

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для науковців, аспірантів, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики, студентів старших курсів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods modeling of processes are presented.

It's considered for teachers, scientific collaborators, aspirants and post-graduate students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	О.К.Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. АПН України
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	Д.Я.Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); А.В.Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А.Белов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С.О.Войцехівський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф.Г.Гарашенко, д-р техн. наук, проф.; С.І.Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; І.М.Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.Г.Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.Н.Редько, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Є.О.Лебедев, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.І.Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.А.Заславський, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, вул. Глушкова, 6, факультет кібернетики; ☎ (38044) 259 0149
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 18 жовтня 2004 року (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про Державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01030, Київ-30, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 3128

Бичков О.С. Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів	4
Гарашенко Ф.Г., Хітько І.В. Про недиференційовані задачі оптимізації систем з імпульсною дією	9
Грищенко О.Ю. Узагальнення ДС-алгоритму знаходження періодичних розв'язків рівнянь типу Шредінгера на квазілінійний випадок	14
Доленко Г.О., Хусаїнов Д.Я. Часткова обернена задача оптимізації в дискретних системах	17
Зубенко В.В. Про темпоральні процедури та алгоритми	20
Івохін Є.В., Аджубей Л.Т., Волчков С.О. Про задачу спостереження в нечітких різницевих системах	26
Коварж І.В. Про розв'язок рівняння теплопровідності із запізненням за часом	30
Клюшин Д.А., Петунін Ю.И. Статистичний критерій для порівняння двох імовірностей	35
Кожаментов А.Т. Лінійно-квадратична задача оптимізації для систем із запізненням	40
Кузьмич О.І. Оцінки стійкості динаміки гібридних систем з кінцевим числом перемикачів	45
Шкільняк С.С. Фінітарні логіки квазіарних предикатів	47
Утебаєв Д. Поверхневі хвилі Релея в пружно-пористому моментному півпросторі	55
Рудник Ю.В., Жарких Ю.С. Міжнародні стандарти електронних навчальних матеріалів	60
Драган Є.В., Жарких Ю.С. Діагностика рівня знань за допомогою тестів	62
Ларін О.О., Жарких Ю.С. Застосування продуктів Macromedia в організації електронного навчання	65

CONTENTS

Bichkov O.S. The reseach of stability of gibrid automata trivial phase orbit.	4
Garashchenko F.G., Hitko I.V. About non-differentiable optimization problems of impulse systems.	9
Grishchenko O.Y. The generalization of search DS-aloritm Schroedinger-like equations periodical decisions on quasilinear case.	14
Dolenko G.O., Husainov D.Y. The patial inverse optimization problem in discret systems.	17
Zubenko V.V. About temporal proceduries and algoritmes.	20
Ivohin E.V., Adzubey L.T., Volchkov S.O. About observation problem in fuzzy difference systems.	26
Kovarz I.V. About decision of thermal conductivity eguation with delay.	30
Klyushin D.A., Petunin Y.I. The statistical criterion for comparison of two probability.	35
Kozametov A.T. The linear-quadratic optimization problem for systems delay.	40
Kuzmich O.I. The stability estimations of gibrid systems with finite number of switching.	45
Shkilniak S.S. Finitary logics of quasi-ary predicates.	47
Utebaev D. The superficial Reley waves in elastic cored moment subspace.	55
Rudnik Y.V., Zharkikh Y.S. International standards of e'learning materials	60
Dragan Y.V., Zharkikh Y.S. Diagnostics of knowledge level by means of tests	62
Larin A.A., Zharkikh Y.S. Macromedia products implementation in e'learning	65

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТРИВІАЛЬНИХ ФАЗОВИХ ОРБІТ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

Досліджено стійкість гібридних автоматів. Інструментом дослідження є гібридні s - та u -функції. Доведено теореми про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість фазових орбіт гібридних автоматів.

The stability of hybrid automata use hybrid s - and u - functions are analyzed. The theorem about stability, asymptotically stability and non-stability of hybrid automata phase orbitare proven.

Великий інтерес для дослідження становлять системи, що складаються із скінченного числа елементів різної природи. Такі системи містять два типи елементів: ті, що описуються неперервними процесами та мають кінцеву тривалість, і ті, що описуються дискретними процесами. Для таких систем час реакції на події несуттєвий для аналізу системи. Такі системи прийнято називати неперервно-дискретними. Типовими прикладами неперервно-дискретних систем є математичні моделі руху в робототехніці, системи керування транспортним потоком, хімічними реакціями, температурою тощо. Через те, що динаміка неперервної компоненти буває досить складною, не можна вивчення подібних систем зводити лише до вивчення дискретної поведінки. Більше того, дискретна динаміка накладає свій відбиток на характер поведінки системи в неперервні моменти часу. Тому подібні системи було виділено в окремий клас.

Вивченню динаміки неперервно-дискретних систем присвячено роботи [1-3], дослідженню стійкості гібридних автоматів – [4-8]. У них автори використовують метод мультиплікативних функцій Ляпунова.

У даній роботі вводиться поняття s - та u - функцій, за допомогою яких досліджується стійкість гібридних систем та будується спеціальна поверхня, яка обмежує орбіту гібридного автомата. При цьому достатні умови стійкості й нестійкості є конструктивними й легко перевіряються.

Основні означення

Означення 1 [1]. Називатимемо системою із змінною структурою таку систему, в якій зв'язки між функціональними елементами міняються тим або іншим чином залежно від її стану.

Можна сказати, що для опису систем із змінною структурою необхідно задати скінченну кількість можливих локальних станів, умов переходів з одного локального стану в інший та систем диференціальних рівнянь для опису динаміки в кожному з локальних станів. Для формалізації таких моделей використовують гібридні автомати. У різних станах поведінка об'єкта моделюється різними траєкторіями, тому будемо називати розв'язок гібридного автомата орбітою.

Нехай відомо, що динаміка процесу описується різними математичними моделями в N різних станах. Уведемо множину $Q = \{1, \dots, N\}$ для нумерації цих станів. Будемо для моделювання в кожному локальному стані використовувати системи звичайних диференціальних рівнянь. Поведінку об'єкта (процесу) на кожному локальному стані будемо називати неперервною динамікою, а перехід із стану в стан – дискретною динамікою.

Позначимо через $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 0$, $x_i \in R$ дійсні фазові змінні, а через $F = \{f_i : Q \times R^n \rightarrow R^n, i = \overline{1, N}\}$ – множину неперервних вектор-функцій, що задовольняють умову Ліпшица. На початку функціонування необхідно задати початкові умови для кожної системи диференціальних рівнянь. Для ініціалізації цих значень уведемо множину $Init : Init \subset Q \times R^n$. Запис $(i, y) \in Init$ означає, що динаміка починається з i -го стану та описується i -ю системою диференціальних рівнянь. При цьому початкове значення фазової змінної дорівнює y .

Нехай система перебуває в i -му стані. Тоді для фазових змінних виконується умова належності до деякої множини, що описує цей стан. Поки виконується ця умова, динаміка буде описуватися i -ю системою диференціальних рівнянь. Для задання цієї умови введемо позначення $Inv : Inv \subset Q \times R^n$.

Для переходу із стану в стан необхідно задати відповідну умову. Нехай $Jump$ задає множинно-значну функцію таку, що $Jump : Q \times R^n \rightarrow P(Q \times R^n)$, де через P позначено множину всіх підмножин. Ця функція задає умову переходу із стану в стан та початкове значення фазової змінної в момент переходу в новий стан.

Означення 2 [8]. Гібридним автоматом назовемо кортеж $H = (Q, X, F, Init, Inv, Jump)$.

Нехай перехід станів i відбувається в моменти часу τ'_i . Надалі будемо використовувати скінченну або нескінченну послідовність інтервалів $\tau = \{I_i\}_{i=0}^N$ таку, що

- 1) $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$, $i < N$;
- 2) $\tau_i \leq \tau'_i = \tau_{i+1}$, $i \geq 0$;
- 3) якщо $N < \infty$, то $I_N = [\tau_N, \tau'_N]$; якщо $N = \infty$, то $I_N = [\tau_N, \tau'_N)$.

Тобто для гібридного автомата визначено послідовність інтервалів дійсної прямої, чії кінцеві точки перекриваються.

Для знаходження розв'язку гібридного автомата необхідно знайти множину неперервно диференційованих функцій, які є розв'язками систем диференціальних рівнянь для кожного окремого стану та задовольняють умову переходу зі стану в стан. Сукупність таких розв'язків будемо називати орбітою. Позначимо через T множину всіх можливих τ . Уведемо таке означення.

Означення 3 [8]. Фазовою орбітою гібридного автомата H назовемо множину $\chi = \{(i, x)\}$, де $\tau \in T$, i – номер локального стану $i : x : \tau \rightarrow R^n$ таке, що:

- 1) $(i_0, x(\tau_0)) \in \text{Init}$;
- 2) для всіх i таких, що $\tau_i < \tau'_i$, пара $(i, x(t)) \in \text{Inv}$ визначає неперервну динаміку на i -му локальному стані; пара $(i+1, x(\tau_{i+1})) \in \text{Jump}(i, x(\tau'_i))$ визначає дискретну динаміку, $x(\cdot)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь $\dot{x}(t) = f_i(x(t))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau'_i]$.

Означення 4 [6]. Неперервний стан $x = 0$ назовемо тривіальною фазовою орбітою гібридного автомата H , якщо існує непорожня множина $\bar{Q} \subset Q$ така, що для всіх $i \in \bar{Q}$ виконується:

- 1) з $(i', z') \in \text{Jump}(i, 0)$ випливає, що $z' = 0$ й $i' \in \bar{Q}$;
- 2) $f(i, 0) = 0$ для всіх $i \in \bar{Q}$.

Означення 5. Тривіальна фазова орбіта $x = 0$ гібридного автомата H називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\chi = (i, x)$, які задовольняють умову $|x_0| < \delta$, виконується $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \tau$. Через $|\cdot|$ позначено евклідову норму.

Означення 6. Локальний стан назовемо стійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку гібридного автомата, у ньому стійкий за Ляпуновим.

Надалі будемо розглядати автономні гібридні автомати. Для гібридних автоматів із стійкими локальними станами існують додатно-визначені функції Ляпунова $V_i(x)$, $i = \overline{1, N}$, похідні від яких згідно із системами, які відповідають цим станам, є функціями від'ємно-напіввизначеними.

Припустимо, що орбіта гібридного автомата починається з першого стану. Нехай позначення $x^k|_{i \rightarrow j}$ означає, що гібридний автомат переходить із стану i в стан j і значення x^k береться на множині, що задає умову переходу. Побудуємо таку послідовність $\{x^k\}$, $i = \overline{0, N}$:

$$\begin{aligned} x^0|_{N \rightarrow 1}, \quad c_0 = V_1(x^0), \quad x^1 = V_1^{-1}(c_0)|_{1 \rightarrow 2}, \quad c_1 = V_2(x^1), \quad x^2 = V_2^{-1}(c_1)|_{2 \rightarrow 3}, \dots, \\ c_{N-1} = V_N(x^{N-1}), \quad x^N = V_N^{-1}(c_{N-1})|_{N \rightarrow 1} \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Для дослідження стійкості тривіальної орбіти введемо означення гібридної s -функції.

Означення 7. Назвемо $V(i, x) = \{V_i(x)\}$, $i = \overline{1, N}$ гібридною s -функцією, якщо $V_i(x)$ додатно-визначені та для послідовності $\{x_i\}$, $i = \overline{0, N}$, визначеної в (1), виконується $|x^N| \leq |x^0|$.

Як відомо з [9], поверхня рівня звичайної функції Ляпунова $V(x) = c$ замкнута. Для гібридних s -функцій це не так. Послідовність (1) задає східчасту поверхню рівня для гібридної s -функції.

Означення 8. Похідною гібридної s -функції згідно із системою назовемо вираз

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(i, x) f_i(x(t)), \quad i = \overline{1, N} \right\}.$$

Уведемо такі позначення: $B_r = \{x \in R^n : |x| \leq r\}$, $S_r = \{x \in R^n : |x| = r\}$.

Теорема 1 [10]. Нехай гібридний автомат H із стійкими локальними станами має тривіальну фазову орбіту $x = 0$ та для нього $|Q| < \infty$, $\text{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\}$, для $i = \overline{1, N-1}$, $\text{Jump}(N, x) = (1, x)$. Також нехай задано окіл початку координат $D \subset X$. Якщо для H існує додатно-визначена гібридна s -функція $V(i, x) : Q \times D \rightarrow R$ така, що $\frac{\partial V}{\partial x}(i, x) f_i(x(t)) \leq 0$ для всіх $x \in D$ та $i = \overline{1, N}$, то $x = 0$ – стійка тривіальна фазова орбіта гібридного автомата H .

Доведення. Для простоти викладення покладемо, що $Q = \{1, 2\}$ й орбіта починається з першого стану. Позначимо $\Omega_r(i) = \{x \in R^n : V(i, x) \leq r\}$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Покажемо, що в умовах теореми можна знайти $\delta > 0$ таке, що всі орбіти (τ, i, x) , для яких виконується $x(\tau_0) \in B_\delta$, задовольняють умову $x(t) \in B_\varepsilon$ для всіх $t \in \tau$.

Виберемо $r \in (0, \varepsilon)$ таке, що $B_r \subseteq D$. Покладемо $a(i) = \min_{x \in S_r} V(i, x)$ для всіх $i \in Q$ і $b(i) \in (0, a(i))$. Тоді

$\Omega_{b(i)}(i) \subseteq B_r$. Далі нехай $p(i) > 0$ таке, що $B_{p(i)} \subseteq \Omega_{b(i)}(i)$. Покладемо $s = \min_{i \in Q} p(i)$, і нехай $x(\tau_0) \in B_s$. Якщо не відбудеться перехід в інший стан, то орбіта залишиться в $\Omega_{b(i)}(i) \subseteq B_r$ і, отже, у B_ε . Нехай гібридний автомат переходить у стан 2.

Покладемо $c(i) = \min_{x \in S_s} V(i, x)$ для всіх $i \in Q$. Виберемо $d(i) \in (0, c(i))$. Тоді $\Omega_{d(i)}(i) \subseteq B_s$. Далі виберемо $w(i)$ таке, що $B_{w(i)} \subseteq \Omega_{d(i)}(i)$ і покладемо $\delta = \min_{i \in Q} w(i)$. Нехай ми маємо орбіти (i, x) гібридного автомата H такі, що $|x(\tau_0)| < \delta$ і нехай гібридний автомат перебуває в стані 1. Тоді з умов теореми випливає, що $x(t) \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_s \subseteq B_\varepsilon$, $t \in [\tau_0, \tau_0']$.

У протилежному випадку маємо момент часу $\tau_1 = \tau_0'$, у якому відбувається перехід і $x(\tau_1) = x(\tau_0') \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_s \subseteq \Omega_{b(2)}(2)$. З умови теореми випливає, що $x(t) \in \Omega_{b(2)}(2) \subseteq B_r \subseteq B_\varepsilon$, $t \in [\tau_1, \tau_1']$.

Якщо переходів у новий стан немає, то теорему доведено. Інакше орбіта переходить у початковий стан 1. За умовою теореми для гібридного автомата існує додатно-визначена гібридна s -функція, тому маємо, що $|x(\tau_2)| \leq |x(\tau_0)|$. Отже, $x(t) \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_\varepsilon$. Продовжуючи за індукцією для довільного τ , одержуємо, що $|x(t)| < \varepsilon$ ($x(t) \in B_\varepsilon$), $t \in \tau$. Теорему доведено.

Основні результати. Розглянемо, які умови необхідно враховувати, щоб тривіальна орбіта гібридного автомата була асимптотично стійкою.

Означення 9. Локальний стан назовемо асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку гібридного автомата, у ньому асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Нехай гібридний автомат має асимптотично стійкі локальні стани. Як ми вже бачили, цього не достатньо для того, щоб тривіальна орбіта гібридного автомата була асимптотично стійкою. Одержимо достатні умови для асимптотичної стійкості.

Означення 10. Назвемо траєкторією фазової орбіти гібридного автомата рух точки у фазовому просторі для заданого локального стану.

Тобто говорячи "траєкторія", будемо вважати, що ми розглядаємо поведінку гібридного автомата у локальному стані.

Теорема 2. Нехай гібридний автомат H з асимптотично стійкими локальними станами має тривіальну орбіту $x = 0$ і для нього виконується $|Q| < \infty$, $\text{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\}$, для $i = 1, N-1$ та $\text{Jump}(N, x) = (1, x)$.

Нехай також задано окіл початку координат $D \subset X$. Якщо існує додатно-визначена гібридна s -функція $V(i, x) : Q \times D \rightarrow R$ така, що $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) < 0$ для всіх $x \in D$ і $i = 1, N$, то тривіальна фазова орбіта асимптотично стійка за Ляпуновим.

Доведення. Припустимо, що орбіта починається зі стану 1 і гібридний автомат має два стани, тобто $|Q| = 2$. З умов теореми випливає, що тривіальна орбіта стійка за Ляпуновим. Покажемо, що вона є асимптотично стійкою.

Через те, що виконується умова $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) < 0$, траєкторії будуть перетинати поверхню рівня гібридної s -функції в напрямку ззовні у середину. З нерівності $\frac{dV_i}{dt} < 0$ випливає, що функції $V_i(x(t))$ – монотонно спадні й мають границю $c \geq 0$, де $c = \min_{i \in Q} \min_{x \in D} V_i(x)$. Для доведення асимптотичної стійкості необхідно показати, що $c = 0$.

Припустимо, що це не так. Тоді в області $\Omega = \{x : c \leq V_i(x) \leq c_0\}$, де $c_0 = V_1(x(t_0))$, для функцій виконується $\dot{V}_i(x) < 0$ та існують $v_i > 0$ такі, що $\dot{V}_i(x) < -v_i$. Обчислимо такі інтеграли:

$$I = \int_{t_0}^{\tau_2} \dot{V}_1(x(s)) ds + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{V}_2(x(s)) ds + \int_{\tau_3}^t \dot{V}_1(x(s)) ds.$$

Нехай $-v = \max_i v_i$. Тоді $I \leq -v(\tau_2 - t_0) - v(\tau_3 - \tau_2) - v(t - \tau_3) = -v(t - t_0)$.

З іншого боку,

$$\begin{aligned} I &= V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) + V_1(x(t)) - V_1(x(\tau_3)) = \\ &= V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(\tau_3)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)). \end{aligned}$$

Так як $V_2(x(t))$ – функція, спадна в локальному стані 2, то $V_2(x(\tau_3)) \leq V_2(x(\tau_2))$ і, відповідно, $|x(\tau_3)| \leq |x(\tau_2)|$. Звідси випливає, що $V_1(x(\tau_3)) \leq V_1(x(\tau_2))$. Замінивши $V_1(x(\tau_3))$ на $V_1(x(\tau_2))$, ми лише зменшимо праву частину рівності. Отже, одержуємо, що

$$I \geq V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2))$$

$$\text{або} \quad V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) \leq I \leq -v(t - t_0).$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &\leq V_1(x(t_0)) - v(t - t_0) + V_2(x(\tau_2)) - V_2(x(\tau_3)) \leq \\ &\leq V_1(x(t_0)) - v(t - t_0) + 2L, \end{aligned}$$

де $L = V_2(x(t_0))$. Тоді існує T^* таке, що система перебуває в стані 1 і $V_1(T^*)$ буде приймати від'ємні значення. Це призводить до протиріччя з додатною визначеністю функції $V_1(x)$. Отже, тривіальна фазова орбіта гібридного автомата асимптотично стійка. Теорему доведено.

Перейдемо тепер до розгляду питання про нестійкість тривіальної фазової орбіти гібридного автомата.

Означення 10. Локальний стан назовемо нестійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, яка описує динаміку гібридного автомата, у ньому нестійкий за Ляпуновим.

Для гібридного автомата з нестійкими локальними станами може існувати така система переходів зі стану в стан, що тривіальна орбіта буде асимптотично стійкою за Ляпуновим. Нехай фазовий портрет гібридного автомата має такий вигляд (рис 1):

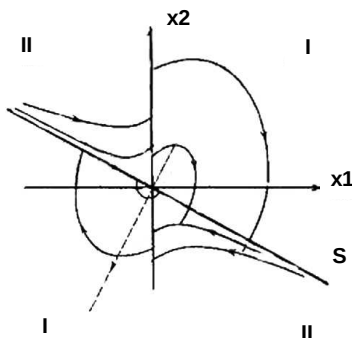


Рис 1. Гібридний автомат з нестійкими локальними станами

Ми бачимо, що гібридний автомат має нестійкі локальні стани. Однак, якщо перехід із станів буде здійснюватися по прямих S і x_2 , то тривіальна фазова орбіта буде стійкою за Ляпуновим. Одержимо умови, які забезпечують нестійкість тривіальних орбіт гібридних автоматів.

Означення 11. Назвемо $V(i, x) = \{V_i(x)\}$, $i = \overline{1, N}$ гібридною u -функцією, якщо $V_i(x)$ додатно-визначені й для послідовності $\{x^i\}$, $i = \overline{0, N}$, визначеної в (1), виконується $|x^N| \geq |x^0|$.

Будемо використовувати гібридну u -функцію для дослідження нестійкості тривіальної фазової орбіти гібридного автомата.

Теорема 3. Нехай гібридний автомат H з нестійкими локальними станами має тривіальну фазову орбіту $x = 0$ і для неї виконується $|Q| < \infty$, $\text{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\}$, для $i = \overline{1, N-1}$, $\text{Jump}(N, x) = (1, x)$. Нехай задано окіл початку координат $D \subset X$. Якщо для H існує гібридна u -функція $V(i, x): Q \times D \rightarrow R$ така, що $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) > 0$ для всіх $x \in D$ та $i = \overline{1, N}$, то тривіальна фазова орбіта нестійка за Ляпуновим.

Доведення. Нехай орбіта починається з першого стану і $|x(t_0)| < \delta$ й $|Q| = 2$. З того, що локальні стани нестійкі, випливає, що траєкторії $x(t)$ будуть перетинати поверхні рівня $V_i(x) = c_i$ із середини, отже, $|x(t)|$ буде зростати. Покажемо, що при виконанні умов теореми орбіта гібридного автомата, що починається з околу початку координат, буде необмежено зростати.

Нехай це не так, і орбіта не залишає сфери S_ε , а прямує до граничної поверхні $V_i(x) = C$, де C визначається з умови $\{x : V_i(x) = C\} \subseteq S_\varepsilon$. Звідси випливає, що для кожного t виконується

$$V_i(x(t)) < C. \quad (2)$$

З того, що для гібридної u -функції виконується умова теореми $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) > 0$, випливає, що в області $\Omega = \{x : c_0 \leq V_i(x) \leq C\}$, де $c_0 = V_1(x(t_0))$, існують $v_i > 0$ такі, що $\dot{V}_i(x) > v_i$. Виберемо $v = \min_i v_i$. Обчислимо інте-

$$\text{грали } I = \int_{t_0}^{\tau_2} \dot{V}_1(x(s)) ds + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{V}_2(x(s)) ds + \int_{\tau_3}^t \dot{V}_1(x(s)) ds.$$

Тоді $I \geq v(\tau_2 - t_0) + v(\tau_3 - \tau_2) + v(t - \tau_3) = v(t - t_0)$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} I &= V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) + V_1(x(t)) - V_1(x(\tau_3)) = \\ &= V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(\tau_3)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)). \end{aligned}$$

Через те, що $V_2(x(t))$ – функція, яка зростає в локальному стані 2, $V_2(x(\tau_3)) \geq V_2(x(\tau_2))$ і, відповідно, $|x(\tau_3)| \geq |x(\tau_2)|$. Звідси випливає, що $V_1(x(\tau_3)) \geq V_1(x(\tau_2))$. Замінивши $V_1(x(\tau_3))$ на $V_1(x(\tau_2))$, ми лише збільшимо праву частину рівності. Отже, одержуємо, що

$$I \leq V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2))$$

або

$$V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) \geq I \geq v(t - t_0).$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &\geq V_1(x(t_0)) + v(t - t_0) + V_2(x(\tau_2)) - V_2(x(\tau_3)) \geq \\ &\geq V_1(x(t_0)) + v(t - t_0) - 2L, \end{aligned}$$

де $L = V_2(x(t_0))$. З цього випливає, що існує T^* таке, що система буде перебувати в стані 1 і $V_1(x(T)) > C$. Отже, одержали протиріччя з нерівністю (2). Остаточно робимо висновок, що тривіальна фазова орбіта гібридного автомата нестійка.

Зауваження. Наведені теореми легко узагальнити на випадок $|Q| > 2$.

Апробація. Розглянемо приклад. Нехай динаміка гібридного автомата описується чотирма системами лінійних диференціальних рівнянь.

$$\dot{x}_i(t) = A_i x(t), \text{ де } A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 100 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -20 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ці системи мають такі фазові портрети:

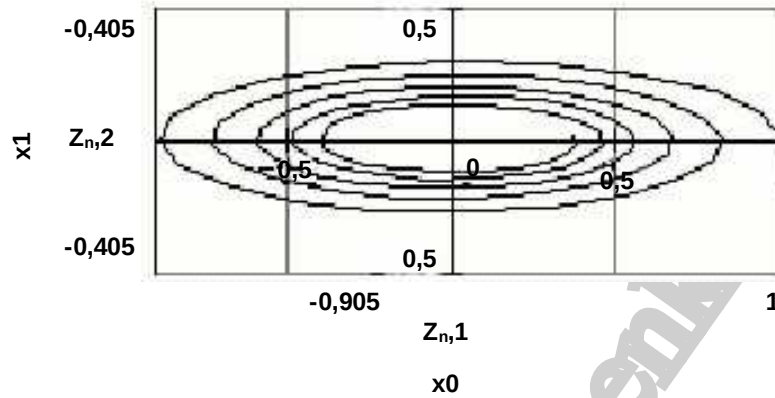


Рис. 2. Фазовий портрет системи з матрицею A_1

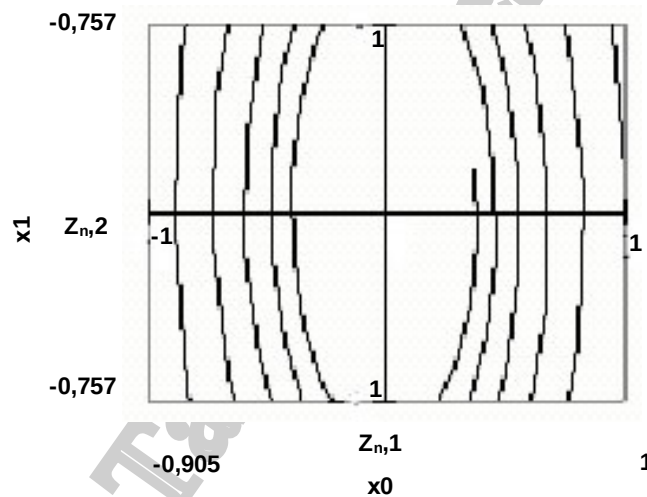


Рис. 3. Фазовий портрет системи з матрицею A_2

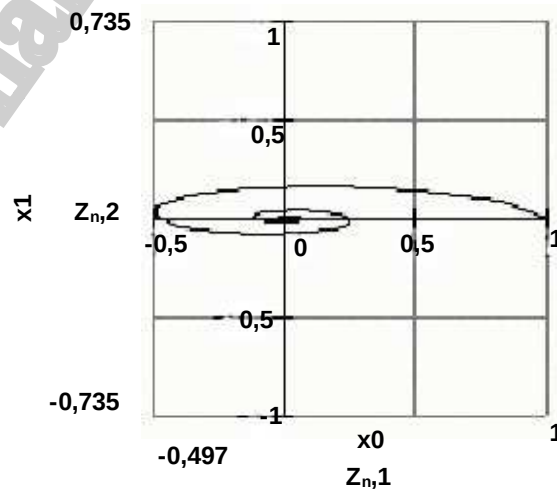
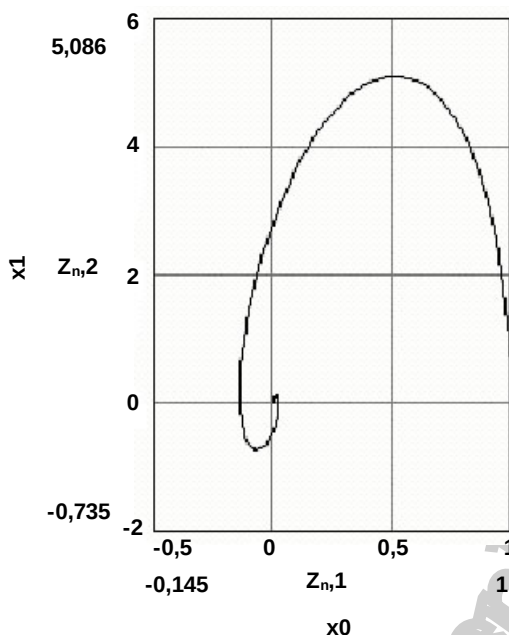


Рис. 4. Фазовий портрет системи з матрицею A_3

Рис. 5. Фазовий портрет системи з матрицею A_4

Побудуємо окремо для кожної системи квадратичну функцію Ляпунова $V_i(x) = x^T H_i x$. Отримаємо

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0.275 & -0.022 \\ -0.022 & 2.748 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 2.748 & 0.022 \\ 0.022 & 0.275 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0.035 & -9.2 \times 10^{-3} \\ -9.2 \times 10^{-3} & 0.684 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 4.219 & 0.037 \\ 0.037 & 0.046 \end{pmatrix}.$$

Нехай при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ динаміка гібридного автомата описується системою 1; при $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ – системою 2; при $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ – системою 3; при $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ – системою 4. Перехід здійснюється на координатних осях. Усі локальні стани асимптотично стійкі.

Почнемо рух з точки $x^0 = (1, 0)$. Тоді $|x^0| = 1$. Для визначеної послідовності переходів маємо, що $|x^4| = 2.37 \times 10^{-3}$. Тобто $|x^4| < |x^0|$. Відповідно до теореми 1 отримуємо, що тривіальна орбіта стійка за Ляпуновим.

1. Теория систем с переменной структурой // Под ред. С.В.Емельянова. – М., 1972; 2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М., 1978; 3. Программное обеспечение моделирования непрерывно-дискретных систем // Под ред. В.М.Глушкова. – М., 1975; 4. Branicky M. Stability of switched and hybrid systems. Proc. of the 33rd Conf. Decision and Control. – Lake Buena Vista, FL, Dec. – 1994. P. 3498-3503; 5. Pettersson S., Lennartson B. Stability and robustness for hybrid systems. Proc. of the 35th CDC, – 1996. – P. 1202-1207; 6. Filippov F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Academic Publishers. – 1988; 7. Michel H. Ye A., Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control. – № 43(4). – April 1998. – P. 461-474; 8. Manna Z., Pnueli A. Verifying hybrid systems. Hybrid systems, LNCS736. – Springer-Verlag, – 1993; 9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М., 1971; 10. Бичков О. Застосування другого методу Ляпунова для дослідження стійкості гібридних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – №1.

Надійшла до редколегії 28.10.2004

УДК 517.977.5

Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.,
І.В. Хітько, асп.

ПРО НЕДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглянуто задачу структурно-параметричної оптимізації імпульсної системи з недиференційованим критерієм якості типу максимуму за початковими умовами.

Structural-parametric optimization problems of impulse system with non-differentiable criterion are considered.

Необхідні умови оптимальності для реальних задач оптимального керування отримати, як правило, не складно. Найчастіше такі умови не дають оптимальних розв'язків поставлених задач, але можуть стати основою для побудови конструктивних алгоритмів ітераційного характеру визначення оптимальних режимів функціонування об'єктів керування.

Алгоритми керування з використанням градієнтних методів у класі кусково-неперервних функцій для багатьох прикладних задач важко застосувати через погану збіжність ітераційних процедур. Тому застосовують методику параметризації керування, і таким чином переходять до скінченновимірних оптимізаційних задач. Такий підхід є конструктивним і дає можливість визначити режими, які оптимально фізично реалізуються.

На практиці часто необхідно керувати об'єктами, які зазнають впливу миттєвих збурень. Динаміка таких об'єктів описується системами диференціальних рівнянь з імпульсною дією. У статті розглядається задача параметричної оптимізації функції максимуму на розв'язках імпульсної системи диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. Нехай рух об'єкта описується системою диференціальних рівнянь (1-3):

$$\frac{dx}{dt} = f^{(k)}(x(t), t, \alpha), \quad t \in (t_{k-1}; t_k), \quad k = \overline{1, N} \quad (1)$$

з імпульсною дією

$$x(t_k + 0) = g^{(k)}(x(t_k - 0), t_k, \alpha), \quad k = \overline{1, N-1} \quad (2)$$

та початковими умовами

$$x(t_0) = x(t_0 + 0) = x^{(0)}(\alpha) \in G_0 \quad (3)$$

Тут x – n -вимірний вектор стану об'єкта; α – вектор оптимізаційних параметрів розмірності r , $f^{(k)}(x, t, \alpha)$ – вектор-функції розмірності n , які є неперервними разом із своїми частинними похідними за елементами векторів x, α та t ; $g^{(k)}(x, t_k, \alpha)$ – неперервні вектор-функції розмірності n ; t_k – точки перемикання, в яких траєкторії системи (1) зазнають імпульсної дії, $t_{k-1} < t_k$, $k = \overline{1, N}$, $t_N = T$.

Вважаємо, що точки перемикання і початковий момент t_0 залежать від вектора параметрів α :

$$t_k = t_k(\alpha), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати критерій якості

$$I(\alpha) = \max_{x_0 \in G_0} \Phi(x(T, \alpha, x^{(0)})) \quad (4)$$

на розв'язках системи (1-3).

Алгоритм мінімізації функціонала (4) на розв'язках системи (1-3). Для розв'язання поставленої задачі знайдемо похідну від функції (4) у напрямку вектора q , $\|q\| = 1$ у деякому режимі $\alpha = \bar{\alpha}$ [2]:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial q} = \max_{x_0 \in G_0} \left[\text{grad}_x^T \Phi(x(T, \bar{\alpha}, x^{(0)})) \frac{\partial x(T, \bar{\alpha})}{\partial \alpha} \cdot q \right]. \quad (5)$$

Тут

$$\bar{G}_0 = \left\{ z \in G_0 : \Phi(x(T, \bar{\alpha}, z)) = \max_{x_0 \in G_0} \Phi(x(T, \bar{\alpha}, x^{(0)})) \right\}. \quad (6)$$

Діючи аналогічно методиці, запропонованій у [3,5], уведемо вектор-функції $y^{(j)}(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_j}$. Вони задовольняють лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy^{(j)}(t, \alpha)}{dt} = \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial x} y^{(j)}(t, \alpha) + \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \quad t \in (t_{k-1}; t_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, r} \quad (7)$$

з початковими умовами

$$y^{(j)}(t_0, \alpha) = \frac{\partial x^{(0)}(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{\alpha}), t_0(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (8)$$

Системи рівнянь (7) отримуємо простим диференціюванням лівої та правої частин системи рівнянь (1) для будь-яких $t \in (t_{k-1}; t_k)$, $k = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, r}$.

Для того, щоб показати справедливість формули (8), подамо розв'язок системи (1-3) на першому інтервалі $[t_0, t_1)$ в інтегральній формі:

$$x(t, \alpha) = x^{(0)}(\alpha) + \int_{t_0(\alpha)}^t f^{(1)}(x(\tau, \alpha), \tau, \alpha) d\tau. \quad (9)$$

Продиференціюємо ліву й праву частини співвідношення (9) за параметром α_j :

$$\begin{aligned} y^{(j)}(t, \alpha) &= \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial x^{(0)}(\alpha)}{\partial \alpha_j} + \int_{t_0(\alpha)}^t \left[\frac{\partial f^{(1)}(x(\tau, \alpha), \tau, \alpha)}{\partial x} y^{(j)}(\tau, \alpha) + \frac{\partial f^{(1)}(x(\tau, \alpha), \tau, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right] d\tau - \\ &\quad - f^{(1)}(x^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha), \alpha) \frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha_j}. \end{aligned} \quad (10)$$

Узявши в (10) $t = t_0(\alpha)$ при $\alpha = \bar{\alpha}$, переконуємось у справедливості формули (8).

Визначимо величини стрибків для вектор-функцій $y^{(j)}(t, \alpha)$ у точках перемикання. Для цього продиференціюємо розв'язки $x(t_k + 0) = x(t_k + 0, \alpha)$ за α_j :

$$\frac{dx(t_k+0)}{d\alpha_j} = y^{(j)}(t_k+0, \alpha) + f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \alpha) \frac{\partial t_k}{\partial \alpha_j}.$$

З отриманого співвідношення знаходимо

$$y^{(j)}(t_k+0, \alpha) = \frac{dx(t_k+0)}{d\alpha_j} - f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \alpha) \frac{\partial t_k}{\partial \alpha_j}. \quad (11)$$

Продиференціюємо (2) за α_j у точці t_k+0 :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_k+0)}{d\alpha_j} &= \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial x} \frac{dx(t_k-0)}{d\alpha_j} + \\ &+ \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial t} \frac{\partial t_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial \alpha_j} \end{aligned} \quad (12)$$

За аналогією з вищеописаним має місце формула

$$\frac{dx(t_k-0)}{d\alpha_j} = y^{(j)}(t_k-0, \alpha) + f^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha) \frac{\partial t_k}{\partial \alpha_j}. \quad (13)$$

Ураховуючи співвідношення (12), (13), згідно з формулою (11) запишемо стрибки для вектор-функцій $y^{(j)}(t, \alpha)$ у точках t_k :

$$\begin{aligned} y^{(j)}(t_k+0, \alpha) &= \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial x} y^{(j)}(t_k-0, \alpha) + \\ &+ \left[\frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial x} f^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha) - \right. \\ &\left. - f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \alpha) + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial t} \right] \frac{\partial t_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \alpha)}{\partial \alpha_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер у нас повністю визначені задачі Коші (7), (8) зі стрибками в точках перемикання (14) у деякому режимі $\alpha = \bar{\alpha}$. Уведемо до розгляду вектор спряжених змінних $\psi(t)$ розмірністю n на інтервалах неперервності

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = - \left[\frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial x} \right]^T \psi(t), \quad t \in (t_{k-1}; t_k), \quad k = \overline{1, N} \quad (15)$$

з умовами в момент $t = T$

$$\psi(T) = -grad_x \Phi(x(T, \bar{\alpha}), x^{(0)}). \quad (16)$$

Тоді похідна в напрямку q від критерію якості (4) за допомогою спряжених змінних запишеться таким чином:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial q} = \max_{x_0 \in G_0} \left\{ - \sum_{j=1}^n \psi^T(T) y^{(j)}(T, \bar{\alpha}) q_j \right\}. \quad (17)$$

Для того, щоб показати це, розглянемо похідну від скалярного добутку $\psi^T(t) y^{(j)}(t, \bar{\alpha})$ на інтервалі неперервності (t_{k-1}, t_k) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\psi^T(t) y^{(j)}(t, \bar{\alpha})] &= \frac{d\psi^T(t)}{dt} y^{(j)}(t, \bar{\alpha}) + \\ &+ \psi^T(t) \frac{dy^{(j)}(t, \bar{\alpha})}{dt} = -\psi^T(t) \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial x} y^{(j)}(t, \bar{\alpha}) + \\ &+ \psi^T(t) \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial x} y^{(j)}(t, \bar{\alpha}) + \psi^T(t) \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \\ &= \psi^T(t) \frac{\partial f^{(k)}(x(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial H(x, \psi, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \end{aligned}$$

де $H(x, \psi, t, \alpha) = \psi^T(t) f^{(k)}(x, t, \alpha)$, $t \in (t_{k-1}, t_k)$ – функція Гамільтона – Понтрягіна [6].

З останнього співвідношення шляхом інтегрування отримаємо

$$\psi^T(t_k-0) y^{(j)}(t_k-0, \bar{\alpha}) - \psi^T(t_{k-1}+0) y^{(j)}(t_{k-1}+0, \bar{\alpha}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(x, \psi, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt. \quad (18)$$

Підсумувавши за k ліві та праві частини (18) та згрупувавши відповідним чином доданки, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi^T(T)y^{(j)}(T, \bar{\alpha}) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\psi^T(t_k+0)y^{(j)}(t_k+0, \bar{\alpha}) - \psi^T(t_k-0)y^{(j)}(t_k-0, \bar{\alpha}) \right] + \\ \psi^T(t_0)y^{(j)}(t_0, \bar{\alpha}) + \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x, \psi, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt \end{aligned} \quad (19)$$

Зобразимо один з доданків суми, яка входить у праву частину (19), з урахуванням (14):

$$\begin{aligned} \psi^T(t_k+0)y^{(j)}(t_k+0, \bar{\alpha}) - \psi^T(t_k-0)y^{(j)}(t_k-0, \bar{\alpha}) = \\ = \left[\psi^T(t_k+0) \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial x} - \psi^T(t_k-0) \right] \times \\ \times y^{(j)}(t_k-0, \bar{\alpha}) + \\ + \psi^T(t_k+0) \left\{ \left[\frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial x} f^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha}) - f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \bar{\alpha}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial t} \right] \frac{\partial t_k(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Якщо ми виберемо стрибки в точках перемикання для спряженої системи у вигляді

$$\psi(t_k-0) = \left(\frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial x} \right)^T \psi(t_k+0), \quad (21)$$

то вираз (19), з урахуванням (8), (20) та (21), можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} \psi^T(T)y^{(j)}(T, \bar{\alpha}) = \sum_{k=1}^{N-1} \psi^T(t_k+0) \left\{ \left[\frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial x} f^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha}) - \right. \right. \\ \left. \left. - f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \bar{\alpha}) + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial t} \right] \times \frac{\partial t_k(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\} + \\ + \psi^T(t_0) \left[\frac{\partial x^{(0)}(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{\alpha}), t_0(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right] + \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x, \psi, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Ураховуючи (17) та (22), отримаємо остаточну формулу для обчислення похідної в напрямку q у загальному випадку

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\alpha)}{\partial q} = \max_{x_0 \in G_0} \left\{ - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{N-1} \psi^T(t_k+0) \left\{ \left[\frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial x} f^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha}) - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. - f^{(k+1)}(x(t_k+0), t_k, \bar{\alpha}) + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial t} \right] \frac{\partial t_k(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial g^{(k)}(x(t_k-0), t_k, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\} + \right. \\ \left. + \psi^T(t_0) \left[\frac{\partial x^{(0)}(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{\alpha}), t_0(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right] + \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t, \bar{\alpha}), \psi(t, t, \bar{\alpha}))}{\partial \alpha_j} dt \right] \cdot q_j \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (23) є досить загальною і нею можна користуватись при розв'язанні багатьох прикладних задач. Зокрема, якщо α – вектор точок перемикання, то похідні в напрямку q обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(a)}{\partial q} = \max_{x_0 \in G_0} \left\{ - \sum_{j=1}^n \psi^T(t_j+0) \left(\frac{\partial g^{(j)}(x(t_j-0), t_j)}{\partial x} f^{(j)}(x(t_j-0), t_j) - \right. \right. \\ \left. \left. - f^{(j+1)}(x(t_j+0), t_j) + \frac{\partial g^{(j)}(x(t_j-0), t_j)}{\partial t_j} \right) q_j \right\}. \end{aligned}$$

Отже, виходячи із сказаного вище, можна запропонувати таку ітераційну процедуру для відшукування мінімуму функцій максимуму: $\alpha^{(n+1)} = P\{\alpha^{(n)} - \rho q\}$, де ρ – крок методу, $P\{\cdot\}$ – операція проектування на допустиму множину параметрів. Напрямок найшвидшого спуску q шукаємо згідно з (23), де множина $\bar{G}_0$ обчислюється за формулою (6). Як-

що множина $\bar{G}_0$ складається з однієї точки, то за напрямом найшвидшого спуску беремо напрямом, обчислений для цієї точки. Якщо ж множина $\bar{G}_0$ містить більше однієї точки, то для всіх точок з множини $\bar{G}_0$ знаходимо напрямом спуску і будемо лінійну оболонку на цих векторах. За напрямом найшвидшого спуску беремо точку лінійної оболонки, найменш віддалену від початку координат. Обчислення завершуються, наприклад, коли $|I(\alpha^{(n)}) - I(\alpha^{(n-1)})| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – деяке наперед задане число.

Визначення оптимальних параметрів структури лінійного прискорювача. Розглянемо задачу визначення оптимальних параметрів структури лінійного прискорювача. Рух заряджених частинок без урахування кулонівських сил при кусково-постійній амплітуді симетричного прискорюючого поля описується системою

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = E^{(k)} \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad \frac{dr_1}{d\xi} = r_2, \quad \frac{dr_2}{d\xi} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} E^{(k)} r_2 \cos \varphi, \quad t_{k-1} < \xi < t_k, \quad k = \overline{1, N}$$

з імпульсною дією

$$r_2(t_k + 0) = r_2(t_k - 0) - \frac{\gamma(t_k)}{\gamma^2(t_k) - 1} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} r_1(t_k) \cos \varphi(t_k), \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Тут ξ – безрозмірна незалежна змінна, $E^{(k)}$ визначає амплітуду напруженості прискорюючого поля на k -му інтервалі, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{V^T V}{c}$, V – швидкість частинки, c – швидкість світла, φ – фаза прискорюючої хвилі, що діє на

частинку, r_1, r_2 – радіальні координати частинки.

Нехай початкові значення $\gamma(0), \varphi(0), r_1(0), r_2(0) \in M_0$. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати максимальне відхилення частинок за енергією від заданої γ_T та розкид за швидкостями й координатами в кінці прискорювача. Тобто треба мінімізувати критерій

$$I(\alpha) = \max_{M_0} \left\{ (\gamma(T) - \gamma_T)^2 + r_1^2(T) + r_2^2(T) \right\},$$

де α – вектор точок перемикавання.

У наших позначеннях маємо

$$x = \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad f^{(k)}(x, \xi) = \begin{pmatrix} E^{(k)} \cos \varphi \\ \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \\ r_2 \\ -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} E^{(k)} r_2 \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$g^{(k)}(x(t_k - 0), t_k) = \begin{pmatrix} \gamma(t_k - 0) \\ \varphi(t_k - 0) \\ r_1(t_k - 0) \\ r_2(t_k - 0) - \frac{\gamma(t_k - 0)}{\gamma^2(t_k - 0) - 1} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} r_1(t_k - 0) \cos \varphi(t_k - 0) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(x(T, x^{(0)})) = (\gamma(T) - \gamma_T)^2 + r_1^2(T) + r_2^2(T).$$

Спряжена система матиме вигляд

$$\frac{d\psi_1}{dz} = \frac{2\pi}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} \psi_2 - \frac{\gamma^2 + 1}{(\gamma^2 - 1)^2} E^{(k)} r_2 \cos \varphi \psi_4, \quad \frac{d\psi_2}{dz} = E^{(k)} \sin \varphi \psi_1 - \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} E^{(k)} r_2 \sin \varphi \psi_4,$$

$$\frac{d\psi_3}{dz} = 0, \quad \frac{d\psi_4}{dz} = -\psi_3 + \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} E^{(k)} \cos \varphi \psi_4$$

з умовами стрибків

$$\psi_1(t_k - 0) = \psi_1(t_k + 0) + \frac{\gamma^2(t_k) + 1}{(\gamma^2(t_k) - 1)^2} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} r_1(t_k) \cos \varphi(t_k) \psi_4(z_k + 0),$$

$$\psi_2(t_k - 0) = \psi_2(t_k + 0) + \frac{\gamma(t_k)}{\gamma^2(t_k) - 1} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} r_1(t_k) \sin \varphi(t_k) \psi_4(z_k + 0),$$

$$\psi_3(t_k - 0) = \psi_3(t_k + 0) - \frac{\gamma(t_k)}{\gamma^2(t_k) - 1} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} \cos \varphi(t_k) \psi_4(z_k + 0), \quad \psi_4(t_k - 0) = \psi_4(t_k + 0)$$

та умовами на кінці проміжку

$$\psi_1(T) = -2(\gamma^2(T) - \gamma_0), \quad \psi_2(T) = 0, \quad \psi_3 = -2r_1(T), \quad \psi_4 = -2r_2(T).$$

Похідна від критерію якості в напрямку q набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial q} = & \max_{M_0} \left\{ \sum_{k=1}^N \left[-\psi_1(t_k + 0) (E^{(k)} - E^{(k+1)}) \cos \varphi(t_k) - \psi_4(t_k + 0) \frac{\gamma(t_k)}{\gamma^2(t_k) - 1} (E^{(k)} r_2(t_k - 0) - E^{(k+1)} r_2(t_k + 0)) \times \right. \right. \\ & \times \cos \varphi(t_k) + \frac{\gamma(t_k)}{(\gamma^2(t_k) - 1)^2} \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{2} E^{(k)} r_2^2(t_k - 0) \cos \varphi(t_k) \times \\ & \left. \left. \times \left(\psi_1(t_k + 0) \frac{\gamma^2(t_k) + 1}{\gamma^2(t_k) - 1} r_1(t_k) \cos \varphi(t_k) + \psi_2(t_k + 0) \gamma(t_k) r_1(t_k) \sin \varphi(t_k) - \psi_3(t_k + 0) \gamma(t_k) \cos \varphi(t_k) \right) \right] q_k \right\}. \end{aligned}$$

Чисельний розрахунок поставленої задачі здійснювався при таких параметрах [3]: довжина каналу транспортування в безрозмірних одиницях $T = 3.54$ (7.02 м), $E^{(k)} = \begin{cases} 0.03, & k = 2i + 1, \\ 0, & k = 2i, \end{cases}$ відповідала амплітуді напруженості прискорюючого поля біля 140 кВ/см на інтервалах прискорення при довжині хвилі $\lambda = 2$ м, середнє значення енергії було $\gamma_T = 1.0222$ ($\approx 21 \text{ MeV}$), початкова енергія — $\gamma_0 = 1.033$ ($\approx 31.5 \text{ MeV}$), інтервал початкових фаз — $\varphi_0 \in [1.15; 3.0]$, інтервали початкових радіальних координат — $|r_1| \leq 0.01$ м, $|r_2| \leq 0.1$ рад., кількість точок перемикавання — $N = 25$. Початкові значення точок перемикавання були рівновіддалені.

У результаті обчислень отримали оптимальний набір точок перемикавання (табл.).

Таблиця

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.1416	0.2832	0.4248	0.5664	0.708	0.8496	1.1328	1.1352	1.416
1	1.4184	1.6992	1.7016	1.9824	1.9848	2.2656	2.268	2.5488	2.5512	2.832
2	2.8344	3.1152	3.1176	3.3984	3.3998	3.54				

Слід відмітити, що при розв'язуванні даної задачі спостерігалася висока швидкість збіжності алгоритму.

Висновки. Розглянуто задачу параметричної оптимізації систем з імпульсною дією для критерію якості, який задано функцією максимуму за початковими умовами. Виведено формули для обчислення похідних за напрямком для даного виду функціоналів якості та описано конструктивний алгоритм знаходження оптимального набору параметрів. Запропоновано алгоритм для розв'язування задачі визначення оптимальних параметрів структури лінійного прискорювача. Розглянуто рух заряджених частинок без урахування кулонівських сил при кусково-постійній амплітуді симетричного прискорюючого поля.

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К., 1987; 2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. — М., 1981; 3. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — К., 1985; 4. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пичур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. — К., 2000.; 5. Гаращенко Ф.Г. Недифференцируемые задачи структурно-параметрической оптимизации и проектирование ускоряющих и фокусирующих систем // Автоматика. — 1986. — №1. — С. 50-53; 6. Математическая теория оптимальных процессов // Под ред. Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. — М., 1976.

Надійшла до редколегії 28.10.2004

УДК 519.633

О.Ю. Грищенко, д-р фіз-мат. наук, проф.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ДС-АЛГОРИТМУ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА НА КВАЗІЛІНІЙНИЙ ВИПАДОК

Побудовано узагальнення економічного двокрокового симетризованого скінченно-різницевого алгоритму (ДС-алгоритму) другого порядку точності, що застосовується до початково-крайових задач для рівнянь типу Шредінгера з квазілінійним оператором. Установлено умови стійкості скінченно-різницевої схеми для лінійних рівнянь та порядок апроксимації. Наведено варіанти алгоритму побудови розв'язку квазілінійних рівнянь.

Generalization of the efficient two-step symmetrized finite-difference algorithm (DS-algorithm) of second order of accuracy is constructed as application to initial boundary problem for Schroedinger-like equations with quasilinear operator. Conditions of stability and approximation order of finite-difference scheme for linear equation are established. Variants of the algorithm for finding solution of quasilinear equations are presented.

1. Побудова та дослідження нових ефективних різницевих схем початково-крайових задач для диференціальних рівнянь з комплекснозначними коефіцієнтами. Ця проблема є актуальною для сучасної математики [1]. Застосування явних двошарових різницевих схем до побудови чисельного розв'язку початково-крайових задач для рівнянь виду

$$-I\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = Lu - c u ,$$

де I – уявна одиниця ($I^2 = -1$), Lu – еліптичний диференціальний оператор другого порядку, c – задана функція, призводить до абсолютно нестійких алгоритмів [2,3], а безумовно стійкі неявні схеми вимагають на кожному часовому кроці розв'язання систем алгебричних рівнянь високого порядку. Тришарові схеми типу Річардсона для рівнянь виду (1) є стійкими при достатньо жорсткій умові [4].

Виходячи з ідеї, запропонованої в [5–7], у даній роботі побудовано й обґрунтовано ефективні двокрокові різницеві алгоритми (ДС-алгоритми). Будучи безумовно стійкими для лінійних рівнянь, ці алгоритми дозволяють знайти розв'язки лінійних сіткових рівнянь типу (1) без розв'язання системи різницевої рівнянь, а у випадку квазілінійних рівнянь – значно спростити обчислення.

2. Постановка скінченно-різницевої задачі. У циліндричній області $Q \equiv \{(0 \leq t \leq T) \times \Omega\}$, де $\Omega = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \pi\}$, знайдемо періодичний за просторовими змінними розв'язок крайової задачі для рівняння

$$-I \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad (1)$$

при заданих початкових умовах $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

Для побудови чисельного розв'язку область Q покриваємо рівномірною сітковою областю $\Omega_{ht} = \{(x_i, y_j, z_k, t_n) \mid x_i = ih_1, y_j = jh_2, z_k = kh_3, t_n = n\tau; \tau > 0; i = \overline{1, M_1}; j = \overline{1, M_2}; k = \overline{1, M_3}; \tau > 0; h_l = \pi / M_l; l = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, \dots\}$ та вводимо на ній сіткові функції $u_{ijk}^n = u(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Область Ω_{ht} розщеплюємо на дві підобласті $\Omega_{ht}^{(1,n)}$ і $\Omega_{ht}^{(2,n)}$. До першої віднесемо точки, в яких сума індексів $i + j + l + n$ непарна, а до другої – в яких вона парна. Для рівняння (1) запишемо двокроковий алгоритм:

$$\text{у точках } \Omega_{ht}^{(1,2n+1)} - u_{i,j,k}^{2n+1} = u_{i,j,k}^{2n} + \tau ILu_{ijk}^{2n}, \quad (2)$$

$$\text{у точках } \Omega_{ht}^{(2,2n+1)} - u_{i,j,k}^{2n+1} = u_{i,j,k}^{2n} + \tau I\sigma Lu_{ijk}^{2n} + \tau I(1-\sigma)Lu_{ijk}^{2n+1}, \quad (3)$$

$$\text{у вузлах } \Omega_{ht}^{(1,2n+2)} - u_{i,j,k}^{2n+2} = u_{i,j,k}^{2n+1} + \tau ILu_{ijk}^{2n+1}, \quad (4)$$

$$\text{у вузлах } \Omega_{ht}^{(2,2n+2)} - u_{i,j,k}^{2n+2} = u_{i,j,k}^{2n+1} + \tau I\sigma Lu_{ijk}^{2n+1} + \tau I(1-\sigma)Lu_{ijk}^{2n+2}. \quad (5)$$

Тут Lu_{ijk}^{2n} – скінченно-різницева оператор, який апроксимує праву частину рівняння (1) на триточковому шаблоні вздовж кожної координати, $\sigma = \sigma_1 + I\sigma_2$ – комплексний параметр, який підлягає визначенню з умови стійкості й апроксимації.

У внутрішніх вузлових точках сіткової області функцію u_{ijk}^n визначимо як у [6,7] за такою схемою. На непарних часових кроках розв'язок спочатку знаходимо в усіх точках області $\Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$ за явною схемою, а потім, у решті просторових точок цього часового шару, використовуючи знайдені вже значення, з неявної схеми визначаємо шукані значення явно. Одержані результати приймаємо як допоміжні. На наступному часовому кроці процес повторюється. За розв'язок задачі приймаємо значення функції $u_{i,j,k}^{2n+2}$.

3. Апроксимація початково-крайової задачі та умови стійкості лінеаризованого ДС-алгоритму. Аналогічно тому, як це зроблено в [6], легко переконатися, що наведений вище алгоритм апроксимує диференціальну задачу з похибкою $O(\tau^2 + h^2)$ при $\text{Re } \sigma = 0$ і $O(\tau + h^2)$ у всіх інших випадках.

У частинному випадку, при $\text{Re } \sigma = \sigma_1 = 0$ та $\text{Im } \sigma = \sigma_2 = h^2 / (12\tau\alpha^2)$ похибка апроксимації дорівнює $O(\tau^2 + h^4)$.

Для лінеаризованого диференціального еліптичного оператора L задачі (1) має місце твердження [6].

Теорема. Якщо функція початкового розподілу $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є, для сіткової функції $u_{i,j,k}^0$ має місце розвинення $u_{i,j,k}^0 = \varphi(ih_1, jh_2, kh_3) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} B_{m_1, m_2, m_3} e^{I(ih_1 m_1 + jh_2 m_2 + kh_3 m_3)}$, а параметри τ та h_s ($s=1, 2, 3$) сталі або змінюються не частіше ніж через парне число кроків, то при $\sigma = 0$ ДС-алгоритм (2)–(5) безумовно стійкий за початковими умовами, а при $\sigma > 0$ умовою його стійкості є нерівність $\tau \leq \left(2\alpha\sigma \sum_{s=1}^3 h_s^{-2} \right)^{-1}$.

4. Квазілінійні рівняння. При розв'язуванні крайових задач для рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^{(s)}} \left(a^{(s)}(u) \frac{\partial u}{\partial x^{(s)}} \right)$$

(тут $a^{(s)}(u) = Ik^{(s)}(u)$, а $k^{(s)}(u)$ – дійсна функція) використаємо наведені вище алгоритми, де у формулах (2)–(5) оператори $\Lambda_s^\beta u_{ijk}^{2n}$ ($s = 1, 2, 3$) замінюємо, відповідно, на такі:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(1)}(u_{ijk}^\beta) u_{i+1jk}^{2n} - \left(w^{(1)}(u_{ijk}^\beta) + w^{(1)}(u_{i-1jk}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(1)}(u_{i-1jk}^\beta) u_{i-1jk}^{2n} \right] / h_1^{-2}; \\ \Lambda_2^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(2)}(u_{ijk}^\beta) u_{ij+1k}^{2n} - \left(w^{(2)}(u_{ijk}^\beta) + w^{(2)}(u_{ij-1k}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(2)}(u_{ij-1k}^\beta) u_{ij-1k}^{2n} \right] / h_2^{-2}; \\ \Lambda_3^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(3)}(u_{ijk}^\beta) u_{ijk+1}^{2n} - \left(w^{(3)}(u_{ijk}^\beta) + w^{(3)}(u_{ijk-1}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(3)}(u_{ijk-1}^\beta) u_{ijk-1}^{2n} \right] / h_3^{-2},\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}\Lambda_1^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(1)}(u_{i+1jk}^\beta) u_{i+1jk}^{2n} - \left(w^{(1)}(u_{i+1jk}^\beta) + w^{(1)}(u_{ijk}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(1)}(u_{ijk}^\beta) u_{i-1jk}^{2n} \right] / h_1^{-2}; \\ \Lambda_2^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(2)}(u_{ij+1k}^\beta) u_{ij+1k}^{2n} - \left(w^{(2)}(u_{ij+1k}^\beta) + w^{(2)}(u_{ijk}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(2)}(u_{ijk}^\beta) u_{ij-1k}^{2n} \right] / h_2^{-2}; \\ \Lambda_3^\beta u_{ijk}^{2n} &= \left[w^{(3)}(u_{ijk+1}^\beta) u_{ijk+1}^{2n} - \left(w^{(3)}(u_{ijk+1}^\beta) + w^{(3)}(u_{ijk}^\beta) \right) u_{ijk}^{2n} + w^{(3)}(u_{ijk}^\beta) u_{ijk-1}^{2n} \right] / h_3^{-2}.\end{aligned}$$

Розглянемо можливі варіанти апроксимації нелінійного коефіцієнта $w^s(u_{ijk}^\beta)$.

1). Нехай $w^{(s)}(u_{ijk}^\beta) = a^{(s)}(u_{ijk}^\beta)$. Покладемо у всіх різницевих схемах $\beta = 2n+1$. Розрахунок почнемо з точок $\Omega_{ht}^{3(1,2n+1)}$, у кожній з яких потрібно розв'язати нелінійне рівняння

$$u_{ijk}^{2n+1} = u_{ijk}^{2n} + \tau \left(\sum_{s=1}^3 \Lambda_s^{2n+1} u_{ijk}^{2n} \right),$$

а потім у кожній точці множини $\Omega_{ht}^{3(2,2n+1)}$ рівняння

$$u_{ijk}^{2n+1} = u_{ijk}^{2n} + \tau \sigma \left(\sum_{s=1}^3 \Lambda_s^{2n+1} u_{ijk}^{2n} \right) + \tau(1-\sigma) \left(\sum_{s=1}^3 \Lambda_s^{2n+1} u_{ijk}^{2n+1} \right).$$

На кроці $2n+2$ у всіх точках сіткової множини розв'язок визначається явно.

2). Якщо в точках множини $\Omega_{ht}^{3(1,2n+1)}$ покласти $\beta = 2n$, у $\Omega_{ht}^{3(1,2n+2)}$, у $\Omega_{ht}^{3(2,2n+2)}$ та $\Omega_{ht}^{3(2,2n+1)}$ – $\beta = 2n+1$, а в точках $\Omega_{ht}^{3(2,2n+2)}$ $\beta = 2n+2$, то на непарних і парних часових кроках розв'язок знаходиться явно в усіх точках множин $\Omega_{ht}^{3(1,2n+1)}$ та $\Omega_{ht}^{3(2,2n+1)}$, а в кожній точці множин $\Omega_{ht}^{3(2,2n+1)}$ і $\Omega_{ht}^{3(2,2n+2)}$ необхідно розв'язати нелінійне рівняння виду

$$u_{ijk}^{2n+1+l} = u_{ijk}^{2n+l} + \tau \sigma \left(\sum_{s=1}^3 \Lambda_s^{2n+l} u_{ijk}^{2n+l} \right) + \tau(1-\sigma) \left(\sum_{s=1}^3 \Lambda_s^{2n+l} u_{ijk}^{2n+1+l} \right) \quad (l = 0, 1).$$

При розв'язуванні початково-крайових задач для рівнянь виду $\frac{\partial u}{\partial t} = a(u) \sum_{s=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^{(s)2}}$ ефективним є наведений вище ДС-алгоритм (2)–(5), в якому різницеві оператори записано у вигляді

$$\begin{aligned}\Lambda_1^\beta u_{ijk}^{2n} &= w(u_{ijk}^\beta) \left[u_{i+1jk}^{2n} - 2u_{ijk}^{2n} + u_{i-1jk}^{2n} \right] / h_1^{-2}; \\ \Lambda_2^\beta u_{ijk}^{2n} &= w(u_{ijk}^\beta) \left[u_{ij+1k}^{2n} - 2u_{ijk}^{2n} + u_{ij-1k}^{2n} \right] / h_2^{-2}; \\ \Lambda_3^\beta u_{ijk}^{2n} &= w(u_{ijk}^\beta) \left[u_{ijk+1}^{2n} - 2u_{ijk}^{2n} + u_{ijk-1}^{2n} \right] / h_3^{-2},\end{aligned}$$

де в точках $\Omega_{ht}^{3(1,l+1)}$, $(l = 2n, 2n+1)$ покладаємо $w(u_{ijk}^l) = a(u_{ijk}^l)$, а в точках $\Omega_{ht}^{3(2,l+1)}$, $(l = 2n, 2n+1)$ – $w(u_{i_s}^{l+1}) = a \left((u_{i_s+1}^{l+1} + u_{i_s-1}^{l+1}) / 2 \right)$, $(l = 2n, 2n+1)$.

Тут нижній індекс s ($s = 1, 2, 3$) відповідає значенню нижнього індексу в операторі Λ_s^β . При достатній гладкості функцій u та $a(u)$ останній алгоритм має другий порядок апроксимації. Він дає змогу явно визначати розв'язок задачі в усіх внутрішніх точках сітки. Можливі й інші варіанти, але вони менш ефективні. Використання того чи іншого варіанта істотно залежить від типу граничних умов.

1. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно аналитические методы исследования волновых процессов. – К., 2001; 2. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М., 1960; 3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М., 1977; 4. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М., 1972; 5. Gourlay A.R. Hopscotch a fast second-order partial differential equation solver. // J. Inst. Math. Appl. – 1970 – V. 6 – P. 375-390; 6. Грищенко О.Ю., Слюсаренко В.Г., Оноцький В.В. Двухкroковий різницеви алгоритм знаходження розв'язків рівнянь типу Шредінгера. // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2004. – Т. 2. – С. 204–209; 7. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І., Молодцов О.І. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки. – К., 1997.

УДК 517.929

Г.О. Доленко, канд. фіз.-мат. наук,
Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук

ЧАСТКОВА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ В ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ

Розглянуто задачу знаходження "збурення" параметрів лінійної дискретної системи, при якій розв'язок задачі лінійно-квадратичної оптимізації має наперед заданий вигляд. Розв'язок одержано в аналітичному вигляді.

The problem of parameters of "perturbation" determination for linear discrete system was considered, where solution of problem of linear-quadratic optimization is apriori given. The solution was found in analytic form.

Задача оптимального керування різницевою системою

$$x(k+1) = F(x(k), u(k), k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

з мінімізацією критерію якості

$$I[u(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x(k), u(k), k) + \Phi(x(N)) \quad (2)$$

та використанням методу динамічного програмування ставиться таким чином [1, 2]. Уводиться функція Белмана

$$S(x(k), k) = \min_{u(k)} \left\{ \sum_{j=k}^{N-1} F_0(x(j), u(j), j) + \Phi(x(N)) \right\}.$$

Якщо мінімальне значення функціонала $I[u(k)]$ досягається на послідовності $u_0(k), u_0(k+1), \dots, u_0(N-1)$, то $S(x(k), k) = F_0(x(k), u_0(k), k) + \Phi(x(N))$.

Перепишемо отриманий вираз для функції Белмана у вигляді

$$S(x(k), k) = F_0(x(k), u_0(k), k) + \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x(j), u_0(j), j) + \Phi(x(N)).$$

Принцип Белмана сформульовано з припущення, що траєкторія, яка є оптимальною на всій ділянці k, N , складається з відрізків траєкторій, оптимальних на окремих ділянках. Виходячи з цього принципу, одержуємо, що

$$S(x(k), k) = F_0(x(k), u_0(k), k) + \min_{u(k)} \left\{ \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x(j), u(j), j) + \Phi(x(N)) \right\} = F_0(x(k), u_0(k), k) + S(x(k+1), k+1)$$

або

$$S(x(k), k) = \min_{u(k)} \{ F_0(x(k), u(k), k) + S(F(x(k), u(k), k), k+1) \} \quad (3)$$

Це рівняння називається різницеvim рівнянням Белмана.

Стосовно лінійної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4)$$

з мінімізацією квадратичного критерію якості

$$I[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Cx(k) + u^T(k)Du(k)] \quad (5)$$

отримуємо $S(x(k), k) = \min_{u(k)} \{ x^T(k)Cx(k) + u^T(k)Du(k) + S(Ax(k) + Bu(k), k+1) \}$.

Якщо функцію Белмана брати у вигляді стаціонарної квадратичної форми $S(x(k), k) = x^T(k)Hx(k)$ з додатно-визначеною матрицею H , то рівняння (3) матиме вигляд

$$x^T(k)Hx(k) = \min_{u(k)} \{ x^T(k)Cx(k) + u^T(k)Du(k) + (Ax(k) + Bu(k))^T H (Ax(k) + Bu(k)) \}. \quad (6)$$

Якщо на функцію $u(k)$ не накладати обмежень, то мінімальне значення у фігурній дужці приймається при тих значеннях $u(k)$, коли $\frac{\partial}{\partial u(k)} \{ \bullet \} = 0$, тобто при

$$Du(k) + B^T H Ax(k) + B^T H Bu(k) = 0.$$

Звідси оптимальне керування має вигляд

$$u_0[x(k)] = -(D + B^T H B)^{-1} B^T H Ax(k). \quad (7)$$

Підставивши отриманий вираз (7) у (8), маємо

$$\begin{aligned} x^T(k)Hx(k) &= x^T(k)Cx(k) + x^T(k)A^T H B (D + B^T H B)^{-1} D (D + B^T H B)^{-1} B^T H Ax(k) + \\ &+ x^T(k)A^T H Ax(k) + x^T(k)A^T H B (D + B^T H B)^{-1} B^T H B (D + B^T H B)^{-1} B^T H Ax(k) - \end{aligned}$$

$$-2x^T(k)A^T HB(D+B^T HB)^{-1}B^T HAx(k).$$

Привівши подібні, одержуємо матричне рівняння

$$H = C + A^T HB(D+B^T HB)^{-1}(D+B^T HB)(D+B^T HB)^{-1}B^T HA + A^T HA - 2A^T HB(D+B^T HB)^{-1}B^T HA = 0.$$

Звідси одержуємо різницеве матричне рівняння Ріккати

$$H - A^T HA - C + A^T HB(D+B^T HB)^{-1}B^T HA = 0. \quad (8)$$

Таким чином, функціонал квадратичного виду (5), що розглядається на розв'язках $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи (4), досягає мінімального значення при керуванні $u_0[x(k)]$ вигляду (7), де H є розв'язком різничевого матричного рівняння Ріккати (8). При цьому екстремальне значення функціонала дорівнює

$$I[u_0[x(k)]] = x^T(0)Hx(0). \quad (9)$$

Розглянемо обернену задачу оптимізації. Припустимо, що її розв'язок, тобто матриця H^* , яка визначає екстремальне значення функціонала (9), задана. Необхідно, таким чином, "мінімально" змінити множину обмежень, або навіть сам функціонал, щоб екстремум досягався в заданій точці. Фактично необхідно "підігнати" умови задачі під її розв'язок. Розв'язок подібного типу задач стосовно статичної оптимізації (типу задач лінійного програмування) наведено в роботах [3, 4].

Розглянемо часткову обернену задачу оптимізації стосовно динамічних систем, що описуються різницевими рівняннями. Припустимо, що розв'язок лінійно-квадратичної задачі оптимізації (4), (5) має вигляд $I[u^*(k)] = x^T(0)H^*x(0)$, тобто фактично відома додатно-визначена матриця H^* . Потрібно знайти збурення ΔA параметрів системи

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k), \quad (10)$$

при якій для "збуреної системи" (10) екстремальне значення функціонала (5) дорівнює (11). Причому, як впливає з методу динамічного програмування Белмана, воно досягається при керуванні

$$u^*[x(k)] = -(D+B^T H^* B)^{-1}B^T H^*(A+\Delta A)x(k). \quad (11)$$

Для скалярного рівняння

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad x(k) \in R^1, \quad u(k) \in R^1 \quad (12)$$

з мінімізацією квадратичного функціонала $I[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} [cx^2(k) + du^2(k)]$, $c > 0$, $d > 0$

оптимальне керування має вигляд

$$u_0[x(k)] = -\frac{abh_0}{d+b^2h_0}x(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

де $h_0 = \frac{1}{2b^2} \left\{ \sqrt{[d(1-a^2)-c]^2 + 4b^2cd} - [d(1-a^2)-c] \right\}$, а мінімальне значення функціонала дорівнює

$$I[u_0[x(k)]] = h_0x^2(0).$$

Припустимо, що мінімальним значенням має бути

$$I[u^*[x(k)]] = h^*x^2(0), \quad (14)$$

де $h^* > 0$ – задана величина. Потрібно таким чином удосконалити рівняння (14), щоб

$$x(k+1) = (a + \Delta a)x(k) + bu(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

мало оптимальним розв'язком $u_*[x(k)] = -\frac{abh^*}{d+b^2h^*}x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а значення функціонала дорівнювало (14).

Оскільки повинне виконуватися рівняння Ріккати, то

$$\frac{(h^*)^2 b^2 (a + \Delta a)^2}{d + b^2 h^*} = h^* (a + \Delta a)^2 + (c - h^*).$$

Звідси

$$\left[(h^*)^2 b^2 - h^* (d + b^2 h^*) \right] (a + \Delta a)^2 = (d + b^2 h^*) (c - h^*),$$

i

$$\Delta a = -a \pm \sqrt{\frac{(d + b^2 h^*) (h^* - c)}{h^* d}}, \quad h^* > c.$$

Розглянемо часткову обернену задачу оптимізації за матрицею A лінійної різницевої системи (4) загального виду. Позначимо $Q = H^* - H^* B (D + B^T H^* B)^{-1} B^T H^*$, $M = H^* - C$, R – довільна матриця, U , V – ортогональні матриці, що приводять, відповідно, матриці Q і M до діагонального виду, такі, що $U^T U = I$, $V^T V = I$, $R^T R = I$, де I – одинична матриця.

Теорема. Нехай $D + B^T H^* B$ – невідроджена, Q – додатно-визначена, а M – додатно-напіввизначена матриці і $\text{rank} M = m$, $m \leq n$. Тоді часткова обернена задача оптимізації дискретної системи (4). (5) за матрицею A має розв'язок, причому

$$\Delta A = U^{-1} \text{diag} \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{L}} \right\} R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\Lambda} \right\} V - A. \quad (15)$$

$$\text{Тут } \text{diag} \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{L}} \right\} = \text{diag} \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{l_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{l_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{l_n}} \right\}, \quad \text{diag} \left\{ \sqrt{\Lambda} \right\} = \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, \dots, 0, 0, \dots, 0 \right\},$$

$$l_i > 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \lambda_j > 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad m \leq n \text{ – власні числа матриць } Q \text{ і } M. \quad (16)$$

Доведення. Нехай мінімальне значення функціонала повинне досягатися на матриці H^* , тобто

$$I[u^* [x(k)]] = x^T(0) H^* x(0).$$

У цьому випадку обернена задача оптимізації зводиться до знаходження значення варіації ΔA системи, при якій різницеве матричне рівняння Ріккати

$$H^* - (A + \Delta A)^T H^* (A + \Delta A) - C + (A + \Delta A)^T H^* B (D + B^T H^* B)^{-1} B^T H^* (A + \Delta A) = 0$$

має розв'язок. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$(A + \Delta A)^T \left[H^* - H^* B (D + B^T H^* B)^{-1} B^T H^* \right] (A + \Delta A) = H^* - C \quad (17)$$

і позначимо

$$Q = H^* - H^* B (D + B^T H^* B)^{-1} B^T H^*, \quad M = H^* - C.$$

Тоді матричне рівняння (17) має вигляд

$$(A + \Delta A)^T Q (A + \Delta A) = M. \quad (18)$$

Оскільки Q – симетрична матриця, то вона має тільки дійсні власні числа та існує ортогональна матриця U , що приводить її до діагонального вигляду, тобто $U^T U = I$, $U^T Q U = \text{diag} \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, де I – одинична матриця, $\text{diag} \{l_1, l_2, \dots, l_m, 0, 0, \dots, 0\}$ – діагональна матриця, що складається з $l_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ додатних власних чисел матриці Q . Перепишемо рівняння (18) у вигляді $(A + \Delta A)^T U^T \text{diag} \{l_1, l_2, \dots, l_n\} U (A + \Delta A) = M$. Або, оскільки $l_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то у вигляді

$$\left[\text{diag} \left\{ \pm \sqrt{l_1}, \pm \sqrt{l_2}, \dots, \pm \sqrt{l_n} \right\} U (A + \Delta A) \right]^T \times \left[\text{diag} \left\{ \pm \sqrt{l_1}, \pm \sqrt{l_2}, \dots, \pm \sqrt{l_n} \right\} U (A + \Delta A) \right] = M. \quad (19)$$

Розглянемо праву частину рівняння (18). Оскільки матриця M симетрична, додатно-напіввизначена, то її також можна зобразити у вигляді $M = V^T \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0, 0, \dots, 0\} V$, де матриця M має $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m}$ додатних і $n - m$ нульових власних чисел, V – ортогональна матриця, що приводить M до діагонального вигляду. Або, оскільки $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, то у вигляді

$$M = \left[R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V \right]^T \left[R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V \right], \quad (20)$$

де R – довільна ортогональна матриця. Таким чином, рівняння (18) має вигляд

$$\left[\text{diag} \left\{ \pm \sqrt{l_1}, \pm \sqrt{l_2}, \dots, \pm \sqrt{l_n} \right\} U (A + \Delta A) \right]^T \times \left[\text{diag} \left\{ \pm \sqrt{l_1}, \pm \sqrt{l_2}, \dots, \pm \sqrt{l_n} \right\} U (A + \Delta A) \right] =$$

$$= \left[R \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V \right]^T \left[R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V \right].$$

Звідси одержуємо, що

$$\text{diag} \left[\pm \sqrt{l_1}, \pm \sqrt{l_2}, \dots, \pm \sqrt{l_n} \right] U (A + A^T) = R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V.$$

Розв'язавши відносно ΔA , маємо

$$\Delta A = U^{-1} \text{diag} \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{l_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{l_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{l_n}} \right\} R \bullet \text{diag} \left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}, 0, 0, \dots, 0 \right\} V - A,$$

тобто одержали залежності (15), (16) теореми.

1. Калман Р., Фалб П., Арбіб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971; 2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975; 3. Доленко Г.А. Задание вектора предпочтения критериев на интервалах в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и вычислительная техника: Республиканский межвед. сборник. – 1981. – Вып. 51. – С. 101-108; 4. Волкович В.Л., Доленко Г.А. Человеко-машинная процедура поиска решений в задачах многокритериальной оптимизации при интервальном задании предпочтений // Автоматика. – 1982. – №5. – С. 49-55.

Надійшла до редакції 25.10.2004.

УДК 510.6

В.В. Зубенко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПРО ТЕМПОРАЛЬНІ ПРОЦЕДУРИ ТА АЛГОРИТМИ

Уведено поняття темпоральної процедури та алгоритму як засобів подання функціональних співвідношень у довільній області. Розглянуто проблему синтезу таких процедур та алгоритмів.

The notions of temporal procedure and algorithm are proposed and studied. The temporal procedures and algorithms design is considered.

1. Темпоральні процедури та алгоритми. Зроблено спробу дати загальне уточнення поняття процедури як способу подання багатозначних функцій у довільній області, не спираючись при цьому на ті чи інші конкретні моделі обчислень та специфіку предметних областей. Обчислення при цьому розгортається в певному часовому просторі, який не є декоративним, як зазвичай у традиційній теорії алгоритмів, а активно впливає на хід обчислення. У даній роботі для простоти часовий простір вважається дискретним і симетричним відносно певного умовного часового "нуля". Уточнення спирається на традиційну теоретико-множинну (екстенсійну) платформу. Нехай S – довільна множина, елементи якої будемо називати станами, $\Delta = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – множина часткових функцій на станах вигляду $f_i: S \rightarrow S$. Будемо називати їх елементарними операторами. Нехай $T = \{\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots\}$ – певна зліченна лінійно впорядкована сукупність часових констант, симетрична відносно константи t_0 . Іноді будемо ототожнювати часові константи з їх порядковими номерами і писати замість самих констант просто їх номери. Часткову функцію вигляду $\delta: T \times S \rightarrow T \times 2^\Delta$ назвемо функцією керування, а елементи її області визначення – конфігураціями. Конфігурацію $(\tau, s) \in T \times S$ домовимося позначати скорочено $s|_\tau$. Темпоральною процедурою (T – процедурою) над базисом Δ будемо називати четвірку $P = \langle T, S, \Delta, \delta \rangle$. Для часової константи $\tau_0 \in T$ та стану $s_0 \in S$ послідовність конфігурацій вигляду $(\tau_0, s_0), (\tau_1, s_1), \dots, (\tau_n, s_n), \dots$, де $s_i = f_{k_i}(s_{i-1})$, а $(\tau_i, f_{k_i}) = \delta(s|_{\tau_{i-1}})$ для всіх $i > 0$, будемо називати обчисленням у процедурі P з початком у момент τ_0 і початковим станом s_0 і говорити, що обчислення в момент τ_i переходить з конфігурації (τ_{i-1}, s_{i-1}) у конфігурацію (τ_i, s_i) . Факт переходу конфігурації (τ, s) у конфігурацію (ς, u) будемо позначати $s|_\tau \rightarrow_P u|_\varsigma$. Очевидно, усякий хвіст довільного обчислення буде обчисленням з відповідними початковим станом та часовим зсувом. На конфігураціях процедури P визначимо відношення переходу $\Rightarrow_P$. Покладемо $s|_\tau \Rightarrow_P u|_\varsigma$, якщо в процедурі P існує обчислення, що розпочинається з конфігурації $s|_\tau$ та закінчується $u|_\varsigma$. Як правило, нас будуть цікавити не всі можливі обчислення в процедурі, а насамперед ті, що розпочинаються з певних виділених вхідних конфігурацій і закінчуються певними виділеними вихідними конфігураціями. Тому введемо поняття ініціальної процедури $P(C_0, C_{fin})$ як трійки $\langle P, C_0, C_{fin} \rangle$, де P – певна процедура, $C_0 \subseteq T \times S$ та $C_{fin} \subseteq T \times S$ – виділені підмножини, відповідно вхідних та вихідних конфігурацій. Ініціальну процедуру будемо задавати також у вигляді шістки $P = \langle T, S, C_0, C_{fin}, \Delta, \delta \rangle$. Обчислення в процедурі P , що розпочинається з певної початкової конфігурації $s|_\tau \in C_0$ і закінчується певною вихідною конфігурацією $u|_\varsigma \in C_{fin}$, і при цьому всі проміжні конфігурації якого не є вихідними, будемо називати результативним. Заключний стан u результативного обчислення будемо називати його результатом на $s|_\tau$, саму конфігурацію $u|_\varsigma$ – заключною і позначати її $P^*(s|_\tau)$. Про обчислення $(\tau_0, s_0), (\tau_1, s_1), \dots, (\tau_n, s_n)$ таке, що $s_0|_{\tau_0} \in C_0$, $s_n|_{\tau_n} \in C_{fin}$, будемо говорити як про гіперобчислення. У такому обчисленні заключні конфігурації можуть зустрічатися й серед проміжних. Заключний стан s_n результа-

тивного гіперобчислення будемо вважати одним з його результатів, а сукупність усіх його заключних конфігурацій, що відповідають вхідній конфігурації $s_0|_{\tau_n}$, позначати $P^{**}(S_0|_{\tau_0})$. Усі нескінченні обчислення назовемо безрезультатними. Безрезультатними будемо називати також і ті скінченні обчислення, які не мають жодного результативного продовження. У деяких випадках доречно вважати результативними й такі скінченні обчислення, на заключних конфігураціях яких не визначена функція керування. Такі випадки зазначатимемо окремо. Позначимо S_0 та S_{fin} сукупності всіх станів, що належать відповідно вхідним та заключним конфігураціям процедури. Кожна ініціальна процедура $P(C_0, C_{fin})$ визначає певні багатозначні темпоральні оператори на конфігураціях $P^*: C_0 \rightarrow C_{fin}$, $P^{**}: C_0 \rightarrow C_{fin}$, а саме такі, що їх значення на аргументі $s_0|_{\tau_0} \in C_0$ складають заключні конфігурації всіх результативних обчислень та гіперобчислень на початковій конфігурації $s_0|_{\tau_0}$. Позначимо $P_{(2)}^*: S_0 \rightarrow S_{fin}$ та $P_{(2)}^{**}: S_0 \rightarrow S_{fin}$ проєкції операторів P^* та P^{**} за другою компонентою. Про оператори P^* , P^{**} , $P_{(2)}^*$ та $P_{(2)}^{**}$ будемо говорити як про такі, що їх обчислює процедура P .

Області визначення та допустимих значень оператора F , якого обчислює процедура, позначатимемо відповідно $In(F)$ та $Out(F)$. Очевидно, що $In(P^*) = In(P^{**})$. Процедури з однозначними функціями керування будемо називати детермінованими. Для таких процедур оператор P^* є також однозначним. Процедури P та Q називаються гіпереквівалентними ($P \equiv Q$), якщо оператори, які вони обчислюють, збігаються (як функціональні відношення). Процедури P та Q називаються T -еквівалентними ($P \equiv_T Q$), якщо $P^* = Q^*$. Процедури P та Q називаються еквівалентними ($P \cong Q$), якщо $P_{(2)}^* = Q_{(2)}^*$. Процедури P та Q називаються слабкоеквівалентними ($P \approx Q$), якщо оператори $P_{(2)}^*$ та $Q_{(2)}^*$ збігаються на перетині їх областей визначення. Очевидно, з гіпереквівалентності та T -еквівалентності процедур випливає їх еквівалентність, а з останньої – їх слабка еквівалентність. Стан ініціальної процедури $P(C_0, C_{fin})$ назовемо допустимим, якщо він належить деякому результативному її обчисленню. Покладемо S_{acc} – підмножину всіх допустимих станів процедури P . Очевидно, з огляду на оператори, які обчислює ініціальна процедура, стани за межами підмножини S_{acc} є "зайвими". Нехай $P' = \langle T, S_{acc}, C_0 \cap T \times S_{acc}, C_{fin} \cap T \times S_{acc}, \Delta', \delta' \rangle$ – процедура з обмеженими на підмножину допустимих станів елементарними операторами та функцією керування процедури P . Очевидно, P та P' гіпереквівалентні. Будемо називати процедуру, усі стани якої допустимі, *приведеною*.

Багато прикладів процедур можна знайти в математиці, фізиці та інших науках. Так, задачі з планиметрії на побудову за допомогою циркуля та лінійки є типовими задачами на побудову певних процедур. Станами тут є сукупності фігур на площині, побудованих за допомогою циркуля та лінійки, операцій виділення довільної точки площини та точок перетину фігур, іменування точок і фігур, а також умовних варіантів подібних операцій. Звернемося до арифметики й розглянемо як приклад детерміновану процедуру GCD для обчислення найбільшого спільного дільника $\gcd(a, b)$ двох натуральних чисел. Нехай $\perp, \diamond$ – довільні елементи, які будемо трактувати як істиннісні значення "хиба" та "істина" відповідно. Позначимо $(\rightarrow): \{\perp, \diamond\} \times A \times A \rightarrow A$ операцію вибору таку, що для будь-яких $a, b \in A$: $(\diamond \rightarrow a, b) = a$ і $(\perp \rightarrow a, b) = b$. Тоді $GCD = \langle T, S, C_0, C_{fin}, \Delta, \delta \rangle$, де $T = N$, $S = N \times N$, $C_0 = \{0\} \times S$, $C_{fin} = T \times Eq$, $Eq = \{\langle d, d \rangle : d \in N\}$, $\Delta = \{(p(s) \rightarrow f, g)\}$ і для $\forall (\tau, s) \in T \times S - C_{fin}$ $\delta(\tau, s) = ((\tau + 1, p(s) \rightarrow f, g))$. Оператори f, g та предикат p для будь-яких $a, b \in N$ визначаються як $f(\langle a, b \rangle) = \langle a - b, b \rangle$, $g(\langle a, b \rangle) = \langle a, b - a \rangle$, $p(\langle a, b \rangle) = (a > b)$. Не складно перевірити, що будь-яке повне обчислення процедури GCD на початковому стані $s_0 = \langle a, b \rangle$ є результативним, тобто $In(GCD_{(2)}^*) = N \times N$, і якщо стан $\langle c, d \rangle$ є результатом обчислення процедури GCD на початковому стані $s_0 = \langle a, b \rangle$, то $c = d = \gcd(a, b)$, оскільки на кожному з проміжних станів s_i найбільший спільний дільник його компонент залишається незмінним. Отже, $Out(GCD_{(2)}^*) = Eq$. Насправді функція $GCD_{(2)}^*$ не збігається прямо з функцією $\gcd$, а тільки точно моделює її (у сенсі, [1]) щодо тотожної функції кодування $\phi: N \times N \rightarrow C_0$: $\phi(a, b) = \langle a, b \rangle$ та декодування $\phi: Eq \rightarrow N$, $\phi(a, a) = a$.

Найважливішим елементом T -процедур є їх функція керування. Наприклад, щоб реально знайти за скінченну кількість кроків результат обчислення процедури на початковому стані, необхідно забезпечити можливість знаходження за скінченну кількість кроків результатів функції керування на кожному з проміжних етапів обчислення. Таку можливість гарантують конструктивні функції керування. Адже особливістю конструктивних функцій (як спеціальних алгебричних об'єктів, побудованих з певних базових функцій за допомогою певних конструкторів-композицій) є можливість обчислення за скінченну кількість кроків їх значень для заданих аргументів з області визначення за умови, що відомі правила

таких обчислень для найпростіших складових функцій та композицій. Сама процедура обчислення подібна до процедури обчислень значень арифметичних чи алгебричних виразів. Важливо також забезпечити конструктивність самих конфігурацій процедури, тобто можливість їх побудови за скінченну кількість кроків із своїх складових за допомогою певних конструкторів. Говорять, що ініціальна T -процедура A є *темпоральним алгоритмом* (T – алгоритмом) щодо певної системи подання, якщо її конфігурації та функція керування є конструктивними в цій системі. Оператори $A^*, A^{**} : In(A^*) \rightarrow Out(A^*)$ та $A_{(2)}^*, A_{(2)}^{**} : In(A_{(2)}^*) \rightarrow Out(A_{(2)}^{**})$, що обчислюються темпоральним алгоритмом A ,

називаються відповідно *алгоритмічними темпоральними операторами* (алгоритмічними T – операторами) та *темпорально обчислювальними операторами* (T – обчислювальними операторами). Як і процедури, темпоральні алгоритми теж можуть бути детермінованими й недетермінованими. Наведемо основні властивості темпоральних алгоритмів, що безпосередньо випливають з їх означення.

Масовість. T -алгоритм може бути застосований до початкових конфігурацій з певної їх сукупності.

Темпоральність. Обчислення T -алгоритму відбувається в певному часовому просторі.

Елементарність. На кожному з кроків обчислення в T -алгоритмі виконується певний елементарний оператор з фіксованої сукупності таких операторів.

Визначеність. Порядок застосування операторів в обчисленні T -алгоритму не є довільним, а визначається функцією керування за поточною конфігурацією обчислення.

Результативність. У кожному T -алгоритмі є механізм завершення обчислень.

Фінітність. Скінченність подання конфігурацій та функції керування T -алгоритму як конструктивного об'єкта.

Релятивність. Принципова залежність T -алгоритму від системи подання його конфігурацій та функції керування.

Як бачимо, основні властивості темпоральних алгоритмів ті ж самі, що й у випадку класичних числових та словесних алгоритмів, таких, скажімо, як машини Тьюрінга або алгорифми Маркова, кожен з яких має свою фіксовану систему подання конфігурацій та функцій керування [2]. Тому поняття T -алгоритму може розглядатися як одне з можливих уточнень загального поняття алгоритму в довільній області. Важливо, що це уточнення є прямим, а не формулюється в термінах числових або словесних моделей алгоритмів, як це зазвичай має місце в теорії алгоритмів. Фіксуємо ті чи інші сукупності часових констант, станів та базових операторів, а також системи подання, можна отримати широкий спектр конкретних алгоритмічних систем. Класи алгоритмів називаються еквівалентними, якщо вони обчислюють один і той самий клас операторів на станах. Нескладно перевірити, що таким класичним алгоритмічним системам, як машини Тьюрінга, алгорифми Маркова, дискретні перетворювачі, різні класи схем програм, формальні граматики та інші відповідають певні еквівалентні класи T -алгоритмів. У цих системах часовим простором виступає натуральний числовий ряд N . Наприклад, у випадку машин Тьюрінга станами їх процедурних еквівалентів виступають конфігурації машин, а значення функції керування на даній конфігурації визначається станом робочої головки та станом поточної комірки в конфігурації. Якщо звернутись до нормальних алгорифмів Маркова, то станами тут виступають слова, що підлягають обробці, а функція керування задається системою формул-підстановок. Зауважимо, що як у машинах Тьюрінга, так і в нормальних алгорифмах, вибір елементарного оператора в ході обчислення не залежить від часового компонента. Цей вибір визначається виключно станом конфігурації. Це стосується й інших традиційних алгоритмічних систем. Нехай $\alpha : T \rightarrow T$ та $\beta : S \rightarrow 2^A$ – певні функції. T – алгоритм, функція керування якого має вигляд $\delta(\tau, s) = (\alpha(\tau), \beta(s))$, будемо називати *розподіленим*. У загальному випадку T – алгоритм може повертатися в обчисленні як “назад”, так і “вперед” у часі. T – процедуру назвемо *нормальною*, якщо всі її обчислення спрямовані тільки “в майбутнє” ($\zeta \geq \tau$), або тільки “в минуле”. Нормальну процедуру назвемо s – *нормальною*, якщо з $(\zeta, f) \in \delta(\tau, s)$ випливає $\zeta = \tau + 1$, та p – *нормальною*, якщо $\zeta = \tau - 1$. Нескладно впевнитись, що всі традиційні алгоритмічні системи є розподіленими і s – нормальними. s – нормальною є й наведена вище процедура GCD .

2. Регулярні темпоральні оператори та їх процедуризація. Нехай T та A – довільні часовий простір та певна множина станів. Позначимо $M(T, A)$ сукупність усіх часткових багатозначних функцій вигляду $f : T \times A \rightarrow T \times A$. Будемо називати такі функції *темпоральними операторами* (T – операторами). Для того чи іншого класу T – операторів проблема його процедуризації (синтезу) полягає в побудові того чи іншого класу T – процедур, що обчислюють (моделюють [1]) усі його функції. Наприклад, ті ж машини Тьюрінга процедуризують (алгоритмізують) класи частково-рекурсивних словесних та числових функцій. Інші приклади розв'язання проблем синтезу процедур можна віднайти в теорії автоматів та дискретних перетворювачів [3].

Розглянемо проблему синтезу темпоральних процедур на прикладі так званих регулярних темпоральних операторів. У процесах синтезу процедур важливу роль відіграють темпоральні предикати. Виділимо в множині A певний елемент $\perp$ як “хибу” й будемо вважати хибними всі конфігурації вигляду $(\tau, \perp)$. Таким чином, маємо не просто один “хибний” елемент, а їх сукупність для кожного моменту часу з T . Решта конфігурацій з $T \times A$ у відповідних контекстах будуть трактуватись як істинні. Виберемо в A один з його елементів $\diamond$, $\diamond \neq \perp$ для стандартного подання “істинного” стану $(\tau, \diamond)$ у даний момент часу τ . Покладемо $Bool = T \times \{\perp, \diamond\}$. Оператор вигляду $P : T \times A \rightarrow Bool$ будемо називати *темпоральним предикатом* (T – предикатом). Очевидно, кожному однозначному T – оператору f відповідає певний T – предикат $Pr(f) : T \times A \rightarrow Bool$. Позначимо $T \times A \rightarrow Bool$ сукупність усіх часткових T – предикатів над $T \times A$. Для предиката P позначимо P^+ та P^- відповідно до області його істинності та хибності.

Покладемо $Bool^+ = T \times \{\diamond\}$, $Bool^- = T \times \{\perp\}$, $Nil = \{\omega\}$ – спеціальний тип з “невизначеним” значенням $\omega \notin A$. Кожний частковий оператор $f : T \times A \rightarrow T \times A$ можна стандартно розширити на всю множину $T \times A$, якщо покласти за межами його області визначення $f(\tau, a) = \omega$. Далі під частковими T – операторами будемо розуміти їх усюди визна-

чені розширення вигляду $f : T \times A \cup Nil \rightarrow T \times A \cup Nil$. У цьому випадку T – предикат $\text{Pr}(f)$ – також розширений і має вигляд $f : T \times A \cup Nil \rightarrow \text{Bool} \cup Nil$. Для $x = (\tau, a)$ покладемо $x_{(1)} = \tau, x_{(2)} = a, \omega_{(1)} = \omega = \omega_{(2)}$.

Визначимо на $\text{Bool} \cup Nil$ 3-значну логіку з операціями диз'юнкції $\vee$, кон'юнкції $\&$, імплікації $\supset$ та заперечення $\neg$. Для довільних $x, y \in \text{Bool} \cup Nil$ покладемо:

$$\begin{aligned}(x \vee y) &= (x_{(2)} \neq \perp \rightarrow x \# y), \\(x \& y) &= (x_{(2)} \neq \perp \rightarrow (x_{(2)} = \diamond \rightarrow y \# x) \# x), \\ \neg x &= ((x_{(2)} = \perp \rightarrow (x_{(1)}, \diamond) \# (x_{(2)} = \diamond \rightarrow (x_{(1)}, \perp) \# x)), \\(x \supset y) &= (x = \omega \rightarrow x \# (x_{(2)} = \perp \rightarrow (x_{(1)}, \diamond) \# y)).\end{aligned}$$

Наступні композиції (операції на операторах) використовуються для подання темпоральних операторів. Далі $f, g, h \in M(T, A)$ – довільні T – оператори, з яких g – однозначний.

Зсуви. Нехай m – довільне натуральне число. Зсувом назад на m одиниць часу T – оператора f будемо називати оператор ${}^{(m)}f$ такий, що ${}^{(m)}f(\tau, a) = f(\tau + m, a)$ для всіх пар $(\tau, a) \in \text{Dom}(f)$. Зсувом уперед на m одиниць часу T – оператора f будемо називати оператор $f^{(m)}$ такий, що для всіх пар $(\tau, a) \in \text{Dom}(f)$: $f^{(m)}(\tau, a) = f(\tau - m, a)$.

Дзеркальне відображення. Дзеркальним відображенням T – оператора f будемо називати оператор f^r такий, що $f^r(\tau, a) = f(-\tau, a)$ для всіх пар $(\tau, a) \in \text{Dom}(f)$.

Множення. Ця композиція операторам f, h ставить у відповідність оператор $f \circ h(\tau, a) = h(f(\tau, a))$.

Пряме множення. Ця композиція операторам $f : T_1 \times X_1 \rightarrow T_1 \times X_1, h : T_2 \times X_2 \rightarrow T_2 \times X_2$ ставить у відповідність оператор $f \times h : T_3 \times X_3 \rightarrow T_3 \times X_3$, де $T_3 = T_1 \times T_2, X_3 = X_1 \times X_2$ такий, що $f \times h((\tau_1, \tau_2), (x_1, x_2)) = ((f(\tau_1, x_1)_{(1)}, h(\tau_2, x_2)_{(1)}), (f(\tau_1, x_1)_{(2)}, h(\tau_2, x_2)_{(2)}))$.

Об'єднання. Ця композиція парі операторів (f, h) ставить у відповідність їх теоретико-множинне об'єднання $f \cup h = \{(t, a), (r, b)) \in (T \times A)^2 : \exists br (f(t, a) = (r, b) \vee h(t, a) = (r, b))\}$.

Обхід. Нехай $B \subseteq T \times A$. Звууженням оператора f на підмножину B називається оператор $f_B = f \cap B \times (T \times A)$. Нехай $E : T \times A \rightarrow T \times A$ – тотожний оператор, тобто $E(t, a) = (t, a)$. Композиція обходу парі T – операторів (g, f) ставить у відповідність оператор $(g \rightarrow f) = f_{p^+} \cup E_{p^-}$, де $p = \text{Pr}(g)$.

Розгалуження. Трійці T – операторів (h, f, g) дана композиція ставить у відповідність оператор $(g \rightarrow f \# h) = f_{p^+} \cup h_{p^-}$, де $p = \text{Pr}(g)$.

Вибір. T – операторам $f_1, \dots, f_n$ та $g_1, \dots, g_n$ дана композиція ставить у відповідність оператор $(g_1 \rightarrow f_1 \# \dots \# g_n \rightarrow f_n) = \bigcup_{i=1}^n (f_i)_{p_i^+}$, де $p_i = \text{Pr}(g_i)$. Оператор g_i у композиціях вибору називатимемо за Е.Дейкстрою охороною оператора f_i .

α – ітерація. Обмеженням оператора $f : T \times A \rightarrow T \times A$ на підмножину $B \subseteq T \times A$ називається оператор $f^B : T \times A \rightarrow B$ такий, що $f^B = f \cap (T \times A) \times B$. Позначимо $f^p = f^{(p^+)}$, де p – певний предикат. Покладемо f_B^∞ – замкнення оператора f відносно підмножини $B \subseteq T \times A$, а саме $f_B^\infty = \bigcup_{n=0}^\infty f^n$, де $f^n = f^{n-1} \circ f_B, f^0 = E$. Опера-

торам g, f композиція ітерації ставить у відповідність оператор $\left\{ p \rightarrow f \right\} = ((f_{p^+})^\infty)^{p^-}$, де $p = \text{Pr}(g)$.

Булеві композиції. T – операторам f, g ці композиції ставлять у відповідність T – предикати: $f \vee g = \text{Pr}(f) \vee \text{Pr}(g), f \wedge g = \text{Pr}(f) \wedge \text{Pr}(g), \neg f = \neg \text{Pr}(f), f \supset g = \text{Pr}(f) \supset \text{Pr}(g)$.

Покладемо Ξ_0 – сукупність наведених вище композицій. Позначимо $\tilde{M}(T, A)$ сукупність темпоральних операторів над $T \times A$ та їх прямих добутків. Функціональну алгебру $R = \langle \tilde{M}(T, A), \Xi_0 \rangle$ будемо називати *регулярною алгеброю T – операторів*. Елементи підалгебри $R(F)$ алгебри R із множиною твірних F , де $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ – довільна сукупність T – операторів та предикатів над $T \times A$, будемо називати *регулярними T – операторами над базисом F* . Нас цікавить питання побудови темпоральних процедур для обчислення таких операторів.

Сформулюємо поняття копії та реалізації T -процедур. Нехай $P = \langle T_1, S, \Delta_1, \delta_1 \rangle$ та $Q = \langle T_2, R, \Delta_2, \delta_2 \rangle$ – довільні процедури, $\lambda: T_1 \rightarrow T_2$ і $\varphi: S \rightarrow R$ – певні відображення (функції кодування). Говорять, що процедура Q є (λ, φ) -копією (або просто копією) процедури P , а процедура P – (λ, φ) -реалізацією процедури Q (або просто реалізацією) та позначають цей факт $P \succ_{\varphi}^{\lambda} Q$, якщо для будь-якого стану $s \in S$ та часової константи $\tau \in T_1$ виконуються умови: (*) $\lambda(\delta_1(\tau, s))_{(1)} = \delta_2(\lambda\tau, \varphi s)_{(1)}$ і (**) для будь-якого оператора $f \in \delta_1(\tau, s)$ у сукупності $\delta_2(\lambda\tau, \varphi s)$ є такий оператор g , що $\varphi f(s) = g(\varphi s)$. Нескладно перевірити, що для будь-якого обчислення $(\tau_0, s_0) \Rightarrow_{\varphi} (\tau_n, s_n)$ процедури P в її (λ, φ) -копії Q існує обчислення вигляду $(\lambda\tau_0, \varphi s_0) \Rightarrow_Q (\lambda\tau_n, \varphi s_n)$. Аналогічно визначається поняття (λ, φ) -копії (реалізації) ініціальних процедур $P(C_0, C_{fin})$ та $Q(D_0, D_{fin})$. Необхідно лише зажадати виконання умов: з $(\tau, s) \in C_0$ випливає $(\lambda\tau, \varphi s) \in D_0$ і з $(\tau, s) \in C_{fin}$ випливає $(\lambda\tau, \varphi s) \in D_{fin}$. Відповідні T -оператори O_1 та O_2 , що обчислюються процедурою та її (λ, φ) -копією, пов'язані співвідношенням $(\lambda O_1(\tau, s))_{(1)}, \varphi O_1(\tau, s)_{(2)} = O_2(\lambda\tau, \varphi s)$ для всіх $(\tau, s) \in In(O_1)$. Якщо функції кодування λ та φ при цьому взаємно однозначні, то говорять про точні копії та реалізації відповідних процедур. У протилежному випадку – про наближені. Точні копії процедур будемо називати ще їх *дублікатами*. У певному сенсі можна вважати, що процедура та її дублікат відрізняються тільки позначеннями своїх станів. Переходячи від окремих станів до фактор-класів за ядерною еквівалентністю функцій кодування, усяку наближену реалізацію певної процедури можна стандартно перетворити на точну. Будемо позначати таку реалізацію $[P]_{\lambda, \varphi}$ або просто $[P]$, якщо λ та φ фіксовані, і називати її фактор-процедурою P . Виберемо певну сигнатуру $\sigma = \{F_1, \dots, F_n, I\}$ унарних функціональних символів та сигнатуру $\rho = \{\bar{s} : s \in S\}$ символів-констант. Нехай $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ – вільна півгрупа над алфавітом $\Sigma = \sigma \cup \rho$. Позначимо $\bar{F}_i : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ оператор, що приписує зліва до слова символ F_i і покладемо $\tilde{\Delta}$ сукупність усіх таких операторів для кожного символу алфавіту σ . Процедури над базисом $\tilde{\Delta}$ із часовим простором Z будемо називати *вільними*. Має місце

Лема 1. Для будь-якої процедури $P = \langle T, S, \Delta, \delta \rangle$ існує вільна наближена її реалізація $U(P) = \langle Z, \sigma^* \circ \rho, \tilde{\Delta}, \tilde{\delta} \rangle$.

Доведення. Будемо вважати процедуру P приведеною. Виберемо функції кодування λ, φ та функцію керування $\tilde{\delta}$ таким чином. Для $t_i \in T, i \in Z$ покладемо $\lambda(i) = t_i$. Функцію φ визначимо індуктивно. Покладемо $\varphi(\bar{s}) = s$ для всіх символів-констант і $\varphi(F_i u \bar{s}) = f_i(\varphi(u \bar{s}))$ для $u \in \sigma^*, \bar{s} \in \rho$. Визначимо $\tilde{\delta}(k, v) = \{(\lambda^{-1}\zeta, \bar{F}_i) : (\zeta, f_i) \in \delta(t_k, \varphi(v))\}$ для всіх станів $v \in \sigma^* \circ \rho$ та $k \in Z$. За побудовою процедура $U(P)$ є вільною реалізацією процедури P QED.

Лема 1 указує один із шляхів для отримання необмеженої кількості дублікатів будь-якої процедури P . Для цього достатньо брати вільні її реалізації і будувати відповідні фактор-процедури.

Зафіксуємо довільну множину станів S та базис Δ . Нехай $\{W_i : i \geq 0\}$ – певна сукупність множин станів рівнопотужних S і таких, що попарно не перетинаються. Покладемо $W_0 = S, \Delta_0 = \Delta$ і визначимо на кожному $W_i, i > 0$, ізоморфну копію $\langle W_i, \Delta_i \rangle$ системи $\langle S, \Delta \rangle$. Зрозуміло, що самі копії є ізоморфними і поміж собою. Нехай $\Delta_i = \{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_n^{(i)}\}$ і нехай для кожних $i, j \geq 0$ $\varphi_{ij} : W_i \rightarrow W_j$ – відповідний ізоморфізм між системами $\langle W_i, \Delta_i \rangle$ та $\langle W_j, \Delta_j \rangle$. Покладемо $\bar{S} = \bigcup_{i \geq 0} W_i$, $\bar{\Delta} = \bigcup_{i \geq 0} (\Delta_i \cup \bigcup_{j \geq 0, j \neq i} \{\varphi_{i,j} f_k^{(j)} : f_k^{(j)} \in \Delta_j, k = \overline{1, n}\})$. Базис $\bar{\Delta}$ будемо називати розширенням базису Δ . Процедури $P = \langle T, S, C_0, C_{fin}, \Delta_1, \delta \rangle$ над базисом $\Delta_1 \subset \bar{\Delta}$, такі що $C_0 \subseteq T \times S, C_{fin} \subseteq T \times S$, будемо називати *розширеними* T -процедурами над базисом Δ , а оператори, які вони обчислюють – розширеними обчислювальними операторами над базисом Δ . За побудовою, в обчисленнях розширених T -процедур поміж проміжних можуть зустрічатись не тільки стани із S , а й їхні копії з W_i .

Лема 2. Нехай $P = \langle T, S, C_0, C_{fin}, \Delta, \delta \rangle$ – довільна процедура. Тоді існує така розширена процедура $Q = \langle T, S_1, C_0, C_{fin}, \Delta_1, \delta_1 \rangle$, що $P^{**} = Q^*$.

Доведення. Наведемо лише ідею побудови Q . Візьмемо P_1 – довільний розширений дублікат процедури P над базисом Δ . На початкових конфігураціях процедура Q переходить до їх копій у P_1 . Далі процедура Q працює як

P_1 . Під час переходу в заключну конфігурацію P_1 Q має можливість як продовжити обчислення в P_1 , так і повернути її оригінал, зупинивши обчислення. За побудовою, $Q^* = P^{**}$ QED.

Теорема (синтезу). Клас T – операторів, що обчислюються розширеними T -процедурами над базисом Δ , є замкненим у регулярній алгебрі $R = \langle \tilde{M}(T, S), \Xi_0 \rangle$.

Доведення. Нехай $P = \langle T_1, S_1, C_0, C_{fin}, \Delta_1, \delta_1 \rangle$ та $Q = \langle T_2, S_2, D_0, D_{fin}, \Delta_2, \delta_2 \rangle$ – довільні процедури. Лема 2 дозволяє обмежитись тільки обчисленнями й не розглядати гіперобчислення. Як і в лемі 2, у ході доведення будемо опускали окремі технічні деталі, обмежившись тією чи іншою мірою лише ідеями відповідних конструкцій. Відсутні деталі у разі необхідності можуть бути наведені окремо.

Зсуви. Нехай m – довільне натуральне число. Зсувом назад процедури P на m одиниць часу будемо називати процедуру ${}^{(m)}P$, з функцією керування δ_2 такою, що $\delta_2(\tau, s) = \delta(\tau + m, s)$ для всіх пар $(\tau, s) \in T_1 \times S_1$. Зсувом уперед процедури P на m одиниць часу будемо називати процедуру $P^{(m)}$, з функцією керування δ_2 такою, що $\delta_2(\tau, s) = \delta(\tau - m, s)$ для всіх пар $(\tau, s) \in T_1 \times S_1$. За побудовою, $(P^*)^{(m)} = (P^{(m)})^*$, ${}^{(m)}(P^*) = ({}^{(m)}P)^*$.

Дзеркальним відображенням процедури P будемо називати процедуру $P^r = \langle T_1, S_1, C_0^r, C_{fin}^r, \Delta_1, \delta_1^r \rangle$, де C_0^r, C_{fin}^r – симетричні образи відповідних сукупностей конфігурацій процедури P . Функція керування δ_1^r визначається таким чином: $(-\zeta, f) \in \delta_1^r(\tau, s) \Leftrightarrow (\zeta, f) \in \delta_1(\tau, s)$ для всіх пар $(\tau, s) \in T_1 \times S_1$. За побудовою, $(P^r)^* = (P^*)^r$.

Послідовне виконання $P \circ Q$ процедур P та Q визначається як така процедура $R = \langle T_1 \cup T_2, S_3, C_0, D_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює добуток функцій $R^* = P^* \circ Q^*$. Виберемо Q' – довільний дублікат процедури Q , стани якого не перетинаються зі станами процедури P . Спочатку процедура R працює як P . Для кожної з допустимих пар P (τ, s) такої, що $s \in S, \delta_1(\tau, s) = (\zeta, f)$ і $(\zeta, f(s)) \in C_{fin} \cap D_0$, покладемо $\delta_3(\tau, s) = \tilde{f}$, де $\tilde{f}$ спочатку переводить s у його копію, і вже до неї застосовує відповідну операцію $\bar{f}$ у Q' . Далі процедура R буде працювати як Q' . Під час переходу в заключну конфігурацію Q' R буде повертати її оригінал у Q . За побудовою, $R^* = P^* \circ Q^*$.

Пряме множення. Прямим добутком процедур P та Q є процедура $P \times Q = \langle T_1 \times T_2, S_1 \times S_2, E_0, E_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює функцію $P^* \times Q^*$. Покладемо $E_0 = \{((\tau_1, \tau_2), (s_1, s_2)) : (\tau_1, s_1) \in C_0, (\tau_2, s_2) \in D_0\}$,

$$E_{fin} = \{((\tau_1, \tau_2), (s_1, s_2)) : (\tau_1, s_1) \in C_{fin}, (\tau_2, s_2) \in D_{fin}\}, \Delta_3 = \{(f_1, f_2) : f_1 \in \Delta_1, f_2 \in \Delta_2\}.$$

Функція керування δ_3 працює з компонентами незалежно відповідно до функцій δ_1 і δ_2 . Якщо одна з компонент перейшла в заключну конфігурацію, а інша ні, то вона переходить у режим чекання, виконуючи тотожне перетворення свого стану. За побудовою, $(P \times Q)^* = P^* \times Q^*$.

Об'єднання та розгалуження. Розглянемо, наприклад, розгалуження. Нехай p – довільний предикат на $C_0 \cup D_0$. Розгалуженням процедур P, Q за предикатом p є процедура

$R = \langle T_1 \cup T_2, S_3, (C_0)_{p^+} \cup (D_0)_{p^-}, C_{fin} \cup D_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює функцію $(p \rightarrow P^* \# Q^*)$. Покажемо, як побудувати R . Візьмемо копії P', Q' процедур P та Q , стани яких не перетинаються. Процедура R початкові конфігурації, що належать області істинності (хибності) предиката p , переводить в їх копії в P' (відповідно в Q') і далі працює як $P'(Q')$. Наприкінці обчислення R повертає заключну конфігурацію до її оригіналу в $P(Q)$. За побудовою, $R^* = (p \rightarrow P^* \# Q^*)$.

α – ітерація. Нехай p – довільний предикат на $T_1 \times S_1$. α – ітерацією процедури P за предикатом p є процедура $R = \langle T_1, S_3, C_0, C_{fin} \cap \neg p(T \times S), \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює функцію $\{p \rightarrow P^*\}$. Покажемо, як побудувати R . Візьмемо довільний дублікат P' процедури P . Процедура R початкові конфігурації, що належать області істинності (хибності) предиката p , переводить в їх копії в P' і далі працює як P' . Коли P' переходить у свою заключну конфігурацію, і при цьому дублікат p у P' хибний на ній, то R повертає конфігурацію до оригіналу і завершує обчислення. За побудовою, $R^* = \{p \rightarrow P^*\}$.

Булеві композиції. Диз'юнкцією процедур P, Q називається процедура $R = \langle T_1 \cup T_2, S_3, C_0 \cap D_0, C_{fin} \cup D_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює диз'юнкцію операторів $P^* \vee Q^*$. Процедура R розпочинає роботу з переходу до прямого добутку процедур $P \times Q$. Якщо перша компонента переходить у заключну "істинну" конфігурацію, то R повертає її як заключну. Якщо обчислення за обома компонентами є результативними і P

повертає “хибу”, то R повертає як заключну конфігурацію Q . За побудовою, $R^* = P^* \vee Q^*$. Кон'юнкцією процедур P, Q називається процедура $R = \langle T_1 \cup T_2, S_3, C_0 \cap D_0, C_{fin} \cup D_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює кон'юнкцію операторів $P^* \wedge Q^*$. Як і в попередньому випадку, процедура R розпочинає роботу з переходу до прямого добутку процедур $P \times Q$. Якщо перша компонента переходить у заключну “хибну” конфігурацію, то R повертає її як заключну. Якщо обчислення за обома компонентами є результативними і P повертає “істинну” конфігурацію, то R повертає як заключну конфігурацію Q . За побудовою, $R^* = P^* \wedge Q^*$. Запереченням процедури P називається процедура $Q = \langle T_2, S_2, D_0, D_{fin}, \Delta_2, \delta_2 \rangle$, що обчислює оператор $\neg P^*$. Покажемо, як побудувати Q . Візьмемо довільну копію P' процедури P . Процедура Q початкові конфігурації переводить в їх копії в P' і далі працює як P' . Наприкінці обчислення Q повертає конфігурацію до оригіналу в P та інвертує “хибні” конфігурації в “істинні”, і навпаки. За побудовою, $Q^* = \neg P^*$. Імплікацією процедур P, Q називається процедура $R = \langle T_1 \cup T_2, S_3, C_0 \cap D_0, C_{fin} \cup D_{fin}, \Delta_3, \delta_3 \rangle$, що обчислює оператор $P^* \supset Q^*$. R розпочинає роботу з переходу до прямого добутку процедур $P \times Q$. Якщо за якоюсь із компонент обчислення безрезультативне, то таким буде й обчислення в R . Якщо P переходить у заключну “хибну” конфігурацію, то R повертає “істинну”. Якщо P повертає “істинну” конфігурацію, то R повертає заключну конфігурацію Q . За побудовою, $R^* = P^* \supset Q^*$ QED.

Теорема синтезу показує, що для довільного регулярного T – оператора над певним базисом завжди існує розширена T – процедура над відповідним базисом, яка його обчислює.

Більше того, можна показати, що у випадку конструктивності T -регулярних операторів відповідні результуючі T – процедури можна також задати конструктивно.

1. Зубенко В.В. Про деякі загальні питання інформатики // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – К., 1999. – Т. 16. – С.17-22; 2. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., 1965; 3. Капитанова Ю.В., Лещиневский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М., 1988.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 517.9

Є.В. Івохін, канд. фіз-мат. наук,
Л.Т. Аджубей, канд. фіз-мат. наук,
С.О. Волчков, канд. фіз-мат. наук

ПРО ЗАДАЧУ СПОСТЕРЕЖЕННЯ В НЕЧІТКИХ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМАХ

Розглянуто постановку та підхід до розв'язку задачі спостереження в невизначених нечітких різницевих моделях. Доведено, що розв'язок задачі може бути отримано в класі регулярних нечітких множин.

It is considered a statement and approach to decision of observation task in indeterminate fuzzy difference models. Proved, that a solution of this task can be got in class of regular fuzzy sets.

Загальні відомості. Як було зазначено в роботі С.А.Орловського [1], рівні зображення нечіткості (неточності, невизначеності) інформації можуть бути узагальнені за допомогою нечітких множин довільного степеня ієрархії.

Одним з таких зображень є поняття невизначених нечітких множин, яке вперше було запропоноване Ю.П.Піт'євим [2] і базується на неможливості точної оцінки рівня належності елементів $x \in X$ до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Нехай X – скінченновимірний нормований простір над полем дійсних чисел.

Визначення 1. Невизначеною нечіткою множиною (ННМ) $\tilde{A}$ в X будемо називати множину $\{(x, \mu(x); \tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)))\}$, в якій для кожного $x \in X$ значення функції $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) \in [0, 1]$ визначає рівень достовірності того, що величина $\mu(x) \in [0, 1]$ задає степінь включення x до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Наприклад, якщо $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = 1$, то цілком достовірно, що $\mu(x)$ задає степінь належності елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{A}$. Якщо $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = 0,5$, тоді невідомо, чи можна вважати, що $\mu(x)$ – рівень належності x до $\tilde{A}$ і, нарешті, якщо $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = 0$, то зовсім неправдоподібно, що $\mu(x)$ задає степінь включення x до $\tilde{A}$.

Розглянемо графічний приклад. Покладемо, що $X = [-1, 1]$, $\mu(x) = 1 - x^2$, $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = 1 - \mu(x) = x^2$.

При визначенні операцій над невизначеними нечіткими множинами потрібно звернути увагу на те, що формальне перенесення правил формування доповнення, перетину та об'єднання, що характерні для нечітких множин [1], неможливе. Невизначені нечіткі множини мають, у загальному випадку, більш складну структуру.

Для порівняння можна навести випадок невизначеної нечіткої множини "сфера у куті":

$$x \in X = [0,1]; \mu(x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}; \tau(x, \mu(x)) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Для подальшого розгляду сформулюємо поняття спряжених невизначених нечітких множин [1].

Визначення 2. Невизначена нечітка множина $\tilde{A}^*$ називається верхньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{A}$, якщо $\forall x \in X, \mu(x) \in [0,1], (x, \mu(x); \tau_{\tilde{A}^*}(x, \mu(x))) \in \tilde{A}$

$$\tau_{\tilde{A}^*}(x, \mu) = \sup_{\alpha \geq \mu} \tau_{\tilde{A}}(x, \alpha). \quad (1)$$

Визначення 3. Невизначена нечітка множина $\tilde{A}_*$ називається нижньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{A}$, якщо $\forall x \in X, \mu(x) \in [0,1], (x, \mu(x); \tau_{\tilde{A}_*}(x, \mu(x))) \in \tilde{A}$

$$\tau_{\tilde{A}_*}(x, \mu) = \sup_{\alpha \leq \mu} \tau_{\tilde{A}}(x, \alpha). \quad (2)$$

Тоді для довільних невизначених нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ справедливі твердження [3], що використовуються при визначенні поняття об'єднання $\tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Лема 1. Для двох невизначених нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$

$$\tau_{(\tilde{A} \cup \tilde{B})^*} = \max\{\tau_{\tilde{A}^*}, \tau_{\tilde{B}^*}\} \quad (3)$$

$$\tau_{(\tilde{A} \cup \tilde{B})_*} = \min\{\tau_{\tilde{A}_*}, \tau_{\tilde{B}_*}\}. \quad (4)$$

Лема 2. Для двох невизначених нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$

$$\tau_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x, \theta) = \sup_{\max(\alpha, \beta) = \theta} \left\{ \min\left(\tau_{\tilde{A}}(x, \alpha), \tau_{\tilde{B}}(x, \beta)\right) \right\}. \quad (5)$$

Лема 3. Нехай $\tilde{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$, тоді

$$\tau_{\tilde{A}_*}(x, \mu) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\tau_{\tilde{A}_\lambda^*}(x, \mu) \right), \quad (6)$$

$$\tau_{\tilde{A}^*}(x, \mu) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \left(\tau_{\tilde{A}_\lambda^*}(x, \mu) \right), \quad (7)$$

$$\tau_{\tilde{A}}(x, \mu) = \inf_{\sup \alpha(\lambda) = \mu} \left\{ \inf_{\lambda \in \Lambda} \tau_{\tilde{A}_\lambda}(x, \alpha(\lambda)) \right\}. \quad (8)$$

Припустимо, що для невизначеної нечіткої множини $\tilde{A}$ виконується умова:

$$\begin{aligned} \exists x: \left(x, \mu_1(x), \tau_{\tilde{A}}^1(x, \eta_1(x)) \right) \in \tilde{A}, \\ \left(x, \mu_2(x), \tau_{\tilde{A}}^2(x, \mu_2(x)) \right) \in \tilde{A} \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді, виходячи з наведених вище визначень, нескладно зрозуміти, що для будь-якої невизначеної нечіткої множини $\tilde{A}$ можна отримати нечітку множину $\tilde{A}$ заданого рівня достовірності $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = \beta$. Будемо позначати такі множини $\tilde{A}_\beta$:

$$\tilde{A}_\beta = \left\{ \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \right\} \in E^n : \tau_{\tilde{A}}(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \geq \beta \right\}. \quad (10)$$

За таких умов невизначена нечітка множина $\tilde{A}$ може бути зображена у вигляді

$$\tilde{A} = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \tilde{A}_\beta, \quad (11)$$

де $\tilde{A}_\beta$ – невизначена нечітка множина з рівнем достовірності $\tau_{\tilde{A}}(x, \mu(x)) = \beta, x \in X, \mu(x) \in [0,1], (x, \mu(x)) \in E^n$.

Визначення 4. Невизначену нечітку множину $\tilde{V}$ будемо називати β -регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо регулярною буде множина $\tilde{V}_\beta$.

Визначення 5. Невизначену нечітку множину $\tilde{V}$ будемо називати нормовано β -регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо нормовано регулярною буде множина $\tilde{V}_\beta$.

Визначення 6. Невизначену нечітку множину $\tilde{V}$ будемо називати регулярною, якщо для $\forall \beta \in [0,1]$ нечітка множина $\tilde{V}_\beta$ буде нормовано регулярною або, іншими словами, для $\forall \beta \in [0,1]$ множина $\tilde{V}$ буде нормовано β -регулярною.

Визначення 7. Невизначеним нечітким відображенням Q з X в Y називається невизначена нечітка множина Q в $X \times Y$ ($X \times Y; \mu(x, y); \tau_Q(x, y, \mu(x, y))$), для якої функція $\tau_Q(x, y, \mu(x, y))$ задає рівень достовірності того, що $\mu(x, y)$ визначає степінь відношення між $x \in X$ і $y \in Y$.

Визначення 8. Невизначене нечітке відображення $R: X \rightarrow Y$ називається регулярним, якщо образом регулярної невизначеної нечіткої множини в X при цьому відображенні є регулярна невизначена нечітка множина в Y .

Основні результати. Нехай множина $T = \{0, 1, 2, \dots, M\}$, де M – деяке наперед задане додатне число, визначає моменти часу. Позначимо через $T_r = \{t_1, t_2, \dots, t_r\} \subset T$ послідовність моментів часу з T , упорядкованих за зростанням.

Розглянемо об'єкт спостереження, що описується різницевою невизначеною нечіткою системою

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

де $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0$ – невизначена нечітка множина початкових станів; $\tilde{X}(t_k) = \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ – невизначені нечіткі множини можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, $R(t_k) = R_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ – деякі невизначені нечіткі відображення з E^n в E^n , що визначають переходи системи (E^n – простір усіх нечітких множин для універсальної множини R^n).

Розв'язок системи (12) для довільного початкового стану $\tilde{X}_0$ складається з послідовності невизначених нечітких множин $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$, для яких виконуються рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= R_0 \circ \tilde{X}_0, \\ \tilde{X}_{k+1} &= R_k \circ \tilde{X}_k = R_k \circ R_{k-1} \circ \tilde{X}_{k-1} = \dots = \\ &= R_k \circ R_{k-1} \circ \dots \circ R_0 \circ \tilde{X}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Визначення 1.1. Траєкторією системи (12) назвемо послідовність нечітких множин $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$, для яких справедливі співвідношення:

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Варто відмітити, що будь-який розв'язок $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ системи (12) складається із сукупності траєкторій $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$.

Розглянемо динаміку об'єкта за різними рівняннями достовірності $\beta \in [0,1]$. Припустимо, що для невизначених нечітких множин $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ виконується умова (11):

$$\tilde{X}_k = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де $\tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ – невизначені нечіткі множини з рівнем достовірності $\tau(x, \mu(x)) = \beta, \quad \beta \in [0,1]$.

Позначимо через $\tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ нечіткі множини, які будуть носіями відповідних невизначених нечітких множин $\tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\tilde{X}_k^\beta = \text{supp} \tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Нехай $\tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ – нормовано регулярні нечіткі множини.

Визначення 1.2. Під траєкторією, що реалізувалася на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$, будемо розуміти послідовність нечітких множин $\tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$, для елементів яких справедливо

$$x_k^\beta \in \text{supp} \tilde{X}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \beta \in [0,1], \quad (17)$$

для $\forall k = 0, 1, 2, \dots \exists$ – єдиний елемент $\bar{x}_k^\beta: \mu(\bar{x}_k^\beta) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$.

Інформація про реалізовані стани системи (12) задається у вигляді послідовності невизначених нечітких множин $\tilde{Y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Аналогічно (15) зобразимо ці множини за рівнем достовірності:

$$\tilde{Y}_k = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \tilde{Y}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

де $\tilde{Y}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – невизначені нечіткі множини з рівнем достовірності $\tau(x, \mu(x)) = \beta$, $\beta \in [0, 1]$.

Позначимо

$$\tilde{Y}_k^\beta = \text{supp} \tilde{Y}_k^\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (19)$$

Тоді на кожному рівні достовірності інформація про реалізовані стани буде задаватися послідовностями нечітких множин $\tilde{Y}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$, для яких справедлива умова:

$$y_k^\beta \in \text{supp} \tilde{Y}_k^\beta, \quad \tilde{Y}_k^\beta = \tilde{C}_{k-1} \circ \tilde{Y}_{k-1}^\beta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \beta \in [0, 1], \quad (20)$$

де $\tilde{C}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – нечіткі відображення.

Послідовність $\tilde{Y}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ будемо називати реалізованим виходом з рівнем достовірності $\beta \in [0, 1]$, що породжується реалізованими станами $\tilde{X}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (16).

Нехай нечіткі множини $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$ задають деякий вихід, що реалізується. Необхідно описати нечітку множину $\tilde{X}_0^{\beta*}$, $\beta \in [0, 1]$ початкових станів, сумісних із заданим виходом, у яких множини можливих виходів близькі до $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$ у деякому розумінні. Нечітку множину $\tilde{X}_0^{\beta*}$ назвемо розв'язком задачі спостереження для невизначеної нечіткої системи (12) на рівні достовірності $\beta \in [0, 1]$ при заданому виході $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$. Тоді невизначену нечітку множину $\tilde{X}_0 = \bigcup_{\beta \in [0,1]} (\tilde{X}_0^{\beta*}, \beta)$ будемо називати розв'язком задачі спостереження для невизначеної нечіткої системи (12) при спостереженні реалізованих станів системи $\tilde{Y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Позначимо

$$S_k^{\beta*} = \left\{ \tilde{X}_k^\beta \in E^n : \mu_{\tilde{C}_k} \left(x_k^\beta, y_k^{\beta*} \right) > 0, x_k^\beta \in \text{supp} \tilde{X}_k^\beta, y_k^{\beta*} \in \text{supp} \tilde{Y}_k^{\beta*} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \beta \in [0, 1]. \quad (21)$$

Скореговану траєкторію системи (12) на рівні достовірності $\beta \in [0, 1]$ складають нечіткі множини $\tilde{Z}_0^\beta = \tilde{X}_0^\beta$, $\tilde{Z}_k^\beta$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\tilde{Z}_k^\beta = \tilde{X}_k^\beta \cap S_k^{\beta*}. \quad (22)$$

Початковий стан $\tilde{X}_0^\beta$ на рівні достовірності $\beta \in [0, 1]$ сумісний із заданим виходом $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, якщо $\tilde{Z}_k^\beta \neq \emptyset$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Множину всіх початкових станів на рівні достовірності $\beta \in [0, 1]$, сумісних із $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$, позначимо як $E_{\beta S}^n$. З іншого боку, якщо для заданого початкового стану $\tilde{X}_0^\beta$, $\beta \in [0, 1]$, сумісного із заданим виходом $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$, скореговані множини $\tilde{Z}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ є нормовано регулярними нечіткими множинами, то множину таких початкових станів позначимо $E_{\beta R}^n$ ($E_{\beta R}^n$ – сукупність нормовано регулярних нечітких початкових станів).

Лема 1.1. Для $\forall \beta \in [0, 1]$ кожний нормовано регулярний нечіткий початковий стан сумісний із заданим виходом:

$$E_{\beta R}^n \subseteq E_{\beta S}^n. \quad (23)$$

Це означає, що невизначена нечітка множина $\tilde{X}_0^\beta$ є β -регулярною, $\beta \in [0, 1]$.

Лема 1.2. Якщо $\tilde{X}_0^\beta$ – нормовано регулярний нечіткий початковий стан для $\forall \beta \in [0, 1]$, то $\mu_{\tilde{C}_k} \left(\tilde{X}_k^\beta, y_k^{\beta*} \right) > 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$, $\tilde{X}_k^\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – траєкторія системи (12), що реалізувалася на рівні достовірності $\beta \in [0, 1]$ з початковим станом $\tilde{X}_0^\beta$.

Лема доведено в роботі [3].

Справедливі

Твердження 1.1. Для довільного виходу $\tilde{Y}_k^{\beta*}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta \in [0, 1]$ з рівнем достовірності $\beta \in [0, 1]$, для якого справедливо (19), існує відповідного рівня достовірності траєкторія системи (12) з нормовано регулярним початковим станом, яка сумісна із заданим виходом.

Твердження 1.2. Справедливе співвідношення

$$E_R^n = \bigcup_{\beta \in [0, 1]} E_{\beta R}^n, \quad (24)$$

де E_R^n – регулярна невизначена нечітка множина початкових станів, сумісних із заданим виходом

$$\tilde{Y}_k^* = \bigcup_{\beta \in [0, 1]} \tilde{Y}_k^{\beta*}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1. Орловський С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. – М., 1981; 2. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. – М., 2000; 3. Івохін Є.В., Вадньов Д.О. Про підхід до прийняття рішень на основі застосування невизначених нечітких множин // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 3. – С. 201-205.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 517.929.4

И.В. Коварж, асп.

ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ЗА ЧАСОМ

Приведено загальний розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням. При побудові розв'язку використано функцію, яка називається запізнілим експоненціалом.

The general solution of one-dimensional thermal conductivity equation with delay is introduced in the article. Function named delaying exponential is applied to the construction of the solution.

Диференціальні рівняння є математичним апаратом, що найчастіше використовується при моделюванні динамічних процесів. Процеси, у яких поточний стан залежить від попередньої історії, описуються диференціальними рівняннями з післядією. Найчастіше використовуються диференціально-різницеві рівняння із запізненням. Робіт, присвячених дослідженню рівнянь такого типу, досить багато [1-7]. У той же час рівнянням з розподіленими параметрами із запізненням приділяється не так багато уваги [2, 8].

У роботі розглянуто одновимірне рівняння теплопровідності із запізненням. Введено спеціальну функцію, яку називають запізнілим експоненціалом. За її допомогою отримано компактну форму розв'язку першої крайової задачі рівняння теплопровідності.

Попередні відомості. Зображення розв'язку задачі Коші лінійного рівняння із запізненням. Як відомо, розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $\dot{x}(t) = ax(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = x_0$ має вигляд $x(t) = x_0 e^{at}$, де

функція e^{at} може бути зображена рядом $e^{at} = 1 + a \frac{t}{1!} + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^k \frac{t^k}{k!} + \dots$.

Розглянемо аналогічне диференціальне рівняння, але вже із запізненням:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1)$$

Тут $\varphi(t)$ – довільна неперервно диференційовна функція, що визначає початкові умови.

Покажемо, що розв'язок задачі Коші для рівняння із запізненням може бути записано в інтегральному вигляді з використанням функції, схожої на експоненту, і початкової умови $\varphi(t)$ [9, 10].

Визначення 1. Запізнілим експоненціалом e_{τ}^{bt} назовемо функцію, що має вигляд

$$e_{\tau}^{bt} = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t < 0, \\ 1 + b \frac{t}{1!} + b^2 \frac{(t - \tau)^2}{2!} + \dots + b^k \frac{[t - (k - 1)\tau]^k}{k!}, & (k - 1)\tau \leq t < k\tau \end{cases} \quad (2)$$

полінома степеня k на проміжках $(k - 1)\tau \leq t < k\tau$, склеєного у вузлах $t = i\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Приведемо ряд тверджень, що характеризують властивості функції e_{τ}^{bt} .

Лема 1. При довільному b справедливим є таке правило диференціювання:

$$\frac{d}{dt} e_{\tau}^{bt} = b e_{\tau}^{b(t - \tau)}, \quad (3)$$

тобто запізнілий експоненціал є розв'язком рівняння із чистим запізненням $\frac{d}{dt} x(t) = bx(t - \tau)$, що задовольняє однічну початкову умову.

Доведення. Нехай величини b і τ фіксовані. Тоді для довільного моменту часу t : $(k-1)\tau < t \leq k\tau$ буде виконуватися співвідношення

$$\frac{d}{dt} e_{\tau}^{bt} = \frac{d}{dt} \left[1 + b \frac{t}{1!} + b^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + b^k \frac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!} \right],$$

де $k = \left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil + 1$, $[\bullet]$ – функція цілої частини числа. Продиференціювавши вираз у дужках, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_{\tau}^{bt} &= b + b^2 \frac{t-\tau}{1!} + b^3 \frac{(t-2\tau)^2}{2!} + \dots + b^k \frac{[t-(k-1)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= b \left[1 + b \frac{(t-\tau)}{1!} + b^2 \frac{(t-2\tau)^2}{2!} + \dots + b^{k-1} \frac{[t-(k-1)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \right] = b e_{\tau}^{b(t-\tau)}, \end{aligned}$$

що й необхідно було довести.

Лема 2. Для запізнілого експоненціалу справедливим є таке правило інтегрування:

$$\int_0^t e_{\tau}^{b\xi} d\xi = b^{-1} [e_{\tau}^{b(t+\tau)} - e_{\tau}^{b\tau}]. \quad (4)$$

Доведення. Нехай b і τ – фіксовані величини. Тоді для довільного моменту часу t : $(k-1)\tau < t \leq k\tau$ і $\xi < t$:

$$(l-1)\tau < \xi \leq l\tau \text{ буде виконуватися } \int_0^t e_{\tau}^{b\xi} d\xi = \int_0^t \left[1 + b \frac{\xi}{1!} + b^2 \frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \dots + b^l \frac{[\xi-(l-1)\tau]^l}{l!} \right] d\xi.$$

Узявши інтеграл від кожного з членів, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^t e_{\tau}^{b\xi} d\xi &= \left[\xi + b \frac{\xi^2}{2!} + b^2 \frac{(\xi-\tau)^3}{3!} + \dots + b^l \frac{[\xi-(l-1)\tau]^{l+1}}{(l+1)!} \right]_{\xi=0}^{\xi=t} = \\ &= b^{-1} \left[1 + b(\xi+\tau) + b^2 \frac{[(\xi+\tau)-\tau]^2}{2!} + b^3 \frac{[(\xi+\tau)-2\tau]^3}{3!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + b^{l+1} \frac{[(\xi+\tau)-l\tau]^{l+1}}{(l+1)!} - 1 - b\tau \right]_{\xi=0}^{\xi=t}. \end{aligned}$$

$$\text{Перетворивши вираз у дужках, отримуємо } \int_0^t e_{\tau}^{b\xi} d\xi = b^{-1} [e_{\tau}^{b(\xi+\tau)} - 1 - b\tau]_{\xi=0}^{\xi=t} = b^{-1} [e_{\tau}^{b(t+\tau)} - e_{\tau}^{b\tau}] \text{ або одержуємо}$$

залежність (4).

Лема 3. Запізнілий експоненціал e_{τ}^{bt} , $t \geq 0$ є майже всюди нескінченне число раз неперервно диференційовною функцією. У вузлах $t = k\tau$, $k = 1, 2, \dots$ відбувається розрив $(k+1)$ -ї похідної:

$$\left(e_{\tau}^{bt} \right)_{t=k\tau-0}^{(k+1)} = 0, \quad \left(e_{\tau}^{bt} \right)_{t=k\tau+0}^{(k+1)} = b^{k+1}. \quad (5)$$

Доведення. У проміжках $(k-1)\tau \leq t < k\tau$ між вузлами запізнілий експоненціал e_{τ}^{bt} є поліномом k -го степеня і тому нескінченне число раз неперервно диференційовною функцією. Як випливає із залежності (6), у вузлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$ буде виконуватися $\lim_{t \rightarrow k\tau-0} (e_{\tau}^{bt})^{(k+1)} = 0$, $\lim_{t \rightarrow k\tau+0} (e_{\tau}^{bt})^{(k+1)} = b^{k+1}$, тобто отримаємо твердження леми 3.

Лема 4. Функція

$$x_0(t) = e^{at} e_{\tau}^{Bt}, \quad B = e^{-a\tau} b, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

є розв'язком лінійного однорідного рівняння із запізненням (1), що задовольняє початкову умову

$$x_0(t) = e^{at}, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (7)$$

Доведення. Виконання функцією $x_0(t)$ умови (7) випливає з визначень для експоненціалів e^{at} і e_{τ}^{Bt} . Покажемо, що при $t \geq 0$ функція $x_0(t)$ є розв'язком рівняння (1). Продиференціювавши (6), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{at} e_{\tau}^{Bt}) &= a(e^{at} e_{\tau}^{Bt}) + e^{at} B e_{\tau}^{B(t-\tau)} = a(e^{at} e_{\tau}^{Bt}) + e^{at} e^{-a\tau} b e_{\tau}^{B(t-\tau)} = \\ &= a(e^{at} e_{\tau}^{Bt}) + b(e^{a(t-\tau)} e_{\tau}^{B(t-\tau)}). \end{aligned}$$

З огляду на позначення (7), одержуємо $\frac{d}{dt} x_0(t) = ax_0(t) + bx_0(t-\tau)$, тобто одержуємо твердження леми 4.

Теорема 1. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1), що задовольняє початкову умову $x(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, має вигляд

$$x(t) = e^{a(t+\tau)} e_{\tau}^{Bt} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} e^{a\tau} [\varphi'(s) - a\varphi(s)] ds. \quad (8)$$

Доведення. Розв'язок рівняння (1), що задовольняє початкову умову $x(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, будемо шукати у вигляді

$$x(t) = x_0(t)c + \int_{-\tau}^0 x_0(t-\tau-s)y(s)ds. \quad (9)$$

Тут c – невідома постійна, $y(t)$ – невідома неперервно диференційовна функція, функція $x_0(t)$ визначена в (6). Оскільки, як випливає з леми 4, функція $x_0(t)$ є розв'язком рівняння (1), то при довільних c і $y(t)$ вираз (8) також буде розв'язком рівняння (1). Виберемо c і $y(t)$ таким чином, щоб виконувалися початкові умови, тобто $x(t) \equiv \varphi(t)$,

$-\tau \leq t \leq 0$, або, з огляду на (9), $x_0(t)c + \int_{-\tau}^0 x_0(t-\tau-s)y(s)ds \equiv \varphi(t)$. Покладемо $t = -\tau$. Як випливає з (2) і (6),

$x_0(-\tau) = e^{-a\tau}$, $x_0(-2\tau-s) = 0$, якщо $-\tau < s \leq 0$ і $x_0(-2\tau-s) = e^{-a\tau}$, якщо $s = -\tau$. Тому $\varphi(-\tau) = e^{-a\tau}c$, $c = e^{a\tau}\varphi(-\tau)$, і залежність (9) набуває вигляду

$$x(t) = e^{a(t+\tau)} e_{\tau}^{Bt} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} y(s)ds.$$

Розіб'ємо інтеграл на два:

$$\varphi(t) = e^{a(t+\tau)} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^t e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} y(s)ds + \int_t^0 e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} y(s)ds.$$

У першому інтегралі $-\tau \leq s \leq t$, тому $-\tau \leq t-\tau-s \leq t$ і запізнілий експоненціал дорівнює $e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} \equiv 1$, $-\tau \leq s \leq t$.

У другому інтегралі $t \leq s \leq 0$, тому $t-\tau \leq t-\tau-s \leq -\tau$ і запізнілий експоненціал дорівнює $e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} = 0$, якщо $0 \leq s < t$ і $e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} = 1$, якщо $s = t$. У такий спосіб на проміжку $-\tau \leq t \leq 0$ одержуємо

$$e^{a(t+\tau)} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^t e^{a(t-\tau-s)} y(s)ds = \varphi(t). \quad (10)$$

Продиференціюємо отриману залежність (10):

$$ae^{a(t+\tau)} \varphi(-\tau) + a \int_{-\tau}^t e^{a(t-\tau-s)} y(s)ds + e^{-a\tau} y(t) = \varphi'(t). \quad (11)$$

Розв'язуючи систему (10), (11), отримуємо $y(t) = e^{a\tau} [\varphi'(t) - a\varphi(t)]$. Підставивши отриманий вираз у (9), отримуємо твердження (8) теореми 1.

Зауваження 1. Залежність (8) можна переписати у вигляді

$$x(t) = e^{a\tau} \left\{ x_0(t) \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 x_0(t-\tau-s) [\varphi'(s) - a\varphi(s)] ds \right\}.$$

Зауваження 2. Якщо $a = 0$, тобто рівняння (1) є рівнянням із чистим запізненням, отримуємо результати, наведені в [9]: $x(t) = e_{\tau}^{bt} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} \varphi'(s)ds$.

Розглянемо задачу Коші для неоднорідного рівняння із запізненням:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau) + f(t), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0. \quad (12)$$

Теорема 2. Розв'язок $\overline{x(t)}$ неоднорідного рівняння (12), що задовольняє нульові початкові умови, має вигляд

$$\overline{x(t)} = \int_0^t e^{a(t-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} f(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Доведення. Оскільки $x_0(t)$, визначене в (6) – розв'язок однорідного рівняння (1), то використовуючи метод варіації довільної сталої, розв'язок $\overline{x(t)}$ неоднорідного рівняння (12) будемо шукати у вигляді

$$\overline{x(t)} = \int_0^t e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} c(s)ds,$$

де $c(s)$, $0 \leq s \leq t$ – невідома функція. Продиференціювавши записаний вираз, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \overline{x(t)} = e^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} c(s) \Big|_{s=t} + \int_0^t \left[ae^{a(t-\tau-s)} e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} + e^{a(t-\tau-s)} B e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)} \right] c(s)ds.$$

Використовуючи значення B , зображене в (6), підставивши залежність (13) і отриману похідну в рівняння (12), запишемо

$$e^{-a\tau}c(t) + \int_0^t \left[ae^{a(t-\tau-s)}e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} + be^{a(t-2\tau-s)}e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)} \right] c(s)ds = \\ = a \left[\int_0^t e^{a(t-\tau-s)}e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)}c(s)ds \right] + b \left[\int_0^{t-\tau} e^{a(t-2\tau-s)}e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)}c(s)ds \right] + f(t).$$

Звідси $e^{-a\tau}c(t) + \int_{t-\tau}^t be^{a(t-2\tau-s)}e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)}c(s)ds = f(t)$. Оскільки $e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)} = 0$ при $t-\tau < s \leq t$ і $e_{\tau}^{B(t-2\tau-s)} = 1$ при

$s = t - \tau$, то отримуємо $e^{-a\tau}c(t) = f(t)$ і $c(t) = e^{a\tau}f(t)$. Звідси впливає залежність (13).

Основні результати. Розв'язок рівняння теплопровідності із запізненням. Розглянемо одномірне рівняння теплопровідності із запізненням

$$u_t(x, t) = a_1^2 u_{xx}(x, t) + a_2^2 u_{xx}(x, t - \tau) + c_1 u(x, t) + c_2 u(x, t - \tau) + f(x, t), \quad (14)$$

визначене при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Розглядається перша крайова задача. Початкова умова має вигляд $u(x, t) = \Phi(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$, а крайові $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, $t \geq -\tau$. Розв'язок шукається у вигляді суми $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t)$. Тут функції $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ визначаються в такий спосіб:

1) $u_1(x, t)$ – розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t - \tau)}{\partial x^2} + c_1 u_1(x, t) + c_2 u_1(x, t - \tau)$$

з нульовими крайовими $u_1(0, t) = 0$, $u_1(l, t) = 0$, $t \geq -\tau$ і ненульовою початковою $u_1(x, t) = \Phi(x, t)$,

$\Phi(x, t) = \Phi(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ умовами;

2) $u_2(x, t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t - \tau)}{\partial x^2} + c_1 u_2(x, t) + c_2 u_2(x, t - \tau) + F(x, t),$$

$$F(x, t) = f(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\dot{\mu}_2(t) - \dot{\mu}_1(t)], \quad 0 \leq x \leq l$$

з нульовими крайовими $u_2(0, t) = 0$, $u_2(l, t) = 0$, $t \geq -\tau$ і нульовою початковою $u_2(x, t) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ умовами;

3) $u_3(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]$.

1). Розглянемо перше рівняння, тобто однорідне рівняння із запізненням:

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t - \tau)}{\partial x^2} + c_1 u_1(x, t) + c_2 u_1(x, t - \tau) \quad (15)$$

з нульовими крайовими $u_1(0, t) = 0$, $u_1(l, t) = 0$, $t \geq -\tau$ і ненульовою початковою $u_1(x, t) = \Phi(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ умовами. Його розв'язок будемо шукати методом Фур'є, тобто функція $u_1(x, t)$ буде шукатися у вигляді добутку $u_1(x, t) = X(x)T(t)$. Після підстановки значення $u_1(x, t)$ з останньої формули в однорідне рівняння (15) отримуємо

$$X(x)T'(t) = a_1^2 X''(t) + a_2^2 X''(x)T(t - \tau) + c_1 X(x)T(t) + c_2 X(x)T(t - \tau).$$

$$\text{Далі ділимо змінні й отримуємо} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t - \tau)}{a_1^2 T(t) + a_2^2 T(t - \tau)} = -\lambda^2.$$

Рівняння розщеплюється на два:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \quad T'(t) + (\lambda^2 a_1^2 - c_1)T(t) + (\lambda^2 a_2^2 - c_2)T(t - \tau) = 0. \quad (16)$$

Оскільки граничні умови нульові, то для першого рівняння отримуємо нульові крайові умови $X(0) = 0$, $X(l) = 0$.

Ненульовим розв'язок буде лише при $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ і кожному власному значенню $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ відповіда-

тиме розв'язок $X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, 3, \dots$, де A_n – довільна стала. Підставляючи отримані значення $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ у друге рівняння (16), отримуємо диференціальні рівняння з аргументом, що спізнюється:

$$\dot{T}_n(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] T_n(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2 \right)^2 \right] T_n(t - \tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Визначимо початкові умови для кожного з рівнянь (17) у такий спосіб. Розкладемо функцію $\Phi(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ у ряд за власними функціями першого рівняння, тобто зобразимо у вигляді

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Тоді початкові умови для кожного з $n = 1, 2, 3, \dots$ рівнянь (17) будуть мати вигляд $T_n(t) = \Phi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $-\tau \leq t \leq 0$. Одержимо розв'язок задачі Коші для рівнянь (15) в аналітичному вигляді. Уведемо додаткові позначення.

Нехай $D_n = \begin{bmatrix} c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \\ c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2 \right)^2 \end{bmatrix} e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] \tau}.$

Як випливає із залежності (8), розв'язок задач Коші для кожного з рівнянь (17) має вигляд

$$T_n(t) = e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] (t+\tau)} e^{D_n(t-\tau)} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] (t-s)} e^{D_n(t-\tau-s)} [\Phi'_n(s) - a \Phi_n(s)] ds$$

або

$$T_n(t) = e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] \tau} \left\{ e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] t} e^{D_n(t-\tau)} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] (t-\tau-s)} e^{D_n(t-\tau-s)} [\Phi'_n(s) - a \Phi_n(s)] ds \right\} \quad (18)$$

Звідси розв'язок першої крайової задачі для рівняння (8) з аргументом, що спізнюється, має вигляд

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] \tau} \times \left\{ e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] t} e^{D_n(t-\tau)} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] (t-\tau-s)} e^{D_n(t-\tau-s)} [\Phi'_n(s) - a \Phi_n(s)] ds \right\} \quad (19)$$

2). Розглянемо друге рівняння, тобто неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t - \tau)}{\partial x^2} + c_1 u_2(x, t) + c_2 u_2(x, t - \tau) + F(x, t) \quad (20)$$

з нульовими крайовими $u_2(0, t) = 0$, $u_2(l, t) = 0$, $t \geq -\tau$ і нульовою початковою $u_2(x, t) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$ умовами. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Фур'є за власними функціями $\sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, \dots$

$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, \dots$, вважаючи при цьому t параметром. Зобразимо функцію $F(x, t)$ у вигляді ряду

$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$, $F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$. Тоді кожна з функцій $u_{2n}(t)$, $n = 1, 2, \dots$ є розв'язком рівняння

$$\dot{u}_{2n}(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] u_{2n}(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2 \right)^2 \right] u_{2n}(t - \tau) + F_n(t) \quad (21)$$

з нульовою початковою умовою $u_{2n}(t) \equiv 0$, $-\tau \leq t \leq 0$.

Використовуючи залежність (13), запишемо розв'язок задачі Коші рівняння (21) з нульовими початковими умова-

ми у вигляді $u_{2n}(t) = \int_0^t e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} F_n(\xi) d\xi.$

Розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності із запізненням (20) з нульовими крайовими й початковою умовами має вигляд

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} F_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Розв'язок задачі Коші одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності із запізненням має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \tau} \times$$

$$\left\{ e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] t} e_{\tau}^{D_n(t-\tau)} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-\tau-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} [\Phi_n'(s) - a \Phi_n(s)] ds \right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} F_n(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)],$$

де

$$D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2 \right)^2 \right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] \tau},$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds, \quad \Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi,$$

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad F(x, t) = f(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984; 2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971. – С. 240; 3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., 1972; 4. Колмановский В.Б., Носие В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М., 1981; 5. Kolmanovskiy V.B., Mishkis A.D., 6. El-Kebir Bourkas, Zi-Kuan Liu. Deterministic and Stochastic Time Delay Systems. – Birkhauser, Boston-Basel-Berlin. – 2002; 7. Хусаинов Д.Я., Шатирко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных уравнений. – К., 1997; 8. Ткач Б.П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом. // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3. – №10. – С. 1796–1800; 9. Хусаинов Д.Я., Шуклин Г.В. Керування в системах з чистим запізненням // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 267-275; 10. Khusainov D.Ya., Benditkis D.B., Shuklin G.V. Terminal Control in Dynamical System with Delay. Application of Mathematics in Engineering and Economics. Proceeding of the 28-th International Summer School. – 08-11 June 2002. – Sozopol, Bulgaria, 2003. – P. 87-102; 11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1966; 12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1988.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 519. 872

Д.А. Ключин, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Ю.И. Петунін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

СТАТИСТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ ДЛЯ ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ІМОВІРНОСТЕЙ

Запропоновано статистичні критерії для порівняння двох імовірностей у випадку залежних випробувань. Показано, що асимптотичний рівень значущості цих критеріїв не перевищує 0,05.

In this paper statistical tests for comparing two probabilities in the case of dependent trials are proposed. It is shown that the asymptotic significance levels of these tests do not exceed 0,05.

1. Вступ. Нагадаємо, що схемою Бернуллі B називається послідовність незалежних випробувань (випадкових експериментів $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$), у результаті кожного з яких може відбутися випадкова подія A з однією й тією ж імовірністю p : $p(E_i, A) = p, i = 1, 2, \dots, n, \dots$. Розглянемо дві схеми Бернуллі B_1 і B_2 з випадковими експериментами

E_n^1 і E_n^2 , $n = 1, 2, \dots$, до того ж $p(E_n^1, A_1) = p_1$, $p(E_n^2, A_2) = p_2$. Нехай здійснюються n_1 випробувань у схемі B_1 і n_2

випробувань – у схемі B_2 . Знайдемо частоти $h_1 = \frac{k_1}{n_1}$ і $h_2 = \frac{k_2}{n_2}$, що відповідають імовірностям p_1 і p_2 . Проблема

порівняння двох імовірностей полягає в тому, щоб побудувати статистичний критерій, що дозволяє за наявними частотами h_1 і h_2 зробити висновок про значуще відхилення імовірностей p_1 і p_2 . За умови незалежності частот h_1 і

h_2 цю проблему можна розв'язати за допомогою критерію χ^2 або іншими методами [1, 2]. Нажаль, це припущення далеко не завжди виконується при розв'язанні багатьох задач у біології та медицині. Наприклад, при дослідженні розподілів частот деяких захворювань за діапазонами поглинених доз радіації серед ліквідаторів виникає задача: у першому діапазоні доз частота захворювання D дорівнює h_1 , у другому – h_2 , так що $h_1 + h_2 = 1$. Необхідно з'ясувати, чи істотно відрізняються відповідні ймовірності p_1 і p_2 . Очевидно, що в цьому випадку частоти h_1 і h_2 є залежними,

тому умови застосовності критерію χ^2 відсутні. Інший приклад, у якому частоти h_1 і h_2 є залежними між собою – проблема порівняння ймовірностей того, що поглинена доза радіації у ліквідаторів знаходиться в заданому інтервалі I (подія A_1), а в деякій частині ліквідаторів (наприклад, ліквідаторів, що страждають на рак) поглинена доза радіації належить тому ж інтервалу I (подія A_2). У цьому випадку схема Бернуллі B_2 , що відповідає події A_2 , є частиною схеми Бернуллі B_1 , що відповідає події A_1 , і частоти цих подій h_1 і h_2 є залежними випадковими величинами.

Для побудови критерію, що дозволить би порівнювати невідомі ймовірності, можна застосувати довірчі інтервали для корельованих біноміальних часток, які були об'єктом досліджень у роботах Ньюкомба [3], а також Мея й Джонсона [4, 5]. Нажаль, незважаючи на велику цінність запропонованих методів, їх теоретичні властивості недостатньо глибоко вивчені, а обчислювальні складнощі виявилися занадто великими. З огляду на це постає питання про створення нових статистичних критеріїв, що ґрунтувалися б на більш точних і простих довірчих інтервалах для невідомої ймовірності у випадку залежних випробувань.

2. Оцінки дисперсії частоти випадкової події у схемі Бернуллі. Нехай B – схема Бернуллі, і в результаті кожного з випадкових експериментів E_i випадкова подія A може відбутися з імовірністю p . Очевидно, що частота h випадкової події A має математичне сподівання $m(h) = p$ і дисперсію

$$D(h) = \frac{pq}{n}, \text{ де } q = 1 - p. \quad (1)$$

Для побудови статистичних критеріїв порівняння двох імовірностей у багатьох випадках необхідно знайти довірчий інтервал для невідомої ймовірності p , а ця проблема, у свою чергу, вимагає обчислення оцінки для дисперсії $D(h)$, оскільки точне значення h залежить від невідомої ймовірності p .

Найгрубішу оцінку для $D(h)$ можна одержати на підставі простих міркувань: легко бачити, що добуток

$$pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}, \text{ якщо } 0 \leq p \leq 1, \text{ тому } D(h) \leq \frac{1}{4n}.$$

Для обчислення більш точних оцінок у формулі (1) слід замінити невідому ймовірність p на її незміщену оцінку – частоту h ; тоді ми одержимо таку оцінку для невідомої дисперсії $D(h)$:

$$s_n^2 = \frac{h(1-h)}{n}. \quad (2)$$

Нажалі, ця оцінка є зміщеною. Для доведення цього твердження введемо до розгляду випадкові величини

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в експерименті } E_i \text{ відбувається подія } A_i, \\ 0, & \text{якщо в експерименті } E_i \text{ не відбувається подія } A_i. \end{cases} \quad (3)$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} m(s_n^2) &= \frac{1}{n} (m(h) - m(h^2)) = \\ &= \frac{p}{n} - m\left(\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{i \neq k} x_i x_k \right)\right) = \\ &= \frac{p}{n} - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n m(x_k^2) + \sum_{i \neq k} m(x_i) m(x_k) \right) = \\ &= \frac{pq}{n} - \frac{1}{n^2} pq = \frac{(n-1)pq}{n^2} = \frac{n-1}{n} D(h). \end{aligned}$$

Тому, якщо покласти

$$\hat{s}_n^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{h(1-h)}{n-1}, \quad (4)$$

то одержимо незміщену оцінку для $D(h)$.

Зауважимо, що оцінка s_n^2 є асимптотично незміщеною, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = p$.

Для порівняння оцінок (3) і (4) слід розглянути дисперсію незміщеної оцінки $D(\hat{s}_n^2)$ і середньоквадратичну похибку $\Delta(s_n^2)$ оцінки s_n^2 :

$$\Delta(s_n^2) = m(s_n^2 - D(h))^2. \quad (5)$$

Легко бачити, що для незміщеної оцінки її середньоквадратична похибка перетворюється на дисперсію.

Теорема 1. При будь-якому натуральному $n \geq 2$

$$\Delta(\hat{s}_n^2) < D(\hat{s}_n^2). \quad (6)$$

Доведення. Знайдемо дисперсію оцінки $\hat{s}_n^2$

$$D(\hat{s}_n^2) = m\left(\frac{n}{n-1}s_n^2 - \frac{pq}{n}\right)^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2} m(s_n^4) - 2\frac{n}{n-1} \frac{pq}{n} m(s_n^2) + \frac{p^2 q^2}{n^2}$$

і середньоквадратичну похибку оцінки s_n^2 .

Для доведення нерівності (6) розглянемо різницю

$$I = D(\hat{s}_n^2) - \Delta(s_n^2) = \frac{2n-1}{(n-1)^2} m(s_n^4) - 2\frac{pq}{n(n-1)} m(s_n^2)$$

і покажемо, що $\forall n \geq 2 \quad I \geq 0$. З цією метою знайдемо математичні сподівання $m(h^2)$, $m(h^3)$ і $m(h^4)$. Маємо

$$m(h^2) = \frac{p}{n} + \frac{n-1}{n} p^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} m(h^3) &= m\left(\frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^3\right) = \frac{1}{n^3} m\left(\sum_{k=1}^n x_k^3 + \sum_{j \neq k} x_k^2 x_j + \sum_{k \neq j} x_j^2 x_k + \sum_{i \neq k, k \neq j, i \neq j} x_i x_k x_j\right) = \\ &= \frac{1}{n^3} (np + 2n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m(h^4) &= m\left(\frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^4\right) = \\ &= \frac{1}{n^4} m\left(\sum_{k=1}^n x_k^4 + \sum_{k \neq l} x_k^3 x_l + 2 \sum_{j \neq k} x_k^2 x_j^2 + 2 \sum_{k \neq j, l \neq j} x_k^2 x_j x_l + \sum_{i \neq j, j \neq k, k \neq l} x_i x_k x_j x_l + 3 \sum_{i \neq j, j \neq k, i \neq k} x_i^2 x_k x_j\right) = \\ &= \frac{1}{n^4} (np + 3n(n-1)p^2 + 5n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4). \end{aligned} \quad (9)$$

З формул (7)-(9) випливає, що

$$\begin{aligned} m(s_n^4) &= \frac{1}{n^2} (m(h^2) - 2m(h^3) + m(h^4)) = \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) p + \left(n - 1 - 4\frac{n-1}{n} + 3\frac{n-1}{n}\right) p^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2(n-1)(n-2)}{n} + 5\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right) p^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^2} p^4 \right). \end{aligned}$$

Отже, величина I має вигляд

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{2n-1}{n-1} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) p + \frac{-7n^2 + 10n - 3}{n^2} p^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2n-1)(4n^3 - 6n^2 + 9n - 10)}{n^2} p^3 + \frac{-11n^2 + 17n - 4}{n^2} p^4 \right) = \\ &= \frac{1}{n^3} p \left(\frac{2n-1}{n-1} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \left(-7 + \frac{10}{n} - \frac{3}{n^2}\right) p + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2n-1) \left(4n-6 + \frac{9}{n} - \frac{10}{n^2} \right) p^2 + \left(-11 + \frac{17}{n} - \frac{4}{n^2} \right) p^3 = \\
& = \frac{1}{n^3} p(a + p\delta(p)),
\end{aligned}$$

де

$$a = \frac{2n-1}{n-1} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Неважко помітити, що при $n \geq 6$ функція $\delta(p)$ є зростаючою на відрізку $[0, 1]$ і набуває значень, які перевищують -8 , тому на відрізку $0 < p < \frac{1}{8}$ функція $a - 8p$ набуває додатних значень. З іншого боку, вираз $(2n-1) \left(4n-6 + \frac{9}{n} - \frac{10}{n^2} \right) p > 19$ в інтервалі $\frac{1}{8} < p \leq 1$ також є додатним при $n \geq 6$. Отже, $a + p\delta(p) > 0$, тому різниця $I = D(\hat{s}_n^2) - \Delta(\hat{s}_n^2) > 0$ для всіх $n \geq 6$. Шляхом безпосередньої перевірки неважко показати, що функція $a + p\delta(p) > 0$ при $n = 2, 3, 4, 5$ і при всіх $0 \leq p \leq 1$, так що різниця I є додатною при всіх $n \geq 2$. Теорему доведено.

Зауваження 1. Теорема 1 показує, що зміщена оцінка s_n^2 для дисперсії частоти h є більш точною, ніж незміщена оцінка $\hat{s}_n^2$. Отже, оцінка s_n^2 краща, ніж оцінка $\hat{s}_n^2$.

Зауваження 2. Унаслідок зауваження 1 при побудові довірчих меж для невідомої ймовірності p за правилом $3s$ [6] варто скористатися оцінкою s_n^2 .

3. Довірчі межі для невідомої ймовірності. Однією з найважливіших задач прикладної математичної статистики є проблема побудови довірчих меж для невідомої ймовірності p на підставі частоти випадкової події A у схемі Бернуллі. Наближений розв'язок цієї задачі, отриманий на підставі граничної теореми Муавра – Лапласа, є добре відомим [1]. Такими межами є числа

$$p_1 = \frac{hn + \frac{1}{2}g^2 - g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2}, \quad (10)$$

$$p_2 = \frac{hn + \frac{1}{2}g^2 + g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2}, \quad (11)$$

до того ж рівень значущості цього інтервалу приблизно дорівнює $2 - 2\Phi(g)$ (при 5%-му рівні значущості $g = 1,96$). Однак точне значення рівня значущості цього довірчого інтервалу при різних значеннях n коливається в досить широкі межі. Дійсно, точне значення довірчого рівня цього інтервалу дорівнює

$$1 - 2\beta = \sum_{k: p_1 < p < p_2} p_n(k),$$

де $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Таблиця. Мінімальні, максимальні й середні рівні значущості довірчих інтервалів, побудованих за формулами Ван дер Вардена (при $g=2$) і за правилом $2s$

n	За Ван дер Варденом				За правилом $2s$			
	min	max	range	average	min	max	range	average
10	0,012	0,096	0,083	0,037	0,000	0,173	0,173	0,048
20	0,017	0,075	0,059	0,039	0,000	0,143	0,143	0,057
30	0,018	0,065	0,046	0,041	0,000	0,149	0,149	0,060
40	0,020	0,061	0,041	0,041	0,000	0,128	0,128	0,058
50	0,022	0,089	0,067	0,044	0,000	0,147	0,147	0,058
60	0,020	0,059	0,039	0,040	0,000	0,148	0,148	0,057
70	0,022	0,059	0,037	0,043	0,000	0,127	0,127	0,053
80	0,021	0,057	0,035	0,042	0,000	0,136	0,135	0,059
90	0,028	0,062	0,034	0,044	0,000	0,098	0,098	0,054
100	0,028	0,079	0,052	0,046	0,001	0,150	0,150	0,058

Примітка. n – число елементів, $\min$ – мінімальний рівень значущості, $\max$ – максимальний рівень значущості, range – різниця між максимальним і мінімальним рівнем значущості, average – середній рівень значущості.

Інший метод побудови довірчих меж для невідомої ймовірності можна запропонувати на підставі правила 2s, яке стверджує, що довірчий інтервал $(h - 2s_n, h + 2s_n)$ містить невідому ймовірність p з ймовірністю, яка приблизно дорівнює 0,95. Точні значення меж, у яких варіюються рівні значущості довірчих інтервалів I_W , побудованих за методом Ван дер Вардена при $g = 2$, а також довірчих інтервалів I_{2s} , обчислених на підставі правила 2s, наведено в таблиці. З цієї таблиці випливає, що довірчі інтервали I_W мають менші рівні значущості, ніж інтервали I_{2s} .

4. Статистичні критерії для порівняння двох ймовірностей, побудовані на підставі довірчих інтервалів. Нехай B_1 і B_2 – схеми випробувань Бернуллі, у яких подія A_1 відбувається з ймовірністю p_1 , а подія A_2 – з ймовірністю p_2 . На підставі довірчих меж для ймовірностей p_1 і p_2 можна запропонувати різні статистичні критерії для порівняння цих двох ймовірностей, до того ж гіпотеза про незалежність частот h_1 і h_2 подій A_1 і A_2 у цих критеріях не буде використовуватися.

Дійсно, нехай $I_1 = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)})$ і $I_2 = (p_1^{(2)}, p_2^{(2)})$ – довірчі інтервали для невідомих ймовірностей p_1 і p_2 відповідно, рівень значущості яких приблизно дорівнює 5%. Статистичний критерій для порівняння ймовірностей p_1 і p_2 має такий вигляд: основна гіпотеза H про рівність ймовірностей p_1 і p_2 ($p_1 = p_2 = p$) відхиляється, якщо довірчі інтервали I_1 і I_2 не перетинаються.

Оцінимо рівень значущості цього критерію. З цією метою розглянемо відрізки $I_1^- = [0, p_1^{(1)}]$, $I_1^+ = [p_2^{(1)}, 1]$, $I_2^- = [0, p_1^{(2)}]$, $I_2^+ = [p_2^{(2)}, 1]$. Припустимо для визначеності, що $p_2^{(1)} < p_1^{(2)}$. При будь-якому розташуванні невідомої ймовірності p в інтервалі $[0, 1]$ можливі такі випадки: 1) $p \in I_1^-$; 2) $p \in I_1$; 3) $p \in I_1^+$. Якщо гіпотеза H є вірною, то ймовірність першого випадку не перевищує 0,05, оскільки тоді $p \notin I_1$; якщо ж $p \in I_1$, то $p \in I_2^-$, тому що $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ і $p \notin I_2^-$; тому ймовірність другого випадку також не перевищує 0,05. Нарешті, якщо $p \in I_1^+$, то $p \notin I_1$, тому ймовірність цієї події не перевищує 0,05.

Таким чином, у всіх трьох випадках рівень значущості запропонованого критерію не перевищує $2\beta = 0.05$. Зауважимо, що отримана оцінка виявляється завищеною при великих значеннях обсягів навчальних вибірок n_1 і n_2 . Дійсно, у цьому випадку розподіл частот h_1 і h_2 наближається до симетричного, тому ймовірності потрапляння ймовірності p в інтервали I_1^-, I_1^+, I_2^- не перевищують половини рівня значущості, тобто 0.025. Отже, при великих значеннях n_1 і n_2 рівень значущості критерію, побудованого на підставі довірчих інтервалів I_1 і I_2 , що не перетинаються, не перевищує 0,025.

Для порівняння двох ймовірностей у випадку, коли вибірка в схемі Бернуллі B_2 є великою ($n_2 \geq 150 + 200$), а в схемі B_1 – малою ($n_1 \leq 30$), пропонується інший критерій. Відповідно до цього критерію гіпотеза H відхиляється, якщо середина інтервалу I_2 не належить інтервалу I_1 . Для оцінки рівня значущості цього критерію відмітимо, що середина інтервалу I_2 практично збігається з ймовірністю p_2 , тому у випадку істинності основної гіпотези H ймовірність події $p \notin I_1$ не перевищує 0,05, тобто помилка критерію не перевищує 0,05.

5. Статистичний критерій для перевірки гіпотези про рівність двох ймовірностей, заснований на правилі 2s. Нехай x і y – дві довільні випадкові величини, що мають однакові математичні сподівання $m(x) = m(y) = m$, які набувають своїх значень у результаті проведення одного випадкового експерименту E . Покажемо, що для середньоквадратичного відхилення $\sigma(z)$ їхньої різниці $z = x - y$ справджується нерівність

$$\sigma(z) = \sigma(x - y) \leq \sigma(x) + \sigma(y).$$

Дійсно,

$$\sigma(z) = \sigma(x - y + m - m) = \sigma(x - y + m(x) - m(y)) \leq \sigma(x - m(x)) + \sigma(y - m(y)) = \sigma(x) + \sigma(y).$$

Нехай $x = h_1$, $y = h_2$, тоді $\sigma(h_1 - h_2) \leq \sigma(h_1) + \sigma(h_2) = \delta$, до того з результатів п.1 маємо

$$\delta = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}} + \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}} \approx \tilde{\delta} = \sqrt{\frac{h_1(1-h_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{h_2(1-h_2)}{n_2}}.$$

Розглянемо статистичний критерій для перевірки гіпотези H про рівність невідомих ймовірностей p_1 і p_2 . Якщо не виконується хоча б одна з двох нерівностей: 1) $h_1 - h_2 - 2\tilde{\delta} < 0$; 2) $h_1 - h_2 + 2\tilde{\delta} > 0$, то гіпотеза H відхиляється; у протилежному випадку вважається, що експериментальні дані не суперечать гіпотезі H . Будемо називати запропонований тест 2s-критерієм.

Теорема 2. У випадку реалізації схем Бернуллі B_1 і B_2 рівень значущості 2s-критерію приблизно дорівнює 0,05.

Доведення. Нехай

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо в експерименті } E_i^{(1)} \text{ відбувається подія } A_1, \\ 0, & \text{якщо в експерименті } E_i^{(1)} \text{ не відбувається подія } A_1, \end{cases}$$

$$x_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо в експерименті } E_i^{(2)} \text{ відбувається подія } A_2, \\ 0, & \text{якщо в експерименті } E_i^{(2)} \text{ не відбувається подія } A_2. \end{cases}$$

Тоді

$$h_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{(1)}, \quad h_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_2} x_i^{(2)}.$$

Припустимо спочатку, що $n_1 = n_2 = n$, тоді $z = h_1 - h_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, де $y_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}$ є однаково розподіленими випадковими величинами. Унаслідок центральної граничної теореми випадкова величина z є асимптотично нормальною, тому для z можна застосовувати правило $2s$. Отже, імовірність виходу z з інтервалу $(h_1 - h_2 - 2\tilde{\delta}, h_1 - h_2 + 2\tilde{\delta})$ у випадку істинності гіпотези H приблизно дорівнює 0,05, так що рівень значущості $2s$ -критерію приблизно дорівнює 0,05.

Припустимо тепер, що $n_1 \neq n_2$, і нехай для визначеності $n_1 > n_2$. Покладемо $n_1 = k + n_2$. Тоді

$$\begin{aligned} z = h_1 - h_2 &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{(1)} - \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_i^{(2)} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{(1)} - \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_i^{(2)} + \frac{1}{n_1} \sum_{i=n_2+1}^{n_1} x_i^{(1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{1}{n_1} x_i^{(1)} - \frac{1}{n_2} x_i^{(2)} \right) + \frac{1}{n_1} \sum_{i=n_2+1}^{n_1} x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_2} u_i + \frac{1}{n_1} \sum_{i=n_2+1}^{n_1} x_i^{(1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $u_i = \frac{1}{n_1} x_i^{(1)} - \frac{1}{n_2} x_i^{(2)}$. Унаслідок центральної граничної теореми доданки в останній сумі формули (12) є асимптотично нормальними випадковими величинами. Крім того, ці випадкові величини є незалежними, оскільки вони отримані в результаті реалізації схем Бернуллі B_1 і B_2 . Звідси випливає, що випадкова величина z із формули (12) також є асимптотично нормальною випадковою величиною, і для неї справджується правило $2s$.

Теорему доведено.

1. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. — М., 1960; 2. Newcombe R.G. Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods // Statistics in Medicine. — 1998. — V. 17. — P. 857-872; 3. May W.L., Johnson W.D. The validity and power of tests for equality of two correlated proportions // Statistics in Medicine. — 1997. — V. 16. — P. 1081-1096; 4. May W.L., Johnson W.D. Confidence intervals for differences in correlated binomial proportions // Statistics in Medicine. — 1997. — V. 16. — P. 2127-2136; 5. Newcombe R.G. Improved confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data // Statistics in Medicine. — 1998. — V. 17. — P. 2635-2650; 6. Петунин Ю.И. Приложения теории случайных процессов в биологии и медицине. — К., 1981.

Надійшла до редколегії 23.11.2004

УДК 517.929.4

А.Т. Кожаметов, канд. фіз.-мат. наук

ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування лінійною стаціонарною системою із запізненням. За допомогою методу динамічного програмування Белмана одержано розв'язок в аналітичному вигляді.

The linear quadratic problem of stationary system with delay optimal direction are considered. The decision in analytic form use Belman dynamic programming method are resolved.

Відомо, що для лінійних стаціонарних систем, які описані звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

де A, B — матриці зі сталими коефіцієнтами, лінійно-квадратична задача оптимізації ставиться таким чином. Потрібно знайти керування $u(t)$ у вигляді лінійної комбінації фазових координат, при якому система (1) буде асимптотично стійкою і квадратичний критерій якості

$$I[u(t)] = \int_0^\infty \{x^T(s)Cx(s) + u^T(s)Du(s)\} ds \quad (2)$$

з додатно-визначеними матрицями C, D досягає мінімального значення [1, 2]. Розв'язок цієї задачі знаходиться за допомогою методу динамічного програмування Белмана. Функція Белмана шукається у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T H x$, де H — додатно-визначена матриця. Рівняння Белмана має вигляд

$$\min_u \left\{ x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t) + \frac{dV(x(t))}{dt} \right\} = 0,$$

де $\frac{dV(x(t))}{dt}$ – повна похідна функції $V(x)$ згідно із системою (1). Якщо на керування $u(t)$ не накладається обмежень, то мінімальне значення фігурні дужки приймають при

$$u_0[x(t)] = -D^{-1}B^T Hx(t). \quad (3)$$

Підставивши отримане значення у вихідне рівняння Белмана, для визначення матриці H одержуємо матричне рівняння Ріккати

$$A^T H + HA + C - HBD^{-1}B^T H = 0. \quad (4)$$

Таким чином, розв'язок лінійно-квадратичної задачі оптимізації має вигляд (3), де матриця H є розв'язком матричного рівняння (4). Причому шукане значення функціонала дорівнює $I[u_0(x(t))] = x_0^T H x_0$.

Розглянемо лінійно-квадратичну задачу оптимізації для систем із запізненням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t), \quad x(t) \equiv \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0. \quad (5)$$

Тут A, A_1, B – матриці зі сталими коефіцієнтами відповідних розмірностей, $\varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ – довільна неперервна функція, що визначає початкові умови [3].

У роботі [4] при дослідженні стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau), \quad x(t) = \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0. \quad (6)$$

використовувався функціонал вигляду

$$\begin{aligned} V[x(t)] = & x^T(t) H(0) x(t) + 2x^T(t) \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] + \\ & + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) A_1^T H(s_2 - s_1) A_1 x(s_2) ds_2 ds_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Було доведено, що для асимптотичної стійкості лінійної стаціонарної системи із запізненням (6) необхідно й достатньо існування функціонала вигляду (7) з додатно-визначеною матричною функцією $H(t)$, яка є розв'язком рівняння із запізненням

$$\dot{H}(t) = A^T H(t) + A_1^T H(t - \tau). \quad (8)$$

У подальших дослідженнях функціонал вигляду (7) буде використовуватися для розв'язку лінійно-квадратичної задачі оптимізації лінійної системи із запізненням (5). Однак при цьому у функціонал якості (2) буде введено додатковий доданок, який названо «узагальненою роботою» [6].

Приведемо ряд допоміжних тверджень.

Лема 1. Нехай $H(t)$ – неперервна матрична функція. Похідна за змінною t від функціонала

$$\Psi[x(t)] = \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) A_1^T H(s_2 - s_1) A_1 x(s_2) ds_2 ds_1$$

має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[x(t)] = & \int_{t-\tau}^t \left\{ x^T(t) A_1^T [H(s-t) + H(t-s)] A_1 x(s) - \right. \\ & \left. - x^T(t-\tau) A_1^T [H(s-t+\tau) + H(t-\tau-s)] A_1 x(s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Доведення. Позначимо

$$F(s_1, t) = \int_{t-\tau}^t A_1^T H(s_2 - s_1) A_1 x(s_2) ds_2.$$

Тоді одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[x(t)] = & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) F(s_1, t) ds_1 \right\} = x^T(t) F(t, t) - \\ & - x^T(t-\tau) F(t-\tau, t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) F_t(s_1, t) ds_1. \end{aligned}$$

Використовуючи позначення $F(s_1, t)$, перепишемо отриманий вираз у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[x(t)] &= x^T(t) \left[\int_{t-\tau}^t A_1^T H(s_2 - t) A_1 x(s_2) ds_2 \right] - \\ &- x^T(t - \tau) \left[\int_{t-\tau}^t A_1^T H(s_2 - t + \tau) A_1 x(s_2) ds_2 \right] + \\ &+ \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) \left[A_1^T H(t - s_1) A_1 x(t) - A_1^T H(t - \tau - s_1) A_1 x(t - \tau) \right] ds_1. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[x(t)] &= \int_{t-\tau}^t \left[x^T(t) A_1^T H(s - t) A_1 x(s) - x^T(t - \tau) A_1^T H(s - t + \tau) A_1 x(s) + \right. \\ &+ \left. x^T(s) A_1^T H(t - s) A_1 x(t) - x^T(s) A_1^T H(t - \tau - s) A_1 x(t - \tau) \right] ds. \end{aligned}$$

Отримали твердження (9) леми 1.

Лема 2. Нехай матриця $H(t)$ симетрична, тобто $H(t) = H(-t)$ – неперервно диференційована матрична функція. Тоді похідна функціонала $V[x(t)]$ вигляду (7) уздовж розв'язків $x(t)$ системи (5) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= 2u^T(t) B^T \left\{ H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right\} + \\ &+ 2x^T(t) [H(0)A + H(\tau)A_1] x(t) + 2 \int_{t-\tau}^t x^T(t) \left[-\frac{d}{d(s - t + \tau)} H(s - t + \tau) + \right. \\ &+ \left. A^T H(s - t + \tau) + A_1^T H(s - t) \right] A_1 x(s) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Доведення. Продиференціюємо функціонал вигляду (7) згідно із системою (5). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= \frac{d}{dt} \left\{ x^T(t) H(0)x(t) + 2x^T(t) \left[\int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + \right. \\ &+ \left. \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) A_1^T H(s_2 - s_1) A_1 x(s_2) ds_2 ds_1 \right\} = 2[Ax(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t)]^T H(0)x(t) + \\ &+ 2[Ax(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t)]^T \left[\int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + \\ &+ 2x^T(t) \frac{d}{dt} \left[\int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + \frac{d}{dt} \left[\int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) A_1^T H(s_2 - s_1) A_1 x(s_2) ds_2 ds_1 \right]. \end{aligned}$$

Узявши похідну від інтеграла і використовуючи залежність (9) леми 1, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= 2[Ax(t) + A_1 x(t - \tau)]^T H(0)x(t) + 2u^T(t) B^T H(0)x(t) + \\ &+ 2[Ax(t) + A_1 x(t - \tau)]^T \left[\int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + 2u^T(t) B^T \left[\int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + \\ &+ 2x^T(t) \left[H(\tau) A_1 x(t) - H(0) A_1 x(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \frac{d}{d(s - t + \tau)} H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right] + \\ &+ \int_{t-\tau}^t \left\{ x^T(t) A_1^T [H(s - t) + H(t - s)] A_1 x(s) - x^T(t - \tau) A_1^T [H(s - t + \tau) + H(t - \tau - s)] A_1 x(s) \right\} ds, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= 2u^T(t) B^T \left\{ H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s - t + \tau) A_1 x(s) ds \right\} + \\ &+ 2x^T(t) [H(0)A + H(\tau)A_1] x(t) + \int_{t-\tau}^t \left\{ 2[Ax(t) + A_1 x(t - \tau)]^T H(s - t + \tau) + \right. \\ &- 2x^T(t) \frac{d}{d(t - s + \tau)} H(s - t + \tau) + x^T(t) A_1^T [H(s - t) + H(t - s)] - \\ &- \left. x^T(t - \tau) A_1^T [H(s - t + \tau) + H(t - \tau - s)] \right\} A_1 x(s) ds \end{aligned}$$

Якщо матриця $H(t)$ симетрична по t , тобто $H(t) = H(-t)$, то залишається

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] = & 2u^T(t)B^T \left\{ H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right\} + \\ & + 2x^T(t)[H(0)A + H(\tau)A_1]x(t) + 2 \int_{t-\tau}^t x^T(t) \left[A^T H(s-t+\tau) + \right. \\ & \left. - \frac{d}{d(s-t+\tau)} H(s-t+\tau) + A_1^T H(s-t) \right] A_1x(s)ds, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

З використанням наведених результатів одержимо достатні умови розв'язку лінійно-квадратичної задачі оптимізації системи із запізненням (5). На відміну від функціонала вигляду (2), під інтегралом присутній доданок, що характеризується як «узагальнена робота» [3]. Лінійно-квадратична задача оптимізації ставиться таким чином. Необхідно знайти керування $u[x(t)]$ у вигляді лінійного функціонала від фазової змінної та її передісторії, при якому система (5) буде асимптотично стійкою, і функціонал якості

$$I[u(t)] = \int_0^\infty \left\{ x^T(s)Cx(s) + u^T(s)Du(s) + E[x(t)] \right\} ds \quad (11)$$

буде досягати мінімального значення.

Теорема. Нехай $H_0(t)$ симетрична, тобто $H_0(t) = H_0(-t)$ – неперервно диференційована матрична функція, визначена при $-\tau \leq t \leq \tau$, яка задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} H(t) = \left[A + BD^{-1}B^T H(0) \right]^T H(t) + A_1^T H(t-\tau) \quad (12)$$

і крайові умови

$$A^T H(0) + H(0)A + A_1^T H(\tau) + H(\tau)A_1 - H(0)BD^{-1}B^T H(0) = 0, \quad (13)$$

а функціонал «узагальненої роботи» $E[x(t)]$ має вигляд

$$E[x(t)] = \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right]^T BD^{-1}B^T \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right].$$

Тоді керування $u_0[x(t)]$, при якому квадратичний критерій якості (11) досягає мінімального значення, має вигляд

$$u_0[x(t)] = -D^{-1}B^T \left[H_0(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H_0(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right],$$

а значення функціонала дорівнює

$$\begin{aligned} V[x(t)] = & x^T(t)H_0(0)x(t) + 2x^T(t) \left[\int_{t-\tau}^t H_0(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right] + \\ & + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1)A_1^T H_0(s_2-s_1)A_1x(s_2)ds_2ds_1. \end{aligned}$$

Доведення. Якщо розглядати лінійне стаціонарне рівняння із запізненням (5), квадратичний критерій якості (11), а функціонал Белмана брати у вигляді (7), то функціональне рівняння Белмана буде мати вигляд

$$0 = \min_u \left\{ x^T(t)Cx(t) + u^T(t)Du(t) + E[x(t)] + \frac{d}{dt} V[x(t)] \right\}, \quad (14)$$

де $dV[x(t)]/dt$ – значення похідної функціонала (7), обчислене уздовж розв'язків системи (5). Підставивши її величину, визначену у формулі (10) леми 2, одержимо

$$\begin{aligned} \min_u \left\{ x^T(t)Cx(t) + u^T(t)Du(t) + E[x(t)] + 2u^T(t)B^T \left[H(0)x(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau)A_1x(s)ds \right] + 2x^T(t)[H(0)A + H(\tau)A_1]x(t) + \right. \\ \left. + 2 \int_{t-\tau}^t x^T(t) \left[-\frac{d}{d(s-t+\tau)} H(s-t+\tau) + A^T H(s-t+\tau) + A_1^T H(s-t) \right] A_1x(s)ds \right\} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо на функцію керування не накладати обмежень за величиною, тобто її значення можуть приймати $u(t) \in R^m$, то мінімальне значення фігурні дужки приймають при $u_0[x(t)]$, для яких $\frac{d}{du(t)} \{ \bullet \} = 0$. Звідси одержу-

$$\text{ємо } Du(t) + B^T \left[H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] = 0.$$

Оскільки D – симетрична, додатно-визначена матриця, то вона невироджена, і оптимальне керування має вигляд

$$u_0[x(t)] = -D^{-1} B^T \left[H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right]. \quad (16)$$

Для обчислення матричної функції $H(t)$ підставимо отриманий вираз (16) у вихідне функціональне рівняння Белмана (15). Одержуємо

$$\begin{aligned} & x^T(t) C x(t) + E[x(t)] - \left[H(0)x(t) + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right]^T B D^{-1} B^T \left[H(0)x(t) + \right. \\ & \left. + \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] + x^T(t) \left[(A^T H(0) + H(0)A) + (A_1^T H(\tau) + H(\tau)A_1) \right] x(t) + \\ & + 2 \int_{t-\tau}^t x^T(t) \left[-\frac{d}{d(t-s+\tau)} H(s-t+\tau) + A^T H(s-t+\tau) + A_1^T H(s-t) \right] A_1 x(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Після перетворень одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} & x^T(t) \left[C - H(0) B D^{-1} B^T H(0) + A^T H(0) + H(0)A + A_1^T H(\tau) + H(\tau)A_1 \right] x(t) - \\ & - 2x^T(t) H(0) B D^{-1} B^T \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] - \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right]^T B D^{-1} B^T \times \\ & \times \left[\int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] + 2x^T(t) \int_{t-\tau}^t \left[-\frac{d}{d(s-t+\tau)} H(s-t+\tau) + A^T H(s-t+\tau) + A_1^T H(s-t) \right] A_1 x(s) ds + E[x(t)] = 0. \end{aligned}$$

Якщо матрична функція $H_0(t)$ задовольняє матричне рівняння

$$\frac{d}{d(s-t+\tau)} H(s-t+\tau) = A^T H(s-t+\tau) + A_1^T H(s-t) - H(0) B D^{-1} B^T H(s-t+\tau)$$

і крайові умови

$$A^T H(0) + H(0)A + A_1^T H(\tau) + H(\tau)A_1 - H(0) B D^{-1} B^T H(0) = 0,$$

то рівняння Белмана задовольняється тотожно, і керування $u_0[x(t)]$, визначене залежно від (16), є розв'язком лінійно-квадратичної задачі оптимізації. Оскільки при керуванні $u_0[x(t)]$ виконується

$$-\frac{d}{dt} V[x(t)] = x^T(t) C x(t) + u_0^T[x(t)] D u_0[x(t)] + E[x(t)],$$

то

$$I[u_0[x(t)]] = \int_0^\infty \left\{ x^T(s) C x(s) + u^T(s) D u(s) + E[x(t)] \right\} ds = V[x(t)],$$

тобто

$$\begin{aligned} I[u_0[x(t)]] &= x^T(t) H_0(0) x(t) + 2x^T(t) \left[\int_{t-\tau}^t H_0(s-t+\tau) A_1 x(s) ds \right] + \\ &+ \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1) A_1^T H_0(s_2-s_1) A_1 x(s_2) ds_2 ds_1, \end{aligned}$$

де $H_0(t)$ – симетрична матрична функція, що задовольняє рівняння (12) і крайові умови (13).

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М., 1976; 2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971; 3. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последствием. – М., 1992; 4. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П., Кожаметов А.Т. Построение квадратичных функционалов Ляпунова-Красовского для линейных систем с запаздыванием // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: кібернетика. – 2000. – Вип. 1. – С. 57-64.

УДК 517.929.4

О.І. Кузьмич, асп.

ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ДИНАМІКИ ГІБРИДНИХ СИСТЕМ З КІНЦЕВИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМИКАНЬ

З використанням другого методу Ляпунова здійснено дослідження траєкторій гібридних систем із часовим перемиканням. Виходячи з поведінки функцій Ляпунова, отримано оцінки збурень розв'язків.

The hybrid systems trajectories with time switching are investigated using the second Lyapunov method. For construction of perturbation decisions estimations the Lyapunov functions behaviours are used.

Практичні задачі керування складними динамічними об'єктами, що містять неперервні й дискретні складові, викликали останнім часом інтерес до дослідження гібридних динамічних систем [1-3]. Наразі спостерігається збільшення кількості праць, присвячених оцінкам траєкторій систем, динаміка яких поєднує неперервні й дискретні складові [4, 5]. Одним з методів оцінки збурень траєкторій динамічних систем різної природи є другий метод Ляпунова [6]. Він дозволяє одержувати апіорні оцінки розв'язків, виходячи з поведінки наперед заданої функції. У даній роботі вищезгаданий метод використовується для дослідження систем із часовим переключенням.

Нехай логіко-динамічна система зображена набором підсистем, що описуються системами лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [7]:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Кожна з підсистем описує динаміку на заданому кінцевому проміжку часу $t_{i-1} \leq t < t_i$, $i = \overline{1, N}$, $t_0 = 0$. Підсистеми можуть бути як стійкими, так і нестійкими. Передбачається, що початкове збурення $x(0)$ знаходиться в δ -околі положення рівноваги, тобто $|x(0)| < \delta$. Оцінимо величину відхилення розв'язку $x = x(x_0, t)$ логіко-динамічної системи (1) від положення рівноваги в кінцевий момент $t = t_N$. Оскільки розглядається кінцевий проміжок часу, і при перемиканні фазові координати не мають розривів, тобто

$$\lim_{s \rightarrow +0} x(t_i - s) = \lim_{s \rightarrow +0} x(t_i + s), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2)$$

а на окремих ділянках підсистеми є системами лінійних диференціальних рівнянь, то згідно з неперервною залежністю розв'язків від початкових умов, для довільного $\delta > 0$ усі розв'язки, що виходять з δ -околу, не залишають $\varepsilon(\delta)$ -околу. І навпаки, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що $|x(t_N)| < \varepsilon$ при $|x(0)| < \delta$.

Нижче обчислюються величини, що характеризують вищезгадані залежності. При цьому особливу увагу приділено випадку нестійких підсистем і автономних функцій Ляпунова. Оскільки підсистеми лінійні, то використовуються функції квадратичного виду [6].

У роботі [7] функція Ляпунова будується у вигляді неавтономної квадратичної форми $V(x, t) = x^T H(t) x$, $H(t) = e^{-tA^T} e^{-tA}$ з використанням першого інтеграла. Цей вид функції Ляпунова дозволяє одержати найбільш точні оцінки розв'язків, оскільки поверхні рівня $V_i(x, t) = \alpha_i$, $i = \overline{1, N-1}$ функцій Ляпунова $V_i(x, t)$, $i = \overline{1, N-1}$ цілком складаються з інтегральних кривих. Однак побудова таких функцій пов'язана з наявністю матричного експоненціалу e^{tA} , тобто з наявністю фундаментальної матриці розв'язків, що є досить обтяжливою умовою. Крім того, пропонувалося також використовувати автономні функції Ляпунова $V(x, t) = x^T H_i x$, симетричні позитивно визначені матриці H_i , $i = \overline{1, N-1}$ яких знаходилися при розв'язку матричних рівнянь Ляпунова $A_i^T H_i + H_i A_i = C_i$, $i = \overline{1, N-1}$. Однак при цьому була потрібна асимптотична стійкість матриць A_i , $i = \overline{1, N-1}$.

У даній роботі отримано оцінки збурень логіко-динамічної системи (1) без вимоги асимптотичної стійкості матриць A_i , $i = \overline{1, N-1}$.

Теорема. Нехай початкові умови системи (1) задовольняють умови $|x(0)| < \delta$. Тоді для довільних підсистем справедлива нерівність

$$|x(t_N)| < \delta \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{\max} (A_i + A_i^T) (t_i - t_{i-1}) \right\} \quad (3)$$

і навпаки, для того, щоб при $t = t_N$ була виконана нерівність $|x(t_N)| < \varepsilon$ достатньо, щоб виконувалося $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$, де

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{\max} (A_i + A_i^T) (t_i - t_{i-1}) \right\}. \quad (4)$$

Доведення. Для одержання оцінок збурень розв'язків систем будемо використовувати другий метод Ляпунова. Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді $V(x, t) = e^{-\gamma t} x^T x$, тобто $V(x, t) = e^{-\gamma t} |x|^2$, де постійний параметр γ означається

нижче. Поверхня рівня $V(x, t) = \alpha$, $\alpha > 0$ при кожному фіксованому $t > 0$ є сферою $|x|^2 = \alpha e^{\gamma t}$. При цьому якщо $\gamma < 0$ і $t \rightarrow +\infty$, то сфера стягується до початку координат, а якщо $\gamma > 0$ і $t \rightarrow +\infty$, то розтягується до нескінченності.

Обчислимо повну похідну цієї функції згідно із системою на першій ділянці, тобто при $0 < t < t_1$. Одержимо

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) = -\gamma e^{-\gamma t} x^T x + e^{-\gamma t} x^T (A_1 + A_1^T) x \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} V(x(t), t) = -e^{-\gamma t} x^T [\gamma I - (A_1 + A_1^T)] x.$$

Проінтегрувавши, одержимо $V(x(t), t) \leq V(x(t_0), t_0) \exp\left\{-\left[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)\right](t - t_0)\right\}$.

Використовуючи функцію Ляпунова, одержимо

$$e^{-\gamma t} |x(t)|^2 \leq e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t_0)|^2 \exp\left\{-\left[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)\right](t - t_0)\right\}.$$

На першій ділянці отримаємо співвідношення $|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t-t_0)}$, а також

$$|x(t_1)| \leq |x(t_0)| \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t_1 - t_0)\right\}, \quad t_0 = 0.$$

Розглянемо другий проміжок часу $t_1 \leq t < t_2$. Повторюючи аналогічні перетворення з функцією Ляпунова

$V(x, t) = e^{-\gamma t} x^T x$, на цьому проміжку одержимо $|x(t)| \leq |x(t_1)| e^{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A_2 + A_2^T)(t-t_1)}$. Звідси

$$|x(t_2)| \leq |x(t_0)| e^{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A_2 + A_2^T)(t_2-t_1)} e^{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t_1-t_0)}.$$

Повторюючи процес далі, отримаємо

$$|x(t_N)| \leq |x(0)| e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(A_i + A_i^T)(t_i - t_{i-1})},$$

тобто перше твердження теореми. Розв'язавши нерівність відносно $|x(0)|$, одержимо друге твердження.

Зауваження. У формулах (3), (4) отримані оцінки, що зв'язують лише початковий $|x(t_0)|$ і кінцевий $|x(t_N)|$ стани системи. У проміжних станах $x(t_i)$ можливий "викид" із заданого ε -околу.

Результат, що підсилює співвідношення (3), (4), є таким.

Наслідок 1. Для того, щоб при $t_0 \leq t \leq t_N$ для розв'язку логіко-динамічної системи (1) виконувалося співвідношення $|x(t)| < \varepsilon$, достатньо, щоб $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$, де

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \min_{i=1, N} \min_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_{\max}(A_j + A_j^T)(t - t_{j-1}) \right] \right\}.$$

У роботі [8] доведено, що якщо матриця A – асимптотично стійка й нормальна, тобто

$$AA^T = A^T A, \quad (5)$$

то

$$\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T) = \max_{i=1, N} \operatorname{Re} \lambda_i(A). \quad (6)$$

Тому має місце такий результат.

Наслідок 2. Нехай початкові умови системи (1) задовольняють умови $|x(0)| < \delta$ і матриці A_i , $i = \overline{1, N}$ асимптотично стійкі та нормальні, тобто задовольняють умови (5). Тоді справедливе співвідношення

$$|x(t_N)| < \delta \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \max_{i=1, N} \operatorname{Re} \lambda_j(A_i)(t_i - t_{i-1}) \right\}. \quad (7)$$

І навпаки, для того, щоб при $t = t_N$ виконувалася нерівність $|x(t_N)| < \varepsilon$, достатньо, щоб виконувалось

$$|x(0)| < \delta(\varepsilon),$$

де

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \exp \left\{ -\sum_{j=1}^N \max_{i=1, N} \operatorname{Re} \lambda_j(A_i)(t_i - t_{i-1}) \right\}. \quad (8)$$

Наслідок 3. Нехай при $t_0 \leq t < t_N$ початковий стан системи (1) задовольняє умови $|x(0)| < \delta$ і матриці A_i , $i = \overline{1, N}$ задовольняють умови (5). Тоді, ураховуючи умови неможливості виходу на нескінченність, одержимо:

$$|x(t_N)| < \delta \cdot \min_{i=1, N} \min_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left\{ \exp \left[\sum_{j=1}^N \max_{i=1, N} \operatorname{Re} \lambda_j(A_i)(t_i - t_{i-1}) \right] \right\}$$

І навпаки, для того, щоб при $t = t_N$ виконувалося $|x(t_N)| < \varepsilon$, достатньо, щоб $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$, де

$$\delta(\varepsilon) < \varepsilon \cdot \min_{i=1, N} \min_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left\{ \exp \left[- \sum_{j=1, N} \max_{i=1, N} \operatorname{Re} \lambda_j(A_i)(t_i - t_{i-1}) \right] \right\}. \quad (9)$$

Приклад. Розглянемо логіко-динамічну систему на площині

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda_{1i}x(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = \lambda_{2i}y(t) \end{cases}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Система з номером i функціонує на інтервалі $t_{i-1} \leq t < t_i$, $i = \overline{1, N}$. У момент $t = t_i$ відбувається перемикання зі збереженням умови неперервності, тобто $x(t_i - 0) = x(t_i) = x(t_i + 0)$, $y(t_i - 0) = y(t_i) = y(t_i + 0)$ і починає функціонувати система з номером $i + 1$

$$\lambda(A_i + A_i^T) = \lambda \begin{bmatrix} 2\lambda_{1i} - \lambda & b_i \\ b_i & 2\lambda_{2i} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})\lambda + (4\lambda_{1i}\lambda_{2i} - b_i^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) \pm \sqrt{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})^2 + b_i^2}.$$

Тому $\lambda_{\max}(A_i + A_i^T) = (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + \sqrt{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})^2 + b_i^2}$ і залежність (3) набуває вигляду

$$|x(t_N)| < \delta \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + \sqrt{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})^2 + b_i^2} \right] (t_i - t_{i-1}) \right\},$$

а залежність (4) – вигляду

$$\delta(\varepsilon) < \varepsilon \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + \sqrt{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})^2 + b_i^2} \right] (t_i - t_{i-1}) \right\}.$$

Умовою нормальності систем (3) є або $\lambda_{2i} = \lambda_{1i}$, $i = \overline{1, N}$, або $b_i = 0$, $i = \overline{1, N}$. Тому нерівність (7) (при $\lambda_{2i} = \lambda_{1i}$, $i = \overline{1, N}$) набуває вигляду $|x(t_N)| < \delta \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i (t_i - t_{i-1}) \right\}$, а нерівність (8) (при $\lambda_{2i} = \lambda_{1i}$, $i = \overline{1, N}$) перетворюється на

$$\delta(\varepsilon) < \varepsilon \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \lambda_i (t_i - t_{i-1}) \right\}.$$

1. Глушков В.М. Программные средства моделирования непрерывно-дискретных систем / Под ред. В.М.Глушкова. – К., 1975; 2. Hui Ye, Michel A..N., Ling Hou. Stability Theory of Hybrid Dynamical Systems // IEEE Transaction on Automatic Control. – 1998. – V. 43. – No 4; 3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987; 4. Слынько В.И. Об устойчивости квазилинейной гибридной системы с неточно заданными моментами переключений // Доповіді НАН України. – 2004. – № 7. – С. 48-54; 5. Langerak R., Polderman J.W., Krilavicius T. Stability analysis for hybrid automata using optimal Lyapunov Functions; 6. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М., 1970; 7. Хусаинов Д.Я., Кузьмич О.И. Оцінки стійкості логіко-динамічних систем з часовим перемиканням // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип.1; 8. Хусаинов Д.Я., Ивохин Е.В. Об оценке линейных систем с использованием функций Ляпунова // Кибернетика. – 1985. – № 2. – С. 7-10.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 510.6, 681.3.06

С.С. Шкільняк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ФІНІТАРНІ ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вивчаються логіки часткових предикатів над іменними множинами – композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів. Розглянуто ієрархію таких логік. Місце логіки в ієрархії визначено рівнем абстракції розгляду та обмеженнями на клас предикатів. Для логік кванторного рівня побудовано секвенційне числення без обмежень різнокванторності, доведено теорему повноти. Для логік еквітонних предикатів доведено теореми про визначність.

The logics of partial predicates over named sets – composition nominative logics of quasi-ary predicates – are studied. The hierarchy of such logics is considered. The place of a logic in this hierarchy is determined by its abstraction level and by restrictions on classes of its predicates. For logics of the quantifier level the sequential calculi without different-quantifier restrictions are constructed. The completeness theorem is proved. For logics of equitone predicates the definability theorems are proved.

Апарат математичної логіки є основним засобом моделювання предметних областей. Поняття й методи математичної логіки використовуються в програмуванні, інформатиці, лінгвістиці, інших галузях діяльності людини. За останні роки виникло дуже багато логічних формалізмів, які застосовуються для опису тих чи інших предметних областей та орієнтуються на їх особливості. Тому в наш час першочерговою є проблема інтеграції та уніфікації логічних формалізмів, побудови ієрархії логік різного рівня абстрактності та загальності. Для розв'язку зазначеної проблеми природним є використання композиційно-номінативного підходу [1]. Такий підхід опирається на фундаментальний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного, принципи композиційності та номінативності.

Згідно з композиційно-номінативним підходом, побудову починаємо з гранично абстрактних рівнів розгляду предметних областей, поступово їх конкретизуючи. Логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі. Це означає, що спочатку будуються відповідні до розглянутого рівня абстракції математичні моделі предметних областей, які за-

дають семантичні аспекти логік, після чого будуються формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти логік.

Особливе місце в ієрархії логічних формалізмів посідає класична логіка предикатів. Така логіка має низку позитивних властивостей, вона детально досліджена і є основою багатьох спеціальних логік. У той же час, класична логіка предикатів має багато обмежень, які ускладнюють її застосування в моделюванні та програмуванні. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень. Вона недостатньо враховує неповноту, частковість інформації про предметну область, її структурованість. Тому нові логіки мають базуватися на істотно загальніших класах відображень, які більше враховують потреби програмування, особливості тих чи інших предметних областей. Проведений у роботі [2] аналіз класичної логіки дає змогу стверджувати, що такими є часткові відображення, задані на довільних наборах іменованих значень – квазіарні відображення.

У даній роботі розглядаються фінітарні 2-значні логіки часткових детермінованих предикатів. Це означає, що предикати трактуються як часткові однозначні відображення вигляду $D \rightarrow \{T, F\}$, композиції – засоби побудови предикатів – скінченно-арні.

Рівні абстрактності розгляду предметних областей відрізняються трактуванням рівня абстрактності множини даних. Можна виділити пропозиційний, сингулярний та номінативний рівні.

На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно. На цьому рівні предикати – це часткові відображення вигляду $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – множина абстрактних даних. Базовими композиціями пропозиційного рівня є диз'юнкція $\vee$ та заперечення $\neg$.

Сингулярний рівень є граничною конкретизацією пропозиційного рівня. На сингулярному рівні дані розглядаються гранично конкретно. На цьому рівні фіксується єдиний клас даних. Композиціями сингулярного рівня є гранично конкретні аплікативні композиції. Практично кожний логічний засіб може трактуватися як аплікативна композиція. Логіки сингулярного рівня досліджені в [3].

Номінативний рівень є діалектичним синтезом пропозиційного та сингулярного рівнів. На номінативному рівні дані будуються індуктивно із множини предметних імен та множини предметних значень. Такий рівень є надзвичайно високим. У даній роботі обмежимося розглядом 1-рівневих однозначних номінативних даних. Такі дані називають іменними множинами.

Дотримуємось позначень робіт [4–8]. Нагадаємо необхідні для подальшого викладу визначення.

V -іменною множиною (V -IM) над A назвемо довільну однозначну функцію вигляду $V \rightarrow A$, де V – множина предметних імен, A – множина базових даних. Множину всіх V -IM над A позначимо ${}^V A$. V -IM задаватимемо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n, \dots]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

V -повна IM над A – це тотальна однозначна функція із V в A .

Множину всіх V -повних IM над A позначимо A^V .

Вводимо функцію $im: {}^V A \rightarrow 2^V$, визначену умовою $im(d) = pr_1(d)$.

Для V -IM вводимо операцію $d \parallel X$ звуження за множиною $X \subseteq V$: $d \parallel X = \{v \mapsto a \in d \mid v \in X\}$. Вводимо також операцію ∇ накладки: $d_1 \nabla d_2 = d_2 \cup (d_1 \parallel (V \setminus im(d_2)))$.

Замість $d \parallel (V \setminus \{x\})$ для спрощення пишемо $d \parallel -x$.

Довільну функцію вигляду ${}^V A \rightarrow R$ назвемо V -квазіарною функцією.

Будемо розглядати квазіарні функції двох типів.

Функцію вигляду $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ назвемо V -квазіарним предикатом на A .

Функцію вигляду $f: {}^V A \rightarrow A$ назвемо V -квазіарною (власне) функцією на A .

Множини V -квазіарних функцій та V -квазіарних предикатів на A позначимо Fn^A та Pr^A .

Предикат P (частково) істинний, якщо для довільних $d \in {}^V A$ із $P(d) \downarrow$ випливає $P(d) = T$.

Ім'я x неістинне для V -квазіарного предикату P , якщо для довільних $d \in {}^V A$ та довільних $a, b \in A$ маємо: якщо $P(d \nabla x \mapsto a) \downarrow$ та $P(d \nabla x \mapsto b) \downarrow$, то $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \nabla x \mapsto b)$.

На рівні іменних множин природно можна виділити реномінативний, кванторний, кванторно-екваційний, функціональний та функціонально-екваційний рівні.

Реномінативний рівень. Найабстрактнішими серед логік номінативного рівня є реномінативні логіки [9]. Починаючи з реномінативного рівня, можна перейменовувати компоненти IM. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування).

Параметричну композицію реномінації $R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}: ({}^V A \rightarrow R) \rightarrow ({}^V A \rightarrow R)$ задамо так:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(d) = f([v_1 \mapsto d(x_1), \dots, v_n \mapsto d(x_n)] \cup (d \parallel (V \setminus \{v_1, \dots, v_n\}))).$$

Увівши позначення вигляду $\bar{y}$ для $y_1, \dots, y_n$, замість $R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}$ також пишемо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Базовими композиціями логік реномінативного рівня є $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. При цьому композиція реномінації визначається на множині Pr^A .

Кванторний рівень. На кванторному рівні можна застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$. Такі композиції визначаються [4, 7] традиційно з урахуванням частковості предикатів.

Базовими композиціями логік кванторного рівня є композиції $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Кванторно-екваційний рівень. На кванторно-екваційному рівні з'являються можливості ототожнення і розрізнення значень предметних імен при використанні спеціальних предикатів рівності $=_{xy}$. Логіки кванторно-екваційного рівня називаються [10] кванторними логіками з рівністю.

Базовими композиціями логік кванторно-екваційного рівня є композиції $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Функціональний рівень. На функціональному рівні маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $S^{\bar{x}}$.

Параметричну композицію суперпозиції $S^{v_1, \dots, v_n} : ({}^V A \rightarrow R) \times ({}^V A \rightarrow A) \rightarrow ({}^V A \rightarrow R)$ задаємо [5, 7] так:

$$S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)(d) = f([v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)] \cup (d \setminus \{v_1, \dots, v_n\})).$$

При конкретизації множини V -квазіарних функцій як множини $Fn^A \cup Pr^A$ природно говорити про суперпозиції двох типів: суперпозиції $(Fn^A)^{n+1} \rightarrow Fn^A$ функцій в функції (результатом є функція); суперпозиції $Pr^A \times (Fn^A)^n \rightarrow Pr^A$ функцій у предикати (результатом є предикат).

Для роботи з окремими компонентами даних у множині Fn^A природно виділити множину спеціальних функцій де-номінації (розіменування) $Nr^A = \{v \mid v \in V\}$. У цьому випадку композицію реномінації можна промодельовувати за допомогою композиції суперпозиції:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(f) = S^{v_1, \dots, v_n}(f, 'x_1, \dots, 'x_n).$$

Замість $S^{v_1, \dots, v_n}$ будемо також скорочено писати $S^{\bar{v}}$.

Базовими композиціями функціонального рівня є $\vee, \neg, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, S^{\bar{v}}$. При введенні функцій розіменування базовими композиціями функціонального рівня вважаємо $\vee, \neg, \exists x, S^{\bar{v}}$.

Функціонально-екваційний рівень. Додатково до можливостей функціонального рівня, на функціонально-екваційному рівні можна ототожнювати й розрізняти предметні значення. На цьому рівні можна ввести [5, 7] спеціальну композицію рівності $= : Fn^A \times Fn^A \rightarrow Pr^A$, яка задається так:

$$=(f, g)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } f(d) \downarrow \text{ та } g(d) \downarrow \text{ та } f(d) = g(d), \\ F, & \text{якщо } f(d) \downarrow \text{ та } g(d) \downarrow \text{ та } f(d) \neq g(d), \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } f(d) \uparrow \text{ або } g(d) \uparrow. \end{cases}$$

Базовими композиціями функціонально-екваційного рівня є $\vee, \neg, \exists x, S^{\bar{v}}, =$.

Семантичними моделями логік квазіарних предикатів є композиційні алгебри квазіарних функцій та предикатів $(Pr^A \cup Fn^A, C)$ [2, 6]. Тут множина C задається базовими композиціями відповідного рівня. Для логік реномінативного, кванторного і кванторно-екваційного рівня $Fn^A = \emptyset$ семантичними моделями є композиційні алгебри квазіарних предикатів (Pr^A, C) .

При фіксуванні множини базових композицій композиційна алгебра визначається алгебричною системою (АС) вигляду (A, Pr^A) для логік реномінативного, кванторного і кванторно-екваційного рівня; вигляду $(A, Pr^A \cup Fn^A)$ – для логік функціонального й функціонально-екваційного рівня.

Побудова композиційної алгебри дає змогу задати мову логіки квазіарних предикатів відповідного рівня. Алфавіт мови складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів та символів базових композицій. Для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів до алфавіту додається множина Fs функціональних символів. Множину $\sigma = Ps \cup Fs$ назвемо сигнатурою мови. Множину Fr формул, а також множину Tr термів для логік функціонального та функціонально-екваційного рівня визначаємо індуктивно.

Для визначення значення формул задамо відображення $I : Ps \rightarrow Pr^A$. Для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів задамо $I : Ps \cup Fs \rightarrow Pr^A \cup Fn^A$. Таке відображення продовжимо до відображення $J : Fr \rightarrow Pr^A$ для логік кванторного та кванторно-екваційного рівнів; до відображення $J : Fr \cup Tr \rightarrow Pr^A \cup Fn^A$ для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів. Пару $((A, Pr^A), I)$ для логік кванторного та кванторно-екваційного рівнів, відповідно пару $((A, Pr^A \cup Fn^A), I)$ для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів, назвемо алгебричною системою з доданою сигнатурою. Такі АС позначатимемо $A = (A, I)$. Алгебричні системи з доданою сигнатурою σ є семантичними моделями мови відповідної сигнатури σ .

Предикат $J(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації на АС $A = (A, I)$, позначаємо Φ_A .

Формула Φ істинна при інтерпретації на A , або A -істинна, якщо предикат Φ_A – частково істинний. Це позначаємо $A \models \Phi$.

Формула Φ усюди істинна, якщо $A \models \Phi$ для кожної інтерпретації A . Це позначаємо $\models \Phi$.

Формула Ψ є логічним наслідком формули Φ , що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$.

Формули Φ та Ψ логічно еквівалентні, що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, для логіки квазіарних предикатів у загальному випадку вже не діють деякі важливі закони класичної логіки. Це показує приклад.

Приклад 1. Не завжди з умови $\models \forall x \Phi$ випливає $\models \Phi$.

Визначимо $r_A(d) = T$ при $x \in im(d)$, $r_A(d) = F$ при $x \notin im(d)$.

Нехай Φ – формула $\forall x r \rightarrow r$. Тоді $(\forall x r \rightarrow r)_A(d) = F$ при $x \notin im(d)$, тому $\not\models \Phi$. Однак для квазіарних предикатів завжди $\models \forall x (\forall x A \rightarrow A)$, тому $\models \forall x \Phi$.

У той же час, можна довести, що для логіки квазіарних предикатів з умови $\models \Phi$ завжди випливає $\models \forall x \Phi$.

Таким чином, для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів. Природне обмеження задається властивістю еквітонності [2, 4], яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні даних. Таке обмеження справджується і для класичної логіки.

V -квазіарна функція g еквітонна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ з умов $g(d) \downarrow$ та $d' \supseteq d$ випливає $g(d') \downarrow = g(d)$.

Другим важливим обмеженням, яке теж справджується для класичної логіки, є повнототальність, яка означає визначеність відображення на максимальних даних, тобто на V -повних ІМ.

V -квазіарна функція g повнототальна, якщо $g(d) \downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Поняття еквітонності та повнототальності конкретизуються для власне функцій та предикатів.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів є найближчими до класичної логіки. Такі логіки називаються [2] неокласичними, бо зберігають основні закони класичної логіки [11, 12] при істотному розширенні класу семантичних моделей. Зауважимо, що класичні логіки є фактично логіками скінченно-арних повнототальних еквітонних предикатів.

Для логік повнототальних еквітонних предикатів відповідного рівня побудовані [13, 10, 14] аксіоматичні системи гільбертівського типу (формальні системи), названі неокласичними численнями. Для таких числень доведені теореми не-суперечливості та повноти.

Нехай T – неокласичне числення. Те, що формула Φ є теоремою числення T , позначимо $T \vdash \Phi$. Те, що формула Φ істинна на кожній моделі числення T , позначимо $T \models \Phi$.

Теорема 1 (коректності). Нехай $T \vdash \Phi$. Тоді $T \models \Phi$.

Теорема 2 (повноти). Нехай $T \models \Phi$. Тоді $T \vdash \Phi$.

Логіки еквітонних предикатів. Логіки еквітонних предикатів зберігають основні закони класичної логіки, тому їх теж можна віднести до неокласичних. Проте для логік еквітонних предикатів уже не діє правило виведення *modus ponens* та споріднене з ним правило перетину.

Приклад 2. На АС M задамо предикат A_M як усюди невизначений, предикат B_M – як тотожно-хибний. Тоді предикат $(A \rightarrow B)_M$ теж усюди невизначений. Отже, предикати A_M та $(A \rightarrow B)_M$ частково істинні, тому $M \models A$ та $M \models A \rightarrow B$, але $M \not\models B$. Таким чином, для конкретних семантичних моделей можливо $M \models A$, $M \models A \rightarrow B$ та $M \not\models B$.

Для логіки еквітонних предикатів можуть порушуватися також інші властивості класичної логіки.

Приклад 3. На АС M задамо предикат A_M як тотожно-істинний, предикат B_M – як усюди невизначений, предикат C_M – як тотожно-хибний. Отже, для конкретних семантичних моделей можливо $M \models A \leftrightarrow B$, $M \models B \leftrightarrow C$ та $M \not\models A \leftrightarrow C$.

Таким чином, для логік еквітонних предикатів застосування *modus ponens* та правила перетину не зовсім коректне. Відмова від *modus ponens* спонукає проводити дослідження синтаксичних властивостей логік еквітонних предикатів на базі не гільбертівських, а генценівських систем – секвенційних числень. Такі числення побудовані [8, 15–17] для логік еквітонних предикатів відповідного рівня.

Логіки локально-еквітонних предикатів. При переході від класичної логіки до логіки повнототальних еквітонних предикатів, а потім до логіки еквітонних предикатів, класи семантичних моделей стають усе ширшими. Тому природно поставити питання про побудову неокласичних логік з максимально широкими класами моделей. Важливим кроком у цьому напрямі є побудована в [18] логіка локально-еквітонних предикатів. Для таких предикатів вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну кількість іменованих компонент.

V -квазіарна функція g локально-еквітонна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ з умов $g(d) \downarrow$, $d' \supset d$ та $d \wedge d'$ – скінченна, випливає, що $g(d') \downarrow = g(d)$.

Поняття локально-еквітонності зводиться до поняття 1-еквітонності.

V -квазіарна функція g 1-еквітонна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ з умов $g(d) \downarrow$, $d' \supset d$ та $d \wedge d'$ – 1-елементна, випливає, що $g(d') \downarrow = g(d)$.

Неважко довести, що функція g 1-еквітонна $\Leftrightarrow g$ локально-еквітонна.

Поняття локально-еквітонності та 1-еквітонності конкретизуються для власне функцій та предикатів. Зрозуміло, що кожний еквітонний предикат є локально-еквітонним, але зворотне не завжди вірне. Справді, предикат, істинний на всіх скінченних ІМ та хибний на всіх нескінченних ІМ, є нееквітонним, але такий предикат локально-еквітонний. Таким чином, клас локально-еквітонних предикатів (ЛЕП) є розширенням класу еквітонних предикатів. Тому клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки еквітонних предикатів.

Семантичні властивості локально-еквітонних предикатів аналогічні властивостям еквітонних предикатів.

Синтаксичні властивості логіки ЛЕП ідентичні синтаксичним властивостям логіки еквітонних предикатів. Для логіки ЛЕП побудовані [18] числення секвенційного типу.

Логіки еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів. Методи моделювання предметних областей мають урахувати неповноту наявної інформації. Логіки, орієнтовані на ці особливості, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Такі предикати уточнюємо [19] як еквісумісні та локально-еквісумісні.

ІМ d та d' сумісні, що позначаємо $d \approx d'$, якщо функція $d \cup d'$ однозначна. V -квазіарна функція g еквісумісна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ з умов $d \approx d'$, $g(d) \downarrow$ та $g(d') \downarrow$ випливає $g(d) = g(d')$.

Еквісумісність функції g означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, значення g на таких даних мають збігатися.

V -квазіарна функція g локально-еквісумісна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ таких, що $(d \wedge d') \cup (d \wedge d')$ скінченна, з умов $d \approx d'$, $g(d) \downarrow$ та $g(d') \downarrow$ випливає $g(d) = g(d')$.

Таким чином, при локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

Поняття еквісумісності та локально-еквісумісності конкретизуються для власне функцій та предикатів.

Класи еквісумісних предикатів (ЕСП) та локально-еквісумісних предикатів (ЛЕСП) є розширеннями класів еквітонних та локально-еквітонних предикатів. Це засвідчують приклади.

Приклад 4. Визначимо предикат P таким чином. Зафіксуємо $x, y \in V$. Визначимо:

$P(d) = T$, якщо $x \in \text{im}(d)$ & $y \notin \text{im}(d)$ або $y \in \text{im}(d)$ & $x \notin \text{im}(d)$; $P(d) \uparrow$, якщо $x, y \in \text{im}(d)$ або $x, y \notin \text{im}(d)$.

Такий предикат P є нееквітонним, але еквісумісним.

Приклад 5. Визначимо предикат Q таким чином. Зафіксуємо $x, y \in V$. Визначимо:

$Q(d) = T$, якщо d скінченна, $x \in \text{im}(d)$ & $y \notin \text{im}(d)$ або $y \in \text{im}(d)$ & $x \notin \text{im}(d)$; $Q(d) = F$, якщо d нескінченна, $x \in \text{im}(d)$ & $y \notin \text{im}(d)$ або $y \in \text{im}(d)$ & $x \notin \text{im}(d)$; $Q(d) \uparrow$, якщо $x, y \in \text{im}(d)$ або $x, y \notin \text{im}(d)$.

Такий предикат Q не є локально-еквітонним і еквісумісним, але Q локально-еквісумісний.

Властивості логік еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів аналогічні відповідним властивостям логік еквітонних та локально-еквітонних предикатів. Класи семантичних моделей таких логік ще ширші, хоча ці логіки все ще зберігають основні закони класичної логіки.

Для логік еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів побудовані [19] секвенційні числення.

Для розглянутих нами класів квазіарних предикатів справджується

Теорема 3. Класи повнототальних еквітонних, еквітонних, локально-еквітонних, еквісумісних та локально-еквісумісних функцій замкнені відносно композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x, S^{\bar{v}}, =$.

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ , якщо для кожної $A=(A, I)$ x неістотне для предиката Φ_A .

Множину неістотних для $g \in Ps \cup Fs$ імен визначаємо за допомогою функції $\mu: Ps \cup Fs \rightarrow 2^V$. Таку функцію продовжуємо [2, 5] до функції $\mu: Fr \cup Tr \rightarrow 2^V$. Кожне $x \in \mu(\Phi)$ неістотне для формули Φ .

Ім'я $x \in V$ *тотально неістотне*, якщо воно неістотне для кожного $g \in Ps \cup Fs$.

Для можливості виконання еквівалентних перетворень довільних формул додатковою вимогою до семантичних моделей логік повнототальних еквітонних, еквітонних, локально-еквітонних, еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів є наявність нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Розглянемо секвенційні числення для класів логік квазіарних предикатів. Такі числення базуються на семантичних властивостях відношення $\models$ логічного наслідку для множин формул. Властивості відношення $\models$ для логік ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП аналогічні властивостям відношення $\models$ для логік еквітонних предикатів [15, 16], тому секвенційне числення певного рівня може описувати кожну із зазначених вище логік відповідного рівня. тобто на кожному рівні фактично маємо одне й те саме секвенційне числення для логік еквітонних предикатів, логік ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Вважаємо зафіксованою мову певної сигнатури та клас моделей мови – клас алгебричних систем такої ж сигнатури.

Виклад проведемо для логік кванторного рівня.

Нехай Γ та Δ – множини формул. Скажемо, що Δ є *логічним наслідком* Γ , якщо для всіх $A=(A, I)$ для всіх $d \in {}^V A$ з того, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$, випливає: неможливо $\Psi_A(d)=F$ для всіх $\Psi \in \Delta$. Те, що Δ є логічним наслідком Γ , будемо позначати $\Gamma \models \Delta$.

Позначимо $nm(\Phi)$ множину всіх імен із V , які фігурують у символах реномінації та квантифікації, що входять до складу Φ . Таку $nm(\Phi)$ назвемо *множиною імен* формули Φ . Розширимо nm на множини формул.

Фундаментальною властивістю відношення $\models$ є теорема про заміну еквівалентних.

Теорема 4. Нехай $\Phi \sim \Psi$. Тоді $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Базові властивості відношення $\models$ на кванторному рівні наведені в [8]. На пропозиційному рівні маємо властивості П1–П4, на реноминативному рівні додаються властивості $RT_{\vdash}, RT_{\dashv}, RR_{\vdash}, RR_{\dashv}, R\neg_{\vdash}, R\neg_{\dashv}, RV_{\vdash}, RV_{\dashv}, PsN_{\vdash}, PsN_{\dashv}$, на кванторному – $R\exists_{\vdash}, R\exists_{\dashv}, \exists_{\vdash}, \exists_{\dashv}$.

Секвенційні числення кванторного рівня. У роботах [15–19] побудовані кванторні секвенційні числення, орієнтовані на різнокванторні секвенції – *QBN-числення*. Запропоновані в даній роботі числення, які ми назвемо *QZN-численнями*, не мають такого обмеження. Для їх побудови треба найперше зняти обмеження на пронесення реномінації через квантори. Тому поряд із властивостями обмеженої $R\exists$ -дистрибутивності $R\exists_{\vdash}$ та $R\exists_{\dashv}$ будемо використовувати властивості загальної $R\exists$ -дистрибутивності $R\exists\exists_{\vdash}$ та $R\exists\exists_{\dashv}$:

$$R\exists\exists_{\vdash}) R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} (\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x (\Phi), \Gamma \models \Delta.$$

$$R\exists\exists_{\dashv}) \Gamma \models \Delta, R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} (\exists x \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x (\Phi).$$

Для $R\exists\exists_{\vdash}$ та $R\exists\exists_{\dashv}$ умова: z *тотально неістотне* та $z \notin nm(R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} (\exists x \Phi))$.

Нагадаємо властивості $R\exists_{\vdash}, R\exists_{\dashv}, \exists_{\vdash}$ та $\exists_{\dashv}$:

$$R\exists_{\vdash}) R_{\bar{y}}^{\bar{v}} (\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x R_{\bar{y}}^{\bar{v}} (\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ (тут умова } x \notin \{\bar{v}, \bar{y}\} \text{)}.$$

$$R\exists_{\dashv}) \Gamma \models \Delta, R_{\bar{y}}^{\bar{v}} (\exists x \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x R_{\bar{y}}^{\bar{v}} (\Phi) \text{ (тут умова } x \notin \{\bar{v}, \bar{y}\} \text{)}.$$

$$\exists_{\vdash}) \Gamma \models \Delta, R_{y_1}^x (\Phi), \dots, R_{y_n}^x (\Phi), \exists x \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x \Phi.$$

$\exists_{\dashv}) \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{y_1}^x (\Phi), \Gamma \models \Delta$ (тут y *тотально неістотне* та $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$).

Для більшої виразності замість $PsN_{\vdash}$ та $PsN_{\dashv}$ використаємо загальніші властивості $\Phi N_{\vdash}$ та $\Phi N_{\dashv}$.

Базовим властивостям відношення $\models$ зіставимо їх синтаксичні аналоги – секвенційні форми. Секвенційні форми є правилами виведення секвенційних числень.

Наведемо секвенційні форми *QZN-числень*. Порівняно із секвенційними формами *QBN-числень* замість форм $\vdash PsN$ і $\vdash PsN$ введені загальніші форми $\vdash \Phi N$ і $\vdash \Phi N$ та додані секвенційні форми $\vdash R\exists\exists$ і $\vdash R\exists\exists$.

$$\begin{array}{l} \vdash \neg \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}; \\ \vdash \vee \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dashv \neg \frac{\vdash A, \Sigma}{\dashv \neg A, \Sigma}; \\ \dashv \vee \frac{\dashv A, \dashv B, \Sigma}{\dashv A \vee B, \Sigma}; \end{array}$$

$\vdash_{RT} \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma};$	$\vdash_{RT} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma};$
$\vdash_{RR} \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma};$	$\vdash_{RR} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma};$
$\vdash_{R\neg} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma};$	$\vdash_{R\neg} \frac{\vdash \neg \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma};$
$\vdash_{R\vee} \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma};$	$\vdash_{R\vee} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma};$
$\vdash_{\Phi N} \frac{\vdash R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(A), \Sigma}{\vdash R_{z, x_1, \dots, x_n}^{y, v_1, \dots, v_n}(A), \Sigma} \text{ за умови } y \in \mu(A);$	$\vdash_{\Phi N} \frac{\vdash \neg R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{z, x_1, \dots, x_n}^{y, v_1, \dots, v_n}(A), \Sigma} \text{ за умови } y \in \mu(A);$
$\vdash_{R\exists} \frac{\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x A), \Sigma} \text{ за умови } x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\};$	$\vdash_{R\exists} \frac{\vdash \neg \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x A), \Sigma} \text{ за умови } x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\};$
$\vdash_{R\exists\exists} \frac{\vdash \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ x_z^x(A), \Sigma}{\vdash R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A), \Sigma};$	$\vdash_{R\exists\exists} \frac{\vdash \neg \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ x_z^x(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A), \Sigma};$
$\vdash_{\exists} \frac{\vdash R_y^x(A), \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma};$	$\vdash_{\exists} \frac{\vdash \neg R_{z_1}^x(A), \dots, \vdash \neg R_{z_m}^x(A), \Sigma, \vdash \exists x A}{\vdash \exists x A, \Sigma}.$

Для форм $\vdash_{R\exists\exists}$ та $\vdash_{R\exists}$ умови такі: $x \in \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, z тотоально неістотне та $z \notin nm(R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A))$.

Таким чином, за умови $x \in \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ будемо використовувати секвенційні форми $\vdash_{R\exists}$ та $\vdash_{R\exists\exists}$; якщо ж маємо $x \in \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, то використовуємо форми $\vdash_{R\exists\exists}$ та $\vdash_{R\exists}$. Для форми $\vdash_{\exists}$ умова: y тотоально неістотне та $y \notin nm(\Sigma, A)$. При застосуванні форми $\vdash_{\exists}$ $\{z_1, \dots, z_m\}$ – це множина всіх імен множини доступних формул секвенції $\vdash_{\exists} A, \Sigma$ та її наступників.

Секвенція $\Sigma = \vdash_{\Gamma} \Delta$ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $\vdash_{\Gamma} \Phi \in \Sigma$ та $\vdash_{\Gamma} \Phi \in \Sigma$, тобто $\Phi \in \Gamma \cap \Delta$. Такі секвенції відіграють роль аксіом. Справді, з умови $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ випливає $\Gamma \models \Delta$.

Секвенція Σ вивідна, або має виведення, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ . Таке дерево назвемо виведенням секвенції Σ .

Секвенція X – наступник секвенції Y у секвенційному дереві δ з коренем Σ , якщо в δ існує шлях $\Sigma = \Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots, \Sigma_m, \dots$ такий, що $X = \Sigma_n$ та $Y = \Sigma_m$.

Теорема 5 (теорема коректності). Нехай секвенція $\Gamma \vdash_{\Delta} \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти QZN-числень, як і для випадку QBN-числень, використаємо метод модельних множин. Для QZN-числень дещо модифікуємо визначення модельної множини.

Множина H специфікованих формул із $W = pm(H)$ модельна, якщо виконуються умови:

- 1) Для кожної примітивної формули Φ лише одна з формул $\vdash_{\Gamma} \Phi$ чи $\vdash_{\Gamma} \neg \Phi$ може належати до H .
- 2) За умови $y \in \mu(\Phi)$, якщо $\vdash_{\Gamma} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$.
- 3) Якщо $\vdash_{\Gamma} \neg \Phi \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \Phi \notin H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg \neg \Phi \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \Phi \in H$.
- 4) Якщо $\vdash_{\Gamma} \Phi \vee \Psi \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \Phi \in H$ або $\vdash_{\Gamma} \Psi \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg \Phi \vee \Psi \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \Phi \in H$ та $\vdash_{\Gamma} \neg \Psi \in H$.
- 5) Якщо $\vdash_{\Gamma} R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$.
- 6) Якщо $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}(\Phi) \in H$.
- 7) Якщо $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg \Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$.
- 8) Якщо $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$.
- 9-1) При $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$: якщо $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$.
- 9-2) Якщо $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$, то для деякого тотоально неістотного $z \in W$ такого, що $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi))$, маємо:
якщо $\vdash_{\Gamma} R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$, то $\exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ x_z^x(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$, то $\vdash_{\Gamma} \neg \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ x_z^x(\Phi) \in H$;
- 10) Якщо $\vdash_{\Gamma} \exists x \Phi \in H$, то існує $y \in W$ таке, що $\vdash_{\Gamma} R_y^x(\Phi) \in H$; якщо $\vdash_{\Gamma} \neg \exists x \Phi \in H$, то для кожного $y \in W$ $\vdash_{\Gamma} \neg R_y^x(\Phi) \in H$.

Побудова секвенційного дерева для випадку QZN-числень модифікується таким чином.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ розбивається на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини *доступних* формул. На початку кожного етапу виконується *крок доступу*. Це означає, що до списку доступних формул додається по одній формулі зі списків $\neg$ -формул та $\neg$ -формул. Якщо в секвенції немає недоступних $\neg$ -формул чи $\neg$ -формул (відповідний список вичерпаний), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина $\neg$ -формула, чи $\neg$ -формула, якщо один із списків порожній).

На початку побудови дерева для секвенції Σ зафіксуємо деякий нескінченний список TN тотально неістотних імен такий, що імена списку TN не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі $k+1$ перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенції). Якщо всі листи дерева замкнені, то процедура завершена позитивно – ми отримали замкнене секвенційне дерево.

Нехай існують незамкнені листи секвенційного дерева. Для кожного такого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого виконуємо дії, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною ξ :

1) Активізуємо всі доступні непримітивні формули листа ξ .

2) По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Секвенційні форми $\neg RT$ та $\neg RT$ допоміжні: перед застосуванням однієї із секвенційних форм $\neg \Phi N$, $\neg RR$, $\neg R\neg$, $\neg Rv$, $\neg R\exists$ чи $\neg \Phi N$, $\neg RR$, $\neg R\neg$, $\neg Rv$, $\neg R\exists$ ми усуваємо в разі наявності тотожні перейменування, застосовуючи належну кількість раз $\neg RT$ чи $\neg RT$. Після застосування недопоміжної форми формула дезактивується.

Спочатку виконуємо всі $\neg \exists$ -форми. При застосуванні $\neg \exists$ беремо u як перше незадіяне ім'я списку TN .

Після застосування $\neg \exists$ до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну до неї форму $\neg \neg$, $\neg \neg$, $\neg v$, $\neg v$, $\neg \Phi N$, $\neg \Phi N$, $\neg RR$, $\neg RR$, $\neg R\neg$, $\neg R\neg$, $\neg Rv$, $\neg Rv$, $\neg R\exists$, $\neg R\exists$, $\neg R\exists$, $\neg R\exists$, $\neg \exists$. При застосуванні $\neg \exists$ множина $\{z_1, \dots, z_m\}$ складається з усіх імен доступних формул листа та його наступників. Без обмежень загальності усуваємо всі повтори формул у секвенції.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) процедура завершена позитивно, отримане скінченне замкнене секвенційне дерево;
- 2) процедура завершена негативно, отримане скінченне незамкнене секвенційне дерево;
- 3) процедура не завершується, і тоді маємо нескінченне секвенційне дерево.

У випадку 3) згідно з лемою Кеніга [11] нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях. Вершини цього шляху не можуть бути замкненими секвенціями, бо при появі замкненої секвенції до неї вже не застосовується жодна секвенційна форма, і процес побудови для цього шляху обривається. Отже, у випадках 2) і 3) у дереві існує скінченний або нескінченний шлях $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m, \dots$, усі вершини якого – незамкнені секвенції. Такий шлях $\wp$ назовемо незамкненим. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Для QZN -числень, як і для випадку QBN -числень, справджується

Теорема 6. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, H – множина всіх відмічених формул секвенції цього шляху. Тоді H – модельна множина.

Теорема 7. Нехай H – модельна множина, нехай $W = nm(H)$. Тоді існують АС $A = (A, I)$ з $|A| = |W|$ та ін'єктивна $\delta \in {}^V A$ з $im(\delta) = W$ такі:

- 1) з умови $\neg \Phi \in H$ випливає $\Phi_A(\delta) = T$;
- 2) з умови $\neg \Phi \in H$ випливає $\Phi_A(\delta) = F$.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ з $im(\delta) = W$. Доводимо індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної множини.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\neg p \in H$, то покладемо $p_A(\delta) = T$; якщо $\neg p \in H$, то покладемо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то покладемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$. Якщо $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то покладемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$.

Задані значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, урахувавши умови неістотності імен, на відповідні $h \in {}^V A$.

В усіх інших випадках $d \in {}^V A$ значення $p_A(d)$ задаємо довільно, урахувавши еквітонність та обмеження стосовно неістотних імен: для всіх $d, h \in {}^V A$ таких, що $d||-\mu(p) = h||-\mu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$.

Неважко переконатись, що значення базових предикатів визначені коректно.

Подальше доведення теореми 8 аналогічне доведенню відповідної теореми для QBN -числень [15, 16], тому розглянемо лише доведення для пунктів 9-1) та 9-2) визначення H .

Нехай $\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$ та $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням H маємо $\neg \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$. За припущенням індукції $(\exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))_A(\delta) = T$.

Нехай $\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$ та $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням H маємо $\neg \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$. За припущенням індукції $(\exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi))_A(\delta) = F$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))_A(\delta) = F$.

Нехай $\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$ та $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням H $\neg \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi) \in H$ для деякого тотально неістотного $z \in W$ такого, що $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))$. За припущенням індукції $(\exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))_A(\delta) = T$.

Нехай $\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in H$ та $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням H $\neg \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi) \in H$ для деякого тотально неістотного $z \in W$ такого, що $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))$. За припущенням індукції $(\exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi))_A(\delta) = F$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))_A(\delta) = F$. ■

Використовуючи теорему 7, отримуємо теорему повноти для QZN -числень.

Теорема 8. Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma, \Delta$ вивідна.

З теореми повноти випливає [15] низка важливих наслідків:

- принцип компактності;
- теорема про існування моделі;
- теореми про семантичну й синтаксичну несуперечливість;
- теореми про взаємну суперечливість та взаємну несуперечливість множин формул.

У роботах [8, 17] побудовані секвенційні числення, орієнтовані на різнокванторні секвенції, для логік кванторно-екваційного, функціонального й функціонально-екваційного рівнів. Аналогічно побудованому QZN-численню, для логік цих рівнів можна побудувати секвенційні числення, що не мають обмеження різнокванторності. Для таких числень справджуються теореми коректності та повноти, їх наслідки.

Теореми про визначність. Розглянемо співвідношення між двома різними уточненнями визначення одного поняття в термінах інших понять.

Одне уточнення – семантичне, або неявне. Його суть: поняття q *неявно* визначається в множині формул Γ через поняття $p_1, \dots, p_n$, якщо для кожних моделей істинності Γ , узгоджених у тому розумінні, що в них $p_1, \dots, p_n$ інтерпретуються однаково, існують однакові інтерпретації для q .

Друге уточнення – синтаксичне, або явне. Його суть: поняття q *явно* визначається в Γ через поняття $p_1, \dots, p_n$, якщо таке визначення є логічним наслідком Γ .

Для класичної логіки еквівалентність явного та неявного визначення одного поняття в термінах інших понять – це теорема Бета про визначність [11, 12]. Покажемо, що подібний результат справджується і для логік еквітонних квазі-арних предикатів.

Розглянемо мову певної сигнатури Ps , множини формул мови, семантичні моделі мови – АС відповідної сигнатури. Нехай $\bar{p} \subseteq Ps$ – деяка множина предикатних символів мови.

Моделлю істинності множини формул Γ назвемо довільну АС $A=(M, I)$ таку, що для кожних $d \in {}^V A$ та $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d) \equiv T$.

Модель A *еквітонна*, якщо для кожного $p \in Ps$ предикат p_A еквітонний.

Моделі істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ множини формул Γ *$\bar{p}$ -тотожні*, якщо для кожного $p \in \bar{p}$ маємо $p_A \equiv p_B$.

Предикатний символ q *семантично визначний* через предикатні символи $\{p_1, \dots, p_n\}$, де $q \notin \{p_1, \dots, p_n\}$, якщо для кожних $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожних еквітонних моделей істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ множини формул Γ маємо $q_A \equiv q_B$.

Предикатний символ q *синтаксично визначний* через предикатні символи $\{p_1, \dots, p_n\}$ у множині формул Γ , якщо існує формула Φ із $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ така, що $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$.

Теорема 9. Нехай ПС q синтаксично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$ у множині формул Γ . Тоді q семантично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Нехай формула Φ із $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ така, що $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$. Припустимо супротивне: q не є семантично визначним через $\{p_1, \dots, p_n\}$. Тоді існують $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожні еквітонні моделі істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ для Γ та $d \in {}^V M$ такі, що $q_A(d) \neq q_B(d)$. Візьмемо для A та B АС повнототальних розширень A' та B' відповідно, візьмемо $\delta \in M^V$ таке, що $\delta \supseteq d$. За еквітонністю $q_A(\delta) = q_A(d)$, $q_B(\delta) = q_B(d)$, тому $q_A(\delta) \neq q_B(\delta)$. Однак A' та B' – моделі істинності для Γ , тому для всіх $\Psi \in \Gamma$ маємо $\Psi_{A'}(\delta) = T$, $\Psi_{B'}(\delta) = T$. Ураховуючи $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$, отримуємо $(q \leftrightarrow \Phi)_{A'}(\delta) = T$ та $(q \leftrightarrow \Phi)_{B'}(\delta) = T$, але згідно з $q_A(\delta) \neq q_B(\delta)$ маємо $\Phi_{A'}(\delta) \neq \Phi_{B'}(\delta)$. Проте $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$, A' та B' – $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожні, тому $\Phi_{A'}(\delta) = \Phi_{B'}(\delta)$. Отримали суперечність.

Зауваження. Можливо $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$, але для $\bar{p}$ -тотожних *локально-еквітонних* моделей істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ для Γ можливо $q_A \neq q_B$. Справді, візьмемо як Φ предикатний символ p , візьмемо $\Gamma = \{q \leftrightarrow p\}$. Задамо $q_A(d) = F$ для скінчених d , $q_A(d) = T$ для нескінчених d , $q_B(d) = T$ для довільних d , задамо $p_A(d) \uparrow$ та $p_B(d) \uparrow$ для скінчених d , $q_A(d) = q_B(d) = T$ для нескінчених d . Зрозуміло, що $q \leftrightarrow p \models q \leftrightarrow p$, для скінчених d маємо $(q \leftrightarrow p)_{A'}(d) \uparrow$ та $(q \leftrightarrow p)_{B'}(d) \uparrow$, для нескінчених d маємо $(q \leftrightarrow p)_{A'}(d) = T$ та $(q \leftrightarrow p)_{B'}(d) = T$, тому A та B – моделі істинності для Γ . У той же час $q_A \neq q_B$.

Теорема 10. Нехай предикатний символ q семантично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$. Тоді q синтаксично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$ у множині формул Γ .

Згідно з умовою для довільних $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожних еквітонних моделей істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ множини формул Γ маємо $q_A \equiv q_B$. Покажемо: існує формула Φ із $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ така, що $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$.

Продублюємо як β' кожний ПС $\beta \in Ps \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. При цьому задамо $\mu(\beta') = \mu(\beta)$, $I_A(\beta') = I_A(\beta)$, $I_B(\beta') = I_B(\beta)$. При заміні кожного β на β' кожна формула $\Psi \in \Gamma$ переходить у формулу Ψ' , множина Γ переходить у Γ' . При цьому $\Psi_A = \Psi'_A$, $\Psi_B = \Psi'_B$. Кожна модель істинності $M=(M, I_M)$ множини формул Γ ізоморфно перетворюється на модель істинності $M'=(M, I_{M'})$ множини формул Γ' .

Позначимо $I_{\cup} = I_M \cup I_{M'}$. Тоді $M_{\cup}=(M, I_{\cup})$ – модель істинності множини формул $\Gamma \cup \Gamma'$. Маємо $I_{\cup}(q) = I_M(q) = I_{M'}(q) = I_M(q')$. Звідси $\Gamma \cup \Gamma' \models q \leftrightarrow q'$. Згідно з теоремою повноти секвенція $\vdash \Gamma \cup \Gamma', q \leftrightarrow q'$ вивідна та має скінченне замкнене секвенційне дерево δ . При побудові δ використовуються лише формули деякої скінченної секвенції $\Gamma_0 \cup \Gamma'_0 \subseteq \Gamma \cup \Gamma'$. Отримуємо дерево з коренем $\vdash \Gamma_0 \cup \Gamma'_0, q \leftrightarrow q'$, усі вершини якого – скінченні секвенції. Отже, скінченна секвенція $\vdash \Gamma_0 \cup \Gamma'_0, q \leftrightarrow q'$ вивідна. Нехай $\Gamma_0 \cup \Gamma'_0 = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_k\}$, $\Gamma_0 = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\Gamma'_0 = \{B_1, \dots, B_k\}$. Формули $A_1 \& \dots \& A_m$ та $B_1 \& \dots \& B_k$ відповідно позначимо A та B . Тоді секвенція $\vdash A \& B, q \leftrightarrow q'$ вивідна, звідки $A \& B \models q \leftrightarrow q'$. Звідси маємо $\models A \& B \rightarrow (q \leftrightarrow q')$, що рівнозначно $\models (A \& q \rightarrow B \rightarrow q) \& (A \& \neg q \rightarrow B \rightarrow \neg q)$, тому $\models A \& q \rightarrow B \rightarrow q$ та $\models A \& \neg q \rightarrow B \rightarrow \neg q$. Отже, секвенції $\vdash A \& q \rightarrow B \rightarrow q$ та $\vdash A \& \neg q \rightarrow B \rightarrow \neg q$ вивідні.

Згідно з інтерполяційною теоремою [20] для вивідної секвенції $\vdash A \& q \rightarrow B \rightarrow q$ існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi) \subseteq \sigma(A \& q) \cap \sigma(B \rightarrow q)$ така, що секвенції $\vdash A \& q \rightarrow \Phi$ та $\vdash \Phi \rightarrow B \rightarrow q$ вивідні. Однак $\sigma(A \& q) \cap \sigma(B \rightarrow q) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$, $\sigma(A) \cap \sigma(B) \subseteq \sigma(\Gamma) \cap \sigma(\Gamma') = \{p_1, \dots, p_n\}$. Тому $\sigma(\Phi) \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$.

З вивідності $\vdash A \& q \rightarrow \Phi$ та $\vdash \Phi \rightarrow B \rightarrow q$ випливає вивідність секвенцій $\vdash A \rightarrow q \rightarrow \Phi$ та $\vdash B \rightarrow \Phi \rightarrow q$. Звідси вивідні секвенції $\vdash A \rightarrow q \rightarrow \Phi$ та $\vdash B \rightarrow \Phi \rightarrow q$, отже, вивідні секвенції $\vdash \Gamma, q \rightarrow \Phi$ та $\vdash \Gamma', \Phi \rightarrow q$. Продублюємо секвенційне дерево для

$\neg \Gamma \neg \Phi \rightarrow q$, знімаючи '. Отримаємо виведення секвенції $\neg \Gamma \neg \Phi \rightarrow q$. Тепер з виведень секвенцій $\neg \Gamma \neg q \rightarrow \Phi$ та $\neg \Gamma \neg \Phi \rightarrow q$ дістаємо виведення секвенції $\neg \Gamma \neg q \leftrightarrow \Phi$. Звідси $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$.

Зауваження. Застосовуючи інтерполяційну теорему до вивідної секвенції $\neg A \& \neg q \rightarrow B \rightarrow \neg q$, отримуємо формулу $\exists$ таку, що $\sigma(\exists) \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$ та секвенція $\neg \Gamma \neg q \leftrightarrow \exists$ вивідна. Звідси $\Gamma \models \neg q \leftrightarrow \exists$, тобто $\exists \sim \neg \Phi$.

Висновки. У роботі досліджено логіки часткових предикатів, заданих на іменних множинах – композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Розглянуто ієрархію логік квазіарних предикатів. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями на клас предикатів. Для таких логік запропоновано числення секвенційного типу. Побудовано кванторне секвенційне числення без обмежень різнокванторності, доведено теорему повноти. Для логік еквітонних предикатів доведено теореми про визначність.

1. Нікітченко Н.С. Композиционно-номінативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31; 2. Нікітченко Н.С., Шкільняк С.С. Неоклассические логики предикатов // Проблемы программирования. – 2000. – № 3–4. – С. 3–17; 3. Нікітченко Н.С. Аппликативные композиции частных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2. – С. 14–33; 4. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 2. – С. 300–314; 5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки першого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 1. – С. 260–274; 6. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Семантичні аспекти посткласичних логік // Проблемы программирования. – 2001. – № 1–2. – С. 3–12; 7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка. К., 2003; 8. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка. Додаткові розділи. К., 2004; 9. Шкільняк С.С. Безкванторні неокласичні логіки // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 4. – С. 323–331; 10. Шкільняк С.С. Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 1. – С. 222–225; 11. Клини С. Математическая логика. – М., 1973; 12. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск, 2000; 13. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Чисті композиційно-номінативні числення // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 3. – С. 290–303; 14. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні числення першого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 2. – С. 302–313; 15. Шкільняк С.С. Неокласичні секвенційні числення // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 4. – С. 261–274; 16. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Семантичні властивості неокласичних логік та секвенційні числення // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: кібернетика. К., 2000. – Вип. 4. – С. 25–35; 17. Шкільняк С.С. Функціонально-екваційні неокласичні логіки: числення секвенційного типу // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 4. – С. 302–309; 18. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Логіки локально-еквітонних предикатів: семантичні властивості та секвенційні числення // Проблеми програмування. – 2003. – № 2. – С. 28–41; 19. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки предикатів над даними з неповною інформацією // Проблеми програмування. – 2004. – № 2–3. – С. 74–80; 20. Шкільняк С.С. Властивості неокласичних секвенційних числень // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – К., 2000. – Вип. 1. – С. 286–293.

Надійшла до редколегії 8.10.2004

УДК 517.929

Д. Утебаев, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ РЕЛЕЯ В ПРУЖНО-ПОРИСТОМУ МОМЕНТНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Розглянуто задачу поширення хвиль. Виписано рівняння динаміки. Проведено дослідження залежностей розв'язків від параметрів.

The problem of waves expansion is considered. The dynamic equations are extracted. The decision depending on operation factors considered.

У необмеженому пружно-пористому ізотропному середовищі поширюються тільки два типи подовжніх і поперечних хвиль. Однак при наявності границь виникають поверхневі хвилі, які вперше досліджено в роботах [1, 5]. Поширення поверхневих хвиль з обліком моментних напруг досліджено в [2].

Нехай усередині ізотропного пружно-пористого моментного півпростору з плоскою границею поширюються плоскі хвилі. Необхідно знайти збурене поле, область якого обмежена околom границі, що швидко згасає з глибиною.

Зв'язок між складовими тензора напруг і тензора деформацій з урахуванням інерції здійснюється у вигляді [4]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{xx} + Qg, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{yy} + Qg, \\ \sigma &= Q\varepsilon + Rg, \\ \sigma_{xy} &= \mu \left[\varepsilon_{xy} - l^2 \left(\Delta \omega - \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) \right], \\ \sigma_{yx} &= \mu \left[\varepsilon_{xy} + l^2 \left(\Delta \omega - \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) \right], \\ a_3^2 &= \frac{\mu \rho_{22}}{\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Моменти M_{zx} і M_{zy} через обертання ω виражені таким чином:

$$M_{zx} = 2 \mu l^2 \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad M_{zy} = 2 \mu l^2 \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.\tag{2}$$

Зв'язок між деформаціями та переміщеннями записується у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, g = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (3)$$

Рівняння руху Біо [6] мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho_{11} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \rho_{12} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \end{cases}\quad (4)$$

Уводячи узагальнені потенціали $\phi_j(x, y, t)$ і $\psi_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 2}$), маємо

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \vartheta = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ U &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5)$$

Нехай

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \beta \phi, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \beta_3 \psi. \quad (6)$$

Тоді одержуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \mu l^2 \Delta(\Delta \psi) - \frac{l^2 \mu}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi, \\ \sigma_{yx} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \mu l^2 \Delta(\Delta \psi) - \frac{l^2 \mu}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi, \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + Q - \beta) \Delta \phi + 2 \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2 \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma = (Q + R - \beta) \Delta \phi, \\ M_{zx} &= 2 \mu l^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi, \quad M_{zy} = 2 \mu l^2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi.\end{aligned}\quad (7)$$

Рівняння руху (4) запишуться таким чином:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu + \beta Q) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi + \mu \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi - \mu l^2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta(\Delta \psi) + \frac{\mu l^2}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi &= \\ = (\rho_{11} + \beta \rho_{12}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\rho_{11} + \beta_3 \rho_{12}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ (\lambda + 2\mu + \beta Q) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi - \mu \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \mu l^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta(\Delta \psi) - \frac{\mu l^2}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi &= \\ = (\rho_{11} + \beta \rho_{12}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - (\rho_{11} + \beta_3 \rho_{12}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ (Q + R - \beta) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi &= (\rho_{12} + \beta \rho_{22}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\rho_{12} + \beta_3 \rho_{22}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ (Q + R - \beta) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi &= (\rho_{12} + \beta \rho_{22}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - (\rho_{12} + \beta_3 \rho_{22}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}\quad (8)$$

Диференціюючи третє рівняння за y , а четверте – за x системи (8) і віднімаючи з отриманого третього рівняння четверте, отримаємо вираз для визначення β_3 :

$$\rho_{12} + \beta_3 \rho_{22} = 0. \quad (9)$$

Звідси

$$\beta_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}. \quad (10)$$

Продиференціюємо третє рівняння за x , а четверте – за y системи (8) і складемо. Одержимо

$$(Q + R - \beta)\Delta(\Delta\phi) = (\rho_{12} + \beta - \rho_{22})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\phi.$$

Звідси

$$\Delta\phi = \frac{\rho_{12} + \beta\rho_{22}}{Q + R\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi. \quad (11)$$

Диференціюючи перше рівняння за x , а друге – за y системи (8) і складаючи їх, маємо

$$(\lambda + 2\mu + \beta - Q)\Delta(\Delta\phi) = (\rho_{11} + \beta\rho_{12})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\phi.$$

Звідси одержуємо

$$\Delta\phi = \frac{\rho_{12} + \beta\rho_{22}}{\lambda + 2\mu + \beta - Q}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi. \quad (12)$$

З рівнянь (11) і (12) одержимо квадратне рівняння для визначення значень β

$$\frac{\rho_{12} + \beta\rho_{22}}{Q + R\beta} = \frac{\rho_{11} + \beta\rho_{12}}{\lambda + 2\mu + \beta - Q}. \quad (13)$$

Звідси визначимо $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$. Таким чином,

$$\Delta\phi_j = \frac{1}{a_j^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_j, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Тут $\frac{1}{a_j^2} = \frac{\rho_{12} + \beta_j - \rho_{22}}{Q + R - \beta_j} = \frac{\rho_{11} + \beta_j - \rho_{12}}{\lambda + 2\mu + \beta_j - Q}$, a_j – швидкість подовжніх хвиль першого й другого типу. Таким чином,

$$\phi_1 = \phi_1 + \phi_2, \quad \phi_2 = \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2. \quad (15)$$

Аналогічно диференціюючи перше рівняння за y , а друге – за x системи (8) і віднімаючи з отриманого першого рівняння друге, отримуємо

$$\mu \Delta(\Delta\psi) - \mu l^2 \Delta(\Delta + 1) + \frac{\mu l^2}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta(\Delta\psi) = (\rho_{11} + \beta_3 - \rho_{12}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\psi.$$

Звідси

$$\Delta\psi - l^2 \Delta(\Delta\psi) + \frac{l^2}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\psi = \frac{(\rho_{11} + \beta_3 - \rho_{12})}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\psi,$$

або

$$[1 - l^2 \Delta] [\Delta\psi - \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\psi] = 0. \quad (16)$$

Тут $\frac{1}{a_3^2} = \frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{\mu\rho_{22}} = \frac{\rho_{11} + \beta_3\rho_{12}}{\mu}$ – швидкість поперечної хвилі, Δ – оператор Лапласа. На границі півпростору

спостерігаються граничні умови

$$\sigma_{yy} = \sigma = \sigma_{yx} = M_{zy} = 0, \quad y = 0, \quad (17)$$

які в потенціалах подовжніх і поперечних хвиль приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= (\lambda + Q\beta_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1 + (\lambda + Q\beta_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_2 + (\lambda + 2\mu + Q\beta_1) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_1 + (\lambda + 2\mu + Q\beta_2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_2 - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi = 0, \\ \sigma_{yx} &= l^2 \mu (2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \psi + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \psi + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \psi) + [\mu - \frac{l^2 \mu}{a_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}] (2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi_1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi) = 0, \\ \sigma &= (Q + R\beta_1)\Delta\phi_1 + (Q + R\beta_2)\Delta\phi_2 = 0, \\ M_{zy} &= 2\mu l^2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta\psi = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок системи (14) і (16) будемо шукати у вигляді

$$\varphi_j(x, y, t) = A_j e^{k_j y + i(pt - fx)}, \quad (19)$$

$$\psi(x, y, t) = B_j e^{\eta_j y + i(pt - fx)} \quad j = 1, 2.$$

Підставляючи співвідношення (19) у (14), (15), одержуємо

$$k_j^2 + \left(\frac{p}{a_j}\right)^2 - f^2 = 0, \quad (20)$$

$$l^2 \eta^4 - [1 + l^2 f^2 (2 - \frac{p^2}{a_3^2 f^2})] \eta^2 - f^2 (1 + f^2 l^2) (\frac{p^2}{a_3^2 f^2} - 1) = 0.$$

Візьмемо значення k і η , що визначені з рівнянь (20), які відповідають за загасання хвилі всередині середовища, тобто

$$k_j = f \sqrt{1 - \left(\frac{a_3^2}{a_j^2}\right) \left(\frac{p^2}{f^2 a_3^2}\right)}, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$k_3 = \eta_1 = \frac{1}{l} \sqrt{1 + l^2 f^2},$$

$$k_4 = \eta_2 = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 f^2 \left(1 - \frac{p^2}{f^2 a_3^2}\right)}.$$

Звідси маємо

$$\varphi_j(x, y, t) = A_j e^{k_j y + i(pt - fx)}, \quad j = 1, 2, \quad (22)$$

$$\psi(x, y, t) = A_3 e^{k_3 y + i(pt - fx)} + A_4 e^{k_4 y + i(pt - fx)}.$$

Підставляючи (22) у граничні умови (17), (18) і позначаючи $\alpha = l^2 f^2$, $\xi = \frac{p^2}{f^2 a_3^2} = c_k^2$, де ξ – квадрат безрозмірної швидкості поверхневої хвилі, одержимо однорідну систему чотирьох алгебричних рівнянь:

$$(m_1 k_1^2 - n_1 f^2) A_1 + (m_2 k_2^2 - n_2 f^2) A_2 + 2 i \mu f k_3 A_3 + 2 i \mu f k_4 A_4 = 0,$$

$$i \alpha_0 (k_1 A_1 + k_2 A_2) + (\beta_0 k_3^2 - \gamma_0 - l^2 k_3^4) A_3 + (\beta_0 k_4^2 - \gamma_0 - l^2 k_4^4) A_4 = 0, \quad (23)$$

$$\gamma_1 (k_1^2 - f^2) A_1 + \gamma_2 (k_2^2 - f^2) A_2 = 0,$$

$$k_3 (k_3^2 - f^2) A_3 + k_4 (k_4^2 - f^2) A_4 = 0.$$

Тут

$$m_1 = \lambda + 2\mu + Q\beta_1, \quad n_1 = \lambda + Q\beta_1, \quad m_2 = \lambda + 2\mu + Q\beta_2, \quad n_2 = \lambda + Q\beta_2,$$

$$\gamma_1 = Q + R\beta_1, \quad \gamma_2 = Q + R\beta_2,$$

$$\alpha_0 = 2f(1 + \alpha\xi), \quad \beta_0 = 2\alpha - \alpha\xi - 1, \quad \gamma_0 = f^2(1 + \alpha + \alpha\xi).$$

Система рівнянь (23) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її детермінант дорівнює нулю:

$$\alpha_0 k_3 k_4 \cdot 2 f \mu (k_3^2 - k_4^2) \left[k_1 \gamma_2 (k_2^2 - f^2) - k_2 \gamma_1 (k_1^2 - f^2) \right] +$$

$$+ \left[k_3 (k_3^2 - f^2) (\beta_0 k_4^2 - \gamma_0 - l^2 k_4^4) - k_4 (k_4^2 - f^2) (\beta_0 k_3^2 - \gamma_0 - l^2 k_3^4) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\gamma_2 (k_2^2 - f^2) (m_1 k_1^2 - n_1 f^2) - \gamma_1 (k_1^2 - f^2) (m_2 k_2^2 - n_2 f^2) \right] = 0, \quad (24)$$

або коли

$$4\sqrt{\alpha} \mu (1 + \alpha\xi)^2 \sqrt{\alpha (1 + \alpha) (1 - \xi)} \left[a_0 \gamma_1 \sqrt{1 - b_0 \xi} - b_0 \gamma_2 \sqrt{1 - a_0 \xi} \right] +$$

$$+ \alpha \sqrt{1 + \alpha} \{ (1 - \xi) [\alpha (2 - \xi) - 1] - \alpha (1 - \xi)^2 - [1 + \alpha (1 + \xi)] \} -$$

$$- \xi \sqrt{\alpha (1 + \alpha) (1 - \xi)} [\alpha^2 (1 + \xi) - a \xi - 2] \{ \gamma_1 a_0 [m_2 (1 - b_0 \xi) - n_2] -$$

$$- \gamma_2 b_0 [m_1 (1 - a_0 \xi) - n_1] \} = 0. \quad (25)$$

Тут

$$a_0 = \frac{a_3^2}{a_1^2}, \quad b_0 = \frac{a_3^2}{a_2^2}.$$

Рівняння (25) є рівнянням для визначення безрозмірної швидкості поверхневої хвилі ξ . Якщо рідина в порах відсутня, то з (25) маємо [2]

$$\begin{aligned} & (2-\xi)[(\xi-2)+2\alpha(\xi-1)-(\xi+2)\sqrt{\alpha(1+\alpha)\xi}]+ \\ & +4\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\xi\sqrt{(1+\alpha)(1-\xi)}[\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{\alpha(1-\xi)}]=0, \\ & a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \xi = C_k^2 = \frac{p^2}{f^2 b^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

З (26) при $\alpha \rightarrow 0$ чи $l \rightarrow 0$ одержимо класичне рівняння для поверхневої хвилі Релея в пружному ізотропному півпросторі [1]:

$$(2-\xi)^2 = 4\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\xi\sqrt{1-\xi}. \quad (27)$$

З (26) також випливає, що при $\alpha \rightarrow \infty$ або при $f \rightarrow \infty$, тобто зі зростанням частоти f , корінь цього рівняння ξ прямує до одиниці, тобто швидкість поширення поверхневої хвилі прямує до швидкості поширення поперечних хвиль. З (19) і (21) також випливає, що зі зростанням f область впливу поперечних хвиль із глибиною збільшується, у той час як подовжні хвилі швидко згасають. Дане явище є наслідком впливу моментних напруг; у пружному класичному середовищі воно відсутнє.

У загальному випадку рівняння (25) і (26) перевірялися чисельно. Отримані криві залежності ξ від a при трьох значеннях коефіцієнта Пуассона ν . Спочатку величина ξ зі зростанням α зменшується, а потім, при подальшому зростанні α , зростає та прямує до одиниці.

Якщо не враховувати впливу інерції середовища, тобто в (26) у виразах σ_{xy} і σ_{yx} похідні від ω за t відкинути, то для ξ одержимо рівняння [3]:

$$\begin{aligned} & 16 \left[1 - \left(\frac{b^2}{a^2} \right) \xi \right] (1+\alpha-\xi) \left[1+2\alpha+2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\xi)} \right] = \\ & = (2-\xi)^2 \left[(1-3\alpha^2)^2 + \alpha(3-\alpha)(1+\alpha-\xi) + (1-\alpha)^2(1+\alpha-\xi)^2 + \alpha(1+\alpha-\xi)^2 + \right. \\ & + 2(1-3\alpha^2)(3-\alpha)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\xi)} + 2(1-3\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha-\xi) - \\ & - 2(1-3\alpha^2)(1+\alpha-\xi)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\xi)} + 2(3-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha-\xi)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\xi)} - \\ & \left. - 2\alpha(3-\alpha)(1+\alpha-\xi)^2 - 2(1-\alpha)(1+\alpha-\xi)^2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\xi)} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

З рівняння (28) випливає, що при $\alpha \rightarrow \infty$ шукана величина $\xi \rightarrow 2$, тобто $c_k \rightarrow \sqrt{2}$. Швидкість поверхневих хвиль стає більшою від швидкості поширення поперечних. Це не відповідає фізичному змісту, оскільки поверхнева хвиля C_k породжена поперечною й не може її перевищувати. Якщо врахувати вплив інерції обертання часток середовища, то дана невідповідність усувається.

1. Кольский Г. Волны напряжения в твёрдых телах. – М., 1954; 2. Саатов Я.У. и др. Двумерные задачи по неуставившемуся движению сжимаемых сред. – Ташкент, 1969; 3. Рахматуллин Х.А. и др. Влияние моментных напряжений на распространение волн в полупространстве, вызванных движущимся источником // Концентрация напряжений. – Т. 2. – К., 1967; 4. Савин Г.Н. Основы полоской задачи моментной теории упругости. – К., 1965; 5. Саатов Я.У. Плоские задачи механики упруго пористых сред. – Ташкент, 1975; 6. Био М.А. Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. – 1963. – Т. 6. – №82. – С. 135-153.

УДК 004.588

Ю.В. Рудник, асп.,
Ю.С. Жарких, д-р фіз-мат. наук, проф.

МІЖНАРОДНІ СТАНДАРТИ ЕЛЕКТРОННИХ НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ

Зроблено огляд міжнародних організацій, що займаються розробкою стандартів в електронній освіті. Детально розглянуто модель SCORM, що є стандартом de facto для розробників електронних навчальних матеріалів. Проаналізовано призначення головних складових частин моделі SCORM та сформульовано переваги використання моделі.

The review of international organizations involved in standards development is conducted. The SCORM model is observed in detail. The purposes of the main parts of SCORM model are analyzed. The basic advantages of SCORM implementation are formulated.

Упровадження комп'ютерних технологій у систему освіти відкриває нові можливості для спільного використання ресурсів різних навчальних закладів і створення єдиного освітнього простору. Таке об'єднання та взаємодія можуть бути реалізовані тільки за умови обов'язкового застосування єдиних стандартів, що регламентують роботу систем керування навчанням (Learning Management System – LMS) і електронних навчальних матеріалів. Проблеми уніфікації навчальних систем, засобів керування навчальним процесом, структур та форматів даних для подання навчальних матеріалів розробляли кілька організацій. Назвемо найбільш відомі та визнані у світі.

AICC [1] – Aviation Industry CBT (Computer-Based Training) Committee – міжнародна організація, заснована в 1988 р., займається розробкою специфікацій із CBT для авіаційної промисловості. Головні результати AICC отримані при створенні стандартів, що регламентують взаємодію LMS із навчальними матеріалами та структуру самих матеріалів.

IMS [2] (Instructional Management System) Global Learning Consortium Inc. – освітній консорціум, заснований в 1997 р. для розробки та впровадження специфікацій у галузі відкритої освіти. До консорціуму входять університети та провідні промислові компанії в галузі інформаційних технологій. Головними досягненнями IMS є стандарти службової інформації, що супроводжують навчальні матеріали та стандартизацію засобів тестування знань.

IEEE LTSC [3] (Learning Technology Standards Committee) – комітет стандартизації в галузі технологій навчання, створений в IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers). Тут розроблені моделі архітектури системи керування навчанням, а також протоколи обміну даними.

У 1997 р. Міністерством оборони США був організований Департамент ADL [4] (Advanced Distributed Learning) для розробки стратегії використання інформаційних технологій у модернізації освіти та створення стандартів електронного навчання. Результатом його роботи стала модель SCORM (Shareable Content Object Reference Model) – модель спільно використовуваних навчальних об'єктів. Ця модель побудована шляхом об'єднання кращих результатів організацій, розглянутих вище, і на сьогоднішній день є стандартом в галузі електронної освіти.

Стандарт SCORM містить три основні складові.

Перша складова – "Content Aggregation Model" [5] – визначає директиви для ідентифікації та об'єднання інформаційних ресурсів у структурованому навчальному контенті.

Друга складова – "Run-time Environment" [6] – визначає механізми взаємодії навчальних матеріалів із системою керування навчанням (LMS). Містить директиви для запуску, передачі даних, відстеження результатів проходження.

Третя складова – "Sequencing & Navigation" [7] – базується на специфікації Simple Sequencing, розробленої IMS та визначає, як SCORM-сумісний контент буде впорядковано та в якій послідовності надано, залежно від дій студента, інструктора або системних подій, що відбуваються у LMS.

Розглянемо ці складові детальніше.

Призначення Content Aggregation Model [5] полягає в забезпеченні загальної методики побудови навчального контенту з об'єктів, що використовуються багаторазово. Content Aggregation Model також визначає, як навчальний контент може бути розпізнано, описано, зібрано в курс. Навчальний контент може передаватися між LMS та електронними депозитаріями курсів. Модель містить у собі специфікації для зібраного контенту та визначає метадані для його опису.

Content Aggregation Model ґрунтується на 3-х компонентах:

1) Asset – елементарні складового матеріалу в електронному вигляді. Кожний asset є окремим файлом для відображення будь-якого виду інформації: тексту (HTML), малюнків (JPEG, GIF), демонстрацій (Flash Object) тощо.

2) SCO (Sharable Content Object) – розподілені об'єкти навчального контенту.

3) Content Aggregation. Призначено для стандартизації засобів створення електронних навчальних матеріалів (e-content) шляхом об'єднання розподілених об'єктів навчального контенту.

SCORM Content Aggregation Model є педагогічно нейтральною методикою компонування навчальних ресурсів та складається, у свою чергу, з таких компонентів:

Метадані (Metadata Dictionary) з описом призначення та типу вмісту модуля (Asset, SCO, Content Aggregation), відомостями про авторів, ціну, вимогами до технічної платформи тощо; ця частина CAM запозичена зі специфікацій IEEE.

XML-дані (Content Structure) про структуру контенту – CSF (Course Structure Format). За допомогою CSF подається структура навчального курсу, визначаються всі елементи й зовнішні посилання, необхідні для інтероперабельності в межах концепцій IMS, IEEE та AICC. CSF заснований на моделі AICC Content Model.

Дані (Content Packaging) про способи об'єднання модулів у навчальні посібники на базі специфікації IMS Content Packaging specification. При цьому кожен елемент автоматично одержує унікальний ідентифікатор.

Компонент Run-time Environment [6] містить директиви для запуску навчального матеріалу та передачі даних, якими можуть обмінюватися LMS та контент у процесі їхнього використання. Схему обміну даними наведено на рис. 1.

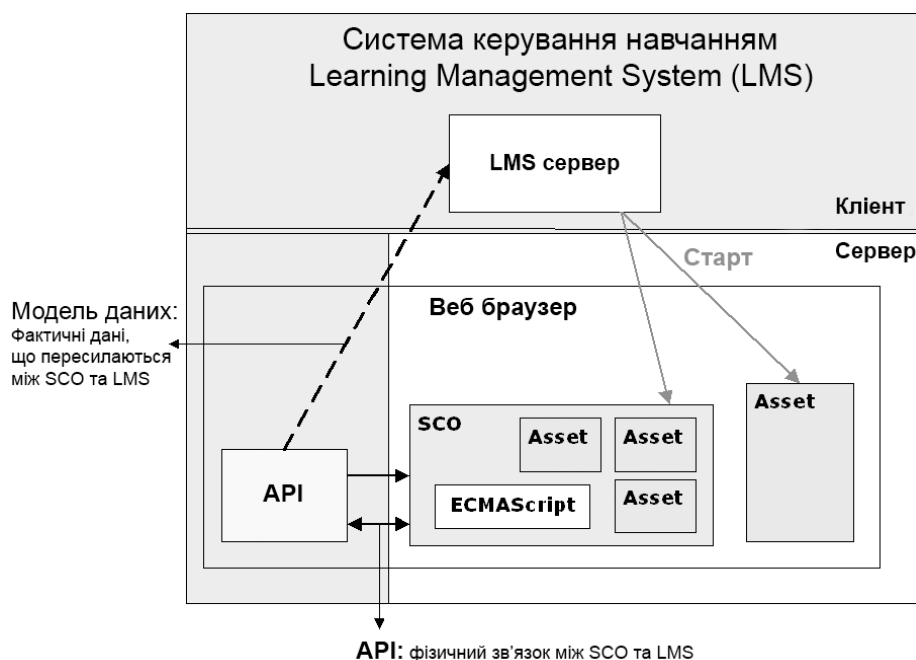


Рис.1

До складу компонента Run-time Environment входять:

Механізм запуску контенту – Launch. Це механізм, за допомогою якого системи керування навчанням (LMS) запускають навчальні ресурси та визначають процедури зв'язку з ними. Протоколи зв'язку стандартизовані шляхом використання загального API.

Application Program Interface (API) – програмний інтерфейс додатка. Він задає механізм передачі інформації у LMS про стан навчального ресурсу (пройшла ініціалізація, завершено, відбулася помилка тощо), а також передачу даних про проходження навчального матеріалу (набрані бали, час проходження та ін.). Схематичний вигляд модуля API Adapter та функції програмного інтерфейсу показано на рис. 2.

Усі функції API Adapter можна розділити на 3 групи:

Режим виконання Execution State. Дві функції API, LMSInitialize("") та LMSFinish(""), використовуються в режимі виконання.

Режим керування State Management. API містить три функції, які використовуються для обробки помилок: LMSGetLastError(), LMSGetErrorString(errornumber) and LMSGetDiagnostic(parameter).

Режим передачі даних Data Transfer. Три функції, що залишилися, використовуються для передачі даних між SCO та LMS: LMSGetValue(data model element), LMSSetValue(data model element, value) and LMSCommit(""). API розроблений для передачі даних та базується на зовнішній моделі даних AICC, що називається "cmi".

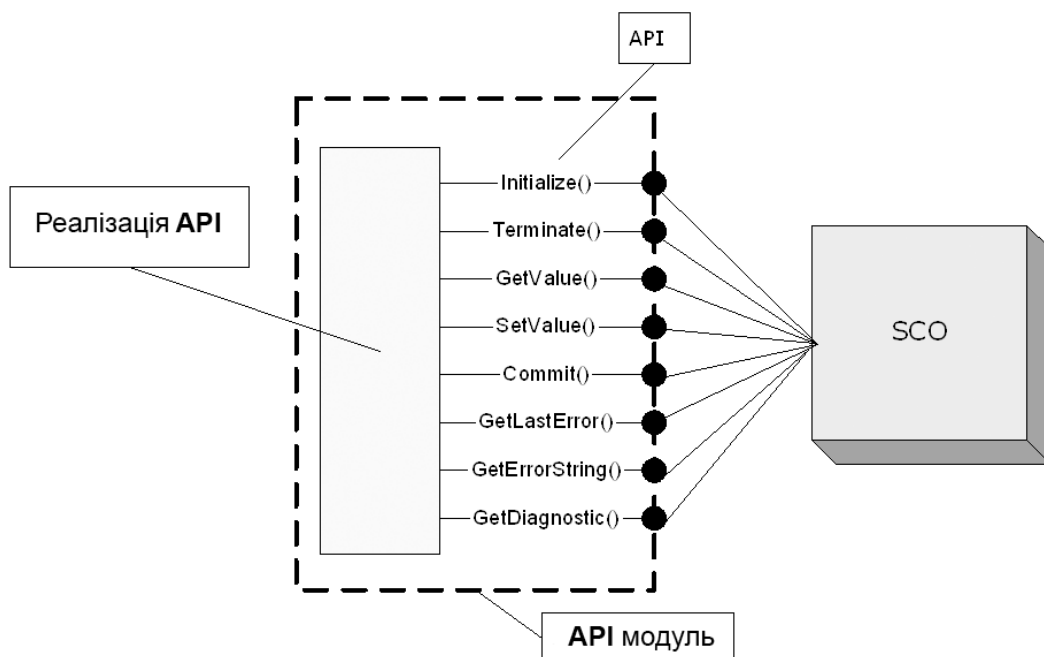


Рис. 2

Data Model – модель даних. Це стандартний набір елементів даних, що використовуються для опису SCO і призначені для розпізнавання системою керування навчанням LMS. Ці елементи стандартизовані однаково, як для LMS, так і для SCO. Навчальний контент та LMS повинні використати тільки визначені елементи даних для запуску, передачі даних, відстеження результатів проходження навчального матеріалу.

Структура специфікації "Sequencing & Navigation" [7]:

Activity Tree – опис структури курсу у вигляді дерева;

Learning Activities – змістовно закінчений блок матеріалу;

Sequencing Information – інформація про порядок доставки інформації;

Navigation Information – опис можливих навігаційних запитів;

Navigation Data Model – модель даних, що використовується для обміну навігаційними запитами між навчальним об'єктом та LMS.

Специфікації "Sequencing & Navigation" описують можливість задати динамічну послідовність подачі матеріалів. Тобто залежно від дій студента, система керування навчанням (LMS) визначає, який наступний інформаційний блок буде йому надано. Також існує можливість задати умови проходження відповідного інформаційного блоку, наприклад, кількість балів за попередній тест повинна бути більше від заданої величини.

Наведемо деякі рекомендації щодо впровадження моделі SCORM.

Не слід намагатися досягти повної сумісності вашого контенту зі стандартом SCORM. Наприклад, якщо потрібно відслідковувати студентську успішність та використовувати правила для визначення порядку проходження матеріалів, то необхідно впроваджувати підтримку специфікацій – SCORM "Run Time Environment" та "Sequencing & Navigation". Якщо не має необхідності відслідковувати студентську активність, але існує необхідність експортувати навчальні матеріали до іншої SCORM, сумісної з LMS, то має сенс використати директиви Content Packaging з набору специфікацій Content Aggregation Model. Для швидкого пошуку навчальних об'єктів та їх багаторазового використання доцільно знайти опис елементів електронного контенту за допомогою метаданих, що регламентуються відповідною частиною специфікації Content Aggregation Model. Тобто існує багато шляхів для використання моделі SCORM.

Наприкінці сформулюємо основні властивості навчальних матеріалів, що виготовляють відповідно до моделі SCORM:

Доступність (Accessibility) – можливість знаходити та одержувати доступ до навчальних об'єктів з різних джерел.

Сумісність (Interoperability) – можливість використовувати навчальні об'єкти, розташовані в різних місцях, створені різними інструментами та на різних платформах. Функціональна сумісність (збереження працездатності при використанні різного програмного та апаратного забезпечення).

Довговічність (Durability) – здатність витримати будь-які технологічні зміни без переробки або зміни внутрішньої структури навчального об'єкта (не потрібно внесення змін у контент при зміні програмного забезпечення).

Багаторазове використання (Reusability) – здатність гнучко використати навчальні об'єкти в різному контексті та в багатьох навчальних курсах.

1. Aviation Industry CBT Committee (AICC) // <http://www.aicc.org>; 2. IMS Global Learning Consortium, Inc. // <http://www.imspjproject.org>; 3. Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE) Learning Technology Standards Committee (LTSC) // <http://ltsc.ieee.org>; 4. Advanced Distributed Learning (ADL) Initiative // <http://www.adlnet.org>; 5. SCORM Content Aggregation Model Version 1.3, Advanced Distributed Learning, January 30, 2004. // <http://www.adlnet.org>; 6. SCORM Run-Time Environment Model Version 1.3, Advanced Distributed Learning, January 30, 2004. // <http://www.adlnet.org>; 7. SCORM Sequencing and Navigation (SN) Version 1.3 Advanced Distributed Learning, January 30, 2004. // <http://www.adlnet.org>; 8. IMS Simple Sequencing Behavior and Information Model v1.0 Final Specification, IMS Global Learning Consortium, Inc., March 2003 Available at: <http://www.imspjproject.org>.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 004.588

Є.В. Драган, асп.,
Ю.С. Жарких, д-р фіз-мат. наук, проф.

ДІАГНОСТИКА РІВНЯ ЗНАНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕСТІВ

Розглянуто основні положення, особливості тестів та їхніх типів, можливості застосування. Розкрито основні поняття – надійність, валидність. Описано різні підходи до аналізу відповідей та їхнього оцінювання.

The main aspects of testology, tests characteristics and features of test types are considered, and opportunity for their using are offered. The main concepts of test reliability and validity are revealed. Different approaches of answer analysis are described.

Сьогодні комп'ютерне тестування рівня знань набуло широкого розповсюдження, що пов'язано з розвитком нової концепції навчання й повсюдним застосуванням інформаційних технологій. Під час тестування комп'ютер оцінює рівень знань опитуваного студента. Традиційний тест є стандартизованим методом діагностики рівня підготовки. До структури підготовки належать знання, вміння, навички, уявлення. Цим не вичерпується підготовка, до неї ще включаються інтелектуальний, фізичний і культурний розвиток, творчі здібності та рівень розвитку емоційно-чуттєвої сфери. Надалі ми розглядатимемо застосування тестів саме для оцінки рівня знань студентів. Усі опитувані відповідають на одні й ті ж самі завдання, в однаковий час, в однакових умовах і з однаковими правилами оцінювання відповідей.

Існує досить різноманітне відношення до тестів – від гарячого схвалення до різкої критики. Із сучасної практики тестування дійсно можна зробити багато висновків як за, так і проти тестів. Проте часто вони стають об'єктом суперечок через відстале наукове забезпечення процесу тестування. На підтримку тестів можна звернути увагу на ті особливості, що притаманні їм як інструменту діагностики. До переваг тестів належать відсутність фактора суб'єктивності викладача у результаті опитування, а також зменшення психологічного напруження студента, що відповідає. Перше, що отримує викладач, використовуючи тестування – це технологізація процесу, зменшення його трудомісткості, звільнення часу від рутинної роботи. Тести, порівняно з іншими видами перевірки, дають змогу здійснювати перевірку знань ретельніше. Крім того, тестування, особливо за допомогою комп'ютера, викликає у студента

додаткову зацікавленість через швидкий зворотний зв'язок у вигляді оцінки від комп'ютера. Якщо говорити про дистанційні електронні навчальні курси, то тест – це важливий засіб для проведення швидкого моніторингу навчального процесу, який також сприяє організації самостійної роботи через самоконтроль.

Типи завдань у тестовій формі. Комп'ютеризація розробки тестів має свої особливості й обмеження. Звичайні комп'ютерні програми контролю можуть тільки зіставляти введену відповідь з кодом, який характеризує правильну відповідь. Результатом такого зіставлення є фіксація збігу, якому приписують одиницю, чи відмінності, за яку ставиться нуль. Можлива й відмова від відповіді, та, зазвичай, ця відповідь є неінформативною і не використовується. Це обмеження є принциповим. Існують інтелектуальні програми, в яких можливе виявлення семантики відповіді, однак вони не розповсюджені через свою складність.

Можна перерахувати основні типи відповідей, які досить просто реалізуються в межах перевірки кодової відповіді.

Найбільш уживані такі форми завдань, в яких пропонуються готові відповіді на вибір. Одним з їхніх недоліків є можливість запам'ятовування неправильних відповідей, які є в завданні. Серед варіантів може бути одна правильна. Вибір цієї відповіді перетворює завдання на правильне висловлювання, інші варіанти дають неправильне висловлювання. Другий варіант форми завдання дає більшу шкалу оцінювання – це вибір кількох правильних відповідей або однієї найбільш правильної з кількох схожих. Така форма зменшує ймовірність угадування і запам'ятовування.

Якісно інша форма – це відкриті завдання. Така форма не має готової відповіді. У завданні передбачене спеціальне місце, куди студент вписує власну відповідь, у результаті чого отримує істинне або хибне висловлювання. У такій формі може виникнути кілька допустимих відповідей, коли відповідь – це слово, вираз або їхній перелік. Така форма може використовуватися і для введення числової відповіді при розв'язку задач.

Більш складними є завдання із введенням простої формули. Такі завдання є придатними для навчальних курсів із природничих дисциплін (фізика, хімія тощо), коли важливе вміння аналітично описувати процеси, які відбуваються, чи розв'язувати задачі.

Інша форма – це завдання на встановлення відповідності. У них елементам однієї множини треба зіставити елементи другої множини.

У тих випадках, коли треба з'ясувати правильну послідовність дій, обчислень, термінів в означенні, операцій, використовується завдання на встановлення правильної послідовності. Елементами, між якими встановлюється відповідність, можуть бути не тільки словесні висловлювання, але й графічні зображення чи певний звук.

При роботі із зображеннями на комп'ютері можна реалізувати й завдання, в яких необхідно вказати потрібну точку чи фрагмент, про які йдеться мова при вивченні. Можливо будувати й більш конструктивні завдання, які пропонують розтягнути (за допомогою мишки) об'єкти у відповідні місця. Такі завдання є досить ілюстративними та сприяють візуальному засвоєнню матеріалу.

Форми, що перераховані вище, дозволяють перевірити специфічні області знань, а також відповідні до них контрольні матеріали. Форма та зміст є головними компонентами процесу створення тестових завдань. Основна ознака професійно створених тестів – це оптимальне поєднання змісту й форми. Правильність розташування всіх складових завдання в тестовій формі є важливою вимогою для того, щоб студент не витрачав часу на знаходження місця для відповіді й швидше зафіксував своє рішення.

Основні поняття тестології. В основі теорії педагогічних вимірювань лежать три ієрархічно супорядні поняття: завдання в тестовій формі, тестове завдання та педагогічний тест [1]. Завдання в тестовій формі – це елементарна одиниця перевірки студента, частіш за все, певне незакінчене висловлювання чи конструкція, які стають істинними чи хибними залежно від відповіді студента. Завдання в тестовій формі стає тестовим завданням після того, як воно пройшло статистичне випробування у вибірковій групі студентів. Цілісна система таких завдань є тестом.

Основними поняттями в тестології, крім змісту й форми завдань, є також вимірювання, надійність і валідність результатів вимірювання.

Один із критеріїв надійності – це узгодженість показників, отриманих у тих самих випробуваннях при повторному тестуванні тим самим тестом або його еквівалентною формою. Надійність можна вимірювати відносно часових змін, вибору конкретних завдань, індивідуальності експериментатора.

Надійність взаємозамінюваних або еквівалентних форм – це кореляція між двома формами одного й того ж тесту, які вважаються рівноцінними. Паралельні форми тесту можуть бути незалежно побудованими тестами, які відповідають одним і тим самим умовам: однакове число завдань, зображення в однаковій формі та однотипний зміст.

Проблеми, які виникають при визначенні надійності, пов'язані з тренуванням знань у процесі дидактичного тестування, тобто „донавчання”. Інший чинник, що може змінити оцінку надійності, – це ефект переносу прийому розв'язку завдання з одного тесту в інший. Щоб цього уникнути, міняють форму зображення.

Тим не менш, застосування взаємозамінюваних форм тестів до і після курсу навчання дає кращий результат, ніж використання двох різних тестів [2].

Якщо для надійності можна вказати конкретні значення, то валідність не відображається числовими показниками. Щоб перевірити валідність тесту, треба перевірити його на відповідність до розроблених гіпотез і моделей. Моделлю може бути готова програма або навчальний план та інше, відносно чого перевіряють валідність.

У першу чергу говорять про змістовну валідність. Вона означає систематичну перевірку змісту тесту з метою встановити, чи відповідає він репрезентативній вибірці вимірюваної області. Сутність валідації – у перевірці змістовної основи. Для цього потрібні методи теоретичного моделювання вимірюваних явищ, якостей.

Підходи до організації комп'ютерного контролю. Аналізуючи відповіді студента на всі питання тесту, можна визначити рівень, а також структуру знань. Структура знань пов'язана з розподілом відповідей на прості та складні завдання, тобто профілем знань студента [1]. Логічним є профіль, в якому студент відповідає правильно на прості запитання і дає менше правильних відповідей на складні запитання. Кожний навчальний заклад повинен прагнути до формування правильних структур знань кожного студента, в яких би не було розривів у знаннях, і таким чином підвищувати рівень підготовки.

Рівень знань, який вимірюється під час тестування, є величиною прихованою. Тому кількісно визначити його величину неможливо одразу, але виходячи з експериментальних даних опитування, за допомогою послідовних ітерацій можна з потрібною точністю знайти істинне значення. Похибка вимірювання при тестуванні не є недоліком цього

методу діагностики. Будь-які вимірювання завжди мають певну помилку, тестування ж, крім оцінки рівня знань, визначає ще й величину похибки, з якою ця оцінка зроблена.

Тестом треба вважати єдину зв'язану систему, яка відповідає вимогам валідності й надійності. Для перевірки того, чи можна набір тестових завдань вважати тестом, необхідно провести ряд статистичних випробувань. Треба зауважити, що ці педагогічні випробування неможливо проводити в однорідних умовах. Причина не тільки в тому, що неправомірно давати одні й ті ж самі завдання для одного й того ж складу випробуваних, але і взагалі у теоретичній неможливості забезпечити статистичну стійкість психолого-педагогічних експериментів [3].

Найпростіша градація оцінки кожного завдання – 1 за правильну відповідь і 0 за неправильну – одразу виявляє кількість запитань, на яку зміг відповісти студент. Щоб обчислити тестовий бал, використовуються різні методи коригування, у першу чергу, для зменшення впливу можливого вгадування [4].

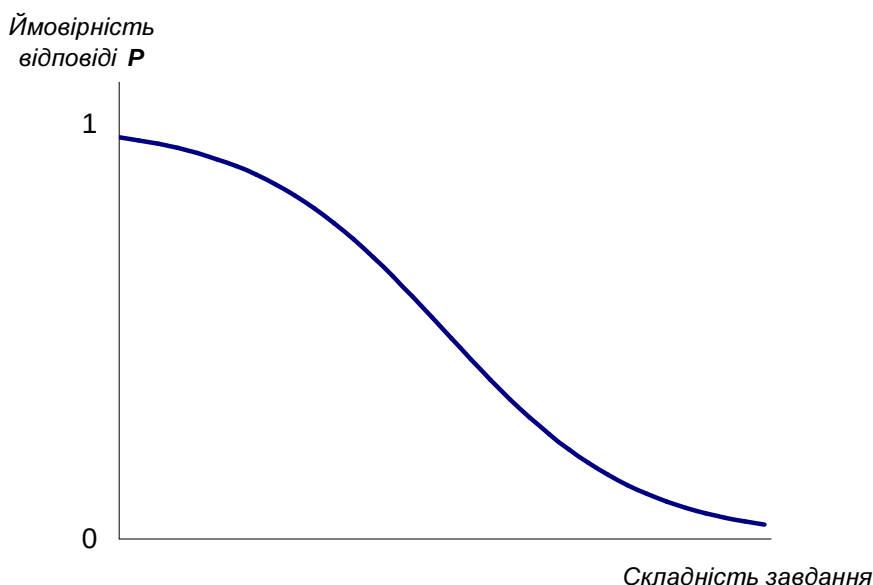
Такий найпростіший традиційний підхід до оцінювання знань за допомогою тесту передбачає використання тестових завдань рівної складності. Щоб створити такий тест, необхідно випробувати створені тестові завдання в групі студентів. Після цього за отриманими результатами необхідно провести фільтрування завдань, відкинувши ті, які „випадають” за рівнем складності. Найкраще, коли в групі, якій запропонована велика кількість завдань, усі мали б однакову підготовленість. Проте оскільки такої впевненості немає, то добре провести повторні випробування в ряді інших груп. Традиційно за зрозумілими причинами обмежуються однією групою. З отриманої таблиці результатів виключають ті завдання, на які відповіли майже всі, чи навпаки, майже ніхто не дав правильної відповіді. Це або зовсім легкі завдання, або занадто складні. Вони неселективні, тому їх відкидають. Для подальшої селекції обраховується коефіцієнт кореляції між результатами за кожним завданням із сумарними результатами для всіх завдань. Відкидаються ті завдання, для яких коефіцієнт кореляції менший за визначену нижню межу (у випадку коефіцієнта кореляції Пірсона цю межу приймають за 0.3) [3]. Для тих завдань, що лишилися, обраховується їхня взаємна кореляція. За отриманими результатами відкидаються ті завдання, які погано корелюють з іншими. Таке очищення таблиці результатів можна повторювати до розумних меж. Таким чином отримується набір завдань приблизно рівної складності.

Для психолого-педагогічного тестування використовуються підходи, в яких робляться певні припущення щодо особливості відповідей на завдання тестів. Будуються моделі, в основі яких лежать залежності „завдання-відповідь”. Ці залежності описують зв'язок імовірності відповіді з тією якістю, яку вимірює тест.

Прийнятим є опис за допомогою рівняння Г.Раша (1), в якому T_j – це рівень знань j -го студента, α_i – складність i -го завдання:

$$P(\alpha_i, T_j) = \frac{\exp(T_j - \alpha_i)}{1 + \exp(T_j - \alpha_i)}. \quad (1)$$

Очевидно, що чим більша міра α_i , тим менша ймовірність того, що i -тий студент отримає 1 за свою відповідь; ймовірність зростає зі зростанням параметра T_j . Також очевидно, що параметри студента і завдання вважаються одновимірними. Особливістю моделі Раша є те, що оцінка не залежить від T_j і α_i , відповідно, не залежить від розподілу рівня знань у групі. Для оцінювання параметрів α_i і T_j , а також для ідентифікації тих завдань, відповідь на які не описується цією моделлю, існує ряд процедур [5, 6].



З розгляду моделі Раша випливає, що при виконанні завдань однакової складності відношення шансів залежить тільки від відношення знань, але не залежить від абсолютного значення складності виконаних завдань. Тобто порівнювати знання двох випробуваних можна, тільки запропонувавши їм завдання однакової складності; при цьому абсолютна складність не має значення.

Для того, щоб проводити індивідуально-орієнтоване або адаптивне тестування, використовуються спеціальні тести, в яких набір завдань уже не повинен бути однакової складності. Є різновиди таких тестів. Проте сутність полягає в тому, що випробуваному дається завдання середньої складності. Якщо завдання виконане правильно, то пропонується більш складне, якщо неправильно – більш просте. Таким чином, пропонуючи відносно невеликий набір завдань, можна достовірно встановити рівень знань. Для всього цього необхідне комп'ютерне зображення завдань із проіндексованою складністю (за шкалою Раша або іншими, які використовуються).

Висновки. Комп'ютерна реалізація тестів дає можливість проводити обчислення, яких вимагають математичні моделі знань студентів. Також відкриваються можливості будувати більш широкий спектр типів завдань, які визначаються тією областю знань, для якої використовуються тести. Виникає проблема визначення особливостей змістової валідності, діагностичної направленості при переносі традиційних методів психодіагностичної практики в комп'ютерну. Обробка результатів тестування дає інформацію не тільки у вигляді числового параметра, який характеризує рівень знань окремого студента. Результати відображають загальний рівень знань у групі студентів, скеровуючи напрями коригування при навчанні для викладача, а також указуючи на необхідні зміни, які треба вносити для збільшення ефективності навчальної програми.

1. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий. – М., 2002; 2. Анастаси А. Психологическое тестирование. – М., 1982; 3. Кривицкий Б.Х. К вопросу о компьютерных программах учебного контроля знаний // Educational Technology & Society. – 2004. – № 7(2). – Р. 158-169; 4. Frary R.B. Formula Scoring of Multiple-Choice Tests (Correction for Guessing) // Instructional Topics in Educational Measurement. – 1988. – Р. 75-80; 5. Олійник М.М., Романенко Ю.А. Тест як інструмент кількісної діагностики рівня знань в сучасних технологіях навчання. – Донецьк, 2001; 6. Клайн П. Справочное руководство по конструированию тестов. – К., 1994.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

УДК 004.4'272

О.О. Ларін, асп.,
Ю.С. Жарких, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОДУКТІВ MACROMEDIA В ОРГАНІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ

Визначено основні вимоги до засобів створення електронного навчального середовища. Зроблено огляд та проведено ґрунтовний аналіз основних функціональних можливостей продуктів фірми Macromedia для цілей електронного навчання. Зроблено висновки щодо можливості застосування даних продуктів в умовах України.

The basic requirements to instruments for creation of electronic educational environment are determined. The thorough analysis of the basic functionalities of Macromedia products for the purposes of electronic training are conducted. Conclusions concerning opportunity of application of the given products in conditions of Ukraine are made.

Сучасні методи електронного навчання передбачають наявність системи управління навчанням, а також електронних навчальних матеріалів. Перед навчальним закладом, що планує організацію електронного навчання, постає проблема вибору системи управління навчанням (СУН), а також засобів створення електронних навчальних матеріалів (ЕНМ). На сьогоднішній день існує велика кількість як комерційних, так і безкоштовних програмних продуктів.

Сучасні СУН та засоби створення ЕНМ. Вимоги до функціональних можливостей СУН [1] постійно зростають. Спочатку СУН призначалися для організації навчальних груп, планування й відстеження навчального процесу. Нині найбільш потужні СУН містять засоби організації та зберігання навчального контенту, інструменти створення ЕНМ, а також інтегровані веб-служби: електронну пошту, чат, форум. Велика увага приділяється підтримці стандартів електронного навчання: SCORM [2], AICC [3], IMS [4].

Типова СУН будується за схемою клієнт-сервер з використанням найпоширеніших засобів розробки веб-орієнтованих програм: ASP, JSP, PHP.

Передача ЕНМ студенту проходить звичайно по локальній мережі або Інтернету. Найбільш доступним і зручним засобом роботи з ЕНМ є веб-браузер. Сучасні спеціалізовані засоби створення ЕНМ [5] дозволяють одержувати результати в HTML (ToolBook Instructor, Macromedia Dreamweaver with CourseBuilder, Lectora Publisher) або у форматах, для відображення яких необхідно встановити спеціальну програмну надбудову (plugin) для браузера (Macromedia Authorware, Quest Multimedia Authoring System, Macromedia Flash with Learning Extension). Деякі середовища розробки дозволяють одержати ЕНМ у декількох форматах (ToolBook Instructor, Macromedia Authorware).

Стандарти електронного навчання. Необхідність підтримки їхніх основних положень. При виборі ПО для електронного навчання варто звертати увагу на підтримку різних технологічних стандартів, а також стандартів електронного навчання.

Стандарти електронного навчання дозволяють уніфікувати ряд характеристик ЕНМ, регламентувати вид, формат і порядок передачі інформації між ЕНМ і СУН. На сьогоднішній день існує три визнаних стандарти електронного навчання: AICC, SCORM, IMS. У більшості продуктів, представлених на ринку, реалізована часткова підтримка одного або декількох стандартів. Задекларована сумісність СУН і засобу розробки ЕНМ різних виробників не гарантує коректної роботи. Існують комплексні рішення, що включають як СУН, так і інструментарій для розробки електронних курсів, використання яких дозволяє уникнути проблем сумісності.

Деякі з найбільш відомих продуктів для забезпечення електронного навчання розробляє фірма Macromedia. Практично всі продукти фірми мають які-небудь функції, що дозволяють застосувати їх для створення електронного навчального середовища. Ми розглянемо основні можливості Dreamweaver, Flash, Authorware, ColdFusion, Breeze, RoboHelp, RoboDemo з погляду їхнього застосування для потреб електронного навчання.

Macromedia eLearning Suite. Macromedia eLearning Suite позиціонується фірмою як універсальний набір засобів для створення ЕНМ будь-якого рівня складності. До його складу входять Dreamweaver MX 2004, Flash MX Professional 2004, Authorware 7.

Донедавна ці електронні продукти розвивалися незалежно один від іншого. В останніх версіях упроваджена єдина концепція інтерфейсу, а також забезпечена тісна інтеграція.

© О.О. Ларін,
Ю.С. Жарких, 2005

Macromedia Dreamweaver MX. Macromedia Dreamweaver [6] довгий час є одним з найбільш популярних візуальних середовищ для створення веб-сайтів. Середовище підтримує необхідні технології для створення складних веб-орієнтованих систем: CSS, SSI, XML, JavaScript, однак найцікавішими для цілей онлайн-навчання є засоби створення програм з використанням серверних мов: ASP, ASP.NET, ColdFusion Markup Language (CFML), JSP і PHP. У зв'язку з тим, що ЕНМ у форматі HTML на сьогоднішній день є найбільш популярними, використання Dreamweaver для створення таких курсів виправдано.

Існують програмні розширення для Dreamweaver (Learning Extensions), які полегшують розробку навчальних програм у середовищі. Найбільш відоме з них – Macromedia CourseBuilder [7]. Цей модуль надає шаблони для тестових завдань і дозволяє відслідковувати такі параметри: кількість вірних і хибних відповідей; кількість витрачених спроб; час для відповіді на окремі питання; час проходження повного тесту; фінальний результат.

Після завершення тесту ці дані надходять до стандартизованої СУН або до бази даних Microsoft Access, SQL Server, або Oracle.

З метою спрощення процесу підключення й видалення програмних компонентів, що розширюють базову функціональність своїх продуктів, був розроблений Macromedia Extension Manager. Більшість додаткових модулів, що полегшують розробку навчальних програм у Dreamweaver, Flash, Authorware й ColdFusion, створюються у форматі MXP. Список розширень можна знайти на сайті Macromedia Exchange [8].

Macromedia Flash MX. Сферою застосування Flash MX [9] спочатку була векторна анімація, однак програма виявилася настільки зручною та універсальною, що межі її застосування розширилися до створення інтерактивних мультимедійних презентацій. На даному етапі не викликає сумнівів доцільність застосування Flash MX для створення ЕНМ. Середовище пропонує розширений набір інструментів для створення й редагування графіки, підтримує імпорт великої кількості медіаформатів, надає потужну об'єктно-орієнтовану скриптову мову. Програмна надбудова Flash-plugin, що дозволяє запускати Flash-кліпи, встановлена на більш ніж 90% веб-браузерів користувачів, що надає можливість переглядати навчальні матеріали максимально широкій аудиторії. Сьогодні існує достатня кількість кваліфікованих розроблювачів Flash-програм, які можуть бути задіяні у створенні ЕНМ.

У Flash MX було введено поняття компонента – автономного блоку програмного коду з регульованими параметрами. Компонентом можна зробити як простий графічний символ, так і важливий вузол підручника, наприклад, пошукову систему або тестовий блок.

Компоненти істотно прискорюють і спрощують розробку інтерактивних додатків. Для використання компонента не потрібно знати його внутрішню структуру, важливо лише правильно заповнювати поля значень його параметрів, отже, при правильній організації роботи компонування підручника з готових блоків (компонентів) можуть виконувати навіть некваліфіковані розробники. Існує можливість створення власних компонентів. На сьогоднішній день склалося численне Flash-товариство, результатом роботи якого є велика кількість готових компонентів, що розповсюджуються безкоштовно [10] та дозволяють підвищити функціональність Flash-програм. Використання компонентів дозволяє автоматизувати процес створення електронного підручника та звести трудові затрати до мінімуму.

У Flash MX Professional 2004 вбудовані деякі засоби, що полегшують створення тестів. Зокрема, існує шаблон для створення тесту (quiz) із шістьма типами питань і трьома варіантами графічного оформлення. У процесі проходження тесту йде збір інформації (tracking data) про хід тестування. Передбачено кілька механізмів передачі даних у СУН.

Macromedia Authorware 7.0. Authorware [11] – єдиний спеціалізований програмний продукт для створення повнофункціональних, компактних мультимедійних навчальних курсів.

З моменту появи програму відносили до категорії авторських інструментів (authoring tools), призначених для авторів навчальних курсів. Однак унаслідок високої складності Authorware не набув серед них великого розповсюдження. Нині з розвитком нових форм електронного навчання [12] змінився й підхід до створення ЕНМ. Проводиться професійна спеціалізація за категоріями авторів матеріалу, розроблювачів курсів, адміністраторів навчального сервера тощо. Відповідно зросли вимоги до рівня знань розробників. Тепер функціональні можливості Authorware задіяні повною мірою.

В основі візуального середовища розробки Authorware лежить концепція блок-схеми. Такий підхід спрощує розробку складних електронних підручників. Середовище дозволяє одержувати готові ЕНМ у вигляді EXE-файлу, або скомпільовані для Інтернет. У другому випадку для перегляду матеріалів у браузері Internet Explorer потрібна надбудова Authorware web-player.

Існуючий механізм визначення об'єктів (Knowledge Objects) дозволяє створювати фрагменти навчального курсу у вигляді самостійних закритих об'єктів, налаштування яких здійснюється за допомогою майстра. Існує достатня кількість вбудованих визначених об'єктів, а також безліч платних і безкоштовних розробок, доступних для Інтернет. Важливою функцією, що полегшує розробку курсу, є модулі (models), сукупності взаємозв'язаних кадрів, що зберігаються в спеціальній бібліотеці. Модулі дозволяють уникнути повторного проектування частин курсу, що зустрічаються неодноразово.

Середовище має досить потужну скриптову мову, однак при створенні курсу можна цілком обійтися вбудованими шаблонами й визначеними об'єктами.

Середовище Authorware 7 – єдиний із продуктів фірми Macromedia, що одержав сертифікат на відповідність до стандарту AICC. Існує підтримка стандарту SCORM на рівні передачі даних, а також можливість створення XML-даних для опису елементів навчального курсу.

Macromedia ColdFusion MX. Macromedia ColdFusion MX є мовою веб-програмування й застосовується, в основному, для створення складних веб-систем для підтримки бізнесу та електронної комерції. Однак існує можливість застосування ColdFusion і для цілей електронного навчання, зокрема, створення СУН.

Для навчальних систем на платформі Microsoft найчастіше використовується технологія Active Server Pages (ASP). Як приклад можна навести комерційну СУН IBM Lotus Learning Space. Для платформи Unix використовують PHP. Більшість безкоштовних СУН, створені найчастіше студентами, побудовані на цій технології. Дане рішення дозволяє звести витрати на побудову системи електронного навчання до мінімуму. Як приклад СУН, побудованої на PHP, можна навести ILIAS [14].

Незважаючи на очевидні переваги (кроссплатформність, універсальність), засоби Java Server Pages (JSP) використовуються рідше. Основними причинами є складність розробки, а також часті перебої в роботі й помилки, які виникають через несумісність JRE різних виробників та налаштування безпеки на серверних і клієнтських машинах.

Технологія ColdFusion має ряд переваг, які ми розглянемо далі.

ColdFusion MX містить у собі сервер ColdFusion Server, а також засіб розробки ColdFusion Studio. Засоби створення сторінок ColdFusion включені також у Macromedia Dreamweaver MX.

ColdFusion є багатоплатформним середовищем. Це є вагомою перевагою, так як у зв'язку з високою вартістю, а також проблемами безпеки, веб-сервери на основі продуктів Microsoft мало поширені в Україні. На даний момент існує підтримка таких ОС:

- Microsoft Windows 98/Me/NT/2000/XP;
- RedHat Linux 6.2-7.3 (SuSe Linux 7.2,7.3);
- Solaris 7,8;
- HP-UX 11.00.

Підтримка баз даних різних форматів є життєво необхідною для СУН. Cold Fusion здійснює взаємодію з базами даних (Sybase, Oracle, MySQL, SQL або Access). Для забезпечення доступу до баз даних Cold Fusion може використовувати цілий спектр популярних засобів:

- ODBC;
- OLE DB;
- JDBC;
- Native-драйвери баз даних.

Сервер Cold Fusion дозволяє програмі взаємодіяти із зовнішніми системами через інтерфейси COM, CORBA, працювати з Java-класами та сервлетами. SDK, що надходить з Cold Fusion Server, в основному забезпечує обмін даними між програмами, створеними за допомогою Cold Fusion та C++/Java.

Існує вбудована функція динамічної генерації діаграм, що дозволяє одержувати різноманітні діаграми у форматах JPEG, PNG або Flash. Дана можливість дозволяє робити звіти, які генерує СУН, більш інформативними, наочними та привабливими.

Cold Fusion підтримує роботу на багатопроцесорних машинах і дозволяє створити СУН, що може запускатися на декількох серверах. Таким чином, збільшення кількості студентів не позначиться на працездатності системи.

- За допомогою Cold Fusion можливо створити такі функціональні елементи СУН:
- форми запитів;
- стрічки новин;
- поштовий клієнт;
- ftp-клієнт;
- online-календар;
- чат;
- форум.

Також реалізується пошук даних, збір і передача трекингової інформації, безпека веб-сторінок, доступ до файлової системи сервера.

Передача даних із Cold Fusion в інші продукти Macromedia, які використовуються при створенні ЕНМ, не є складною. Технологія Flash Remoting надає Flash-програмі доступ до компонентів Cold Fusion MX, Java-об'єктів, дозволяє обмінюватися XML-даними з віддаленими сервісами Cold Fusion. У Macromedia Dreamweaver MX існує панель інструментів для мови CFML, що дозволяє швидко вставляти теги мови в документ.

Використання Cold Fusion як засобу створення СУН, а Flash і Dreamweaver як інструментів для створення ЕНМ, технологічно виправдано. Це дозволяє уникнути проблем сумісності, а також прискорює процес розробки й налагодження ЕНМ.

Macromedia Breeze. Цей програмний продукт [15] призначено для проведення презентацій, колективних обговорень і тренінгів, відеоконференцій, а також для організації онлайн-навчання.

Важливою особливістю продукту є тісна інтеграція з Microsoft Power Point [16]. Ця програма для створення презентацій набула популярності завдяки потужним можливостям і простоті використання. Для створення навчального додатка в Power Point не потрібна висока кваліфікація, тому підготовка ЕНМ істотно спрощується. Існує Breeze plugin для Power Point, який дозволяє конвертувати презентацію в Flash-формат, а також публікувати її на навчальному сервері.

У Breeze можливо спільне використання програм, а також здійснення дистанційного контролю за комп'ютерами користувачів.

У модулі Breeze Trainig здійснюється створення курсів, визначення розкладів і запис на них користувачів. Підтримується імпорт навчальних матеріалів таких форматів: *ppt, *pps, *flv, *swf, *jpg, packaged Pod. Система дозволяє гнучко планувати процес навчання, а також може інформувати користувача про необхідність вивчити урок. Модуль містить найпростіші інструменти для організації тестування, а також дозволяє одержувати звіти про хід процесу навчання.

Breeze підтримує стандарти дистанційного навчання SCORM та AICC. ЕНМ, створені у Breeze, можна використати в СУН, які підтримують передачу даних у цих стандартах.

Macromedia RoboHelp, RoboDemo. Macromedia Robo Help [17] – інструмент для створення довідкових систем і документації. Він дозволяє створювати довідники, глосарії, контекстні довідки. Існує можливість одержати готовий продукт у форматі Flash, HTML, Win Help, XML, Oracle Help, Java Help, Word, Adobe Acrobat.

Macromedia Robo Demo [18] – мабуть кращий на сьогоднішній день засіб створення інтерактивних демонстрацій. Програма відслідковує зміни, що відбуваються на екрані монітору внаслідок маніпуляцій мишею, натискань клавіш клавіатури, появи нових вікон, виконання команд та інших подій. У результаті ми одержуємо анімаційний ролик із за-

писом всіх дій користувача. Якщо доповнити відео звуковим коментарем, то одержимо ефективний засіб для навчання в прикладних програмах, наприклад, у Microsoft Office.

Існує можливість додавати інтерактивні елементи, такі як титри, підсвічування ділянки, поле вводу, прапорці, кнопки, анімаційні елементи, що дозволяє конструювати завдання.

Серед додатків подібного типу Robo Demo може скласти конкуренцію тільки Qarbon Viewlet Builder [19]. Обидва продукти забезпечують підтримку стандартів електронного навчання SCORM та AICC, надають можливість створення тестових завдань.

Для співробітників університетів, що вирішують проблему придбання інструментальних засобів для створення навчальних курсів і забезпечення електронного навчання, найчастіше важко зробити правильний вибір. На ринку доступна величезна кількість різних програмних продуктів різної функціональності та в різних цінових категоріях. Існує можливість побудови функціонуючої системи електронного навчання з використанням тільки безкоштовних технологій та програмних засобів. Однак часові й трудові витрати на розгортання системи й наповнення її навчальними матеріалами будуть досить значними. Ефективність навчання й контролю за навчальним процесом у цьому випадку невелика.

Програмні продукти Macromedia пропонуються за високими, іноді навіть невиннованими високими цінами, але вони мають ряд незаперечних переваг. Широкі функціональні можливості, підтримка стандартів електронного навчання, відсутність проблем сумісності, веб-орієнтованість, наявність величезного співтовариства розробників – лише деякі переваги продуктів Macromedia. Слід зазначити, що повноцінне використання Authorware, Flash, Dreamweaver і Cold Fusion вимагає ґрунтовних знань цих програмних продуктів. Незважаючи на наявність шаблонів та інших засобів, що полегшують створення ЕНМ, вимоги до кваліфікації розроблювачів досить жорсткі.

1. Системы поддержки обучения <http://www.dl.com.ua/rus/techno/lms.shtm>; 2. Advanced Distributed Learning (ADL) Initiative <http://www.adlnet.org>; 3. Aviation Industry CBT Committee (AICC) <http://www.aicc.org>; 4. IMS Global Learning Consortium, Inc. <http://www.imspj.org>; 5. Средства создания контента <http://www.dl.com.ua/rus/techno/tools.shtm>; 6. Macromedia Dreamweaver MX 2004 http://www.macromedia.com/software/dreamweaver/?promoid=home_prod_dw_082403; 7. Macromedia CourseBuilder <http://www.macromedia.com/support/coursebuilder/>; 8. Macromedia Exchange <http://www.macromedia.com/cfusion/exchange/index.cfm>; 9. Flash MX <http://www.macromedia.com/software/flash/>; 10. The flash components network <http://www.flashcomponents.net/>; 11. Гулятьев А.К. Macromedia Authorware 6.0 Разработка мультимедийных учебных курсов. – С.-Пб., 2002; 12. Кухаренко В.М., Рибалко О.В., Сиротенко Н.Г. Дистанційне навчання; умови застосування. – Х., 2002; 13. Macromedia Cold Fusion MX <http://www.macromedia.com/software/coldfusion/>; 14. LIAS open source <http://www.ilias.uni-koeln.de/ios/index-e.html>; 15. Macromedia Breeze <http://www.macromedia.com/software/breeze/>; 16. Microsoft PowerPoint <http://office.microsoft.com/uk-ua/assistance/CH790018081058.aspx>; 17. RoboHelp <http://www.macromedia.com/software/robohelp/>; 18. RoboDemo <http://www.macromedia.com/software/robohelp/>; 19. ViewletBuilder <http://www.qarbon.com>.

Надійшла до редколегії 7.12.2004

Наукове видання



ВІСНИК КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 6

Редактор Н.Земляна

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л.Новікова. Адреса ВПЦ: 01033, Київ, 6-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 31 28



Підписано до друку 12.05.05. Формат 60х84^{1/8}. Вид. № 251. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 10. Зам. № 25-2626.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01033, Київ, 6-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; (38044) 239 3158; факс (38044) 239 3128.

E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua
WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво внесено до державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.