

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для науковців, аспірантів, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики, студентів старших курсів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods modeling of processes are presented.

It's considered for teachers, scientific collaborators, aspirants and post-graduate students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	О.К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. АПН України
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); А.В. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А. Белов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С.О. Войцехівський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.; С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; І.М. Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.Н. Редько, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Є.О. Лебедев, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.І. Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.А. Заславський, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, вул. Глушкова, 6, факультет кібернетики; ☎ (38044) 259 0149
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 18.10.04 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про Державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 3128

Васільсва В.

Урівноважені розбиття деяких нескінченних дерев..... 4

Грищенко О., Ляшко В., Оноцький В.

Про один двокроковий скінченно-різницевий алгоритм моделювання процесів переносу 7

Загородній Ю.

Моделі імітації росту та розвитку рослин у сприятливих і небезпечних умовах інфекційних захворювань..... 10

Заславська О., Доленко Г.

Багатокритеріальна задача оптимізації діяльності посередника в оптовій торгівлі..... 15

Зубенко В.

Періодичні темпоральні алгоритми 19

Івохін Є.

Про стійкоподібні властивості розв'язків нечітких різницевих систем..... 23

Клюшин Д., Петунін Ю., Савкіна М.

Аналог теореми Глівенка – Кантеллі для обернених функцій розподілу..... 31

Крак Ю., Бармак О.

Ідентифікація портретних зображень облич людей з великих баз даних..... 34

Кузьмич О.

Оцінки збурень розв'язків неавтономних систем..... 37

Нікітін А., Тимочко К.

Стійкість у середньому квадратичному лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь
з кількома збуреннями та запізненнями у скалярному випадку 42

Нікітченко М., Шкільняк С.

Спектр композиційно-номінативних логік 44

Утебасв Д.

Побудова схем методу кінцевих елементів для рівняння коливання з дисипацією..... 48

Хусаїнов Д., Іванов А., Коварж І.

Про зображення розв'язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності із запізненням..... 51

Шушарін Ю., Лавренюк О.

Дослідження розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь
з коефіцієнтами, що залежать від ланцюга Маркова 60

CONTENTS

Vasil'eva V.O.

Balanced laying out of some endless trees 4

Grishchenko O.Y., Lyashko V.I., Onotskiy V.V.

About one two-step finite-difference algorithm of modeling of transfer processes..... 7

Zagorodniy Y.V.

Models of imitation of growth and development of plants in the favourable
and dangerous terms of infectious diseases 10

Zaslavska O.V., Dolenko G.O.

Multicriterion task of optimization of activity of mediator in the wholesale 15

Zubenko V.V.

Periodical temporal algorithms 19

Ivohyn E.V.

About similar to stable properties of fuzzy difference systems 23

Klyushin D.A., Petunin D.A., Savkyna.

Analogue of the Glyvenko-Kantelly theorem for the reverse functions of distributing 31

Krak Y.V., Barmak O.V.

About one approach to authentication of portrait images of persons of people from large databases 34

Kuzmych O.I.

Estimations of indignations of the non-autonomous systems solutions 37

Nikitin A.V., Timochko K.B.

Stability in middle quadratic of linear stochastic differential-difference equations
with a few indignations and delays in scalar case 42

Nikitchenko M.C., Shkilnyak S.S.

Spectrum of composition nominative logics..... 44

Utebaev D.

Construction of scheme finite-element method for equation of oscillation with dissipation..... 48

Husainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarz I.V.

On representing of solution of first boundary problem for thermal conductivity equation with delay..... 51

Shusharin Y.V., Lavrenyuk O.I.

Investigation of solutions of linear difference equations with coefficients depending on the Markov chain 60

УРІВНОВАЖЕНІ РОЗБИТТЯ ДЕЯКИХ НЕСКІНЧЕННИХ ДЕРЕВ

Доведено, що для всіх натуральних r, m існує r -розфарбування m -однорідного зліченного дерева, урівноваженого відносно покривної послідовності куль. Для множини вершин зліченного графа доведено існування r -розфарбування малого індексу в частковому випадку.

It is proved that for every $r, m \in \mathbb{N}$ there exists r -coloring of m -regular countable tree balanced with respect to covering sequence of balls. For set of vertices of countable graph existence of r -coloring with small index is proved for partial case.

Нехай $Gr(V, E)$ – злічений зв'язний граф із множиною вершин V і множиною ребер E . Послідовність $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ скінченних підмножин множини V називається [1] покривною послідовністю, якщо виконуються такі умови:

- 1) $V = \bigcup_{n \in \omega} A_n$;
- 2) $A_m \subseteq A_n, m \leq n$;
- 3) кожен індукований підграф $Gr[A_n]$ є зв'язним.

Розглянемо r -розфарбування множини вершин графа $\chi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$. Позначимо: $V_i = \{x \in V : \chi(x) = i\}$. Тоді $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$. r -розфарбування χ називається врівноваженим відносно покривної послідовності $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$, якщо виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n \cap V_1|}{|A_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n \cap V_{21}|}{|A_n|} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n \cap V_{r1}|}{|A_n|} = \frac{1}{r}.$$

Позначимо через $d(x, y)$ довжину шляху (найкоротшого простого ланцюга), що з'єднує вершини x та y . Позначимо $B(x, n) = \{y \in V : d(x, y) \leq n\}$. Індексом $ind \chi$ розфарбування χ множини вершин V називається найменше натуральне число m таке, що для кожного $x \in V$ і для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ $B(x, m) \cap V_i \neq \emptyset$.

У [1] була поставлена така проблема. Нехай $Gr(V, E)$ – злічений локально-скінченний граф, r – натуральне число, $x \in V$. Чи існує r -розфарбування χ множини вершин V , урівноважене відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$ таке, що $ind \chi \leq r$? Теорема 1 дає відповідь на це питання для однорідних дерев.

Лема. Нехай $T(V, E)$ – зліченне локально-скінченне дерево, r – натуральне число, $x \in V$. Якщо степінь кожної вершини дерева перевищує r , то існує розфарбування індексу 1 множини вершин V дерева $T(V, E)$ на r підмножин, урівноважене відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$.

Доведення. Нехай x – корінь дерева $T(V, E)$. Позначимо через S_k множини $\{y_1, y_2, \dots, y_d\}$ усіх вершин дерева, довжина шляху від яких до кореня дорівнює k . Упорядкуємо множини вершин V таким чином: спочатку запишемо корінь x , далі $\{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1d_1}\}$ – довільно впорядковані вершини множини S_1 , потім $\{y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2d_2}\}$ – вершини множини S_2 , упорядковані так: спочатку йдуть усі вершини, суміжні з y_{11} , далі – усі вершини, суміжні з y_{12} і т. д. Множину $V = \{x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1d_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2d_2}, \dots\}$ розфарбуємо періодично кольорами $1, 2, \dots, r$. З умови випливає, що кожна вершина y з множини S_k суміжна, як мінімум, із r вершинами множини S_{k+1} . Завдяки впорядкуванню серед вершин множини S_{k+1} , суміжних з y , є вершини всіх r кольорів. Отже, $|\chi(B(y, 1))| = r$. Оскільки ця рівність виконується для кожної вершини дерева, то індекс цього розфарбування дорівнює 1. Урівноваженість цього розфарбування відносно покривної послідовності куль $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$ очевидна.

Теорема 1. Нехай $T(V, E)$ – зліченне однорідне дерево степеня m , r – довільне натуральне число, $x \in V$. Тоді існує розфарбування множини V у r кольорів, урівноважене відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$, причому індекс розфарбування визначається так:

$$ind \chi = \begin{cases} 1, & r < m, \\ \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil, & m=2, \\ \left\lceil \log_{(m-1)} r \right\rceil + 1, & 2 < m \leq r. \end{cases}$$

Доведення. Зафіксуємо довільну вершину x дерева $T(V, E)$ і будемо вважати її коренем. Якщо $m > r$, то виконуються умови леми і $ind \chi = 1$.

Якщо $2 < m \leq r$, то впорядкуємо множину вершин $V = \{x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1d_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2d_2}, \dots\}$ як у попередній лемі. Елементи множини V періодично розфарбуємо кольорами $1, 2, \dots, r$. Зафіксуємо довільну вершину $y \in V$. Для визначеності будемо вважати, що $y \in S_k$. Зауважимо, що вершина y сполучається шляхом завдовжки i з $(m-1)^i$ вершинами множини S_{k+i} . Виберемо найменше i , для якого $r \leq (m-1)^i$. Завдяки розфарбуванню серед цих $(m-1)^i$ вершин є вершини всіх r кольорів. Отже, $|\chi(B(y, i))| = r$. Оскільки граф однорідний, то це виконується для кожної вершини $y \in V$. Таким чином, це розфарбування має індекс $\lceil \log_{(m-1)} r \rceil + 1$.

Якщо $m = 2$, то це означає, що з кореня x виходять два нескінченні промені: $\{x_1, x_2, \dots, x_d, \dots\}$ і $\{y_1, y_2, \dots, y_d, \dots\}$. Розфарбуємо корінь дерева кольором 1, вершини променя $\{x_1, x_2, \dots, x_d, \dots\}$ – періодично кольорами $2, 3, \dots, r, 1$, а вершини променя $\{y_1, y_2, \dots, y_d, \dots\}$ – періодично кольорами $r, r-1, r-2, \dots, 2, 1$. Очевидно, що для довільної вершини $y \in V$ $|\chi(B(y, \lceil \frac{r+1}{2} \rceil))| = r$. Урівноваженість усіх указаних розфарбувань відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$ очевидна.

Нехай $Gr(V, E)$ – злічений локально-скінченний зв'язний граф, r – натуральне число. Розфарбування множини вершин V назвемо абсолютно врівноваженим відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$, якщо це розфарбування є врівноваженим відносно $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$ для будь-якої вершини $x \in V$. Така проблема була поставлена в [1]. Нехай $Gr(V, E)$ – злічений зв'язний граф, r – натуральне число. Чи існує r -розфарбування χ множини вершин V , урівноважене відносно деякої покривної послідовності таке, що $ind \chi \leq r$. Для локально-скінченних графів ця проблема розв'язана в [1].

Теорема 2. Нехай $T(V, E)$ – зліченне однорідне дерево степеня r . Для нього існує r -розфарбування індексу 1 множини вершин V , яке є абсолютно врівноваженим відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$.

Доведення. Нехай x – корінь дерева $T(V, E)$. Покладемо $\chi(x) = 1$. Для суміжних із x вершин $y_1, y_2, \dots, y_r$ покладемо $\chi(y_1) = 1, \chi(y_2) = 2, \dots, \chi(y_r) = r$. Для кожної вершини y_i суміжні з нею нерозфарбовані вершини розфарбуємо по черзі кольорами $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r$. Отже, для кожної вершини $y \in V$ $|\chi(B(y, 1))| = r$. Таким чином, індекс цього розфарбування дорівнює 1. Доведемо, що це розфарбування є врівноваженим відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$. Покладемо: $V_i = \{y \in V : \chi(y) = i\}$, $S_i = B(x, i) \setminus B(x, i-1)$. Тоді $|S_0 \cap V_1| = 1, |S_0 \cap V_2| = \dots = |S_0 \cap V_r| = 0$. $|S_1 \cap V_1| = |S_1 \cap V_2| = \dots = |S_1 \cap V_r| = 1$. Зазначимо: якщо множина S_i містить k вершин кольору j , то множина S_{i+1} містить $(|S_i| - k)$ вершин кольору j . Отже,

$$|S_2 \cap V_1| = |S_2 \cap V_2| = \dots = |S_2 \cap V_r| = (r-1), \quad |S_3 \cap V_1| = |S_3 \cap V_2| = \dots = |S_3 \cap V_r| = (r-1)^2, \\ \dots \\ |S_n \cap V_1| = |S_n \cap V_2| = \dots = |S_n \cap V_r| = (r-1)^{n-1}.$$

Зауважимо, що

$$B(x, n) \cap V_i = (S_0 \cap V_i) \cup (S_1 \cap V_i) \cup \dots \cup (S_n \cap V_i).$$

Отже,

$$|B(x, n) \cap V_1| = 2 + r - 1 + (r-1)^2 + \dots + (r-1)^{n-1} = 1 + \frac{(r-1)^n - 1}{r-2}, \\ |B(x, n) \cap V_i| = 1 + r - 1 + (r-1)^2 + \dots + (r-1)^{n-1} = \frac{(r-1)^n - 1}{r-2}, i = \overline{2, r}.$$

Урівноваженість розфарбування очевидна.

Зафіксуємо довільну вершину $y \in V \setminus \{x\}$. Розглянемо покривну послідовність $\langle B(y, n) \rangle_{n \in \omega}$ і доведемо, що вказане розфарбування врівноважене відносно цієї послідовності. Позначимо $i = \min\{d(y, x), d(y, y_1)\}$. Нехай $\chi(y) = c_1$. Серед вершин, суміжних з y , є дві вершини кольору c_2 . Отже,

$$|S_0(y) \cap V_{c_1}| = 1, \quad |S_0(y) \cap V_{c_j}| = 0, \quad j = \overline{2, r}, \\ |S_1(y) \cap V_{c_1}| = 0, \quad |S_1(y) \cap V_{c_2}| = 2, \quad |S_1(y) \cap V_{c_j}| = 1, \quad j = \overline{3, r}, \\ |S_2(y) \cap V_{c_1}| = r, \quad |S_2(y) \cap V_{c_2}| = r-2, \quad |S_2(y) \cap V_{c_j}| = r-1, \quad j = \overline{3, r}.$$

Покладемо $s_k(r) = (r-1)^{k-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} |S_2(y) \cap V_{c_1}| &= s_2(r) + 1, |S_2(y) \cap V_{c_2}| = s_2(r) - 1, |S_2(y) \cap V_{c_j}| = s_2(r), |S_2(y) \cap V_{c_j}| = r \quad j = \overline{3, r}, \\ |S_3(y) \cap V_{c_1}| &= s_2(r)(r-1) - 1 = s_3(r) - 1, |S_3(y) \cap V_{c_2}| = s_2(r)(r-1) + 1 = s_3(r) + 1, |S_3(y) \cap V_{c_j}| = s_2(r)(r-1) = s_3(r), \\ & j = \overline{3, r}. \end{aligned}$$

Таким чином, для $k \leq i$ виконуються:

$$\begin{aligned} |S_k(y) \cap V_{c_1}| &= \begin{cases} s_k(r) - 1, & k = 2n-1, n \in N \\ s_k(r) + 1, & k = 2n, n \in N \end{cases}, \\ |S_k(y) \cap V_{c_2}| &= \begin{cases} s_k(r) + 1, & k = 2n-1, n \in N \\ s_k(r) - 1, & k = 2n, n \in N \end{cases}, \\ |S_k(y) \cap V_{c_j}| &= s_k(r), \quad j = \overline{3, r}. \end{aligned}$$

У множині $S_{i+1}(y)$ одна з вершин (позначимо її z) буде мати такий самий колір, що й суміжна з нею вершина $S_i(y)$. Цей збій у фарбуванні еквівалентний заміні кольору одного з елементів із $S_i(y)$ з j_1 на j_2 і подальшому фарбуванню за правилом, викладеним на початку доведення. У $S_i(y) \in s_i(r) \pm 1$ елементів кольору c_1 , $s_i(r) \mp 1$ – кольору c_2 , $s_i(r)$ елементів кожного з кольорів $c_3, \dots, c_r$. Якщо в $S_i(y)$ провести вказану заміну, то в $S_{i+1}(y)$, залежно від того, який колір буде замінено, можливі такі варіанти:

- 1) $s_{i+1}(r) + 2, s_{i+1}(r) - 2, s_{i+1}(r), \dots, s_{i+1}(r)$,
- 2) $s_{i+1}(r) + 2, s_{i+1}(r) - 1, s_{i+1}(r) - 1, s_{i+1}(r), \dots, s_{i+1}(r)$,
- 3) $s_{i+1}(r) - 2, s_{i+1}(r) + 1, s_{i+1}(r) + 1, s_{i+1}(r), \dots, s_{i+1}(r)$,
- 4) $s_{i+1}(r) + 1, s_{i+1}(r) - 1, s_{i+1}(r), \dots, s_{i+1}(r)$,
- 5) $s_{i+1}(r), s_{i+1}(r), s_{i+1}(r), \dots, s_{i+1}(r)$.

Зауважимо, що за існування $s_k(r) \pm \text{const}$ елементів кольору j у множині $S_k(y)$, де $k > i$, у множині $S_{k+1}(y)$ існує $s_k(r) \mp \text{const}$ елементів цього кольору. Нехай $n > i$, тоді для кожного $j = \overline{1, r}$ можемо записати:

$$\frac{|V_j \cap B(y, n)|}{|B(y, n)|} = \frac{1 + s_1(r) + s_2(r) + \dots + s_n(r) + \text{const}}{1 + r + r(r-1) + \dots + r(r-1)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r}.$$

Отже, це розфарбування є врівноваженим відносно покривної послідовності $\langle B(x, n) \rangle_{n \in \omega}$ для будь-якої вершини $y \in V$, тобто це розфарбування є абсолютно врівноваженим.

Така проблема була поставлена в [1]. Нехай $Gr(V, E)$ – зв'язний граф, r – натуральне число. Чи існує r -розфарбування χ множини вершин V , урівноважене відносно деякої покривної послідовності таке, що $\text{ind} \chi \leq r$? Для локально-скінченних графів ця проблема розв'язана в [1].

Теорема 3. Нехай $Gr(V, E)$ – зв'язний граф такий, що для кожної вершини $x \in V$ виконується $\deg x = \omega$ або $\deg x = 1$. Тоді для будь-якого натурального числа r існує розфарбування в r кольорів множини вершин V , яке має індекс ≤ 2 і є врівноваженим відносно деякої покривної послідовності скінченних множин.

Доведення. Розглянемо кістяк $T(V, E_1)$ графа $Gr(V, E)$, $E_1 \subseteq E$. З умови випливає, що дерево $T(V, E_1)$ має принаймні одну вершину x зліченного степеня. Вважатимемо її коренем дерева $T(V, E_1)$. Покривну послідовність $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ скінченних підмножин множини V визначимо таким чином. До множини A_1 віднесемо корінь x і r вершин, суміжних з x . До множини A_2 віднесемо всі елементи з $A_1 = \{x, y_{1,1}, \dots, y_{1,r}\}$ і, крім того, для кожної вершини з A_1 виберемо по r суміжних з нею вершин із множини $V \setminus A_1$, причому множина A_2 має бути впорядкованою так: $A_2 = \{x, y_{1,1}, \dots, y_{1,r}, y_{2,1}, \dots, y_{2,r}, y_{2,r+1}, \dots, y_{2,2r}, \dots, y_{2,(r-1)+1}, \dots, y_{2,r^2}\}$, де $y_{2,kr+1}, \dots, y_{2,2kr}$ – вершини, суміжні з вершиною $y_{1,k}$, $k = \overline{1, r}$. Множини A_n , $n > 2$ сформуємо аналогічно. Очевидно, що послідовність $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ є покривною.

Розфарбування вершин визначимо так: вершину x розфарбуємо в колір 1, а всі вершини, починаючи з $y_{1,1}$ (у порядку, установленому в множинах A_n), – періодично кольорами $1, 2, \dots, r$. Покладемо $V_i = \{y \in V : \chi(y) = i\}$. Значимо $|A_1| = r + 1$. Позначимо $|A_k| = n_k r + 1$, $n_{k-1} < n_k$, k – натуральні числа. Для кожного натурального числа n виконується: $|V_1 \cap A_k| = n_k + 1$, $|V_i \cap A_k| = n_k$, $i = \overline{2, r}$.

Отже, це розбиття є врівноваженим відносно послідовності $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$. Зафіксуємо довільну вершину $y \in V$. Якщо $\deg y = \omega$, то $|\chi(B(y,1))| = r$. Якщо $\deg y = 1$, то з умови випливає, що вершина y суміжна з вершиною z зліченного степеня. За доведеним $|\chi(B(z,1))| = r$, отже, $|\chi(B(y,2))| = r$. Таким чином, індекс розфарбування дерева $T(V, E_1)$, а отже, і графа $Gr(V, E)$ не перевищує 2. Індекс розфарбування графа $Gr(V, E)$ дорівнює 1, якщо в графі немає кінцевих вершин.

1. Protasov I., Banach T. Ball structures and colorings of graphs and groups. – Lviv, 2003.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 519. 633

О. Грищенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
В. Ляшко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
В. Оноцький, асист.

ПРО ОДИН ДВОКРОКОВИЙ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ

Запропоновано двокроковий симетризований різницьовий алгоритм (ДС-алгоритм) для широкого класу систем параболических рівнянь. Досліджено стійкість та апроксимаційні властивості алгоритму для систем, що описують процеси переносу, як із сталими, так і із залежними від просторової змінної коефіцієнтами.

The two-step symmetrized finite difference algorithm (DS-algorithm) for a wide range of systems of parabolic equations is presented in the article. Stability and approximation of the algorithm for processes of transfer defining systems both with constant coefficients and coefficients depending of space value are investigated.

1. Постановка задачі та алгоритм. В області $G \equiv \{(0 \leq t \leq T) \times Q\}$, де $Q \equiv \{\bar{x} \mid |x^{(i)}| \leq \pi, \forall i\}$, шукається наближений розв'язок операторного рівняння

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -A\bar{u} + \bar{f}(\bar{x}), \quad (1)$$

в якому A – лінійний комплекснозначний матрично-диференціальний оператор

$$A = L_1 + L_2 + C(\bar{x}, t); \quad L_1 = \text{grad } B(\bar{x}, t)(\cdot); \quad L_2 = -\text{div}(A(\bar{x}, t)\text{grad}(\cdot)),$$

$A(\bar{x}, t)$, $B(\bar{x}, t)$ і $C(\bar{x}, t)$ – $p \times p$ -матриці, коефіцієнти яких можуть залежати від просторових змінних $\bar{x} \left(\bar{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\} \right)$, часу t і належать простору $\tilde{R}_p$; $\bar{u}$ та $\bar{f}$ – p -вимірні вектори. Крім того, $A > 0$, A , B мають необхідну гладкість, а C і $\bar{f}$ – рівномірно обмежені при $0 \leq t \leq T$.

Нехай B – нормований банаховий простір. Точний розв'язок задачі визначимо як однопараметричну сім'ю $\bar{u}(t)$, кожен елемент якої належить області визначення оператора $A \quad \forall t \in [0, T]$,

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0 \quad (2)$$

$$((\bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)) / \Delta t - A\bar{u}(t)) \rightarrow 0 \quad (3)$$

при

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Позначимо через D множину елементів $\bar{u}_0 \in B$, для кожного з яких існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) при $\bar{u}_0 \in D$, а збіжність у (3) рівномірна за t . Нехай $E_0(t)$ відображає D у B і при фіксованому t установлює відповідність між $\bar{u}_0$ і $\bar{u}(t)$. Тоді $\bar{u}(t) = E_0(t)\bar{u}_0$ є розв'язком задачі для тих $\bar{u}_0 \in D$, для яких існує точний розв'язок.

Нехай задача (1),(2) є коректною за Адамаром [1], тобто: 1) область визначення D перетворення $E_0(t)$ щільна у B ; 2) сім'ю перетворень $E_0(t)$ рівномірно обмежено. І нехай періодична функція $\bar{u} \in D(A) \subset B(Q)$ задовольняє початкові умови (2).

На сітковій множині $\Omega_{h,\tau} = \left\{ (x_i^{(l)}, t_n) \mid x_i^{(l)} = i_l h_{(l)}; \quad t_n = n\tau; \quad i_l = \overline{0, M^{(l)}}; \quad n = \overline{0, 1, 2, \dots}; \quad h_{(l)} = 1/M; \quad l = \overline{1, m} \right\}$, яка покриває множину G , запишемо різницеві апроксимації рівняння (1). Значення сіткової функції $\bar{u}_i^{2n+1}$ визначимо як допоміжні, а $\bar{u}_i^{2n+2}$ – як розв'язок задачі. Область $\Omega_{h,\tau}$ розщепимо на дві: $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$ і $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$. Позначимо через B_h простір функцій, який є сітковим аналогом простору B , а через B'_h – сітковий аналог простору B' .

Точкам підобласті $\Omega_{h,\tau}^{(1,2n+1)}$ поставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$\frac{\bar{u}_i^{2n+1} - \bar{u}_i^{2n}}{\tau} = -A_h^{\alpha} \bar{u}_i^{2n} + \bar{f}_i^{\alpha}, \quad (4)$$

а точкам з $\Omega_{h,\tau}^{(2,2n+1)}$ – неявні різницеві рівняння

$$\frac{\bar{u}_i^{2n+1} - \bar{u}_i^{2n}}{\tau} = -A_h^{\beta} \bar{u}_i^{2n+1} + \bar{f}_i^{\beta}. \quad (5)$$

На часовому кроці $2n+2$ для точок із $\Omega_{h,\tau}^{(1,2n+2)}$ запишемо

$$\frac{\bar{u}_i^{2n+2} - \bar{u}_i^{2n+1}}{\tau} = -A_h^{\beta} \bar{u}_i^{2n+1} + \bar{f}_i^{\beta}, \quad (6)$$

а для точок із множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,2n+2)}$ –

$$\frac{\bar{u}_i^{2n+2} - \bar{u}_i^{2n+1}}{\tau} = -A_h^{\gamma} \bar{u}_i^{2n+2} + \bar{f}_i^{\gamma}. \quad (7)$$

Тут A_h^{θ} – різницевий оператор з матричними коефіцієнтами, який апроксимує відповідний матрично-диференціальний оператор на триточковому шаблоні вздовж кожної змінної $x^{(l)}$ з матричними коефіцієнтами, узятими на часовому кроці θ . Використовуючи для знаходження розв'язку задачі (1) ДС-алгоритм [2], розрахунок проведемо спочатку в усіх точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(1,2n+1)}$ за явною формулою (4). Після цього розв'язок рівняння (5) у точках множини $\Omega_{h,\tau}^{(2,2n+1)}$ знаходиться явно. Аналогічно знаходиться розв'язок на кроці $2n+2$.

2. Двокрокові симетризовані алгоритми для моделювання процесів переносу. Для процесів переносу операторне рівняння (1) набуде векторного вигляду

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^{(s)}} A^{(s)} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^{(s)}} - B^{(s)} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^{(s)}} \right) - C \bar{U} + \bar{f}, \quad (8)$$

де

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{(s)} & \dots & \alpha_{1,p}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p,1}^{(s)} & \dots & \alpha_{p,p}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad B^{(s)} = \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(s)} & \dots & b_{1,p}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p,1}^{(s)} & \dots & b_{p,p}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{p,1} & \dots & c_{p,p} \end{pmatrix},$$

$$\bar{U} = \{U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(p)}\}^T, \quad \bar{f} = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)}\}^T, \quad U^{(k)} = U^{(k)}(X, t),$$

$$f^{(k)} = f^{(k)}(X, t) \quad (k = \overline{1, p}), \quad \alpha_{i,j}^{(s)} = \alpha_{i,j}^{(s)}(X, t) \geq 0, \quad b_{i,j}^{(s)} = b_{i,j}^{(s)}(X, t), \quad c_{i,j}^{(s)} = c_{i,j}^{(s)}(X, t); \quad (s = \overline{1, m});$$

$$X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}; \quad (i, j = \overline{1, m}).$$

При цьому на введених сіткових множинах $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$ і $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$ запишемо рівняння (4)–(7), в яких конвективний член апроксимуємо центральними різницями

$$A_h^{\alpha} \bar{U}_i^{\beta} = - \sum_{s=1}^m \left(D_{i_s}^{(s)\alpha} (\bar{U}_{i_s+1}^{\beta} - \bar{U}_{i_s-1}^{\beta}) / (2h_s) \right) + \sum_{s=1}^m \left(A_{i_s+1}^{(s)\alpha} (\bar{U}_{i_s+1}^{\beta} - \bar{U}_{i_s}^{\beta}) - A_{i_s}^{(s)\alpha} (\bar{U}_{i_s}^{\beta} - \bar{U}_{i_s-1}^{\beta}) \right) / h_s^2 - C_i^{\alpha} \bar{U}_i^{\beta}; \quad (9)$$

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_m); \quad (i_s = \overline{1, M_s}; \quad s = \overline{1, m}).$$

У цьому разі ДС-алгоритм (4)–(7) у всіх внутрішніх точках сіткової множини апроксимує розв'язок рівняння (1) з похибкою апроксимації $O(\tau^2 + h^2)$, де $h = \max_i h_i$, похибка в граничних точках залежить від апроксимації граничних умов.

Моделі зі сталими матричними коефіцієнтами. Стійкість алгоритму. Вважатимемо спочатку, що елементи матриць A , D та C не залежать від координат, а вектор-функція розв'язку періодична. В іншому разі її можна продовжити в деяку область таким чином, щоб у цій області вона стала періодичною. Для доведення стійкості перейдемо в банаховий простір B' коефіцієнтів Фур'є. Уведемо сіткові векторні функції $\bar{\varphi}_l(m_s) = \{\xi_l^{(1)}(m_s), \dots, \xi_l^{(p)}(m_s)\}^T$ ($l = 1, 2$), складені з амплітудних членів m_s -тих гармонік розвинення допоміжних значень ($l = 1$) і розв'язку ($l = 2$) у ряди Фур'є

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_i^{2n+1} &= \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_1^{n+1}(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l}, \\ \bar{\mathbf{U}}_i^{2n+2} &= \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_2^{n+1}(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l}.\end{aligned}\quad (10)$$

$B(m_s)$ – діагональна матриця, побудована з коефіцієнтів розвинення початкової вектор-функції в ряд Фур'є.

Теорема 1. Якщо кожна з функцій вектора початкового розподілу розв'язку задачі розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є, а крок τ сталий або змінюється не частіше ніж через парне число кроків, C і всі $A^{(s)}$ невід'ємні, то ДС-алгоритм (4)–(7) за виконання умов апроксимації рівняння (8) із сталими матричними коефіцієнтами безумовно стійкий.

Доведення. Нехай розв'язок задачі можна подати у вигляді ряду Фур'є (10), а $\|\bar{\Phi}_2^0(m_s)\| = 1$ у просторі коефіцієнтів Фур'є B' (умова узгодженості). Тоді, використовуючи різниці рівняння (4),(7) з урахуванням (9), одержимо

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1^{n+1} &= \{E - \tau \tilde{A}\} \bar{\Phi}_2^n, \\ \bar{\Phi}_2^{n+1} &= \{E + \tau \tilde{A}\}^{-1} \bar{\Phi}_1^{n+1},\end{aligned}$$

$$\text{де } \tilde{A} = 2 \sum_{s=1}^m \left(A^{(s)} (1 - \cos \theta_s) h_s^{-2} - I D^{(s)} \sin \theta_s h_s^{-1} \right) + C.$$

Після виключення з цих рівнянь $\bar{\Phi}_1^{n+1}$ маємо

$$\bar{\Phi}_2^{n+1} = (E + \tau \tilde{A})^{-1} (E - \tau \tilde{A}) \bar{\Phi}_2^n. \quad (11)$$

Звідси випливає, що матриця переходу

$$G_1 = (E + \tau \tilde{A})^{-1} (E - \tau \tilde{A}).$$

Використовуючи рівняння (5), (6), після аналогічних міркувань встановлюємо, що $G_2 = (E - \tau \tilde{A}) (E + \tau \tilde{A})^{-1} = G_1$.

Оскільки $\text{Re } \tilde{A} = 2 \sum_{s=1}^m A^{(s)} (1 - \cos \theta_s) / h_s^{-2} + C \geq 0$ при $A^{(s)} \geq 0$ і $C \geq 0$, то згідно з отриманими у [2] результатами

$\|G\|_{B'h} \leq 1$, а оскільки простори B'_h і B_h ізоморфні з рівними нормами, то

$$\|\bar{\mathbf{U}}^{2n+2}\| \leq \|\bar{\mathbf{U}}^{2n}\| \leq \dots \leq \|\bar{\mathbf{U}}^0\|.$$

Доведемо збіжність ряду (10). Для цього помножимо обидві частини (11) на діагональну матрицю $B(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l}$ і підсумуємо результат за всіма m_s :

$$\sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_2^{n+1}(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l} = \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_2^n(m_s) G(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l}.$$

Ураховавши, що $\max_{m_s} \|G(m_s)\|_{B_h} = q \leq 1$, $\forall n = 1, 2, \dots$, маємо

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_2^{n+1}(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l} \right\| &\leq q^{n+1} \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \|B(m_s)\| |\bar{\Phi}_2^n(m_s)| = \\ &= q^{n+1} \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \|B(m_s)\| |\bar{\Phi}_2^0(m_s)|.\end{aligned}$$

Отже, функція (10) є розв'язком різницевих рівнянь (4)–(7).

Ураховуючи метрику, уведену в просторі сіткових функцій, легко встановити, що для розв'язку різницевої задачі (4)–(7)

$$\|\bar{\mathbf{U}}^n\|_{L_{2h}}^2 = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} \left| \sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B(m_s) \bar{\Phi}_2^{n+1}(m_s) e^{I \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l} \right|^2 h_1 h_2 \leq$$

$$\leq q^{2n} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} \left(\sum_{s=1}^m \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \|B(m_s)\| \|\tilde{\varphi}_2^0(m_s)\| \left| e^{i \sum_{l=1}^m i_l m_l h_l} \right| \right)^2 h_1 h_2 = q^{2n} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} \left(\sum_{s=1}^m |U_i^{(s)0}|^2 \right) h_1 h_2 = \|\tilde{U}^0\|_{L_{2h}}^2.$$

Звідси випливає, що $\|\tilde{U}^n\|_{L_{2h}}^2 \leq \|\tilde{U}^0\|_{L_{2h}}^2$. Ця нерівність установлює безумовну стійкість розв'язку різницевої задачі для рівнянь (4)–(7) за початковими даними в просторі Гільберта. Теорему доведено.

Стійкість алгоритму для рівнянь із матричними коефіцієнтами, залежними від координат. Нехай при використанні оператора (9) у системі рівнянь (4)–(7) $\alpha = \beta = \gamma = 2n + 1$. Користуючись методом заморожених коефіцієнтів, у деякій точці сіткової області Ω_{ht} в операторі (9) зафіксуємо значення елементів матриць і позначимо їх через

$$M_1 = A_{i_s}^{(s)2n+1}, \quad M_2 = A_{i_s+1}^{(s)2n+1}, \quad M_3 = C_i^{2n+1}, \quad M_4 = D_{i_s}^{(s)2n+1}.$$

Теорема 2. Якщо в операторі (9) матричні коефіцієнти залежать від координат, то при виконанні всіх умов теореми 1 ДС-алгоритм (4)–(7) є локально стійким за критерієм Годунова – Рябенського [3], а ДС-алгоритм із замороженими коефіцієнтами безумовно стійкий за початковими даними.

Доведення. Міркуючи так само, як і при доведенні теореми 1, для алгоритму (4)–(7) із замороженими коефіцієнтами встановимо, що

$$\tilde{\varphi}_1^{n+1} = \{E - \tau \tilde{A}\} \tilde{\varphi}_2^n, \quad \tilde{\varphi}_2^{n+1} = \{E + \tau \tilde{A}\}^{-1} \tilde{\varphi}_1^{n+1}, \quad G = (E + \tau \tilde{A})^{-1} (E - \tau \tilde{A}), \quad \text{де}$$

$$\tilde{A} = M_3 + \sum_{s=1}^m \left((M_1^s + M_2^s) (1 - \cos \theta_s) - 2I \left(M_4^s h_s / 2 + (M_2^s - M_1^s) h_s^{-2} \right) \sin \theta_s \right) h_s^{-2}.$$

Оскільки $M_1^s \geq 0$, $M_2^s \geq 0$ та $M_3 \geq 0$, то $\operatorname{Re} \tilde{A} \geq 0$ і $\max_{m_s} \|G(m_s)\| \leq 1$.

Використовуючи далі схему доведення попередньої теореми та критерій Годунова – Рябенського, установлюємо локальну стійкість алгоритму для рівняння зі змінними коефіцієнтами й безумовну стійкість алгоритму із замороженими коефіцієнтами. Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо в (4)–(7) покласти $\alpha = 2n$, $\beta = 2n + 1$, а $\gamma = 2n + 2$, то його стійкість установлюється аналогічно.

Зауваження 2. Запропонований у роботі підхід можна використовувати й для систем рівнянь з мішаними похідними, попередньо зробивши відповідну заміну змінних.

Зауваження 3. Можна розширити отримані результати й для ДС-алгоритмів з різницями проти потоку.

1. Андерсон Д., Танненхил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен: В 2 т. – Т. 2. – М., 1990; 2. Грищенко О. ДС-різницеви алгоритми розв'язування крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – № 1; 3. Рухт-майер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М., 1972.

Надійшла до редколегії 4.11.2005

УДК 519.876.5

Ю. Загородній, канд. техн. наук

МОДЕЛІ ІМІТАЦІЇ РОСТУ ТА РОЗВИТКУ РОСЛИН У СПРИЯТЛИВИХ І НЕБЕЗПЕЧНИХ УМОВАХ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Розглядаються загальні підходи до побудови й дослідження імітаційних моделей розвитку рослинного організму в різних умовах довкілля. Пропонується алгоритм обрахунків інтенсивності процесів росту й розвитку організму при вірусних інфекціях та інших стресових умовах довкілля. Рослина розглядається як складна система управління процесами свого росту для забезпечення реалізації генетичної програми.

The common approaches for building and investigation of imitating models of evolution of plant constitution in various conditions of environment are consider. It is propose an algorithm of accounts of activity of growth process and constitution evolution if virus infection or other stress conditions presence. The plant consider as multiple own growth process control system for protection of genetic program realization.

Рослина, як і будь-який біологічний організм, є складною системою. Її розвиток – сукупність цілеспрямованих якісних структурних і функціональних змін – відбувається за рахунок зростання кількості клітин усіх органів. Клітини, у свою чергу, проходять кілька стадій своєї життєдіяльності: поділ, ріст, диференціація, старіння та вмирання. Усі ці процеси регулюються генетичною системою, залежать від стану середовища й формують основні ознаки протягом вегетації.

На ріст і розвиток рослин впливає велика кількість екологічних факторів. Не всі вони є рівноцінними. Деякі фактори можна розглядати як ті, що сприяють реалізації генетичної програми особин, а інші – як ті, що лімітують розвиток. Відомо, що існує велика кількість вражаючих факторів (наприклад, різні штами вірусів), які спроможні модифікувати генетичну систему хазяїна і тим самим впливати на ріст організму [1-4]. Тому основною метою наших дослі-

джен була розробка алгоритмів обрахунків функцій інтенсивності процесів росту рослин у різних, у першу чергу, стресових умовах довкілля.

Під системою опису рослини будемо розуміти сукупність трьох множин:

$$S_p = \{X, M(Z), R\}, \quad (1)$$

де $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ – множина кількісних характеристик стану рослини, серед яких є кількісні ознаки росту (напр., маса рослини чи її частин), $R = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$ – множина відношень між елементами множини X (загальні обмеження, функціональні зв'язки, процеси тощо), які відображені деяким узагальнюючим оператором [7], $M = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ – множина управлінських рішень, які впливають на процеси росту, Z – множина засобів, що використовуються за цих впливів (людська праця, техніка тощо).

Вибір множин системи (1) виділяє модель конкретної рослини та її **середовище** як множину E , в яку входять елементи, що знаходяться у відношеннях з елементами X , але не належать до них. Крім того, незмінна в часі фіксація множини R формалізується математичним графом і описує **структуру** системи. **Станом** системи будемо називати зафіксоване в часі значення числових характеристик елементів множини X .

Цільовою поведінкою [5, 6] системи (1) за вегетаційний період часу $t \in [0, T]$ будемо називати послідовну зміну станів, яка визначається взаємодією елементів множин X та R , має початковий стан X^0 і веде до досягнення стану з множини цільових станів Z_X^0 . Швидкість такої зміни визначається лінійною комбінацією значень деяких дійсних функцій $I_e^R(t, X, R, Z_X^0)$, $e = \overline{1, N_I}$ – функцій інтенсивності процесів, які можуть бути розв'язком такої задачі оптимізації:

$$\begin{aligned} I_e^R(t, X, R, Z_X^0) &= \mu_p I_e(t, X, R, Z_X^0) \\ \mu &\in D(t) \subseteq R_+^{N_p} : \sum_{p=1}^{N_p} g_p \mu_p \rightarrow \max, \\ e &= \overline{1, N_p N_{pr}}; p = \overline{1, N_p}, g_p \in R_+ \end{aligned} \quad (2)$$

де e, p – відповідно, загальний номер процесу в системі рослини і номер підсистеми, $I(t, X, R, Z_X^0)$ – неперервна вектор-функція потенційної інтенсивності процесів для забезпечення реалізації ідеальної траєкторії, яка описується дійсною частково-неперервною функцією $W^{id}(t) \in X$ (напр., ріст біомаси) і реалізує свою генетичну програму в ідеальних умовах дії екологічних факторів (вектор $E(t) = E^{opt}(t)$), $W(t) \in X$ – функція тієї самої кількісної ознаки, але в реальних умовах – умовах дії **лімітуючих чи стресових факторів**, які описуються за допомогою співвідношення

$$E(t) = E^{opt}(t) + E^z(t), \quad (3)$$

де $E^z(t)$ – вектор різниці кількісних характеристик екологічних факторів від сприятливих значень, $D(t)$ – деяка допустима множина значень шуканих змінних – елементів вектора μ .

При потраплянні в організм хазяїна патогенної культури (вірусу), кількісна характеристика якого (напр., концентрація) визначається додатною неперервно-диференційованою функцією $v(t)$, змінюються потенційна інтенсивність процесів вірусної репродукції та обмеження, які формують допустиму множину $D(t)$.

Підсистемою системи (1) будемо називати систему

$$S_p^j = \{X^j, M, R^j\}, j = \overline{1, N_p}, \quad (4)$$

якщо виконуються властивості

$$\begin{aligned} X^j &\subset X, R^j \subseteq R \\ \bigcup_{j=1}^{N_p} X^j &= X; \bigcup_{j=1}^{N_p} R^j \subseteq R. \end{aligned}$$

Властивість $R^0 = R \setminus (\bigcup_j R^j) \neq \emptyset$ визначає властивість **емергентності**, тобто неможливості звести всі властивості системи росту рослин до суми властивостей її підсистем.

Крім того, кожна підсистема може бути описана як повна система на відповідному **рівні ієрархії**, тобто розділяється на свої власні підсистеми. Основною задачею ієрархії системи є оцінка вищих рівнів, виходячи не тільки з безпосередньої залежності від елементів множин підсистем, але й від їх відношень.

Кожна підсистема "j" має свою множину цільових станів Z_X^j із такими властивостями:

- 1) якщо $Z_X^0 \neq \emptyset$, то $Z_X^j \neq \emptyset$ для всіх $j = \overline{1, N_p}$, де N_p – кількість підсистем даного рівня ієрархії;
- 2) якщо $X^c \in Z_X^0$ і $X^{jc} \subset X^c$, то $X^{jc} \in Z_X^j$.

Для оцінки продуктивності вирощування культурних рослин в агроєкосистемах введемо таку **виробничу функцію**:

$$Y = F(S(X, Q, v, M_1); M_2), \quad (5)$$

де Y – кількісний показник продуктивності популяції рослин (напр., кількість зібраного урожаю), M_1, M_2 – множина управлінських впливів, які мають місце, відповідно, під час вирощування й збирання урожаю, X – множина змінних стану моделі росту популяції, Q – множина коефіцієнтів моделі, $v \in \{0,1\}$ – індикатор наявності вражаючого фактора (напр., вірусу).

Задача теорії виробництва полягає в максимізації прибутків агрофірми та мінімізації антропогенного навантаження на агроєкосистему. Нехай p – ціна реалізації одиниці врожаю агрофірми, w – вектор витрат на одиниці виробничих факторів. Тоді задача має вигляд

$$D(M) = pF(S(X, Q, v, M_1); M_2) - \sum_{i=1}^{N_M} w(i)m_i \rightarrow \max, \quad (6)$$

де $D(M)$ – прибуток агрофірми за множини проведених агрозаходів M ($M = \{M_1, M_2\}$), N_M – загальна кількість елементів (потужність) множини заходів M .

Обмеження на антропогенне навантаження на агроєкосистему при вирощуванні рослин і збиранні врожаю описується такою нерівністю:

$$A(M_1, M_2) \leq A_0, \quad (7)$$

де $A: M \rightarrow R$ – оператор, який описує рівень комплексного антропогенного впливу на екосистему при проведенні агрозаходів множини M , A_0 – максимально допустиме значення такого рівня. Це значення може вимірюватися, наприклад, в енергетичних (ккал) або грошових одиницях (тис. грн), або в одиницях концентрації забруднюючих речовин (г/м³).

Позначимо через $w_j(i)$ вартість одиниці засобу j при використанні його при i -му управлінському впливі. Тоді витрати на управління можна підрахувати за формулою

$$w(i) = \sum_j a_{ij} m_i w_j(i), \quad (8)$$

де a_{ij} – кількість одиниць засобу j на одиницю використання i -го заходу.

Узагалі, у множини X системи (1) можуть входити такі неперервні кусково-диференційовані функції:

1) середня біомаса рослини в популяції $W(t)$;

2) біомаса підсистеми p $W_p(t)$;

3) кількісна характеристика середнього числа неподільних елементів (напр., клітин разом з навколоклітинним середовищем) у підсистемі p з віком в інтервалі $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ $n_p(\tau, t)\Delta\tau$ за аналогією з функцією чисельності популяцій.

У розглянутих практичних розрахунках число особин як у самій популяції, так і в її групах настільки велике, що відмова від цілочисельності не приводить до помітної помилки [5]. Крім того, має виконуватися така умова для функції загальної чисельності неподільних елементів:

$$N_p(t) = \int_0^\infty n_p(\tau, t) d\tau < \infty; \quad (9)$$

4) вектор кількості речовин (структуруючих блоків) у підсистемі $R_p(t)$;

5) вектор інтенсивності процесів (зміни концентрацій речовин) $I_p(t)$.

Усі розглянуті вище функції є неперервними й відповідають такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_p^0(t, \tau)}{\partial t} = -l_p(t) \frac{\partial n_p^0(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p(t) n_p^0(t, \tau), \tau < t_d \\ n_p^0(t, 0) = 2\theta_p(t) n_p^0(t, t_d) \\ n_p^1(t, t_d) = (1 - \theta_p(t)) n_p^0(t, t_d) \\ \frac{\partial n_p^1(t, \tau)}{\partial t} = -l_p(t) \frac{\partial n_p^1(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p(t) n_p^1(t, \tau), \tau \geq t_d \\ n_p(t, \tau) = \begin{cases} n_p^0(t, \tau); \tau < t_d \\ n_p^1(t, \tau); \tau \geq t_d \end{cases} \\ N_p(0) = \int_0^\infty n_p(0, \tau) d\tau = N_p^{0i} \end{cases} \quad (10)$$

$$W_p^S(t) = \int_0^\infty n_p(t, \tau) w_p(\tau) d\tau \quad W_p(t) = W_p^S(t) + \sum_{i=1}^{N_R} A^{0i} R_p^i(t) \quad W(t) = \sum_{p=1}^{N_P} W_p(t); W^R(t) = \sum_{p=1}^{N_P} W_p^R(t)$$

$$R_p^i(t+h) = R_p^i(t) + h \sum_{e=1}^{N_I} \beta_{ie} I_e(t); W_p^{RS}(t+h) = W_p^{RS}(t) + h \sum_{e=1}^{N_I} \gamma_{ep} I_e(t),$$

при цьому функції $l_p(t), s_p(t)$ – функції, які визначаються з умови, що неперервно диференційована функція $W_p(t)$ є апроксимацією функції $W_p^R(t)$.

Динаміка функції загальної чисельності клітин підсистеми p $N_p(t)$, яка визначається рівнянням (9), описується таким диференціальним рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{dN_p(t)}{dt} &= \theta_p(t)n_p^0(t, t_d) - s_p(t)N_p(t) = \frac{1}{2}l_p(t)n_p^0(t, t_d) - s_p(t)N_p(t); t \geq t_p^0, \\ N_p(t_p^0) &= N_p^0 \end{aligned} \quad (11)$$

де $t_p^0 \geq 0$ – час початку розвитку підсистеми рослини.

Такі функції:

$$\begin{aligned} n_p^0(t, \tau) &= C_p e^{-S_p(t)} F_p^0(L_p(t) - \tau) \\ n_p^1(t, \tau) &= C_p e^{-S_p(t)} F_p^1(L_p(t) - \tau) \end{aligned} \quad (12)$$

є розв'язком системи (12) при $t \geq t_p^0$, де $C_p \geq 0$ – константа, $S_p(t) = \int_{t_p^0}^t s_p(h)dh$, $L_p(t) = \int_{t_p^0}^t l_p(h)dh$, $F_p^0(t - \tau), F_p^1(t - \tau)$ –

будь-які неперервні й диференційовані функції на множині дійсних невід'ємних чисел, для яких виконується така умова:

$$\begin{aligned} F_p^0(L_p(t) - 0) &= 2\theta_p(t)F_p^0(L_p(t) - t_d) \\ F_p^1(L_p(t) - \tau) &= (1 - \theta_p(t - \tau + t_d))F_p^0(L_p(t) - t_d) \end{aligned} \quad (13)$$

звідки

$$\theta_p(t) = \frac{F_p^0(L_p(t) - 0)}{2F_p^0(L_p(t) - t_d)}.$$

Приклад. Як приклад розв'язку системи (10) розглянемо такі функції:

$$\begin{aligned} F_p^0(L_p(t) - \tau) &= e^{-a_p(L_p(t) - \tau)^2 + b_p(L_p(t) - \tau)} [c_p + d_p(L_p(t) - \tau)]^{-g_p} \\ n_p(t, \tau) &= C_p e^{-S_p(t)} F_p^0(L_p(t) - \tau) \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи ці функції в умову моделі (10), маємо

$$\theta_p(t) = \frac{F_p^0(L_p(t) - 0)}{2F_p^0(L_p(t) - t_d)}.$$

Функцію $\theta(t)$ можна зобразити у вигляді

$$\theta_p(t) = \theta_{p0} f_p(t) e^{-r_p L_p(t)}, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} r_p &= 2a_p t_d \\ f_p(t) &= \left[\frac{c_p + d_p L_p(t)}{c_p + d_p (L_p(t) - t_d)} \right]^{-g_p}. \end{aligned}$$

Динамічна модель росту будь-якої підсистеми в умовах фітовірусної інфекції описується такою системою диференціальних рівнянь [4, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{pv}(t)}{dt} &= \frac{dW_p(t)}{dt} - \frac{k_2 k_1 (1 - a) W_{pv}(t) v_p(t)}{1 + (1 - a) k_1 v_p(t)} \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{(ck_2(1 - a) - 1) k_1 W_{pv}(t) v_p(t)}{1 + (1 - a) k_1 v_p(t)} - b_1 v_p^2(t) \\ \frac{dI_p(t)}{dt} &= k_3 V_p(t) - k_4 W_{pv}(t) I_p(t) \\ \frac{dR_{pv}}{dt} &= \frac{dR_p}{dt} - \beta_{pv} \frac{(ck_2(1 - a) - 1) k_1 W_{pv}(t) v_p(t)}{1 + (1 - a) k_1 v_p(t)} \end{aligned} \quad (16)$$

за початкових умов: $W_{pv}(t_{inf}) = W_p(t_{inf})$; $V(t_{inf}) = 1$; $I(t_{inf}) = 0$, де $t_{inf} \geq 0$ – час проникнення вірусу в підсистему рослини. Якісний зміст коефіцієнтів моделі (17) наведено в таблиці.

Таблиця. Зміст коефіцієнтів моделі (17)

Коефіцієнт	Якісний зміст у моделі
k_3	Темп росту інфекційності (кількісного титру вірусної інфекції)
k_4	Темп відновлювання після враження (можливо, $k_4 = 0$)
k_1	Темп утворення комплексу "патоген – особина"
$0 \leq k_2 \leq 1$	Темп утворення нових патогенів з комплексу "вірус – організм"
$1 - a$	Доля рослинного матеріалу, яка вражена патогеном (тобто утворила з ним комплекс)
c	Темп зростання концентрації патогену
b_1	Темп оздоровлення популяції за проведеним відповідним заходом протягом вегетаційного періоду

Таким чином, використовуючи вищенаведені моделі, можна розробити систему імітації зростання популяції в сприятливих і в стресових (у тому числі, патологічних) умовах.

Для комп'ютерної імітації росту рослини використовується об'єктно-орієнтований підхід на основі середовища програмування Delphi 4 [8]. До системи імітації входять такі блоки:

- блок імітації значень екологічних факторів протягом періоду дослідження зростання популяції, результатом роботи якого є бази даних екологічного стану середовища;
- математичні моделі, які формалізують множини відношень R системи рослини (1);
- програмне забезпечення, яке реалізує алгоритми імітації на базі даних моделей;
- відображення кількісних ознак продуктивності популяції рослин на екрані монітора, аналіз вихідної інформації;
- бази даних, що зберігають якісні характеристики популяцій, які вже імітувалися в системі.

В імітаційній реалізації моделей росту рослин клас "Рослина" розглядається як нащадок класів "Підсистема" і "Клітина" (рис. 1).



Рис. 1. Рослина як складна система

На рис. 2 відображена схема взаємодії кількісних характеристик входів і виходів імітаційного експерименту дослідження росту й розвитку рослин.

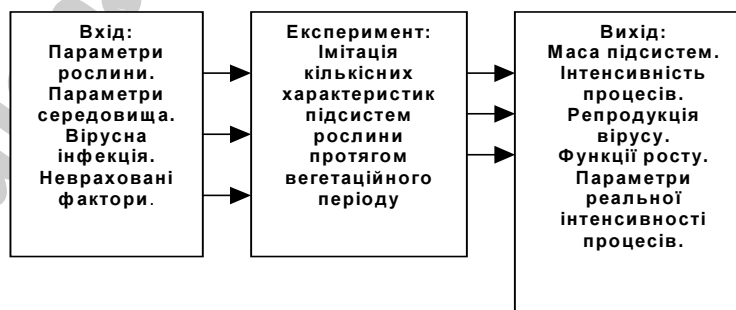


Рис. 2. Схема проведення імітаційного експерименту

Як приклад розглянемо імітаційну модель росту рослин квасолі та процесу бульбочкової азотфіксації на їх коренях [4].

Система рослини (клас Tplant) складається з шести підсистем (клас TSubsystem): насіння (1), корінь (2), стебло (3), листя (4), плід (5), азотфіксуючі бульбочки (6). Підсистеми 2, 3, 4 складаються з клітин (клас TCell). Вектор речовин складається з трьох компонент: $R(t) = (R_1(t), R_2(t), R_3(t))$, відповідно, концентрацій азотних сполук (N), вуглеводів (C) і води (H). Вектор інтенсивності процесів $I(t)$ складається з 18 компонент, які описують процеси обміну, зростання та хімічних трансформацій вищенаведених речовин.

Середовище задається вектором $E(t)$ з такими елементами: $e_1(t)$ – температура, $e_2(t)$ – вологість ґрунту, $e_3(t)$ – інтенсивність сонячної радіації (Дж/м²) та $e_4(t)$ – концентрація азотних сполук у ґрунті (безрозмірний нормований показник, тобто $0 \leq e_4(t) \leq 1$).

Коефіцієнти моделі підбиралися таким чином, щоб результати імітаційної моделі збігалися з результатами багаторічних досліджень, які проводилися разом зі співробітниками біологічного факультету КНУ імені Тараса Шевченка [4].

Алгоритм обрахунку оптимальних процесів росту рослин спирається на розв'язування задачі (2). Як стресовий фактор розглядалася концентрація азотних сполук у ґрунті. Якщо її величина достатня, то рослина не підтримує процес формування азотфіксуючих бульбочок (тобто його інтенсивність прямує до 0). Інакше кажучи, іде процес формування бульбочок (підсистеми б), які мають компенсувати недостачу азотних сполук у ґрунті.

Цікавим результатом є отримані динаміки кількості вуглеводних сполук у листі та кількості азотфіксуючих бульбочок залежно від норми азотних сполук у ґрунті. Від'ємність значення інтенсивності обміну вуглеводів на початку вегетативного періоду каже про властивість молодого листа брати вуглеводи від стебла, а вже потім іде прискорений процес віддачі продуктів фотосинтезу. Імітаційна модель показує катастрофічне зменшення бульбочок, ріст яких підтримує рослина, коли у ґрунті стає достатньо готових азотних сполук, що узгоджується з біологічними результатами.

Таким чином, імітаційна система дозволяє описувати процеси росту, ставлячи нові задачі з виявлення причинно-наслідкових закономірностей. Алгоритми обрахунків оптимальних процесів дають можливість отримувати розв'язки системи моделювання росту й розвитку рослин у певних екологічних умовах і дозволяють проводити імітацію процесів на будь-якому рівні пізнання системи "рослина – середовище". Застосування системи управління для моделей рослин дає відповіді на ряд практичних питань з вирощування здорового рослинного врожаю.

1. Загородній Ю., Бойко А. Математичні моделі в дослідженні вірусів рослин. – К., 2001; 2. Торнли Дж. Математические модели физиологии растений. – К., 1982; 3. Мусієнко М. Фізіологія рослин. – К., 2001; 4. Загородній Ю. Використання моделей росту рослин у дослідженні шляхів сталого розвитку агроєкосистем // Вісн. ХІСП. – 2002. – № 2; 5. Динамическая теория биологических популяций // Под ред. Р. Полуэктова. – М., 1974; 6. Топаж А., Полуэктов Р. Принцип оптимальности в математических моделях органогенеза // Мат. моделирование. – 2005. – № 7. – Т. 17; 7. Бейко І. Розвиток методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей // Вісн. "Кібернетика". – 2002. – № 3; 8. Дарахвелидзе П., Марков Е. Программирование в Delphi 4. – С.-Пб., 1999; 9. Войтенко В., Загородній Ю. Створення проєкційної системи використання моделей росту та розвитку рослин в умовах фітотвірусної інфекції // Вісн. ЖІТІ. – 2002. – № 16.

Надійшла до редколегії 4.11.2005

УДК 519.863

О. Заславська, асп.,
Г. Доленко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПОСЕРЕДНИКА В ОПТОВІЙ ТОРГІВЛІ

Розглядається багатокритеріальна задача оптимізації діяльності торговельного посередника з урахуванням категорій оптових знижок. Запропоновано підхід до її розв'язання.

Multiobjective optimization model of middleman's activity in wholesale trade is discussed. Approach to its solving is proposed.

Вступ. Управління бізнес-процесами безпосередньо пов'язане з проблемою прийняття рішень. Необхідність урахування багатьох факторів, таких як прибуток, ризик, витрати і т. д., що часто є суперечливими, вимагає розгляду задач прийняття рішень у багатокритеріальних постановках.

Особливістю задач оптимізації бізнес-процесів за сукупністю критеріїв є наявність керівника або експерта – особи, що приймає рішення (ОПР), яка визначає додаткову інформацію для знаходження компромісного рішення на множині ефективних альтернатив.

У роботі [1] сформульовано й досліджено однокритеріальну задачу оптимізації прибутку торговельного посередника з урахуванням оптових знижок; у [2] для її розв'язання запропоновано декомпозиційний алгоритм. У даній роботі ця задача розглядається у багатокритеріальній постановці.

Постановка задачі. Розглядається однопродуктовий ринок, на якому діє множина фірм-виробників $P = \{P_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\}$, що реалізують товар оптом. Кожна фірма-виробник $P_i, i \in I$ має власну схему оптових знижок [1]. На ринку також діють фірми-замовники, з яких складається множина $F = \{F_j, j \in J = \{1, 2, \dots, m\}\}$. Кожна фірма $F_j, j \in J$ бажає придбати товар за ціною r_j кількістю q_j одиниць, що не завжди дозволяє їй отримати оптову знижку у виробника. Для задоволення замовлень на товар фірм $F_j, j \in J$ на ринку діє посередник F_0 .

Прийняття рішень посередником полягає у визначенні підмножини замовників і необхідної кількості товару з відповідних оптових категорій виробників, що задовольняє сукупність вимог з обмежень.

Позначимо $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m)$ вектор бульових змінних, де

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо посередник погоджується виконати } j\text{-те замовлення,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Позначимо $\gamma_i = (\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^k, \dots, \gamma_i^{k_i^*})$ вектор бульових змінних, де

$$\gamma_i^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо посередник купує товар у } i\text{-го виробника з категорії } k \in K_i, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Актуальною для посередника є багатокритеріальна постановка з критеріями: прибуток, привабливість замовника та ризик.

Прибуток посередника – це різниця між доходом, який він отримує від реалізації товару фірмам-замовникам, і витратами на закупівлю необхідної кількості товарів з урахуванням оптових знижок постачальників [1]:

$$U(\delta, \gamma, x) = \sum_{j \in J} r_j q_j \delta_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} c_i^k \gamma_i^k x_i^k,$$

де r_j , q_j – ціна та кількість одиниць товару, яку бажає придбати j -й замовник, $j \in J$; x_i^k – кількість товару, яку посередник закуповує в i -го виробника за ціною c_i^k з категорії знижок $k \in K_i$.

З метою розвитку бізнесу та його ефективності, посереднику доцільно розглядати як один з критеріїв прийняття рішень привабливість замовників

$$E(\delta) = \sum_{j \in J} e_j \delta_j,$$

де e_j – ранг (пріоритет вигідності обслуговування) замовника j , $j \in J$, що задається за вибраною шкалою відносної вагомості.

Діяльність посередника пов'язана з ризиком. Джерелами ризику при цьому є: відмова постачальника від виконання поставки, відмова замовника від виконання платіжних зобов'язань (у тому числі, через банкрутство) та їх комбінації, а також настання форс-мажорних обставин, що можуть виникнути з посередником. Посереднику для аналізу ризику необхідно здійснювати моніторинг інформації про своїх контрагентів, який має давати оцінку надійності постачальників і рейтинги замовників. Важливою також є інформація про випадки невиконання контрагентами своїх зобов'язань та їх наслідки.

Найважливішим показником ризику для посередника є невиконання платіжних зобов'язань з боку замовників – $R(\delta)$. Нехай експертним шляхом для кожного замовника встановлений показник p_j – імовірність того, що замовник не виконає свої платіжні зобов'язання. Тоді ризик, пов'язаний з можливістю невиконання платіжних зобов'язань замовниками, може бути визначений кількісно таким показником:

$$R(\delta) = \sum_{j \in J} p_j q_j r_j \delta_j.$$

Багатокритеріальна задача оптимізації поведінки торговельного посередника має вигляд

$$U(\delta, \gamma, x) = \sum_{j \in J} r_j q_j \delta_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} c_i^k \gamma_i^k x_i^k \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$E(\delta) = \sum_{j \in J} e_j \delta_j \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$R(\delta) = \sum_{j \in J} p_j q_j r_j \delta_j \rightarrow \min \quad (3)$$

за обмежень

$$g_0(\delta, \gamma, x) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \gamma_i^k x_i^k - \sum_{j \in J} q_j \delta_j = 0, \quad (4)$$

$$g_i(\delta, \gamma, x) = \sum_{k \in K_i} \gamma_i^k x_i^k \leq \beta_i^*, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5)$$

$$\delta \in \Delta, \quad \gamma \in \Gamma, \quad x \in X, \quad (6)$$

де множини векторів мають вигляд

$$\Delta = \{ \delta = (\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m) \mid \delta_j \in \{0, 1\}, j \in J = \{1, 2, \dots, m\} \},$$

$$\Gamma = \left\{ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n) \mid \gamma_i = (\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^k, \dots, \gamma_i^{k_i^*}), \gamma_i^k = \{0, 1\}, k \in K_i = \{1, 2, \dots, k_i^*\}, i \in I \right\},$$

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mid x_i = (x_i^1, \dots, x_i^k, \dots, x_i^{k_i^*}), \alpha_i^k \leq x_i^k \leq \beta_i^k, x_i^k, \alpha_i^k, \beta_i^k - \text{цілі}, k \in K_i, i \in I \right\},$$

α_i^k, β_i^k – мінімальна та максимальна кількості товару i -го виробника в категорії його знижок $k \in K_i$.

Обмеження (4) означає, що посередник повинен придбати таку сукупну кількість товару у виробників, яку він зобов'язався реалізувати замовникам. Обмеження (5) означають, що виробник i , $i \in I$ має не більше β_i^* одиниць товару на момент укладання угоди.

Аналіз задачі. Модель (1)-(6) є багатокритеріальною задачею дискретної оптимізації з цілочисельними та бульовими змінними, складність якої викликана:

- властивостями критерію (1), який є нелінійним, кусково-неперервним на множині X за будь-яких $\delta, \gamma, \delta \in \Delta, \gamma \in \Gamma$;

- наявністю обмежень (обмеження (4) має балансовий характер, обмеження на $x_i^k, k \in K_i, i \in I$ задані на інтервалах);

- великою розмірністю задачі, яка експоненційно залежить від m – кількості замовників і $M = \sum_{i \in I} k_i^*$ – кількості категорій оптових знижок.

Для розв'язання багатокритеріальної задачі (1)-(6) використаємо метод обмежень [3,4].

Нехай $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ – заданий ОГР вектор переваг, де ρ_l – коефіцієнт важливості l -го критерію,

$$\rho_l > 0, \sum_{l=1}^3 \rho_l = 1.$$

Для застосування методу обмежень необхідно визначити максимальні та мінімальні значення за кожним критерієм (1)-(3), тобто розв'язати однокритеріальні задачі оптимізації з урахуванням умов (4)-(6). Це можна здійснити шляхом модифікації декомпозиційного алгоритму, який запропоновано в роботі [2].

Відповідно до методу обмежень, пошук рішення (1)-(6) зводиться до розв'язання однокритеріальної задачі параметричного програмування відносно параметра $k_0, k_0 \in (0,1)$ за заданого вектора переваг критеріїв ρ :

$$\min k_0, \quad (7)$$

$$U(\delta, \gamma, x) \geq U^*(k_0), \quad (8)$$

$$E(\delta) \geq E^*(k_0), \quad (9)$$

$$R(\delta) \leq R^*(k_0), \quad (10)$$

$$g_0(\delta, \gamma, x) = 0, \quad (11)$$

$$g_i(\delta, \gamma, x) \leq \beta_i^*, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (12)$$

$$\delta \in \Delta, \gamma \in \Gamma, x \in X, \quad (13)$$

де $U^*(k_0) = U^0 - k_0 / \rho_1 (U^0 - U_{(\min)})$, $E^*(k_0) = E^0 - k_0 / \rho_2 (E^0 - E_{(\min)})$, $R^*(k_0) = R^0 + k_0 / \rho_3 (R_{(\max)} - R^0)$,

$U^0, E^0, R_{(\max)}$ – максимальні, $U_{(\min)}, E_{(\min)}, R^0$ – мінімальні значення функцій $U(\delta, \gamma, x)$, $E(\delta)$, $R(\delta)$.

Метод обмежень шляхом знаходження мінімального k_0 дозволяє звузити множину допустимих розв'язків таким чином, щоб її потужність була достатньо малою для швидкого знаходження множини ефективних розв'язків.

Якщо розв'язок задачі (7)-(13) за мінімального значення $k_0, k_0 \in (0,1)$ єдиний, то це і є шукана компромісна альтернатива; інакше з множини розв'язків обирається той, що забезпечує мінімум лінійному критерію [3, 4]:

$$P(\delta, \gamma, x) = \rho_1 \frac{U^0 - U(\delta, \gamma, x)}{U^0 - U_{(\min)}} + \rho_2 \frac{E^0 - E(\delta)}{E^0 - E_{(\min)}} + \rho_3 \frac{R(\delta) - R^0}{R_{(\max)} - R^0}.$$

Декомпозиційний підхід до розв'язання задачі (7)-(13). Для розв'язання задачі (7)-(13) застосуємо параметричну декомпозицію [5], яка полягає в послідовній побудові векторів $\tilde{\delta} = \text{const} \in \Delta$ та $\tilde{\gamma} = \text{const} \in \Gamma$ з урахуванням обмежень (8)-(13) та формуванні й розв'язанні підзадач за фіксованих значень векторів $\tilde{\delta}$ та $\tilde{\gamma}$. Складність розв'язання підзадач є значно меншою порівняно зі складністю вихідної задачі (7)-(13). Таким чином, декомпозиційний підхід полягає в розробці двох основних елементів: процедур формування та розв'язання підзадач.

Параметризована підзадача має такий вигляд:
максимізувати

$$U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, x) = \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k x_i^k \quad (14)$$

за обмежень

$$U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, x) \geq U_L, \quad (15)$$

$$g_0(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, x) = 0, \quad (16)$$

$$g_i(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, x) \leq \beta_i^*, i \in I, \quad (17)$$

$$\tilde{\delta} = \text{const} \in \Delta_1, \tilde{\gamma} = \text{const} \in \Gamma, x \in X, \quad (18)$$

де $K_i(\tilde{\gamma}) = \{k \mid \tilde{\gamma}_i^k = 1, k \in K_i\}$, $i \in I$, U_L – заданий рівень, $U_L \in [U^*(k_0), U^0]$,

$$\Delta_1 = \{\delta \in \Delta : E(\delta) \geq E^*(k_0), R(\delta) \leq R^*(k_0)\}.$$

Процедура Υ розв'язання підзадач (14)-(18). Для розв'язання задачі дискретної оптимізації (14)-(18) пропонується така модифікація методу покоординатного підйому [6]:

Крок 0. Покласти $\tilde{x}_i^k = \alpha_i^k$, $k \in K_i(\tilde{\gamma})$, $i \in I$.

Крок 1. Перевірити, чи виконується умова

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j ;$$

якщо так, то перейти на крок 3, інакше виконати крок 2.

Крок 2. Вибрати $\tilde{x}_i^k$, $k \in K_i(\tilde{\gamma})$, $i \in I$, якому відповідає

$$c_i^k = \min \left\{ c_i^k \left| \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \leq \beta_i^*, \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \tilde{x}_i^k > U_L, k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I \right. \right\};$$

якщо таке значення знайдено, то покласти

$$\tilde{x}_i^k = \min \left\{ \beta_i^* - \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k, \beta_i^k, \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \right\}$$

та перейти на крок 1; інакше задача (14)-(18) не має допустимих розв'язків.

Крок 3. Розв'язком задачі (14)-(18) є $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$. Покласти $U_L = U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$.

Процес формування підзадач. Для зменшення кількості підзадач (14)-(18), загальна кількість яких становить $|\Delta| \times |\Gamma| = 2^{m+M}$, необхідно визначити умови, які в процесі формування дозволяють усувати підзадачі, що мають порожню множину допустимих розв'язків. Ці умови обґрунтовані твердженнями в роботі [2] для однокритеріальної моделі з критерієм прибутку посередника. За аналогією їх можна сформулювати для підзадач вигляду (14)-(18) задачі (7)-(13) таким чином.

Умови усунення підзадач, що мають порожню множину допустимих розв'язків. Підзадача (14)-(18) має порожню множину допустимих розв'язків, якщо порушується хоча б одна з таких умов:

$$\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j \leq \sum_{i \in I} \beta_i^*, \quad (19)$$

$$\sum_{j \in J} \left(r_j - \min_{k \in K_i, i \in I} \{ c_i^k \} \right) q_j \tilde{\delta}_j > U^*(k_0), \quad (20)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j, \quad (21)$$

$$\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j \leq \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \beta_i^k, \beta_i^* \right\}, \quad (22)$$

$$\sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \beta_i^*, i \in I, \quad (23)$$

$$\sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{ c_i^k \} \cdot \left(\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \right) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k > U_L, \quad (24)$$

де $U_L \in [U^*(k_0), U^0]$.

Загальний підхід до розв'язання батокритеріальної задачі (1)-(6). Задача (1)-(6) зводиться до задачі параметричного програмування (7)-(13) відносно параметра k_0 , яку пропонується розв'язувати на основі методу обмежень [3]. На кожній l -й ітерації застосування методу обмежень до задачі (7)-(13) із заданим вектором переваг критеріїв ρ здійснюються такі кроки.

Крок 0. Вибирається значення параметра $k_0(l) \in (0, 1)$, наприклад методом дихотомії. Визначаються $U^*(k_0) = U^*(k_0(l))$, $E^*(k_0) = E^*(k_0(l))$, $R^*(k_0) = R^*(k_0(l))$.

Крок 1. Будуються вектори параметрів $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta} \in \Delta_1$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. З урахуванням умов (19)-(24) формується підзадача (14)-(18) за фіксованих $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$, $U_L = U^*(k_0(l))$.

Крок 2. Перевіряється сумісність обмежень (15)-(18).

За сумісної області обмежень (15)-(18) за допомогою запропонованої процедури Υ розв'язання підзадач знаходиться розв'язок $\tilde{x}$, що відповідає фіксованим $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$. Перейти на крок 3.

За порожньої області допустимих розв'язків (15)-(18) перейти на крок 1.

Крок 3. Здійснюється перехід на наступну $(l+1)$ ітерацію методу обмежень і перевірка критерію зупинки. Якщо $|k_0(l) - k_0(l+1)| > \varepsilon$, то перейти на крок 0; у протилежному випадку наблизеним компромісним розв'язком задачі (1)-(6) є $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$, знайдений на l -й ітерації, де ε обирається з міркувань прийнятності часу та якості розв'язку.

Висновок. У роботі сформульовано багатокритеріальну задачу оптимізації діяльності торговельного посередника з урахуванням категорій оптових знижок із критеріями: прибуток, ризик і привабливість замовників.

Побудована модель (1)-(6) є багатокритеріальною задачею дискретної оптимізації великої розмірності зі змінною системою обмежень, булевими та цілочисельними змінними.

Для її розв'язання розроблено підхід, орієнтований на використання структурних особливостей задачі, в основу якого покладено метод обмежень [3] і параметричну декомпозицію [5].

1. Заславська О. Моделі прийняття рішень в оптовій торгівлі // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – № 3; 2. Заславська О. Декомпозиційний алгоритм оптимізації прибутку посередника // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – № 4; 3. Михалевич В., Волкович В. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М., 1982; 4. Модели и алгоритмы оптимизации надежности сложных систем / Сост. В. Волкович, А. Волошин, В. Заславский, И. Ушаков / Под ред. В. Михалевича. – К., 1993; 5. Танаев В. Декомпозиция и агрегирование в задачах математического программирования / Под ред. А. Закревского. – М., 1987; 6. Горелик В., Ушаков И. Исследование операций. – М., 1986.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 510.6

В. Зубенко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПЕРІОДИЧНІ ТЕМПОРАЛЬНІ АЛГОРИТМИ

Розглядається проблема синтезу та аналізу періодичних темпоральних алгоритмів.

The problem of synthesis and analyze periodical temporal algorithms is considered.

1. Темпоральні процедури та алгоритми. Темпоральні процедури та алгоритми введені в [1] і призначені для обчислення часових багатозначних функцій у динамічних системах [2]. Особливістю підходу є те, що обчислення розгортаються не в просто часі, а в подвійному часовому просторі з урахуванням так званих локального й глобального часів. Цей простір може активно впливати на хід обчислень. Окрім того, обчислення локально можуть без обмежень "повертатись назад" або й просто "застигати" у просторі. Іншою особливістю є те, що темпоральні алгоритми вводяться не як традиційне первинне "наївне" поняття з певним "джентльменським" набором характеристикних ознак і властивостей, а як строго визначене й похідне від таких математичних понять, як множина, темпоральна процедура, алгебраїчна операція.

Нагадаємо основні поняття, пов'язані з темпоральними процедурами та алгоритмами. Тлумачення деяких з них суттєво відрізняється порівняно з [1]. Нехай S – довільна множина станів, $\langle T, \langle \rangle \rangle$ та $\langle \Gamma, \langle \rangle \rangle$ – довільні лінійно впорядковані сукупності, які будемо трактувати як, відповідно, локальний і глобальний часові простори. Позначимо t та $-t$ безпосередньо наступний і попередній моменти часу. Вважається, що в часових просторах немає найменшого й найбільшого елементів. На локальному часі T можуть бути визначені й інші структури. Наприклад, структура адитивної абелевої групи або лінійного простору і т. п. Це дозволяє маніпулювати з часом і відстежувати локальну поведінку систем у тих чи інших часових розрізах. Як типові приклади локальних часових перетворень можна навести: фіксацію часу, зсуви вперед і назад (=переходи до іншого часового поясу) $t \pm t_0$, де t_0 – часова константа, лінійні стиснення та розширення часу kt , обернення часу t^{-1} , переходи взагалі до іншого часового простору і т. д. Трійка $\Pi = \langle \Gamma, T, S \rangle$ називається *темпоральним обчислювальним простором*, елементи декартових добутків $T \times S$ та $\Gamma \times (T \times S)$ – відповідно *локальними конфігураціями* та *конфігураціями* простору. Конфігурації $(t, s) \in T \times S$ та $(\tau, (t, s)) \in \Gamma \times (T \times S)$ будемо позначати відповідно $s|_t$ та $s|_\tau$. Нехай $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \Gamma$. Покладемо $\Gamma_\tau = \{\tau' \in \Gamma \mid \tau \leq \tau'\}$, $\Gamma_\tau^+ = \Gamma_\tau \setminus \{\tau\}$, $[\tau_1, \tau_2] = \{\tau \mid \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$. Процесами з початком у момент часу τ називаються відображення вигляду $a: \Gamma_\tau \rightarrow T \times S$. Процесами на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$ називаються відображення вигляду $a: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow T \times S$. Багатозначні часткові функції надалі будемо називати співвідношеннями. Співвідношення вигляду $\delta: \Gamma \times T \times S \rightarrow T \times S$ називаються *функціями переходу*, а пари вигляду $P = \langle \Pi, \delta \rangle$ – *темпоральними процедурами* (*T-процедурами*) над простором Π . У разі, коли обчислювальний простір Π зафіксовано, T-процедури будемо отождествлювати з їх функціями переходу й називати просто *процедурами*. Кожна процедура породжує певну сукупність процесів у глобальному часовому просторі, які називаються обчисленнями. А саме: нехай $\tau \in \Gamma$, $t \in T$ та $s \in S$ – довільні моменти локального часу та стан. Обчислення a за процедурою P , з початком у момент τ і початковою конфігурацією $s|_\tau$, визначається рекурентно: $a(\tau) = s|_\tau$ і $a(\zeta) \in \delta(\zeta, a(-\zeta))$ для всіх $\zeta \in \Gamma_\tau^+$. Будемо говорити, що обчислення a в момент часу ζ переходить від конфігурації $a(-\zeta)$ до конфігурації $a(\zeta)$, і позначати цей факт $a(-\zeta) \rightarrow_P a(\zeta)$. Таких переходів у момент часу ζ може бути кілька, оскільки функція переходу є багатозначною. Обчислення a за процедурою P на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$ з початковою конфігурацією (t, s) визначається як обмеження обчислення a за процедурою P з початком у момент τ_1 на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$. Будемо говорити, що обчислення a за процедурою P на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$ розпочинається конфігурацією $a(\tau_1)$ і закінчується конфігурацією $a(\tau_2)$, і позначати цей факт $a(\tau_1) \Rightarrow_P a(\tau_2)$. Конфігурація $a(\tau_2)$ називається *заключною*, а її стан – *результатом обчислення a на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$* . Нас цікавлять не стільки самі по собі процедури й обчислення, скільки засоби їх опису та реалізації. У зв'язку з цим зауважимо, що з функцією переходу пов'язані дві сукупності перетворень – локального часового простору та множи-

ни станів. А саме: якщо зафіксувати певний стан $s_0 \in S$ і моменти часу $\tau_0 \in \Gamma$, $t_0 \in T$, то їм відповідають співвідношення $p_{\tau_0, s_0} : T \rightarrow T$ та $f_{\tau_0, t_0} : S \rightarrow S$ такі, що для довільних $t \in T$, $s \in S$: $p_{\tau_0, s_0}(\tau, t) = t'$, $f_{\tau_0, t_0}(\tau, s) = s'$, якщо існують такі $t'' \in T$, $s'' \in S$, що $(t', s'') \in \delta(\tau, t_0, s)$, $(t'', s') \in \delta(\tau, t_0, s)$ для певних $t', t'' \in T$, $s', s'' \in S$. Щоб спростити опис функції переходу та реалізацію обчислень, доцільно розділити перехід від однієї конфігурації до наступної на дві окремі фази: 1) з'ясування, яка саме дія має відбутися над конфігурацією; 2) саму дію. Для цього зафіксуємо $\Theta = \{p_\alpha : T \rightarrow T \mid \alpha \in A\}$ та $\Delta = \{f_\beta : S \rightarrow S \mid \beta \in B\}$ – певні сукупності *стандартних (елементарних)* перетворень моментів часу та станів. Будемо їх вважати однозначними й долучати до обчислювального простору. Тепер обчислювальний простір – це п'ятірка $\Pi = \langle \Gamma, T, S, \Theta, \Delta \rangle$. Функція переходу набуває вигляду $\delta : \Gamma \times T \times S \rightarrow 2^{\Theta \times \Delta}$. Обчислення a за процедурою P з початком у момент часу τ і початковою конфігурацією (t, s) визначається рекурентно: $a(\tau) = (t, s)$, і для всіх $\zeta > \tau$ $a(\zeta) = (p_\zeta(t'), f_\zeta(s'))$, де $(p_\zeta, f_\zeta) \in \delta(\zeta, a(-\zeta))$, а t' та s' – компоненти конфігурації на попередньому кроці, тобто $a(-\zeta) = (t', s')$. Обчислення a за процедурою P на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$ з початковою конфігурацією (t, s) визначається як обмеження відповідного обчислення a за процедурою P на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$. Зазначимо, що варіантів пар (p_i, f_i) на даному кроці обчислення може бути: а) кілька (у випадку недетермінованих процедур); б) рівно одна (у випадку детермінованих процедур); в) жодної (обчислення зупиняється). Нас цікавлять обчислення в процедурі, а насамперед ті, що розпочинаються з певних виділених вхідних конфігурацій і закінчуються певними виділеними вихідними конфігураціями. Тому введемо поняття ініціальної процедури $P(C_0, C_{fin})$ над простором Π як трійки $\langle P, C_0, C_{fin} \rangle$, де P – певна процедура над простором Π , $C_0 \subseteq T \times S$ та $C_{fin} \subseteq T \times S$ – виділені підмножини, відповідно вхідних і вихідних конфігурацій. Ініціальну процедуру будемо задавати також у вигляді вісімки $P = \langle \Gamma, T, S, C_0, C_{fin}, \Theta, \Delta, \delta \rangle$. Обчислення в процедурі P , що розпочинається з певної початкової конфігурації $a(\tau_0) = s|_{\tau} \in C_0$ і закінчуються певною вихідною конфігурацією $a(\tau) = u|_{\tau} \in C_{fin}$, і при цьому всі проміжні конфігурації якого не є вихідними, назвемо результативним. Конфігурація $a(\tau)$ називається заключною, а її стан u – результатом обчислення на $a(\tau_0)$. Заключну конфігурацію позначатимемо $P^*(a(\tau_0))$, а результат обчислення – $P(a(\tau_0))$. Про обчислення $a(\tau_0) \Rightarrow_P a(\tau)$ таке, що $a(\tau_0) \in C_0$, $a(\tau) \in C_{fin}$, будемо говорити як про гіперрезультативне. У такому обчисленні вихідні конфігурації можуть зустрічатися й серед проміжних. Заключна його конфігурація позначається $P^{**}(a(\tau_0))$. Нескінченні обчислення називаються безрезультативними. Безрезультативними називатимемо також і ті скінченні обчислення, які не мають жодного результативного продовження. У деяких випадках доречно вважати результативними й ті скінченні обчислення, на заключних конфігураціях яких не визначена функція керування. Нехай S_0 та S_{fin} – сукупності всіх станів, що належать відповідно вхідним і заключним конфігураціям процедури. Кожна ініціальна процедура $P(C_0, C_{fin})$ визначає певні багатозначні часові оператори на вхідних конфігураціях $P^* : \Gamma \times C_0 \rightarrow C_{fin}$, $P^{**} : \Gamma \times C_0 \rightarrow C_{fin}$, а саме такі, що їх значення в момент $\tau_0 \in \Gamma$ на аргументі $s|_{\tau} \in C_0$ складають заключні конфігурації всіх результативних і гіперрезультативних обчислень з початком у момент τ_0 на $s|_{\tau} \in C_0$. Позначимо $P_\tau^* : C_0 \rightarrow C_{fin}$ та $P_\tau^{**} : C_0 \rightarrow C_{fin}$ результат підстановки в оператори P^* та P^{**} константи $\tau \in \Gamma$ замість першої компоненти; $P_{\tau, t} : S_0 \rightarrow S_{fin}$ – проекцію за другою компонентою результату підстановки в оператор P_τ^* константи $t \in T$ замість першої компоненти. Значеннями оператора $P_{\tau, t}$ на початковому стані s є стани заключних конфігурацій відповідних результативних обчислень за процедурою P , що розпочинаються у фіксований момент глобального (τ) і локального (t) часу. Про оператори P^* , P^{**} , P_τ^* , P_τ^{**} та $P_{\tau, t}$ будемо говорити як про такі, що їх обчислює процедура P . Перші чотири з них є темпоральними, а останні – звичайними позачасовими перетвореннями множини станів.

Процедури з однозначними функціями керування будемо називати *детермінованими*. Для таких процедур оператор P^* є також однозначним. Процедури P та Q називаються еквівалентними ($P \equiv Q$), якщо оператори, які вони обчислюють, збігаються як функціональні відношення. Процедури P та Q називаються τ -еквівалентними ($P \equiv_\tau Q$), якщо $P_\tau^* = Q_\tau^*$. Процедури P та Q називаються (τ, t) -еквівалентними ($P \equiv_{\tau, t} Q$), якщо $P_{\tau, t} = Q_{\tau, t}$. Проце-

дури P та Q називаються 2-еквівалентними відносно моменту часу τ ($P \equiv_2 Q$), якщо $P_{\tau, t} = Q_{\tau, t}$ для всіх $t \in T$.

Стан ініціальної процедури $P(C_0, C_{fin})$ назвемо допустимим, якщо він входить до конфігурації деякого результативного її обчислення. Покладемо $S_{acc} \subseteq S$ – підмножину всіх допустимих станів процедури $P(C_0, C_{fin})$. Очевидно, з

погляду операторів, що обчислює ініціальна процедура, стани за межами підмножини S_{acc} є "зайвими". Нехай $P'(C'_0, C'_{fin})$ – ініціальна процедура над простором Π' із множиною станів S_{acc} та з обмеженими на ньому елементарними операторами, функцією переходу, вхідними й вихідними конфігураціями процедури P . Очевидно, що процедури P та P' глобально еквівалентні. Процедура, усі стани якої допустимі, називається *приведеною*. T -процедуру назовемо *монотонно зростаючою (спадною)*, якщо всі стандартні часові перетворення є монотонно зростаючими (спадними), і *монотонно неспадною (незростаючою)*, якщо всі стандартні часові перетворення є монотонно неспадними (незростаючими). Монотонно зростаючі (спадні) T -процедури будемо називати просто *монотонними*, а монотонно неспадні (незростаючі) – *слабко монотонними*.

Говорять, що ініціальна процедура A є *темпоральним алгоритмом (T -алгоритмом)* щодо певної системи подання, якщо її конфігурації та функція керування є конструктивними в цій системі. Оператори A^* , A^{**} , A_t^* , A_t^{**} , $A_{t,t}$, $\tau \in \Gamma$, $t \in T$, що обчислюються темпоральним алгоритмом A , будемо називати *алгоритмічно обчислювальними*. Як і процедури, темпоральні алгоритми теж можуть бути детермінованими й недетермінованими.

Основні властивості класичних числових і словарних алгоритмів притаманні й темпоральним алгоритмам. Однак у останніх з'явилися і нові риси: темпоральність і релятивність. Перша узагальнює дискретність (глобальну часову компоненту) класичних алгоритмів і "прив'язує" обчислення до локального часового простору; друга акцентує увагу на відносному характері поняття алгоритму, на його, певною мірою, "несамостійності" й залежності від тієї чи іншої системи подання.

2. Синтез та аналіз періодичних алгоритмів. Важливий клас темпоральних алгоритмів утворюють так звані періодичні алгоритми. Розглянемо їх на прикладі T -алгоритмів над обчислювальним простором з локальним часом – адитивною групою Z цілих чисел. Нехай P – довільна процедура над простором $\Pi = \langle \Gamma, Z, S \rangle$, π – певне відношення еквівалентності на станах із S . Факторизуємо функцію переходу за часовими аргументами та станами. Зафіксуємо k – деяку локальну часову константу. Будемо говорити, що функція переходу δ є періодичною за модулем π з періодом k (або просто k -періодичною за модулем π), якщо для будь-яких еквівалентних станів p та s і довільних моментів часу $\tau, \tau' \in \Gamma$, $t \in Z$ виконується $\delta(\tau, t, p) = \delta(\tau', t \pm k, s)$. З періодичності функції δ випливає, що вона фактично не залежить від першого аргументу, тобто в будь-який момент часу вибір чергових перетворень визначається виключно поточною конфігурацією. А з 1-періодичності δ випливає незалежність такого вибору й від локального часу. Темпоральні процедури та алгоритми з k -періодичними за модулем π функціями переходу називаються періодичними. Еквівалентність π назовемо розв'язною, якщо кожен з її класів еквівалентності є розв'язним. Індексом багатозначної функції назовемо максимальну потужність сукупностей значень функції на окремих аргументах. У разі, коли функція переходу періодичного алгоритму та еквівалентність π мають скінченний індекс і еквівалентність є розв'язною, алгоритм називається *табличним*. Табличні алгоритми задаються скінченними таблицями, стовпчики яких пронумеровані числами від 0 до $k-1$, рядки відповідають класам еквівалентності π , а в комірках таблиці розміщуються значення функції переходу. По суті, традиційним алгоритмічним системам відповідають 1-періодичні табличні алгоритми (їх функції переходу фактично не залежать від часових компонентів). У випадку машин Тюрінга два стани (=конфігурації машини) є еквівалентними, якщо стани їх робочих головок і комірок збігаються. Ці два елементи повністю визначають чергове перетворення конфігурації машини.

Нехай $\Pi = \langle \Gamma, T, S, \Theta, \Delta \rangle$ та $\Pi' = \langle \Gamma, T', S', \Theta', \Delta' \rangle$ – обчислювальні простори такі, що $T \subseteq T', S \subseteq S'$, $A(C_0, C_{fin})$ та $B(C_0, C_{fin})$ – алгоритми відповідно над просторами Π та Π' , і нехай ці алгоритми є еквівалентними. Тоді алгоритм $B(C_0, C_{fin})$ називається *розширенням* алгоритму $A(C_0, C_{fin})$.

У [1] показано, що якщо дозволити процедурам переходити в процесі обчислень у додаткові ізоморфні простори, то сукупність операторів, які обчислюються такими розширеними T -процедурами, замкнена відносно часових зсувів, дзеркального відображення, множення, прямого множення, об'єднання, прямої суми, розгалуження, вибору, α -ітерації, булевих композицій. Аналогічний результат має місце й для періодичних та табличних Z -алгоритмів. Однак за умови, що в базовому обчислювальному просторі є тотожні елементарні оператори $f_0: S \rightarrow S$, $p_0: Z \rightarrow Z: f_0(s) = s$, $p_0(t) = t$ для будь-яких $s \in S$, $t \in Z$. Такі обчислювальні простори назовемо невивордженими. Покладемо Ξ_0 – сукупність наведених вище композицій. Позначимо $\tilde{M}(Z, A)$ сукупність темпоральних операторів над $Z \times A$ та їх прямих добутків. Функціональну алгебру $R = \langle \tilde{M}(Z, A), \Xi_0 \rangle$ будемо називати *регулярною алгеброю T -операторів*. Елементи підалгебри $R(F)$ алгебри R із множиною твірних F , де $F = \{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ – довільна сукупність T -операторів і предикатів над $Z \times A$, будемо називати *регулярними T -операторами над базисом F* . Має місце

Теорема 1 (синтезу). Підклас темпоральних операторів, що обчислюються розширеними періодичними процедурами над невивордженим простором $\Pi = \langle \Gamma, Z, S, \Theta, \Delta \rangle$, утворює підалгебру регулярної алгебри $R = \langle \tilde{M}(Z, S), \Xi_0 \rangle$.

Доведення. Проводиться аналогічно випадку загальних темпоральних алгоритмів [1].

Відзначимо також композицію *збільшення періоду*, яка, не змінюючи позачасові оператори, обчислювані k -періодичним алгоритмом $A = \langle \Pi, C_0, C_{fin}, \delta \rangle$, збільшує його період на 1. Новий алгоритм позначатимемо A^{+1} .

Визначимо функцію переходу δ' на збільшеному основному періоді $[0, k] \times S$ таким чином: $\delta'(r++, s) = \{p++, f\} : (p, f) \in \delta(r, s), 0 \leq r < k, s \in S$, $\delta'(0, s) = (p_0, f_0)$ для всіх $s \in S$. За межами основного періоду функція переходу δ' продовжується як $(k+1)$ -періодична. Покладемо $A^{+1} = \langle \Pi, C'_0, C'_{fin}, \delta' \rangle$, де початкові та

заключні конфігурації алгоритму A зсунуті в часі вперед на 1. За побудовою, алгоритми A і A^{+1} обчислюють однакові позачасові оператори на станах. Композиція збільшення періоду дозволяє у разі необхідності вирівнювати періоди двох або більше алгоритмів.

Звернемося тепер до проблеми аналізу періодичних алгоритмів. Нехай K – довільний клас періодичних алгоритмів у даному просторі Π . Проблема аналізу процедур (алгоритмів), що належать певному класу, полягає в пошуку тих чи інших алгебраїчних форм подання операторів, обчислюваних алгоритмами класу K , причому таких, що існують для кожного алгоритму даного класу. Цю проблему можна також сформулювати як проблему конструктивізації операторів, обчислюваних алгоритмами, що належать класу K . Як приклад, розглянемо проблему аналізу для монотонних табличних алгоритмів. Конфігурації називаються *сусідніми*, якщо вони належать до одного часового періоду. Це означає, що їх часові компоненти t_1 та t_2 задовольняють умову $t_1 \div k = t_2 \div k$, де $\div$ – операція цілочислового ділення. Розв'язок проблеми аналізу для монотонних табличних алгоритмів дає така теорема. Нехай $(p, f) \in \Theta \times \Delta$ – довільна пара елементарних перетворень. Позначимо $p \otimes f$ темпоральний оператор, що здійснює покомпонентне перетворення конфігурацій $p \otimes f(t, s) = (p(t), f(s))$. Будемо називати його також елементарним. Покладемо $\Delta \otimes \Theta = \{p \otimes f \mid (p, f) \in \Theta \times \Delta\}$.

Теорема 2 (про регуляризацію монотонних табличних алгоритмів). Нехай $A(C_0, C_{fin})$ – k -періодичний за модулем π монотонний табличний алгоритм над певним обчислювальним простором $\Pi = \langle \Gamma, Z, S, \Theta, \Delta \rangle$ і $\tau \in \Gamma$. Тоді оператор A_τ^* є регулярним відносно базису, який складають елементарні темпоральні оператори сукупності $\Delta \otimes \Theta$, характеристичні предикати класів розбиття конфігурацій за еквівалентністю π та сукупностей початкових і заключних конфігурацій, а також предикат сусідства конфігурацій.

Доведення. Нехай $[S]_\pi = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ – розбиття станів за еквівалентністю π , $[Z \times S]_\pi = \{Z \times R_1, \dots, Z \times R_n\}$ – розбиття конфігурацій за еквівалентністю π , $P = \{p_1, \dots, p_n, p_0, p_{fin}, \infty\}$ – сукупність характеристичних предикатів класів $Z \times R_i$, множин C_0 та C_{fin} і відношення сусідства. Нехай $R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P)$ – підалгебра регулярної алгебри R із множиною твірних $\Delta \otimes \Theta \cup P$. Ураховуючи наявність композиції обходу в алгебрі R , для доведення теореми достатньо розглянути випадок, коли $C_0 = T \times S$, і показати, що функція A_τ^* належить підалгебрі $R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P)$. Виберемо $s_1 \in R_1, \dots, s_n \in R_n$ – певну сукупність канонічних представників класів еквівалентності. Позначимо B_i –

обмеження функції A_τ^* на клас еквівалентності $Z \times R_i$. Покажемо, що функції B_i , $i = \overline{1, n}$, задовольняють певну систему праволінійних рівнянь в алгебрі $R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P)$. Покладемо D_T – оператор, що обчислює алгоритм A на кожному з періодів, не попадаючи у вихідний стан, тобто коли заключними оголошено конфігурації множини $\bar{C} = Z \times S \setminus C_{fin}$. Нехай Q_i , $i = \overline{1, n}$, – оператор, що обчислює алгоритм A на кожному з періодів своєї області визначення з початковими конфігураціями, що належать класу розбиття $Z \times R_i$. Ураховуючи монотонність і табличність алгоритму A , можна показати, що всі оператори D_T , Q_i , $i = \overline{1, n}$ є певними суперпозиціями обмежень відповідних елементарних операторів на області, що задаються тими чи іншими комбінаціями базових характеристичних предикатів підалгебри $R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P)$. А це означає, що вони й самі належать підалгебрі $R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P)$. Покажемо, що функції B_i , $i = \overline{1, n}$, задовольняють таку систему праволінійних рівнянь:

$$(*) \{X_i = \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{(p, f) \in \delta(j, [s_1])} p \otimes f \mid_{\bar{C}} \circ D_T \circ (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) \cup Q_i, i = \overline{1, n}.$$

Нехай $B_i(t, s) = (t', s')$ для деяких $(t, s), (t', s') \in Z \times S$, $1 \leq i \leq n$. Тобто пара $(s|_t, s'|_{t'})$ належить лівій частині i -ї рівності

сті (*) при підстановці функції B_i замість змінної X_i в (*). Це означає, що існує таке обчислення $s|_t \xrightarrow{p} s'|_{t'}$, що $s \in R_i$ і $s'|_{t'} \in C_{fin}$ для деякого $\lambda \in \Gamma$. Покажемо, що дана пара належить і правій частині рівняння. Зазначимо, що

$Q_i \subseteq B_i$, $i = \overline{1, n}$. Тому розглянемо тільки випадок, коли $s|_t \notin \text{Dom}(Q_i)$. Ураховуючи монотонність алгоритму A , це

означає, що обчислення $s|_t^{\tau} \Rightarrow_P s'|_t^{\lambda}$ виходить за межі одного періоду. Розглянемо його префікс $s|_t^{\tau} \Rightarrow_P s_l|_t^{\tau}$, $k \leq t_l$, що закінчується "стрибком" за межі першого періоду, та його хвіст $s_l|_t^{\tau} \Rightarrow_P s'|_t^{\lambda}$. За побудовою, $s_l|_t^{\tau} = fD_T(t, s)$, $s'|_t^{\lambda} = B_m(t_l, s_l)$ для деякого $1 \leq m \leq n$. Значить, пара $(s|_t^{\tau}, s'|_t^{\lambda})$ належить правій частині i -ї рівності (*). Вірне й обернене твердження: якщо пара $(s|_t^{\tau}, s'|_t^{\lambda})$ належить правій частині i -ї рівності при $X_i = B_i$, $i = \overline{1, n}$, то вона належить і її лівій частині. Доведення проводиться так само, тільки у зворотному порядку. Таким чином, система функцій B_i , $i = \overline{1, n}$, є розв'язком системи (*). Більше того, вона є її найменшим розв'язком. Дійсно, розглянемо довільний розв'язок системи (*)

E_i , $i = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що $Q_i \subseteq E_i$, $i = \overline{1, n}$. Визначимо сукупності станів Q_i^m , $i = \overline{1, n}$, $m \geq 0$, поклавши $Q_i^0 = Q_i$,

$$Q_i^{m+1} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{(p, f) \in \delta(j, [s_i])} p \otimes f|_C D_T(Q_1^m \cup \dots \cup Q_n^m). \text{ За побудовою } Q_i^m \subseteq E_i. \text{ Тоді } Q_i^{\infty} = \bigcup_{m=0}^{\infty} Q_i^m \subseteq E_i, \text{ } i = \overline{1, n}, \text{ є}$$

розв'язком системи (*), а значить, і найменшим її розв'язком. Однак, за побудовою, сукупності Q_i^{∞} збігаються з B_i . Щоб закінчити доведення теореми 1, залишилось зазначити, що: 1) найменшим розв'язком праволінійної системи функціональних рівнянь вигляду (*) є кортеж регулярних функцій над базисом, що складається з її коефіцієнтів і вільних членів; 2)

$$A_{\tau}^* = \bigcup_{i=1}^n (p_i \rightarrow B_i). \text{ Отже, функція } A_{\tau}^* \text{ належить алгебрі } R(Z, \Delta \cup \Theta \cup P).$$

1. Зубенко В. Про темпоральні процедури та алгоритми // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Кібернетика. – 2005. – № 6. 2. Месарович М., Тахакара Я. Общая теория систем: математические основы. – М., 1978.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 517.9

Є. Івохін, канд. фіз.-мат. наук

ПРО СТІЙКОПОДІБНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЧІТКИХ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ

Розглянуто підхід до вивчення стійкоподібних властивостей розв'язків нечітких різницевих систем. Досліджено різні випадки поведінки розв'язків, для яких сформульовано відповідні означення та доведено твердження з використанням функцій Ляпунова.

The approach to investigation of similar to stable properties of fuzzy difference system's decisions is considered. The determinations of stability are formulated for the different cases of decision's behavior. Based on Lyapunov functions statements are obtained.

Вступ. Математичне моделювання різних фізичних явищ містить два принципові етапи, що приводять до необхідності врахування складності та невизначеності відповідних моделей. Перший з них об'єктивно обумовлений точною невідомою поведінкою процесів, що моделюються. Це, у свою чергу, веде до неможливості сформулювати точний вигляд моделі фізичного процесу та до незручностей у використанні конкретних моделей на практиці за умов наявності в них багатьох невизначеностей. Другий етап, пов'язаний з проблемою адекватності математичного моделювання реальних систем, полягає в суб'єктивній неспроможності оцінювати стани процесів абсолютно точно. Неясність, нечіткість поведінки систем, відсутність достатньої інформації для моделювання процесів не дозволяють коректно описувати моделі в межах традиційних підходів, що враховують невизначеність. Останнім часом для розв'язання цих проблем досить широко використовується теорія нечітких множин [1–8].

Нечіткі множини – це математична модель для зображення класів об'єктів з нечіткими або розмитими границями. Відповідно до ідеї Л. Заде [1], нечітка підмножина заданої множини X формується як непорожня підмножина $\{(x, \mu(x)) : x \in X\}$ прямого добутку $X \times [0, 1]$ з деякою функцією $\mu : X \rightarrow [0, 1]$. Інакше кажучи, кожен елемент нечіткої множини може мати деяку міру належності до множини, причому проміжний між повною належністю і повною неналежністю.

Існує багато підходів до побудови й математичного обґрунтування загальної теорії нечітких множин. Викладення результатів даної роботи будемо вести за допомогою традиційного визначення поняття *нечіткої множини*, в якому використовується узагальнене поняття належності, що ввів Л. Заде [1]. Потрібно відмітити, що аксіоматика даної теорії досить повно вивчена [5], а область застосування нечітких множин постійно розширюється завдяки використанню основних принципів теорії в аналізі складних систем різного призначення (економічних, екологічних, соціальних, медичних, політичних та ін.).

1. Основні поняття. Розглянемо довільний скінченновимірний простір над полем дійсних чисел $X = R^n$. Будемо називати X універсальною множиною.

Визначення 1.1. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X називається сукупність пар

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in X\},$$

де

$$\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0, 1]. \quad (1.1)$$

Функція $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0, 1]$ називається функцією належності нечіткої множини $\tilde{A}$. Надалі всі нечіткі множини будемо позначати великими літерами з хвильою й отождествляти їх з відповідними функціями належності. Простір усіх нечітких множин у X позначимо E^n . Під висотою нечіткої множини $\tilde{A}$ в X розуміємо величину

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (1.2)$$

Множинами α -рівня (α -зрізи, $\alpha \in [0, 1]$) нечіткої множини $\tilde{A}$ називають звичайні множини

$$\bar{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

При цьому має місце таке зображення нечіткої множини за множинами α -рівня:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha \bar{A}_\alpha, \quad (1.4)$$

де $\alpha \bar{A}_\alpha = \tilde{B}$ – нечітка множина в X із функцією належності $\mu_{\tilde{B}}(x) = \alpha, x \in X$.

Визначення 1.2. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається нормальною, якщо існує хоча б одна точка $x_0 \in X$, для якої $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$.

Множину $\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ називають носієм нечіткої множини $\tilde{A}$ і позначають через $\text{supp } \tilde{A}$.

Для довільної нечіткої множини $\tilde{A}$ величина $h(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu(x)$, $h(\tilde{A}) \geq 0$ називається висотою нечіткої множини.

Визначення 1.3. Нечітка множина $\tilde{V}$ називається регулярною нечіткою множиною в X , якщо:

- функція належності $\mu_{\tilde{V}}(x): X \rightarrow [0, 1]$ півнеперервна зверху;
- множина $\tilde{V}$ опукла [7], тобто $\forall x, y \in X, 0 \leq \lambda \leq 1$

$$\mu_{\tilde{V}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{V}}(x), \mu_{\tilde{V}}(y)); \quad (1.5)$$

- існує єдиний елемент $\bar{x} \in X$ такий, що $\mu_{\tilde{V}}(\bar{x}) = 1$;
- носій множини $\text{supp } \tilde{V} = \{x \in X : \mu_{\tilde{V}}(x) > 0\}$ обмежений у X .

Припустимо, що x – деяка точка з X і A – звичайна непорожня множина. Відстань $d(x, A)$ від x до A визначається у вигляді

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf \{\|x - a\| : a \in A\} \\ d(x, A) &\geq 0 \\ d(x, A) &= 0, \quad \forall x \in \bar{A} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Позначимо $d_H(A, B)$ хаусдорфову відстань між звичайними множинами A і B :

$$d_H(B, A) = \sup \{d(b, A) : b \in B\}, \quad (1.7)$$

а для визначення відстані між нечіткими множинами $\tilde{A}, \tilde{B}$ у X використаємо величину

$$d[\tilde{A}, \tilde{B}] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H[\bar{A}_\alpha, \bar{B}_\alpha]. \quad (1.8)$$

Визначення відстані між нечіткими множинами у вигляді (1.8) задає метрику в просторі всіх нечітких множин E^n універсальної множини X , при цьому (E^n, d) є повним метричним простором [7].

Визначення 1.4. Нечітку множину $\tilde{A}^H$ назвемо нормованою відносно до нечіткої множини $\tilde{A}$, якщо для $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}^H}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)/h(\tilde{A})$.

Визначення 1.5. Нечітку множину $\tilde{V}$ будемо називати нормовано регулярною в X , якщо:

- функція належності $\mu_{\tilde{V}}(x): X \rightarrow [0, 1]$ неперервна зверху;
- множина $\tilde{V}$ опукла;
- існує єдиний елемент $\bar{x} \in X$ такий, що $\mu_{\tilde{V}^H}(\bar{x}) = 1$;

- носій множини $\text{supp } \tilde{V}$ обмежений у X .

Визначення 1.6. Нечітким відображенням R із X у довільний скінченновимірний простір Y називається нечітка множина $\tilde{R}$ у $X \times Y$ з функцією належності

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y): X \times Y \rightarrow [0, 1], x \in X, y \in Y. \quad (1.9)$$

Визначення 1.7. Нечітке відображення $R: X \rightarrow Y$ будемо називати регулярним, якщо образом регулярної нечіткої множини в X при цьому відображенні є регулярна нечітка множина в Y .

2. Нечіткі динамічні системи. Розглянемо нечіткі динамічні системи, моделі яких можуть бути описані нечітким різницевою рівнянням

$$\tilde{X}(t+1) = \tilde{X}(t) \circ R, \quad (2.1)$$

де R – нечітке відображення з функцією належності $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, $x, y \in X$ [6], операція " $\circ$ " означає максимальну композицію, яка має вигляд

$$\mu_{\tilde{X}_{t+1}}(y) = \max_{x \in X} [\min(\mu_{\tilde{X}(t)}(x), \mu_{\tilde{R}}(x, y))]. \quad (2.2)$$

Нехай множина $T = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, де N – деяке наперед задане додатне число, визначає дискретні моменти часу. Позначимо через $T_n = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\} \subset T$ послідовність моментів часу з T , упорядкованих за зростанням. Розглянемо таку різницеву нечітку систему:

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

де $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \in E^n$ – компактна множина початкових станів, $\tilde{X}(t_k) = \tilde{X}_k$ – нечіткі множини в X можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, що визначають розв'язки системи, $R(t_k) = R_k$ – деякі нечіткі відображення з X у X , що визначають переходи системи, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Визначення 2.1. Траєкторією системи (2.3) назвемо послідовність $\{x(t_k) = x_k \in X_k = \text{supp}\{\tilde{X}_k\} \subset X\}_{k=0,1,2,\dots}$, для елементів якої справедливі співвідношення

$$x_{k+1} = R_k \circ x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Зрозуміло, що будь-який розв'язок системи (2.3) складається з множини траєкторій.

Визначення 2.2. Траєкторію системи (2.3) $\{\tilde{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ будемо називати регулярною (РТС), якщо для її елементів справедлива умова

$$\mu_k = \mu(\tilde{x}_k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нечіткі стани $\tilde{X}_k$ у моменти часу $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$ складаються з елементів траєкторій системи $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, що якщо система (2.3) має єдину регулярну траєкторію, то нечіткі стани $\tilde{X}_k, k = 0, 1, 2, \dots$, є регулярними нечіткими множинами в X .

3. Дослідження розв'язків нечітких різницевоїх систем. Побудовані нечіткі різницеві моделі дозволяють описувати динаміку різних процесів (явищ, ситуацій і т. д.). Для дослідження поведінки розв'язків нечітких систем проаналізуємо властивості операторів $R_k, k = 0, 1, 2, \dots$, що визначають динаміку змін функції належності $\mu_k(x)$ нечітких станів системи.

Розглянемо нечітку різницеву систему

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Визначення 3.1. Оператори $R_k, k = 0, 1, 2, \dots$ назвемо неперервними на розв'язках системи (3.1), якщо невеликій зміні в деякому розумінні функції належності $\mu_0(x)$ нечіткої множини $\tilde{X}_0$ відповідають невеликі зміни функцій належності $\mu_k(x)$ нечітких множин $\tilde{X}_k, k = 0, 1, 2, \dots$

Припустимо, що динаміку змін функції належності $\mu_k(x), k = 0, 1, 2, \dots$ у системі (3.1) можна зобразити у вигляді

$$\mu_{k+1}(x) = \mu_k(x) + f(\mu_k(x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

де $f(\mu(x))$ є неперервним на X , апіорі невідомим оператором, який виражає нечіткість переходів у різницевої системі (3.1).

Позначимо через $f(\tilde{X})$ нечітку множину $\tilde{X}$ з функцією належності $f(\mu(x)), x \in X$.

Нехай $\tilde{X}_k^1 = \{(x, \mu_k^1(x)): x \in X\}$ і $\tilde{X}_k^2 = \{(x, \mu_k^2(x)): x \in X\}, k = 0, 1, 2, \dots$ – два розв'язки системи (3.1) з початковими умовами $\tilde{X}_0^1 = \{(x, \mu_0^1(x)): x \in X\}$ і $\tilde{X}_0^2 = \{(x, \mu_0^2(x)): x \in X\}$ відповідно.

Введемо позначення $r_k(w_0), k = 0, 1, 2, \dots$ – максимального розв'язку скалярного дискретного рівняння

$$w_{k+1} = w_k + g(w_k), \quad w_0 \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

де g – неперервна додатна функція на області визначення.

Використовуючи визначення відстані між нечіткими множинами d_H у вигляді (1.8), сформулюємо такі твердження.

Твердження 3.1. Якщо для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$ виконуються нерівності

$$d_H(f(\tilde{X}_k^1), f(\tilde{X}_k^2)) \leq g(d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2)), \quad (3.4)$$

то для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$ має місце

$$d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \leq r_k(w_0) \quad (3.5)$$

і справедлива нерівність

$$d_H(\tilde{X}_0^1, \tilde{X}_0^2) \leq w_0. \quad (3.6)$$

Доведення. Скористаємося технікою, наведеною в [7]. Позначимо $m_k = d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2)$. Обчислимо

$$m_{k+1} - m_k = d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_{k+1}^2) - d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \quad (3.7)$$

Відомо, що для довільних нечітких множин $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ справедливі такі співвідношення [7]:

- 1) $d_H(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C}) = d_H(\tilde{A}, \tilde{B})$;
- 2) $d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_H(\tilde{B}, \tilde{A})$;
- 3) $d_H(\lambda \tilde{A}, \lambda \tilde{B}) = \lambda d_H(\tilde{A}, \tilde{B}), \lambda \in R^1$;
- 4) $d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq d_H(\tilde{A}, \tilde{C}) + d_H(\tilde{C}, \tilde{B})$.

Використовуючи ці співвідношення, запишемо:

- a) $d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_{k+1}^2) \leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2), \tilde{X}_{k+1}^2)$;
- b) $d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^1), \tilde{X}_{k+1}^1) \leq d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^1), \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2), \tilde{X}_{k+1}^1)$;
- c) $d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^1), \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) \leq d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^1), \tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^2)) +$
 $+ d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^2), \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) = d_H(f(\tilde{X}_k^1), f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2).$

Застосуємо отримані нерівності а)–с) у (3.7). Отримаємо

$$\begin{aligned} m_{k+1} - m_k &\leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2), \tilde{X}_{k+1}^2) - d(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \leq \\ &\leq d_H(\tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^2), \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) - \\ &- d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + d_H(\tilde{X}_k^1, f(\tilde{X}_k^2)) + \\ &+ d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) - d(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \leq d_H(\tilde{X}_{k+1}^1, \tilde{X}_k^1 + f(\tilde{X}_k^1)) + d_H(\tilde{X}_{k+1}^2, \tilde{X}_k^2 + f(\tilde{X}_k^2)) + \\ &+ d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2). \end{aligned}$$

Ураховуючи припущення (3.3), отримаємо

$$m_{k+1} - m_k \leq g(d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2)) = g(m_k)$$

або

$$m_{k+1} \leq m_k + g(m_k).$$

Твердження доведено.

4. Якісний аналіз динаміки нечітких різницевої системи. Для отримання більш загального й повного уявлення про характер поведінки розв'язків нечітких систем сформулюємо означення стійкоподібних властивостей нечітких систем і проведемо дослідження розв'язків на прикладі моделі (2.3).

Розглянемо різні випадки станів $\tilde{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ нечіткої системи.

4.1. Модель (2.3) має регулярну траєкторію. Припустимо, що існує траєкторія

$$\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}, \quad x_k \in \text{supp} \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

яка є регулярною траєкторією моделі (РТС) (2.3).

Визначення 4.1. РТС (2.3) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо

$$\forall \bar{T} > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 \exists \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0, \gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$$

такі, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ системи (2.3), початкові значення якої задовольняють нерівності

$$\|\bar{x}_0 - x_0\| < \delta, \quad (4.1)$$

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \quad (4.2)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ будуть виконуватись нерівності

$$\|\bar{x}_k - x_k\| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Під $\|\cdot\|$ у нерівностях (4.1), (4.3) розуміється звичайна евклідова норма простору R^n .

Визначення 4.2. РТС (2.3) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ називається асимптотично стійкою, якщо вона є стійкою та для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ тієї самої системи справедливі співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \bar{x}_k\| = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(x_k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Зрозуміло, що можливий випадок, коли поведінка носія нечіткої системи не задовольняє умови (4.1), (4.3), (4.5), але при цьому для функції належності зберігаються властивості, аналогічні (4.2), (4.4), (4.6).

Визначення 4.3. РТС моделі (2.3) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за ступенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0, \forall \eta > 0 \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ таке, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ системи (2.3), початкові значення якої задовольняють нерівності

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \quad (4.7)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ будуть виконуватись нерівності

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(x_k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right). \quad (4.9)$$

Очевидно, що запропоновані визначення узагальнюють відомі поняття стійкості для випадку традиційних (звичайних) множин. Дійсно, для звичайних множин A з функцією належності $\mu(x) \equiv 1$ для довільного елемента $x \in A$ виконання умов (4.2), (4.4), (4.6) є очевидним. Отже, означення стійкості (асимптотичної стійкості) (4.1), (4.3), (4.5) у цьому випадку повністю збігаються з класичними означеннями стійкості (асимптотичної стійкості) за Ляпуновим.

Запропоноване узагальнення дозволяє отримати для нечітких систем умови стійкості в термінах функцій Ляпунова.

Твердження 4.1. Якщо система (2.3) має регулярну траєкторію $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ та існують функції $V : X \rightarrow [0, 1]$ і $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} V_k &= V(x_k) \geq 0 \\ V(\bar{x}_k) &= 0 \\ \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \leq 0 \\ G_k &= G(\mu_k) \geq 0 \\ G(\bar{\mu}_k) &= G(1) = 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k \leq 0 \end{aligned}, \quad (4.10)$$

то регулярна траєкторія системи (2.3) є стійкою за Ляпуновим.

Пару $\{V, G\}$ назовемо функцією Ляпунова для різницевої нечіткої системи (2.3).

Доведення. В околі РТС (2.3) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ функція V має мінімум, тому можна знайти будь-яке значення $c > 0$ таке, що нерівності $V_k \leq c, k = 0, 1, 2, \dots$, буде задовольняти множина траєкторій, серед яких знаходиться і РТС. Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $0 < c \leq \varepsilon$, то множина траєкторій, що задовольняє рівняння $V_k = V(x_k) \leq c$, буде задовольняти й рівняння $V_k \leq \varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots$. Так як $c \neq 0$, то можна знайти таке $\delta > 0$, що множина траєкторій, які задовольняють нерівність

$$V_k \leq \delta, \quad (4.11)$$

будуть задовольняти й нерівність $V_k \leq c, k = 0, 1, 2, \dots$. Тому, якщо всі початкові траєкторії будуть задовольняти нерівність (4.11), то і при $t_k > \bar{T}$ усі траєкторії системи будуть також задовольняти нерівність $V_k \leq c, k = 0, 1, 2, \dots$ згідно з твердженням, за яким $\Delta V_k \leq 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Розглянемо функцію G . Для того, щоб РТС була стійкою за значеннями функції належності μ , достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \geq \mu_k, t_k > \bar{T}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k, k = 0, 1, 2, \dots$, створюють послідовність, яка є незростаючою. На значеннях РТС функція $G(\mu)$ має строгий мінімум. Тому можна знайти такі $\eta > 0, \varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій у ε – околі РТС, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність $G_k, k = 0, 1, 2, \dots$, буде незростаючою. Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \leq 0, k = 0, 1, 2, \dots$ забезпечує виконання (4.12).

Твердження доведено.

Твердження 4.2. Якщо система (2.3) має регулярну траєкторію $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ та існують функції $V: X \rightarrow [0, 1]$ і $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} V_k &= V(x_k) \geq 0 \\ V(\bar{x}_k) &= 0 \\ \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k < 0 \\ G_k &= G(\mu_k) \geq 0 \\ G(\bar{\mu}_k) &= G(1) = 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k < 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

то регулярна траєкторія системи (2.3) є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

Доведення проводиться аналогічно.

Як впливає з отриманих умов, властивості (4.10) і (4.13) є узагальненням традиційних умов, які забезпечують існування стійкої (асимптотично стійкої) траєкторії у випадку чітких множин.

Дійсно, якщо розглядати поведінку звичайних динамічних систем, то функція $G(\mu) \equiv 0, \forall \mu \in [0, 1]$, а умови для функції $V(x)$ у (4.10) і (4.13) є класичними для теорем Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.

Аналогічно твердженням 4.1, 4.2 можна сформулювати таке твердження.

Твердження 4.3. Якщо система (2.3) має регулярну траєкторію $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ та існує функція $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ така, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} G_k &= G(\mu(x_k)) \geq 0 \\ G(\bar{\mu}(x_k)) &= G(1) = 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k \leq (<) 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

то регулярна траєкторія системи (2.3) є стійкою (асимптотично стійкою) за ступенем належності.

Доведення. Для того, щоб регулярна траєкторія системи (2.3) була стійкою (асимптотично стійкою) за значеннями функції належності μ , достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \geq (>) \mu_k, t_k > \bar{T}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k, k = 0, 1, 2, \dots$, створюють послідовність, яка є незростаючою (спадною). На значеннях РТС функція $G(\mu)$ має строгий мінімум. Тому можна знайти такі $\eta > 0, \varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій у ε – околі РТС, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність $G_k, k = 0, 1, 2, \dots$, буде незростаючою (спадною). Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \leq (<) 0, k = 0, 1, 2, \dots$ забезпечує виконання (4.17).

Твердження доведено.

4.2. Система (2.3) не має регулярної траєкторії. Це означає, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ $x_k \in \text{supp } \tilde{X}_k, k = 0, 1, 2, \dots$ системи (2.3) існує момент часу $t_m \in T_n$ такий, що виконується нерівність $\mu(x_m) < 1$. За таких умов розглянемо два випадки:

I. Нехай множина $Y_0 \subseteq X_0 = \text{supp } \tilde{X}_0 \in X$ містить множину початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу $t_k \in T_n$, що $\mu(x_k) = 1$.

Визначення 4.4. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y | \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}, x_0 \notin Y_0$, системи (2.3) $\forall \bar{T} > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 \exists \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0, \gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$, початкові значення якої задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} d(x_0, Y_0) &< \delta \\ |\mu(x_0) - 1| &< \gamma, \end{aligned} \quad (4.16)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ будуть виконуватись нерівності

$$\begin{aligned} d(x_k, Y_0) &< \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ |\mu_k - 1| &< \eta \end{aligned} \quad (4.17)$$

де $d(\cdot, \cdot)$ – хаусдорфова відстань від точки до нечіткої множини, яка визначена в (1.8).

Аналогічно першому пункту дослідження стійкості сформулюємо додаткові означення.

Визначення 4.5. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y, \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається асимптотично стійкою за Ляпуновим, якщо вона є стійкою за Ляпуновим і для довільної траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, системи (2.3) справедливо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, Y_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(x_k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

Визначення 4.6. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y, \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, $x_0 \notin Y_0$, системи (2.3) $\forall \bar{T} > 0, \forall \eta > 0 \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$, початкові значення якої задовольняють умову

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \quad (4.20)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ будуть виконуватись нерівності

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(x_k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right). \quad (4.22)$$

Неважко перевірити, що якщо множина Y_0 містить лише одну точку $\bar{x} : \mu(\bar{x}) = 1$, то визначення 4.4, 4.5, 4.6 будуть аналогічними визначенням 4.1, 4.2, 4.3 стійкості (асимптотичної стійкості) у випадку наявності РТС у моделі (2.3). Це означає, що поняття стійкості РТС може розглядатись як частинний випадок стійкості (асимптотичної стійкості) нечіткої множини.

Будемо вважати множину Y_0 компактною. Позначимо множину граничних точок множини Y_0 через ∂Y_0 . Справедливе таке твердження.

Твердження 4.4. Якщо система (2.3) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини початкових станів траєкторій $\tilde{Y}_0$ існують функції $V : X \rightarrow [0, 1]$ та $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, $x_0 \notin Y_0 = \text{supp } \tilde{Y}_0$, виконуються нерівності

$$\begin{aligned} V(x_k) &= 0, \quad x_k \in \partial Y_0 \\ V_k &= V(x_k) \geq 0 \\ \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \leq 0 \\ G_k &= G(\mu_k) \geq 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k \leq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

то нечітка множина $\tilde{Y}_0$ є стійкою за Ляпуновим.

Доведення. Надалі будемо працювати з множиною траєкторій системи (2.3), початкові стани яких $x_0 \notin Y_0$. В околі множини Y_0 функція V має мінімум, тому можна знайти будь-яке значення $c > 0$ таке, що нерівності $V_k \leq c$, $k = 0, 1, 2, \dots$, буде задовольняти множина траєкторій, серед яких знаходиться й довільна траєкторія з початковим станом $x_0 \in Y_0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $0 < c \leq \varepsilon$, то множина траєкторій, що задовольняє рівняння $V_k \leq c$, буде задовольняти й рівняння $V_k \leq \varepsilon$. Так як $c \neq 0$, то можна знайти таке $\delta > 0$, що траєкторії, які задовольняють нерівності

$$V_k \leq \delta \quad (4.24)$$

будуть задовольняти й нерівності $V_k \leq c$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тому, якщо всі початкові траєкторії будуть задовольняти нерівності (4.24), то і при $t_k > \bar{T}$ усі траєкторії системи будуть також задовольняти нерівності $V_k \leq c$, $k = 0, 1, 2, \dots$ згідно з твердженням, за яким $\Delta V_k \leq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Розглянемо функцію G . Для того, щоб нечітка множина $\tilde{Y}_0$ була стійкою за значеннями функції належності μ , достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \geq \mu_k, \quad t_k > \bar{T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall x_0 \notin Y_0. \quad (4.25)$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, утворюють послідовність, яка є незростаючою. На значеннях $x_k \in \partial Y_0$ функція $G(\mu)$ має строгий мінімум, тому можна знайти такі $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій у ε –

околі $x_k \in \partial Y_0$, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність G_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ буде монотонно незростаючою. Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \leq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ забезпечує виконання (4.25).

Твердження доведено.

Твердження 4.5. Якщо система (2.3) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини початкових станів траєкторій $\tilde{Y}_0$ існують функції $V: X \rightarrow [0, 1]$ та $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, $x_0 \notin Y_0 = \text{supp } \tilde{Y}_0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} V(x_k) &= 0, \quad x_k \in \partial Y_0 \\ V_k &= V(x_k) \geq 0 \\ \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k < 0 \\ G_k &= G(\mu_k) \geq 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k < 0 \end{aligned}, \quad (4.26)$$

то нечітка множина $\tilde{Y}_0$ є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

Доведення проводиться аналогічно.

Твердження 4.6. Якщо система (2.3) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини $\tilde{Y}_0$ початкових станів траєкторій існує функція $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ така, що для будь-якої траєкторії системи (2.3) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, $x_0 \notin Y_0 = \text{supp } \tilde{Y}_0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} G_k &= G(\mu(x_k)) \geq 0 \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k \leq (<) 0 \end{aligned}, \quad (4.27)$$

то $\tilde{Y}_0$ – стійка (асимптотично стійка) за степенем належності нечітка множина.

Доведення. Будемо працювати з множиною траєкторій системи (2.3), початкові стани яких $x_0 \notin Y_0$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{Y}_0$ була стійкою (асимптотично стійкою) за значеннями функції належності μ , достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \geq (>) \mu_k, \quad t_k > \bar{T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall x_0 \notin Y_0. \quad (4.28)$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, створюють послідовність, яка є незростаючою (спадною). На значеннях $x_k \in \partial Y_0$ функція $G(\mu)$ має строгий мінімум, тому можна знайти такі $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій у ε – околі $x_k \in \partial Y_0$, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність G_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ буде монотонно незростаючою (спадною). Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \leq (<) 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ забезпечує виконання (4.28).

Твердження доведено.

Припустимо, що неможливо виділити множину Y_0 початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу t_k , що $\mu(x_k) = 1$. У цьому випадку потрібно говорити про стійкість заданої нечіткої множини $\tilde{X}_0 = \{(x, \mu(x)) : x \in X_0\}$.

Позначимо розв'язок системи (2.3) з початковими значеннями $\tilde{X}^0$ через $\tilde{X}_k^0 = \{(x, \mu_k^0(x)) : x \in X\}_{k=0,1,2,\dots}$,

де $\mu_0^0(x) = \mu_0(x)$, $x \in X$.

Визначення 4.7. Нечітка множина $\tilde{X}^0 = \{(x, \mu_0(x)) : x \in X\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \eta > 0 \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ для довільного розв'язку $\tilde{X}_k^1 = \{(x, \mu_k^1(x)) : x \in X\}_{k=0,1,2,\dots}$ системи (2.3), початкове значення якого задовольняє умову

$$\max_{x \in X} |\mu_0^0(x) - \mu_0^1(x)| < \gamma, \quad (4.29)$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ будуть виконуватись

$$\max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.30)$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right). \quad (4.31)$$

Твердження 4.7. Якщо для нечіткої множини $\tilde{X}^0$ початкових станів нечіткої дискретної системи (2.3) існує функція $G: [0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ така, що для будь-якого розв'язку системи (2.3) $\tilde{X}_k^1, k = 0, 1, 2, \dots$, $\mu_0^1(x) \neq \mu_0^0(x), x \in X$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} G_k &= G(\mu_k^1(x)) \geq 0, x \in X, \\ \Delta G_k &= G_{k+1} - G_k \leq (<) 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

то нечітка множина $\tilde{X}_0$ -стійка (асимптотично стійка) за степенем належності.

Доведення. Нехай $\tilde{X}_k^0 = \left\{ (x, \mu_k^0(x)) : x \in X \right\}_{k=0,1,2,\dots}$ – розв'язок системи (2.3) з початковими значеннями у вигляді нечіткої множини $\tilde{X}^0$. Тоді для довільного розв'язку $\tilde{X}_k^1, k = 0, 1, 2, \dots$, $\mu_0^1(x) \neq \mu_0^0(x), x \in X$ можна визначити функцію $G_k = G(\mu_k^1), k = 0, 1, 2, \dots$ у вигляді:

$$G_k = \max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)|, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

За умовами твердження функція $G_k, k = 0, 1, 2, \dots$ є незростаючою (спадною) за k , що гарантує існування для будь-яких $\bar{T} > 0$ і $\eta > 0$ величини $\gamma(\eta, \bar{T}) > 0$, за якою буде справедливим виконання співвідношень (4.29), (4.30), (4.31). За означенням отримуємо, що $\tilde{X}^0$ буде стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності. Твердження доведено.

1. Zadeh L. Fuzzy sets // Information and control. – 1965. – V. 8; 2. Glass M. Theory of fuzzy systems // Fuzzy Sets and Systems. – 1983. – V. 10; 3. Чуликов А. Математические модели нелинейной динамики. – М., 2000; 4. Меренков Ю. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. – М., 2000; 5. Пушков С. Об общей теории нечетких систем: глобальное состояние и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 5; 6. Орловский С. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. – М., 1981; 7. Lakshmikantham V. Uncertain Systems and Fuzzy Differential Equation // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – Казань, 2000. – Вып. 2(12). – Т. 6; 8. Кудинов Ю. Нечеткие системы управления // Изв. РАН. Техническая кибернетика. – 1990. – № 5.

Роботу виконано за підтримки Фонду фундаментальних досліджень. Проект ДКНТ України 01.07 / 00081.

Надійшла до редакції 2.12.2005

УДК 519.234.35

Д. Ключин, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Ю. Петунін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
М. Савкіна, канд. фіз.-мат. наук

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ГЛІВЕНКА – КАНТЕЛЛІ ДЛЯ ОБЕРНЕНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ

Доведено аналог теореми Глівенка – Кантеллі про рівномірну збіжність послідовності обернених кусково-лінійних емпіричних функцій розподілу до оберненої гіпотетичної функції розподілу.

In this paper the analogue of Cantelli-Glivenko theorem on uniform convergence of a sequence of inverse piece-wise empirical distribution functions to the inverse hypothetical distribution function is proved.

1. Вступ. Як відомо, генеральні сукупності розділяються на два класи – гомогенні й гетерогенні. Наприклад, у хіміотерапії та радіотерапії злоякісних новоутворень вважається, що до початку лікування популяція пухлинних клітин є гомогенною і складається з ракових клітин, чутливих до цитостатиків чи рентгенівського опромінення. Однак після проведення курсу лікування пухлина є гетерогенною генеральною сукупністю, в якій крім чутливих клітин з'являються так звані резистентні. Основна задача стратифікаційного аналізу гетерогенних генеральних сукупностей полягає у визначенні кількості модальних класів, а також їхніх показників.

Теорема Глівенка – Кантеллі, одночасно доведена авторами незалежно один від одного в 1933 р., є однією з найважливіших теорем у математичній статистиці [1, 2]. Вона стверджує, що коли кількість спостережень прямує до нескінченності, то емпірична функція розподілу прямує до дійсної функції розподілу за ймовірністю в чебишовській метриці. Саме в цій формі теорема Глівенка – Кантеллі широко використовується в статистичній теорії розпізнавання образів [3, 4]. Однак при аналізі неоднорідності генеральних сукупностей зручніше використовувати поняття кусково-лінійної емпіричної функції розподілу і функції, що є оберненою до неї. Це дозволяє розробити дуже простий метод, не пов'язаний із складними обчисленнями.

2. Кусково-лінійна емпірична функція розподілу. Нехай G – генеральна сукупність із неперервною строго зростаючою функцією розподілу $F(u)$. Тоді $F(u)$ має обернену функцію розподілу $F^{-1}(u)$. Поняття оберненої функції розподілу можна узагальнити, якщо функція $F(u)$ є неперервною і строго зростаючою не на всій числовій осі, а на своєму носії – відрізку $[a, b]$. Нагадаємо, що носієм функції розподілу $F(u)$ називається мінімальний відрі-

зок $[a, b]$, для якого $F(u) \equiv 0 \quad \forall u \leq a$ і $F(u) \equiv 1 \quad \forall u \geq b$. У цьому випадку обернена функція розподілу визначається як функція, що є оберненою до звуження $F_{[a,b]}(u)$ на свій носій $[a, b]$.

Гіпотетична функція розподілу $F(u)$ генеральної сукупності G , як і обернена до неї, як правило, є невідомими, однак після проведення випадкового експерименту ми маємо вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$, на підставі якої можна одержати оцінки функцій $F(u)$ і $F^{-1}(u)$. Опишемо спочатку оцінку для функції розподілу. Розглянемо варіаційний ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, побудований за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$, і визначимо кусково-сталу емпіричну функцію розподілу $F_n^*(u)$. За теоремою Глівенка – Кантеллі [1, 2]

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \max_u |F(u) - F_n^*(u)| = 0\right) = 1.$$

На жаль, у кусково-сталій емпіричній функції розподілу немає оберненої функції (в її звичайному розумінні), тому її неможливо використовувати для оцінки оберненої функції розподілу. У зв'язку з цим виникає проблема побудови емпіричної функції розподілу, в якого була б обернена функція.

Для неперервної монотонно зростаючої функції розподілу $F(u)$ з компактним носієм $[a, b]$ побудуємо такий кусково-лінійний сплайн:

$$\tilde{F}_n(u) = \begin{cases} \frac{u}{n(x_{(k+1)} - x_{(k)})} + \frac{kx_{(k+1)} - (k+1)x_{(k)}}{n(x_{(k+1)} - x_{(k)})}, & \text{якщо } x_{(k)} \leq u \leq x_{(k+1)}, x_{(0)} = a, k = 0, 1, \dots, n; \\ 1, & \text{якщо } x_{(n)} \leq u \leq b. \end{cases}$$

Кусково-лінійна емпірична функція розподілу $F_n^*(u)$, що визначена на відрізку $[a, b]$, має на відрізку $[a, x_{(n)}]$ обернену функцію $(F_n^*(u))^{-1}$, $0 \leq u \leq 1$. Для скорочення запису надалі будемо позначати функцію $(F_n^*(u))^{-1}$ як $\Psi_n^*(u)$. Ця функція також є кусково-лінійним сплайном з вершинами в точках $\left(\frac{k}{n}, x_{(k)}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Інакше кажучи, $\Psi_n^*(u)$ є неперервною кусково-лінійною функцією, що проходить через точки $\left(\frac{k}{n}, x_{(k)}\right)$, де $x_{(k)}$ – порядкові статистики. Слід зазначити, що для інших кусково-лінійних емпіричних функцій розподілу, що відрізняються від $\tilde{F}_n^*(u)$, існують обернені функції, які цієї властивості не мають.

Неважко помітити, що $\forall u \in R^1$

$$|F_n^*(u) - \tilde{F}_n^*(u)| < \frac{1}{n},$$

тому $\tilde{F}_n^*(u)$ є слушною оцінкою для гіпотетичної функції розподілу, причому теорема Глівенка – Кантеллі залишається справедливою.

Зауваження 1. У випадку, коли вибірка $x_1, x_2, \dots, x_n$ належить нормально розподіленій сукупності, функція, обернена до кусково-лінійної емпіричної функції розподілу, називається кривою Кетле [3].

Зауваження 2. Комп'ютерне моделювання показує, що для нормальних розподілів лінійна регресія краще апроксимує обернену емпіричну кусково-лінійну функцію, ніж пряму. У цьому випадку стратифікаційний аналіз гетерогенних генеральних сукупностей має більш високу точність.

Лема. Якщо гіпотетична функція розподілу $F(u)$ генеральної сукупності є неперервною і має компактний носій $[a, b]$, то послідовність кусково-лінійних емпіричних функцій розподілу з імовірністю одиниця збігається до функції розподілу в чебишовській метриці:

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n^*(u)| = 0\right) = 1.$$

Доведення. Дійсно,

$$|F_n^*(u) - \tilde{F}_n^*(u)| \leq |F(u) - F_n^*(u)| + |F_n^*(u) - \tilde{F}_n^*(u)| \leq |F(u) - F_n^*(u)| + \frac{1}{n}.$$

Отже,

$$\max_u |F_n^*(u) - \tilde{F}_n^*(u)| \leq \max_u |F(u) - F_n^*(u)| + \frac{1}{n}.$$

Легко бачити, що

$$\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n(u, \omega)| = 0 \right\} \supset \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - F_n^*(u, \omega)| = 0 \right\},$$

$$\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - F_n^*(u, \omega)| + \frac{1}{n} = 0 \right\} \supset \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n^*(u, \omega)| = 0 \right\},$$

де ω – елементарний наслідок.

Таким чином,

$$p \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n^*(u, \omega)| = 0 \right\} \geq p \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - F_n^*(u, \omega)| = 0 \right\} = p \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n^*(u, \omega)| = 0 \right\} = 1.$$

Отже,

$$p \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow 0} \max_u |F(u) - \tilde{F}_n^*(u, \omega)| = 0 \right\} = 1.$$

Лему доведено.

Теорема. Якщо гіпотетична функція розподілу $F(u)$ генеральної сукупності G є неперервною й має компактний носій $[a, b]$, то послідовність обернених функцій $\{\Psi_n^*(u)\}$ збігається з імовірністю одиниця до функції $F^{-1}(u)$, тобто

$$p \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq u \leq b} |F^{-1}(u) - \Psi_n^*(u)| = 0 \right\} = 1. \quad (1)$$

Доведення. Формула (1) означає, що ймовірність події, яка полягає в тому, що послідовність $\{\Psi_n^*(u)\}$ рівномірно збігається до $F^{-1}(u)$, дорівнює одиниці. За лемою 1

$$p \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq u \leq b} |F(u) - \tilde{F}_n^*(u)| = 0 \right\} = 1. \quad (2)$$

Розглянемо елементарний результат випадкового випробування, при реалізації якого послідовність $\{\tilde{F}_n^*(u)\}$ рівномірно збігається до $F(u)$, коли $n \rightarrow \infty$. Покажемо, що при цьому послідовність $\{\Psi_n^*(u)\}$ рівномірно збігається до $F^{-1}(u)$, коли $n \rightarrow \infty$. Для цього достатньо показати, що при кожному $\varepsilon > 0$ у ε -околі функції $F(u)$ в чебишовській метриці $N_\varepsilon(F) = \left\{ \Psi(u) : \max_{a \leq u \leq b} |F(u) - \Psi(u)| < \varepsilon, \Psi \in C[a, b] \right\}$ при якомусь $\delta > 0$ міститься так званий "циліндричний" δ -оکیل $C_\delta(F)$ функції $F(u)$. Інакше кажучи,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : C_\delta(F) \subset N_\varepsilon(F),$$

де

$$C_\delta(F) = \left\{ \Psi(u) : (u, \Psi(u)) \in \bigcup_{u \in [a, b]} S((u, F(u), \delta)) \right\},$$

$$S((u, F(u), \delta)) = \{(v, y) : \rho((u, F(u)), (v, y)) < \delta\}.$$

Неважко помітити, що останнє твердження буде доведено, якщо ми покажемо, що в смузі

$$\Pi_\varepsilon = \{(u, y) : |F(u) - y| < \varepsilon, u \in [a, b]\}$$

при якомусь $\delta > 0$ міститься "циліндрична смуга"

$$\Pi_\delta^C = \{(u, y) : \rho((u, y), (u, F(u))) < \delta, u \in [a, b] \times (0, 1)\}.$$

Перш за все доведемо, що смуга Π_ε є відкритою множиною на площині. Нехай $\Pi_\varepsilon^+ = \{(u, y) : y < F(u) + \varepsilon, u \in (a, b)\}$, $\Pi_\varepsilon^- = \{(u, y) : y > F(u) - \varepsilon, u \in (a, b)\}$. Розглянемо неперервну функцію $\varphi(u, y) = y - F(u)$. Тоді $\Pi_\varepsilon^+ = \{(u, y) : \varphi(u, y) < \varepsilon\}$. Оскільки функція $\varphi(u, y)$ є неперервною, то множини Π_ε^- і Π_ε^+ є відкритими в прямокутнику $a < u < b$, $0 < y < 1$, а тому й на площині. Отже, смуга $\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^+ \cap \Pi_\varepsilon^-$ також є відкритою в R^2 . Звідси випливає, що для будь-якої точки $(u, F(u))$, що належить графіку функції $F(u)$, існує таке коло радіусом δ із центром у цій точці, що перетин цього кола з прямокутником $(a, b) \times (0, 1)$ міститься в смузі Π_ε . Зрозуміло, що радіус δ може залежати від точки $(u, F(u))$.

Покажемо існування числа $\delta_0 > 0$ такого, що $\delta > \delta_0$ для будь-якої точки $(u, F(u))$. Дійсно, припустимо супротивне. Тоді існує послідовність точок $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, що належать межі Γ_1 розглянутої смуги, яка збігається до точки $A_0 \in \Gamma$. Позначимо через A'_n точку, що лежить на графіку Γ функції $F(u)$, абсциса u_n якої збігається з абсцисою точки A_n . З огляду на компактність прямокутника $[a, b] \times [0, 1]$, без обмеження загальності можна вважати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = \tilde{A}_0$.

Покажемо, що $A'_n = A_0$. Має місце такий ланцюжок тверджень:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, F(u_n)) = (u_0, F(u_0)) = A_0 \Rightarrow A_0 = \tilde{A}_0. \end{aligned}$$

Проте $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, y_n + \varepsilon) = (u_0, y_0 + \varepsilon) \neq A_0$. Отримане протиріччя доводить існування шуканого числа δ_0 . Отже, послідовність функцій $\{\Psi_n^*(u)\}$ з імовірністю одиниці збігається до функції $F^{-1}(u)$. Теорему доведено.

Зауваження 3. Результати, отримані в цій роботі, можуть бути використані при стратифікаційному аналізі генеральних сукупностей, зокрема, при аналізі неоднорідних популяцій пухлинних клітин [5, 6].

1. Cantelli F. Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita // Giorn. Ist. Ital. – 1933. – Att. 4; 2. Glivenko V. Sulla determinazione empirica della legge di probabilita // Giorn. Ist. Ital. – 1933. – Att. 4; 3. Vapnik V. Statistical Learning Theory. – Wiley, 1998; 4. Vapnik V. The Nature of Statistical Learning Theory. – Springer, 2000; 5. Ван дер Варден Б. Математическая статистика. – М., 1960; 6. Зинченко В., Ганина К., Петунин Ю. и др. Количественная оценка изменчивости и гетерогенности культивируемых опухолевых клеток при формировании их радиорезистентности // Экспериментальная онкология. – 1999. – Т. 21; 7. Andrushkiw R., Klyushin D., Petunin Yu. etc. Stratification of general populations and its applications for analysis of resistant tumour cells // Proceedings of the International Conference of Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Science. – Las Vegas, Nevada, USA, 2003.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 004.89, 004.93

Ю. Крак, д-р фіз.-мат. наук,
О. Бармак, канд. техн. наук

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПОРТРЕТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ОБЛИЧ ЛЮДЕЙ З ВЕЛИКИХ БАЗ ДАНИХ

*Розглядається нова інформаційна технологія розпізнавання зображень облич людей у великих базах даних.
The new information technology for human face recognition in the large database is investigated.*

Задачу оптимального пошуку та ідентифікації слабкоконтрастного об'єкта, яким є людське обличчя, на основі систем кібернетичного зору можна розглядати як у світлі класичної проблеми сприйняття, так і у світлі нових підходів. Задача ідентифікації та розпізнавання облич – це одна з перших практичних задач, яка стимулювала становлення й розвиток теорії розпізнавання та ідентифікації об'єктів. Серед існуючих категорій об'єктів, які відповідають гностичним сферам і викликають зорові образи, великий інтерес становлять обличчя та їх вирази.

У даній роботі розглядаються проблеми ідентифікації портретних зображень облич людей з великих баз даних з урахуванням їх емоційного забарвлення й довільної орієнтації у просторі. Пропонується нова інформаційна технологія, яка, використовуючи досягнення сучасної обчислювальної техніки, методи обробки цифрових зображень, математичні методи моделювання трьохмірних поверхонь, сучасні системи управління базами даних [1], дозволяє доповнити існуючі методи для автоматизації процесу ідентифікації портретних зображень з великих баз даних.

Для задачі розпізнавання образів пропонується застосувати спеціальну методику опису ознак зовнішності людини (сповесний портрет), але вдосконалену з урахуванням застосування комп'ютерної обробки зображень. До ознак зовнішності належать параметри, які характеризують особливості анатомічної будови людини, а саме її обличчя. Це анатомічні ознаки з вказівкою їхньої величини, форми, положення, а в деяких випадках – кольору, кількості й рівнів виразності (напр., зморшок). Риси обличчя описуються при двох положеннях: спереду (у фас) і збоку (у профіль, як правило, правий). Можливість використання анатомічних ознак зовнішності для ідентифікації людини обумовлюється, насамперед, відносною стійкістю цих ознак, яка визначається сталістю кістково-хрящової основи тіла людини. Вікові зміни та зміни, що отримані внаслідок хвороб, не можуть суттєво вплинути на анатомічні ознаки. Вікові зміни відбуваються повільно і в межах ідентифікаційного періоду не призводять до якісних розходжень; зміни, що отримані внаслідок хвороб (травматологічні), торкаються лише окремих ознак, і тому індивідуальна сукупність ознак зовнішності кожної людини залишається практично незмінною.

Запропонована інформаційна технологія передбачає:

1. Автоматичний розклад фотографічного портретного зображення на вектор анатомічних ознак зовнішності з урахуванням автоматичної побудови множин цих ознак.
2. Створення на основі векторів ознак накопичувального, репрезентативного ряду облич генерованими членами, які відповідатимуть зображенню з емоційним забарвленням і довільними нахилами (з фіксованою дискретизацією).
4. Побудову суб'єктивного портрета (фоторобота) з використанням множин анатомічних ознак, отриманих при автоматичному розкладі великої кількості реальних портретних зображень і генерованих на їх основі зображень, які моделюють емоційні й ротаційні складові.

5. Пошук у базі даних зображень, які задовольняють вхідний вектор ознак (можливо неповний) за умови зображення цього вектора як у вигляді зображення, так і у вербальному вигляді.

Для реалізації запропонованої інформаційної технології використовується процедура автоматичного виділення контурів (різкої зміни яскравості) на зображенні з подальшою скелетизацією (тобто виділенням на контурі деякої середньої лінії, яка б правильно відображала структуру портретного зображення). Саме таке, віднормоване, зображення є основою для створення вектора анатомічних ознак.

Оконтурювання організується на основі аналізу першої та другої похідних зображення. Відомо, що найбільша зміна функції відбувається в напрямку її градієнта. Величина зміни вимірюється абсолютною величиною градієнта. Існує ціла сім'я методів, оснований на наближеному обчисленні градієнта, аналізі його напрямку та абсолютної величини [3]. Це згортки Роберта, Превітта, Собеля. Їх математичний зміст – наближене обчислення похідних за напрямком. В операторі Собеля ядро згортки (1)

$$\begin{pmatrix} P_9 & P_2 & P_3 \\ P_8 & P_1 & P_4 \\ P_7 & P_6 & P_5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

накладається на фотопортрет шляхом суміщення кожного пікселя зображення з P_1 . Потрібно визначити значення цього пікселя. Для цього обчислюється величина

$$S = |(P_3 + 2 * P_4 + P_5) - (P_9 + 2 * P_8 + P_7)| + |(P_7 + 2 * P_6 + P_5) - (P_9 + 2 * P_8 + P_3)|. \quad (2)$$

Установлюється поріг. Якщо поріг перевищено, то встановлюється 1, в іншому випадку – 0. У результаті такого перетворення отримується контурне зображення.

Основною проблемою при використанні такого підходу є значення порогу. Неможливо визначити універсальне значення. На якість оконтурювання впливає якість зображення, контрастність, освітлення та ін. Причому вибране значення порогу може підходити для одних ділянок зображення і не підходити для інших.

Для розв'язання означеної проблеми пропонується підхід, що використовує нечітку логіку для задання правил визначення значення порогу залежно від якості фрагмента зображення й генетичний алгоритм для пошуку сталих оптимальних залежностей: фрагмент зображення – значення порогу.

Результатом такого підходу є те, що контури зображень однієї й тієї самої людини, сфотографованої при різному освітленні, різному положенні джерел світла, різній фокусній відстані дають контурне зображення, яке в заданій метриці є однаковим.

Для перетворення віднормованого, оконтурюваного, скелетизованого зображення на вектор анатомічних ознак ми пропонуємо використовувати активний контур (енергетично мінімальний сплайн, що навчається шляхом введення зовнішніх вимушених потенціалів і потенціалів зображення, що "натягують" його на елементи обличчя на основі характеристик контурів).

Для моделювання активного контуру для розкладу зображення на ознаки та моделювання трьохмірної моделі голови людини на базі активного контуру використовуватимемо апарат нерівномірних раціональних базисних сплайнів (NURBS) [4]:

$$p(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,d}(u) B_{j,d}(v) w_{i,j} p_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,d}(u) B_{j,d}(v) w_{i,j}}, \quad (3)$$

де $p_{i,j}$ – масив опорних (керуючих) точок (Control Points); $w_{i,j}$ – коефіцієнти для збільшення або зменшення "ваги" конкретної опорної точки; $B_{i,d}(\cdot)$ – базисні функції Кокса-де Бура [5]:

$$B_{k,0} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u_k \leq u \leq u_{k+1} \\ 0 - \text{у іншому випадку} \end{cases} \quad (4)$$

$$B_{k,d} = \frac{u - u_k}{u_{k+d} - u_k} B_{k,d-1}(u) + \frac{u_{k+d+1} - u}{u_{k+d+1} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(u)$$

При моделюванні обличчя за допомогою NURBS-поверхонь (на противагу полігональному моделюванню) розмірність зменшується на порядки, а деформації поверхні (для "натягування" на елементи обличчя, моделювання емоцій) більш плавні й подібні до деформацій реальних облич.

Моделювати голову за допомогою кривих можна різними способами. Для моделювання емоційних станів та артикуляції ми пропонуємо моделювати голову людини з використанням вертикальних кривих, що беруть початок на внутрішній поверхні роти [1]. Вони виходять з роти на поверхню, повторюючи риси обличчя, і закінчуються біля основи шиї. Цей підхід дуже чітко спрацьовує при створенні окремої каркасної моделі голови, яка визначає більшу частину рис обличчя. Так як, зазвичай, напрямки кривих збігається з напрямком м'язів обличчя, то це робить легкою анімацію міміки, емоційних станів і відтворює якісну артикуляцію.

Для комп'ютерного відображення NURBS-поверхні запропоновано використовувати рівномірну мозаїчну модель відтворення [6, 7]. Для цієї моделі беруться однакові кроки між мінімальними й максимальними значеннями для параметрів, визначених на поверхні. Отримані точки використовуються як вершини (вертекси) трикутників, що подаються на вхід тривимірного API типу OpenGL або Direct3D, де і відбувається відтворення поверхні. Використання саме такої моделі відтворення обумовлене тим, що вона продукує фіксовану кількість вертексів. Цією властивістю можна скористатися, щоб працювати з текстурами (двовимірними фотографіями) при "натягуванні" їх на NURBS-поверхню.

$B_{i,d}(u)$ і $B_{j,d}(v)$ для швидшого обчислення $p(u,v)$ визначаються один раз у точках поділу рівномірної мозаїчної моделі, а не обчислюються кожного разу у внутрішньому циклі. Вони зберігаються у масиві, з якого потім використовуються.

Для знаходження поверхневих нормалей (щоб тримірне API змогло зробити освітлення) потрібно створити дві дотичні (одну в u -напрямку та одну у v -напрямку) і взяти векторний добуток для отримання поверхневої нормалі. Якщо записати систему рівнянь для обчислення коефіцієнтів у вигляді поліноміального рівняння, еквівалентного $B_{i,d}(u)$, а потім брати похідну, то це буде просте множення на коефіцієнт і зменшення степеня на одиницю:

$$\frac{d(Ax^n + Bx^m)}{dx} = nAx^{(n-1)} + mBx^{(m-1)}. \quad (5)$$

Отже, потрібно обчислити коефіцієнти базисних функцій (4), що зображені у вигляді полінома:

$$B_{i,d}(u) = C_{i,d,d}(u)u^d + C_{i,d,d-1}(u)u^{d-1} + \dots + C_{i,d,1}(u)u + C_{i,d,0}(u). \quad (6)$$

Обчислення коефіцієнтів $C_{i,d,k}(u)$, маючи на увазі (4), виглядає таким чином:

$$\begin{aligned} C_{i,0,0}(u) &= B_{i,0}(u) \\ C_{i,d,0}(u) &= \frac{u_{i+d+1}C_{i+1,d-1,0}(u) - u_iC_{i,d-1,0}(u)}{u_{i+d+1} - u_i} \\ C_{i,d,d}(u) &= \frac{C_{i,d-1,d-1}(u)}{u_{i+d} - u_i} - \frac{C_{i+1,d-1,d-1}(u)}{u_{i+d+1} - u_{i+1}} \\ C_{i,d,k}(u) &= \frac{C_{i,d-1,k-1}(u) - u_iC_{i,d-1,k}(u)}{u_{i+d} - u_i} - \frac{C_{i+1,d-1,k-1}(u) - u_{i+d+1}C_{i+1,d-1,k}(u)}{u_{i+d+1} - u_{i+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

для $0 < k < d$

Тепер похідна $B_{i,d}(u)$ обчислюється за формулою

$$\frac{dB_{i,d}(u)}{du} = dC_{i,d,d}(u)u^{d-1} + (d-1)C_{i,d,d-1}(u)u^{d-2} + \dots + C_{i,d,1}(u). \quad (8)$$

При реалізації цього підходу, розглядаючи поліноміальну форму задання кривої на стандартному інтервалі

$$p(u) = \sum_{i=0}^n C_i u^i, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

замість того, щоб обраховувати незалежно кожний член, який містить u^k , їх можна згрупувати так (схема Горнера):

$$p(u) = c_0 + u(c_1 + u(c_2 + u(\dots + c_n u))). \quad (10)$$

Скористаємось тією властивістю NURBS-поверхонь, що при зміні координат керуючих точок поверхня залишається гладкою, тобто зміна координат керуючих точок приводить до "людиноподібних", плавних змін на поверхні. Виходячи з цієї властивості, шляхом модифікації керуючих точок створено множини різних емоційних станів як варіації базової моделі. Створено множину виразів обличчя (артикуляцій) при промовлянні фонем і множину типових емоційних станів. Комбінації моделей, утворені з цих множин, використовуються для створення похідних станів.

Для моделювання похідних станів (з емоційною та іншими складовими) запропоновані алгоритми морфінгу та блендінгу для NURBS-поверхонь.

Під NURBS-морфінгом розуміється плавний перехід (перетворення) NURBS-поверхні з одного стану в інший, тобто генерація (інтерполяція) між цими станами потрібної кількості проміжних станів. NURBS-поверхню певної топології однозначно визначає множина керуючих точок і вектор вузлів. Під час переходу від одного стану до іншого приймається, що змінюється не кількість керуючих точок, а лише їхні координати (за фіксованого вектора вузлів). Використовується та властивість сплайнових поверхонь, що будь-яка зміна координат керуючих точок приводить до плавної зміни на поверхні. Виходячи з цього, визначається NURBS-морфінг як лінійна інтерполяція між парними керуючими точками. Тобто ставиться задача: є множина із N тримірних керуючих точок $p_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, яка описує початковий стан (стан А) поверхні, і мно-

жина керуючих точок $p_i^* = [x_i^*, y_i^*, z_i^*]^T$, яка задає кінцевий стан (стан Б). Потрібно перейти зі стану А у стан Б за певну (к) кількість кроків. Для розв'язку знаходяться напрямні вектори для кожної пари початкових і кінцевих керуючих точок:

$$\Delta p_i = \frac{p_i^* - p_i}{k}, \quad i = 1 \dots N. \quad (11)$$

Ці вектори напрямлені від точок стану А до точок стану Б і мають таку довжину, щоб за k кроків подолати відстань від стану А до стану Б. Тепер проміжні стани визначаються так:

$$p_j^i = p_{j-1}^i + \Delta p_i, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots k, \quad \text{де } p_0^i = p_i. \quad (12)$$

Зважений NURBS-морфінг є механізмом, при якому множина керуючих точок, що визначає кінцевий стан, має ваговий коефіцієнт (від 0 до 100 %). Тобто зі стану А у стан Б треба перейти не повністю, а на w %. Розв'язок задачі зваженого NURBS-морфінгу такий самий, як і у випадку NURBS-морфінгу, але з дещо модифікованими формулами (11):

$$\Delta p_i = \frac{p_i^* - p_i}{k} \cdot \frac{w}{100}, i = 1 \dots N. \quad (13)$$

Під NURBS-блендінгом розуміється утворення поверхні шляхом змішування кількох поверхонь. Тобто з кількох (м) поверхонь, означених множинами керуючих точок $p_i^l = [x_i^l, y_i^l, z_i^l]^T, i = 1 \dots N, l = 1 \dots m$, створюється результуюча поверхня $p_i^{blend} = [x_i^{blend}, y_i^{blend}, z_i^{blend}]^T$. Для цього і-та точка результуючої поверхні p_i^{blend} знаходиться як

$$\left. \begin{aligned} b_{l-1}^{(j)} &= b_{dom}^{(j-1)} + \frac{b_{dom}^{(j-1)} - b_l^{(j-1)}}{2} \\ x &= l, \text{ якщо } \text{dist}(b_{dom}^{(1)}, b_l^{(j)}) < \text{dist}(b_{dom}^{(1)}, b_x^{(j)}) \\ b_{dom}^{(j)} &= b_x^{(j)}, b_x^{(j)} = b_1^{(j)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} l &= 2, \dots, L-j+2, \\ \text{де } x &= 1 \end{aligned} \right\} j = 2, \dots, L, \\ & \text{де } b_{dom}^{(1)} = b_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $b_1^{(1)}, \dots, b_L^{(1)}$ – множина відповідних точок поверхонь (за фіксованого і-го індексу) для змішування ($b_l^{(1)} = [x_l^1, y_l^1, z_l^1]^T$); L – кількість точок у цій множині ($L \leq m$, так як відкидаються ті точки, координати яких збігаються з координатами точки домінуючої поверхні); верхній індекс у круглих дужках – номер кроку; $b_{dom}^{(k)}$ – домінуюча точка k-го кроку. Звідси результуючою точкою буде $p_i^{blend} = b_1^{(L)}$.

У межах даних досліджень ми отримали такі результати:

1. Розроблено технологію автоматичного отримання контурного, скелетизованого зображення обличчя людини. Технологія дозволяє отримувати еквівалентний контур (у вибраній метриці) для одного й того ж обличчя, що сфотографоване з різних фокусних відстаней, при різній інтенсивності та положенні джерел світла.

2. Для знаходження на зображенні обличчя анатомічних ознак розроблено технологію використання активного контуру. Активний контур будується за допомогою фітінга нерівномірного раціонального базисного сплайну (NURBS) на оконтурене, скелетизоване зображення. NURBS-поверхня використовується для моделювання тримірного зображення голови людини за її контуром. Для продукування похідних станів тримірного зображення (з емоційними та артикуляційними складовими) розроблено алгоритми морфінгу та блендінгу.

3. Розроблено структуру бази даних, яка дозволяє автоматично створювати множини значень анатомічних ознак обличчя. Це дає можливість використовувати репрезентативний ряд облич у побудові суб'єктивних зображень. База даних з такою структурою оптимізована для пошуку як за вектором анатомічних ознак, отриманим із зображення реального обличчя, так і за вектором, отриманим вербальним шляхом або із суб'єктивного зображення.

Створене на основі викладених підходів програмне забезпечення стане складовою нової інформаційної технології, яка дозволить комплексно розв'язувати проблему ідентифікації зображень у великих базах даних, створювати суб'єктивні портрети, що може бути застосовано в портретній експертизі, зокрема, у криміналістичній габітоскопії тощо.

1. Бармак А. Информационная компьютерная технология для моделирования и управления манипуляционными и виртуальными системами // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 5; 2. Снетков В. Габитоскопия. – Волгоград, 1979; 3. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. – М., 2004; 4. Piegls L., Tiller W. The NURBS Book. – Berlin, 1996; 5. De Boor C. A Practical Guide to Splines. – N.-Y., 1978; 6. Эйнджел Э. Интерактивная компьютерная графика. – М., 2001; 7. Macri D. Using NURBS Surfaces in Real-time Applications. – <http://www.gamasutra.com/features>, 2001.

Надійшла до редколегії 25.12.2005.

УДК 517.929

О. Кузьмич, асп.

ОЦІНКИ ЗБУРЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ

Здійснено оцінку збурень розв'язків неавтономних диференціальних систем із часовим перемиканням методом функцій Ляпунова.

In the article estimation of solutions indignations of a non-autonomous differential systems with time switching is given using Lyapunov functions method.

Интерес до певного типу динамічних систем, що описані сукупністю диференціальних рівнянь з логічними законами перемикання, названих гібридними системами, у даний час зростає. У цій статті продовжено розпочате раніше дослідження стійкості найпростішого варіанта таких систем, а саме гібридних систем із часовим перемиканням. Раніше [1-3] було досліджено величину збурення розв'язків з використанням другого методу Ляпунова для класу лінійних стаціонарних систем. За допомогою матричного експоненціалу одержано конструктивний вигляд максимальної величини збурення та її залежність від початкових умов.

У [1] розглядалася логіко-динамічна система з часовим перемиканням вигляду

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Кожна з підсистем $i = \overline{1, N}$ функціонувала на заданому проміжку часу $t_{i-1} \leq t < t_i$, $t_0 = 0$. При перемиканні дотримувалася неперервність траєкторій, тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_i - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_i + \varepsilon) = \lim x(t_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

З використанням другого методу Ляпунова проводилась оцінка величини кінцевого збурення $|x(t_N)|$ при заданому початковому $|x(0)| < \delta$.

Використаємо цей підхід для отримання оцінки збурень розв'язків неавтономної системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_N. \quad (2)$$

У даній роботі проведено оцінку розв'язків лінійних неавтономних систем. Як відомо, для систем загального типу конструктивних методів отримання оцінок розв'язків не існує [4-6]. Пропонується чисельно-аналітичний метод, заснований на апроксимації на невеликих проміжках часу нестационарних систем стаціонарними [7, 8].

На проміжках $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ матрицю $A(t)$ замінюватимемо сталою й розглядатимемо систему (1), у якій $A_i = A(t_{i-1})$, $i = \overline{1, N}$. За рахунок зменшення проміжку $t_i - t_{i-1} = \Delta_i$ через неперервність матриці $A(t)$ її завжди можна як завгодно точніше наблизити сталою матрицею A_i .

Розглянемо перший проміжок $t \in [t_0, t_1]$. Зобразимо систему (2) на цьому проміжку у вигляді

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + R_1(t)x(t), \quad (3)$$

де

$$A_1 = A(t_0), \quad R_1(t) = [A(t) - A(t_0)], \quad t_0 = 0.$$

Для отримання оцінки збурень у момент часу $t = t_1$ використовуватимемо квадратичну функцію Ляпунова вигляду $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H(t) x$ із симетричною додатно-визначеною матрицею $H(t)$, яку означимо пізніше.

Повна похідна функції $V(x, t)$ згідно із системою (3) має вигляд

$$\frac{d}{dt} V(x, t) = \gamma e^{\gamma t} x^T H(t) x + e^{\gamma t} x^T \left[\frac{d}{dt} H(t) + (A_1 + R_1(t))^T H(t) + H(t)(A_1 + R_1(t)) \right] x.$$

Оскільки, як випливає з теореми про середнє,

$$|R_1(t)| \leq N_1 \Delta t_1,$$

$$N_1 = \max |R(t)|, \quad t = [t_0, t_1], \quad \Delta t_1 = t_1 - t_0,$$

то можна записати

$$\frac{d}{dt} V(x, t) \leq \gamma V(x, t) + e^{\gamma t} x^T \left[\frac{d}{dt} H(t) + A_1^T H(t) + H(t) A_1 \right] x + 2e^{\gamma t} |H(t)| N_1 \Delta t_1 |x|^2.$$

Надалі використовуватимемо такі векторні й матричні норми:

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad |A| = \left\{ \lambda_{\max}(A^T A) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ – максимальне й мінімальне власні числа відповідних симетричних додатно-визначених матриць. Тоді

$$\frac{d}{dt} V(x, t) \leq \gamma V(x, t) + e^{\gamma t} x^T \left[\frac{d}{dt} H(t) + A_1^T H(t) + H(t) A_1 \right] x + 2e^{\gamma t} \lambda_{\max}[H(t)] N_1 \Delta t_1 |x|^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x, t) &\leq \gamma v(x, t) + e^{\gamma t} x^T \left[\frac{d}{dt} H(t) + A_1^T H(t) + H(t) A_1 \right] x + \\ &+ 2e^{\gamma t} \lambda_{\max}[H(t)] N_1 \Delta t_1 |x|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Для функції Ляпунова $v(x, t) = e^{\gamma t} x^T H(t) x$ справедливі двосторонні оцінки

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}[H(t)] |x|^2 \leq v(x, t) \leq e^{\gamma t} \lambda_{\max}[H(t)] |x|^2. \quad (5)$$

Тому

$$\frac{d}{dt} v(x, t) \leq \left[\gamma + 2N_1 \Delta t_1 \frac{\lambda_{\max} [H(t)]}{\lambda_{\min} [H(t)]} \right] v(x, t) + e^{\gamma t} x^T \left[\frac{d}{dt} H(t) + A_1^T H(t) + H(t) A_1 \right] x.$$

1. Розглянемо метод побудови функції Ляпунова, що базується на використанні інтегралів стаціонарних підсистем.

Теорема 1. Нехай для розв'язку $x(t)$ системи (2) виконується $|x(t_0)| < \delta$, $t_0 = 0$. Тоді в момент $t = t_N$ буде справедливою нерівність

$$|x(t_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N G_i(t_{i-1}, t_i)} \cdot \delta \exp \left\{ \sum_{i=1}^N N_i \Delta t_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_i(s, s) ds \right\}, \quad (6)$$

де

$$G_i(t_{i-1}, t_i) = \frac{\lambda_{\max} [H_i(t_{i-1})]}{\lambda_{\min} [H_i(t_i)]}, \quad G_i(s, s) = \frac{\lambda_{\max} [H_i(s)]}{\lambda_{\min} [H_i(s)]}, \quad (7)$$

$$H_i(t) = e^{-A_i^T(t-t_{i-1})} e^{-A_i(t-t_i)}, \quad A_i = A(t_{i-1}), \quad t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N,$$

$$N_i = \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |A(t) - A(t_{i-1})|, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Доведення. Як відомо, розв'язок системи зі сталими коефіцієнтами $\dot{x} = Ax$ має вигляд

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0).$$

Якщо як функцію Ляпунова брати

$$v_0(x, t) = e^{\gamma t} x^T H_0(t) x, \quad H_0(t) = e^{-A^T(t-t_0)} e^{-A(t-t_0)},$$

то для матриці $H_0(t)$ буде виконуватися тотожність

$$\frac{d}{dt} H_0(t) + A^T H_0(t) + H_0(t) A \equiv 0.$$

Таким чином, якщо функція Ляпунова побудована на інтегралах системи, то її повна похідна дорівнює тотожно нулю. Тому, якщо на проміжку $t \in [t_0, t_1]$ узяти як функцію Ляпунова

$$V_1(x, t) = e^{\gamma t} x^T H_1(t) x, \quad H_1(t) = e^{-A_1^T(t-t_0)} e^{-A_1(t-t_0)}, \quad t_0 = 0,$$

то для повної похідної згідно із системою одержимо

$$\frac{d}{dt} V_1(x, t) \leq \left[\gamma_1 + 2N_1 \Delta t_1 \frac{\lambda_{\max} [H_1(t)]}{\lambda_{\min} [H_1(t)]} \right] V(x, t).$$

Розв'язавши цю інтегральну нерівність, маємо

$$v_1(x, t) \leq v_1(x_0, t_0) \exp \left\{ \gamma_1(t-t_0) + 2N_1 \Delta t_1 \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\max} [H_1(s)]}{\lambda_{\min} [H_1(s)]} ds \right\}.$$

Використовуючи двосторонні нерівності (5) для оцінки розв'язків на першому інтервалі, одержуємо співвідношення

$$|x(t_1)|^2 \leq \frac{|x(t_0)|^2}{e^{\gamma_1 t} \lambda_{\min} [H_1(t)]} \cdot e^{\gamma_1 t_0} \cdot \lambda_{\max} [H_1(t_0)] \times$$

$$\times \exp \left\{ \gamma_1(t-t_0) + 2N_1 \Delta t_1 \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\max} [H_1(s)]}{\lambda_{\min} [H_1(s)]} ds \right\}$$

або

$$|x(t)| \leq \sqrt{G_1(t_0, t)} |x(t_0)| \exp \left\{ N_1 \Delta t_1 \int_{t_0}^t G_1(s, s) ds \right\}, \quad (8)$$

де

$$G_1(t_0, t) = \frac{\lambda_{\max} [H_1(t_0)]}{\lambda_{\min} [H_1(t)]}, \quad G_1(s, s) = \frac{\lambda_{\max} [H_1(s)]}{\lambda_{\min} [H_1(s)]}.$$

Очевидно, що якщо для другого проміжку $t \in [t_1, t_2]$ брати функцію Ляпунова вигляду

$$V_2(x, t) = e^{\gamma_2 t} x^T H_2(t) x, \quad H_2(t) = e^{-A_2^T(t-t_1)} e^{-A_2(t-t_1)},$$

то виконуватиметься аналогічна нерівність. А з використанням (6) одержимо

$$|x(t)| \leq \sqrt{G_1(t_0, t_1) G_2(t_1, t)} |x(t_0)| \exp \left\{ N_1 \Delta t_1 \int_{t_0}^{t_1} G_1(s, s) ds + N_2 \Delta t_2 \int_{t_1}^t G_2(s, s) ds \right\}, \quad (7)$$

де

$$G_2(t_1, t) = \frac{\lambda_{\max}[H_2(t_1)]}{\lambda_{\min}[H_2(t_1)]}, \quad G_2(s, s) = \frac{\lambda_{\max}[H_2(s)]}{\lambda_{\min}[H_2(s)]},$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1, \quad N_2 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |A(t) - A(t_1)|.$$

Продовжуючи процес далі, для моменту $t = t_N$ одержимо

$$|x(t_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N G_i(t_{i-1}, t_i)} |x(t_0)| \exp \left\{ \sum_{i=1}^N N_i \Delta t_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_i(s, s) ds \right\},$$

що й треба було довести.

2. При використанні як функції Ляпунова інтеграла системи необхідно обчислювати матричний експоненціал e^{At} , що не завжди вдається. Розглянемо другий підхід, заснований на використанні сталих додатно-визначених матриць H_i , $i = \overline{1, N}$, що є розв'язками матричних рівнянь Ляпунова

$$A_i^T H_i + H_i A_i = -C_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Однак при використанні цього підходу необхідна асимптотична стійкість кожної з матриць A_i , $A_i = A(t_{i-1})$, $i = \overline{1, N}$.

Теорема 2. Нехай матриці $A_i = A(t_{i-1})$, $i = \overline{1, N}$ асимптотично стійкі та для початкового стану виконується умова $|x(t_0)| < \delta$. Тоді в момент $t = t_N$ матиме місце нерівність

$$|x(t_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N \varphi(H_i)} \cdot \delta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma(H_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^N N_i \Delta t_i^2 \right\}, \quad (9)$$

де

$$\varphi(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}, \quad \gamma(H_i) = \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)}, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

H_i, C_i – додатно-визначені матриці, що входять у матричні рівняння Ляпунова (8).

Доведення. Нехай матриці A_i , $i = \overline{1, N}$ асимптотично стійкі. Тоді при довільних додатно-визначених матрицях C_i , $i = \overline{1, N}$ матричні рівняння Ляпунова (8) мають єдиний розв'язок – додатно-визначені матриці H_i , $i = \overline{1, N}$, і на кожному з проміжків $t \in [t_{i-1}, t_i]$ нерівність (4) має вигляд

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) \leq \gamma_i V_i(x, t) - e^{\gamma_i t} x^T C_i x + 2e^{\gamma_i t} \lambda_{\max}(H_i) N_i \Delta t_i |x|^2. \quad (11)$$

Двосторонні нерівності квадратичних форм (5) матимуть вигляд

$$e^{\gamma_i t} \lambda_{\min}(H_i) |x|^2 \leq V_i(x, t) \leq e^{\gamma_i t} \lambda_{\max}(H_i) |x|^2. \quad (12)$$

Запишемо (11) у вигляді

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) \leq \left[\gamma_i - \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)} + 2N_i \Delta t_i \right] V_i(x, t).$$

Звідси

$$V_i(x(t), t) \leq V_i(x(t_{i-1}), t_{i-1}) \exp \left\{ - \left[\frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)} - 2N_i \Delta t_i \right] (t - t_{i-1}) \right\}.$$

З нерівності (12) одержуємо, що на проміжку $t \in [t_{i-1}, t_i]$ виконується нерівність

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}} |x(t_{i-1})| \exp \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(C_i)} - 2N_i \Delta t_i \right] (t - t_{i-1}) \right\} \quad (13)$$

Як випливає із залежності (13), на першому проміжку $t \in [t_0, t_1]$ матиме місце

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)}} |x(t_0)| \exp \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} - 2N_1 \Delta t_1 \right] (t - t_0) \right\},$$

на другому проміжку $t \in [t_1, t_2]$ –

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1) \lambda_{\max}(H_2)}{\lambda_{\min}(H_1) \lambda_{\min}(H_2)}} |x(t_0)| \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} (t_1 - t_0) + \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\max}(H_2)} (t - t_1) \right] + N_1 \Delta t_1^2 + N_2 \Delta t_2 (t - t_1) \right\}.$$

Остаточно в момент $t = t_N$ одержимо таке співвідношення:

$$|x(t_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N \varphi(H_i)} |x(t_0)| \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma(H_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^N N_i \Delta t_i^2 \right\},$$

де

$$\varphi(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}, \quad \gamma(H_i) = \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)},$$

тобто твердження теореми 2.

3. Розглянемо "грубіший" випадок з функцією Ляпунова вигляду $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T x$. Причому не припускаємо, що матриці A_i – асимптотично стійкі. У цьому випадку поверхні рівня $V_i(x, t) = c$ функцій Ляпунова $V_i(x, t)$ при кожному фіксованому $t \in [t_{i-1}, t_i]$ є сферами. Причому за рахунок вибору параметра γ (може бути і $\gamma < 0$) векторні поля підсистем будуть напрямлені всередину, тобто

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) < 0.$$

Проте в цьому випадку поверхні рівня розширюються, тобто підсистеми можуть бути нестійкими.

Теорема 3. Нехай для початкового стану виконується $|x(t_0)| < \delta$. Тоді в момент $t = t_N$ матиме місце нерівність

$$|x(t_N)| < \delta \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\lambda_{\max}(A_i + A_i^T) \Delta t_i + 2N_i (\Delta t_i)^2 \right] \right\} \quad (14)$$

Доведення. Нехай функції Ляпунова на кожному з інтервалів $t \in [t_{i-1}, t_i]$ мають вигляд $V_i(x, t) = e^{\gamma_i t} x^T x$. Тоді нерівності (4) мають вигляд

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) = \gamma_i V_i(x, t) + e^{\gamma_i t} x^T (A_i + A_i^T) x + 2e^{\gamma_i t} N_i \Delta t_i |x|^2$$

або

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) = e^{\gamma_i t} x^T \left\{ (\gamma_i + 2N_i \Delta t_i) I + (A_i + A_i^T) \right\} x. \quad (15)$$

Виберемо γ_i таким чином, щоб виконувалось

$$\gamma_i + 2N_i \Delta t_i + \lambda_{\max}(A_i + A_i^T) \leq 0.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) \leq 0,$$

і траєкторії підсистем входять у поверхні рівня функцій Ляпунова

$$V_i(x, t) = e^{\gamma_i t} x^T x.$$

Нерівності (5) переходять у рівність

$$V_i(x, t) = e^{\gamma_i t} |x|^2.$$

Тому співвідношення (15) набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} V_i(x, t) \leq \left[\gamma_i + 2N_i \Delta t_i + \lambda_{\max}(A_i + A_i^T) \right] V_i(x, t).$$

Звідси на кожному з проміжків $t \in [t_{i-1}, t_i]$ матимуть місце нерівності

$$|x(t)| \leq |x(t_{i-1})| \exp \frac{1}{2} \left\{ 2N_i \Delta t_i + \lambda_{\max}(A_i + A_i^T) \right\} (t - t_{i-1}).$$

Остаточно одержуємо

$$|x(t_N)| < |x(t_0)| \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\lambda_{\max} (A_i + A_i^T) \Delta t_i + 2N_i (\Delta t_i)^2 \right) \right\},$$

що й треба було довести.

1. Хусаїнов Д., Кузьмич О. Оцінки стійкості логіко-динамічних систем із часовим перемиканням // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 1; 2. Кузьмич О., Хусаїнов Д. Оцінки динаміки гібридних систем, що описуються дискретними рівняннями // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Кібернетика. – 2005. – Вип. 6; 3. Кузьмич О. Оцінки стійкості динаміки гібридних систем зі скінченним числом перемикань // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2; 4. Демидович Б. Лекції по математической теории устойчивости движения. – М., 1967; 5. Гайшун И. Системы с дискретным временем. – Минск, 2001; 6. Барбашин Е. Функции Ляпунова. – М., 1970; 7. Карачаров К., Пилипчик А. Введение в техническую устойчивость движения. – М., 1962; 8. Мартынюк А. Практическая устойчивость движения. – К., 1983.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 517.929

А. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
К. Тимочко, асп.

СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З КІЛЬКОМА ЗБУРЕННЯМИ ТА ЗАПІЗНЕННЯМИ У СКАЛЯРНОМУ ВИПАДКУ

Досліджено стійкість у середньому квадратичному лінійних стохастичних диференціально-різницевиx рівнянь з кількома збуреннями та запізненням у скалярному випадку.

It is investigated of stability in average quadratic of linear stochastic differential-difference equations with several indignations and delay in scalar case.

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, F, P) і потік σ -алгебр $\{F_t, t \in [0, T]\}$, $F_t \subset F$; R^1 – дійсний одновимірний евклідовий простір з нормою $|x|$ елемента $x \in R^1$.

Розглянемо рівняння, що визначає випадковий процес $\{x(t)\} \subset R^1$

$$\begin{aligned} dx(t) + \sum_{k=0}^n a_k x(t - \Delta_k) dt = \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^n b_{kl} x(t - \Delta_k) dW_l(t) + \\ + \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^n \int_U c_{kl} f_l(u) x(t - \Delta_k) \tilde{v}_l(dt, du) \end{aligned} \quad (1)$$

з початковою умовою

$$x(t - \Delta) |_{t \in [0, \Delta]} = \varphi(t), \quad (2)$$

де $\Delta = \sup_k \Delta_k$, $k = 0, n$, $\Delta_0 = 0$; a_k, b_{kl}, c_{kl} – дійсні сталі, W_l – процеси броунівського руху з нульовими зносами та параметрами дифузії, $\sigma_l; \tilde{v}_l(dt, du)$ – центровані пуассонівські міри з параметрами $\Pi_1(du)dt = M\{\tilde{v}_l(dt, du)\}$, причому W_l і $\tilde{v}_l(dt, du)$ попарно незалежні.

Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо сепарабельний випадковий процес $x(t)$, $t \in [-\Delta, \infty)$, визначений при $t \in [-\Delta, 0]$ співвідношенням (2), вимірний відносно σ -алгебри $F_t \times B_t$ (B_t – σ -алгебра борельових множин відрізка $[-\Delta, t]$) і такий, що при кожному $t \in (0, \infty)$ виконується інтегральна рівність

$$\begin{aligned} x(t) = \varphi(0) - \sum_{k=0}^n \int_0^t x(s - \Delta_k) ds + \sum_{l=0}^L \left[\sum_{k=0}^n b_{kl} \int_0^t x(s - \Delta_k) dW_l(s) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n c_{kl} \int_0^t \int_U f_l(u) x(s - \Delta_k) \tilde{v}_l(ds, du) \right] \end{aligned}$$

з рівною одиниці ймовірністю.

Нехай $h(t)$ – розв'язок рівняння

$$dy(t) + \sum_{k=0}^n a_k y(t - \Delta_k) dt = 0 \quad (3)$$

такий, що $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $h(0) = 1$ і

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_G e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

де

$$V = \lambda + \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda \Delta_k} \quad (5)$$

– характеристичний квазіполіном рівняння (3).

Теорема. Якщо корені квазіполінома лежать у лівій півплощині, то за виконання умови

$$B \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^L [\sigma_l \int_0^\infty |\sum_{k=0}^n b_{kl} e^{-i\Delta_k s}|^2 |V^{-1}(is)|^2 ds + \int_U f_l^2(u) \frac{du}{u^2} \int_0^\infty |\sum_{k=0}^n c_{kl} e^{-i\Delta_k s}|^2 |V^{-1}(is)|^2 ds] < 1 \quad (6)$$

тривіальний розв'язок задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному. Якщо ж $B > 1$, то в довільно-малому околі нуля знайдеться така початкова функція $\varphi(t)$, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\{x^2(t)\} = \infty.$$

Доведення. Використовуючи фундаментальний розв'язок $h(t)$ для рівняння (3), розв'язок задачі (1), (2) можна записати в інтегральному вигляді

$$x(t) = y(t) + \sum_{l=0}^L [\sum_{k=0}^n b_{kl} \int_0^t h(t-s)x(s-\Delta_k) dW_l(s) + \sum_{k=0}^n c_{kl} \int_0^t \int_U h(t-s) f_l(u) x(s-\Delta_k) \tilde{v}_l(ds, du)], \quad (7)$$

де $y(t)$ – деякий розв'язок рівняння (3).

Позначимо

$$z_k(t) = x(t - \Delta_k), g_k(t) = h(t - \Delta_k)$$

і перейдемо від (7) до рівності

$$z_k(t) = y(t - \Delta_1) + \sum_{l=0}^L [\sum_{k=0}^n b_{kl} \int_0^\infty g_1(t-s) z_k(s) dW_l(s) + \sum_{k=0}^n c_{kl} \int_0^t \int_U g_1(t-s) f_l(u) z_k(s) \tilde{v}_l(ds, du)]. \quad (8)$$

Піднесемо до квадрата кожний розв'язок системи (8), застосуємо операцію математичного сподівання до отриманих рівностей і, використовуючи властивості стохастичних інтегралів, отримаємо

$$\mu_r(t) = y^2(t - \Delta_1) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n (b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U f_l(u) \frac{du}{u^2}) \int_0^t g_r(t-s) \mu_k(s) ds, \quad (9)$$

де $\mu_r(t) = M\{z_r^2(t)\}$, $M\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання.

Застосувавши перетворення Лапласа L до обох частин (9), матимемо

$$M_r(\lambda) = y^2(t - \Delta_r) + \sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n (b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U f_l(u) \frac{du}{u^2}) G_k(\lambda) M_k(\lambda) ds, \quad (10)$$

де $G_k(\lambda) = L\{g_k(t)\}$; $M_r(\lambda) = L\{\mu_r(t)\}$.

За умовою теореми, корені характеристичного квазіполінома (5) рівняння (3) лежать у лівій півплощині комплексної змінної λ , тому довільний розв'язок (3) прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$ не повільніше, ніж $e^{\beta t}$ з від'ємним показником. Тому $L\{y^2(t - \Delta_r)\}$, $(z=0, n)$ не має особливостей у півплощині $\text{Re } \lambda < 0$, тобто особливі точки вектора-зображення $\{\mu_r(t)\}_{r=0, n}$ збігаються з нулями визначника системи (10), який після розкриття набуває вигляду

$$\sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n G_k(\lambda) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2}{u^2} du] = 1$$

або

$$L\{\sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n g_k^2(t) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2}{u^2} du]\} = 1. \quad (11)$$

Отже, питання про стійкість розв'язку (9) визначається коренями рівняння (11).

Зауважимо, що при $\text{Re } \lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} & |L\{\sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n g_k^2(t) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2}{u^2} du]\}| \leq \\ & \leq \sum_{l=0}^L \sigma_l \sum_{k=0}^n \int_0^\infty g_k^2(t) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2}{u^2} du] dt \end{aligned} \quad (12)$$

Це випливає з того, що під знаком інтеграла за t у (11) стоїть невід'ємна функція, і тому вона досягає найбільшого значення за абсолютною величиною на дійсній осі.

Отже, якщо права частина нерівності (12) менша за одиницю, то зображення вектор-функції $\{M_l(t)\}_{l=0, \overline{n}}$ не має полюсів у півплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, а отже, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_l(t) = 0, l = \overline{0, n}$.

Використовуючи вираз (4) для $h(t)$, можна підрахувати

$$\int_0^{\infty} g_k^2(t) dt = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} e^{-\Delta_k s} |V^{-1}(is)|^2 ds, k = \overline{0, n}, \quad (13)$$

що й доводить першу частину теореми 3.2.1.

Якщо $B > 1$, то, з урахуванням (13), маємо

$$\sum_{l=0}^L \sigma_1 \sum_{k=0}^n \int_0^{\infty} g_k^2(t) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2(u)}{u^2} du] dt > 1.$$

Функція

$$f(s) \equiv \sum_{l=0}^L \sigma_1 \sum_{k=0}^n e^{-st} g_k^2(t) [b_{kl}^2 + c_{kl}^2 \int_U \frac{f_l^2(u)}{u^2} du] dt$$

є неперервною для дійсних додатних s і $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$, отже, існує s_0 таке, що $f(s_0) = 1$. Тоді зображення вектора

$\{\mu_l(t)\}$ має полюс у півплощині $\operatorname{Re} \lambda = s_0 > 0$ і отже, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_l(t) = 0, l = \overline{0, n}$, що й треба було довести.

1. Свердан М., Царков Є., Ясинський В. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. – Снятин, 1996; 2. Гихман И., Скороход А. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К., 1982; 3. Кац. И., Красовский Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 27. – Вып. 5.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 510.6, 681.3.06

М. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С. Шкільняк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

СПЕКТР КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Розглядаються композиційно-номінативні логіки часткових предикатів. Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей пропонуються логіки квазіарних предикатів і логіки номінативних даних, стосовно інтенсійного аспекту – композиційно-номінативні модальні логіки. Наведено ієрархію композиційно-номінативних логік. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями класу предикатів.

The composition nominative logics of partial predicates are considered. Concerning extensional aspects of subject domains, the logics of quasi-ary predicates and logics over nominative data are proposed. Intensional aspects are represented by composition nominative modal logics. The hierarchy of composition nominative logics is presented. The place of a logic in this hierarchy is determined by its abstraction level and by restrictions on classes of its predicates.

Розвиток інформаційних технологій і програмування веде до розширення сфери застосування математичної логіки. Стосовно загальносвітоглядного аспекту, поняття й методи математичної логіки дають обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. Стосовно прагматичного аспекту, апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є основою, ядром сучасних інформаційних і програмних систем. Розмаїття логік, орієнтованих на відображення особливостей тих чи інших предметних областей, висуває на перший план задачу їх інтеграції та уніфікації. Для успішного розв'язку такої задачі дуже плідним нам видається композиційно-номінативний підхід [1], що дає змогу побудувати ієрархію логік різного рівня абстрактності та загальності на єдиній з програмуванням методологічній основі. Такий підхід можна розглядати як подальший розвиток композиційного програмування [2].

Згідно з композиційно-номінативним підходом, логіки будуємо в семантико-синтаксичному стилі. Це означає, що спочатку фіксуємо рівень абстракції розгляду предметних областей. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня абстракції множини даних. Потім будуємо відповідні до розглянутого рівня абстракції математичні моделі предметних областей, які задають семантичні аспекти логік. Семантичними моделями композиційно-номінативних логік є композиційні алгебри предикатів. Нарешті, будуємо формально-аксіоматичні логічні числення. Такі числення задають синтаксичні аспекти логік.

Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей, нами пропонуються композиційно-номінативні логіки часткових предикатів. Побудову таких логік починаємо з гранично абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи.

На **пропозиційному** рівні дані трактуються гранично абстрактно, як "чорні скриньки". Це означає, що жодна властивість даних не є доступною. На цьому рівні предикати мають вигляд $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – множина абстрактних даних.

Базовими композиціями фінітарних логік пропозиційного рівня є клінієві композиції диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$.

Інфінітарні пропозиційні логіки досліджені у [3]. Базовими композиціями таких логік є множинні інфінітарні композиції диз'юнкції $\vee_k$, кон'юнкції $\&_k$ та композиція заперечення $\neg_k$.

Наступний, **сингулярний** рівень, виникає при діалектичному запереченні властивості граничної абстрактності даних. Такий рівень може трактуватися як гранична конкретизація пропозиційного. У цьому випадку дані трактуються гранично конкретно, як "білі скриньки". На сингулярному рівні фіксується єдиний клас даних, що пояснює його назву.

Композиціями сингулярного рівня є максимально конкретні аплікативні композиції. Практично кожний логічний засіб може трактуватися як аплікативна композиція. Для дослідження сингулярних логік збудована [3] спеціальна інфінітарна алгебра сингулярних композицій Кліні.

Подальший розвиток приводить до класів логік, для яких рівень розгляду даних є синтезом двох перших рівнів. На цьому рівні дані розглядаються як "сірі скриньки", побудовані з "білих" і "чорних скриньок". Такі дані називаються номінативними. Вони будуються індуктивно з множини предметних імен і множини предметних значень. Відповідні логіки належать до **номінативного** рівня.

На відміну від двох перших рівнів, що визначають порівняно прості класи логік, номінативний рівень є дуже багатим, він розпадається на низку підрівнів.

На рівні **іменних множин** дані – це однозначні відображення вигляду $V \rightarrow A$ з множини предметних імен V у множину предметних значень A . Такі однорівневі однозначні номінативні дані будемо називати іменними множинами (IM). Множину всіх V -IM над A позначимо ${}^V A$.

Функції, задані на іменних множинах, називають *квазіарними*.

Для логіки природно розглядати квазіарні функції двох типів.

Відображення вигляду ${}^V A \rightarrow \{T, F\}$ назвемо V -квазіарними предикатами на A .

Відображення вигляду ${}^V A \rightarrow A$ назвемо V -квазіарними функціями на A .

Множини V -квазіарних предикатів і функцій на A позначимо відповідно Pr^A та Fn^A .

V -квазіарний предикат P (частково) істинний, якщо для довільних $d \in {}^V A$ $P(d) \downarrow \Rightarrow P(d) = T$.

Найабстрактнішими серед логік номінативного рівня є **реномінативні** логіки. Починаючи з реномінативного рівня, можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування).

Фінітарна реномінативна логіка запропонована в [4]. Базовими композиціями фінітарних реномінативних логік є $\vee$, $\neg$ та реномінація $R_{\bar{x}}$. Для таких логік побудовані числення гільбертівського та ґенценівського типів, доведені коректність і повнота таких числень.

Інфінітарна реномінативна логіка екваційного типу запропонована в [5]. Базовими композиціями інфінітарних реномінативних логік є $\vee$, $\&$, $\neg$ та інфінітарна реномінація R^P . Побудоване екваційне числення інфінітарної реномінативної логіки, доведені його коректність і повнота.

На **кванторному** рівні можна застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести композиції квантифікації $\bar{x}$ та $\forall x$.

Фінітарні логіки кванторного рівня досліджувались, зокрема, у [6–9]. Базовими композиціями таких логік кванторного рівня є $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}$, $\bar{x}$.

Інфінітарна логіка кванторного рівня запропонована в [10]. Базовими композиціями інфінітарних кванторних логік є $\vee$, $\&$, $\neg$, R^P , $\bar{x}$.

На **кванторно-екваційному** рівні з'являються можливості отождоження й розрізнення значень предметних імен за допомогою спеціальних предикатів рівності $=_x$.

Фінітарні логіки кванторно-екваційного рівня досліджені в [11]. Базовими композиціями таких логік є $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}$, $\bar{x}$.

На **функціональному** рівні маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій і предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $S^{\bar{x}}$. Базовими композиціями функціонального рівня є $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}$, $\bar{x}$, $S^{\bar{x}}$.

Для роботи з окремими компонентами даних у множині Fn^A природно виділити множину спеціальних функцій деномінації (розіменування) $Nr^A = \{v \mid v \in V\}$. При введенні функцій розіменування композиції реномінації можна промодельовати за допомогою суперпозиції, тому базовими композиціями функціонального рівня будемо вважати $\vee$, $\neg$, $\bar{x}$, $S^{\bar{x}}$.

На додаток до можливостей функціонального рівня **функціонально-екваційний** рівень дає змогу отождоженню й розрізнити предметні значення. На цьому рівні можна додатково ввести спеціальну композицію рівності $=$.

Базовими композиціями функціонально-екваційного рівня є $\vee$, $\neg$, $\bar{x}$, $S^{\bar{x}}$, $=$.

Фінітарні логіки функціонального й функціонально-екваційного рівнів досліджувались у [8, 9, 12, 13].

На наступному рівні абстракції елементи множини A можна розглядати як **ієрархічні номінативні** дані. Відповідні логіки названі логіками номінативних даних (ЛНД). Такі логіки досліджені в [14].

Логіки номінативних даних будуються в стилі теорії допустимих множин. Доведена несуперечливість аксіоматичної теорії ЛНД. На основі ЛНД визначається клас багатозначних натурально (абстрактно) обчислюваних функцій над номінативними даними. Такий клас можна подати за допомогою Σ -предикатів ЛНД.

Розглянемо ієрархію композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів [15]. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями класу предикатів.

Наведемо ієрархію логік квазіарних предикатів за рівнем абстракції розгляду (рис. 1).

Розглянемо детальніше фінітарні композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів.

Семантичною основою логік квазіарних предикатів є композиційні алгебри квазіарних предикатів (Pr^A, C) . Для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів такою основою є композиційні алгебри квазіарних функцій і предикатів $(Pr^A \cup Fn^A, C)$. При фіксуванні множини базових композицій композиційна алгебра визначається алгебраїчною системою (АС) $A = (A, Pr^A)$. Для функціонального та функціонально-екваційного рівнів така АС набуває вигляду $A = (A, Pr^A \cup Fn^A)$.

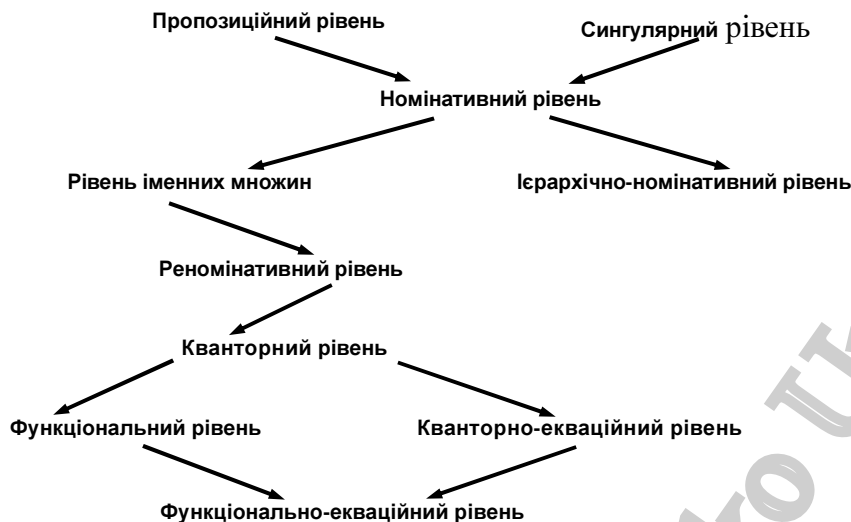


Рис.1.

Побудова композиційної алгебри дає змогу задати мову логіки.

Для формул мови логіки вводимо поняття:

- істинності формули Φ на моделі (АС) A : $A \models \Phi$;
- всюди істинності формули Φ : $\models \Phi$;
- логічного наслідку $\models$, слабкого логічного наслідку $\models$ та логічної еквівалентності $\sim$;
- логічного наслідку для множин формул $\models$.

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, для логік квазіарних предикатів не діють деякі важливі закони класичної логіки. Наприклад, у загальному випадку квазіарних предикатів з умови $\models \Phi$ випливає $\models \forall x \Phi$, але не завжди з $\models \forall x \Phi$ випливає $\models \Phi$. Таким чином, для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити.

Природне обмеження задається властивістю еквітонності, яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні, поповненні даних.

Предикат P еквітонний (ЕП), якщо для довільних $d, d' \in \bigvee A$ із $d' \geq d$ та $P(d) \downarrow$ випливає $P(d') \downarrow = P(d)$.

Властивість еквітонності притаманна класичній логіці. У такій логіці предикати – скінченно-арні тотальні еквітонні. Найближчими до класичної є логіки **повнототальних еквітонних предикатів**. Повнототальність означає визначеність предиката на максимальних даних – V -повних ІМ.

V -повна ІМ – це тотальна однозначна функція з V в A .

Множину всіх V -повних ІМ над A позначимо A^V .

Предикат P повнототальний, якщо $P(d) \downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Для логік повнототальних ЕП будуються аксіоматичні системи гільбертівського типу, на їх основі доводяться теореми несуперечливості та повноти.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів названі [6] неокласичними (НКЛ), тому що вони зберігають основні закони класичної логіки при істотному розширенні класу моделей.

Логіки **еквітонних предикатів** теж можна вважати неокласичними, вони зберігають основні закони класичної логіки, але для них уже не діють деякі правила виведення (modus ponens і споріднене з ним правило перетину), порушуються деякі властивості класичної логіки.

Наприклад, для конкретних семантичних моделей можливо $A \models P$, $A \models P \rightarrow Q$, але $A \not\models Q$.

Можливо також $A \models P \leftrightarrow Q$, $A \models Q \leftrightarrow S$, але $A \not\models P \leftrightarrow S$.

Крім того [16], для логіки ЕП не завжди із $\Phi \models \Psi$ випливає $\Phi \models \Psi$.

Клас моделей логіки ЕП істотно ширший за клас моделей логіки повнототальних ЕП.

Семантичні властивості логіки ЕП фактично відтворюють властивості композицій. Зокрема, властивості, які не використовують реномінації та суперпозиції, цілком аналогічні відповідним властивостям класичної логіки предикатів.

Для логіки ЕП справджуються теореми семантичної еквівалентності та рівності, а стосовно відношення логічного наслідку для множин формул – теорема про заміну еквівалентних [9].

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх *вільні* предметні імена, від яких *може залежати* значення відповідних предикатів. Для логік ЕП важлива *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів логіки ЕП будемо вказувати множину *неістотних* імен, від яких *не залежить* значення таких предикатів. Можливість виконання еквівалентних перетворень довільних формул вимагає наявності нескінченної множини тотально неістотних імен, тобто імен, неістотних для кожного предикатного символу. Таким чином, семантичною основою логіки ЕП є композиційні алгебри еквітонних квазіарних предикатів з додатковою вимогою наявності нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Для формул логіки ЕП визначаються субнормальні (різнокванторні), нормальні, квазізамкнені формули. Доводиться [8, 9], що для кожної формули можна збудувати еквівалентні їй різнокванторну та нормальну формули.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки, але семантичними аналогами замкнених формул їх вважати не можна. Квазізамкнені формули необов'язково інтерпретуються як константні предикати, хоча для класичної логіки кожна замкнена формула на кожній АС завжди інтерпретується як тотожна істина або тотожна фальш. Справа в тому, що до складу формули логіки квазіарних предикатів можуть входити предикатні символи, для яких множини істотних імен нескінченні.

Специфічну властивість квазізамкнених формул логіки ЕП описує таке твердження.

Нехай формула Φ квазізамкнена, її пропозиційна схема (пропозиційна формула, отримана з Φ опусканням усіх символів, окрім предикатних символів і символів пропозиційних зв'язок) не тавтологія й не суперечність, причому Φ не містить спеціальних предикатних символів з явно виділеними істотними іменами (напр., $=_{xy}$). Тоді існують АС $A=(A, I)$ та $d_1, d_2 \in {}^VA$ такі, що $\Phi_A(d_1) = T$ та $\Phi_A(d_2) = F$.

Можливість для формули бути залежною від нескінченної множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема, логіки ЕП, що істотно її відрізняє від класичної логіки.

Природним узагальненням еквітонних предикатів є **локально-еквітонні предикати** (ЛЕП) [17]. Для локально-еквітонних предикатів вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну множину іменованих компонент.

Предикат P локально-еквітонний, якщо для довільних $d, d' \in {}^VA$ з того, що $P(d) \downarrow$, $d' \supset d$ та $d' \setminus d$ скінченна, випливає $P(d) \downarrow = P(d')$.

Те, що клас ЛЕП є розширенням класу ЕП, засвідчує приклад предиката, істинного на всіх скінченних ІМ і хибного на всіх нескінченних ІМ. Такий предикат локально-еквітонний, але не еквітонний.

Семантичні властивості ЛЕП аналогічні властивостям ЕП. Клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки еквітонних предикатів.

Синтаксичні властивості логіки ЛЕП ідентичні синтаксичним властивостям логіки ЕП.

Методи моделювання предметних областей мають урахувати неповноту наявної інформації. Логіки, орієнтовані на ці особливості, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Такими є [18] **еквісумісні** (ЕСП) і **локально-еквісумісні предикати** (ЛЕСП).

Еквісумісність предиката P означає, що за можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого, значення P на таких даних мають збігатися. При локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

ІМ d та d' сумісні, що позначаємо $d \approx d'$, якщо функція $d \cup d'$ однозначна.

Предикат P еквісумісний (ЕСП), якщо для довільних $d, d' \in {}^VA$ із $d \approx d'$, $P(d) \downarrow$ та $P(d') \downarrow$ випливає $P(d) = P(d')$.

Предикат P локально-еквісумісний (ЛЕСП), якщо для довільних $d, d' \in {}^VA$ таких, що $(d \setminus d') \cup (d' \setminus d)$ скінченна, із $d \approx d'$, $P(d) \downarrow$, $P(d') \downarrow$ випливає $P(d) = P(d')$.

Еквісумісні та локально-еквісумісні предикати є узагальненнями еквітонних і локально-еквітонних предикатів. Властивості логік ЕСП і ЛЕСП аналогічні відповідним властивостям логік ЕП і ЛЕП. Класи семантичних моделей логік еквісумісних і локально-еквісумісних предикатів ще ширші, хоча ці логіки зберігають основні закони класичної логіки.

Наведемо ієрархію логік квазіарних предикатів за обмеженнями на клас предикатів (рис. 2).



Рис.2.

Відмова від *modus ponens* веде до необхідності проводити дослідження синтаксичних властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП на базі не гільбертівських, а ґенценівських систем – секвенційних числень. Семантичною основою побудови таких числень є властивості відношення логічного наслідку для множин формул.

Для збудованих секвенційних числень логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП доведені теореми коректності та повноти. З теорем повноти випливає низка важливих властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП, зокрема, принцип компактності, теорема про існування моделі. На основі теореми повноти і принципу компактності розглядаються питання семантичної та синтаксичної несуперечливості, взаємної суперечливості та взаємної несуперечливості множин формул.

Використовуючи секвенційні числення, для зазначених логік доводиться [19] один з найважливіших результатів математичної логіки – інтерполяційна теорема.

Аналогічно випадку класичної логіки, для логіки ЕП вводяться [20] поняття синтаксичної та семантичної (явної та неявної) визначеності. Доводяться теореми про визначеність.

Основою сучасних методів автоматизованого пошуку виведень є теорема ґенцена про усунення перетинів. Аналогічне твердження – теорема про елімінацію перетинів – справджується [16] для логіки еквітонних предикатів.

Традиційні логіки описують даний конкретний стан тверджень про світ, тому такі логіки не зовсім адекватні світу, що змінюється та розвивається. Для опису динамічного, мінливого світу видається доцільним використовувати модальні логіки. Виняткова гнучкість модальної логіки дозволяє застосувати її для аналізу та моделювання найрізноманітніших аспектів діяльності людини. У першу чергу це стосується створення сучасних інтелектуальних інформаційних систем, опису й моделювання складних динамічних систем. Ураховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, особливу зацікавленість викликають модальні логіки, які описують переходи від одного стану світу до іншого, зокрема, часові (темпоральні) модальні логіки.

Розвиваючи логіку квазіарних предикатів і модальну логіку та синтезуючи їх можливості, стосовно інтенсійного аспекту предметних областей ми пропонуємо композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Такі логіки є природними розширеннями класичної логіки предикатів і модальної логіки. У [21, 9] розглянуто композиційно-номінативні модальні логіки пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів. Такий розгляд можна продовжити на функціональному та функціонально-екваційному рівнях.

Семантичною основою КНМЛ є композиційні модальні системи. Найважливішою різновидністю КНМЛ є транзиційні модальні логіки. Традиційні модальні логіки природним чином можуть розглядатися в межах транзиційних КНМЛ. Окремим випадком транзиційних КНМЛ є темпоральні КНМЛ. Транзиційні й темпоральні КНМЛ можуть бути конкретизовані на кожному із зазначених вище рівнів.

Для транзиційних і темпоральних КНМЛ запропоновані [21] аксіоматичні системи – транзиційні й темпоральні композиційно-номінативні модальні числення відповідного рівня й типу. Для таких числень справджуються теореми коректності та повноти.

Висновки. У роботі наведено стислий огляд композиційно-номінативних логік часткових предикатів та їх основних властивостей. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей запропоновано логіки квазіарних предикатів і логіки номінативних даних, стосовно інтенсійного аспекту – композиційно-номінативні модальні логіки. Наведено ієрархію композиційно-номінативних логік. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями класу предикатів. Композиційно-номінативні логіки є потужними формалізмами для специфікації програм, опису й моделювання предметних областей.

1. Нікітченко Н. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999. – № 1; 2. Редько В. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – № 3; 3. Нікітченко Н. Пропозициональные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 2; 4. Шкільняк С. Безкванторні неокласичні логіки // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 4; 5. Нікітченко М. Інфінітарні реномінативні логіки часткових предикатів // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 3; 6. Нікітченко Н., Шкільняк С. Неокласические логики предикатов // Пробл. программирования. – 2000. – № 3–4; 7. Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Пробл. програмування. – 2000. – Вип. 2; 8. Нікітченко М., Шкільняк С. Математична логіка. – К., 2003; 9. Нікітченко М., Шкільняк С. Математична логіка. Додаткові розділи – К., 2004; 10. Нікітченко Н. Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2; 11. Шкільняк С. Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип. 1; 12. Шкільняк С. Секвенційні числення неокласичних логік функціонального рівня // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип. 2; 13. Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційно-номінативні логіки першого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 1; 14. Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційні логіки номінативних даних // Пробл. програмування. – 2003. – № 3; 15. Нікітченко М., Шкільняк С. Ієрархія композиційно-номінативних логік // Пробл. програмування. – 2004. № 4; 16. Шкільняк С. Деякі властивості логік часткових предикатів // Problems of decision making under uncertainties: Int. conf. – Berdiansk, 2005; 17. Нікітченко М., Шкільняк С. Логіки локально-еквітонних предикатів: семантичні властивості та секвенційні числення // Пробл. програмування. – 2003. – № 2; 18. Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційно-номінативні логіки предикатів над даними з неповною інформацією // Пробл. програмування. – 2004. – № 2–3; 19. Шкільняк С. Властивості неокласичних секвенційних числень. – Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 1; 20. Шкільняк С. Фінітарні логіки квазіарних предикатів. – Вісн. Київ. ун-ту. Серія: кібернетика. – 2005. – Вип. 6; 21. Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційно-номінативні модальні логіки // Пробл. програмування. – 2002. – № 1–2.

Надійшла до редколегії 28.10.2005

УДК 518.61

Д. Утебаєв, канд. фіз.-мат. наук

ПОБУДОВА СХЕМ МЕТОДУ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

Розглядаються схеми методу кінцевих елементів для диференціального операторного рівняння другого порядку за часом. Побудовано сім'ю векторних різницеєвих схем четвертого порядку апроксимації. Розглянуто питання реалізації схеми: чисельне інтегрування інтегралів, що входять у праву частину; факторизація дозволяючого оператора схеми.

The paper deals with scheme of finite-element method for differential operator equation of second order in time contains a first derivative too. A family of vector differential schemes of four-order approximation is constructed. There are considered also problems of the scheme realization: numerical integration of integrals that are among right-hand members; factorization of the scheme resolving operator.

Розглянемо абстрактну задачу Коші для рівнянь другого порядку:

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Тут A, B, D – сталі оператори (матриці), $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$, $D^* = D > 0$, що діють у гільбертовому просторі

$$H; \quad \ddot{u} = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}.$$

Узагальнений розв'язок рівняння (1) визначимо як функцію, що задовольняє для будь-якого інтервалу $(t_n, t_{n+1}) \in [0, T]$ тотожності

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (-D\dot{u}\vartheta + B\dot{u}\vartheta + A u\vartheta) dt + D\dot{u}\vartheta|_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\vartheta(t) dt, \quad \forall \vartheta(t) \in C^1[0, T]. \quad (2)$$

Нехай $\omega_\tau = \{t_n, \tau = t_{n+1} - t_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ – сітка на відрізку $t \in [0, T]$. Наближений розв'язок задачі (1) шукаємо у вигляді ермітового сплайна третього степеня [1]:

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \quad (3)$$

де

$$y^n = y(t_n), \quad \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n), \quad \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2), \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau}.$$

Виберемо вагові функції $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ у вигляді лінійних комбінацій інтерполяційних функцій

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{\varphi_{00}(\xi) + \varphi_{01}(\xi)}{2} = \frac{1}{2}, \\ \vartheta_2^{(3)}(\xi) = \frac{\varphi_{10}(\xi) + \varphi_{11}(\xi)}{2} = \tau\xi(1 - \xi)(\xi - \frac{1}{2}), \\ \xi = \frac{t - t_n}{\tau}. \quad (4)$$

Підставляючи (4) у (2), після інтегрування й очевидних перетворень одержимо таку векторну різницеву схему:

$$\begin{cases} \left(D - \frac{\tau^2}{12} A \right) \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} + B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + A \frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1, \\ \left(D - \frac{3\tau^2}{38} A \right) \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} B \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} - \left(D - \frac{\tau^2}{42} A \right) \frac{\hat{y} + \dot{y}}{2} = \varphi_2. \end{cases} \quad (5)$$

Вибираючи тепер

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{\varphi_{00}(\xi) + \varphi_{01}(\xi)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau(\xi - \frac{1}{2}),$$

одержимо ще одну схему:

$$\begin{cases} \left(D - \frac{\tau^2}{12} A \right) \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} + B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + A \frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1, \\ \left(D - \frac{\tau^2}{12} A \right) \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} B \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} - \left(D - \frac{\tau^2}{60} A \right) \frac{\hat{y} + \dot{y}}{2} = \varphi_2. \end{cases} \quad (6)$$

Вибираючи

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{2}, \quad \vartheta_2(\xi) = s_1 \vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2 \vartheta_2^{(3)}(\xi),$$

дійдемо до параметричної схеми

$$\begin{cases} \left(D - \frac{\tau^2}{12} A \right) \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} + B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + A \frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1, \\ \left(D - \alpha\tau^2 A \right) \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} B \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} - \left(D - \beta\tau^2 A \right) \frac{\hat{y} + \dot{y}}{2} = \varphi_2, \end{cases} \quad (7)$$

де $s_1 = 180\beta - 40\alpha$, $s_2 = 1680\beta - 280\alpha$,

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \vartheta_1\left(\frac{t - t_n}{\tau}\right) dt = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \vartheta_1(\xi) d\xi, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \vartheta_2\left(\frac{t - t_n}{\tau}\right) dt = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \vartheta_2(\xi) d\xi, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1.$$

Похибка апроксимації схеми для $u(t) \in C^6[0, T]$ має вигляд

$$\psi_1 = \left(D - \frac{\tau^2}{12} A \right) \frac{\hat{u} - \dot{u}}{\tau} + B \frac{\hat{u} - u}{\tau} + A \frac{\hat{u} + u}{2} - \varphi_1 = O(\tau^4),$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= (D - \alpha\tau^2 A) \frac{\hat{u} - u}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} B \frac{\hat{u} - \dot{u}}{\tau} - (D - \beta\tau^2 A) \frac{\hat{u} + \dot{u}}{2} - \varphi_2 = \\ &= (\alpha - \beta - \frac{1}{12}) O(\tau^2) + O(\tau^4).\end{aligned}$$

Відомо, що похибка апроксимації має четвертий порядок, якщо

$$\alpha - \beta = \frac{1}{12}. \quad (8)$$

Порядок апроксимації не зміниться, якщо для обчислення інтегралів в φ_1, φ_2 застосувати формулу квадратури Сімпсона:

$$\varphi = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t) dt = \int_0^1 \Phi(t_n + \tau\xi) d\xi \approx \frac{1}{6} \left(\Phi(t_n) + 4\Phi(t_n + \frac{\tau}{2}) + \Phi(t_n + \tau) \right).$$

Для реалізації схеми (7) необхідно розв'язати систему двох рівнянь відносно невідомих $\hat{y}, \dot{\hat{y}}$:

$$\begin{cases} m_{11}\hat{y} + m_{12}\dot{\hat{y}} = \Phi_1, \\ m_{21}\hat{y} + m_{22}\dot{\hat{y}} = \Phi_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{де } m_{11} = D - \frac{\tau}{2}A, \quad m_{12} = B + \frac{\tau^2}{12}A, \quad m_{21} = -\left[\frac{\tau^2}{12}B + \frac{\tau}{2}(D - \beta\tau^2A) \right], \quad m_{22} = D - \alpha\tau^2A,$$

$$\Phi_1 = \tau\varphi_1 + (B - \frac{\tau}{2}A)y + (D - \frac{\tau^2}{12}A)\dot{y},$$

$$\Phi_2 = \tau\varphi_2 + (D - \alpha\tau^2A)y - \frac{\tau^2}{12}B\dot{y} + \frac{\tau}{2}(D - \beta\tau^2A)\dot{y}.$$

Нехай $DA = AD, DB = BD, BA = AB$. Виключаючи з (9) $\dot{\hat{y}}$, одержимо рівняння для знаходження $\hat{y}$:

$$C\hat{y} = F, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}C &= m_{21}m_{12} - m_{11}m_{22} = D^2 - (\alpha - \frac{1}{6})\tau^2AD + (\frac{\alpha}{12} - \frac{\beta}{4})\tau^4A^2 + \\ &+ \frac{\tau^2}{12}B^2 + \frac{\tau}{2}BD + (\frac{1}{24} - \frac{\beta}{2})\tau^3AB, \quad F = m_{12}\Phi_2 - m_{22}\Phi_1.\end{aligned} \quad (11)$$

Робота першого алгоритму реалізації схеми (7) полягає в розв'язку рівняння (10), а потім обчисленні $\dot{\hat{y}}$ з першого рівняння в (9):

$$(D - \frac{\tau^2}{12}A)\dot{\hat{y}} = \Phi_1 - (B + \frac{\tau}{2}A)\hat{y}. \quad (12)$$

Другий алгоритм базується на факторизації оператора C :

$$C = C_1C_2 = (D - \omega_1\tau^2A + v_1\tau B)(D - \omega_2\tau^2A + v_2\tau B). \quad (13)$$

Порівнюючи (11) із (13), одержимо умови, які зв'язують параметри $\omega_1, \omega_2, v_1, v_2, \alpha, \beta$:

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - \frac{1}{6}, \quad (14)$$

$$\omega_1 * \omega_2 = \frac{\alpha}{12} - \frac{\beta}{4}, \quad (15)$$

$$v_1 + v_2 = \frac{1}{2}, \quad (16)$$

$$v_1 * v_2 = \frac{1}{12}, \quad (17)$$

$$\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1 = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{24}. \quad (18)$$

Ці умови завершуються умовою четвертого порядку апроксимації (8). Далі маємо

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{12}, \beta = 0, \\ \omega_1 &= \frac{1}{24}(-1 + i\sqrt{3}), \omega_2 = \frac{1}{24}(-1 - i\sqrt{3}), \\ v_1 &= \frac{1}{4}(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}), v_2 = \frac{1}{4}(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}). \end{aligned} \quad (19)$$

Як бачимо, параметри $\omega_1, \omega_2, v_1, v_2$ – комплексні. Реалізація рівняння (10) здійснюється у два етапи: спочатку розв'язуємо рівняння

$$C_1 x = F, \quad (20)$$

а потім

$$C_2 \hat{y} = x. \quad (21)$$

Після цього знаходимо $\hat{y}$ з рівняння (12).

Необхідність факторизації оператора C полягає в такому. Оператори, що входять у C (їм відповідають матриці D, B, A), як правило, є погано обумовленими та стрічковими (напр., при використанні методу кінцевих елементів для задач математичної фізики). Тому матриці, що є їх добутками або квадратами, більш заповнені й гірше обумовлені. Цього недоліку позбавлені рівняння (20) і (21). Слід зазначити, що для рівняння з оператором $B = 0$ у роботі [3] факторизація привела, на відміну від цієї роботи, до операторів C_1, C_2 з дійсними параметрами.

1. Москальков М. Схема метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 7; 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М., 1975; 3. Москальков М., Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для нестационарных уравнений второго порядка // Праці міжнарод. конф. "Питання оптимізації обчислень". – К., 2005.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 517.929

Д. Хусаїнов, д-р. фіз.-мат. наук
А. Іванов, канд. фіз.-мат. наук
І. Коварж, асп.

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Отримано загальний розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням. Наведено умови збіжності ряду, що зображує формальний розв'язок. Використано спеціальну функцію, яку названо запізненим експоненціалом.

The general solution of one-dimensional thermal conductivity equation with delay has been obtained in this article. The conditions for convergence of series, representing formal solution, are introduced. The special function named delaying exponential is applied.

Як відомо, при розв'язуванні першої крайової задачі для рівняння теплопровідності

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

визначеного при $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ з початковим $u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l$ і крайовими умовами $u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), t \geq 0$, використовують метод поділу змінних (Фур'є) [1, 2]. Використаємо аналогічний підхід до знаходження розв'язку першої крайової задачі відповідного рівняння теплопровідності із сталим запізненням [3, 4]:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t - \tau) + f(x, t), \tau > 0, \quad (1)$$

визначеним при $0 \leq x \leq l, t \geq 0$. Початкова умова має вигляд

$$u(x, t) = \varphi(x, t), 0 \leq x \leq l, -\tau \leq t \leq 0, \quad (2)$$

а крайові

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq -\tau, \quad (3)$$

причому виконуються умови "склеювання"

$$\varphi(0, t) = \mu_1(t), \quad \varphi(l, t) = \mu_2(t), \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Розв'язок $u(x, t)$ рівняння (1), що задовольняє умови (2), (3), шукається у вигляді суми трьох функцій:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

1) $u_1(x, t)$ – розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t - \tau)}{\partial x^2} \quad (4),$$

з нульовими крайовими $u_1(0, t) \equiv 0$, $u_1(l, t) \equiv 0$, $t \geq -\tau$ і ненульовою початковою

$$u_1(x, t) = \Phi(x, t), \quad \Phi(x, t) = \varphi(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0 \text{ умовами};$$

2) $u_2(x, t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (5)

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t - \tau)}{\partial x^2} + F(x, t), \quad F(x, t) = f(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad 0 \leq x \leq l$$

з нульовими крайовими $u_2(0, t) \equiv 0$, $u_2(l, t) \equiv 0$, $t \geq -\tau$ і нульовою початковою $u_2(x, t) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ умовами.

3) $u_3(x, t)$, як і для рівняння без запізнення, має вигляд

$$u_3(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Розглянемо знаходження цих функцій окремо.

1). Розв'язок однорідного рівняння (4) з нульовими крайовими й ненульовою початковою умовами шукається у вигляді

$$u_1(x, t) = X(x)T(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

Після підстановки в однорідне рівняння (4) і поділу змінних отримуємо два рівняння:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + (\lambda a)^2 T(t - \tau) = 0. \quad (6)$$

Оскільки граничні умови нульові, то для першого з рівнянь (6) одержуємо нульові граничні умови

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Ненульовими будуть тільки розв'язки

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

що відповідають власним числам $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Друге з рівнянь (6) має вигляд лінійного однорідного рівняння зі сталим запізненням

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 T_n(t - \tau) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Розклавши функцію $\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]$ у ряд за власними функціями $X_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, одержимо початкові умови для кожного з рівнянь (7) у вигляді

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad \Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right]. \quad (8)$$

Отримаємо розв'язки рівнянь (7) з початковими умовами (8) для кожного $n = 1, 2, 3, \dots$ в явному вигляді. Попереду наведемо ряд додаткових відомостей [5].

Означення 1. Запізнілим експоненціалом $\exp_{\tau} \{ -(\lambda a)^2 \}$ назвемо функцію, що має вигляд

$$\exp_{\tau}\{-(\lambda a)^2 t\} = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < t < -\tau, \\ 1 & , \quad -\tau \leq t < 0, \\ 1 - (\lambda a)^2 \frac{t}{1!} & , \quad 0 \leq t < \tau, \\ 1 - (\lambda a)^2 \frac{t}{1!} + (\lambda a)^4 \frac{(t-\tau)^2}{2!} & , \quad \tau \leq t < 2\tau \\ \dots & , \quad \dots \\ 1 - (\lambda a)^2 \frac{t}{1!} + \dots + (-1)^k (\lambda a)^{2k} \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!} & , \quad (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases} \quad (9)$$

Зауваження 1. Експоненціальна функція e^{at} може бути зображена у вигляді ряду

$$e^{at} = 1 + a \frac{t}{1!} + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^k \frac{t^k}{k!} + \dots$$

У ній параметри a та t відіграють однакову роль. Запізнілий експоненціал $\exp_{\tau}\{at\}$ при кожному фіксованому t^* є за змінною a поліномом степеня $k = \left\lceil \frac{t^*}{\tau} \right\rceil + 1$. Тому при збільшенні $t \rightarrow +\infty$ (або зменшенні $t \rightarrow +0$) він наближається до e^{at} . Однак при збільшенні $|a| \rightarrow +\infty$ він "усе більше псується".

Згідно з [5] мають місце такі твердження.

Лема 1. Справедливе таке правило диференціювання:

$$\frac{d}{dt} \exp_{\tau}\{-(\lambda a)^2 t\} = -(\lambda a)^2 \exp_{\tau}\{-(\lambda a)^2 (t-\tau)\}, \quad t \geq 0,$$

тобто функція $\exp_{\tau}\{-(\lambda a)^2 t\}$ є розв'язком другого з рівнянь (6), що задовольняє при $-\tau \leq t \leq 0$ одиничну початкову умову.

Теорема 1. Розв'язок кожного з рівнянь (7), що задовольняє початкову умову (8), має вигляд

$$T_n(t) = \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t\right\} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau-\xi)\right\} \Phi_n'(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Зауваження 2. Узявши інтеграл по частинах, отримаємо

$$T_n(t) = \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\xi)\right\} \Phi_n(0) - \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-2\tau-\xi)\right\} \Phi_n(\xi) d\xi$$

– інтегральне зображення розв'язку задачі (7)–(8) у припущенні тільки неперервності початкових умов.

Повернемося до однорідного рівняння теплопровідності (4) з нульовими крайовими й ненульовими початковими умовами. З огляду на зображення (10), його розв'язок має вигляд

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t\right\} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau-\xi)\right\} \Phi_n'(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (11)$$

або

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \times \left[\exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)\right\} \Phi_n(0) - \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\left\{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-2\tau-\xi)\right\} \Phi_n(\xi) d\xi \right], \quad (12)$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right].$$

2). Розглянемо неоднорідне рівняння (5) з нульовими крайовими й початковою умовами. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

за власними функціями першої крайової задачі. Якщо розкласти функцію

$$F(x, t) = f(x, t) - \dot{\mu}_1(t) - \frac{x}{l} \left[\dot{\mu}_2(t) - \dot{\mu}_1(t) \right]$$

в аналогічний ряд Фур'є

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

то кожна з $u_{2n}(x, t)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння із запізненням

$$\dot{u}_{2n}(t) + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 u_n(t - \tau) = F_n(t), \quad (14)$$

що задовольняє нульові початкові умови $u_{2n}(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Згідно з [5] має місце такий результат.

Теорема 2. Розв'язок $u_{2n}(x, t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ рівняння (14), що задовольняє нульові початкові умови, має вигляд

$$u_{2n}(t) = \int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Повернемось до неоднорідного рівняння теплопровідності з нульовими умовами (5): його розв'язок має вигляд

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (16)$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \dot{\mu}_1(t) - \dot{\mu}_2(t) \right].$$

Склавши всі доданки, отримаємо, що формальне зображення розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2), (3) має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \Phi'_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad (17)$$

$$\text{де } \Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad (18)$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Наклавши умови збіжності ряду (17) і його часткових похідних, сформулюємо таку теорему про розв'язок першої крайової задачі (1)–(3).

Теорема 3. Нехай функції $\Phi(x, t)$ і $F(x, t)$ такі, що для їхніх коефіцієнтів Фур'є $\Phi_n(t)$ і $F_n(t)$, відповідно, на проміжку $0 \leq t \leq T$, $(k-1)\tau \leq T < k\tau$ виконуються умови "швидкого зменшення" за індексом n , тобто виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2(k-1)} |F_n(t)| = 0, \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(s)| = 0, \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (19)$$

Тоді при $0 \leq t \leq T$ розв'язок першої крайової задачі (1)–(3) має вигляд (17).

Доведення. Запишемо розв'язок $u(x, t)$ у вигляді суми

$$u(x, t) = S_1(x, t) + S_2(x, t) + S_3(x, t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)],$$

де

$$S_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad S_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad S_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (20)$$

$$A_n(t) = \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \Phi_n(-\tau), \quad B_n(t) = \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \Phi'_n(\xi) d\xi,$$

$$C_n(t) = \int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi.$$

1. Розглянемо коефіцієнти $A_n(t)$, $n=1,2,\dots$ першого ряду $S_1(x,t)$. Для довільного фіксованого моменту t^* : $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$ має місце

$$|A_n(t^*)| \leq \left| \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t^* \right\} \right| |\Phi_n(-\tau)| \leq \left[1 + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \frac{t^*}{1!} + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^4 \frac{(t^* - \tau)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^{2k} \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!} \right] |\Phi_n(-\tau)|.$$

Вираз у квадратних дужках за змінною n є багаточленом степеня $2k$, $k = \left[\frac{t^*}{\tau} \right] + 1$, тобто

$$|A_n(t^*)| \leq |1 + a_1(t^*)n^2 + a_2(t^*)n^4 + \dots + a_k(t^*)n^{2k}| |\Phi_n(-\tau)|.$$

Якщо коефіцієнти $\Phi_n(-\tau)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(-\tau)| = 0,$$

то ряд $S_1(x,t)$ збігається абсолютно й рівномірно.

2. Розглянемо коефіцієнти $B_n(t)$, $n=1,2,3,\dots$ другого ряду $S_2(x,t)$. Узявши інтеграл по частинах, отримаємо

$$B_n(t) = B_{n1}(t) + B_{n2}(t) + B_{n3}(t), \quad B_{n1}(t) = \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} \Phi_n(0),$$

$$B_{n2}(t) = \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \Phi_n(-\tau), \quad B_{n3}(t) = \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} \Phi_n(\xi) d\xi.$$

Як впливає з п. 1, якщо коефіцієнти $\Phi_n(0)$ і $\Phi_n(-\tau)$ такі, що виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(0)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(-\tau)| = 0,$$

то ряди

$$S_{21}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n1}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \text{і} \quad S_{22}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n2}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

збігаються абсолютно й рівномірно.

Розглянемо коефіцієнти $B_{n3}(t)$. Зробивши заміну $t - 2\tau - \xi = s$, отримаємо

$$B_{n3}(t) = \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 s \right\} \Phi_n(t - 2\tau - s) ds, \quad n=1,2,\dots$$

Нехай $t = t^*$: $(k-1)\tau \leq t^* \leq k\tau$. Розіб'ємо інтеграл на два та запишемо

$$\begin{aligned} B_{n3}(t^*) &= \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{t^*-2\tau}^{(k-2)\tau} \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 s \right\} \Phi_n(t^* - 2\tau - s) ds + \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 s \right\} \Phi_n(t^* - 2\tau - s) ds = \\ &= \int_{t^*-2\tau}^{(k-2)\tau} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \frac{s}{1!} + \dots + (-1)^{(k-2)} \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^{2(k-2)} \frac{[s - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \right] \Phi_n(t^* - 2\tau - s) ds + \\ &+ \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \frac{s}{1!} + \dots + (-1)^{(k-2)} \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^{2(k-2)} \frac{[s - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \right] \Phi_n(t^* - 2\tau - s) ds. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему про середнє, знаходимо s_1, s_2 такі, що

$$t^* - 2\tau \leq s_1 \leq (k-2)\tau, \quad (k-2)\tau \leq s_2 \leq t^* - \tau,$$

і для них буде виконуватися

$$\begin{aligned} B_{n3}(t^*) &= \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \tau \times \left\{ \left[1 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} a \right)^2 \frac{s_1}{1!} + \dots + (-1)^{k-2} n^{2(k-2)} \left(\frac{\pi}{l} a \right)^{2(k-2)} \frac{[s_1 - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \right] \Phi_n(t^* - 2\tau - s_1) + \right. \\ &\left. + \left[1 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} a \right)^2 \frac{s_2}{1!} + \dots + (-1)^{k-2} n^{2(k-2)} \left(\frac{\pi}{l} a \right)^{2(k-2)} \frac{[s_2 - (k-2)\tau]^{k-2}}{(k-1)!} \right] \Phi_n(t^* - 2\tau - s_2) \right\}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} |B_{n3}(t^*)| \leq & \left| b_0^1(t^*) + b_1^1(t^*)n^2 + \dots + b_{2(k-2)}^1(t^*)n^{2(k-2)} \right| n^2 |\Phi_n(t^* - 2\tau - s_1)| + \\ & + \left| b_0^2(t^*) + b_1^2(t^*)n^2 + \dots + b_{2(k-1)}^2(t^*)n^{2(k-1)} \right| n^2 |\Phi_n(t^* - 2\tau - s_2)|. \end{aligned}$$

Якщо коефіцієнти $\Phi_n(t)$ такі, що виконується $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} |\Phi_n(t)| = 0$, $-\tau \leq t \leq 0$, то ряд $S_2(t)$ збігається абсолютно й рівномірно.

3. Розглянемо коефіцієнти $C_n(t)$, $n=1,2,3,\dots$ третього ряду $S_3(x,t)$. Для довільного фіксованого t^* : $(k-1)\tau \leq t^* \leq k\tau$ зробимо заміну $t - \tau - \xi = s$ і подамо інтеграл сумою інтегралів, у яких функція $\exp_\tau \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t \right\}$ має однакову структуру:

$$\begin{aligned} C_n(t^*) = & \int_0^{t^*} \exp_\tau \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n(\xi) d\xi = \int_{-\tau}^{t^* - \tau} \exp_\tau \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 s \right\} F_n(t^* - \tau - s) ds = \\ & = \int_{-\tau}^0 F_n(t^* - \tau - s) ds + \int_0^\tau \left[1 - \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 \frac{s}{1!} \right] F_n(t^* - \tau - s) ds + \dots \\ & \dots + \int_{(k-2)\tau}^{t^* - \tau} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 \frac{s}{1!} + \dots + (-1)^{(k-2)} \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^{2(k-2)} \frac{[s - (k-2)\tau]^{k-2}}{(k-1)!} \right] F_n(t^* - \tau - s) ds. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему про середнє, знаходимо моменти часу

$$-\tau \leq s_1 \leq 0, \quad 0 \leq s_2 \leq \tau, \dots, (k-2)\tau \leq s_k \leq t^* - \tau,$$

за яких

$$\begin{aligned} C_n(t^*) \leq & \tau F_n(t^* - \tau - s_1) + \tau \left[1 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 \frac{s_2}{1!} \right] F_n(t^* - \tau - s_2) + \dots \\ & + \tau \left[1 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 \frac{s_{k-1}}{1!} + \dots + n^{2(k-2)} \left(\frac{\pi}{l} a\right)^{2(k-2)} \frac{[s_k - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \right] F_n(t^* - \tau - s_{k-1}) + \\ & + \left[t^* - (k-1)\tau \right] \left[1 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 \frac{s_k}{1!} + \dots + n^{2(k-2)} \left(\frac{\pi}{l} a\right)^{2(k-2)} \frac{[s_k - (k-2)\tau]^{k-2}}{(k-1)!} \right] F_n(t^* - \tau - s_k). \end{aligned}$$

Звідси

$$|C_n(t^*)| \leq \tau \max_{-\tau \leq s \leq t^* - \tau} |F_n(s)| \left[c_1(t^*) + c_2(t^*)n^2 + \dots + c_{k-1}(t^*)n^{2(k-1)} \right].$$

Якщо коефіцієнти $F_n(t)$ такі, що виконується

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2(k-1)} |F_n(t)| = 0, \quad -\tau \leq t \leq t^* - \tau,$$

то ряд $S_3(x,t)$ буде збігатись абсолютно й рівномірно.

У такий спосіб показано, що для абсолютної й рівномірної збіжності рядів $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$ потрібно "швидке зменшення" за індексом n коефіцієнтів $\Phi_n(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ і $F_n(t)$, $0 \leq t \leq t^*$, тобто виконання умови (19). Збіжність похідних впливає з властивостей диференційовності запізнілого експоненціалу.

Подання розв'язку крайової задачі (1)–(3) у формі (17) не завжди є зручним. Зокрема, якщо потрібно оцінити вплив початкових, крайових і зовнішніх збурень, то подання (17) не дозволяє цього зробити. Потрібно рознести ці фактори по окремих доданках.

Перепишемо (17) у такий спосіб (21):

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp_\tau \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t \right\} \frac{2}{l} \int_0^l \left[\varphi(s, -\tau) - \mu_1(-\tau) - \frac{s}{l} [\mu_2(-\tau) - \mu_1(-\tau)] \right] \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\tau}^0 \exp_\tau \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \frac{2}{l} \int_0^l \left[\varphi'_\xi(s, \xi) - \dot{\mu}_1(\xi) - \frac{s}{l} [\dot{\mu}_2(\xi) - \dot{\mu}_1(\xi)] \right] \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(s, \xi) - \dot{\mu}_1(\xi) - \frac{s}{l} \left[\dot{\mu}_2(\xi) - \dot{\mu}_1(\xi) \right] \right] \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_1(t) - \mu_2(t)].$$

Розділимо початкову та крайові змінні:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s, -\tau) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \mu_1(-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \mu_2(-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \frac{s}{l} \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\tau}^0 \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'_{\xi}(s, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l} \int_0^l \frac{s}{l} \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{2}{l} \int_0^l f(s, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \int_0^t \dot{\mu}_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l} \int_0^l \frac{s}{l} \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \int_0^t \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \mu_2(t) \frac{x}{l}.$$

Розкладемо функції $\left(1 - \frac{x}{l} \right)$ і $\frac{x}{l}$ у відповідні ряди Фур'є:

$$\left(1 - \frac{x}{l} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \frac{x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$p_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} s ds, \quad q_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{s}{l} \sin \frac{\pi n}{l} s ds.$$

Позначимо

$$\varphi_n(\xi) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} s ds, \quad f_n(\xi) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} s ds.$$

Тоді отриманий вираз буде мати вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \mu_1(-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} p_n \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \mu_2(-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} q_n \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\tau}^0 \varphi'_{\xi}(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p_n \int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q_n \int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p_n \int_0^t \dot{\mu}_1(\xi) \left[\exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \right] d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q_n \int_0^t \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_2(t) \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{\pi n}{l} x.
\end{aligned}$$

Візьмемо інтеграли:

$$\begin{aligned}
\int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi & = \mu_1(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \mu_1(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - \\
& \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \mu_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} d\xi. \\
\int_0^t \dot{\mu}_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi & = \mu_1(t) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (-\tau) \right\} - \mu_1(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \\
& \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_0^t \mu_1(\xi) \left[\exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} \right] d\xi.
\end{aligned}$$

Аналогічно буде мати місце:

$$\begin{aligned}
\int_{-\tau}^0 \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi & = \mu_2(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \mu_2(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - \\
& \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \mu_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} d\xi. \\
\int_0^t \dot{\mu}_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi & = \mu_2(t) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (-\tau) \right\} - \mu_2(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \\
& \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_0^t \mu_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} d\xi.
\end{aligned}$$

Після підстановки отриманих виразів одержимо

$$\begin{aligned}
u(x, t) & = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} + \int_{-\tau}^0 \varphi_n'(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi + \right. \\
& \left. + \int_0^t f_n(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\mu_1(-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} p_n \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - p_n \left(\mu_1(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \right. \right. \\
& - \mu_1(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \mu_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} d\xi \right) - \\
& - p_n \left(\mu_1(t) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (-\tau) \right\} - \mu_1(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_0^t \mu_1(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - 2\tau - \xi) \right\} d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\mu_2(-\tau) q_n \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - q_n \left(\mu_2(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\mu_2(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \mu_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-2\tau-\xi) \right\} d\xi - \\ & -q_n \left(\mu_2(t) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (-\tau) \right\} - \mu_2(0) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-\tau) \right\} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 \mu_2(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-2\tau-\xi) \right\} d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

Позначимо суму, що залежить від початкових умов

$$\tilde{S}_1[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n(-\tau) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 t \right\} + \int_{-\tau}^0 \varphi'_n(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-\tau-\xi) \right\} d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (22)$$

суму, що залежить від зовнішніх збурень –

$$\tilde{S}_2[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\xi) \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-\tau-\xi) \right\} d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (23)$$

суму, що залежить від крайових умов –

$$\tilde{S}_3[\mu_1, \mu_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 \int_{-\tau}^0 [p_n \mu_1(\xi) + q_n \mu_2(\xi)] \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-2\tau-\xi) \right\} d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Можна обчислити, що $p_n = \frac{2}{\pi n}$, $q_n = \frac{l}{\pi n} (-1)^{n+1}$, тоді

$$\tilde{S}_3[\mu_1, \mu_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi n a^2}{l^2} \int_{-\tau}^0 [\mu_1(\xi) + (-1)^n \mu_2(\xi)] \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-2\tau-\xi) \right\} d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (24)$$

Після скорочень, розв'язок крайової задачі можна зобразити у вигляді

$$u(x, t) = \tilde{S}_1[\varphi] + \tilde{S}_2[f] + \tilde{S}_3[\mu_1, \mu_2].$$

Аналогічно викладеному вище, справедливим є таке твердження.

Теорема 4. Нехай функції $\varphi(x, t)$, $f(x, t)$, $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$ такі, що на проміжку $-\tau \leq t \leq t^*$, $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$ для їхніх коефіцієнтів Фур'є $\varphi_n(t)$, $f_n(t)$ та

$$\mu_n = \frac{2\pi n a^2}{l^2} \int_{-\tau}^0 [\mu_1(\xi) - (-1)^n \mu_2(\xi)] \exp_{\tau} \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-2\tau-\xi) \right\} d\xi, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

виконуються умови "швидкого зменшення" за індексом n , тобто виконуються

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} |\varphi_n(s)| = 0, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2(k-1)} |f_n(s)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} \mu_n = 0.$$

Тоді при $0 \leq t \leq t^*$ розв'язок першої крайової задачі (1)–(3) матиме вигляд $u(x, t) = \tilde{S}_1[\varphi] + \tilde{S}_2[f] + \tilde{S}_3[\mu_1, \mu_2]$,

де $\tilde{S}_1[\varphi]$, $\tilde{S}_2[f]$, $\tilde{S}_3[\mu_1, \mu_2]$ визначені у (22)–(24).

Доведення. Твердження доводиться аналогічно попередній теоремі 3.

Розглянемо досить важливий випадок.

Теорема 5. Нехай функції $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$ на проміжку $-\tau \leq t \leq t^*$, $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$ задовольняють умови

$$\mu_1(t) \equiv 0, \quad \mu_2(t) \equiv 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^i}{dx^i} \varphi(x, t)_{x=0} \equiv 0, \quad \frac{d^i}{dx^i} \varphi(x, t)_{x=l} \equiv 0, \quad i = \overline{0, 2k}, \quad \frac{d^j}{dx^j} f(x, t)_{x=0} \equiv 0, \quad \frac{d^j}{dx^j} f(x, t)_{x=l} \equiv 0, \quad j = \overline{0, 2(k-1)},$$

$$\text{а похідні } \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} f(x, t)_{x=0}, \quad \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} f(x, t)_{x=l}, \quad \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \varphi(x, t)_{x=0}, \quad \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \varphi(x, t)_{x=l}$$

є обмеженими функціями. Тоді на проміжку $-\tau \leq t \leq t^*$ крайова задача (1)–(3) має розв'язок, що зображується у вигляді ряду

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} F_n^o(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau) \right\} \Phi_n^o(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau} \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t - \tau - \xi) \right\} \Phi_n^o(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x, \\
\Phi_n^o(t) = & \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad F_n^o(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \quad (26)$$

Доведення. Як випливає із залежностей (8), (16) і умови (25) теореми, коефіцієнти Фур'є $F_n(t)$ і $\Phi_n(t)$ мають такий вигляд: $\Phi_n^o(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$, $F_n^o(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$.

Скористаємось умовами на похідні функцій $f(\xi, t)$, $\varphi(\xi, t)$ і проінтегруємо по частинах

$$\Phi_n^o(t) = \frac{2}{l} \left[- \frac{l}{\pi n} \varphi(\xi, t) \cos \frac{\pi n}{l} \xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=l} + \frac{l}{\pi n} \int_0^l \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial \xi} \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] = \frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \int_0^l \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial \xi} \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Повторивши інтегрування ще раз, отримаємо $\Phi_n^o(t) = - \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi n} \right)^2 \int_0^l \frac{d^2 \varphi(\xi, t)}{d\xi^2} \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$.

Проробивши процедуру інтегрування $(2k+1)$ разів, запишемо $\Phi_n^o(t) = \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi n} \right)^{2k+1} \int_0^l \frac{d^{2k+1} \varphi(\xi, t)}{d\xi^{2k+1}} \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$.

Звідси $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2(k-1)} |\Phi_n(s)| = 0$.

Аналогічно доводиться виконання умови $\lim_{n \rightarrow +\infty} |F_n(t)| = 0$. Таким чином, виконуються умови теореми 3 і розв'язок першої крайової задачі (1)–(3) має вигляд (26).

1. Тихонов А., Самарский А. Уравнения математической физики. – М., 1966; 2. Владимиров В. Уравнения математической физики. – М., 1988; 3. Эльсгольц Л., Норкин С. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971; 4. Ткач Б. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 10; 5. Хусаинов Д., Коварж І. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 2; 6. Будак Б., Фомін С. Кратные интегралы и ряды. – М., 1967.
- Дослідження частково підтримані грантом NSF INT-0203702/.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 517.9

Ю. Шушарін, ст. виклад.,
О. Лавренюк, асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЛАНЦЮГА МАРКОВА

Розглядається система різницьових рівнянь, коефіцієнти якої залежать від двох послідовних значень ланцюга Маркова. Отримано моментні рівняння, виведено необхідні й достатні умови стійкості розв'язків у середньому квадратичному. Для однорідної системи введено функції Ляпунова й отримано умови стійкості в термінах функцій Ляпунова.

We have analysed a system of differential equations the coefficients of which depend on two consequent values of Markov's chain. We've received momentous equations and determined the necessary and sufficient conditions of the stability of solutions.

1. Розглядається система m лінійних різницьових рівнянь

$$X_{k+1} = A(\xi_{k+1} \xi_k) X_k + B(\xi_{k+1} \xi_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

де ξ_k – скінченнозначний ланцюг Маркова, який приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з імовірностями

$$p_s(k) = P\{\xi_k = \theta_s\} \quad (s = 1, \dots, n),$$

що задовольняють систему різницьових рівнянь

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} p_s(k) \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Припускаємо виконання умов [1]

$$\pi_{js} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \pi_{js} = 1 \quad (s = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Введемо позначення

$$A_{js} = A(\theta_j, \theta_s), \quad B_{js} = B(\theta_j, \theta_s) \quad (j, s = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Густину ймовірностей випадкового розв'язку системи різницевих рівнянь (1) можна зобразити у вигляді (2)

$$f(k, X, \xi) = \sum_{j=1}^n f_j(k, X) \delta(\xi - \theta_j),$$

де $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака. Часткові густини $f_j(k, X)$ задовольняють систему функціональних рівнянь

$$f_j(k+1, X) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} f_s(k, A_{js}^{-1}(X - B_{js})) \left| \det A_{js}^{-1} \right|. \quad (4)$$

Для моментів першого порядку отримаємо систему векторних неоднорідних рівнянь

$$M_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} (A_{js} M_s(k) + p_s(k) B_{js}(k)) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Для початкових моментів другого порядку маємо систему матричних рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} (A_{js} D_s(k) A_{js}^* + B_{js}(k) M_s^*(k) A_{js}^* + A_{js} M_s(k) B_{js}^*(k) + p_s(k) B_{js}(k) B_{js}^*(k)). \quad (5)$$

Тут позначено [2]

$$M_j(k) = \langle X_k | \mathcal{I}_k = \theta_j \rangle = \int \dots \int_{E_m} X f_j(k, X) dX; \quad dX = dx_1, \dots, dx_m$$

$$D_j(k) = \langle X_k X_k^* | \mathcal{I}_k = \theta_j \rangle = \int \dots \int_{E_m} X X^* f_j(k, X) dX; \quad (j = 1, \dots, n).$$

Для однорідної системи рівнянь (1) система рівнянь (5) набуває вигляду

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_{js} D_s(k) A_{js}^* \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Оскільки матриця других моментів $D(k) = \langle X_k X_k^* \rangle$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) виражається через невід'ємні симетричні матриці $D_j(k)$ ($j = 1, \dots, n$) $D(k) = \sum_{j=1}^n D_j(k)$, то це приводить до такої теореми.

Теорема 1. Для того, щоб нульові розв'язки однорідної системи рівнянь з випадковими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = A(\xi_{k+1}, \xi_k) X_k \quad (7)$$

були стійкими в середньому квадратичному, необхідно й достатньо, щоб розв'язок системи різницевих рівнянь (6) був стійким.

2. Для дослідження стійкості розв'язків системи однорідних рівнянь (7) введемо стохастичні функції Ляпунова, які визначаються формулами

$$v_s(k, X) = \sum_{j=k}^{\infty} \langle X_j^* H(\xi_j) X_j | X_k = X, \xi_k = \theta_s \rangle. \quad (8)$$

Тут $H(\xi_j)$ – симетрична матриця, що приймає n значень $H_s = H(\theta_s)$ ($s = 1, \dots, n$).

Функції $v_s(k, X)$ ($s = 1, \dots, n$) є квадратичними формами від X .

Нехай

$$v_s(k, X) = X^* Q_s(k) X \quad (s = 1, \dots, n). \quad (9)$$

З формул (8), (9) знаходимо систему рівнянь

$$v_s(k, X) = X^* H_s X + \sum_{j=1}^n \pi_{js} v_j(k+1, A(\xi_j, \xi_s) X), \quad (10)$$

яку можна записати у вигляді

$$Q_s(k) = H_s + \sum_{j=1}^n \pi_{js} A_{js}^* Q_j(k+1) A_{js} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Теорема 2. Однорідна система рівнянь

$$Q_s(k) = \sum_{j=1}^n \pi_{js} A_{js}^* Q_j(k+1) A_{js} \quad (12)$$

є спряженою до системи рівнянь (6).

Доведення. Використовуємо скалярний добуток $A \circ B$ матриць $A = \|a_{ks}\|$, $B = \|b_{ks}\|$, визначений за формулою [2]

$$A \circ B = \sum_{k,s} a_{ks} b_{ks}, \text{ який задовольняє формулу } A \circ C B D = C^* A D^* \circ B.$$

З формул (12), (6) знаходимо рівність

$$\sum_{j=1}^n D_j(k+1) \circ Q_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} A_{js} D_s(k) A_{js}^* \circ Q_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} D_s(k) \circ A_{js}^* Q_j(k+1) A_{js} =$$

$$\sum_{s=1}^n D_s(k) Q_s(k) \quad (k=0,1,2,\dots),$$

яка доводить теорему.

З теореми 2 випливають такі результати.

Теорема 3. Для того щоб нульові розв'язки системи різницевих рівнянь (6) були асимптотично стійкими при $n \rightarrow +\infty$, необхідно й достатньо, щоб нульові розв'язки системи різницевих рівнянь (12) були асимптотично стійкими при $n \rightarrow +\infty$.

Теорема 4. Якщо нульові розв'язки системи (12) асимптотично стійкі при $n \rightarrow +\infty$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Q_s(k) = H_s + \sum_{j=1}^n \pi_{js} A_{js}^* Q_j A_{js} \quad (13)$$

при довільних матрицях H_s ($s=1,\dots,n$) має розв'язок Q_s ($s=1,\dots,n$).

Якщо $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$), то $Q_s > 0$ ($s=1,\dots,n$).

Доведення теореми випливає з того, що $Q_s = \lim_{k \rightarrow -\infty} Q_s(k)$ для будь-якого розв'язку системи різницевих рівнянь (11) при $k \rightarrow -\infty$. Якщо $Q_j(0) = 0$, то із системи рівнянь (11) випливає, що $Q_s(k) > 0$ ($k=-1,-2,-3,\dots$), і при цьому $Q_s(k) \geq H_s$ ($k=-1,-2,-3,\dots$). Крім того, з формули (8) випливає, що при $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$) та $X_j \rightarrow 0$ ($j=k,k+1,\dots$) квадратичні форми $v_s(k, X)$ ($s=1,\dots,n$) будуть додатно-визначеними, а отже, $Q_s > 0$ ($s=1,\dots,n$).

Теорема 5. Якщо система рівнянь (13) за деяких $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$) має розв'язок $Q_s > 0$ ($s=1,\dots,n$), то нульовий розв'язок системи різницевих рівнянь (6) асимптотично стійкий при $n \rightarrow +\infty$.

Доведення. З існування стохастичних функцій Ляпунова $v_s(X) = X^* Q_s X = \sum_{j=0}^{\infty} \langle X_j^* H(\xi_j) X_j | X_k = X, \xi_k = \theta_s \rangle$

випливає збіжність матричних рядів $\sum_{j=0}^{\infty} \langle X_j^* X_j | X_0 = X, \xi_0 = \theta_s \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} D(j)$,

а звідси – співвідношення $\lim_{j \rightarrow +\infty} D(j) = 0$.

Кінцевий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 6. Для того, щоб нульовий розв'язок системи різницевих рівнянь (7) був асимптотично стійким у середньому квадратичному, необхідно й достатньо, щоб система матричних рівнянь (13) за будь-яких $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$) мала розв'язок $Q_s > 0$ ($s=1,\dots,n$) або щоб при деяких матрицях $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$) система рівнянь (13) мала розв'язок $H_s > 0$ ($s=1,\dots,n$).

Ця теорема дає обґрунтування застосуванню стохастичних функцій Ляпунова для дослідження стійкості розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

3. Розглянемо економічну задачу про обчислення прибутку при дослідженні системи різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами вигляду (7), коли коефіцієнти залежать від процесу Маркова. Нехай прибуток Y_k залежить від ξ_k, ξ_{k+1} :

$$y_{k+1} = y_k + C(\xi_{k+1}, \xi_k) \quad (14)$$

Знайдемо різницеві рівняння для зміни математичного сподівання $m(k) = \langle y_k \rangle$ і другого початкового моменту $d(k) = \langle y_k^2 \rangle$. Із системи рівнянь (15) знаходимо систему моментних розв'язків

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} p_s(k) \quad (s=1,\dots,n); \quad m_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} m_s(k) + \pi_{js} p_s c_{js};$$

$$d_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} (d_s(k) + 2c_{js} m_s(k) + p_s(k)(c_{js})^2). \quad (15)$$

З розв'язку системи рівнянь (15) знаходимо $m(k) = \sum_{s=1}^n m_s(k)$, $d(k) = \sum_{s=1}^n d_s(k)$.

1. Валеев К., Карелова О., Горелов В. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М., 1996; 2. Тихонов В., Миронов М. Марковские процессы. – М., 1997.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

Наукове видання



ВІСНИК КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 7

Редактор Н. Земляна

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л.Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 3128



Підписано до друку 18.11.06. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № 165. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 7,6. Обл.-вид. арк. 9,63. Зам. № 23-1397.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; (38044) 239 3158; факс (38044) 239 3128
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua
WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>