (P, T, F)$ , де  $P$  – непорожня множина вузлів (підсистем), що називаються місцями;  $T$  – непорожня множина переходів;  $F \in P \times T \cup T \times P$  – відношення інцидентності. Модель сітки Петрі вдало використовується для описання складних систем з недетермінованою поведінкою, у яких компоненти (вузли) функціонують незалежно і взаємодіють час від часу.

Функціонування сітки визначають за допомогою множини послідовних спрацьовувань переходів і множини станів (розміток), що досягаються в сітці. Розглянемо сітку Петрі, наведену на рис. 1.

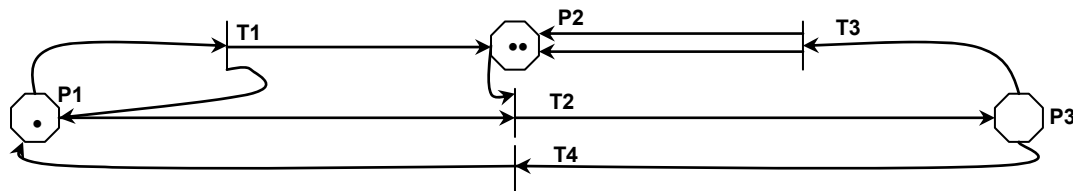


Рис. 1. Приклад сітки Петрі

Початковий стан (розмітка) сітки подається вектором  $m_0 = (1, 2, 0)$ . Множину переходів зображено набором  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . За умов початкової розмітки  $m_0$  може спрацювати або перехід  $T_1$ , або  $T_2$ . У системі недетерміновано вибирається спрацьовування одного з переходів. У процесі функціонування сітки Петрі при виборі довільного переходу змінюються стани всіх місць, зв'язаних переходом.

Розглянемо специфічний випадок сітки Петрі. Нехай множину вузлів (підсистем) з'єднано з одним переходом типу "загальної шини" (рис. 2).

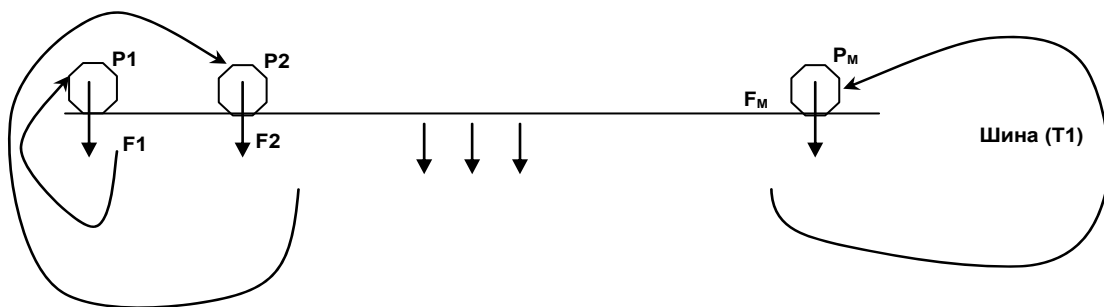


Рис. 2. Сітка Петрі із "загальною шиною"

За будь-якої початкової розмітки дія кожної підсистеми впливає на всі підсистеми за правилами функціонування переходу  $T_1$ . Такий спосіб формалізації взаємодії можна застосувати для описання роботи сукупності підсистем одного рівня у дворівневій складній ієрархічній системі.

Припустимо, що вплив кожної підсистеми на сусідні здійснюється не навіпрямки за правилами, заданими відношеннями інцидентності  $F$ , а аналізується та "обробляється" у підсистемі верхнього рівня, тобто схема взаємодії в даному випадку може бути зображена у вигляді, наведеному на рис. 3.

Будемо називати підсистему верхнього рівня акумулятором. Ця назва адекватно відображає функціональну спрямованість даного блока  $i$ , як буде показано далі, визначає характер дій, що проводяться на цьому рівні.

Наведемо формальне описання моделі функціонування складної ієрархічної системи, зображеної у вигляді схеми (рис. 3). Множині підсистем (вузлів, місць) нижнього або першого рівня поставимо у відповідність деяку множину чисел натурального ряду, яку будемо називати множиною індексів першого рівня й позначати через  $I = \{1, 2, \dots, i, \dots, M\}$ , де  $M$  – кількість підсистем. Множина вузлів верхнього (другого) рівня  $\bar{I}$  складається з однієї підсистеми.

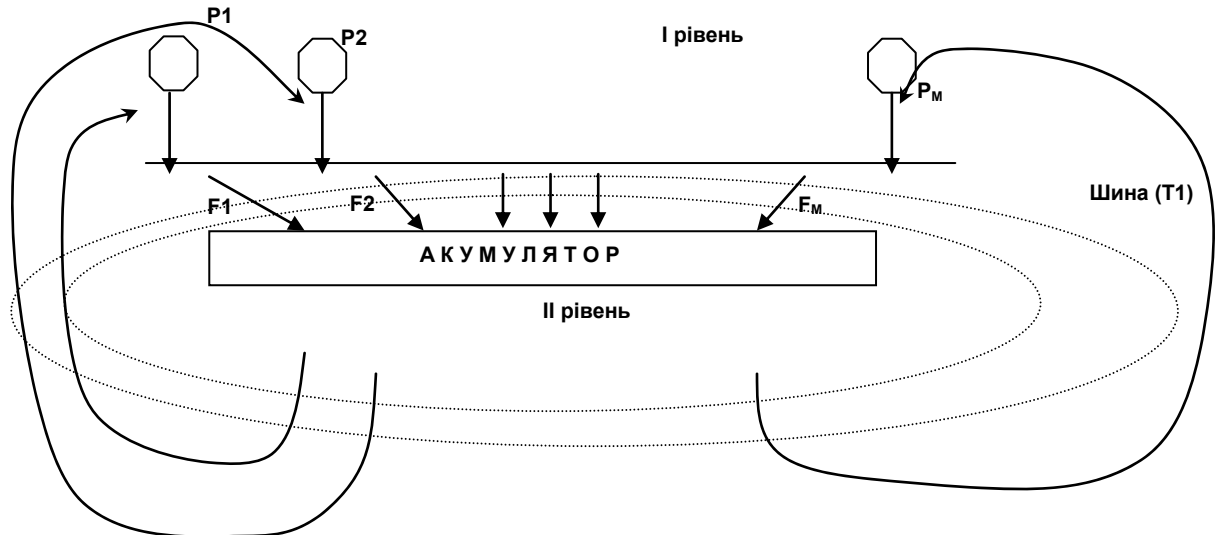


Рис. 3. Модель дворівневої ієрархічної системи на основі сітки Петрі

Загальну сукупність вузлів нижнього рівня будемо вважати впорядкованою, що визначається множиною індексів  $\underline{l}$ . Позначимо через  $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^M)$  вектор, який визначає важливість підсистем нижнього рівня. Компоненти вектора  $\mu$  визначають вектор переваг підсистем.

Розглянемо спочатку випадок, коли підсистеми мають однаковий пріоритет, тобто  $\forall i \in \underline{l} \mu_i = C$ , де  $C$  – константа, яку без обмеження загальності можна покласти рівною 1.

Нехай кожна підсистема першого рівня може генерувати сигнали, загальна кількість яких дорівнює  $m$ . Позначимо через  $x_j^i, j = \overline{1, m}, i \in \underline{l}$  бульові значення, що відповідають наявності (1) або відсутності (0)  $j$ -го сигналу від  $i$ -ї підсистеми ( $j$  пробігає усі можливі (наявні в підсистемі) значення від 1 до  $m$ ). Будемо вважати, що кожен сигнал має складність  $w_j, j = \overline{1, m}$ , яку будемо задавати цілими значеннями з діапазону шкали  $S = \{1, 2, \dots, L\}$ . Складність сигналу легко оцінити, визначивши найпростіший (атомарний) і найскладніший для обробки сигнал на рівні акумулятора (підсистеми верхнього рівня) та застосувавши шкалу з  $L$  градацій складності. При цьому сумарна складність сигналів від кожної підсистеми формується у вигляді

$$v^i = \sum_{j=1}^m w_j x_j^i, \quad i \in \underline{l} \tag{1}$$

Схематично формування сигналів підсистем першого рівня зображено у табл. 1.

Таблиця 1

Сигнали	$x_1^i$	$x_2^i$	...	$x_m^i$
Слот реєстрації	0	1	...	1
Слот формування	$w_1$	$w_2$	...	$w_m$
	$v^i = w_1 x_1^i + w_2 x_2^i + \dots + w_m x_m^i$			

Перелік сигналів, оброблених акумулятором, позначимо через  $y_j^i, j = \overline{1, m}, i \in \underline{l}$ . Як і у випадку згенерованих сигналів  $x_j^i, j = \overline{1, m}, i \in \underline{l}$ , величини оброблених сигналів можуть приймати бульовські значення 0 та 1. Сумарна складність опрацьованих сигналів подається у вигляді

$$u^i = \sum_{j=1}^m w_j y_j^i, \quad i \in \underline{l} \tag{2}$$

Схему формування загального обсягу оброблених сигналів  $i$ -го вузла з урахуванням складності кожного сигналу зображено в табл. 2 (аналогічно табл. 1).

Таблиця 2

Сигнали	$y_1^i$	$y_2^i$	...	$y_m^i$
Слот реєстрації	0	1	...	1
Слот формування	$w_1$	$w_2$	...	$w_m$
	$u^i = w_1 y_1^i + w_2 y_2^i + \dots + w_m y_m^i$			

Якщо розглядати функціонування ієрархічної системи за тактами (часовими проміжками однакової довжини, яку умовно можна покласти рівною 1), то процеси в підсистемах верхнього й нижнього рівнів мають відбуватися узгоджено, що включає в себе контроль складності сигналів від підсистем і підтримку працездатності всієї системи в цілому.

Зміну завантаженості  $i$ -го вузла нижнього рівня  $z^i(t)$  можна записати за допомогою різницевого рівняння

$$z^i(t+1) = z^i(t) + v^i(t) - u^i(t), \quad z^i(0) = 0, \quad i \in \underline{l} \tag{3}$$

або за допомогою диференційного рівняння

$$z^i(t)/dt = v^i(t) - u^i(t), \quad z^i(0) = 0, \quad i \in \underline{l} \tag{4}$$

де  $t$  – момент часу, що відповідає тактам функціонування системи,  $t = 0, 1, 2, \dots$ .

Для забезпечення працездатності системи величина загальної кількості сигналів на обробку від кожної підсистеми нижнього рівня має бути обмеженою. Задамо обмеження у вигляді набору порогових (граничних) значень  $h = (h^1, h^2, \dots, h^M)$ , що визначають максимальну сумарну складність сигналів кожної з підсистем. Вихід  $i$ -ї підсистеми запишемо у вигляді

$$E^i(t) = \begin{cases} v^i, & \text{якщо } z^i \leq h^i \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \quad i \in \underline{l} \tag{5}$$

Зрозуміло, що підсистеми намагаються максимально завантажити акумулятор, що дозволяє їм оперативно обробляти ситуації на своєму рівні. Таким чином, для кожної з підсистем нижнього рівня отримаємо стратегії функціонування у вигляді цільових функцій

$$h^i \rightarrow \max, \quad i \in \underline{l}. \tag{6}$$

Однак потрібно звернути увагу, що за подібної поведінки стає можливою тупикова ситуація, яка виникає внаслідок надвисокого завантаження акумулятора й неможливості виділення в межах такту достатньої кількості ресурсів для обробки сигналів, навіть з урахуванням диспетчеризації [2].

Контроль за споживанням ресурсів на рівні підсистем і запобігання тупиковим ситуаціям можна здійснювати за допомогою спеціальних стратегій поведінки. Як було досліджено в [2], тупикову ситуацію ефективніше за все обходити, використовуючи інформацію про складність сигналів від кожної підсистеми. Для розв'язання цієї задачі можна використати, наприклад, алгоритм *банкіра* [1]. За цим алгоритмом аналізується поточний стан системи й запити на ресурси, що надходять від підсистем. Якщо система не була в небезпечному стані (стан, коли виділення довільної кількості ресурсів може призвести до тупикової ситуації), то існує щонайменше одна послідовність перерозподілу ресурсів, що дозволяє обминути небезпечний стан [2]. Алгоритм *банкіра* використовує перевірку умови: чи призведе надання ресурсів до критичного стану, чи ні. При позитивному результаті аналізу виділення ресурсів відміняється, при негативному – здійснюється. Такий підхід є прикладом контрольованого надання ресурсів.

Використаємо ідею алгоритму *банкіра* й наявність граничних значень складності сигналів від підсистем для керування рівнем завантаженості дворівневої ієрархічної системи. Забезпечення контролю за виходом довільної підсистеми першого рівня будемо здійснювати за допомогою спостереження за рівнем порогових значень  $h$ . Для цього у функціональній схемі дворівневої системи, підсистеми нижнього рівня якої взаємодіють на основі правил сітки Петрі (рис. 3), на виході підсистем розташуємо блоки керування складністю сигналів. Отримаємо модифіковану модель дворівневої ієрархічної системи на основі сітки Петрі, яку наведено на рис. 4.

Блоки керування реалізують модель виходу (5) кожної підсистеми. Обробка сигналів підсистем на рівні акумулятора приводить до необхідності обрахування його завантаженості. Маючи інформацію про загальну складність отриманих сигналів  $v^i(t), i \in \underline{l}$  та кількість оброблених сигналів  $u^i(t), i \in \underline{l}$ , для кожного моменту часу  $t$  можна записати різницеве

$$A(t+1) = A(t) + \sum_{i=1}^M E^i - \sum_{i=1}^M y^i, \quad A(0) = 0 \tag{7}$$

або диференційне

$$dA(t)/dt = \sum_{i=1}^M E^i - \sum_{i=1}^M y^i, \quad A(0) = 0 \tag{8}$$

рівняння завантаженості акумулятора, які аналогічні (3) та (4). Для стабільної роботи системи потрібно забезпечити найменшу завантаженість акумулятора, яка має не перевищувати порогового значення  $H$ :

$$A(t) \rightarrow \min, \tag{9}$$

$$A(t) \leq H. \tag{10}$$

При цьому слід зауважити, що граничне значення  $H$ , як правило, не перевищує суми порогових значень  $h^i, i \in \underline{l}$ ,

$$H \leq \sum_{i=1}^M h^i. \tag{11}$$

Остаточо маємо сукупність різницевих (диференційних) рівнянь у вигляді (3), (7) (або (4), (8)), що описують динаміку процесів у підсистемах, та множини критеріальних функцій  $h^i \rightarrow \max, i \in \underline{l}, A(t) \rightarrow \min$ , які визначають стратегію поведінки підсистем нижнього та верхнього рівнів відповідно.

Для побудованої моделі дворівневої ієрархічної системи було проведено імітаційне дослідження, яке полягало в аналізі процесів, що відбуваються в підсистемах і акумуляторі без керування та з керуванням складністю сигналів і рівнем завантаженості підсистем. Тестування проводилось для трьох підсистем ( $M = 3$ ) з пороговими значеннями  $h_1 = h_2 = h_3 = 60$ , пороговим значенням для сервера  $H = 150$  та випадковим значенням складності сигналів з діапазону  $[0, 10]$ . Отримано числові дані, що характеризують динаміку зміни завантаженості сервера:

– у випадку відсутності керування величинами обмежень при наближенні до граничних значень (рис. 5-7) спостерігається невелике завантаження сервера на всьому інтервалі за рахунок впливу строгих обмежень на функціонування підсистем;

– зі сталим зменшенням величин обмежень при наближенні до граничних значень (рис. 8-10) спостерігається підвищення завантаження сервера на всьому інтервалі за рахунок коригування величин обмежень на функціонування підсистем;

– за умов динамічної зміни величин обмежень при наближенні до граничних значень (зменшення допустимих величин складності сигналів) і послаблення завантаженості підсистем (збільшення допустимих величин складності сигналів) (рис. 11-13) спостерігається значне підвищення завантаження сервера на всьому інтервалі. Ефективність використання сервера в останньому випадку суттєво підвищилась.

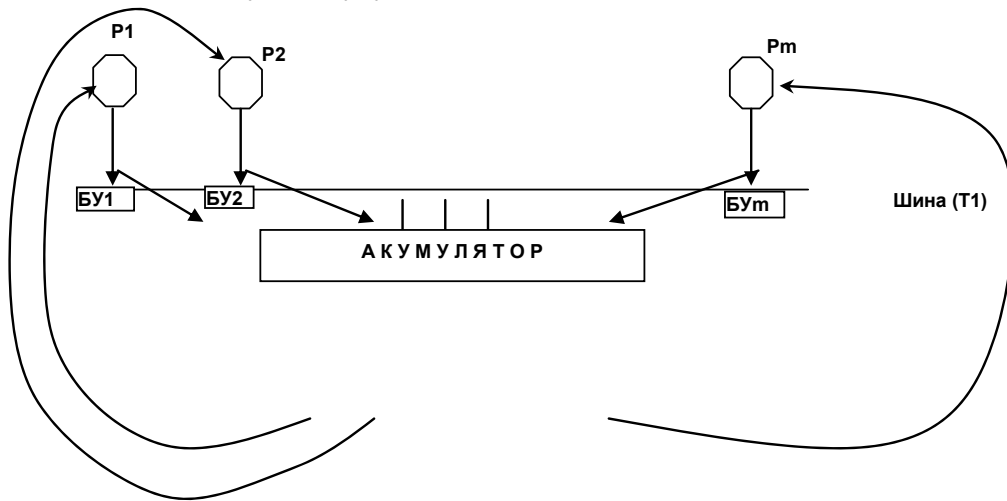
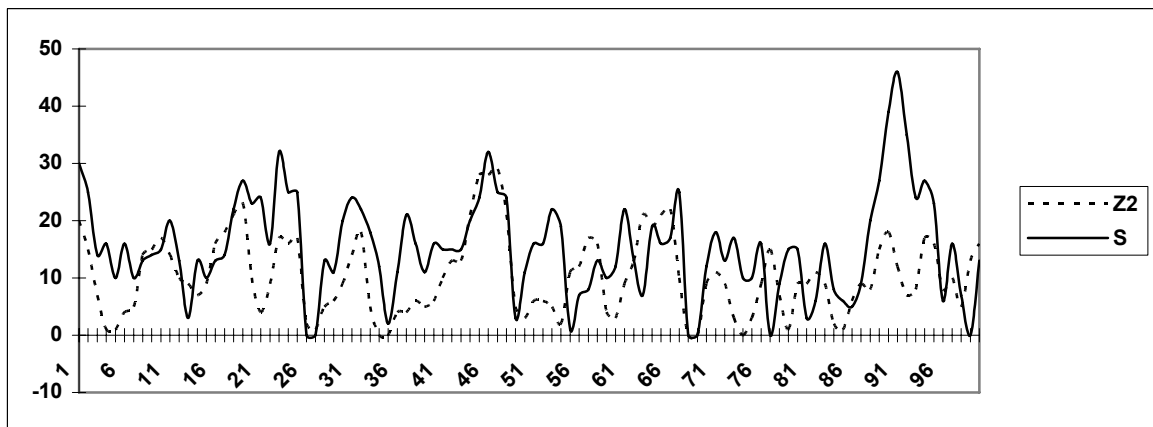
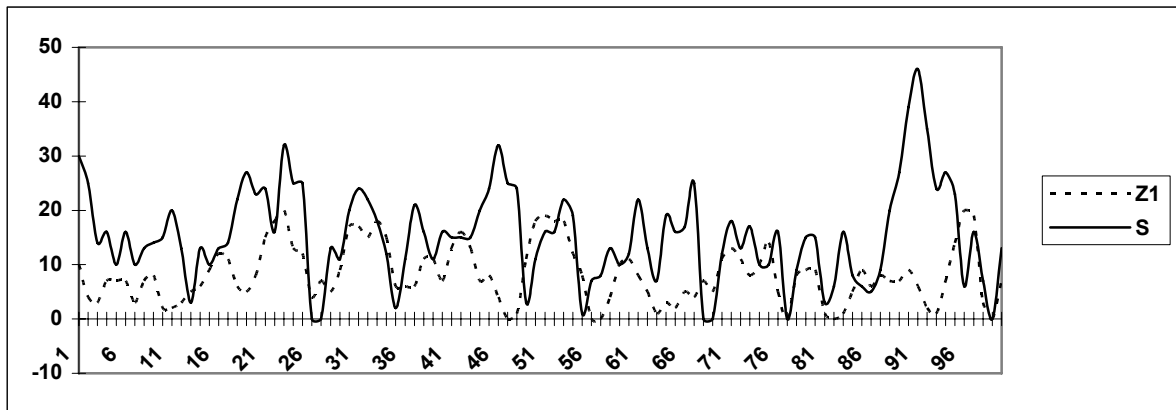


Рис. 4. Модель дворівневої ієрархічної системи на основі сітки Петрі зі спостереженням за рівнем порогових значень



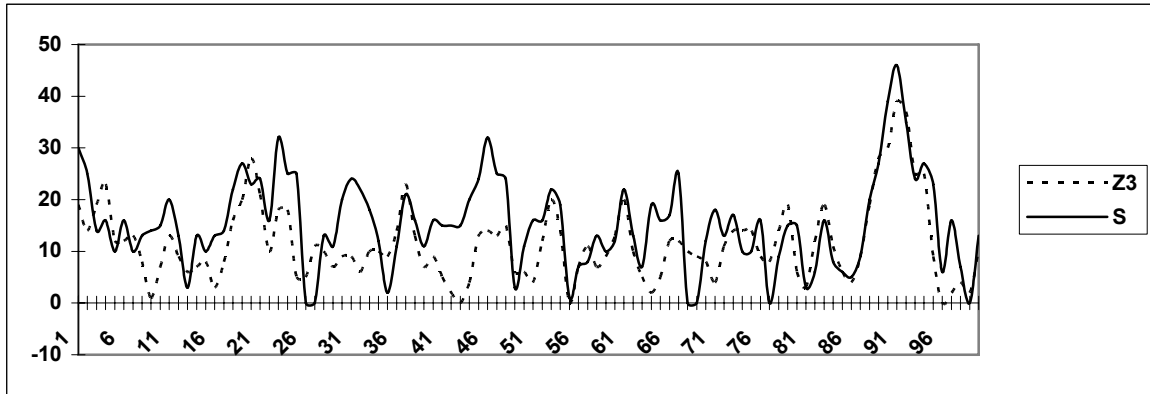


Рис. 5-7. Динаміка змін величин завантаженості підсистем ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ) та сервера ( $S$ ) при відсутності керування величинами обмежень

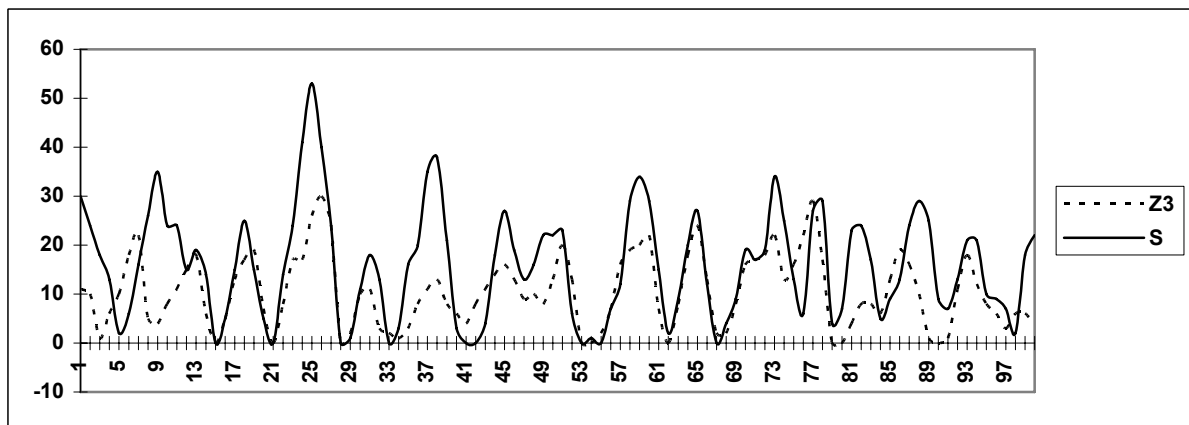
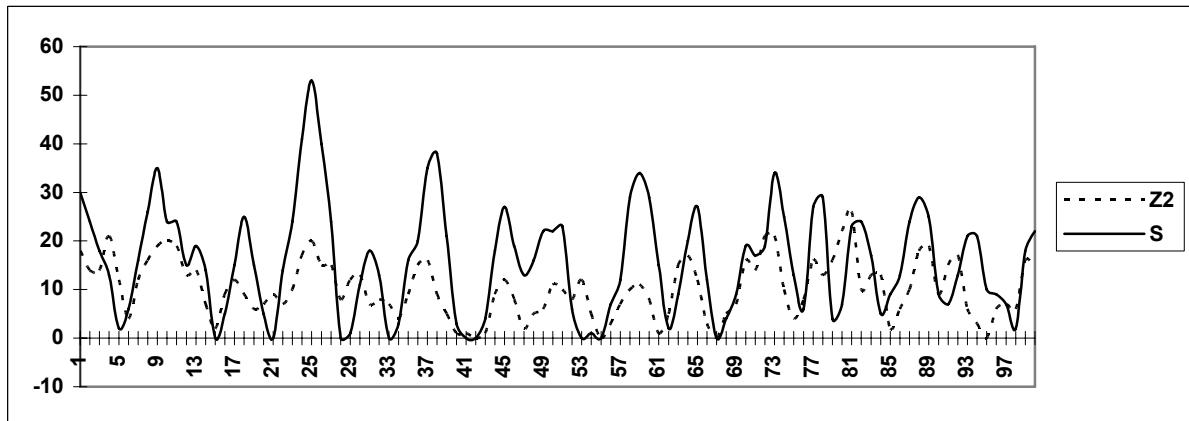
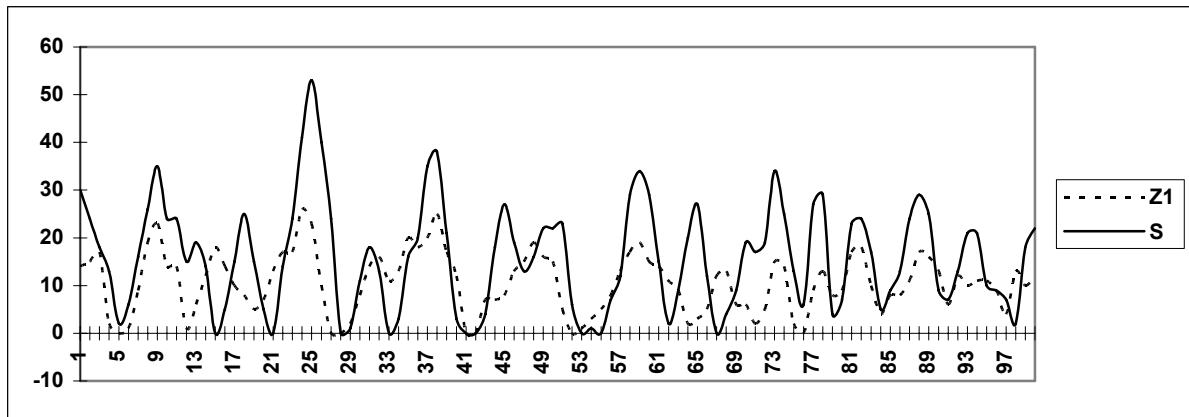


Рис. 8-10. Динаміка змін величин завантаженості підсистем ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ) та сервера ( $S$ ) зі сталим зменшенням величин обмежень

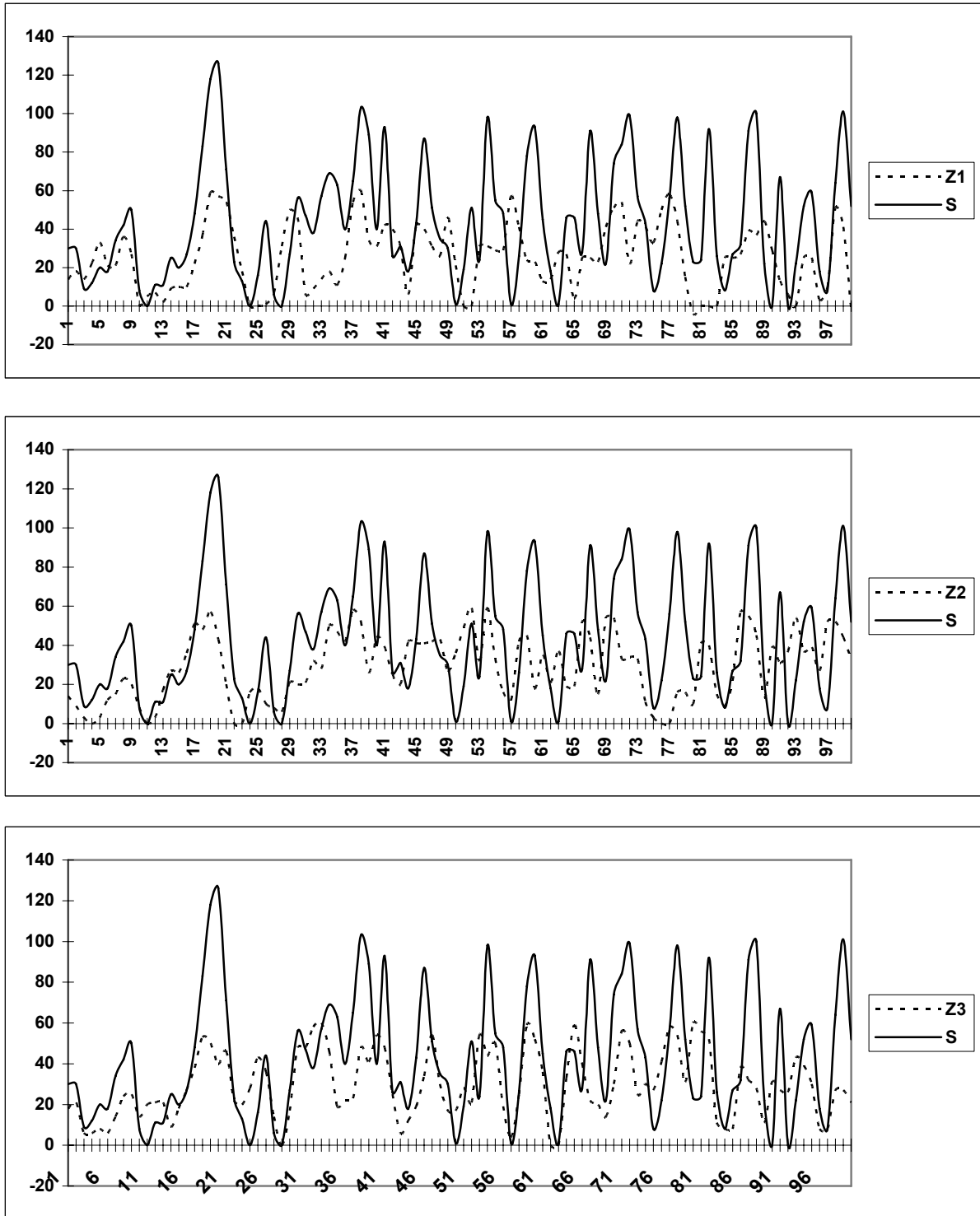


Рис. 11-13. Динаміка змін величин завантаженості підсистем ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ) та сервера ( $S$ ) зі зміною величини обмежень при наблизенні до граничних значень

1. Дейкстра Е. Cooperating Sequential Processes / Сб. "Языки программирования" / Под ред. Ф. Женюи. – М., 1972. – С. 38-49. 2. Кейлингерт П. Элементы операционных систем. – М., 1985. 3. Кухтенко А.И. Основные задачи теории управления сложными системами // Сложные системы управления. – 1968. – Вып. 1. – С. 3-10. 4. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М., 1982. 5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975. 6. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М., 1984. 7. Поспелов Г.С., Ириков В.А. Программно-целевое планирование и управление. – М., 1976.

Надійшла до редколегії 04.11.2006.

УДК 519.7+510.5

Т.О. Карнаух, канд. фіз.-мат. наук

### ДІЙСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ, ОБЧИСЛЮВАНІ З ПОВЕРНЕННЯМИ

*Проведено порівняльний аналіз ієрархії за пам'яттю для R-та Z-пристроїв, що обчислюють дійсні функції та дійсні числа.*

*Contrastive analysis of depending on memory hierarchies of R-and Z-machine for computing real numbers and real functions was made.*

Алгоритми обчислення дійсних функцій і чисел можна умовно поділити на два типи. До першого належатимуть ті, що дозволяють за скінченний час отримати наближення результату з наперед заданою похибкою; до другого – ті, що в граничному переході гарантують отримання результату обчислення, але для отриманого наближення не дозволяють точно оцінити його похибку. На жаль, не для всіх практичних задач існують алгоритми першого типу.

Якщо розглянути поняття обчислюваності, то багато його уточнень можна віднести до алгоритмів першої типу, наприклад R-перетворювачі Лісовика [1]. Змістовно R-перетворювач складається з керуючої голівки (можливо з нескінченною пам'яттю, тобто множиною станів) і вхідної та вихідної стрічок. На вхідній стрічці записано ω-слово, що є нескінченним двійковим зображенням вхідного числа; на вихідній поступово формується ω-слово, що є двійковим зображенням результату обчислення; при цьому на вихідну стрічку, крім звичайних двійкових символів {0,1,1̄} (у даній роботі використано позначення з [1]), дозволяється записувати символи переповнення 2 і 2̄ ("двійка" й "мінус двійка"). Залежно від свого поточного стану та поточного вхідного символу за один крок він може детерміновано виконати такий набір дій: 1) дописати слово на вихідну стрічку; 2) змінити свій стан; 3) перейти до наступного символу вхідної стрічки. Зосередившись на цій моделі, можна побачити, що пристрій послідовно уточнює результат.

Розглянемо процес обчислення алгоритмом другого типу. Вочевидь, він має наближати проміжні результати до кінцевого (граничного). Однак не завжди можна сказати, наскільки отриманий наближений результат близький до кінцевого. Якщо розглядати процес крізь призму словарних перетворень зображень чисел, то такий алгоритм повинен мати можливість стирати деякі попередні символи результату. Тобто він працює по вихідній стрічці з поверненнями. У [2] Л. Лісовиком була запропонована концепція одного з варіантів можливих уточнень цієї алгоритмічної моделі, а саме Z-перетворювача. Змістовно цей пристрій відрізняється від R-перетворювача лише тим, що має можливість читати та стирати останній символ на вихідній стрічці, інакше кажучи, його вихідна стрічка функціонує за принципом магазину. Однак разом з тим при визначенні кінцевого результату накладається вимога, що довжина слова на вихідній стрічці прямує до нескінченності. Ця вимога гарантує збіжність проміжних результатів до граничного результату обчислення.

Вилучивши з моделі R-перетворювача вхідну стрічку, можна отримати модель R-генератора, який здатен обчислювати дійсні числа. Крім того, для моделі R-перетворювача (та R-генератора) розглядалися різні обмеження на пам'ять, а саме: C-машини (R-перетворювачі, пам'ять яких має структуру стрічки машини Тьюрінга), R-перетворювачі з магазинною пам'яттю та скінченні R-перетворювачі. Аналогічну класифікацію можна ввести й для Z-перетворювачів і Z-генераторів.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок – пристрій зі скінченною пам'яттю. У [3] було доведено, що кожна функція, задана скінченним R-перетворювачем, у раціональних точках приймає раціональні значення, а клас чисел, обчислюваних скінченними R-генераторами, точно дорівнює множині раціональних чисел.

Дамо формальне означення Z-перетворювача. Z-перетворювачем будемо називати четвірку  $A = (K, H, q_0, \#)$ , де  $K$  – не більш ніж зліченна множина станів,  $H$  – система команд,  $q_0, q_0 \in K$ , – початковий стан,  $\#$  – початковий символ вихідної стрічки, причому  $H \subseteq (K \times (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\}) \times \{\#\} \times K \times \{\#\} \Sigma_0^*) \cup (K \times (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma_0 \times K \times \Sigma_0^*)$  і  $card(H(q, a, x) \cup H(q, \varepsilon, x)) \leq 1$  для всіх  $q \in K, a \in \Sigma_0, x \in \Sigma_0 \cup \{\#\}$ . (Згідно з [1],  $\Sigma_0 = \{\nabla, 0, 1, 2, \bar{1}, \bar{2}\}$ .)

Визначимо відношення  $\mapsto_A$  одного кроку роботи Z-перетворювача A так:  $(q, x, \#wa) \mapsto_A (p, \#wu)$  при  $(q, x, a, p, u) \in H$  і  $(q, x, \#) \mapsto_A (p, \#u)$  при  $((q, x, \#, p, u) \in H$ . Нехай

$$O(A) = \{(w, u) \mid w \in D, u \in D' \cap \Sigma_0^0 \text{ та для деяких } a_1, a_2, \dots, q_1, q_2, \dots, u_0, u_1, u_2, \dots \text{ виконується } u_0 = \varepsilon, (q_{i-1}, a_i, \#u_{i-1}) \mapsto_A (q_i, \#u_i), i \in N_+, w = a_1 a_2 \dots \text{ і для кожного слова } u', \text{ що є початком слова } u, \text{ існує таке } n \in N, \text{ що для всіх } i \geq n \text{ слово } u' \text{ є початком слова } u_i\}.$$

Z-перетворювач A задає (обчислює) часткову функцію  $f_A : D \rightarrow D$ , визначену як  $f_A = \{(w, u'') \mid w \in D, (w, u) \in O(A)\}$ , де для  $u \in D' \cap \Sigma_0^0$  під  $u''$  розуміємо ω-слово  $u'' \in D$ , для якого  $\|u''\| = \|u\|$ , причому  $u'' \in F_0$  тоді й тільки тоді, коли  $u \in \Sigma_0 O^0$ . Крім того, Z-перетворювач A задає (обчислює) часткову дійсну функцію  $\tilde{f}_A : R \rightarrow R$ , визначену як

$$\tilde{f}_A = \{(x, y) \mid (\exists w \in D \setminus K_0 (x = \|w\|, f_A(w) \text{ визначено і } y = \|f_A(w)\|))\},$$

де  $\|w\|$  – дійсне число, зображуване ω-словом (словом) w.

$Z$ -перетворювач зі скінченною множиною станів назвемо скінченним. Формальне означення  $Z$ -генератора можна отримати з означення  $Z$ -перетворювача вилученням обробки вхідної стрічки (другої компоненти команди).

**Теорема 1.** Дійсна функція, обчислювана скінченним  $Z$ -перетворювачем, у раціональних точках приймає раціональні значення.

*Доведення.* Нехай скінченний  $Z$ -перетворювач  $A = (K, H, q_0, \#)$  обчислює дійсну функцію  $f$  і  $x \in D_f \cap \mathbb{Q}$ . Нехай  $w \in D \setminus K_0$  і  $\|w\| = x$ . Оскільки число  $x$  раціональне, то кожне його зображення у двійковій системі числення обов'язково періодичне, а тому має місце розклад  $w = v_0 \nabla v_1 (v_2)^\omega$ . Нехай  $v_2 = b_1 \dots b_k$ ,  $b_i \in \Sigma_0$ .

Розглянемо роботу  $A$  над  $w$  детальніше. Оскільки  $x \in D_f$ , то результат роботи  $A$  над  $w$  визначено, а тоді існують деякі  $a_1, a_2, \dots, q_1, q_2, \dots, u_0, u_1, u_2, \dots$ , для яких  $u_0 = \varepsilon$ ,  $(q_{i-1}, a_i, \#u_{i-1}) \mapsto_A (q_i, \#u_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_+$ ,  $w = a_1 a_2 \dots$ , і для кожного слова  $u'$ , що є початком слова  $u$ , існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , що для всіх  $i \geq n$  слово  $u'$  є початком слова  $u_i$ . Тоді існує зростаюча послідовність  $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$  така, що слово  $v_0 \nabla v_1$  є початком слова  $a_1 \dots a_{i_0}$ ,  $u_{i_0} \neq \varepsilon$  і слово  $u_{i_j}$  є початком слова  $u_i$  для всіх  $i \geq i_j$ . Нехай  $w_j = a_1 \dots a_{i_j} = v_0 \nabla v_1 (v_2)^{n_j} b_1 \dots b_{k_j}$ ,  $u_{i_j} = u'_{i_j} c_j$ , де  $c_j \in \Sigma_0$ . Тоді після обробки початку  $w_j$  на подальшу роботу  $Z$ -перетворювача символи всередині вихідної стрічки не впливають. Оскільки  $k_j \in \overline{1, k}$ , алфавіт  $\Sigma_0$  і множина станів  $K$  скінченні, то з послідовності  $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$  можна вибрати нескінченну підпослідовність  $(i_{j_t})_{t \in \mathbb{N}}$ , для якої значення  $k_{j_t}$ ,  $c_{j_t}$  і  $q_{i_{j_t}}$  є сталими, а саме  $m$ ,  $c$  і  $q$  відповідно, і, крім того, довжини слів  $u_{i_{j_t}}$  строго зростають.

З наведеної побудови випливає, що після обробки деякого початку  $v_0 \nabla v_1 (v_2)^{n_0} b_1 \dots b_m$   $Z$ -перетворювач  $A$  знаходиться в стані  $q$ , на вихідну стрічку записано слово  $\#uc$ , і при подальшій роботі над словом  $b_{m+1} \dots b_k (v_2)^{n_1} b_1 \dots b_m$  жоден символ слова  $\#uc$  не стирається, а отже при обробці слова  $(b_{m+1} \dots b_k b_1 \dots b_m)^{n_1+1}$  на вхідну стрічку дописується слово  $u'c$ , жоден символ якого знову не стирається. За цих обставин, оскільки  $v_0 \nabla v_1 (v_2)^{n_0} b_1 \dots b_m (b_{m+1} \dots b_k b_1 \dots b_m)^\omega$ , то результатом обчислень  $A$  над  $w$  є  $\omega$ -слово  $\#uc(u'c)^\omega$ . Отже, результатом словарного перетворення періодичного  $\omega$ -слова є періодичне  $\omega$ -слово. Тепер твердження теореми випливає з того, що періодичні  $\omega$ -слова зображують раціональні числа. Теорему доведено.

**Наслідок 1.** Клас чисел, обчислюваних скінченними  $Z$ -генераторами, дорівнює множині раціональних чисел.

*Доведення.* З доведення теореми 1 випливає, що кожен скінченний  $Z$ -генератор обчислює раціональне число. З іншого боку, відомо, що кожне раціональне число можна обчислити скінченим  $R$ -генератором, який є звуванням поняття скінченного  $Z$ -генератора.

Надалі введемо поняття алгоритмічного  $Z$ -генератора та  $Z$ -генератора з одним лічильником.

Серед  $Z$ -генераторів можна виділити клас алгоритмічних пристроїв, пам'ять яких функціонує як стрічка машини Тьюрінга. Кожен алгоритмічний  $Z$ -генератор можна розглядати як детерміновану машину Тьюрінга з однією вихідною стрічкою, що працює в режимі магазину, та однією робочою стрічкою, яка є звичайною стрічкою машини Тьюрінга. Якщо як робочу стрічку алгоритмічного  $Z$ -генератора розглядати лічильник, то отримаємо  $Z$ -генератор з одним лічильником. Формальні означення вказаних пристроїв та обчислюваних ними чисел нескладно побудувати, узявши за основу наведене вище означення  $Z$ -перетворювача й обчислюваної ним функції та стандартні для теорії алгоритмів означення машини Тьюрінга й лічильника. Через громіздкість цих викладок залишимо їх як вправу читачу. Надалі під  $Z$ -числом будемо розуміти дійсне число, обчислюване  $Z$ -генератором, пам'ять якого є стрічкою машини Тьюрінга, а під обчислюваним числом – число, обчислюване алгоритмічним  $R$ -генератором.

З роботи [4] випливає, що клас чисел, обчислюваних  $R$ -генераторами з магазинною пам'яттю, також дорівнює множині раціональних чисел. Для  $Z$ -генераторів аналогічне твердження вже не виконується. Натомість має місце така теорема.

**Теорема 2.** Множина чисел, обчислюваних  $Z$ -генераторами з одним лічильником, точно є множиною всіх  $Z$ -чисел.

*Доведення.* Оскільки кожен  $Z$ -генератор з одним лічильником можна розглядати як алгоритмічний генератор, то для доведення теореми достатньо показати, що роботу алгоритмічного  $Z$ -генератора  $A$  можна промоделювати  $Z$ -генератором  $B$  з одним лічильником.

Без обмеження загальності вважаємо, що  $A$  обчислює додатне число. Нехай алфавіт робочої стрічки генератора  $A$  складається з  $p$  ( $p \geq 2$ ) символів  $b_1, \dots, b_p$ . Тоді конфігурацію робочої стрічки (частина стрічки, що містить всі непорожні символи, записані на стрічці, та поточну позицію) можна подати у вигляді слова  $\alpha \uparrow \beta$ , де  $\alpha$  – слово, записане на стрічці ліворуч поточної позиції, а  $\beta$  – слово, записане на стрічці праворуч поточної позиції, включаючи



саму поточну позицію. Для  $\alpha = b_{j_1} \dots b_{j_n}$ ,  $\beta = b_{j_1} \dots b_{j_m}$  візьмемо  $\varphi(\alpha) = 1^i 0 1^2 0 \dots 0 1^n$ ,  $\psi(\beta) = j$ , де  $j = (j_m \dots j_2 j_1)_p$ . Тепер організуємо роботу генератора  $B$  так, щоб у деякі моменти часу на вихідній стрічці було записано слово  $\#u_i 000\varphi(\alpha_j b_{j_0})$ , у лічильнику знаходилось число  $\psi(\beta_j)$ , а генератор  $B$  знаходився в стані  $(q_j, c_j)$ , де генератор  $A$  після  $i$  кроків роботи перебуває в стані  $q_j$ , на його вихідній стрічці записано слово  $\#u_j$ , останнім символом якого є  $c_j$ , і робоча стрічка має конфігурацію  $\alpha_j \uparrow \beta_j$ .

Зауважимо, що  $B$  може реалізувати множення лічильника на натуральну константу  $d$  так: записати на вихід символ 0, переписати на вихід вміст лічильника символами 1, переписати з виходу символи 1, додаючи на кожен зчитаний символ  $d$  символів до лічильника, стерти з виходу символ 0.

Також  $B$  може реалізувати цілочисельне ділення лічильника на додатне натуральне число  $d$ , при якому в лічильнику залишається частка, а в стані запам'ятовується остача: записати на вихід символ 0, переписати на вихід вміст лічильника символами 1, переписати з виходу символи 1, додаючи на кожні  $d$  зчитаних символів 1 до лічильника, стерти з виходу символ 0.

Стратегія, за якою  $B$  моделює роботу генератора  $A$ , формулюється так. У своєму стані він зберігає  $q_j, c_j$  та деяку необхідну для моделювання допоміжну інформацію. Спочатку  $B$  за допомогою цілочисельного ділення лічильника на  $p$  визначає поточний символ  $b_{j_1}$  робочої стрічки генератора  $A$ , код  $j_1$  якого запам'ятовується як залишок операції. За трійкою  $(q_j, c_j, b_{j_1})$   $A$  змінює свій стан, замінює поточний символ робочої стрічки  $b_{j_0}$ , рухається по робочій стрічці та стирає символ  $c_j$  або пише на вихідну стрічку слово  $u$ . Покажемо, як  $B$  може промоделювати вказані дії. Спочатку промоделюємо обробку робочої стрічки.

Якщо по робочій стрічці йде рух управо, то  $B$  дописує на вихід слово  $01^0$ .

Якщо по робочій стрічці йде рух уліво, то генератор домножує вміст лічильника на  $p$ , додає до лічильника  $j_0$  і ще раз виконує множення лічильника на  $p$ . Після чого стирає з виходу 0 і блок символів 1, додаючи на кожний стертий символ 1 одиницю до лічильника. У результаті в лічильнику записано число  $(j_m \dots j_2 j_0 i_0)_p$ .

Якщо рух по робочій стрічці не відбувається, то  $B$  домножує лічильник на  $p$  і додає до нього  $j_0$ .

У результаті цих дій на вихідній стрічці записано слово  $\#u_i 0\varphi(\alpha_{i+1} b_{i+1_0})$ , а в лічильнику знаходиться число  $\psi(\beta_{i+1}) = (k_r \dots k_2 k_1)_p$ . Далі, щоб дістати можливість виконати відповідну  $A$  обробку вихідної стрічки,  $B$  має записати в лічильник число  $(k_r \dots k_2 k_1 00(\varphi(\alpha_{i+1} b_{i+1_0}))^R)_p$ . Для цього залишається домножити лічильник на  $p^2$  і виконати дії: поки слово на вихідній стрічці закінчується не 000: 1) прочитати і стерти останній символ вихідної стрічки, нехай символ  $a$ ; 2) домножити лічильник на  $p$ ; 3) додати до лічильника число  $a$ ; 4) стерти з вихідної стрічки символ 0. Якщо слово на вихідній стрічці закінчується на 000, то стерти ці три символи. При цьому в лічильнику знаходиться шукане число, а на вихідній стрічці записано точно слово  $\#u_j$ .

Далі  $B$  виконує дії  $A$  над вихідною стрічкою й дописує на вихід слово 000. Після чого йому необхідно повернути на вихідну стрічку слово  $\varphi(\alpha_{i+1} b_{i+1_0})$ , закодоване в лічильнику. Для цього він починає розгортати вміст лічильника. Поки останні три символи вихідної стрічки не 100, він виконує цілочисельне ділення лічильника на  $p$ , у якому в лічильнику залишається залишок, а остача  $a$  (за побудовою  $a \in \{0, 1\}$ ) запам'ятовується в стані, записує на вихід символ  $a$ . Якщо останні три символи вихідної стрічки 100, то в лічильнику знаходиться число  $\psi(\beta_{i+1})$ , тому залишається стерти останні два символи 00 з вихідної стрічки й завершити моделювання кроку роботи генератора  $A$ , переходячи у відповідний стан. На цьому доведення теореми завершено.

З конструкції доведення теореми 2 випливає такий наслідок.

**Наслідок 2.** Множина функцій, обчислюваних  $Z$ -перетворювачами з одним лічильником, у точності є множиною всіх функцій, обчислюваних алгоритмічними  $Z$ -перетворювачами.

Для завершення даного дослідження наведемо приклад необчислюваного  $Z$ -числа, яке задається конструкцією Шпекера. Нехай  $D$  – діагональна множина, тобто множина таких натуральних чисел  $n$ , для яких машина Тьюрінга з ґоделевим номером  $n$  застосовна до свого номера. Ця множина є рекурсивно перелічною, але не рекурсивною. Крім того, існує рекурсивна функція  $f$ , що реалізує бієкцію між множинами  $N_0$  і  $D$ . Послідовність раціональних чисел  $a_0, a_1, \dots$ , де  $a_n = \sum_{m=0}^n 4^{-f(m)-1}$ , є обмеженою і строго зростаючою, але її границя  $a = \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-f(m)-1}$  не може

бути обчислена жодним алгоритмічним  $R$ -генератором, навіть працюючим з переповненням розрядів, оскільки це привело б до рекурсивності діагональної множини. Слід також зазначити, що послідовність  $a_0, a_1, \dots$  є обчислюваною: існує алгоритм (машина Тьюрінга), який за довільним натуральним числом  $n$  буде  $n$ -те раціональне число послідовності. Отже, можна побудувати алгоритмічний  $Z$ -генератор, який на вихідній стрічці буде записувати двійкові

зображення чисел послідовності  $a_0, a_1, \dots$ . Оскільки для кожного натурального  $i$  існує лише скінченна множина натуральних чисел, менших за нього, то потреба в стиранні дробових розрядів з номерами  $2i + 1$  та  $2i + 2$  може виникати не більш ніж  $i + 1$  разів, а звідси граничний результат роботи генератора визначений  $i$  в точності  $\epsilon$  зображенням числа  $a$ . Звідси число  $a$  є шуканим прикладом. Має місце такий цікавий факт.

**Теорема 3.** Кожне необчислюване  $Z$ -число є трансцендентним.

*Доведення* теореми випливає з того, що всі алгебраїчні числа є обчислюваними.

Отже, у даній роботі проведено порівняльний аналіз ієрархій за пам'яттю для  $R$ - та  $Z$ -пристроїв, що обчислюють дійсні функції та дійсні числа. Виявилось, що хоча скінченні  $Z$ -генератори, як і скінченні  $R$ -генератори, обчислюють виключно раціональні числа, але, на відміну від  $R$ -перетворювачів та  $R$ -генераторів, для  $Z$ -пристроїв з пам'яттю, яка є лічильником або магазином, або стеком, або гніздовим стеком, жодних відмінностей класів обчислюваних ними об'єктів залежно від типу пам'яті не існує.

1. Лисовик Л.П. Алгоритмические вопросы для реальных функций // Кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 12-17. 2. Лисовик Л.П., Карнаух Т.А. Об алгоритмической классификации чисел // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23-28 мая 2005 г.) / Под ред. О.Б. Лупанова. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2005. – С. 87. 3. Лисовик Л.П. Применение конечных преобразователей для задания фрактальных кривых // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 3. – С. 11-22. 4. Лисовик Л.П., Шкаравская О.Ю. Функции, определяемые преобразователями с магазинной памятью // Докл. НАН Украины. – 1995. – № 9. – С. 57-59.

Надійшла до редколегії 12.10.2006

УДК 517.929

В.В. Козоріз, д-р фіз.-мат. наук, проф., С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
І.В. Грицай, канд. фіз.-мат. наук

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ВАГОНА НА МАГНІТНОМУ ПІДВІСІ

*Побудовано математичну модель руху вагона на магнітному підвісі з використанням формалізму Лагранжа. Проаналізовано розв'язки отриманої моделі.*

*The mathematical passenger car traffic model on magnetic levitation was constructed by using Lagrange's formalism. The solutions of the model were analysed.*

**Вступ.** В умовах різкого подорожчання нафтопродуктів і забруднення зовнішнього середовища проблема розробки екологічно чистих транспортних засобів є надзвичайно актуальною. Вирішити її допоможе побудова транспорту на магнітній подушці. Одним з методів досягнення цієї мети є дослідження стійкості та нестійкості динаміки руху тіла в магнітному полі в умовах ефекту "магнітної потенціальної ями", що був запропонований В. Козорізом [3]. Демонстрація окремих макетів, зроблених у лабораторних умовах, показала життєздатність даної ідеї та перспективність запропонованого наукового напрямку. Використання отриманих теоретичних результатів можливе не лише в транспортних засобах, а і в інших сферах (надчутливих вимірювальних приладах, двигунах та ін.).

**Постановка задачі та опис системи.** Побудуємо математичну модель динаміки вагона на магнітному підвісі. Вважатимемо, що вагон (рис. 1 а, б) левітує завдяки магнітній взаємодії струмів, які протікають у лініях струму (1, 2) і витках (1, 2, 3, 4). Схему конструкції зображено на рис. 1 а, б.

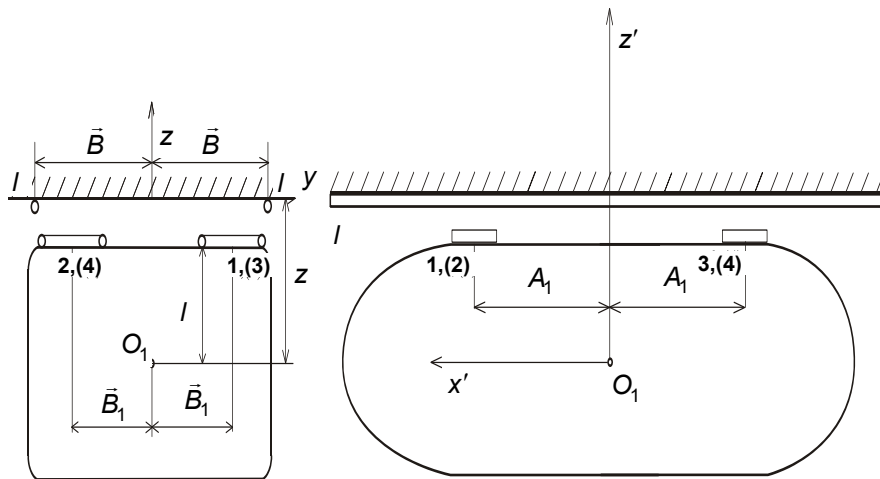


Рис. 1 а, б

На рис. 1 а, 1 б, 2 наведено нерухому інерціальну систему координат  $Oxyz$  з ортами  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  і рухому жорстко зв'язану з вільним вагоном систему координат  $O_1x'y'z'$  з ортами  $\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{i}'_3$ . Відстань від центра  $O$  нерухомої системи координат  $Oxyz$  до центра  $O_1$  рухомої  $O_1x'y'z'$  визначається радіус-вектором  $\vec{\rho}$ . У площині нерухомої системи координат  $xOy$  паралельно осі  $Ox$  розташовані провідники зі струмом, причому величина  $\vec{B}$  визначає половину відстані між провідниками. Зверху вагона в площині  $x'O_1y'$  попарно симетрично розміщені чотири замкнених малих над-

провідних витки, причому вектор  $\vec{A}_1$  визначає половину довжини підвісу,  $\vec{B}_1$  – половину ширини підвісу,  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{R}_4$  – вектори відстаней від центрів витків до струмів лінії. Сила ваги вагона спрямована вниз по осі  $Oz$ .

Центр мас  $O_1$  підвісу зміщено на відстань  $l$  у напрямку осі  $O_1z'$ . Він описується трьома декартовими координатами  $x', y', z'$ . Просторова орієнтація підвісу описується трьома кутами  $x_4, x_5, x_6$ , які визначають відповідно кути крену, тангажа та ширяння.

**Формалізм Лагранжа в побудові математичної моделі.** Оскільки тіло зв'язане з рухомою системою координат, то для побудови математичної моделі використаємо кути Ейлера – Крилова. Процес моделювання визначається такою послідовністю дій:

1. Знаходимо вектори відстаней від лінії струмів до "найближчих" витків:

$$\vec{R}_1 = \vec{\rho} + \vec{l} + \vec{B}_1 + \vec{A}_1 - \vec{B} - \vec{C}_1,$$

$$\vec{R}_2 = \vec{\rho} + \vec{l} - \vec{B}_1 + \vec{A}_1 + \vec{B} - \vec{C}_2,$$

$$\vec{R}_3 = \vec{\rho} + \vec{l} + \vec{B}_1 - \vec{A}_1 - \vec{B} - \vec{C}_3,$$

$$\vec{R}_4 = \vec{\rho} + \vec{l} - \vec{B}_1 - \vec{A}_1 + \vec{B} - \vec{C}_4,$$

де  $\vec{\rho} = x\vec{i}_1 + y\vec{i}_2 + z\vec{i}_3$ ,  $\vec{l} = la_{31}\vec{i}_1 + la_{32}\vec{i}_2 + la_{33}\vec{i}_3$ ,  $\vec{B}_1 = B_1a_{21}\vec{i}_1 + B_1a_{22}\vec{i}_2 + B_1a_{23}\vec{i}_3$ ,  $\vec{A}_1 = A_1a_{11}\vec{i}_1 + A_1a_{12}\vec{i}_2 + A_1a_{13}\vec{i}_3$ ,  $-\vec{B} = -B\vec{i}_2$ ,  $-\vec{C}_i = -C_i\vec{i}_1$ ,  $i = 1, 4$ .

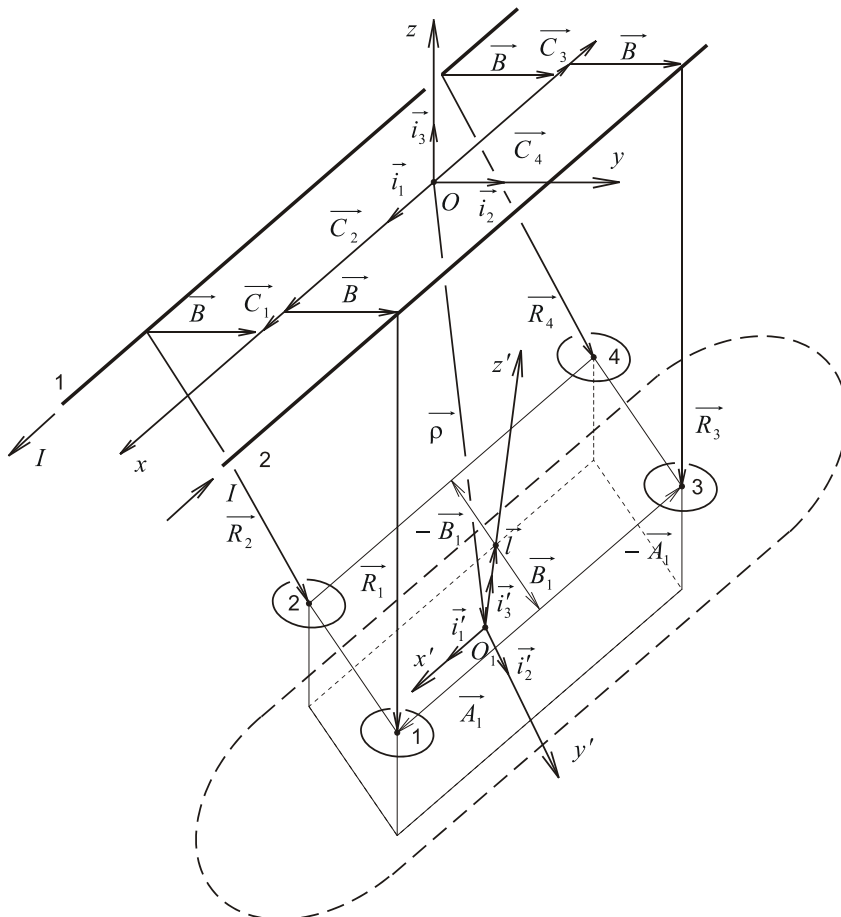


Рис. 2

Коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1,3}$  є компонентами матриці направляючих косинусів кутів переходу від рухомої системи координат до нерухомої:

$$\begin{bmatrix} \cos x_5 \cos x_6 & \sin x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \cos x_4 \sin x_6 & -\cos x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \sin x_4 \sin x_6 \\ -\cos x_5 \sin x_6 & -\sin x_4 \sin x_5 \sin x_6 + \cos x_4 \cos x_6 & \cos x_4 \sin x_5 \sin x_6 + \sin x_4 \cos x_6 \\ \sin x_5 & -\sin x_4 \cos x_5 & \cos x_4 \cos x_5 \end{bmatrix},$$

де  $x_4, x_5, x_6$  – кути Ейлера – Крилова [2]. Отримаємо

$$\vec{R}_i = R_{i1}\vec{i}'_1 + R_{i2}\vec{i}'_2 + R_{i3}\vec{i}'_3, \quad i = \overline{1,4}.$$

Величини  $C_i$  підбираємо таким чином, щоб  $R_{i1} = 0$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Тоді вектор відстані має вигляд

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= (y + la_{32} + B_1 a_{22} + A_1 a_{12} - B) \vec{i}_2 + (z + la_{33} + B_1 a_{23} + A_1 a_{13}) \vec{i}_3, \\ \vec{R}_2 &= (y + la_{32} - B_1 a_{22} + A_1 a_{12} + B) \vec{i}_2 + (z + la_{33} - B_1 a_{23} + A_1 a_{13}) \vec{i}_3, \\ \vec{R}_3 &= (y + la_{32} + B_1 a_{22} - A_1 a_{12} - B) \vec{i}_2 + (z + la_{33} + B_1 a_{23} - A_1 a_{13}) \vec{i}_3, \\ \vec{R}_4 &= (y + la_{32} - B_1 a_{22} - A_1 a_{12} + B) \vec{i}_2 + (z + la_{33} - B_1 a_{23} - A_1 a_{13}) \vec{i}_3.\end{aligned}$$

2. Поділимо розмірні величини  $y$ ,  $z$ ,  $l$ ,  $B$ ,  $B_1$  на  $A_1$  і перетворимо їх на безрозмірні. Позначимо

$$x_2 = \frac{y}{A_1}, L = \frac{l}{A_1}, t_1 = \frac{B_1}{A_1}, t = \frac{B}{A_1}, x_3 = \frac{z}{A_1}, t = \frac{\tau}{w}, \omega_i = \frac{\eta_i}{w}, i = \overline{1,4}. \quad (1)$$

Тоді вектори відстаней можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= A_1(x_2 + La_{32} + t_1 a_{22} + a_{12} - t) \vec{i}_2 + A_1(x_3 + La_{33} + t_1 a_{23} + a_{13}) \vec{i}_3 = A_1(R_{12} \vec{i}_2 + R_{13} \vec{i}_3), \\ \vec{R}_2 &= A_1(x_2 + La_{32} - t_1 a_{22} + a_{12} + t) \vec{i}_2 + A_1(x_3 + La_{33} - t_1 a_{23} + a_{13}) \vec{i}_3 = A_1(R_{22} \vec{i}_2 + R_{23} \vec{i}_3), \\ \vec{R}_3 &= A_1(x_2 + La_{32} + t_1 a_{22} - a_{12} - t) \vec{i}_2 + A_1(x_3 + La_{33} + t_1 a_{23} - a_{13}) \vec{i}_3 = A_1(R_{32} \vec{i}_2 + R_{33} \vec{i}_3), \\ \vec{R}_4 &= A_1(x_2 + La_{32} - t_1 a_{22} - a_{12} + t) \vec{i}_2 + A_1(x_3 + La_{33} - t_1 a_{23} - a_{13}) \vec{i}_3 = A_1(R_{42} \vec{i}_2 + R_{43} \vec{i}_3).\end{aligned} \quad (2)$$

3. Знайдемо взаємні індуктивності магнітного поля між лініями струму та витками як функції параметрів системи. Магнітне поле, що виникає в кожному витку підвісу, визначається як

$$\vec{B}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\vec{l} \times \vec{i}_{R_i}}{R_i}, \quad i = \overline{1,4},$$

де  $\vec{l} = -l\vec{i}_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  – вектор струму,  $\vec{i}_{R_i} = \frac{\vec{R}_i}{R_i}$ ,  $i = \overline{1,4}$  – одиничний вектор відстані. Тоді

$$\vec{B}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\vec{l} \times \vec{R}_i}{R_i^2}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Розкривши векторний добуток і підставивши його у вираз, отримаємо формулу, за якою виражається магнітне поле в першому витку:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{A_1 l}{R_1^2} (R_{13} \vec{i}_2 - R_{12} \vec{i}_3).$$

Вважаємо, що витки мають однакову площу, тому площа одного витка

$$d\vec{S} = dS \vec{i}_3' = dS(a_{31} \vec{i}_1 + a_{32} \vec{i}_2 + a_{33} \vec{i}_3).$$

Магнітний потік через виток дорівнює

$$d\psi = \vec{B} d\vec{S}.$$

Оскільки витки однорідні, то магнітний потік у кожному витку визначається так:

$$\psi_i = \vec{B}_i \vec{S}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Магнітний потік у першому витку

$$\psi_1 = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} l \left( \frac{R_{13}}{r_1^2} a_{32} - \frac{R_{12}}{r_1^2} a_{33} \right),$$

де  $r_1 = \sqrt{R_{12}^2 + R_{13}^2}$ . Знайдемо взаємну індуктивність. Вона має вигляд

$$L_{ij} = \frac{\psi_i}{I}.$$

Взаємна індуктивність першого витка і другої лінії струму має вигляд

$$L_{21} = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( \frac{R_{13}}{r_1^2} a_{32} - \frac{R_{12}}{r_1^2} a_{33} \right).$$

Аналогічно визначаються взаємні індуктивності другого, третього, четвертого витків з відповідно першою або другою лініями струму.

Взаємна індуктивність другого витка й першої лінії струму має вигляд

$$L_{12} = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{R_{23}}{r_2^2} a_{32} + \frac{R_{22}}{r_2^2} a_{33} \right),$$

де  $r_2 = \sqrt{R_{22}^2 + R_{23}^2}$ . Взаємна індуктивність третього витка і другої лінії струму дорівнює

$$L_{23} = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( \frac{R_{33}}{r_3^2} a_{32} - \frac{R_{32}}{r_3^2} a_{33} \right),$$

де  $r_3 = \sqrt{R_{32}^2 + R_{33}^2}$ . Взаємна індуктивність четвертого витка й першої лінії струму має вигляд

$$L_{14} = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{R_{43}}{r_4^2} a_{32} + \frac{R_{42}}{r_4^2} a_{33} \right),$$

де  $r_4 = \sqrt{R_{42}^2 + R_{43}^2}$ .

4. Знаходимо потенціальну енергію системи. Вона становить

$$U = (U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + GA_1 x_3,$$

де  $G$  – гравітаційна стала. Знайдемо енергію магнітного поля, яка виникає внаслідок взаємодії магнітних полів кожного витка з відповідною лінією струму. Формула магнітної взаємодії струмів  $I_1, I_2$  має вигляд

$$F_k = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \iint \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}}. \quad (3)$$

Використавши загальновідомі формули

$$\psi_1 = L_{11} I_1 + L_{21} I_2, \quad \psi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2,$$

де  $\psi_2$  – магнітний потік у другій лінії струму, обчислимо залежність струмів від відстаней. Звідси знайдемо вирази для визначення струмів у витку та лінії струму:

$$I_1 = \frac{\psi_1 L_{22} - \psi_2 L_{21}}{L_{11} L_{22} - L_{21}^2}, \quad I_2 = \frac{\psi_2 L_{11} - \psi_1 L_{21}}{L_{11} L_{22} - L_{21}^2}. \quad (4)$$

Підставивши (4) у (3), отримаємо вираз, який описує магнітну силу двох струмів через магнітні потоки й координати:

$$F_k = \frac{(\psi_1 L_{22} - \psi_2 L_{21})(\psi_2 L_{11} - \psi_1 L_{21})}{(L_{11} L_{22} - L_{21}^2)^2} \frac{\partial L_{21}}{\partial x_k}.$$

Тут  $\psi_1, \psi_2, L_{11}, L_{22}$  – сталі величини,  $L_{21}$  – функція геометричних координат. Використовуючи необхідну умову мінімуму потенціальної енергії (нуль першої похідної потенціальної енергії [3]), отримаємо

$$\psi_1 L_{22} = \psi_2 L_{21}^0, \quad \psi_2 L_{11} = \psi_1 L_{21}^0.$$

Оскільки розглядається випадок взаємодії витка й лінії струму, для якої  $L_{22} \rightarrow \infty, \psi_2 \rightarrow \infty$ , то отримаємо

$$F_k = \frac{(\psi_2')^2 (L_{21}^0 - L_{21})}{L_{11} L_{22}^2} \frac{\partial L_{21}}{\partial x_k}.$$

Проінтегруємо цей вираз і обчислимо потенціальну енергію магнітного поля, яка виникає внаслідок взаємодії магнітних полів витка з відповідною лінією струму:

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{(\psi_2')^2 [L_{21}^0 - L_{21}]^2}{L_{11} L_{22}^2}.$$

Зробивши аналогічні викладки, отримаємо вирази для потенціальної енергії кожного витка та відповідної лінії струму:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(\psi_1')^2 [L_{12}^0 - L_{12}]^2}{\tilde{L}_{11}^2 L_{22}}, \quad U_3 = \frac{1}{2} \frac{(\psi_2')^2 [L_{23}^0 - L_{23}]^2}{\tilde{L}_{22}^2 L_{33}}, \quad U_4 = \frac{1}{2} \frac{(\psi_1')^2 [L_{14}^0 - L_{14}]^2}{\tilde{L}_{11}^2 L_{44}}.$$

Тут  $\psi_1', \psi_2'$  – магнітні потоки ліній струму,  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  – магнітні потоки у витках,  $\tilde{L}_{11}, \tilde{L}_{22}$  – власні індуктивності ліній струму,  $L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{44}$  – власні індуктивності витків. Оскільки витки ідентичні, то

$$\psi_1' = \psi_2', \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4, \quad \tilde{L}_{11} = \tilde{L}_{22}, \quad L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_{44}.$$

Тому потенціальна енергія виражається з формули

$$U = \frac{1}{2} \frac{(\psi_2')^2}{L_{11} \tilde{L}_{22}^2} \left\{ [L_{21}^0 - L_{21}]^2 + [L_{12}^0 - L_{12}]^2 + [L_{23}^0 - L_{23}]^2 + [L_{14}^0 - L_{14}]^2 \right\} + GA_1 x_3,$$

де  $L_{21}^0, L_{12}^0, L_{23}^0, L_{14}^0$  – взаємні індуктивності незбуреного руху, що визначаються за формулами

$$L_{21}^0 = \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{t_1 - t}{A_1 ((t_1 - t)^2 + (x_3 + L)^2)} \right),$$

$$\begin{aligned} [L_{21}^0 - L_{21}]^2 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{t_1 - t}{A_1((t_1 - t)^2 + (x_3 + L)^2)} - \frac{R_{13}}{r_1^2} a_{32} + \frac{R_{12}}{r_1^2} a_{33} \right)^2, \\ L_{12}^0 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \frac{-t_1 + t}{A_1((-t_1 + t)^2 + (x_3 + L)^2)}, \\ [L_{12}^0 - L_{12}]^2 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( \frac{-t_1 + t}{A_1((-t_1 + t)^2 + (x_3 + L)^2)} + \frac{R_{23}}{r_2^2} a_{32} - \frac{R_{22}}{r_2^2} a_{33} \right)^2, \\ L_{23}^0 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{t_1 - t}{A_1((t_1 - t)^2 + (x_3 + L)^2)} \right), \\ [L_{23}^0 - L_{23}]^2 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( -\frac{t_1 - t}{A_1((t_1 - t)^2 + (x_3 + L)^2)} - \frac{R_{33}}{r_3^2} a_{32} + \frac{R_{32}}{r_3^2} a_{33} \right)^2, \\ L_{14}^0 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \frac{-t_1 + t}{A_1((-t_1 + t)^2 + (x_3 + L)^2)}, \\ [L_{14}^0 - L_{14}]^2 &= \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \left( \frac{-t_1 + t}{A_1((-t_1 + t)^2 + (x_3 + L)^2)} + \frac{R_{43}}{r_4^2} a_{32} - \frac{R_{42}}{r_4^2} a_{33} \right)^2. \end{aligned}$$

Позначимо

$$D = \frac{1}{2} \frac{(\psi_2')^2}{L_{11} \tilde{L}_{22}^2} \left( \frac{S}{2\pi\epsilon_0 c^2 A_1} \right)^2, \quad -M = \frac{-t_1 + t}{A_1((-t_1 + t)^2 + (x_3 - L)^2)}.$$

Тоді потенціальна енергія набуде вигляду

$$\begin{aligned} U = D &\left\{ \left( -M + \frac{-R_{13}a_{32} + R_{12}a_{33}}{r_1^2} \right)^2 + \left( -M + \frac{R_{23}a_{32} - R_{22}a_{33}}{r_2^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left( -M + \frac{-R_{33}a_{32} + R_{32}a_{33}}{r_3^2} \right)^2 + \left( -M + \frac{R_{43}a_{32} - R_{42}a_{33}}{r_4^2} \right)^2 \right\} + GA_1 x_3 \end{aligned}$$

Розкладемо в ряд Тейлора за змінними  $x_2, x_4, x_5, x_6$  отриману потенціальну енергію. Розклад має вигляд

$$U = D(U_0 + U_{22}x_2^2 + U_{24}x_2x_4 + U_{44}x_4^2 + U_{55}x_5^2 + U_{66}x_6^2) + GA_1x_3. \quad (5)$$

5. Знаходимо кінетичну енергію системи. Оскільки ми використовуємо кути Ейлера – Крилова, то вона має вигляд

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} &\left\{ m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + Aw^2 [\cos x_5 \cos x_6 \dot{x}_4 + \sin x_6 \dot{x}_5]^2 + \right. \\ &\left. + Bw^2 [-\cos x_5 \sin x_6 \dot{x}_4 + \cos x_6 \dot{x}_5]^2 + Cw^2 (\dot{x}_6 + \dot{x}_4 \sin x_5)^2 \right\}, \end{aligned}$$

де  $m$  – маса підвісу,  $A$  – центральний момент інерції відносно осі  $O_1x'$ ,  $B$  – центральний момент інерції відносно осі  $O_1y'$ ,  $C$  – центральний момент інерції відносно  $O_1z'$ . Використовуючи умови (1) та умову  $x_3 = const$ , отримаємо вираз кінетичної енергії:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} w^2 &\left\{ mA_1^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + A[\cos x_5 \cos x_6 \dot{x}_4 + \sin x_6 \dot{x}_5]^2 + \right. \\ &\left. + B[-\cos x_5 \sin x_6 \dot{x}_4 + \cos x_6 \dot{x}_5]^2 + C(\dot{x}_6 + \dot{x}_4 \sin x_5)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Розклавши його в ряд Тейлора, отримаємо

$$T = T_0 + T_5x_5 + T_6x_6 + T_{55}x_5^2 + T_{66}x_6^2,$$

$$\text{де } T_0 = \frac{w^2}{2} [mA_1^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + A\dot{x}_4^2 + B\dot{x}_5^2 + C\dot{x}_6^2], \quad T_5 = w^2 C\dot{x}_4\dot{x}_6, \quad T_{55} = \frac{w^2}{2} (C - A)\dot{x}_4^2, \quad T_6 = w^2 (A - B)\dot{x}_4\dot{x}_5,$$

$$T_{66} = \frac{w^2}{2} [A(\dot{x}_5^2 - \dot{x}_4^2) + B(\dot{x}_4^2 - \dot{x}_5^2)].$$

6. Побудуємо функцію Лагранжа

$$L = T_0 + T_5 x_5 + T_6 x_6 + T_{55} x_5^2 + T_{66} x_6^2 - D(U_0 + U_{22} x_2^2 + U_{24} x_2 x_4 + U_{44} x_4^2 + U_{55} x_5^2 + U_{66} x_6^2) + GA_1 x_3,$$

де величини  $T_0, T_5, T_6, T_{55}, T_{66}, D, U_0, U_{22}, U_{24}, U_{44}, U_{55}, U_{66}$  визначені вище.

7. Використовуючи рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,4},$$

отримаємо математичну модель фізичного процесу у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\ddot{x}_2 = \frac{-D}{w^2 m A_1^2} (2U_{22} x_2 + U_{24} x_4)$$

$$w^2 \left\{ \ddot{x}_4 \left[ (B-A)x_6^2 + A + x_5^2 (C-A) \right] + 2(B-A) \left[ \dot{x}_4 x_6 - \frac{1}{2} x_5 \right] \dot{x}_6 + \dot{x}_5 \left[ 2\dot{x}_4 (C-A)x_5 + C\dot{x}_6 \right] - \ddot{x}_5 (B-A)x_6 + C\ddot{x}_6 x_5 \right\} = -D(U_{24} x_2 + 2U_{44} x_4) \quad (6)$$

$$w^2 \left[ (2\dot{x}_5 x_6 + \dot{x}_4)(A-B)\dot{x}_6 + ((A-B)x_6^2 + B)\ddot{x}_5 + (A-B)\ddot{x}_4 x_6 \right] = T_5 + 2T_{55} x_5 - 2DU_{55} x_5$$

$$Cw^2 (\ddot{x}_6 + \dot{x}_4 x_5 + \dot{x}_4 \dot{x}_5) = (T_6 + 2T_{66} x_6 - 2DU_{66} x_6)$$

**Аналіз математичної моделі.** Отримана система (6) зображена у вигляді диференціальних рівнянь із квадратичною нелінійністю. Її розв'язки можна знайти чисельно й проаналізувати вплив різних збурень на їх поведінку. Нехай (для прикладу) коефіцієнти системи приймають значення

$$l = 1.5, \quad x_3 = -0.08, \quad t = 0.4, \quad t_1 = 0.3, \quad M = -0.052, \\ D = 15, \quad A = 1, \quad B = C = 2, \quad m = 500, \quad A_1 = 5, \quad w = 1, \quad (7)$$

а початкові умови

$$x_2(0) = 0.1, \quad x_4(0) = 0.2, \quad x_5(0) = 0.05, \quad x_6(0) = 0.1, \\ \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_4(0) = 0, \quad \dot{x}_5(0) = 0, \quad \dot{x}_6(0) = 0. \quad (8)$$

Тоді система буде мати розв'язки, графіки яких наведено на рис. 3–7.

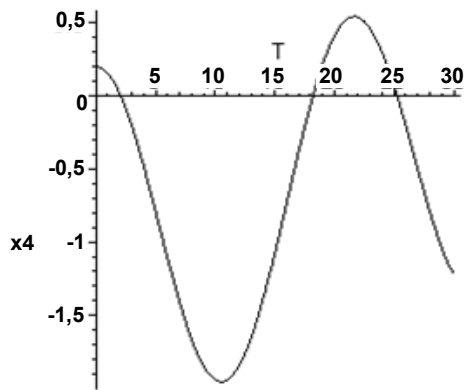


Рис. 3. Фазовий портрет кута крену  $x_4$

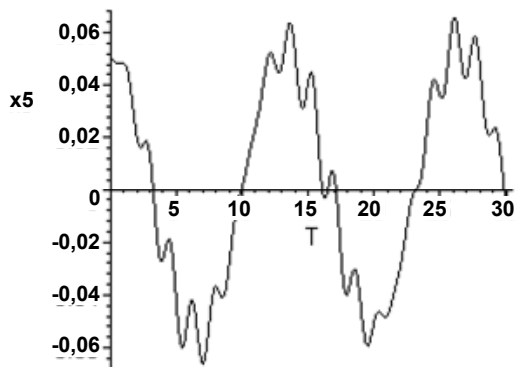


Рис. 4. Фазовий портрет кута тангажа  $x_5$

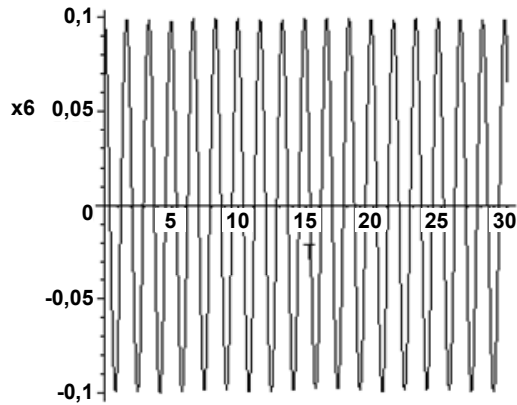


Рис. 5. Фазовий портрет кута ширяння  $x_6$

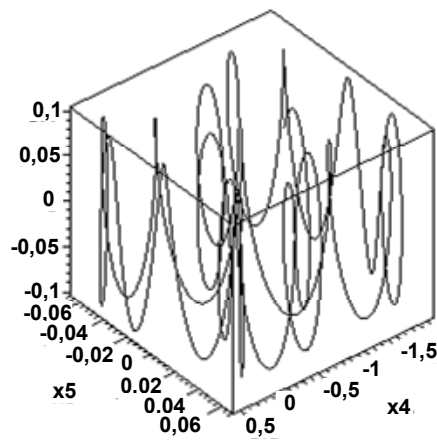


Рис. 6. Фазовий портрет залежностей кутів крену  $x_4$ , тангажа  $x_5$  і ширяння  $x_6$

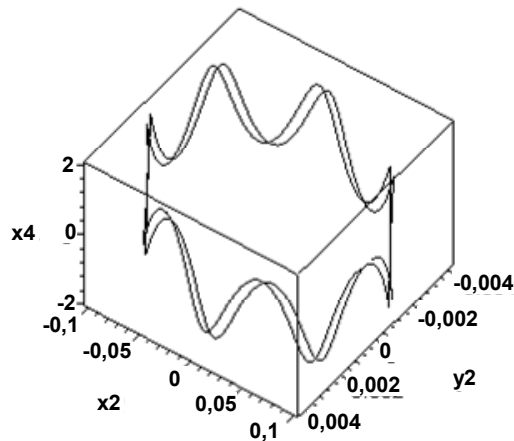


Рис. 7. Фазовий портрет бокового зміщення  $x_2$ , бокової швидкості  $\dot{x}_2$  і кута крену  $x_4$

Аналогічно можна побудувати графіки розв'язків даної системи для інших початкових даних і параметрів системи (6). Зображені на рис. 3–7 графіки розв'язків системи (6) були побудовані з використанням Maple.

**Висновки.** Побудовано математичну модель руху вагона на магнітному підвісі, яка дозволяє знаходити розв'язки й аналізувати вплив збурень різного типу на поведінку системи.

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М., 1974. 2. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М., 1976. 3. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. – К., 1981. 4. White D.C., Woodson H.H. Electromagnetic Energy Conversion. – N.-Y., 1959.



УДК 519.6

М.М. Москальков, канд. фіз.-мат. наук, доц., Д. Утебаєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.

**FINITE ELEMENT METHOD FOR EQUATION WITH STRONG DISPERSION**

Для рівняння із сильною дисперсією побудовано чисельний метод, що використовує метод скінченних елементів як за просторовими змінними, так і за часом. Досліджено точність методу та наведено результати чисельного експерименту з одновимірною моделлю. Задачі такого типу виникають при описанні руху стратифікованої рідини, що знаходиться в стані спокою або рівномірного обертання [1].

A numerical method is constructed for equation with strong dispersion. The method is based on using of the finite element method both by space variables and by time. Accuracy of the method is studied and the results of numerical experiment on solving of the one-dimensional model are presented. Problems of that type appear at the description of movement of stratified liquid being in the quiescent state or state of steady rotation [1].

1. We consider a problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Lu) &= Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{x \in \Omega, t \in (0, T)\}, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \tag{1}$$

At this time  $L$  – elliptic operator

$$Lu = \sum_{m=1}^p \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right), \quad 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1, \quad x \in \Omega \subset R^p, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$\lambda > 0$  – numeric parameter, characterizing the dispersion.

We enunciate the generalized statement of the problem (1). Let us define the generalized solution of the equation (1) as the function  $u(x, t)$  which by either  $t \in [0, T]$  is contained in  $u(x, t) \in V = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ , is master of derivative  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in W_2^2(\Omega)$  and almost everywhere on  $(0, T)$  is in accord with formula

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \vartheta \right) + \lambda a \left( \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \vartheta \right) + a(u(t), \vartheta) &= (f(t), \vartheta), \quad \forall \vartheta(x) \in V, \\ u(0) &= u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1. \end{aligned} \tag{2}$$

At this time  $a(u(t), \vartheta) = -(Lu, \vartheta) = \sum_{m=1}^p \int_{\Omega} k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} dx$ ;

$(u, \vartheta) = \int_{\Omega} u(x)\vartheta(x)dx$  – scalar product. Among other things  $\|u\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(x)dx}$ ,  $\|u\|_1 = \sqrt{\sum_{m=1}^p \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^2 dx}$  – norm

functions in  $L_2(\Omega)$  and  $W_2^1(\Omega)$ , appropriately.

We detach  $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial t}$ . After that, taking account of compelling formulas

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad a \left( u(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u), \\ a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

from (2) we deduce

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left( f(\eta), \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\eta, \tag{3}$$

where

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\lambda}{2} a \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} a(u, u).$$

Considering with the aid of  $\varepsilon$ -inequality

$$\left( f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \|f(t)\|_0^2,$$

from (3) we have

$$E(t) \leq E(0) + \varepsilon \int_0^t E(\eta) d\eta + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f(\eta)\|_0^2 d\eta$$

or because of Gronuol inequality

$$E(t) \leq \exp(\varepsilon t) \left\{ E(0) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f(\eta)\|_0^2 d\eta \right\}. \tag{4}$$

From (4) we have the assessed value

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_1^2 + \lambda \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_1^2 + \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_0^2 \leq \\ & \leq C \left( \|u_0\|_1^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_1^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_0^2 + \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt \right). \end{aligned}$$

This assessed value evaluates a solution stability of the problem (1) on original data and a right member and, among other factors; from this valuation it should be uniqueness of the problem solution (1). The questions of existence, smoothness and uniqueness of this problem solution see also [1].

2. We digitize a problem on extensive running with the aid of finite element method. Let us assume that  $V_h \subset V$  is a set of elements of a view  $\vartheta_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x)$ . At this time  $\{\varphi_i = \varphi_i(x)\}_{i=1}^N$  a frame from piecewise polynomial functions, being of polynomial of degree  $k$  for every finite element (interval in one-dimensional case, triangle in two-dimensional and etc.).

We assign (2) semidiscrete problem for  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2}, \vartheta_h \right) + \lambda a \left( \frac{d^2 u_h}{dt^2}, \vartheta_h \right) + a(u_h(t), \vartheta_h) = (f(t), \vartheta_h), \quad \forall \vartheta_h \in V_h, \\ & u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \end{aligned} \tag{5}$$

At this time  $u_{0,h} = u_l(0)$  – interpolant of the decision start value  $u_l(0) = P_h u_0(x)$ , a  $P_h$  – projection operator  $P_h : V \rightarrow V_h$  [2].

A problem (5) corresponds differential Cauchy problem by times for approximate answer  $u_h(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_i$ :

$$\begin{aligned} & D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A u_h(t) = f_h(t), \\ & u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(x, 0) = u_{1,h}. \end{aligned} \tag{6}$$

At this time the operators  $D, A$  are in effect from  $V_h$  in  $V_h$ :  $D = M + \lambda G, A = G$ ;  $M = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N$  – mass matrix of subspace coordinate system  $V_h$ ;  $G = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N$  – stiffness matrix, responding to the instruction  $Lu$  in  $V_h$ .

3. We arrive at a valuation of the problem solution accuracy (5). We shall call

$$z_h = u - u_h, e_h = u - u_l, \xi_h = u_l - u_h,$$

Where  $u_l = u_l(x, t)$  – interpolant  $u(x, t)$ . We shall detach in (2)  $\vartheta = \frac{d\xi_h}{dt} = \dot{\xi}_h \in V_h \subset V$  and we shall take from found congruence an equation (5):

$$(\ddot{z}_h, \dot{\xi}_h) + \lambda a(\ddot{z}_h, \dot{\xi}_h) + a(z_h, \dot{\xi}_h) = 0. \tag{7}$$

At this time  $\ddot{z}_h = \frac{d^2 z_h}{dt^2}$ . By virtue of the fact that  $z_h = e_h + \xi_h$ , from (7) we arrive at energetic identical equation:

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = -(\ddot{e}_h, \dot{\xi}_h) - \lambda a(\ddot{e}_h, \dot{\xi}_h) - a(e_h, \dot{\xi}_h),$$

where  $E_h(t) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_h, \dot{\xi}_h) + \frac{\lambda}{2}a(\dot{\xi}_h, \dot{\xi}_h) + \frac{1}{2}a(\xi_h, \xi_h)$ . On integrating the last identical equation, we have

$$E_h(t) = -\int_0^t (\ddot{e}_h, \dot{\xi}_h) dt' - \lambda \int_0^t a(\ddot{e}_h, \dot{\xi}_h) dt' - \int_0^t a(\dot{e}_h, \xi_h) dt',$$

as far as  $\xi_h(0) = u_I(0) - u_h(0) = 0, E_h(0) = 0$ . Applying  $\varepsilon$ -inequality and Gronuol Lemma, we shall arrive at a valuation

$$E_h(t) \leq M \left( E_h(0) + \int_0^t (\|\ddot{e}_h(t')\|_0^2 + \|\ddot{e}_h(t')\|_1^2 + \|e_h(t')\|_1^2) dt' \right). \tag{8}$$

Here continued  $M = M(k_0, k_1, \lambda, T) > 0$ .

For  $u(x, t), \dot{u}(x, t), \ddot{u}(x, t) \in W_2^{k+1}(\Omega) \forall t \in [0, T]$  a valuation points take place [2], [7]:

$$\|e_h\|_1 \leq Ch^k, \|\dot{e}_h\|_1 \leq Ch^k, \|\ddot{e}_h\|_1 \leq Ch^k,$$

If on every finite element an interpolant  $u_I = u_I(x, t)$  is a polynomial of degree  $k$ . Besides  $E_h(0) = 0$ . From these valuations, an energy estimation (8) and triangle inequality  $\|u - u_h\| = \|e_h + \xi_h\| \leq \|e_h\| + \|\xi_h\|$  we deduce a predicating.

**Theorem 1.** Let us assume that  $u(x, t) \in C^2([0, T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ . If a space tapering  $V_h$  onto separate finite element is a polynomial of degree  $k$ , that for the decision of the problem (6) estimated accuracy take place

$$\|u(t) - u_h(t)\|_1 \leq ch^k, \|\dot{u}(t) - \dot{u}_h(t)\|_1 \leq ch^k, \forall t \in [0, T]$$

In reports [3], [4] for a solution of the problem (6) because of finite element method with respect to variable temporary  $t$  it was formed a Vector difference scheme on the follow view

$$\begin{aligned} \left( D - \frac{1}{12} \tau^2 A \right) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A \frac{y^{n+1} + y^n}{2} &= \varphi_1, \\ \left( D - \alpha \tau^2 A \right) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} - \left( D - \beta \tau^2 A \right) \frac{y^{n+1} + y^n}{2} &= \varphi_2, \\ y(0) = u_{h,0}, \dot{y}(0) &= u_{h,1}, \end{aligned} \tag{9}$$

where  $\varphi_1 = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) d\xi, \varphi_2 = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) [s_1 \vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2 \vartheta_2^{(3)}(\xi)] d\xi, s_1 = 180\beta - 40\alpha, s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$

$$\vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau \left( \xi - \frac{1}{2} \right), \vartheta_2^{(3)}(\xi) = \tau \left( \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi \right).$$

At this time  $t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau = T / N_0$ . In the same place the following theorem about scheme convergence is proved (9).

**Theorem 2.** If network parameters (9) shall meet the conditions

$$\alpha - \beta = \frac{1}{12}, \alpha, \beta \geq 0, D - \delta \tau^2 A \geq \varepsilon D, \varepsilon > 0, \delta = \max\{\alpha, \beta, \frac{1}{12}\},$$

that a scheme solution (9) converge to a solution of the problem (6)  $u_h(t) \in C^6[0, T]$  with fourth ordering at this rate, that a valuations for its decision are correct:

$$\|y^n - u_h(t_n)\|_1 \leq M\tau^4, \|\dot{y}^n - \dot{u}_h(t_n)\|_1 \leq M\tau^4.$$

With respect to assessed values

$$\dot{y}^{n+1} = \frac{dy}{dt}(t_{n+1}), \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n), y^{n+1} = y(t_{n+1}), y^n = y(t_n)$$

It is possible to reestablish an approximating to  $u_h(t)$  at any time  $t \in [t_n, t_{n+1}], n = 0, 1, \dots$  from the formula:

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \tag{10}$$

where  $\varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2), \xi = \frac{t - t_n}{\tau}$ . It is

not too difficult to see that the result of theorem is true not only for valuations  $y^n, \dot{y}^n$  of approximate answer  $y(t)$ , but and for any instant of time

$$\|y(t) - u_h(t)\|_1 \leq M\tau^4, \|\dot{y}(t) - \dot{u}_h(t)\|_0 \leq M\tau^4, t \in [t_n, t_{n+1}], n = 0, 1, 2, \dots$$

Because of triangle inequality and theorems 1, 2 we obtain the following result.

**Theorem 3.** If all theorem hypotheses 1 и 2 were made, that for a decision of  $y(x,t) = \sum_{i=1}^N y(t)\varphi_i(x) \in V_h$  the schemes

(9), (10) of approximating solution of the problem (1)  $u(x,t) \in C^6([0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega))$  estimated accuracies take place:  $\|u(x,t) - y(x,t)\|_1 \leq M(\tau^4 + h^k)$ ,  $\|\dot{u}(x,t) - \dot{y}(x,t)\|_1 \leq M(\tau^4 + h^k)$ ,  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , if space tapering  $V_h$  onto separate finite element is a polynomial of degree  $k$ .

If the use of finite element method, per exemplum, as far as space variable with the aid of the polynomial of the third degree, the order of accuracy with respect to step  $h$  – third.

4. For the testing of inferred scheme diagram decision (1), we shall deal with the problem for one-dimensional case:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (x,t) \in Q_T = \{x \in (0,1), t \in (0,T)\},$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Accurate development of this problem, deduced by the separation of variables method, is given by:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{k\pi} \cos\left[\frac{k\pi t}{\sqrt{1+\lambda(k\pi)^2}}\right] \sin(k\pi x) \right\} + 1 - x.$$

By comparison with approximate answer as an alternative perpetuity in series it was taking a sufficiently large number (M=200).

It was checking two numerical schemes:

Explicit scheme of approximation of second order

$$y_{\bar{t}\bar{t}} - \lambda y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}} = 0,$$

with corresponding initial and boundary conditions [6];

Scheme (9), offered in this report, with parametric variables  $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{24}$  and with Hermite cubic finite elements with respect to space variable

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} [a_j(t)\varphi_j(x) + b_j(t)\psi_j(x)] \in V_h,$$

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \quad \psi_j(x) = \psi\left(\frac{x-x_j}{h}\right),$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 - 3\xi^2 + 2|\xi|\xi^2, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases}, \quad \psi(\xi) = \begin{cases} (1 - |\xi|)^2 \xi, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases}, \quad \xi = \frac{x-x_j}{h}.$$

We see that fundamental function for space variable and temporary variable are common. It is possible for space variable to take and an other frame such as piecewise-cubic functional relations, based on the tapping of cubic B-splines [2].

In the Table 1 it is assumed the results of the estimation evaluation of integrated square error of the both schemes in the instant of time  $t = 0.5$

$$\|z(x,t)\|_0 = \|u(x,t) - y(x,t)\|_0 = \sqrt{\int_0^1 [u(x,t) - y(x,t)]^2 dx}$$

for variables  $N = 32, 64, 128$ . Besides that, it is assumed the results of the order of accuracy estimation evaluation on the

step  $h$ :  $m = \log_2 \frac{\|z_h\|_0}{\|z_{h/2}\|_0}$ , where  $z_h = z(x,t)$  – error, corresponding to the step of frame  $h$ .

**Table. 1**

	Scheme 1			Scheme 2			
	N	32	64	128	32	64	128
error		0.010128	0.005350	0.001205	0.004934	0.002118	0.000534
order		0.920661	2.15052		1.22022	1.98817	

Properly from the Table that the error of scheme 1 dominate the error of scheme 2 more than two fold. We see also that because of rapid change decision, the both schemes on a coarse grid ( $N = 32$ ) didn't represent of their closeness potential. It follows from the fact that the order of schemes closeness on the more extensive grid are superior, than on the coarse grid.

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М., 1990. 2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М., 1981. 3. Москальков М.Н. Схемы метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Дифф. уравнения. – Минск, 1980. – Т. 16. – № 7. – С. 1283–1292. 4. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование разностных схем методом конечных элементов для нестационарных уравнений второго порядка // Праці міжнарод. конф. "Питання оптимізації обчислень". – К., 2005. – С. 156–157. 5. Москальков М.Н. Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 1975. – Т. 15. – № 1. – С. 254–260. 6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М., 1977. 7. Стренин Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М., 1977.

Надійшла до редколегії 11.02.2007.

УДК 517.929.4

I.B. Коварж, асп., А.Ф. Иванов, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф.

### ПОСТАНОВКА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ І ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ЧИСТИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

*Розглянуто постановку крайової задачі для рівняння з розподіленими параметрами параболічного типу з чистим запізненням.*

*The boundary problem setting is considered for parabolic partial equations with pure delay. It is development of idea of obtaining solutions of partial equations with delay.*

У [1-4] розглянуто лінійне рівняння теплопровідності зі сталим чистим запізненням (тобто його права частина складається лише з членів, залежних від параметра величини запізнення)

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t - \tau) + f(x, t), \quad \tau > 0, \tag{1}$$

визначене при  $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ . При дослідженні його властивостей виявилось, що для рівнянь у частинних похідних із чистим запізненням початкові умови повністю визначають динаміку процесу. Тобто для такого рівняння коректною є не крайова задача, а задача типу Коші. І для знаходження розв'язку  $u(x, t)$  рівняння (1) треба задавати лише початкову умову, яка має вигляд

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0. \tag{2}$$

Тобто функції, що задають крайові умови  $\mu_1(t), \mu_2(t)$ , є деякими функціоналами від функції, яка визначає початкову умову  $\varphi(x, t), 0 \leq x \leq l$

$$\mu_1(t) = \Psi_1[\varphi(x, t)], \quad \mu_2(t) = \Psi_2[\varphi(x, t)].$$

У той же час значна кількість рівнянь із розподіленими параметрами розв'язуються за допомогою методу розділення змінних, який зводить рівняння в частинних похідних до зліченної кількості звичайних диференціальних рівнянь. При цьому рівняння мають нульові крайові умови. Тому для рівняння (1) зручно розглядати крайову задачу з крайовими умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq -\tau, \tag{3}$$

у якій функції  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  не довільні, а фіксовані й будуть визначені далі. Зокрема, передбачається узгодження умов

$$\varphi(0, t) = \mu_1(t), \quad \varphi(l, t) = \mu_2(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \tag{3'}$$

Для знаходження вигляду функціоналів  $\Psi_1[\varphi(x, t)], \Psi_2[\varphi(x, t)]$  використаємо метод кроків.

Ці функціонали можна зобразити рекурсивно. Якщо на проміжку  $(k-1)\tau \leq t < k\tau, k = 1, 2, 3, \dots$  розв'язок неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$u = u_k(x, t), \quad (k-1)\tau \leq t < k\tau, \quad 0 \leq x \leq l,$$

то на проміжку  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  отримаємо

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, k\tau) + \int_{k\tau}^t \left\{ a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, s - \tau) + f(x, s) \right\} ds. \tag{4}$$

Звідси на проміжку  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  функції  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  мають вигляд

$$\mu_1(t) = u_k(0, k\tau) + \int_{k\tau}^t \left\{ a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(0, s - \tau) + f(0, s) \right\} ds, \tag{5}$$

$$\mu_1(t) = u_k(l, k\tau) + \int_{k\tau}^t \left\{ a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(l, s - \tau) + f(l, s) \right\} ds. \quad (5)$$

Розпишемо кілька кроків.

Розглянемо перший проміжок  $T_1$ :  $0 \leq t < \tau$ . Позначимо  $\varphi(x, t) = u_0(x, t)$ . Використовуючи залежність (4), отримаємо розв'язок

$$u_1(x, t) = u_0(x, 0) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 + \int_0^t f(x, s_1) ds_1, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (6)$$

На наступному проміжку  $T_2$ :  $\tau \leq t < 2\tau$ , використовуючи залежність (4), запишемо розв'язок у вигляді

$$u_2(x, t) = u_1(x, 0) + a^2 \int_{\tau}^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, s_2 - \tau) ds_2 + \int_{\tau}^t f(x, s_2) ds_2, \quad \tau \leq t < 2\tau. \quad (7)$$

Підставивши замість  $u_1(x, t)$ ,  $0 \leq t < \tau$  його значення із (6), отримаємо

$$u_2(x, t) = \left\{ u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 + \int_0^{\tau} f(x, s_1) ds_1 \right\} +$$

$$+ a^2 \int_{\tau}^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 + \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s_1) ds_1 \right\} ds_2 + \int_{\tau}^t f(x, s_2) ds_2$$

або у вигляді

$$u_2(x, t) = \left\{ u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 u_0(x, s_1 - \tau)}{\partial x^2} ds_1 \right\} + a^2 (t - \tau) \frac{\partial^2 u_0(x, 0)}{\partial x^2} +$$

$$+ a^4 \int_{\tau}^t \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 ds_2 + a^2 \int_{\tau}^t \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s_1) ds_1 ds_2 + \int_0^t f(x, s) ds \quad (8)$$

На третьому проміжку  $T_3$ :  $2\tau \leq t < 3\tau$  розв'язок записується у вигляді

$$u_3(x, t) = u_2(x, 2\tau) + a^2 \int_{2\tau}^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, s_3 - \tau) ds_3 + \int_{2\tau}^t f(x, s_3) ds_3, \quad 2\tau \leq t < 3\tau. \quad (9)$$

Підставивши замість  $u_2(x, t)$ ,  $\tau \leq t < 2\tau$  його значення із (7), матимемо

$$u_3(x, t) = \left\{ u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 u_0(x, s_1 - \tau)}{\partial x^2} ds_1 \right\} + a^2 \tau \frac{\partial^2 u_0(x, 0)}{\partial x^2} +$$

$$+ a^4 \int_{\tau}^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 ds_2 + a^2 \int_{\tau}^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s_1) ds_1 ds_2 + \int_0^{2\tau} f(x, s) ds +$$

$$+ a^2 \int_{2\tau}^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 \right\} + a^2 (s_3 - 2\tau) \frac{\partial^4 u_0(x, 0)}{\partial x^4} + \int_{2\tau}^t f(x, s_3) ds_3 +$$

$$+ a^4 \int_{\tau}^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 ds_2 + \int_0^{s_3 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) ds + a^2 \int_{\tau}^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, s_1) ds_1 ds_2 \left\} ds_3$$

або у вигляді

$$u_3(x, t) = \left\{ u_0(x, 0) + a^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 u_0(x, s_1 - \tau)}{\partial x^2} ds_1 + a^4 \int_{\tau}^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 ds_2 \right\} +$$

$$+ \left\{ a^2 \frac{(t - \tau)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, 0) + a^4 \frac{(t - 2\tau)^2}{2!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, 0) + a^4 (t - 2\tau) \int_0^{\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 \right\} +$$

$$+ a^6 \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x, s_1 - \tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^t f(x, s) ds +$$

$$+ a^2 \int_{\tau}^t \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s_1) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, s_1) ds_1 ds_2 ds_3$$

На четвертому проміжку  $T_4$ :  $3\tau \leq t < 4\tau$  розв'язок записується у вигляді

$$u_4(x,t) = u_3(x,3\tau) + a^2 \int_{3\tau}^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_3(x,s_4 - \tau) ds_4 + \int_{3\tau}^t f(x,s_4) ds_4, \quad 3\tau \leq t < 4\tau. \tag{10}$$

Підставивши замість  $u_3(x,t)$ ,  $2\tau \leq t < 3\tau$  його значення з (9), отримаємо

$$\begin{aligned} u_4(x,t) = & \left\{ u_0(x,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^2} ds_1 + a^4 \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 \right\} + \\ & + \left\{ a^2 \frac{2\tau}{1!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,0) + a^4 \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,0) + a^4 \int_0^\tau \frac{\partial^4 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^4} ds_1 \right\} + \\ & + a^6 \int_{2\tau}^{3\tau} \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^{3\tau} f(x,s) ds + \\ & + a^2 \int_\tau^{3\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s_1) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^{3\tau} \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ & + a^2 \int_{3\tau}^t \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^4 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^4} ds_1 + a^4 \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 \right] + \\ & + \left\{ a^2 \frac{(s_3 - \tau)}{1!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,0) + a^4 \frac{(s_3 - 2\tau)^2}{2!} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,0) + a^4 (s_3 - 2\tau) \int_0^\tau \frac{\partial^6 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^6} ds_1 \right\} + \\ & + a^6 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^8}{\partial x^8} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s) ds + \\ & + a^2 \int_\tau^{s_4} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,s_2) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^{s_4} \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 \Big] ds_4 + \int_{3\tau}^t f(x,s_4) ds_4 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} u_4(x,t) = & \left\{ u_0(x,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^2} ds_1 + a^4 \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 \right\} + \\ & + \left\{ a^2 \frac{2\tau}{1!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,0) + a^4 \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,0) + a^4 \int_0^\tau \frac{\partial^4 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^4} ds_1 \right\} + \\ & + a^6 \int_{2\tau}^{3\tau} \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^{3\tau} f(x,s) ds + \\ & + a^2 \int_\tau^{3\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s_1) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^{3\tau} \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ & + a^2 (t - 3\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,0) + a^4 (t - 3\tau) \int_0^\tau \frac{\partial^4 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^4} ds_1 + a^6 (t - 3\tau) \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 + \\ & + a^4 \left[ \frac{(t - \tau)^2 - (2\tau)^2}{2!} \right] \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,0) + a^6 \left[ \frac{(t - 2\tau)^3 - \tau^3}{3!} \right] \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,0) + a^6 \frac{(t - 2\tau)^2}{2!} \int_0^\tau \frac{\partial^6 u_0(x,s_1 - \tau)}{\partial x^6} ds_1 + \\ & + a^6 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_2 - \tau} \int_0^{s_1 - \tau} \frac{\partial^8}{\partial x^8} u_0(x,s_1 - \tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s) ds + \\ & + a^2 \int_\tau^{s_2 - \tau} \int_0^{s_1 - \tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,s_1) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_3 - \tau} \int_0^{s_2 - \tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 \Big] ds_4 + \int_{3\tau}^t f(x,s_4) ds_4 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
 u_4(x,t) = & \left\{ u_0(x,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^2} ds_1 + a^4 \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^4 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^4} ds_1 ds_2 \right\} + \\
 & + a^6 \int_{2\tau}^{3\tau} \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^6 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^6} ds_1 ds_2 ds_3 + \\
 & + a^2 (t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,0) + a^4 \left[ \frac{(t-\tau)^2 - 3\tau^2}{2!} \right] \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0(x,0) + a^6 \left[ \frac{(t-2\tau)^3 - \tau^3}{3!} \right] \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0(x,0) + \\
 & + a^4 (t-2\tau) \int_0^\tau \frac{\partial^4 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^4} ds_1 + a^6 \frac{(t-2\tau)^2}{2!} \int_0^\tau \frac{\partial^6 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^6} ds_1 + \\
 & + a^6 (t-3\tau) \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^6 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^6} ds_1 ds_2 + a^6 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^8 u_0(x,s_1-\tau)}{\partial x^8} ds_1 ds_2 ds_3 + \\
 & + \int_0^t f(x,s) ds + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s) ds + a^2 \int_\tau^{3\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,s_1) ds_1 ds_2 + \\
 & + a^4 \int_{3\tau}^t \int_{2\tau}^{s_4} \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 + a^4 \int_{3\tau}^t \int_{2\tau}^{s_4} \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(x,s_1) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4
 \end{aligned}$$

На наступних кроках ітераційна послідовність проводиться аналогічно.

Нехай, наприклад,  $0 \leq t \leq 3\tau$ . Тоді крайова умова  $\mu_1(t)$ , тобто функціонал  $\mu_1(t) = \Psi_1[\varphi(x,t)]$ , має вигляд

$$\mu_1(t) = \begin{cases} \varphi(0,t), & -\tau \leq t < 0, \\ \varphi(0,0) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(0,s_1-\tau) ds_1 + \int_0^t f(0,s_1) ds_1, & 0 \leq t < \tau, \\ \left\{ \varphi(0,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u_0(0,s_1-\tau)}{\partial x^2} ds_1 \right\} + a^2 (t-\tau) \frac{\partial^2 \varphi(0,0)}{\partial x^2} + \\ \quad + a^4 \int_\tau^{t s_2-\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi(0,s_1-\tau) ds_1 ds_2 + a^2 \int_\tau^t \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,s_1) ds_1 ds_2 + \int_0^t f(0,s) ds, & \tau \leq t < 2\tau, \\ \left\{ \varphi(0,0) + a^2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 \varphi(0,s_1-\tau)}{\partial x^2} ds_1 + a^4 \int_\tau^{2\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi(0,s_1-\tau) ds_1 ds_2 \right\} + & 2\tau \leq t < 3\tau, \\ \quad + \left\{ a^2 \frac{(t-\tau)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(0,0) + a^4 \frac{(t-2\tau)^2}{2!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi(0,0) + a^4 (t-2\tau) \int_0^\tau \frac{\partial^4 \varphi(0,s_1-\tau)}{\partial x^4} ds_1 \right\} + \\ \quad + a^6 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \varphi(0,s_1-\tau) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^t f(0,s) ds + \\ \quad + a^2 \int_\tau^{t s_2-\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,s_1) ds_1 ds_2 + a^4 \int_{2\tau}^t \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(0,s_1) ds_1 ds_2 ds_3, \end{cases}$$

З вищенаведеного й результатів з [1-4] має місце така теорема.

**Теорема.** Нехай для функцій

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \left[ (-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \\
 F_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[ (-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

на проміжку  $0 \leq t \leq t^*$ ,  $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$  виконуються умови

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} \max_{-\tau \leq t \leq t^* - \tau} |F_n(t)| = 0, \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2(k+1)} \max_{-\tau \leq t \leq 0} |\Phi_n(t)| = 0. \tag{11}$$



Тоді при  $0 \leq t \leq t^*$  розв'язок задачі (1)-(3') має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp_{\tau} \left\{ - \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau} \left\{ - \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \Phi_n'(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \quad (12)$$

Функція  $u(x, t)$ , що зображується рядом (11), має неперервну похідну за  $t$ , неперервну похідну другого порядку за  $x$  і буде розв'язком рівняння (1), що задовольняє умови (2), (3). При цьому можливе почленне диференціювання ряду за  $x$  (два рази) і за  $t$  (один раз), і отримані ряди збігаються абсолютно та рівномірно при  $0 \leq x \leq l$ ,  $-\tau \leq t$ .

Аналогічні результати можна отримати для рівняння з чистим запізненням

$$u_t(x, t) = a_1^2 u_{xx}(x, t - \tau) + c_2 u(x, t - \tau) + f(x, t).$$

1. Коварж І.В. Одновимірне рівняння теплопровідності із запізненням // Мат. X-ї Міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. – К., 13-15 травня 2004 р. – С. 132. 2. Коварж І.В. Про розв'язок рівняння теплопровідності із запізненням за часом // Вісн. Київ. ун-ту. – 2005. – № 6. – С. 30-35. 3. Хусайнов Д.Я., Коварж І.В. Про одне рівняння теплопровідності з післядією // 9-th international modeling school of AMSE-UAPL. (Alushta, Crimea, Ukraine. September, 12-17, 2004.). – С. 39-44. 4. Хусайнов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 2. – С. 362-368.

УДК 681.3 513

УДК 004.6(075.8)

В.М. Терещенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., Л.О. Анікєєва, асп.

## ГЕОМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД У РОЗРОБЦІ ПОСТРЕЛЯЦІЙНИХ БАЗ ДАНИХ

*Запропоновано ідею зведення задач реляційної моделі баз даних до задач обчислювальної геометрії для розробки ефективних алгоритмів пошуку інформації в базах даних. Докладно розглянуто операції реляційної алгебри, яка є основою для створення реляційних мов, і для кожної з них наведено адекватну геометричну інтерпретацію.*

*In this article we propose an idea of transformation relational database problems to computational geometry problems for development more efficient algorithms of information search in databases. We consider in detail relational algebra operations – the base of relational language foundation – and give adequate geometrical interpretation for each of them.*

**Вступ.** Протягом останнього десятиріччя реляційні СУБД отримали широке розповсюдження у найрізноманітніших застосуваннях, таких, як облік складських запасів, банківська справа, телекомунікації, замовлення авіаквитків і т. п. Однак обмежені можливості реляційних СУБД з погляду моделювання об'єктів реального світу роблять їх непридатними для складних спеціалізованих застосувань баз даних, а саме [9]:

- *систем автоматизованого проектування.* Бази даних систем подібного типу можуть містити дані, які належать до проектів механічних і електротехнічних конструкцій: будинків, літаків, інтегральних схем тощо. Очевидно, що такі проекти можуть бути дуже великими, часто з багатьма відносно незалежними підпорядкованими проектами;

- *систем автоматизованого виробництва.* У базах даних систем автоматизованого виробництва містяться дані, аналогічні даним систем автоматизованого проектування, а також дані про дискретні й безперервні продукти. Зокрема, у хімічній промисловості широко використовуються застосування, які відслідковують інформацію про стан системи: температура в реакторі, швидкість потоків, рівень виходу продуктів реакції. Також існують застосування, які контролюють різні фізичні процеси. Ці застосування мають працювати в режимі реального часу й бути здатними ефективно керувати процесами для підтримки оптимальної продуктивності у межах заданих допусків. Для реагування на різні умови експлуатації в цих застосуваннях використовується набір стандартних алгоритмів і правил. Операції час від часу можуть змінювати правила з метою оптимізації продуктивності, приймаючи рішення на основі комплексних історичних відомостей, які мають зберігатися в подібній базі. У даному випадку обчислювальні системи мають зберігати величезний обсяг даних з ієрархічною природою, а також складні зв'язки між даними;

- *систем автоматизованої розробки програмного забезпечення,* у базах даних яких зберігаються дані, що належать до різних етапів життєвого циклу розробки програмного забезпечення. Подібні проекти можуть бути дуже великими, і для їхньої реалізації зазвичай застосовується колективна розробка;

- *геоінформаційних систем.* У базах даних геоінформаційних систем містяться різноманітні просторові й часові дані, які використовуються в землевпорядженні, підводних дослідженнях тощо. Слід зазначити, що більшість інформації у цих системах отримано внаслідок геологічних досліджень на основі аерофотозйомки, тому вони можуть мати дуже великий обсяг. При цьому процедури пошуку можуть полягати в знаходженні окремих ознак, для чого необхідне використання складних методів розпізнавання образів;

- *медицини і наукових застосувань,* у яких можуть зберігатися комплексні дані, що зображають такі складні системи, як молекулярні моделі для синтезованих хімічних компонентів і генетичних матеріалів, бази даних білків (GenBank [8]);

- *офісних інформаційних систем, цифрової видавничої справи* тощо, де кількість доступної в інтерактивному режимі інформації настільки велика, що робить їх найбільшими базами даних. Крім того, недавній прогрес зв'язку й мережних технологій, таких як електронна пошта, всесвітня павутина та ін., зробили простим нагромадження великих масивів неструктурованих і напівструктурованих текстових даних [1]. Такі текстові бази даних можуть бути наборами web-сторінок або SGML документів (OPENTEXT Index [2]), online-словників та інших текстових даних у файлах.

У зв'язку з цим ведуться розробки ефективних і адекватних методів пошуку, придатних для великих наборів неструктурованих текстових даних [3, 10].

Одним з найкращих способів отримання корисної інформації і закономірностей з величезної кількості даних (великих баз даних) є технологія розробки даних (data mining). Дана галузь дослідження з'явилася на початку 90-х рр. минулого століття й суттєво розроблена як у теорії, так і у практиці [2, 7, 8]. Однак слід зазначити, що існуючі технології розробки даних мають справу з добре структурованими даними, такими, як реляційні бази з булевими або числовими атрибутами [2, 7, 8], і тому прямо не застосовні до неструктурованих наборів даних.

Таким чином, великий інтерес викликає проблема знаходження ефективних алгоритмів пошуку корисної інформації у великих неструктурованих базах даних, відмінних від існуючих методів доступу до інформації.

У зв'язку з цим необхідно згадати роботу [4], присвячену проблемі вибірки даних (data mining problem) у великих наборах неструктурованих текстів. У даній роботі зображено алгоритм, який розв'язує задачу оптимізації довіри зразка за час  $O(\max\{k, m\}n^2)$  з використанням пам'яті  $O(kn)$ , де  $m$  і  $n$  – відповідно кількість і загальна довжина вихідних даних, що класифікуються,  $k$  – деяка константа. Запропонований алгоритм ґрунтується на одному з методів обчислювальної геометрії – *алгоритмі регіонального пошуку*, що значною мірою прискорює обчислення. Крім того, для більшості випадкових текстів, таких, як послідовності ДНК, алгоритм може бути перетворений так, що час роботи встановить  $O(kn \log(n)^3)$  для таких випадкових текстів.

Також слід відзначити роботу [5], у якій описується підхід щодо дослідження складності алгоритмів пошуку, заснований на побудові математичної моделі алгоритмів пошуку, а також наводяться "надшвидкі" алгоритми пошуку в геометричних базах даних.

Природно постає питання про можливість зведення взагалі задач баз даних до задач обчислювальної геометрії, урахувавши високу ефективність її алгоритмів.

Зведення задач

**Означення звідності.** Нехай є дві задачі:  $A$  і  $B$ . Метод зведення однієї задачі до іншої такий: [12]:

Вхідні дані до задачі  $A$  перетворюються у відповідні вхідні дані для задачі  $B$ .

Розв'язується задача  $B$ .

Результат розв'язку задачі  $B$  перетворюється у правильний розв'язок задачі  $A$ .

Якщо кроки 1 і 3 можна виконати за час  $O(\tau(N))$ , де  $N$  – розмірність задачі  $A$ , то кажуть, що задача  $A$   $\tau(N)$ -звідна до задачі  $B$ . Потужність методу зведення характеризують два твердження про нижні й верхні оцінки методом зведення.

**Твердження 1.** Якщо задача  $A$  потребує  $T(N)$  одиниць часу і  $\tau(N)$  – звідна до задачі  $B$ , то задачу  $B$  можна розв'язати за час, не менший  $T(N) - O(\tau(N))$ .

**Твердження 2.** Якщо задача  $B$  потребує  $T(N)$  одиниць часу, а задача  $A$   $\tau(N)$ -звідна до задачі  $B$ , то задачу  $A$  можна розв'язати за час, який не перевищує  $T(N) + O(\tau(N))$ .

Покажемо нижче, що задачі пошуку в *реляційній моделі* баз даних зводяться до задач геометричного пошуку в обчислювальній геометрії. Має місце теорема.

**Теорема.** Задачі пошуку в *реляційній* моделі баз даних зводяться до задач геометричного пошуку в обчислювальній геометрії за час  $O(N)$ .

**Доведення.** Для доведення теореми необхідно довести виконання трьох умов означення відношення звідності. Доведення першого й третього пунктів відношення умови звідності ґрунтується на двох лемах.

**Лема 1.** Множина  $S$  із  $N$  вхідних даних у задачах пошуку реляційної моделі баз даних зводиться до відповідної множини  $N$  вхідних даних для задач геометричного пошуку обчислювальної геометрії за час  $O(N)$ .

**Лема 2.** Розв'язок задач пошуку розмірністю  $N$  в обчислювальній геометрії зводиться до правильного розв'язку задач пошуку реляційної моделі баз даних за час  $O(N)$ .

Щоб довести леми 1 і 2, необхідно формалізувати множини вхідних даних задачі пошуку реляційної моделі баз даних у термінах і поняттях задачі геометричного пошуку, і навпаки, результати розв'язання задачі геометричного пошуку прочитати у термінах баз даних.

Реляційна модель базується на математичному понятті відношення [2], що використовується для збереження інформації про об'єкти, які зображені в базі даних. Фізичним зображенням відношення є таблиця, яка складається зі стовпців і рядків. Основними компонентами реляційної моделі є атрибути, домени, кортежі, які є вхідними даними для задач у базах даних.

Зведемо вхідні дані задач реляційних баз даних до вхідних даних задач обчислювальної геометрії.

Як відомо, об'єкти, які розглядаються в обчислювальній геометрії, зазвичай задаються множинами точок в евклидовому просторі  $E^n$ . Передбачається, що задано ортонормовану декартову систему координат, у якій кожна точка зображена набором (вектором) декартових координат. Очевидно, що геометричні об'єкти не обов'язково мають складатися зі скінченних множин точок, проте повинні мати скінченний опис. Отже, до розгляду необхідно ввести, окрім множини точок, і такі поняття, як прямі, відрізки, площини і т. п.

Поставимо у відповідність кожному кортежу відношення  $R$  реляційної бази даних деяку точку (або  $n$ -плекс) геометричного простору  $E^n$ , а кожному атрибуту – деяку координатну вісь, область значень на якій визначається доменом, над яким визначено даний атрибут так, що значення кожного елемента кортежу відповідає значенню деякої координати відповідної точки простору. Очевидно, що дана відповідність є взаємно однозначною. Крім того,

кожне  $d$ -арне відношення  $R$  реляційної бази даних однозначно визначає деякий підпростір  $E_R$  розмірністю  $d$  евклідового простору  $E^n$  ( $d \leq n$ ).

Отже, вхідні дані до задачі реляційної моделі баз даних зводяться до відповідних вхідних даних для задачі обчислювальної геометрії за час  $O(N)$ , а отриманий розв'язок задачі обчислювальної геометрії зводиться до правильного розв'язку задачі реляційної моделі баз даних за час  $O(N)$ . Таким чином, леми 1 і 2 доведено.

Виконання умови 2 означення відношення звідності впливає з існування відповідності між пошуковими запитами в реляційній базі даних і геометричним пошуком. Далі на прикладах основних пошукових запитів мовою реляційної алгебри продемонстровано їх геометричну реалізацію. Тим самим доводиться виконання умови 2, а отже, і справедливність теореми.

*Реляційна алгебра*

Перейдемо до розгляду допустимих операцій з даними: операцій зміни структури бази даних, включаючи операції оновлення й витягу даних. Як відомо, для керування відношеннями в реляційних СУБД використовуються кілька мов. Розглянемо мову реляційної алгебри, запропоновану Коддом (1971) як основу для створення реляційних мов.

Як відомо, існує кілька варіантів вибору операцій, які включаються до реляційної алгебри. Основними операціями реляційної алгебри є вибірка, проекція, декартовий добуток, об'єднання й різниця. За допомогою цих операцій можна отримати додаткові операції, а саме: з'єднання, перетин, ділення.

Детально вивчимо перелічені вище операції і для кожної спробуємо знайти адекватну геометричну інтерпретацію.

**1. Вибірка** ( $S = \sigma_{\text{предикат}}(R)$ ). Операція вибірки – унарна операція, результатом якої є нове відношення  $S$ , що містить тільки ті кортежі вихідного відношення  $R$ , які задовольняють задану умову (предикат).

Поставимо у відповідність відношенню  $R$  реляційної бази даних підпростір  $E_R$  простору  $E^n$ . Як відзначалося вище, степінь  $d$  відношення  $R$  визначає розмірність відповідного підпростору  $E_R$  (рис. 1).

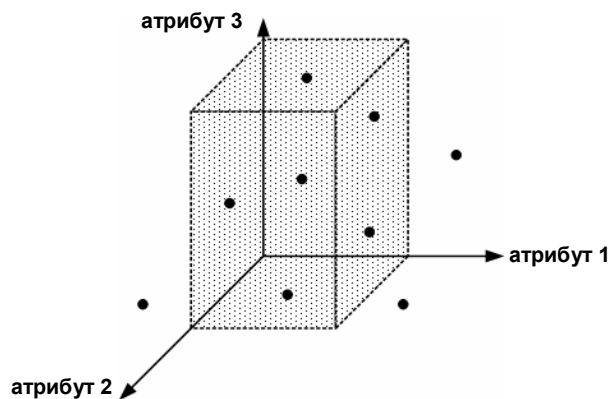


Рис. 1

Предикат в операції вибірки визначає деяку область (площину розмірністю  $k < d$ ). Нас цікавлять тільки ті точки підпростору  $E_R$ , які належать заданій області. Таким чином, предикат задає *регіон пошуку* в підпросторі  $E_R$ , а результатом операції вибірки при геометричній інтерпретації є звіт про множину точок підпростору  $E_R$ , які містяться в запитному регіоні. Отже, операції вибірки відповідає задача регіонального пошуку в обчислювальній геометрії, для розв'язання якої існує кілька швидких алгоритмів, з яких можна, наприклад, скористатися алгоритмом, заснованим на методі дерева регіонів і детально описаним у роботі [12]. Алгоритм використовує структуру даних, яка називається деревом регіонів, і витрачає  $O(\log^{d-1} N)$  часу на пошук,  $O(N \log^{d-1} N)$  пам'яті,  $O(N \log^{d-1} N)$  операцій передоброби, де  $N$  – число точок, а  $d$  ( $d \geq 2$ ) – розмірність простору.

Для ілюстрації результатів виконання операцій реляційної алгебри скористаємося такими відношеннями:

ПОСТАЧАЛЬНИК (КП, прізвище, місто, статус)

ЗАМОВНИК (КЗ, прізвище, місто)

ДЕТАЛЬ (КД, назва, вага)

ЗГД ({КЗ, КП, КД}, кількість, ціна)

Відомості, що містяться в цих відношеннях, наведено в табл. 1.

Розглянемо приклад.

**Запит.** Створити список усіх деталей, вага яких не менша за 0.2 кг і не більша за 0.45 кг.

Даний запит можна подати так:  $\sigma_{0.2 < \text{вага} < 0.45}(\text{Деталь})$ . Вихідним відношенням є відношення *Деталь*, а предикатом – вираз  $0.2 < \text{вага} < 0.45$ . Операція вибірки визначає нове відношення, яке містить тільки ті кортежі відношення *Деталь*, у яких значення атрибута *вага* лежить у межах від 0.2 кг до 0.45 кг. Результат виконання цієї операції показано у табл. 2.

Таблиця 1

Постачальник			
КП	Прізвище	Місто	Статус
1	Іванов	Київ	30
2	Сидоров	Київ	20
3	Рилов	Львів	10
4	Биков	Чернігів	20
5	Акіпов	Київ	30
6	Сомов	Обухів	15

Замовник		
КЗ	Прізвище	Місто
1	Іванов	Київ
2	Петров	Одеса
3	Сидоров	Київ
4	Дуров	Полтава
5	Буйнов	Рівне

Деталь		
КД	Назва	Вага
1	Гайка	0.1
2	Болт	0.25
3	Гвинт	0.4
4	Штепсель	0.5

ЗПД			
КЗ	КП	КД	...
1	2	1	...
2	3	1	...
3	1	2	...
4	6	2	...
5	5	1	...

Таблиця 2

КД	Назва	Вага
2	Болт	0.25
3	Гвинт	0.4

У геометричній інтерпретації запит матиме вигляд (рис. 2):

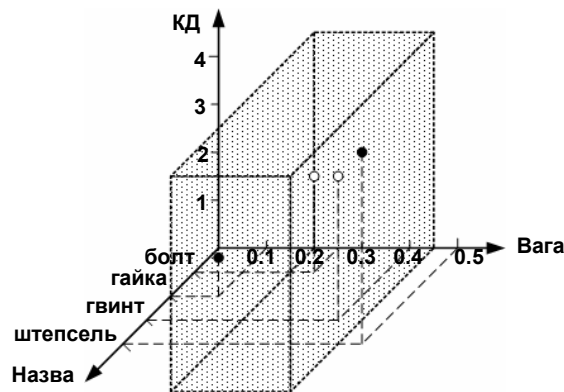


Рис. 2

2. Проекція ( $S = \Pi_{атр.1, \dots, атр.n}(R)$ ). Операція проекції також є унарною і визначає нове відношення  $S$ , що містить вертикальну підмножину відношення  $R$ , яка одержується шляхом вибору значень зазначених атрибутів і виключенням з результату кортежів дублікатів.

Очевидно, що операція проекції відношення  $R$  відповідає проекції множини точок підпростору  $E_R$  на деяку координатну площину  $\pi$ , визначену координатними осями  $l_1, \dots, l_n$ , які відповідають атрибутам  $атр.1, \dots, атр.n$  в операції проекції  $\Pi_{атр.1, \dots, атр.n}(R)$  (рис. 3).

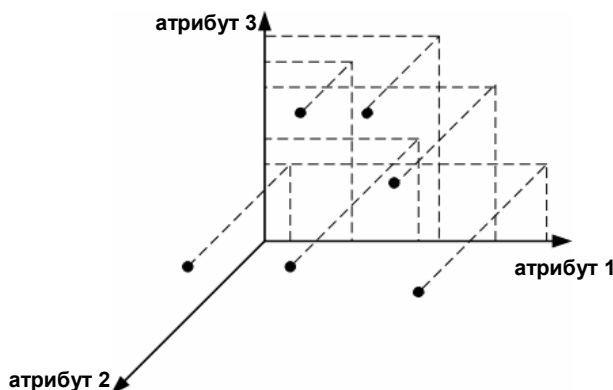


Рис. 3

Нехай є деяка точка  $P = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x_p^{(n)})$  підпростору  $E_R$ ,  $\dim(E_p) = d$ ;  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_d\}$  – множина координатних осей підпростору  $E_R$ . Тоді

$$\Pi_{amp.i}(R) \equiv pr_{l_i}(E_R) = \{P' \mid P' = pr_{l_i}P, \forall P \in E_R\} = \{P' \mid P' = (0, \dots, 0, x_p^{(i)}, \dots, x_p^{(j)}, 0, \dots, 0), \forall P \in E_R\}$$

$\Pi_{amp.i, \dots, amp.j}(R) \equiv pr_{\pi}(E_R) = \{P' \mid P' = pr_{\pi}P, \pi$  – координатна площина, задана координатними осями  $l_i, \dots, l_j, \forall P \in E_R\} = \{P' \mid P' = (0, \dots, 0, x_p^{(i)}, \dots, x_p^{(j)}, 0, \dots, 0), \forall P \in E_R\}$ .

3. Об'єднання  $(R \cup S)$ . Як відомо, результатом операції об'єднання відношень  $R$  і  $S$  із кортежами  $I$  і  $J$  відповідно є їхня конкатенація з утворенням нового відношення з максимальною кількістю кортежів  $(I + J)$ , якщо кортежі-дублікати виключаються. При цьому відношення  $R$  і  $S$  мають бути сумісними за об'єднанням (мати однакову кількість атрибутів зі збіжними доменами).

Поставимо у відповідність відношенням  $R$  і  $S$  реляційної бази даних підпростори  $E_R$  і  $E_S$  простору  $E^n$  відповідно. У геометричному просторі сумісність за об'єднанням відповідає таким умовам:

Відношення  $R$  і  $S$  мають однакову кількість атрибутів  $\leftrightarrow$  відповідні підпростори  $E_R$  і  $E_S$  мають однакову розмірність:

$$R \leftrightarrow E_R \Rightarrow \dim(E_R) = \dim(E_S).$$

$$S \leftrightarrow E_S$$

Домен збігаються  $\leftrightarrow$  відповідні підпростори  $E_R$  і  $E_S$  задані над одним і тим самим полем.

Отже, сумісності за об'єднанням відношень  $R$  і  $S$  відповідає ізоморфізм підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ .

Результатом об'єднання відношень  $R$  і  $S$  при геометричній інтерпретації буде об'єднання множин точок обох підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ .

Розглянемо приклад.

**Запит.** Створити список усіх міст, у яких проживають постачальники або замовники.

$$\Pi_{місто}(\text{Постачальник}) \cup \Pi_{місто}(\text{Замовник})$$

Результат виконання запиту наведено в табл. 3, а його геометричну інтерпретацію – на рис. 4.

Таблиця 3

Місто
Київ
Львів
Обухів
Одеса
Полтава
Рівне
Чернігів

4. Перетин  $(R \cap S)$ . Необхідною умовою можливості перетину відношень  $R$  і  $S$  є їхня сумісність за об'єднанням. Отже, підпростори  $E_R$  і  $E_S$ , які відповідають відношенням  $R$  і  $S$ , мають бути ізоморфними.

Перетин відношень  $R$  і  $S$  складається з кортежів, які присутні як у першому, так і в другому відношенні. Таким чином, перетину відношень  $R$  і  $S$  у геометричному просторі буде відповідати перетин підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ .

5. Різниця  $(R - S)$ . Різниця двох відношень  $R$  і  $S$  містить тільки ті кортежі відношення  $R$ , які відсутні у відношенні  $S$ . Окрім того, відношення  $R$  і  $S$  мають бути сумісними за об'єднанням.

Як згадувалося вище, сумісності за об'єднанням відношень  $R$  і  $S$  відповідає ізоморфізм відповідних підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ , а результатом різниці відношень  $R$  і  $S$  при геометричній інтерпретації буде різниця множин точок обох підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ .

6. Декартів добуток  $(R \times S)$ . Відношення, отримане внаслідок операції декартового добутку, є результатом конкатенації кожного кортежу відношення  $R$  з кожним кортежем відношення  $S$ . Якщо відношення  $R$  має  $I$  кортежів і  $N$  атрибутів, а відношення  $S$  –  $J$  кортежів і  $M$  атрибутів, то відношення  $R \times S$  містить  $(I \times J)$  і  $(N + M)$  атрибутів. Якщо дані відношення  $R$  і  $S$  містять атрибути з однаковими іменами, то імена атрибутів у відношенні  $R \times S$  будуть містити назви відношень у вигляді префіксів для забезпечення їхньої унікальності.

Очевидно, що операції декартового добутку двох відношень  $R$  і  $S$  відповідає сума відповідних підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ , причому  $\dim(E_{R \times S}) = \dim(E_R + E_S) = \dim(E_R) + \dim(E_S) - \dim(E_R \cap E_S)$ .

Необхідно відзначити, що дана сума не є прямою, тому що у випадку збігу імен атрибутів вихідних відношень координатні осі, які їм відповідають, будуть колінеарними, і, отже,  $\dim(E_{R \times S}) < \dim(E_R) + \dim(E_S)$ .

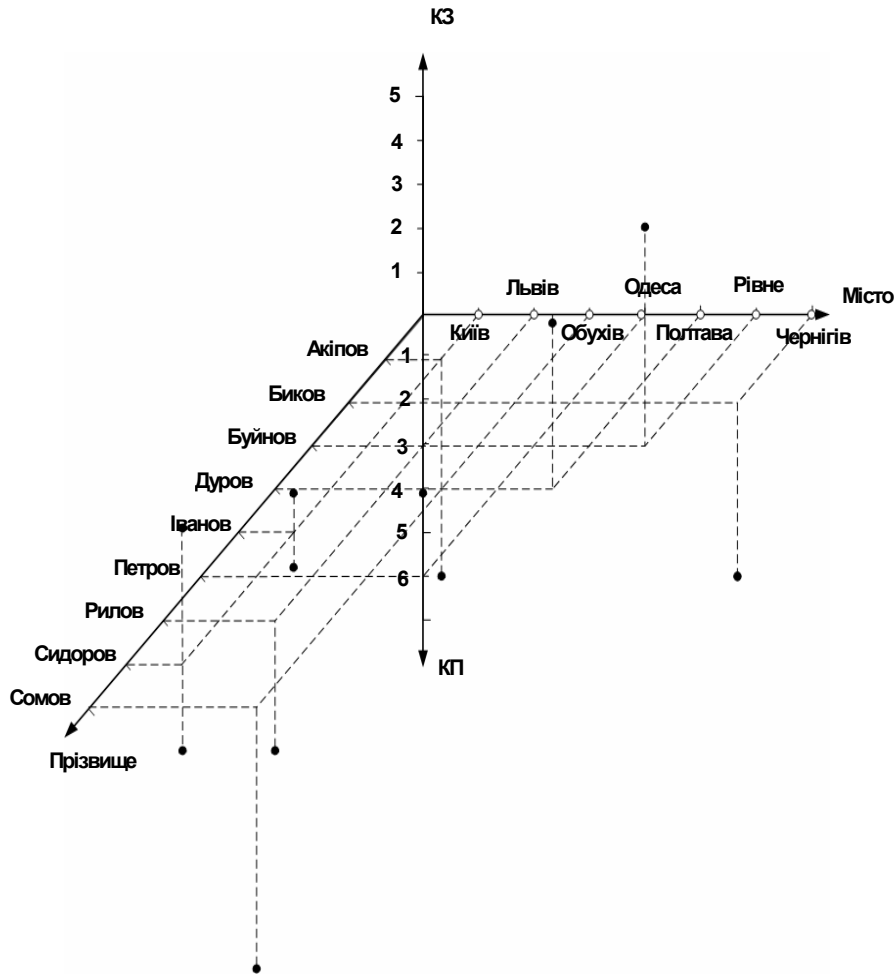


Рис. 4

7. Ділення  $(R \div S)$ . Нехай відношення  $R$  визначене на множині атрибутів  $A$ , а відношення  $S$  – на множині атрибутів  $B$ , причому  $B$  є підмножиною множини  $A$ . Нехай  $C = B - A$ .

Результатом операції ділення є набір кортежів відношення  $R$ , визначених на множині атрибутів  $C$ , які відповідають комбінації всіх кортежів відношення  $S$ .

Дану операцію можна виразити через інші:

$$T_1 = \Pi_C(R)$$

$$T_2 = \Pi_C((S \times T_1) - R)$$

$$T = T_1 - T_2$$

Для операцій проекції, декартового добутку й різниці відношень вище вже було наведено їхню геометричну інтерпретацію. Отже, і операцію ділення також можна виразити.

8. Операції з'єднання:

- тета-з'єднання
- з'єднання за еквівалентністю
- природне з'єднання
- зовнішнє з'єднання
- напівз'єднання

Необхідно звернути увагу на те, що операція з'єднання є похідною від операції декартового добутку, тому що вона еквівалентна операції вибірки з декартового добутку двох відношень тих кортежів, які задовольняють умову, зазначену в предикаті з'єднання як формула вибірки. Таким чином, операції з'єднання двох відношень  $R$  і  $S$  відповідає регіональний пошук у підпросторі, який є сумою відповідних підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ .

Тета-з'єднання ( $R \triangleright_{\leftarrow F} S$ ). Операція тета-з'єднання визначає відношення, що містить кортежі з декартового добутку відношень  $R$  і  $S$ , які задовольняють предикат  $F$ . Предикат  $F$  має вигляд  $R..a_i \Theta S..b_j$ , де  $\Theta = \{<, >, =, \neq, \leq, \geq\}$ .

Якщо предикат  $F$  містить лише оператор рівності, то з'єднання називається з'єднанням за еквівалентністю.

Геометрична інтерпретація: підпростір ( $E_{R \triangleright_{\leftarrow F} S}$ ) є сумою підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ , а предикат  $F$  задає регіон пошуку, якому належить вихідна множина підпростору  $E_{R \triangleright_{\leftarrow F} S}$ .

Природне з'єднання ( $R \triangleright_{\leftarrow F} S$ ). Природне з'єднання – це з'єднання за еквівалентністю двох відношень, у якому присутній лише один стовпчик з пари.

Очевидно, що при геометричній інтерпретації еквів'єднання і природне з'єднання суть одне й те саме.

Розглянемо приклад.

Запит. Створити список номерів тих замовників, які одержують деталі від постачальників з міста Києва.

$$\Pi_{K3}(\sigma_{\text{місто}=\text{Київ}}(\text{ЗПД} \triangleright_{\leftarrow} \text{ЗПД.кп}=\text{П.кп} \text{ Постачальник}))$$

Результат виконання запиту показано в табл. 4, а його геометричну інтерпретацію – на рис. 5.

Таблиця 4

КЗ
1
3
5

Ліве зовнішнє з'єднання ( $R \supset_{\leftarrow F} S$ ). Визначає відношення, що містить також і ті кортежі відношення  $R$ , які не мають збіжних значень у спільних стовпцях відношення.

Існує праве зовнішнє з'єднання, яке містить усі кортежі правого відношення. Окрім того, існує повне зовнішнє з'єднання, результуюче відношення якого містить усі кортежі з обох відношень, і в якому для позначення незбіжних значень використовуються визначники.

Напівз'єднання ( $R \triangleright_F S$ ). Визначає відношення, що містить ті кортежі відношення  $R$ , які входять у з'єднання відношень  $R$  і  $S$ .

$$R \triangleright_F S = \Pi_A(R \triangleright_{\leftarrow F} S), \text{ де } A \text{ – набір усіх атрибутів відношення } R.$$

Таким чином, у геометричному просторі операції напівз'єднання відповідають регіональний пошук і операція проєкції для множини точок підпростору  $E_{R \triangleright_F S}$ , отриманого в результаті суми підпросторів  $E_R$  і  $E_S$ , які відповідають вихідним відношенням  $R$  і  $S$ . Теорему доведено.

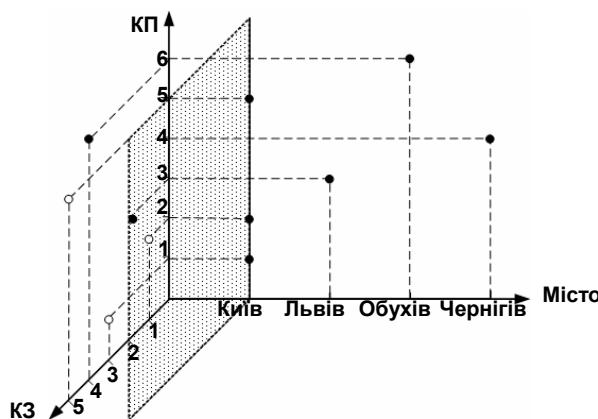


Рис. 5

**Висновок.** У роботі розглянуто задачі пошуку інформації в реляційній моделі баз даних і доведено їх звідність до задач геометричного пошуку в обчислювальній геометрії, що дозволяє застосувати ефективніші геометричні методи для здійснення функцій пошуку в гіпервеликих базах даних. Для цього було формалізовано множини вхідних даних задач пошуку реляційної моделі баз даних у термінах і поняттях задачі геометричного пошуку, і навпаки, результати розв'язання задачі геометричного пошуку інтерпретовано в термінах баз даних. Також на прикладах основних пошукових запитів мовою реляційної алгебри було доведено їхню геометричну реалізацію, а отже, і звідність зазначених вище класів задач.

Метою наступних досліджень має стати розробка загальної теорії звідності задач баз даних до задач обчислювальної геометрії та створення нових структур даних для збереження й пошуку інформації геометричними методами.

1. Abiteboul S. Querying semistructured data: In Proc. ICOT'97. – 1997. 2. Agrawal R., Imielinski T., Swami A. Mining association rules between sets of items in large databases: In Proc. the 1993 ACM SIGMOD Conference on Management of Data, 207-216 (1993). 3. Arimura H., Ishizaka H., Shinohara T.

Learning unions of tree patterns using queries // Theoretical Computer Science. – 1997. – P. 47–62. 4. Arimura H., Wataki A., Fujino R., Arikawa S. A Fast Algorithm for Discovering Optimal String Patterns in Large Text Databases. – 2004. 5. Гасанов Э.Э. Функционально-сетевые базы данных и сверхбыстрые алгоритмы поиска – М., 1997. 6. GenBank Release Notes, IntelliGenetics Inc., 1991. 7. Fukuda T., Morimoto Y., Morishita S., Tokuyama T. Data mining using twodimensional optimized association rules: In Proc. the 1996 ACM SIGMOD Conference on Management of Data, (1996) 13-23. 8. Han J., Cai Y., Cercone N. Knowledge discovery in databases: An attribute oriented approach: In Proc. the 18th VLDB Conference, 547-559 (1992). 9. Коннолли Т., Бега К., Страчан А. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика, 2-е изд. – М., 2001. 10. Lewis D.D. Challenges in machine learning for text classification: In Proc. 9th Computational Learning Theory (1996). – P. 1. 11. OPENTEXT Index. – 2006 // http://index.opentext.net. 12. Preparata F.P., Shamos M.I. Computational Geometry. – Springer Verlag, 1985.

Надійшла до редколегії 28.12.06

УДК 517.929

Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф., О.І. Кузьмич, асп.

### ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СТІЙКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

*Розглянуто систему лінійних диференціально-різницеєвих рівнянь нейтрального типу зі сталими коефіцієнтами. Проведено оцінку відхилення розв'язку системи нейтрального типу від положення рівноваги залежно від початкових умов.*

*The system of linear differential-difference equations of neutral type with constant factors is considered in the article. The estimation of a deviation of system solutions from position of balance is made depending on initial conditions.*

**Вступ.** Значну частину досліджень у галузі динамічних систем останнім часом присвячено вивченню диференціально-функціональних систем [1, 4, 5, 7]. У даній роботі розглянуто систему лінійних диференціально-різницеєвих рівнянь зі сталими коефіцієнтами нейтрального типу [6]

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t - \tau)] = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Практичні задачі потребують установлення не тільки факту стійкості (або нестійкості) системи, але й отримання оцінок її розв'язків. Передбачається, що початкове збурення знаходиться в  $\delta$ -околі положення рівноваги. Потрібно оцінити величину відхилення розв'язку  $x(t)$  системи (1) від положення рівноваги в кінцевий момент  $t = t_N$ . Оскільки розглядається кінцевий проміжок часу, то, згідно з лінійністю системи, для довільного  $\varepsilon > 0$  усі розв'язки, які починалися в  $\delta$ -околі, не залишать  $\varepsilon(\delta)$ -оکیل. І навпаки, для довільного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta(\varepsilon) > 0$ , що  $|x(t_N)| < \varepsilon$ , як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ . У пропонуваній роботі отримано оцінку безперервності розв'язків від початкових умов.

Тут і надалі використовуються такі векторні й матричні норми:

$$|A| = \{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}, \quad |x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \{|x(s+t)|\},$$

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} = \left\{ \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} |x(t+s)|^2 ds \right\}^{1/2},$$

де  $\lambda_{\max}(\bullet)$  – найбільше й найменше власні числа відповідних симетричних, додатно визначених матриць.

Для одержання оцінок використовується метод функціоналів Ляпунова – Красовського [2, 3].

**Оцінки розв'язків стійких підсистем.** Для одержання оцінки розв'язків використовуватимемо функціонал Ляпунова – Красовського квадратичного типу

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} [x(t) - Dx(t - \tau)]^T H [x(t) - Dx(t - \tau)] + e^{\gamma t} \left\{ \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^T(t+s) G x(t+s) ds \right\} \tag{3}$$

з позитивно визначеними матрицями  $G$ ,  $H$  і сталими  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ . Присутність у першому доданку різниці  $x(t) - Dx(t - \tau)$  є зручною при обчисленні повної похідної згідно із системою, проте ускладнює проведення оцінки функціонала знизу. За допомогою такого функціонала можна отримати мажорантну оцінку розв'язків тільки в інтегральній нормі.

Введемо позначення:

$$M[H] = \begin{bmatrix} H & -HD \\ -D^T H & D^T HD \end{bmatrix}, \quad S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & A^T HD - HB \\ D^T HA - B^T H & B^T HD + D^T HB + G \end{bmatrix},$$

$$\varphi_1(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(M[H])}{\lambda_{\min}(G)}, \quad \varphi_2(G) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}. \tag{5}$$

Оцінки збіжності розв'язків системи (3) можна подати у вигляді теореми.



**Теорема.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $H$  і  $G$ , за яких матриця  $S[G, H]$  також додатно визначена. Тоді для розв'язків  $x(t)$  системи нейтрального типу (3) справедлива така верхня оцінка:

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq \left\{ \sqrt{\varphi_1(G, H)} [|x(0)| + |x(-\tau)|] + \sqrt{\varphi_2(G)} \|x(0)\|_{\tau, \beta} \right\} e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad t \geq 0,$$

$$\theta = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])}, \frac{\beta - \gamma [\lambda_{\max}(G) - \lambda_{\min}(G)]}{\lambda_{\max}(G)} \right\}, \quad (6)$$

де сталі  $\beta, \gamma$ , задовольняють умову  $\beta - \gamma > 0$ .

**Доведення.** Спочатку одержимо двосторонні оцінки функціонала Ляпунова – Красовського (4). З використанням вибраних векторних норм (3) нижня оцінка функціонала має вигляд

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \leq V[x(t), t] \quad (7)$$

і залежить лише від інтегральної норми. Перепишемо функціонал (4) у вигляді

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} \left( x^T(t), x^T(t - \tau) \right) \begin{bmatrix} H & -HD \\ -D^T H & D^T HD \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix} + e^{\gamma t} \left\{ \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^T(t + s) G x(t + s) ds \right\}.$$

Тоді верхня оцінка матиме вигляд

$$V[(t), t] \leq e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) \left[ |x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2 \right] + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2, \quad (8)$$

де  $M[H]$  – симетрична, додатно напіввизначена матриця, наведена в (5). Для функціонала  $V[x(t), t]$  двосторонні оцінки (7), (8) матимуть вигляд

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \leq V[x(t), t] \leq e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t)|^2 + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t - \tau)|^2 + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2. \quad (9)$$

Наявність у нижній оцінці тільки інтегральної норми дозволяє отримати оцінки збіжності розв'язків тільки в цій нормі.

Проведемо під інтегралом заміну  $t + s = \xi$  і перетворимо функціонал (4) до вигляду

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} [x(t) - Dx(t - \tau)]^T H [x(t) - Dx(t - \tau)] + e^{\gamma t} \left\{ \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^T(\xi) G x(\xi) d\xi \right\}. \quad (10)$$

Обчислимо повну похідну отриманого функціонала  $V[x(t), t]$  типу (10) згідно із системою (4). Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= \gamma e^{\gamma t} [x(t) - Dx(t - \tau)]^T H [x(t) - Dx(t - \tau)] + \\ &+ e^{\gamma t} [Ax(t) + Bx(t - \tau)]^T H [x(t) - Dx(t - \tau)] + \\ &+ e^{\gamma t} [x(t) - Dx(t - \tau)]^T H [Ax(t) + Bx(t - \tau)] + \\ &+ e^{\gamma t} (\gamma - \beta) \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^T(\xi) G x(\xi) d\xi + e^{\gamma t} \left\{ x^T(t) G x(t) - e^{-\beta\tau} x^T(t - \tau) G x(t - \tau) \right\} \end{aligned}$$

Перепишемо отриманий вираз у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= \\ &= -e^{\gamma t} \left( x^T(t), x^T(t - \tau) \right) \begin{bmatrix} -A^T H - HA - \gamma H - G & A^T HD + \gamma HD - HB \\ D^T HA + \gamma D^T H - B^T H & B^T HD + D^T HB - \gamma D^T HD + G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix} + \\ &+ e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta\tau}) x^T(t - \tau) G x(t - \tau) - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^T(\xi) G x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Використовуючи позначення (5), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= -e^{\gamma t} \left( x^T(t), x^T(t - \tau) \right) \{ S[G, H] - \gamma M[H] \} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix} + \\ &+ e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta\tau}) x^T(t - \tau) G x(t - \tau) - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^T(\xi) G x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Якщо існують симетричні додатно визначені матриці  $H$ ,  $D$  і стала  $\gamma$ , за яких матриця  $S[G, H] - \gamma M[H]$  також позитивно визначена, і  $\beta - \gamma > 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq & -e^{\gamma t} \{ \lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) \} [ |x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2 ] + \\ & + e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) |x(t - \tau)|^2 - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишемо отриману нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq & -e^{\gamma t} \{ \lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) \} |x(t)|^2 - \\ & - e^{\gamma t} \{ \lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) \} |x(t - \tau)|^2 - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи двосторонні нерівності (9) й отриману нерівність для повної похідної (12), одержимо твердження (6) теореми 1 шляхом таких перетворень:

Перепишемо праву частину нерівності (9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(G)} \left[ -V[x(t), t] + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t)|^2 + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t - \tau)|^2 \right]$$

і підставимо отриманий вираз у (12). Одержимо

$$-e^{\gamma t} \left\{ \left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) \right] - \frac{(\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} \lambda_{\max}(M[H]) \right\} |x(t - \tau)|^2,$$

і, якщо параметри такі, що

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) - \frac{(\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} \lambda_{\max}(M[H]) \geq 0, \quad (13)$$

то

$$\frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq -\varsigma V[x(t), t], \quad \varsigma = \frac{(\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)}. \quad (14)$$

2) Перепишемо праву частину нерівності (9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} |x(t)|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(M[H])} \left[ -V[x(t), t] + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t - \tau)|^2 + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \right]$$

і підставимо в (12). Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq & -\frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H])}{\lambda_{\max}(M[H])} V[x(t), t] + e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) |x(t - \tau)|^2 + \\ & + e^{\gamma t} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H])}{\lambda_{\max}(M[H])} \lambda_{\max}(G) - (\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G) \right\} \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \end{aligned}$$

Оскільки при  $\beta > 0$  вираз  $(1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) > 0$ , то в цьому випадку вираз для повної похідної неможливо перетворити на залежність тільки від  $V[x(t), t]$ .

3) Перепишемо праву частину нерівності (9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} |x(t - \tau)|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(M[H])} \left[ -V[x(t), t] + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(M[H]) |x(t)|^2 + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \right]$$

і підставимо отриманий вираз у (12). Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq & -\frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])} V[x(t), t] - e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G) |x(t)|^2 + \\ & - e^{\gamma t} \left\{ (\beta - \gamma) \lambda_{\min}(G) - \frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])} \lambda_{\max}(G) \right\} \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 \end{aligned}$$

і, якщо виконується нерівність

$$\frac{\lambda_{\min}(S[G, H]) - \gamma \lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta \tau}) \lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])} - (\beta - \gamma) \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} < 0,$$

ТО

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t] \leq -\zeta V[x(t),t] \tag{16}$$

$$\zeta = \frac{\lambda_{\min}(S[G,H]) - \gamma\lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])}$$

Об'єднуючи всі випадки, отримаємо, що диференціальні нерівності (15), (16) мають розв'язок

$$V[x(t),t] \leq V[x(0),0]e^{-\zeta t}, \quad t \geq 0,$$

$$\text{де } \zeta = \begin{cases} \frac{\lambda_{\min}(S[G,H]) - \gamma\lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])}, \\ \text{при } \frac{\lambda_{\min}(S[G,H]) - \gamma\lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])} < \frac{(\beta - \gamma)\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)}; \\ \frac{(\beta - \gamma)\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)}, \\ \text{при } \frac{\lambda_{\min}(S[G,H]) - \gamma\lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])} \geq \frac{(\beta - \gamma)\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)}. \end{cases}$$

Об'єднуючи вирази, отримаємо

$$\gamma = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[G,H]) - \gamma\lambda_{\max}(M[H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(M[H])}, \frac{(\beta - \gamma)\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} \right\}$$

Використовуючи двосторонні нерівності (9) і формули (15), (16), отримаємо співвідношення

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau,\beta}^2 \leq V[x(t),t] \leq V[x(0),0] \leq \left\{ \lambda_{\max}(M[H]) \left[ |x(0)|^2 + |x(-\tau)|^2 \right] + \lambda_{\max}(G) \|x(0)\|_{\tau,\beta}^2 \right\} e^{-\zeta t}.$$

Звідси випливає, що

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta}^2 \leq \left\{ \frac{\lambda_{\max}(M[H])}{\lambda_{\min}(G)} |x(0)|^2 + \frac{\lambda_{\max}(M[H])}{\lambda_{\min}(G)} |x(-\tau)|^2 + \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)} \|x(0)\|_{\tau,\beta}^2 \right\} e^{-(\xi+\gamma)t}.$$

Ураховуючи позначення, отримуємо

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta}^2 \leq \left\{ \varphi_1(G,H) \left[ |x(0)|^2 + |x(-\tau)|^2 \right] + \varphi_2(G) \|x(0)\|_{\tau,\beta}^2 \right\} e^{-\theta t}.$$

Звідси випливає твердження (6) теореми 1.

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1991. 2. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – К., 1989. 3. Коренівський Д.Г. Дестабілізуючий ефект параметричного білого шуму в неперервних та дискретних динамічних системах. – К., 2006. 4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984. 5. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К., 1997. 6. Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифф. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1137-1140. 7. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1970.

Надійшла до редколегії 4.11.2006

УДК 517.9

С.М. Чуйко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

### МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ТЕОРІЇ НЕКОРЕКТНО ПОСТАВЛЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Для побудови наближеного псевдорозв'язку лінійної некоректно поставленої крайової задачі у системі звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку використано часткові суми узагальненого ряду Фур'є.

We construct a new pseudosolution of incorrect linear boundary value problem for a system of ordinary differential equations in critical case. Using the least squares method we expand solution of incorrect boundary value problem in generalized Fourier polynomial.

Постановка задачі. Досліджено задачу про знаходження розв'язків [3]  $z(t) = \text{col}(z^{(1)}(t), \dots, z^{(n)}(t))$ ,  $z^{(i)}(\cdot) \in C^1[a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \tag{1}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Тут  $A(t) - (n \times n)$  – матриця,  $f(t)$  –  $n$ -вимірний вектор-стовпець, елементи яких – неперервні на відріжку  $[a, b]$  дійсні функції,  $\alpha \in R^n$  – дійсний вектор-стовпець,  $\ell z(\cdot)$  – лінійний векторний функціонал  $\ell z(\cdot) : C[a, b] \rightarrow R^n$ . Досліджено критичний випадок  $P_{Q^*} \neq 0$ ; за умови

$$P_{Q^*} \{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \} \neq 0 \tag{3}$$

задача (1), (2) – нерозв'язна. Таким чином, задача (1), (2) є некоректно поставленою [6]; традиційно її розв'язки зображуються у вигляді

$$z(t, \xi) = X(t)\xi + K[f(s); \alpha](t), \xi \in R^n.$$

Таким чином, одержуємо  $r$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних псевдорозв'язків [3]

$$\tilde{z}(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), c_r \in R^r.$$

Тут  $X(t)$  – нормальна ( $X(a) = I_n$ ) фундаментальна матриця однорідної частини системи (1),  $Q = \ell X(\cdot) - (m \times n)$  – матриця,  $\text{rank } Q = n_1$ ,  $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$ ,  $P_{Q_r} - (n \times r)$ -матриця, складена з  $r$  лінійно незалежних стовпців ( $n \times n$ )-матриці-ортопроектора  $P_Q : R^n \rightarrow N(Q)$ ,  $P_{Q_r^*} - (r \times n)$ -матриця, складена з  $r$  лінійно незалежних рядків ( $n \times n$ )-ортопроектора  $P_{Q^*} : R^n \rightarrow N(Q^*)$ ,

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t) - X(t)Q^+ \ell K[f(s)](\cdot)$$

– узагальнений оператор Гріна крайової задачі (1), (2);

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

– оператор Гріна задачі Коші для системи (1),  $Q^+$  – псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом. Побудований у такий спосіб псевдорозв'язок  $\tilde{z}(t, c_r)$  задовольняє диференціальну систему (1) і мінімізує норму нев'язки  $\Delta_0 = \| \ell z(\cdot) - \alpha \|$  у крайовій умові (2). Метою даної статті є побудова наближених розв'язків крайової задачі (1), (2) у вигляді часткових сум узагальненого ряду Фур'є [1]

$$z^+(t, c) = \varphi(t) \cdot c, c \in R^k,$$

де  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t), \dots$  – система лінійно незалежних вектор-функцій,  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) - (n \times k)$  – вимірна матриця. За аналогією з методом найменших квадратів [5] вимагатимемо мінімізації норми нев'язки, диференціальної системи (1) і крайової умови (2):

$$\Delta_1(\varphi, c) = \| A(t)z^+ + f(t) - dz^+ / dt \|_{L_2}^2 + \| \ell z^+(\cdot) - \alpha \|_{R^n}^2 \rightarrow \min.$$

Тут [6]

$$\| A(t)z^+ + f(t) - dz^+ / dt \|_{L_2}^2 = \int_a^b (A(t)z^+ + f(t) - dz^+ / dt)^* \cdot (A(t)z^+ + f(t) - dz^+ / dt) dt,$$

$$\| \ell z^+(\cdot) - \alpha \|_{R^n}^2 = (\ell z^+(\cdot) - \alpha)^* \cdot (\ell z^+(\cdot) - \alpha).$$

При фіксованій матриці  $\varphi(t)$  мінімум функції  $\Delta_1(\varphi, c)$  існує, так як неперервна невід'ємна функція  $\Delta_1(\varphi, c)$  досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції  $\Delta_1(\varphi, c)$  є рівність

$$\frac{\partial \Delta_1(\varphi, c)}{\partial c} = 0,$$

рівносильна рівнянню

$$[\Gamma(\varphi) + \Gamma(\ell\varphi(\cdot))] \cdot c = \ell\varphi^*(\cdot)\alpha - \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt. \tag{4}$$

Тут  $\Gamma(\varphi) - (k \times k)$ -вимірна матриця Грама [4]  $\Gamma = \int_a^b \Phi^*(t) \cdot \Phi(t) dt$  системи векторів  $\Phi_i(t) = A(t)\varphi_i(t) - \varphi'_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $\Phi(t) = [\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_k(t)] - (n \times k)$ -матриця,  $\Gamma(\ell\varphi(\cdot)) = \ell\varphi^*(\cdot) \cdot \ell\varphi(\cdot) - (k \times k)$ -матриця Грама системи векторів  $\ell\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $\ell\varphi(\cdot) - (n \times k)$ -матриця. За умови невідродженості сталої ( $n \times k$ )-матриці  $\Gamma(\varphi) + \Gamma(\ell\varphi(\cdot))$  рівняння (4) має єдиний розв'язок

$$c^* = [\Gamma(\varphi) + \Gamma(\ell\varphi(\cdot))]^{-1} \cdot (\ell\varphi^*(\cdot)\alpha - \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt),$$

який визначає псевдорозв'язок

$$z^+(t, c^*) = \varphi(t) \cdot [\Gamma(\varphi) + \Gamma(\ell\varphi(\cdot))]^{-1} \cdot (\ell\varphi^*(\cdot)\alpha - \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt). \tag{5}$$

Отриманий псевдорозв'язок забезпечує мінімум функції  $\Delta_1(\varphi, c)$  і залежить від вибору матриці  $\varphi(t)$ .

**Лема.** Для фіксованого числа  $k$  і фіксованої матриці  $\varphi(t)$ , за умови  $\det[\Gamma(\varphi) + \Gamma(\ell\varphi(\cdot))]\neq 0$ , формула (5) визначає найкращий серед функцій вигляду  $z^+(t, c) = \varphi(t) \cdot c$ ,  $c \in R^k$  псевдорозв'язок, який мінімізує нев'язку  $\Delta_1(\varphi, c)$ .

У частинному випадку, коли  $\ell\varphi_i(\cdot) \equiv 0, i = 1, 2, \dots, k$ , формула (5) значно спрощується:

$$z^+(t, c^*) = -\varphi(t) \cdot \Gamma^{-1}(\varphi) \cdot \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt. \tag{6}$$

**Приклад.** Побудуємо наближений розв'язок некоректно поставленої крайової задачі

$$\frac{dz}{dt} + z \cdot \cos t = e^{-\sin t}, \quad \ell z(\cdot) = z(0) - z(2\pi) = 0. \tag{7}$$

Нормальна ( $X(0) = 1$ ) фундаментальна матриця  $X(t) = e^{-\sin t}$  однорідної частини рівняння (7)  $2\pi$ -періодична, отже  $2\pi$ -періодична задача для рівняння (7) є критичною. Оскільки  $Q = 0, P_{Q^*} = P_Q = 1$ , то умова існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків задачі (7) не виконується:  $K[f(s)](2\pi) = e^{-\sin 2\pi} \cdot 2\pi \neq 0$ , отже  $2\pi$ -періодична задача для рівняння (7) є некоректно поставленою. Рівність нулю констант  $Q = Q^+ = 0$  визначає узагальнений оператор Гріна  $2\pi$ -періодичної задачі для системи (7)  $G[f(s); 0](t) = t \cdot e^{-\sin t}$ . При цьому традиційний псевдорозв'язок періодичної задачі для рівняння (7)

$$\tilde{z}(t, c_r) = X(t)c_r + G[f(s); 0](t), \quad c_r \in R^1$$

не є  $2\pi$ -періодичним. Норма нев'язки цього псевдорозв'язку  $\Delta_0 = 2\pi$  не залежить від вибору константи  $c_r \in R^1$ . Для побудови псевдорозв'язку задачі (7) за формулою (5) скористаємось системою функцій  $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2, \dots, \varphi_6(t) = t^6$ , які задовольняють умови леми. Отриманий псевдорозв'язок

$$z^+(t, c_1^*) = 0,194\ 634\ t - 0,102\ 517\ t^2 - 0,045\ 597\ t^3 - 0,061\ 003\ t^4 + 0,025\ 151\ t^5 - 0,002\ 220\ t^6$$

має нев'язку  $\Delta_1(\varphi, c_1^*) \approx 3,40\ 892$ , меншу від нев'язки  $\Delta_0 = 2\pi$  традиційного псевдорозв'язку. Для побудови псевдорозв'язку задачі (7) за формулою (6) скористаємось ортонормованою системою функцій, що задовольняють крайову умову (7):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu t, \quad \varphi_{2\nu+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2\nu t, \quad \nu = 1, 2, \dots, 8.$$

Матриця Грама при цьому невироджена:

$$\det \Gamma(\varphi) = \frac{229\ 076\ 402\ 516\ 181}{8\ 589\ 934\ 592}.$$

Отже, умови леми виконано; отриманий псевдорозв'язок

$$z^+(t, c_2^*) = 1,42\ 135 \cos t - 0,0876\ 081 \cos 3t + 0,00130\ 069 \cos 5t - 8,60\ 944 \cdot 10^{-6} \cos 7t - \\ - 0,409\ 633 \sin 2t + 0,00115\ 566 \sin 4t - 0,000111\ 882 \sin 6t + 5,49\ 771 \cdot 10^{-7} \sin 8t$$

має нев'язку  $\Delta_1(\varphi, c_2^*) \approx 2,75\ 628$ , меншу від нев'язки  $\Delta_0$  традиційного псевдорозв'язку, а також від нев'язки  $\Delta_1(\varphi, c_1^*)$ , отриманої за формулою (5).

1. Ахмезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М., 1965. 2. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. 3. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – К., 1990. 4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1977. 5. Крылов Н.М. Избранные труды. – К., 1961. – Т. 1. 6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М., 1986.

УДК 517.929

І.А. Джалладова, канд. фіз.-мат наук, доц.

### УМОВИ ІСНУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ СИСТЕМ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

*Розглянуто задачу знаходження асимптотичної системи для системи диференціальних рівнянь із запізненням. Побудовано загальний алгоритм знаходження асимптотичних систем. Детально розглянуто лінійні стаціонарні системи із стабільним запізненням.*

*Considered of problem finding asymptotic system for the system differential equation with lag. Constructing an algorithm of finding asymptotic system. Specially considered linear stationar system with constant lag.*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)). \tag{1}$$

Як відомо, розв'язок задачі Коші для системи (1) полягає в знаходженні неперервно диференційованої векторної функції, що задовольняє початковим умовам  $y(t) = \phi(t)$ ,  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  і при підстановці обертає систему (1) в тотожність. Або, потрібно знайти інтегральну криву системи (1), що починається з деякого відрізка заданої кривої. Таким чином простір розв'язків системи із запізненням (1) можна розглядати, як нескінченновимірний простір неперервно диференційованих функцій  $\Omega = \{x(t+s), t_0 - \tau \leq s \leq t_0\}$ .

Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \tag{2}$$

до розв'язків якої прямують всі розв'язки вихідної системи із запізненням, тобто яка володіє асимптотичними властивостями щодо системи (1) [1]. Слід зазначити, що розв'язок задачі Коші для системи без запізнення (2) полягає в знаходженні неперервно диференційованої векторної функції  $z(t)$ , що задовольняє початковим умовам  $z(t_0) = z_0$ , яка при підстановці обертає систему (2) в тотожність, тобто потрібно знайти інтегральну криву, що починається в заданій точці  $z_0$ . І простір розв'язків системи без запізнення (2) є скінченновимірним.

**Означення 1.** Система звичайних диференціальних рівнянь (2) називається асимптотичною для системи рівнянь із запізненням (1), якщо довільний розв'язок  $z(t)$  системи (2) є розв'язком системи (1) і довільний розв'язок  $y(t)$  системи із запізненням (1) прямує  $y(t) \rightarrow z(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  до деякого розв'язку системи без запізнення (2).

Таким чином, система із запізненням (1) є асимптотичною, якщо в нескінченновимірному просторі  $\Omega$  існує скінченновимірний многовид, до якого при  $t \rightarrow +\infty$  прямують розв'язки системи (1) [2, 3]. Має місце наступний результат.

**Теорема 1.** Щоб система із запізненням (1) мала асимптотичну систему без запізнення (2), необхідно, щоб існувала векторна функція  $F(t, z)$ , при якій всі розв'язки  $z(t)$  системи звичайних диференціальних рівнянь (2) задовольняли систему інтегральних рівнянь

$$F(s, z(s)) = f \left( s, z(t_0) + \int_{t_0}^s F(\xi, z(\xi)) d\xi, z(t_0) + \int_{t_0}^{s-\tau} F(\xi, z(\xi)) d\xi \right), s \geq t_0. \tag{3}$$

*Доведення.* Запишемо систему без запізнення (2) і систему із запізненням (1) в інтегральному вигляді

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, z(s)) ds, t \geq t_0, \tag{4}$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s), y(s-\tau)) ds, t \geq t_0. \tag{5}$$

Перепишемо інтегральне рівняння (4) у вигляді

$$z(s-\tau) = z(t_0) + \int_{t_0}^{s-\tau} F(\xi, z(\xi)) d\xi \tag{4.1}$$

і підберемо функцію  $F(t, z)$  таким чином, щоб всі розв'язки  $z(t)$  інтегрального рівняння (4) були розв'язками інтегрального рівняння (5). Для цього потрібно, щоб для розв'язків  $z(t)$  рівняння без запізнення (2) при  $t \geq t_0$  виконувалася тотожність

$$z(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, z(s)) ds \equiv y(t_0) + \int_{t_0}^t f \left( s, z(t_0) + \int_{t_0}^s F(\xi, z(\xi)) d\xi, z(t_0) + \int_{t_0}^{s-\tau} F(\xi, z(\xi)) d\xi \right) ds, t \geq t_0. \tag{6}$$

Якщо початкові умови при  $t = t_0$  співпадають (що природно), то тотожність (6) виконується при

$$F(s, z(s)) = f \left( s, z(t_0) + \int_{t_0}^s F(\xi, z(\xi)) d\xi, z(t_0) + \int_{t_0}^{s-\tau} F(\xi, z(\xi)) d\xi \right),$$

де  $z(s)$  — розв'язки рівняння без запізнення, визначені при  $s \geq t_0$ .

Таким чином показано, що всі розв'язки  $z(t)$  системи (2) є розв'язками системи (1). Щоб система (2) була асимптотичною потрібно, щоб многовид отриманих розв'язків був асимптотично стійким.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з сталим запізненням

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + By(t-\tau) \quad -\tau \leq s \leq 0. \tag{7}$$

Асимптотичне рівняння шукатимемо також у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) \tag{8}$$

з невідомою сталою матрицею  $\Lambda$ . Підставивши в інтегральне рівняння (3), отримуємо співвідношення

$$\Lambda z(s) = A \left[ z(0) + \int_0^s \Lambda z(\xi) d\xi \right] + B \left[ z(0) + \int_0^{s-\tau} \Lambda z(\xi) d\xi \right]. \tag{9}$$

Оскільки розв'язок  $z(t)$  системи без запізнення (8) має вигляд

$$z(t) = e^{\Lambda t} z(0),$$

де  $e^{\Lambda t}$  – нормована фундаментальна матриця розв'язків, що називається матричним експоненціалом, то підставивши його в інтегральне рівняння (3), і обчисливши інтеграли, отримуємо

$$\Lambda e^{\Lambda s} z(0) = A \left\{ z(0) + \left[ e^{\Lambda s} - I \right] z(0) \right\} + B \left\{ z(0) + \left[ e^{\Lambda(s-\tau)} - I \right] z(0) \right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\Lambda = A + B e^{-\Lambda \tau}. \tag{10}$$

Таким чином асимптотична система рівнянь для системи із запізненням (7) має вигляд (8), де матриця  $\Lambda$  є розв'язком матричного рівняння (10).

Розв'язок матричного рівняння (10) можна знайти методом послідовних наближень. При певних обмеженнях, що накладаються на матриці  $A$  і  $B$  метод досить швидко збігається.

Розглянемо окремий випадок скалярного лінійного рівняння із запізненням

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t-\tau) \quad -\tau \leq t \leq 0. \tag{11}$$

Асимптотичне рівняння шукатимемо також у вигляді лінійного скалярного рівняння першого порядку

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) \quad t \geq 0. \tag{12}$$

Підставивши в інтегральне рівняння (3), отримуємо співвідношення

$$\lambda z(s) = a \left[ z(0) + \int_0^s \lambda z(\xi) d\xi \right] + b \left[ z(0) + \int_0^{s-\tau} \lambda z(\xi) d\xi \right]. \tag{13}$$

Оскільки розв'язок  $z(t)$  диференціального рівняння без запізнення (9) має вигляд  $z(t) = z(0)e^{\lambda t}$ , то підставивши його в інтегральне рівняння (11), і обчисливши інтеграл, отримуємо

$$\lambda z(0)e^{\lambda s} = a \left\{ z(0) + z(0) \left[ e^{\lambda s} - 1 \right] \right\} + b \left\{ z(0) + z(0) \left[ e^{\lambda(s-\tau)} - 1 \right] \right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda = a + b e^{-\lambda \tau}. \tag{14}$$

Таким чином асимптотичне рівняння для скалярного рівняння з запізненням (11) має вигляд (12), де коефіцієнт  $\lambda$  є розв'язком характеристичного рівняння (14).

1. Валеев К.Г., Кулеско Н.А. О конечнопараметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Украинский математический журнал, Т.20, №6, 1968. – С. 739–749. 2. Рябов Ю.А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени. – Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Т.3. – М., 1965. – С. 153–167. 3. Рябов Ю.А. Об аппроксимации решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. – Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Т.3. – М., 1965. – С. 153–167.

Наукове видання



## ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

## КІБЕРНЕТИКА

Випуск 7

Редактор Н. Земляна

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л.Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28



Підписано до друку 30.01.07. Формат 60x84<sup>1/8</sup>. Вид. № 251. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 10,0. Зам. № 27-4249.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"  
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43

☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; (38044) 239 31 58; факс (38044) 239 31 28

E-mail: vydav\_polygraph@univ.kiev.ua

WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>