

Журнал публікує оригінальні та обзорні статті, дає інформацію про наукові конференції та семінари з проблем прикладної математики, кібернетики та системного аналізу, дає інформацію про новітні досягнення вітчизняної та закордонної науки по проблемам теорії систем і інформатики. Містить роботи з теоретичних проблем кібернетики, проблем штучного інтелекту, теорії оптимального керування та прийняття рішень. Публікуються роботи, присвячені питанням теорії моделювання динамічних систем, зокрема, теорії нелінійних систем, теорії стійкості руху. Розглядаються питання розробки програмно-технічних комплексів, математичного та програмного забезпечення, нових інформаційних технологій.

Для студентів, аспірантів та науковців, які працюють у галузі прикладної математики, кібернетики, інформатики.

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи, предоставляет информацию о научных конференциях и семинарах по проблемам прикладной математики, кибернетики и системному анализу, дает информацию о новейших достижениях отечественной и зарубежной науки о проблемах теории систем и информатики. Содержит работы по теоретическим проблемам кибернетики, проблемам искусственного интеллекта, теории оптимального управления и принятия решений. Публикуются работы по вопросам теории моделирования динамических систем, в частности, теории нелинейных систем, теории устойчивости движения. Рассматриваются вопросы разработки программно-технических комплексов, математического и программного обеспечения, новых информационных технологий.

Для студентов, аспирантов и научных работников, которые работают в области прикладной математики, информатики, кибернетики.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР

О. К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАПН України

ЗАСТ. ВІДПОВ. РЕДАКТОРА

Д. Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. АН ВШ України

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

В. В. Акіменко, д-р техн. наук, проф., А. В. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; Д. Б. Буй, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф. Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф., акад. ВШ України; В. А. Заславський, д-р техн. наук, проф.; Є. О. Лебедєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Іксанов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Крак, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. І. Кудін, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С. І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; О. Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. АН ВШ України; М. С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д. А. Номіровський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С. Д. Погорілий, д-р техн. наук, проф.; О. І. Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. О. Яценко, д-р техн. наук, проф.; Ф. Алієв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ілолов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С. Аміргалієва, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Й. Діблік, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С. Дошла, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Ф. Іванов, проф.; М. Ружичкова, проф.; Ф. Садирбаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Свіщук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Ягуб, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Адреса редколлегии

03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4 д,
факультет комп'ютерних наук та кібернетики
☎ (38044) 258 89 84

Затверджено

Вченою радою факультету кібернетики
30.01.2017 (протокол № 5)

Атестовано

Доданок № 8 до наказу МОН України
від 13.03.2017 №373

Зареєстровано

Міністерством юстиції України.
Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16271-4743Р від 31.12.09

**Засновник
та видавець**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет"
Свідоцтво внесено до державного реєстру
ДК № 1103 ВІД 31.10.02

Адреса видавця

01601, Київ-601, 6-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

The journal publishes original and overview articles, provides information on scientific conferences and seminars on the problems of applied mathematics, cybernetics and system analysis, provides information on the latest achievements of domestic and foreign science about problems in the theory of systems and informatics. Contains works on theoretical problems of cybernetics, problems of artificial intelligence, theory of optimal control and decision-making. Works on the theory of simulation of dynamic systems, in particular, the theory of nonlinear systems, the theory of the stability of motion, are published. Questions of development of software and hardware complexes, mathematical and software, new information technologies are considered. For students, graduate students and scientists who work in the field of applied mathematics, informatics and cybernetics.

For scientists, professors, graduate and postgraduate students.

CHIEF EDITOR

O. K. Zakusilo, Dr. Sc., Prof., Akad. NAPN Ukraine

CO-EDITOR-IN-CHIEF

D. Ya. Khusainov, Dr. Sc., Prof., Akad. AN VSh Ukraine

EDITORIAL BOARD

V. A. Akimenko, Dr. Sc., Prof.; V. A. Anisimov, Dr. Sc., Prof., Akad. NASc. Ukraine; D. B. Buy, Dr. Sc., Prof.; F. G. Garaschenko, Dr. Sc., Prof., Akad. AN VSh Ukraine; V. A. Zaslavskii, Dr. Sc., Prof.; J. A. Lebedev, Dr. Sc., Prof.; A. M. Iksanov, Dr. Sc., Prof.; Ju. V. Krak, Dr. Sc., Prof.; V. I. Kudin, Dr. Sc., Prof.; S. I. Lyashko, Dr. Sc., Prof., Akad. NAN Ukraine; A. G. Nakonechnii, Dr. Sc., Prof., Akad. AN VSh; N. S. Nikitchenko, Dr. Sc., Prof.; D. A. Nomirovskii, Dr. Sc., Prof.; S. D. Pogorelii, Dr. Sc., Prof.; A. I. Provoterj, Dr. Sc., Prof.; V. A. Jacenko, Dr. Sc., Prof.; Fikret Aliev, Dr. Sc., Prof.; M. Mamadsho Ilolov, Dr. Sc., Prof.; Saltanat Amirgalieva, Dr. Sc., Prof.; Josef Diblik, Dr. Sc., Prof.; Zuzana Dosla, Dr. Sc., Prof.; Anatolii Ivanov, Prof.; Miroslava Ruzhichkova, Prof.; Felix Sadirbaev, Dr. Sc., Prof.; Anatolii Svischuk, Dr. Sc., Prof.; Gabil Jagub, Dr. Sc., Prof.

Address

02017, Kyiv-117, prosp. Hlushkov, 4d,
the Faculty of computer science and cybernetics
☎ (38044) 258 89 84

Approved by the

Academic Council of the Faculty of computer science and cybernetics
30.01.2017 (Protocol #5)

Certified by the

Term #8 to the order of MES of Ukraine
from 13.03.2017 #373

Registration by the

Ministry of Justice of Ukraine
State Certificate # 16271-4743P issued on 31.12.2009

Founded and published by

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv University Publishing
State certificate # 1103 issued on 31.10.2002

Address

Office 43, 14 Shevchenka Blvd, Kyiv, 01601
☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; Fax 239 31 28

Канарська І. С. Складність алгоритмів перетину, об'єднання та різниці в мультиплікаторах	6
Кулян В. Р., Юнькова О. О. Алгоритмічні процедури обчислення значень параметрів моделей	11
Макаричева В. В. Комп'ютерна система підтримки прийняття рішень при комплексному оцінюванні фізичного здоров'я.....	15
Науменко Ю. О. Дослідження ефективності реклами в умовах конкуренції товаровиробників	20
Новотна В., Пужа Б., Джалладова І. А., Хусаїнов Д. Я. Вплив післядії на оцінки збіжності розв'язків в нелінійних системах	27
Сенченко О. С. Критерії дистрибутивності та переставності операції проекції в табличних алгебрах	32
Скобелев В. В., Скобелев В. Г., Щербаков В. А. Автомати на квазігрупах та їх застосування	35
Хусаїнов Д. Я., Камратов С. В., Джалладова І. А. Дослідження розв'язків нелінійних систем	46
Чуйко С. М., Сисоєв Д. В. Лінійна матрична крайова задача у випадку параметричного резонансу	54
Яценко В. О., Гаращенко Ф. Г., Петрович В. М., Требіна Н. М. Апаратно-програмний комплекс на основі лазерно-криогенного гравіметру для геофізичних досліджень	59

CONTENTS

Kanarskaya I. S. The complexity of algorithms of intersection union and difference in multitable.....	6
Kulian V. R., Junkova O. O. Algorithmic procedures for calculating the parameters of models.....	11
Makaricheva V. V. Computer system decision making support at complex evaluation of physical health	15
Naumenko Yu. A. Research of the effectiveness of advertising in conditions of the manufacturers competition	20
Novotna V., Puzha B., Dzhalladova I. A., Khusainov D. Ya. Influence delay effects in the convergence of solutions in nonlinear systems	27
Senchenko A. S. Criteria of distribution and permutation of projection operation in table algebra	32
Skobelev V. V., Skobelev V. G., Shcherbakov V. A. Automata over quasigroups and their applications	35
Khusainov D. Ya., Kamratov S. V., Dzhalladova I. A. Convergence of solutions of nonlinear systems.....	46
Chujko S. M., Sysoev D. V. Linear matrix boundary value problem in the case of parametric resonance	54
Yatsenko V. O., Garaschenko F. G., Petrovich V. M., Trebina N. N. Apparatic, mathematical and algorithmic guarantee of satellite adaptive super-wire gravimetr	59

СОДЕРЖАНИЕ

Канарская И. С. Сложность алгоритмов пересечения, объединения и разницы в мультипликаторах.....	6
Кулян В. Р., Юнькова Е. А. Алгоритмические процедуры вычисления значений параметров моделей	11
Макаричева В. В. Компьютерная система поддержки принятия решений при комплексной оценке физического здоровья	15
Науменко Ю. А. Исследование эффективности рекламы в условиях конкуренции товаропроизводителей	20
Новотная В., Пужа Б., Джалладова И. А., Хусаинов Д. Я. Влияние последействия на оценки сходимости решений в нелинейных системах	27
Сенченко А. С. Критерии дистрибутивности и перестановочности операции проекции в табличных алгебрах.....	32
Скобелев В. В., Скобелев В. Г., Щербаков В. А. Автоматы на квазигруппах и их использование	35
Хусаинов Д. Я., Камратов С. В., Джалладова И. А. Исследование решений нелинейных систем	46
Чуйко С. М., Сысоев Д. В. Линейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса.....	54
Яценко В. А., Гаращенко Ф. Г., Петрович В. Н., Требина Н. Н. Аппаратно-программный комплекс на основе лазерно-криогенного гравиметра для геофизических исследований.....	59

СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ ПЕРЕТИНУ, ОБ'ЄДНАННЯ ТА РІЗНИЦІ В МУЛЬТИТАБЛИЦЯХ

В роботі досліджено алгоритми реалізації перетину, об'єднання та різниці мультитаблиць: спочатку розглянуто найбільш природні алгоритми, потім запропоновано їх модифікації, які дозволяють зменшити кількість обчислень. Для всіх запропонованих алгоритмів знайдено точні оцінки складності в найгіршому випадку. Проведено обчислювальні експерименти, на основі яких було визначено найбільш швидкі алгоритми для кожної операції.

Ключові слова: таблицна алгебра, база даних, мультитаблиця.

Вступ. Сучасні бази даних (БД) широко використовуються в науковій і практичній діяльності людини для збереження необхідної інформації, її обробки та подання для користувачів. Найбільш поширеними залишаються реляційні БД, математична модель яких була запропонована Е. Коддом [1, 2]; в них інформацію представлено у вигляді таблиць – множини рядків однакової структури. На практиці існують ситуації, при яких дані не можуть ґрунтуватися на моделі множин, оскільки в них можуть міститися рядки, що повторюються. Такі структури, що допускають наявність дублікатів елементів, називаються мультимножинами. Мультимножини зручно використовувати в якості моделі для представлення і дослідження об'єктів, особливістю яких є, по-перше, множинність і, по-друге, повторюваність даних. Вони широко застосовуються при розв'язанні теоретико-прикладних задач, зокрема задач інформатики (табличні БД, теорія прийняття рішень, теорія інформації і кодування). В даній роботі розглянуті алгоритми виконання теоретико-множинних операцій для таких структур (мультитаблиць), знайдена їх складність у найгіршому випадку, а також проведено експериментальне порівняння їх швидкодії.

Основні поняття та визначення. Зафіксуємо деяку непорожню множину атрибутів $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Довільну скінченну підмножину множини $\mathfrak{A}$ назвемо схемою, причому схема може бути порожньою множиною. Рядком s схеми R називається множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проєкція якої за першою компонентою дорівнює R , причому атрибути $A'_1, \dots, A'_k$ попарно різні, тобто рядок є функціональним бінарним відношенням. Таблиця T схеми R – скінченна множина рядків схеми R , кількість рядків у таблиці T позначаємо $|T|$. Далі, якщо не обумовлено інше, в роботі розглядаються таблиці схеми R з кількістю атрибутів n . На множині всіх таких таблиць введені операції об'єднання ($\cup_R$), перетину ($\cap_R$) і різниці ($-_R$) таблиць як обмеження однойменних теоретико-множинних операцій. Також існують і інші операції над таблицями: проєкція, селекція, перейменування, різні види з'єднання, ділення та активне доповнення; визначення операцій, що не розглянуто в даній роботі, наведено в [1, 3, 4].

Множина, що допускає наявність дублікатів елементів, називається мультимножиною (multiset, bag). Таблицю, в якій можуть міститися повторювані рядки, назвемо мультитаблицею. Будемо розглядати мультитаблиці в двох стандартних поданнях:

1. Невпорядкований набір рядків однакової схеми (з їх можливим повтором).

2. Зі зміною структури рядка. Вводиться новий атрибут, що не належить схемі вихідної таблиці (у нашій роботі цей атрибут назвемо лічильником, ім'я цього атрибута K). В якості значення цього атрибута будемо розуміти кількість повторів даного рядка заданої таблиці, причому це значення є додатним цілим числом. Зауважимо, що в цьому випадку усі рядки мультитаблиці унікальні, тобто вона перетворюється в таблицю з одним особливим атрибутом – лічильником.

Нескладно бачити, що ці два подання мультитаблиць еквівалентні, тобто від мультитаблиці, представленої першим способом, нескладно отримати мультитаблицю, представлену другим способом, і навпаки. На наш погляд, в реальних базах даних найбільш природно задавати мультитаблиці першим способом, а для виконання операцій над таблицями найбільш зручним є другий спосіб подання. У разі, коли відношення кількості унікальних рядків (тобто рядків, що зустрічаються точно один раз) до загальної кількості рядків у таблиці невелике, другий спосіб подання мультитаблиці є найбільш оптимальним. У нашій роботі ми будемо задавати мультитаблиці другим способом.

Далі в роботі через $\|T\|$ позначимо кількість унікальних рядків у вихідній таблиці. Зауважимо, що якщо таблиця T задана другим поданням, то кількість її рядків співпадає з $\|T\|$. Нехай $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_n, d_n), (K, k)\}$ – деякий рядок мультитаблиці. Тоді її основою назвемо підрядок $\|s\| = \{(A_1, d_1), \dots, (A_n, d_n)\}$.

Розглянемо теоретико-множинні операції над мультитаблицями, заданими другим поданням. Оскільки ці операції вимагають односхемності вихідних таблиць, покладемо що $R = \{A_1, \dots, A_n, K\}$ – схема всіх таблиць.

Також, як і для таблиць без повторів рядків, перетином двох мультитаблиць T_1 і T_2 називається мультитаблиця $T_1 \cap_R T_2$, що містить ті і тільки ті рядки, які одночасно містяться в обох вихідних таблицях, об'єднанням T_1 і T_2 – мультитаблиця $T_1 \cup_R T_2$, що містить ті і тільки ті рядки, які містяться хоча б в одній з вихідних таблиць, різницею $T_1 -_R T_2$ – мультитаблиця, що містить ті і тільки ті рядки, які містяться в T_1 і не містяться в T_2 . Проілюструємо ці визначення. Нехай $\|s\| \in T_1$, $\|s\| \in T_2$ та значення лічильника s в мультитаблицях T_1 і T_2 дорівнюють відповідно k_1 і k_2 . Тоді значення лічильника s в мультитаблиці $T_1 \cap_R T_2$ дорівнює $\min(k_1, k_2)$, у мультитаблиці $T_1 \cup_R T_2$ – $k_1 + k_2$, в мультитаблиці $T_1 -_R T_2$ – $\max(0, k_1 - k_2)$; при цьому, якщо значення лічильника менше одиниці, то відповідний рядок в результуючій таблиці не включається.

Далі будемо розглядати алгоритми виконання операцій перетину, об'єднання і різниці двох мультитаблиць: для кожної операції спочатку розглядається найбільш природний, на наш погляд, алгоритм, потім пропонуються його модифікації, що дозволяють зменшити кількість обчислень, а також обчислюється складність алгоритму в найгіршому випадку. Зауважимо, що запропоновані нижче алгоритми є аналогами алгоритмів для таблиць без повторів рядків, розглянутих в [5]. В запропонованих алгоритмах вважаємо $\|T_1\| = m_1$ і $\|T_2\| = m_2$. Оскільки в цих алгоритмах кількість обчислень залежить від кількості рівних основ рядків у вихідних таблицях, то ми будемо обчислювати залежність максимальної кількості обчислень $B(q)$ від кількості q рядків мультитаблиці $T_1 \cap_R T_2$ (для різниці мультитаблиць – від кількості рівних основ рядків).

При цьому найбільша кількість обчислень відбувається, коли для кожної основи рядка $\|s_1\| \in T_1$ при пошуку рівної їй основи $\|s_2\|$ було перебрано максимально можливу кількість основ рядків мультитаблиці T_2 , а при порівнянні з $\|s_1\|$ інших, відмінних від $\|s_2\|$ основ рядків T_2 було виконано максимально можливу кількість порівнянь значень атрибутів (n).

Означення алгоритмів та обчислення їх складності. Операція перетину мультитаблиць. Розглянемо чотири алгоритми операції перетину двох мультитаблиць. Спочатку розглянемо, на наш погляд, найбільш природний алгоритм, що видає результат перетину T_1 і T_2 в нову мультитаблицю.

Алгоритм ММ 1.1. З кожною основою кожного рядка $\|s\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 : як що існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників цих рядків, рядок з меншим з цих значень додаємо в мультитаблицю T і переходимо до наступного рядка мультитаблиці T_1 .

Пірахаємо складність алгоритму ММ 1.1. Для кожної з $m_1 - q$ основ рядків мультитаблиці T_1 , що не належать мультитаблиці T_2 і однієї з основ рядків, що належать мультитаблиці $T_1 \cap_R T_2$, при пошуку в T_2 рівної їй основи в найгіршому випадку виконується $m_2 n$ операцій, для другої основи, що належить мультитаблиці $T_1 \cap_R T_2$, – $n(m_2 - 1)$ операцій, ..., для q -ї основи, що належить $T_1 \cap_R T_2$, – $n(m_2 - q + 1)$ операцій; також q разів виконується процедура порівняння лічильників і додавання рядка в нову мультитаблицю, тому складність алгоритму ММ 1.1 дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q + 1)m_2 n + n[(m_2 - 1) + (m_2 - 2) + \dots + (m_2 - q + 1)] + q(n + 2) = m_1 m_2 n + \frac{q}{2}(3n - qn + 4).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 2$ і $B(2) = m_1 m_2 n + n + 4$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 1.1, яка полягає в тому, що зважаючи на унікальність основ рядків в мультитаблицях, при знаходженні в T_2 основи, що співпадає з основою з T_1 , основу з T_2 можна видалити.

Алгоритм ММ 1.2. З кожною основою кожного рядка $\|s_1\| \in T_1$ порівнюємо всі основи мультитаблиці T_2 , і якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників цих рядків, рядок з меншим з цих значень додаємо до мультитаблиці T , а рядок s_2 видаляємо з T_2 і переходимо до наступної основи мультитаблиці T_1 .

За допомогою міркувань, аналогічних попередньому алгоритму, отримали:

$$B(q) = (m_1 - q + 1)m_2 n + n[(m_2 - 1) + (m_2 - 2) + \dots + (m_2 - q + 1)] + q(2n + 3) = m_1 m_2 n - m_2 n + \frac{q}{2}(5n - qn + 6).$$

При $n > 3$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 3$ і $B(3) = m_1 m_2 n + 3n + 9$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 1.1, що видає результат перетину таблиць T_1 і T_2 в ту з вихідних таблиць, у якій кількість рядків не більше, ніж у іншій таблиці.

Алгоритм ММ 1.3. Якщо $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то з кожною $\|s_1\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 , і якщо не існує такої $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то рядок s_1 видаляємо з мультитаблиці T_1 , а якщо така основа рядка існує, то при її виявленні порівнюємо значення лічильників цих рядків, значенню лічильника k_{ij} присвоюємо менше з найде-них значень і переходимо до наступного рядка мультитаблиці T_1 ; результат міститься в мультитаблиці T_1 . Якщо ж $\|T_1\| > \|T_2\|$, то T_1 і T_2 міняються місцями.

При $\|T_1\| \leq \|T_2\|$ складність цього алгоритму дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q + 1)m_2 n + n[(m_2 - 1) + (m_2 - 2) + \dots + (m_2 - q + 1)] + (m_1 - q)(n + 1) + 2q + 1 = m_1 m_2 n + m_1 n + m_1 + 1 + \frac{q}{2}(2 - n - qn).$$

При $n > 1$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 0$ і $B(0) = m_1 m_2 n + m_1 n + m_1 + 1$. З урахуванням того, що за припущенням $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то складність цього алгоритму дорівнює $m_1 m_2 n + \min\{m_1, m_2\}(n + 1) + 1$.

Тепер розглянемо поєднання алгоритмів ММ 1.2 і ММ 1.3.

Алгоритм ММ 1.4. Якщо $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то з кожною $\|s_1\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 , і якщо не існує такої $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то рядок s_1 видаляємо з мультитаблиці T_1 , а якщо існує така основа рядка

$\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників цих рядків, значенню k_{ij} присвоюємо менше з найдених значень, рядок s_2 видаляємо з T_2 і переходимо до наступної основи T_1 ; результат міститься в мультитаблиці T_1 . Якщо ж $\|T_1\| > \|T_2\|$, то мультитаблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

При $\|T_1\| \leq \|T_2\|$ складність цього алгоритму дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q + 1)m_2n + n[(m_2 - 1) + (m_2 - 2) + \dots + (m_2 - q + 1)] + (m_1 - q)(n + 1) + q(n + 1) + 2q + 1 = \\ = m_1m_2n + m_1n + m_1 + 1 + \frac{q}{2}(4 + n - nq).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 1$ і $B(1) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + 3$. З урахуванням припущення складність цього алгоритму дорівнює $m_1m_2n + \min\{m_1, m_2\}(n + 1) + 3$.

Операція об'єднання мультитаблиць. Розглянемо три алгоритми виконання операції об'єднання мультитаблиць. Спочатку розглянемо, на наш погляд, найбільш природний алгоритм, що видає результат об'єднання T_1 і T_2 в нову мультитаблицю.

Алгоритм ММ 2.1. Додаємо всі рядки $s_1 \in T_1$ в нову мультитаблицю T , а потім всі основи рядків $\|s_2\|$ мультитаблиці T_2 порівнюємо з основами рядків T_1 , і якщо не існує такої $\|s_1\|$, що $\|s_2\| = \|s_1\|$, то рядок s_2 додаємо до мультитаблиці T , а якщо така основа існує, то при її виявленні в мультитаблиці T присвоюємо нове значення лічильнику $k_{ij} := k_{1i} + k_{2j}$ і переходимо до наступного рядка T_2 .

Складність алгоритму ММ 2.1 в найгіршому випадку дорівнює:

$$B(q) = m_1(n + 1) + (m_2 - q)m_1n + (m_2 - q)(n + 1) + n[m_1 + (m_1 - 1) + \dots + (m_1 - q + 1)] + \\ + 2q = m_1m_2n + m_1n + m_2n + m_1 + m_2 + \frac{q}{2}(2 - n - nq).$$

При $n > 1$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 0$ і $B(0) = m_1m_2n + m_1n + m_2n + m_1 + m_2$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 2.1, за якою після додавання всіх рядків T_1 в мультитаблицю $T = T_1 \cup_R T_2$ ми порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T з основами рядків мультитаблиці T_2 , а не навпаки.

Алгоритм ММ 2.2. Додаємо всі рядки $s_1 \in T_1$ в нову мультитаблицю T , а потім всі основи рядків $\|s\|$ мультитаблиці T порівнюємо з основами рядків T_2 , і якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s\| = \|s_2\|$, то при її виявленні в T присвоюємо нове значення лічильнику $k_{ij} := k_{1i} + k_{2j}$, видаляємо рядок s_2 з мультитаблиці T_2 і переходимо до наступної основи T . Після цього додаємо всі рядки, що залишились в мультитаблиці T_2 , до T .

Складність алгоритму ММ 2.2 дорівнює:

$$B(q) = m_1(n + 1) + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + 2q + q(n + 1) + (m_1 - q)m_2n + (m_2 - q)(n + 1) = \\ = m_1m_2n + m_1n + m_2n + m_1 + m_2 + \frac{q}{2}(4 + n - qn).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 1$ і $B(1) = m_1m_2n + m_1n + m_2n + m_1 + m_2 + 2$.

Далі розглянемо алгоритм, що видає результат об'єднання мультитаблиць T_1 і T_2 в одну з вихідних мультитаблиць з більшою кількістю рядків.

Алгоритм ММ 2.3. Якщо $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то з кожною основою рядка $\|s_2\| \in T_2$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_1 , і якщо існує така основа рядка $\|s_1\| \in T_1$, що $\|s_2\| = \|s_1\|$, то при її виявленні в мультитаблиці T_2 присвоюємо нове значення лічильнику $k_{2j} := k_{2j} + k_{1i}$, видаляємо рядок s_1 з мультитаблиці T_1 і переходимо до наступного рядка мультитаблиці T_2 ; після цього додаємо всі рядки, що залишились у T_1 , до мультитаблиці T_2 , в якій міститься результат. Якщо ж $\|T_1\| > \|T_2\|$, то T_1 і T_2 міняються місцями.

При $\|T_1\| \leq \|T_2\|$ складність алгоритму ММ 2.3 дорівнює:

$$B(q) = (m_2 - q)m_1n + n[m_1 + (m_1 - 1) + (m_1 - 2) + \dots + (m_1 - q + 1)] + 2q + q(n + 1) + q + (m_1 - q)(n + 1) + 1 = \\ = m_1m_2n + m_1n + m_1 + 1 + \frac{q}{2}(4 + n - qn).$$

При $n > 1$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 1$ і $B(1) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + 3$. З урахуванням припущення складність цього алгоритму дорівнює $m_1m_2n + \min\{m_1, m_2\}(n + 1) + 3$.

Операція різниці мультитаблиць. Розглянемо п'ять алгоритмів виконання операції різниці мультитаблиць. Спочатку розглянемо, на наш погляд, найбільш природний алгоритм, що видає результат різниці T_1 і T_2 в нову мультитаблицю.

Алгоритм ММ 3.1. З кожною основою рядка $\|s_i\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків таблиці T_2 : якщо не існує такої $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_i\| = \|s_2\|$, то рядок s_i додаємо в нову таблицю T , а якщо така основа існує, то при її виявленні порівнюємо значення k_{ij} і k_{2j} : якщо $k_{ij} > k_{2j}$, то рядок s_i додаємо в нову таблицю T , присвоюємо для цього рядка нове значення $k_{ij} := k_{ij} - k_{2j}$, якщо ж $k_{ij} \leq k_{2j}$, то переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

Складність алгоритму ММ 3.1 дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q)m_2n + (m_1 - q)(n + 1) + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + 2q + q(n + 1) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + \frac{q}{2}(4 + n - qn).$$

При $n > 1$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 1$ і $B(1) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + 2$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 3.1, яка полягає в тому, що зважаючи на унікальність основ рядків в мультитаблицях, при знаходженні в T_2 основи, що співпадає з основою з T_1 , основу з T_2 можна видалити.

Алгоритм ММ 3.2. З кожною основою рядка $\|s_i\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 : якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_i\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників k_{ij} і k_{2j} : якщо $k_{ij} > k_{2j}$, то рядок s_i додаємо в нову мультитаблицю T , присвоюємо для цього рядка нове значення $k_{ij} := k_{ij} - k_{2j}$, рядок s_2 видаляємо з T_2 , якщо ж $k_{ij} \leq k_{2j}$, рядок s_2 видаляємо з T_2 і переходимо до наступної основи T_1 , якщо ж такої основи не існує, то рядок s_i додаємо в T .

Складність алгоритму ММ 3.2 в найгіршому випадку дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q)m_2n + (m_1 - q)(n + 1) + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + 2q + q(n + 1) + q(n + 1) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + \frac{q}{2}(6 + 3n - qn).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 2$ і $B(2) = m_1m_2n + m_1n + m_1 + n + 6$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 3.1, що видає результат різниці T_1 і T_2 у вихідну мультитаблицю T_1 .

Алгоритм ММ 3.3. З кожною основою рядка $\|s_i\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 : якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_i\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників k_{ij} і k_{2j} : якщо $k_{ij} > k_{2j}$, то присвоюємо для цього рядка нове значення $k_{ij} := k_{ij} - k_{2j}$, якщо ж $k_{ij} \leq k_{2j}$, рядок s_i видаляємо з таблиці T_1 .

Складність алгоритму ММ 3.3 в найгіршому випадку дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q)m_2n + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + q + q(n + 1) = m_1m_2n + \frac{q}{2}(4 + 3n - qn).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 2$ і $B(2) = m_1m_2n + n + 4$.

Далі розглянемо модифікацію алгоритму ММ 3.3, яка полягає в тому, що зважаючи на унікальність основ рядків в мультитаблицях, при знаходженні в T_2 основи, що співпадає з основою з T_1 , основу з T_2 можна видалити.

Алгоритм ММ 3.4. З кожною основою рядка $\|s_i\| \in T_1$ порівнюємо всі основи таблиці T_2 : якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_i\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників k_{ij} і k_{2j} : якщо $k_{ij} > k_{2j}$, то присвоюємо для цього рядка нове значення $k_{ij} := k_{ij} - k_{2j}$, рядок s_2 видаляємо з T_2 ; якщо ж $k_{ij} \leq k_{2j}$, то рядок s_i видаляємо з T_1 , а рядок s_2 видаляємо з T_2 .

Складність виконання алгоритму ММ 3.4 в найгіршому випадку дорівнює

$$B(q) = (m_1 - q)m_2n + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + q + q(n + 1) + q(n + 1) = m_1m_2n + \frac{q}{2}(6 + 5n - qn).$$

При $n > 5$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 3$ і $B(3) = m_1m_2n + 3n + 9$.

Тепер розглянемо модифікацію алгоритму ММ 3.3, що полягає в зміні порядку порівняння основ рядків у вихідних мультитаблицях: у цьому алгоритмі основи рядків T_2 порівнюються з основами рядків T_1 .

Алгоритм ММ 3.5. З кожною основою рядка $\|s_2\| \in T_2$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_1 : якщо існує така основа рядка $\|s_i\| \in T_1$, що $\|s_2\| = \|s_i\|$, то порівнюємо значення лічильників k_{ij} і k_{2j} : якщо $k_{ij} > k_{2j}$, то присвоюємо для рядка s_i нове значення $k_{ij} := k_{ij} - k_{2j}$, якщо ж $k_{ij} \leq k_{2j}$, то рядок s_i видаляємо з мультитаблиці T_1 і переходимо до наступного рядка мультитаблиці T_2 .

Складність алгоритму ММ 3.5 в найгіршому випадку дорівнює:

$$B(q) = (m_1 - q)m_2n + n[m_2 + (m_2 - 1) + \dots + (m_2 - q + 1)] + q + q(n + 1) = m_1m_2n + \frac{q}{2}(4 + 3n - qn).$$

При $n > 2$, з урахуванням цілочисельності аргументу q , ця функція приймає максимальне значення при $q = 2$ і $B(2) = m_1m_2n + n + 4$.

Порівняльний аналіз запропонованих алгоритмів. Серед запропонованих алгоритмів перетину мультитаблиць найменшу складність у найгіршому випадку має алгоритм ММ 1.1, а найбільшу – алгоритми ММ 1.3 та ММ 1.4. Серед запропонованих алгоритмів об'єднання мультитаблиць найменшу складність у найгіршому випадку має алгоритм ММ 2.3, а найбільшу – алгоритми ММ 2.1 та ММ 2.2. Серед запропонованих алгоритмів різниці мультитаблиць найменшу складність у найгіршому випадку мають алгоритми ММ 3.3 та ММ 3.5, а найбільшу – алгоритм ММ 3.2. Для більш точного порівняння запропонованих алгоритмів було проведено обчислювальний експеримент. Автором розроблено програмну систему в середовищі Lazarus, яка обчислює фактичну кількість виконаних обчислень для кожного алгоритму. Мультитаблиці, для яких виконуються алгоритми, задовольняють певним параметрам (кількість атрибутів та унікальних основ рядків), формуються випадковим чином, з ними виконуються всі запропоновані алгоритми; також система може обчислювати середнє значення фактичної кількості виконаних обчислень для будь-якої серії. Результати експерименту наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Дані обчислювального експерименту для різних значень параметрів

Алгоритм	n	$\ T_1\ $	$\ T_2\ $	Кількість тестувань	Середня кількість обчислень
ММ 1.1	5	100	105	1000	14248.53
ММ 1.2	5	100	105	1000	13061.09
ММ 1.3	5	100	105	1000	14760.11
ММ 1.4	5	100	105	1000	13572.67
ММ 2.1	5	100	105	1000	15148.72
ММ 2.2	5	100	105	1000	13867.16
ММ 2.3	5	100	105	1000	13548.19
ММ 3.1	5	100	105	1000	14551.83
ММ 3.2	5	100	105	1000	13354.49
ММ 3.3	5	100	105	1000	14246.75
ММ 3.4	5	100	105	1000	13049.41
ММ 3.5	5	100	105	1000	12951.95
ММ 1.1	10	1200	1195	200	1468769.44
ММ 1.2	10	1200	1195	200	912069.96
ММ 1.3	10	1200	1195	200	1458553.92
ММ 1.4	10	1200	1195	200	907761.56
ММ 2.1	10	1200	1195	200	1467013.75
ММ 2.2	10	1200	1195	200	917756.37
ММ 2.3	10	1200	1195	200	908147.24
ММ 3.1	10	1200	1195	200	1462758.27
ММ 3.2	10	1200	1195	200	905643.30
ММ 3.3	10	1200	1195	200	1469354.47
ММ 3.4	10	1200	1195	200	912239.52
ММ 3.5	10	1200	1195	200	902941.38

Експеримент показав, що серед запропонованих алгоритмів перетину алгоритми ММ 1.2 та ММ 1.4 є значно швидші, ніж алгоритми ММ 1.1 та ММ 1.3, причому із збільшенням кількості унікальних рядків у мультитаблицях алгоритм ММ 1.4 є трохи швидшим, ніж алгоритм ММ 1.2. Серед запропонованих алгоритмів об'єднання алгоритми ММ 2.3 та ММ 2.2 є значно швидші, ніж алгоритм ММ 2.1, причому алгоритм ММ 2.3 є трохи швидшим, ніж алгоритм ММ 2.2. Серед запропонованих алгоритмів різниці алгоритми ММ 3.5, ММ 3.2 та ММ 3.4 є значно швидші, ніж алгоритми ММ 3.1, та ММ 3.3, причому найшвидшим є алгоритм ММ 3.5.

Висновки. В роботі запропоновано та досліджено алгоритми перетину, об'єднання та різниці мультитаблиць. Для всіх цих алгоритмів знайдено точні оцінки складності в найгіршому випадку. Проведено обчислювальні експерименти, на основі яких було визначено найбільш швидкі алгоритми для кожної операції. Результати роботи представляють теоретичний і практичний інтерес. В подальшому передбачається обчислення складності в середньому для цих алгоритмів, а також використання аналогічної техніки для обчислення "вартості" запитів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E.F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – V.13, N. 6. – P. 377–387.
2. Codd E.F. The Relational Model for Database Management: version 2. / E.F. Codd // Addison-Wesley, 1990. – 538 p.
3. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков]. – Київ: Видавничий дім "Академпериодика", 2001. – 198 с.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
5. Канарская И.С. Оценки сложности алгоритмов реализации теоретико-множественных операций в табличных алгебрах / И.С. Канарская // Доповіді НАН України. – 2016. – №. 11. – С.17–23.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.16

Канарская И. С., асп.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ, ОБЪЕДИНЕНИЯ И РАЗНОСТИ В МУЛЬТИТАБЛИЦАХ

В работе исследованы алгоритмы реализации пересечения, объединения и разности мультитаблиц: сначала рассмотрены наиболее естественные алгоритмы, далее предложены их модификации, которые позволяют уменьшить количество вычислений. Для всех предложенных алгоритмов найдены точные оценки сложности в худшем случае. Проведены вычислительные эксперименты, на основании которых были определены наиболее быстрые алгоритмы для каждой операции.

Ключевые слова: табличная алгебра, база данных, мультитаблица.

Kanarskaya I. S., postgraduate,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

THE COMPLEXITY OF ALGORITHMS OF INTERSECTION, UNION, AND DIFFERENCE IN MULTITABLES

The algorithms implementing intersection, union and difference in the multitables are investigated. The modification of the most common algorithms reducing the quantity of computation is proposed. For each algorithm evaluated complexities in the worst case is found. Based on the program experimentally, the fastest algorithm for each operation is found.

Keywords: table algebra, database, multitable.

УДК 519.925

В. Р. Кулян, канд. техн. наук, доц.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
О. О. Юнькова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ

АЛГОРИТМІЧНІ ПРОЦЕДУРИ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ

Розглядається проблема якісного аналізу математичних моделей динаміки інвестицій. Для розроблених математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій сформульовано задачі та побудовано алгоритмічні процедури для визначення оптимальних значень параметрів. Розглянуто широкий спектр прикладних задач, пов'язаних з математичним моделюванням та оптимізацією інвестиційних операцій з цінними паперами.

Ключові слова: математичне моделювання, ідентифікація параметрів, портфель інвестицій

Розглянемо математичні процедури пошуку та визначення оптимальних значень числових параметрів математичних моделей динаміки активів на фондовому ринку. Побудуємо такі процедури для математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Ці моделі описані детально у [2] і мають такий загальний вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t), \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

відповідно, i є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними за r_i та залежать від параметрів.

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \alpha_3 r_j(t), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

При різних постановках задачі параметричної ідентифікації за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij})$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in A$, де A – обмежена замкнута множина. Скористаємось відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\bar{r}_i(t)$ і на основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α . Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

З метою отримання оптимального значення параметра α_0^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_0^* = \arg \min_{\alpha \in A} (r(t_0, t, \alpha) - \bar{r}_i(t))^2. \quad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}), \quad r_i(t_{k-1}) = r_{i, k-1}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k).$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^* . При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k .

3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_k^* = \arg \min_{\alpha \in A} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha) - \bar{r}_{k-1}(t))^2 \quad (4)$$

Розв'язок задачі (4) дозволяє оптимально перейти із точки r_{k-1} у точку r_k . Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі для моделювання поведінки та прогнозування очікуваної прибутковості акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Розглянемо деякі інші алгоритм побудови гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1) у просторі R^n параметрів α .

Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Вектор параметрів моделі запишемо у вигляді

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ за умови } x(t_0) = x_0 \text{ при } t \in [t_0, t_1].$$

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів математичної моделі

$$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}).$$

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{01})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{02})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{01}, \alpha_{02})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_2 - \alpha_{k2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_2 - \alpha_{k2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1}).$$

Нові значення параметрів α , які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})} + \alpha_{k2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})} + \alpha_{k2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі

$$\alpha_N = (\alpha_{N1}, \alpha_{N2}).$$

Серед критеріїв якості для перевірки належності параметра допустимій множині можемо розглянути такі:

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha) - x_{\text{exp}}(t_i))^2 < \varepsilon, \quad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha) - x_{\text{exp}}(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв.

Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів математичної моделі формування ринкової вартості акції або портфеля акцій) визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_i^c = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \alpha_i^j, \quad i = 1, 2.$$

Для цього розв'яжемо задачу одновимірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p, q)$ – функція відстані між точками p та q .

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_\delta}$ з вузлами y_i . В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\bar{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати "гарантованою еліпсоїдальною оцінкою" параметрів моделі (1), побудованою на основі критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d): \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \leq 1\}, \quad (7)$$

де B – симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α , $\alpha \in R^n$; d – геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^n$. Множину (7) будемо називати "гарантованою множинною оцінкою", якщо кожне значення параметра α , отримане для довільних спостережень, належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \alpha_j,$$

де k – кількість точок.

На $k+1$ – кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{ (B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k) \},$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{ (B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k) \},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar{j}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_{\bar{j}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}))) <$$

$$(B^k(\alpha_{\bar{j}} - d^k), \alpha_{\bar{j}} - d^k),$$

де $\bar{i} = \arg \max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$.

$$(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1.$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j , (j – номер кроку процедури такий, що

$$(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$$

сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_S}$ з вузлами y_i . У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує виконання обраних критеріїв якості.

Іншим підходом до розв'язання задачі параметричної ідентифікації є застосування функцій чутливості.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вважатимемо також, що мають місце початкові умови $r(t_0) = r_0 = r_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром і $\alpha = \alpha_1$, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці ρ_{jj} – коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r, α , а також за неперервної диференційованості функцій r_0, t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1}.$$

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial r} u + \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \quad (8)$$

при початковій умові

$$u(t_0) = \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r_0(\alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (9)$$

Рівняння (9) отримано прямим диференціюванням $u(t, \alpha_1)$ за α_1 , а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t, \alpha_1) = \int_{t_0(\alpha_1)}^t f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1) d\tau + r_0(t_0, \alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} =$$

$$\int_{t_0(\alpha_1)}^t \left[\frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial r} u(\tau, \alpha_1) + \frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right] d\tau +$$

$$\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r(t_0(\alpha_1), \alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (10)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t = t_0$.

Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1, α_2 математичної моделі (1). Математична задача має такий вигляд

$$\min_{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}} (r_j(t, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}) - z_j(t))^2, \quad t \in [t_0, T].$$

Тут $z_j(t)$ – спостереження за поведінкою ціни акції на ринку.

Алгоритм 3 побудови параметрів математичної моделі (1).

Розглянемо рівняння формування динаміки ринкової вартості однієї акції у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t) + \xi(t), \quad (11)$$

Тут α_1, α_2 – параметри моделі; ρ_{ij} – враховує кореляційні залежності між акціями, $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$; $\xi(t)$ – вектор збурень.

У випадку, якщо $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$, із (20) можемо отримати

$$(\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t) = (\xi(t) - \frac{dr}{dt})r^{-1}(t), \quad (12)$$

У матричному вигляді

$$\alpha = (\xi - \dot{R})R^{-1}. \quad (13)$$

Якщо вектори $\dot{r}, r, \xi$ є доступними для визначення, то (13) можна розглядати як прямий алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі. Похибка ідентифікації лінійно залежить від похибок визначень $\dot{r}, \xi$. Аналіз (13) вказує на те, що вплив похибок визначень r на оцінювання параметрів збільшується, якщо рівняння системи погано обумовлені, тобто коли матриця R близька до особливої, а визначник цієї матриці $|R|$ близький до 0. Для того, щоб рівняння

$$\dot{R} - \alpha R = \xi$$

було добре обумовленим, необхідно, щоб вектори $r_i(t)$ були незалежними. Якщо ж процес є стохастичним, то ця умова зводиться до некорельованості значень $r(t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Подальша процедура ідентифікації параметрів моделі зводиться до отримання розв'язку рівняння (13) для різних моментів часу $t \in [t_0, T]$.

Побудувавши розв'язки рівняння (13) для $k+2$ – моментів часу, отримаємо систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі.

Розглянувши $\sum_{i=1}^n \rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Висновки. Наведено обчислювальні процедури ідентифікації параметрів математичних моделей динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Розроблені алгоритми дозволяють розв'язувати широкий спектр задач оптимального управління портфельними інвестиціями. Сформульовані обчислювальні процедури можна застосовувати для побудови допустимих та ефективних множин, а також розв'язувати задачі оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів для моделей (1) і (2).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – 1027с.
2. Гаращенко Ф. Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Ф. Г. Гаращенко, В. Р. Кулян, В. В. Рутицкая // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. – с. 3–10.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.16

Кулян В. Р., канд. техн. наук, доц.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
Е. А. Юнькова, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Киев

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

Рассматривается проблема качественного анализа математических моделей динамики инвестиций. Для построенных математических моделей формирования рыночной стоимости одной акции и портфеля акций сформулированы задачи и разработаны алгоритмы для определения оптимальных значений параметров. Рассмотрено широкий спектр прикладных задач, связанных с математическим моделированием и оптимизацией инвестиционных операций с ценными бумагами.

Ключевые слова: математическое моделирование, идентификация параметров, портфель инвестиций.

Kulian V. R., Ph.D
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Iunkova O. O., Ph.D
Vadim Getman National Economy University of Kyiv

ALGORITHMIC PROCEDURES FOR CALCULATING THE PARAMETERS OF MODELS

The problem of qualitative analysis of mathematical models of the dynamics of investment is considered. For a mathematical models of the market value of a share and the stock portfolio is formulated tasks and the algorithms for determining the optimal parameter values. We consider a wide range of applications related to mathematical modeling and optimization of investment securities transactions.

Keywords: mathematical modeling, parameter identification, investment portfolio.

УДК 004.451.642

В. В. Макаричева, асп.,
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій
та систем НАН України і МОН України, Київ

КОМП'ЮТЕРНА СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ КОМПЛЕКСНОМУ ОЦІНЮВАННІ ФІЗИЧНОГО ЗДОРОВ'Я

Описана автоматизована інформаційна технологія оцінки фізичного здоров'я людини. Представлено структурно-алгоритмічну схему відповідної комп'ютерної програми. Синтезовано програмне забезпечення, результатом використання якого є кількісне відображення за допомогою розробленого інтерфейсу можливих відхилень здоров'я при ранній діагностиці.

Ключові слова: фізичне здоров'я, експрес-діагностика, структурно-алгоритмічна схема, автоматизована інформаційна технологія.

Вступ. XXI століття – час стрімкого розвитку високих технологій, які, на жаль, створюють екологічні умови, що негативно відбиваються на стані здоров'я населення планети. Тому стратегічний напрямком оптимізації існування конкретної людини в сучасному середовищі полягає в формуванні мотивації контролювати стан власного здоров'я. Акцентування уваги на самоконтролі стану здоров'я, орієнтація на ведення здорового способу життя – необхідна складова культури людини, яка адекватно орієнтується в сучасних життєвих умовах. Виявлені при обстеженні відхилення можуть бути факторами ризику, або ознаками деяких неясних захворювань, які стимулюють до своєчасного звернення уваги на корекцію свого стану. Тому вміння правильна оцінка отриманих результатів може сприяти формуванню персональної установки на здоровий спосіб життя.

Парадигма "Здоров'я" та розвиток сучасних комп'ютерних технологій спонукають до створення системи управління, яка дозволить автоматизувати процеси обробки інформації та вибору дій, що коригують стан здоров'я. Необхідною умовою вирішення даної проблеми є створення комп'ютерних програм кількісної діагностики здоров'я.

На сьогодні існує багато програмних продуктів, створення яких спричинено проблемою оцінювання стану здоров'я людини. Діагностична комп'ютерна програма "Здоров'я" базується на створенні формалізованої експрес-оцінки індивідуального рівня здоров'я (в балах) за простими клініко-фізіологічними показниками [5]; автоматизована система "Школяр", розроблена на мові програмування Delphi 5, дозволяє оцінити рівень фізичного здоров'я підлітків [11]; Інститутом Купера і Національною асоціацією спорту та фізичного виховання США (NASPE) розроблено комп'ютерну програму FITNESSGRAM / ACTIVITYGRAMM [12], яка широко застосовується в багатьох країнах світу для оцінки фізичного стану дітей та підлітків; "Моніторинг здоров'я" [9] – комп'ютерна програма, яка забезпечує оцінку, прогнозування і корекцію фізичного стану та функціональних можливостей організму дітей, підлітків та молоді.

Не всі запропоновані системи дають комплексну оцінку компонентів фізичного здоров'я як цілісності. В роботі [8, рис. 2, стр. 30] запропоновано розширену схему оцінювання фізичного здоров'я шляхом включення до розробленої авторами відповідної інформаційної структури додаткового модуля – оцінки виконавчих фізичних можливостей людини, що дозволяє досліджувати проблему корекції стану здоров'я в термінах теорії систем керування. Реалізація цього підходу вимагає розробки відповідного програмного забезпечення. У цьому контексті сформулюємо постановку задачі дослідження.

Постановка задачі – розробити автоматизовану інформаційно-комп'ютерну технологію підтримки прийняття рішень при комплексному кількісному оцінюванні фізичного здоров'я (ФЗ) людини з урахуванням складових, що характеризують його можливості щодо виконання фізичних навантажень.

Комплексний підхід та етапи розробки автоматизованої інформаційної технології оцінки фізичного здоров'я людини. *Фізичне (соматичне) здоров'я людини* – це природний стан організму, який обумовлений нормальним функціонуванням всіх його органів і систем, рівнем їх розвитку і функціональних можливостей, при яких показники основних фізіологічних систем лежать в межах фізіологічної норми і адекватно змінюються при взаємодії людини з зовнішнім середовищем [5, с. 249].

За даними аналізу літератури [1–4, 6, 9] критеріями оцінки ФЗ обирають наступні фактори:

- **Фізичний розвиток** – біологічний процес становлення та зміни природних морфологічних і функціональних властивостей організму людини протягом його життя (зріст, маса тіла, окружність грудної клітки, життєва ємність легень, максимальне споживання кисню та ін.). Для оцінки фізичного розвитку взято наступні методики: масо-ростовий індекс Кетле, індекс Пірке, індекс Піньє, індекс Ерісмана, які характеризують пропорційність, тип статури та розвиток грудної клітини відповідно.

- **Фізична підготовленість** – зовнішній прояв рівня розвитку фізичних якостей (сили, швидкості, витривалості та ін.). Широке практичне застосування для оцінки фізичної підготовленості отримали тести Купера.

- **Функціональна підготовленість організму** – стан фізіологічних систем організму (кістково-м'язової, дихальної, серцево-судинної, нервової та ін.) на випробування фізичними навантаженнями. Функціональну підготовленість окремої системи організму оцінюють за допомогою відповідних функціональних проб (проба Мартіне, проба Штанге, проба Генче та ін.).

- **Адаптаційні резерви** – рівень і здатність до мобілізації резервів організму, що забезпечують його пристосування до впливу різних чинників довкілля. Для виявлення можливостей організму до адаптації Р. М. Баєвським запропоновано методику оцінки *адаптаційного потенціалу* (АП) [3, с. 73–78].

В даній роботі пропонується розробити автоматизовану інформаційно-комп'ютерну технологію для кількісного оцінювання стану фізичного здоров'я шляхом включення зазначених вище складових в єдиний діагностичний комплекс, що забезпечить прискорення швидкості обробки даних, їх збереження, швидкий пошук необхідної інформації та представлення її в зручній для користувача формі.

При розробці автоматизованої інформаційної технології оцінки ФЗ виконано наступні етапи:

- Розроблено інформаційно-структурну модель фізичного здоров'я [8].

- Обрано критерії оцінки ФЗ та методи їх використання для комплексного оцінювання з урахуванням зазначених структурних компонентів.

- Розроблено структурну схему програмного забезпечення.
- Розроблено алгоритм реалізації програмного комплексу.
- Синтезовано автоматизовану інформаційну технологію для покомпонентної оцінки фізичного здоров'я.

В нашому випадку автоматизована інформаційна технологія – це комп'ютерна програма оцінки здоров'я людини з огляду як на його фізичні можливості в цілому, так і на кількісне оцінювання всіх внутрішніх його складових, що мають інформативне значення.

Структурно-алгоритмічна схема програми. Програма ґрунтується на реляційній базі даних, складові якої можна умовно розділити на діагностуючу і призначену для користувача категорії. Під категорією діагностуючої компоненти розуміється необхідний базис, який забезпечить процес діагностики, і представлений у вигляді таблиць, які містять компоненти дослідження і методики їх оцінювання. Користувацька категорія бази створює можливість фіксувати дані отримані від кожного користувача, що містять отримані результати за компонентами діагностики.

Система діагностики ФЗ реалізована на об'єктно-орієнтованій мові програмування Java та технології Sql [7, ст. 113–211]. Алгоритм процесу діагностики представлено на рисунку 1.

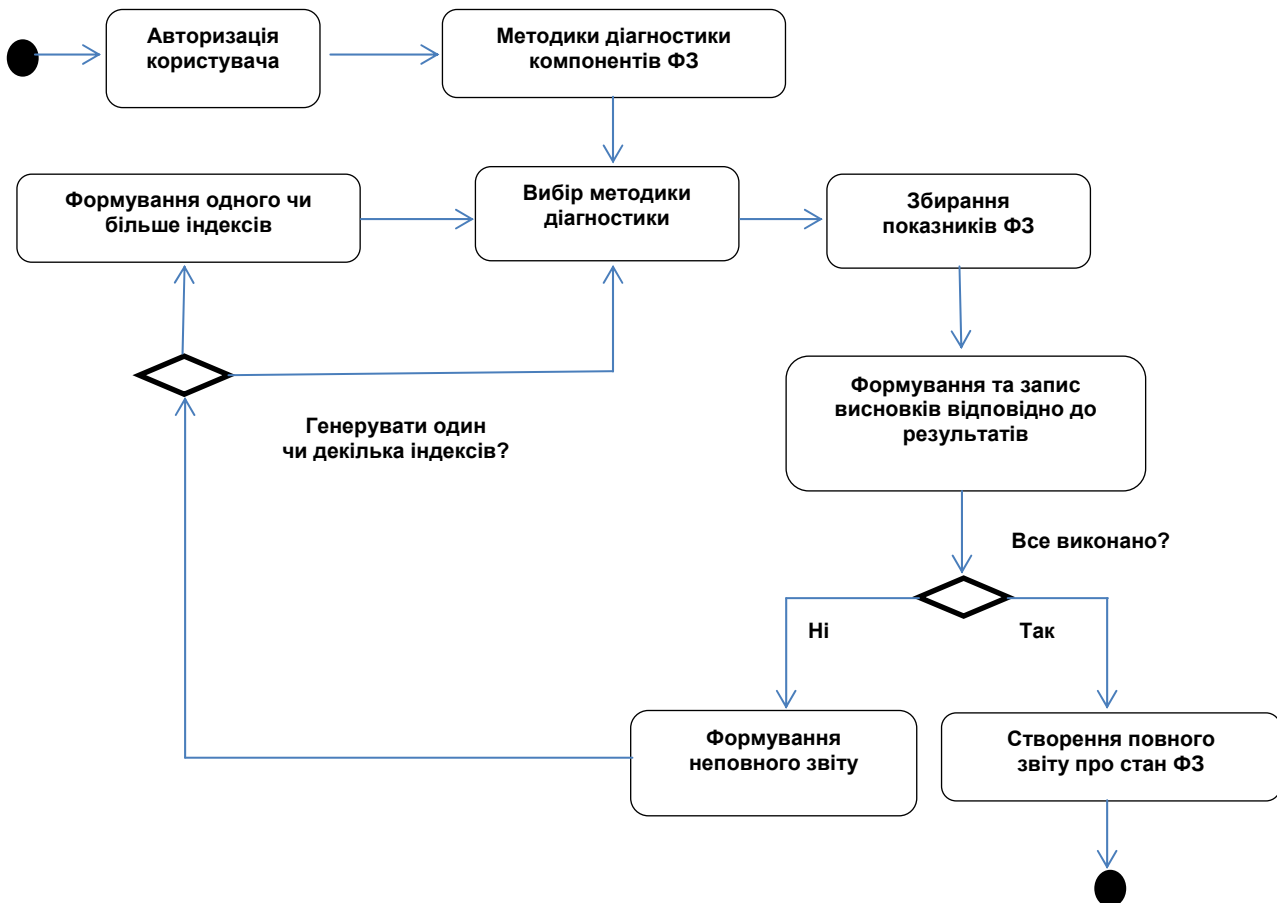


Рис. 1. Алгоритм програмної реалізації експрес-діагностики ФЗ

Розроблена програма розрахована на велику кількість користувачів. Вона створює для кожної людини область особистих даних, за якими проводиться авторизація шляхом порівняння логіна і пароля. Для цього в системі реалізована стандартна форма реєстрації.

Після реєстрації та авторизації надається можливість приступити безпосередньо до діагностики у вільному порядку, переходячи до необхідних складових ФЗ. При виборі методики з запропонованого списку, користувач переходить до самої обраної ним методики, згідно з якою створюється запит на введення необхідних вимірюваних числових значень показників, які необхідні для подальшої роботи програми. Після цього програмою здійснюється обробка даних, їх нормування, збереження та підготовка до видачі звіту у вигляді вербальної характеристики.

Інформаційний ресурс представлено розробленими спеціалізованими базами даних. При цьому використана технологія реляційного моделювання, згідно з якою інформаційними модулями є ієрархічно організовані електронні таблиці (Рис. 2), узгоджена взаємодія між якими підтримується спеціальними програмними процедурами і реалізується за допомогою системи управління базами даних – СУБД.

Електронні таблиці компонентів ФЗ та їх показників мають тип зв'язку "один до багатьох". Зв'язок зіставляє первинний ключ однієї таблиці (в нашому випадку (UserID), що є унікальним ідентифікатором кожного рядка цієї таблиці, із записами зовнішнього ключа іншої таблиці. UserID – числовий ідентифікатор, що за замовченням надається кожному користувачеві при реєстрації. Наприклад, на Рис. 2 показано як таблиці, що містять інформацію про оцінку показників (індекс Пірке, індекс Кетле, індекс Ерісмана і т.д.), (зовнішні ключі) пов'язані з таблицею User (містить первинний ключ).

Стовпець, який є первинним ключем у зв'язку "один до багатьох", наголошується символом ключа. Стовпець, який є зовнішнім ключем у зв'язку "один до багатьох", наголошується символом нескінченності. Дана можливість є корисною для баз даних з дуже великою кількістю таблиць, так як одна загальна діаграма була б занадто навантаженою.

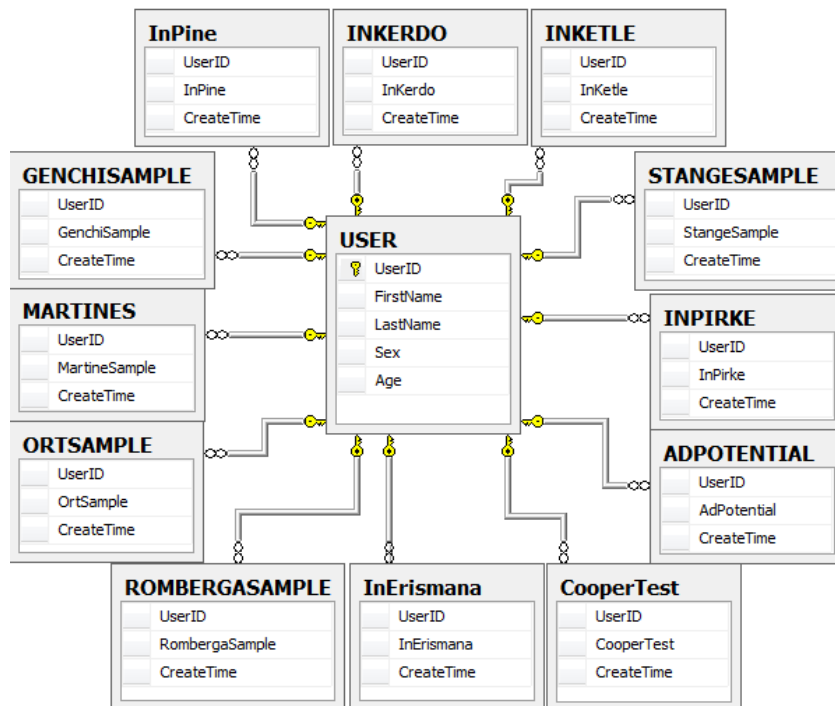


Рис. 2. Побудова зв'язків оцінок компонентів фізичного здоров'я користувача в базі даних

Графічний інтерфейс користувача (GUI) створено за допомогою інструментарію **Swing** – частини бібліотеки базових класів мови програмування Java. Він підтримує діалог користувача з програмою, реалізує візуалізацію діагностуючої інформації.

Нижче, на рис. 3–9 ілюструється віконний інтерфейс, що підтримує візуалізацію діалогу користувача з програмою.

При активізації програми послідовно відкриваються робочі вікна, у рядках введення яких необхідно вказати персональні дані: ім'я, прізвище, стать, дату народження, логін та пароль.

а)

б)

Рис. 3а, б. Стартові вікна ініціалізації користувача

Рис. 4. Вікно вибору методик діагностики складових фізичного здоров'я, інтегральної його оцінки та методик його підтримки

На прикладі оцінки фізичного розвитку показано процедуру оцінювання окремих його показників, проілюстрованою віконним інтерфейсом, наведеним нижче на рисунках 5–9.

Оцінка фізичного розвитку

Індекс Кетле

Ступінь відповідності маси людини її зросту
Інд. Кетле = $\text{маса(кг)} / \text{зріст(м)}^2$

Класифікація стану здоров'я	Індекс Кетле	Рекомендації
Виразений дефіцит маси тіла	менше 16	Рекомендація - набрати вагу. Треба звернутися до лікаря.
Недостатня маса тіла	16-18,5	Рекомендація - трохи набрати вагу. Якщо не вийде, треба звернутися до лікаря.
Норма	18,5-24,99	Так тримати!
Надлишкова маса	24,99-30	Рек. - зниження маси тіла. Підвищений ризик неінфекційних і системних захворювань.
Ожиріння I ступеня	30-35	Рек. - зниження маси тіла. Підвищений ризик неінфекційних і системних захворювань.
Ожиріння II ступеня	35-40	Наполегливо рек. зниження маси тіла. Високий ризик для здоров'я!
Ожиріння III ступеня	40 та вище	Наполегливо рекомендується зниження маси тіла. Дуже високий ризик для здоров'я!

0 0,25 0,5 0,75 1

мале відхилення середнє відхилення практична норма

Маса тіла (кг): 75

Зріст стоячи (см): 165

Вік: 25

Результат діагностики:
Індекс = 27,548
Нормована оцінка - 0,622 .
Мале відхилення від норми.
Рекомендується деяке зниження маси тіла.
Підвищений ризик неінфекційних і системних захворювань

Повернутися до вибору Підрахувати стан фізичного розвитку

Рис. 5. Масо-ростовий індекс Кетле описує відповідність маси людини та її зросту

Оцінка фізичного розвитку

Індекс Пірке

Відповідність довжини тулуба людини та його кінцівок
Інд. Пірке = $(\text{зріст ст. (см)} - \text{зріст сид. (см)}) / \text{зріст сидячи (см)}$

Величина показника	Характеристика відносно довжини ніг
Менше 0,87	Мала довжина ніг (низьке розташування центру тяжіння).
0,87 - 0,92	Пропорційне співвідношення між довжиною ніг і тулубом.
Більше 0,92	Відносно велика довжина ніг (високе розташування центру тяжіння).

0 0,25 0,5 0,75 1

мале відхилення середнє відхилення практична норма

Зріст сидячи (см): 90

Зріст стоячи (см): 175

Результат діагностики:
Індекс Пірке = 0,94
Нормована оцінка - 0,567 .
Відносно велика довжина ніг (високе розташування центру тяжіння).

Повернутися до вибору Підрахувати стан фізичного розвитку

Рис. 6. Індекс Пірке характеризує пропорційність статури людини

Оцінка фізичного розвитку

Індекс Піньє

Тип статури людини
Інд. Піньє = $\text{зріст(см)} - (\text{маса(кг)} * \text{окружність грудної клітини(см)})$

Значення індексу	Тип конституції	Характеристика типу
Більше 30	ліпостенік (астенічний тип)	худорлява статура
Від 10 до 30	нормостенік	нормальна статура
Менше 10	гіперстенік (пікнічний тип)	надлишкова вага

0 0,25 0,5 0,75 1

мале відхилення середнє відхилення практична норма

Маса тіла (кг): 58

Зріст стоячи (см): 165

Окружність грудної клітини (см): 89

Результат діагностики:
Індекс Піньє = 18.
Нормована оцінка - 0,950 .
Нормальна статура.

Повернутися до вибору Підрахувати стан фізичного розвитку

Рис. 7. Індекс Піньє оцінює значення, що визначає тип статури

Оцінка фізичного розвитку

Індекс Проп. груд. клітини

Пропорційність розвитку грудної клітини людини
 $\text{Інд. Ерісмана} = \frac{\text{обхват грудної клітини в паузі(см)} - (\text{зріст(см)} / 2)}{2}$
 Норма антропометричного індексу фізичного розвитку: $\text{окр.гр.клітини} = \text{зріст} / 2$.
 $\text{Окружність грудної клітки} > \text{зросту} / 2$:
 для чоловіків - +5,8 - добре розвинута грудна клітина (для жінок - +3,8).

0 0,25 0,5 0,75 1

дуже відхилення середнє відхилення мале відхилення практична норма

Зріст стоячи (см): 165
 Округність грудної клітини (см): 89

Результат діагностики:
 Індекс Ерісмана: 7.0
 Нормована оцінка - 0,821 .
 Добре розвинута грудна клітина

Повернутися до вибору Підрахувати стан фізичного розвитку

Рис. 8. Індекс Ерісмана показує пропорційність розвитку грудної клітини

Після проходження тестів програми в базі даних формується запит і отримуються відомості про оцінку відповідно часу, коли користувач проходив діагностування (Рис.9). Такий підхід дозволяє отримувати, зберігати, оновлювати, та керувати даними.

UserID	InErismana	Create Time
1	0.539394	2015-05-18 07:42:01.190
2	0.4848485	2015-05-18 07:42:27.413
3	0.539394	2015-05-18 07:42:45.003
4	0.4848485	2015-05-18 07:42:52.217
5	0.6060606	2015-05-18 07:43:09.653
6	0.5333334	2015-05-18 07:44:03.157
7	0.5272727	2015-05-18 08:23:42.050
8	0.5272727	2015-05-18 08:34:02.433

Рис. 9. Відображення результатів в базі даних*

Використання розробленого програмного комплексу оцінки ФЗ дозволить підвищити ефективність, точність, швидкість дослідження (обробки) стану важливої складової інтегрального здоров'я – фізичного здоров'я. Програма є інструментом обчислення кількісних характеристик здоров'я та їх вербальної інтерпретації.

Висновки. Автоматизована інформаційна технологія пропонується як компонент системи інформаційно-комп'ютерної підтримки прийняття рішень при управлінні фізичним здоров'ям, а саме – при кількісному оцінюванні його складових та виборі оздоровчих заходів для корекції та підтримки його стану. Удосконалення та практичне застосування автоматизованої інформаційної технології на основі побудованих інформаційних оцінок ФЗ дозволить поліпшити ефективність та роздільну здатність експрес-оцінювання рівня фізичного здоров'я.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антомонов М.Ю., Волощук Е.В. Конструирование интегральных показателей количественных признаков с помощью одномерных и многомерных методов статистики // Кибернетика и вычисл. техника. 2012. Вып. 167, С. 61–68.
2. Апанасенко Г.Л. Диагностика индивидуального здоровья // Современные реабилитационные технологии, 2012 №8, С. 64–69.
3. Баевский Р.М. Оценка и классификация уровней здоровья с точки зрения теории адаптации // Вестн. АМН СССР. – 1989. – N 8, С. 73–78.
4. Безматерных Л.Э. Диагностическая эффективность методов количественной оценки индивидуального здоровья / Л. Э. Безматерных, В. П. Куликов // Физиология человека, том 24, №3 1998, С. 79–85.
5. Вальчак Н. Визначення фізичного(соматичного) здоров'я студентів та його оцінювання / Вальчак Н., Салук І. // Молода спортивна наука України 2013. Т.4. С. 23–28.
6. Гриценко В.І., Котова А.Б., Вовк М.І., Кіфоренко С.І., Белов В.М. Інформаційні технології в біології і медицині: Курс лекцій: Навчальний посібник. – Київ: Наук. думка, 2007. – 382 с.
7. Двигательные тесты Купера Режим доступа: <http://ggym.ru/kuper.php?sthash.66u3JT5v.dpuf>.

8. Коннолли Т., Карелии Б. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. 3-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 1440 с. : ил. – Парал. тит. англ.
9. Кравченко В.В. Информационно-технологические аспекты контроля и оценивания физического здоровья / В.В.Кравченко, С.И. Кифоренко // Вісник Київського Національного університету. – К., 2014. – №1(14). – С.27–32.
10. Левушкин С.П. Использование компьютерных технологий для оценки и прогнозирования отдельных компонентов здоровья // Успехи современного естествознания. – 2007. – № 12 – С. 151–152
11. Никифоров Г.С. Психология здоровья: Учебник для вузов / Под ред. Г. С. Никифорова. – СПб.: Питер, 2006. – С. 607. С. 70–72.
12. Продеус А. М. Експертна система "Школяр 2001" для закладів освіти та охорони здоров'я / А. М. Продеус, Ю. С. Синєкоп, В. А. Шаповалова // Електроніка і зв'язь. – К., 2001. – № 11. – С. 21–25. - Бібліогр.: 3 назв. – укр.
13. Ярмак О.М. Аналіз сучасних систем оцінки рівня фізичного здоров'я юнаків / О. М. Ярмак // Слобожанський науково-спортивний вісник. – 2009. – №1. С. 158–161.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.16

Макаричева В. В., асп.,

Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, Киев

КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ КОМПЛЕКСНОМ ОЦЕНИВАНИИ ФИЗИЧЕСКОГО ЗДОРОВЬЯ

Описана автоматизированная информационная технология оценки физического здоровья человека. Представлена структурно-алгоритмическая схема соответствующей компьютерной программы. Синтезировано программное обеспечение, результатом использования которого есть количественное отображение с помощью разработанного интерфейса возможных отклонений здоровья при ранней диагностике.

Ключевые слова: физическое здоровье, экспресс-диагностика, структурно-алгоритмическая схема, автоматизированная информационная технология.

Makaricheva V. V. postgraduate,

International Research and Training Center for Information Technologies and Systems National Academy of Sciences Ukraine,
Ministry of Education and Sciences Ukraine

COMPUTER SYSTEM DECISION MAKING SUPPORT AT COMPLEX EVALUATION OF PHYSICAL HEALTH

Automated information technology assessment of physical health is described. The block-diagram of the corresponding algorithmic computer program is presented. The result of using the synthesized software and developed interface is a quantitative assessment of health variations at early diagnostics.

Key words: physical health, express diagnosis, structural and algorithmic scheme, automated information technology.

УДК 519.87

Ю. О. Науменко, асп.,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РЕКЛАМИ В УМОВАХ КОНКУРЕНЦІЇ ТОВАРОВИРОБНИКІВ

В статті запропоновано та досліджено модель оптимізації рекламного бюджету, рекламні видатки у якій розглянуто в якості інвестицій. Отримано задачу оптимізації на основі заданої функції корисності. Проведено моделювання функції корисності, запропоновано спосіб побудови функції попиту товарів двох виробників. Проведено аналітичне дослідження впливу реклами на попит. На тестових прикладах отримано чисельні розрахунки ефективності рекламного бюджету.

Ключові слова: модель, реклама, розподіл бюджету, ефективність, ігрова задача, функція корисності, попит.

Вступ. Бурхливий розвиток товарообороту, виробництва та грошових відносин за останні 20 років породив такий економічний феномен як реклама. Реклама – певна форма видатків товаровиробника, ціллю яких є заохочення покупця до придбання товару саме їхнього виробництва. Реклама виникла з появою конкуренції між товаровиробниками, і, як кожен процес, що задовольняє певним умовам і містить певні закономірності, може бути формалізований та досліджений. Але не дивлячись на ряд отриманих наукових результатів, проблема оптимізації рекламної стратегії є відкритою і наразі.

Прийнято вважати, що вимірювання ефективності реклами є досить складною проблемою. Деякі вважають її нерозв'язною, інші пропонують як прості, так і складні рішення. Проте, абсолютно усі дотримуються думки, що вимірювати ефективність реклами треба. За визначенням Россеа Рівса реклама є "мистецтвом впровадження унікальної торговельної пропозиції в голови найбільшого числа людей при найменших витратах" і це визначення необхідно розуміти таким чином: якщо не піклуватися про мінімізацію витрат на рекламу, то цей процес буде скоріше суцільним розбазарюванням. З іншого боку, мінімізація витрат без вимірювання ефективності неможлива.

Головною проблемою визначення оптимального рекламного бюджету є визначення бюджету, що дозволив би одержати гарантовану віддачу від реклами. Будь-яке відхилення від оптимальності приводить до неефективності [1].

Насправді суть ефективності реклами полягає в оцінці величини позитивного зрушення відносно покупців до предмету реклами і залежить від торговельної пропозиції, форми її подання (креатива), використання рекламо носіїв та частоти і часу дії реклами на покупців.

Метою даної статті є побудова математичної моделі з урахуванням рекламних видатків як інвестицій, та розв'язання задачі оптимізації рекламного бюджету на основі цієї моделі.

Для дослідження ефективності реклами розглянемо гру декількох гравців: в однакових умовах (один і той самий товар, одні і ті ж споживачі, одна і та ж реакція ринку, і т.д.) на деякому умовному ринку діє (грає) пара конкурентів (гравців) зі своїми індивідуальними особливостями (об'єм виробництва, витрати на виготовлення одиниці продукції, ціни, і т.д.). Враховуючи, що ринок один, дії одного гравця так чи інакше відображаються на стані другого.

Таким чином, розглянемо випадок, коли на ринку є дві фірми ($k = 1, 2$), кожна з яких реалізує свій товар в об'ємах X_1 і X_2 , ціни та витрати на виготовлення одиниці продукції задані величинами p_1, c_1 та p_2, c_2 , а рекламні інвестиції цих двох фірм оцінені в I_1 та I_2 відповідно. Тоді можна записати функцію прибутку обох гравців:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1(p_1 - c_1) - I_1 \\ Y_2 = X_2(p_2 - c_2) - I_2 \end{cases} \quad (1)$$

де Y_1, Y_2 – прибуток гравців, X_1, X_2 – попит на їх продукцію.

Витрати на виготовлення одиниці продукції в реальних умовах під час проведення рекламної кампанії не змінюються, тому вважається, що $c_1, c_2 = \text{const}$. Крім цього, система (1) не враховує збитки гравців через надмірне виготовлення своєї продукції, але в умовах даної моделі припускається, що попит може бути обрахований наперед і ці збитки можна буде звести до мінімуму, а значить цей фактор можна не враховувати.

Стратегією гравця $s_k \in S$, $k = 1, 2$, назвемо деякий спосіб вибору значень своїх параметрів, якими в даній моделі є ціна p_k та рекламні видатки I_k , $k = 1, 2$. Відповідно до цього, можна розглядати цінову $s_k^p \in S^p$ та рекламну $s_k^l \in S^l$ стратегії. Зрозуміло, що $S = S^p \times S^l$ і $s_k = (s_k^p, s_k^l)$, $k = 1, 2$. Мета кожного з гравців полягає в отриманні оптимальних значень $\sup_{p_k, I_k} Y_k$, $k = 1, 2$, відповідно.

Оптимального розв'язку у загальному випадку не існує, тому що виграш одного з гравців неодмінно призводить до програшу іншого. Але в той же час повинні існувати деякі точки рівноваги, перехід від яких одного з гравців при зміні стратегії зумовлює або перехід до іншої такої точки рівноваги без виграшу, або зумовлює програш. Такі точки називаються точками рівноваги Неша.

Оптимальною стратегією k -го гравця $s_k^* \in S$, $k = 1, 2$, назвемо стратегію, за якою може бути досягнута точка рівноваги. Очевидно, що така точка досягається у випадку $s_1^* \cap s_2^*$. Рекламну стратегію k -го гравця $s_k^{l*} \in S^l$ назвемо оптимальною, якщо $\exists s_k^{p*} \in S^p$ така, що $(s_k^{p*}, s_k^{l*}) = s_k^*$. Таким чином, необхідно вирішити задачу пошуку таких стратегій.

Попит є функцією ціни та реклами обох гравців, що в умовах даної моделі може бути записано загальним біполарним рівнянням:

$$X_i = \lambda_i + \alpha_{ii}p_i + \alpha_{ij}p_j + \beta_{ii}I_i^{\delta_i} + \beta_{ij}I_j^{\delta_j} \quad (2)$$

де λ_i – автономний (незалежний від гри) попит на продукцію i -го гравця, $i = 1, 2$, α_{ii}, α_{ij} – ціна ходу (виграш чи програш) гравця при виборі стратегії відносно ціни, $i, j = 1, 2$, β_{ii}, β_{ij} – ціна ходу гравця при виборі стратегії відносно рекламної активності, $i, j = 1, 2$, δ_i, δ_j – деякі коефіцієнти, що враховують вплив реклами на продажі (еластичність реклами), причому $0 < \delta_i, \delta_j < 1$, $i, j = 1, 2$.

Тоді систему (1) можна переписати в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} Y_1 = (\lambda_1 + \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \beta_{11}I_1^{\delta_1} + \beta_{12}I_2^{\delta_2})(p_1 - c_1) - I_1 \\ Y_2 = (\lambda_2 + \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \beta_{21}I_1^{\delta_1} + \beta_{22}I_2^{\delta_2})(p_2 - c_2) - I_2 \end{cases} \quad (3)$$

Пошук оптимальності потребує диференціювання функції прибутку. Маємо дві змінні: ціна та розмір рекламних інвестицій (вважаємо, що δ_1, δ_2 відомі). Але оскільки задача полягає у відшуканні оптимальної кількості рекламних витрат, то розглянемо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial I_1} = \delta_1(p_1 - c_1)\beta_{11}I_1^{\delta_1-1} - 1 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial I_2} = \delta_2(p_2 - c_2)\beta_{22}I_2^{\delta_2-1} - 1 \end{cases} \quad (4)$$

Прирівнюючи похідні до нуля, отримуємо залежність:

$$p_k = \frac{I_k^{1-\delta_k}}{\delta_k \beta_{kk}} + c_k, \quad k = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

Не важко перевірити, що виконання (5) максимізує функцію прибутку. Так, дійсно, високі затрати на рекламу змушують гравця підвищити ціну, адже зростання попиту нездатне окупили витрати на рекламу при невисокій ціні, а при невисоких затратах на рекламу нерационально ставити високу ціну, адже в такому випадку падіння попиту зумовить зменшення прибутків.

Проте використання рівняння (5) не є зручним з практичної точки зору, тому що коефіцієнти β_{kk} , $k = \overline{1, 2}$, є невідомими елементами матричної гри, а рекламна еластичність δ_k , $k = \overline{1, 2}$, в умовах конкуренції є динамічною характеристикою, і тому не може розглядатись як константа.

Попит, як вже було зазначено, є функцією цін та рекламних затрат. Ціни коливаються в залежності від попиту і також впливають на його динаміку. При цьому все це розглядається без урахування сезонних коливань на ціни і попит в залежності від специфіки товару, інфляційних очікувань і т.і. Такі умови не дозволяють визначити функцію попиту для даної моделі в загальному випадку, внаслідок чого виникає запитання про можливість розв'язати задачу пошуку оптимальних значень $\sup_{p_k, I_k} Y_k$, $k = 1, 2$.

Запишемо функцію попиту у вигляді $X_i = F(p_i, p_j, I_i, I_j)$, $i, j = 1, 2$.

Для пошуку невідомої функції звернемо увагу на те, що реклама орієнтується на зростання попиту шляхом впливу на уподобання споживача, його відношення до товару. Користуючись висновками теорії споживання, робимо висновки, що задача пошуку функції $F(p_i, p_j, I_i, I_j)$ може бути зведена до неокласичної задачі споживання. Ця задача

полягає у виборі споживачем деякого набору товарів при заданій функції корисності та бюджетному обмеженні. Більш конкретно: потрібно максимізувати корисність набору товарів, враховуючи, що загальна вартість придбаних товарів не може перевищувати розмір бюджету споживача.

Таким чином, вважатимемо весь ринок деяким гіперспоживачем. Тоді фінансовий оборот ринку (сума доходів обох фірм) буде бюджетом гіперспоживача. Простір товарів задамо у вигляді множини $C = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0\}$, де x – вектор, що вказує на кількість придбаного гіперспоживачем (ринком) кожного товару, і є фактично попитом.

Зрозуміло, що проводячи аналогію з теорією споживання [2], припускаємо, що гіперспоживач може придбати будь-яку невід'ємну кількість кожного товару. Під корисністю набору товарів для гіперспоживача будемо логічно розуміти деяке узагальнене сумарне значення корисності цього самого набору для всіх споживачів ринку.

Бюджетне обмеження задаватиметься нерівністю $p_1x_1 + p_2x_2 \leq J$, де J – бюджет гіперспоживача. Тоді допустимою множиною неокласичної задачі споживання буде множина

$$X = \{x \in C \mid px \leq J\} \quad (6),$$

де $p = (p_1, p_2)$ – вектор цін на товари 1-ого та 2-ого гравця.

Тоді, якщо $U : C \rightarrow R_0^+$ – функція корисності [2], то неокласична задача споживання може бути записана у вигляді :

$$\begin{aligned} U(x) \rightarrow \max \\ px \leq J, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача (7) є задачею нелінійного програмування, змінними в якій є рівні споживання кожного з товарів, в якості цільової функції виступає функція корисності $U(x)$, яка згідно аксіом теорії споживання вважається неперервно диференційованою, має додатні перші і від'ємні другі часткові похідні. Обмеженням в формі нерівності є бюджетне обмеження, де функція обмеження лінійна при заданих цінах, а бюджет гіперспоживача вважається постійною величиною.

Оскільки допустима множина X (6) обмежена і замкнена, то X – компакт. Враховуючи, що цільова функція неперервна, за теоремою Вейрштрасса робимо висновок, що розв'язок задачі (7) існує. Виходячи з строгої увігнутості цільової функції і опуклості допустимої множини, отримуємо, що цей розв'язок єдиний за "локально-глобальною" теоремою [3].

Використовуючи аксіому ненаситності [4] теорії споживання, одержимо змогу зменшити допустиму множину, а з нею і дещо спростити задачу (7) :

$$\begin{aligned} U(x) \rightarrow \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 = J, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язком задачі (8) буде деякий вектор (x_1^*, x_2^*) , що визначає шуканий попит, тобто $x_k^* = X_k$, $k = 1, 2$. Таким чином, невідома функція $F(p_i, p_j, I_i, I_j)$ може задаватись як розв'язок задачі (8) для кожного заданого набору параметрів.

Слід зазначити, що при переході до задачі (8) виникають деякі труднощі. Виявляється, що розмір бюджету J не є відомою величиною, адже наперед невідомий обсяг грошей, який буде витрачено споживачами на задані товари. У загальному випадку ця величина не може бути спрогнозована.

Інша проблема полягає у тому, що в постановці задачі (8) функція $U(x)$ вважається заданою. У реальних ситуаціях вона невідома, але можна запропонувати спосіб її побудови.

Моделювання функції корисності товарів на ринку.

Лема 1. Розв'язок задачі (8) задовольняє рівності

$$U(x_1, x_2) = U(x_1, 0) + U(0, x_2) \quad (9)$$

Доведення. Виходячи з визначення корисності для гіперспоживача як узагальненого сумарного значення корисності для кожного з споживачів, маємо

$$U(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N \bar{U}_k(x_1^k, x_2^k) \quad (10)$$

де N – загальна кількість покупців, $\bar{U}_k$ – функція корисності k -го споживача, (x_1^k, x_2^k) – набір його товарів. Очевидно,

що $x_i = \sum_{k=1}^N x_i^k, i = 1, 2$.

Оскільки товари гравців належать до одного типу, то такі товари взаємозамінні. Це означає, що один споживач обере один із товарів, проігнорувавши другий. Такий характер купівлі товарів на ринку дозволяє розділити гіперспоживача на дві групи: групу, що обере товар першого гравця, і групу, що обере товар другого гравця. Нехай m – кількість споживачів першої групи. Без обмеження загальності, перенумеруємо споживачів таким чином, щоб для усіх номерів

$$\forall k \leq m, \quad x_2^k = 0 \quad \text{і} \quad \forall k > m, \quad x_1^k = 0.$$

З цього випливає, що

$$U(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^m \bar{U}_k(x_1^k, 0) + \sum_{k=m+1}^N \bar{U}_k(0, x_2^k). \quad (11)$$

Покладемо в (11) $x_2 = 0$. З цього випливає, що для $\forall k \quad x_2^k = 0$. А оскільки $\bar{U}_k(0, 0) = 0$, то $U(x_1, 0) = \sum_{k=1}^m \bar{U}_k(x_1^k, 0)$.

Аналогічно $U(0, x_2) = \sum_{k=m+1}^N \bar{U}_k(0, x_2^k)$, звідки випливає твердження леми.

Зробимо заміну $u_1(x_1) = U(x_1, 0)$, $u_2(x_2) = U(0, x_2)$. Звідси отримуємо

$$U(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) \quad (12)$$

З аксіом теорії споживання можна описати властивості функцій u_k , $k = 1, 2$:

1) u_k – неперервно диференційовані, додатно визначені функції, причому $u_k(0) = 0$, $k = 1, 2$.

2) з умови $\frac{du_k}{dx_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k} > 0$ маємо, що u_k – строго зростаючі, $k = 1, 2$. Це означає, що збільшення споживання будь-

якого з товарів приводить до збільшення корисності (аксіома ненажерливості).

3) з умови $\frac{d^2 u_k}{dx_k^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} < 0$ отримуємо, що u_k – строго увігнуті, $k = 1, 2$. Це означає, що збільшення споживання

будь-якого з товарів приводить до зменшення корисності одиниці товару, або, що те саме, кожна наступна одиниця спожитого товару менш корисна, ніж попередня.

Реклама як спосіб впливу на вподобання споживача змінює його уявлення про корисність товару. Отже, функція корисності $U(x)$ повинна враховувати розмір рекламних інвестицій та ефективність реклами, що разом визначають так звану величину обізнаності α_k , $k = 1, 2$, про рекламований продукт серед цільової аудиторії. Будемо вимірювати цю величину за допомогою значень з інтервалу $[0, 1]$. У реальних ситуаціях ця величина може бути спрогнозована шляхом маркетингових досліджень. Спробуємо врахувати дану величину при побудові функції корисності задачі (8).

Корисність товару визначається як загальна потреба споживача в даному товарі з урахуванням вражень від контакту з рекламою. Загальна потреба може бути описана деякими функціями від розміру попиту на товар, тоді як ефект реклами характеризується обізнаністю про товар α_k , $k = 1, 2$. Вважається, що у випадку $\alpha_k = 0$ раціональний попит на k -ий товар буде нульовим (наявні лише спонтанні покупки), тобто $u_k \equiv 0$. Це свідчить про те, що α_k , $k = 1, 2$, є деякими коефіцієнтами функцій u_k . Оскільки необізнаний в k -му товарі споживач не стане його раціональним споживачем, то величини α_k , $k = 1, 2$, є узагальненими (без урахування ірраціонального попиту) оцінками об'єму цільової аудиторії, яка розглядається потенційними споживачами k -го товару. За умов невеликого ірраціонального попиту, який до того ж не піддається розрахункам, можемо знехтувати його впливом. Це дозволяє переписати (12) у вигляді:

$$U(x_1, x_2) = \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2) \quad (13)$$

де функції $f_k(x_k) = \frac{u_k(x_k)}{\alpha_k}$ зберігають всі властивості функцій u_k , $k = 1, 2$.

Формула (13) задає вигляд невідомої функції $U(x)$ з точністю до деяких функцій f_k , $k = 1, 2$. При виконанні всіх умов, що накладаються на f_k і врахувавши, що $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2$, одержимо, що для $U(x)$ виконуватимуться усі умови, які накладаються на функцію корисності. Отже (13) не суперечить аксіомам теорії споживання і може розглядатися як базовий макет шуканої функції корисності для задачі (8).

Функції f_k , $k = 1, 2$, описують темпи падіння корисності одиниці товару з ростом його споживання. Це є характеристикою товару з урахуванням специфіки ринку, на цю величину реклама не здатна вплинути.

Тепер врахуємо особливості ринку, на якому товари обох виробників психологічно сприймаються споживачами однаково. За такої обставини темпи задоволення потреби споживача не залежать від того, який саме товар бере споживач, і звідси можна зробити висновок, що $f_1 = f_2 \equiv f$. Це дозволяє переписати функцію корисності у вигляді

$$U(x_1, x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (14)$$

де f – додатно визначена, неперервно диференційована, строго зростаюча увігнута функція, яка є характеристикою товару на фоні специфіки ринку.

За умов визначення функції f та величин α_k , $k = 1, 2$, функцію $U(x)$ можна вважати заданою. Тоді можна переписати задачу (8) у вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &\rightarrow \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= J, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Остаточно, вважаючи величини Y_1, Y_2 , α_1, α_2 та функцію $f(\cdot)$ обчисленими, а параметри задачі p_1, p_2 та I_1, I_2 заданими, можна зробити висновок, що розв'язок задачі (15) існує і цей розв'язок єдиний.

Нехай пара (x_1^*, x_2^*) – розв'язок, що визначає шуканий попит. Знак рівності в бюджетному обмеженні дозволяє спростити задачу (15), записавши одну із невідомих через іншу

$$\begin{aligned} U_1(x_1) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f\left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right) &\rightarrow \max \\ 0 \leq x_1 &\leq \frac{J}{p_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Задача (16) має розв'язок і цей розв'язок досягається не на кінцях проміжку (очевидно, виходячи з властивостей функції $f(\cdot)$), тоді $\exists x_1^* \in (0, \frac{J}{p_1})$:

$$U_1(x_1^*) = \sup_{x_1 \in [0, \frac{J}{p_1}]} (U_1(x_1)). \quad (17)$$

Продиференціюємо функцію U_1 :

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \alpha_1 f'(x_1) - \alpha_2 \frac{p_1}{p_2} f'\left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right).$$

Прирівнявши похідну до нуля, одержимо рівняння:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} f'(x_1) = \frac{p_1}{p_2} f'\left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right).$$

Доцільно ввести до розгляду коефіцієнти співвідношення цін та рекламних затрат з урахуванням ефективності реклам: $K_p = \frac{p_1}{p_2}$, $K_\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$K_\alpha f'(x_1) = K_p f'\left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right).$$

Нарешті, введемо коефіцієнт співвідношення попитів $K = \frac{K_\alpha}{K_p} = \frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}$. Тоді

$$f'\left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right) = K f'(x_1) \quad (18)$$

Похідна f' є неперервною, а оскільки $\frac{d^2 f}{dx_1^2} < 0$, то функція f' – спадна. Виходячи з цього, проаналізуємо рівняння

(18). Ліва частина строго зростає, права ж строго спадає, а це означає, що рівняння (18) може мати не більше одного кореня. Цей корінь буде критичною точкою функції U_1 . Виходячи з умови (17) бачимо, що шукана точка буде точкою екстремуму. Таким чином рівняння (18) має розв'язок і цей розв'язок буде розв'язком задачі (16).

Таким чином, розв'язання задачі (16) звелось до рівняння (18): дані задачі еквівалентні. Але без визначення вигляду функції $f(\cdot)$, розв'язати рівняння (18) не вдасться.

Побудова функції попиту. Аналітичне визначення функції $f(\cdot)$ є дуже непростою задачею, що потребує глибокого аналізу специфіки товару та стану ринку, з урахуванням його динаміки, але виявляється $f(\cdot)$ можна наблизити. Розглянемо таке наближення:

$$f(x_k) \approx x_k^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}, \lambda \in (1, +\infty), k = 1, 2. \quad (19)$$

Наближення (19) зберігає всі властивості функції $f(\cdot)$:

$$1.) f(0) = 0, f(1) = 1: 0^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = 0, 1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = 1.$$

$$2.) x_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - \text{неперервно диференційована та додатно визначена.}$$

$$3.) f' > 0: \frac{d(x_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}})}{dx_1} = \frac{\lambda-1}{\lambda} x_1^{-\frac{1}{\lambda}} > 0.$$

$$4.) f'' < 0: \frac{d^2(x_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}})}{dx_1^2} = -\frac{\lambda-1}{\lambda^2} x_1^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} < 0.$$

Повернемось до задачі (15)–(18) з урахуванням (19). Неокласична задача споживання буде записана так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} + \alpha_2 x_2^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} &\rightarrow \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= J, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

яка при переході до однієї змінної завдяки обмеженню буде мати вигляд:

$$U_1(x_1) = \alpha_1 x_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} + \alpha_2 \left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \rightarrow \max$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{J}{p_1},$$

а розв'язок отриманої задачі співпадає з розв'язком рівняння

$$K \frac{\lambda-1}{\lambda} x_1^{-\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda-1}{\lambda} \left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

В такому вигляді це рівняння може бути розв'язане в такий спосіб. З попереднього рівняння маємо

$$K \left(\frac{J - p_1 x_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = x_1^{\frac{1}{\lambda}}$$

Оскільки ліва і права частина додатні, то множина розв'язків не зміниться при піднесенні лівої та правої частини до степені λ :

$$K^\lambda \frac{J - p_1 x_1}{p_2} = x_1.$$

Звідки $x_1 = \frac{K^\lambda J}{p_1 K^\lambda + p_2}$ – розв'язок рівняння (18), він же шуканий x_1^* – розв'язок задачі (16).

Тепер неважко відшукати x_2^* і таким чином одержати розв'язок задачі (15):

$$x_2^* = \frac{J - p_1 x_1^*}{p_2} = \frac{J(1 - \frac{p_1 K^\lambda}{p_1 K^\lambda + p_2})}{p_2} = \frac{J(p_2 + p_1 K^\lambda - p_1 K^\lambda)}{p_2(p_1 K^\lambda + p_2)} = \frac{J p_2}{p_2(p_1 K^\lambda + p_2)} = \frac{J}{p_1 K^\lambda + p_2}$$

Розв'язок задачі (15) в розгорнутому вигляді запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x_1^* = J \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^\lambda / (p_1 \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^\lambda + p_2) \\ x_2^* = J / (p_1 \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^\lambda + p_2) \end{cases} \quad (20)$$

Отже, отримано розв'язок змодельованої задачі визначення функції попиту з точністю до параметра λ . З метою його обчислення, звернемо увагу на одну особливість, що впливає з (20). Маємо:

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = K^\lambda = \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^\lambda, \quad (21)$$

звідки отримуємо

$$\lambda = \log_K \left(\frac{x_1^*}{x_2^*} \right). \quad (22)$$

Отримані значення $X_k = x_k^*$, $k = 1, 2$, визначають попит на продукцію k -го гравця, тому параметр λ може бути легко обрахований за формулою (22) на основі статистичних даних про об'єми реалізації, ціни та рекламних витрат гравців за попередні періоди.

Остаточню, розв'язок вигляду (20) аналітично визначає попит на товари з точністю до J . При цьому від цієї залежності також можна позбавитись, якщо врахувати, що на товар певного типу загальний попит є прогнозованою величиною. В загальному випадку вигляд загального попиту може бути формалізовано так:

$$X = N_{\max} m \varepsilon, \quad (23)$$

де X – загальний попит на товар, $N_{\max}$ – об'єм цільової аудиторії, m – середня кількість товару для задоволення потреби одного споживача, ε – відсоток споживачів, що придбають товар. Величини $N_{\max}$, m , ε – прогнозовані, вони можуть бути визначені шляхом маркетингових досліджень.

Таким чином, можна вважати величину X відомою, а з урахуванням (20) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = X, \\ \frac{X_1}{X_2} = K^\lambda, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд

$$\begin{cases} X_1 = \frac{K^\lambda X}{1 + K^\lambda}; \\ X_2 = \frac{X}{1 + K^\lambda}. \end{cases} \quad (23)$$

Вплив реклами на попит. В умовах запропонованої моделі вплив реклами на попит визначається за допомогою величин α_k , але для використання отриманого попиту з (23) у системі (1) потрібно отримати залежність α_k від I_k , $k = 1, 2$.

Отже, припустимо, що α_k^0 – обізнаність про k -ий товар на ринку на момент початку рекламної кампанії, α_k^1 – обізнаність на момент завершення кампанії, $k = 1, 2$. Тоді величину $\alpha_k = \frac{\alpha_k^0 + \alpha_k^1}{2}$, $k = 1, 2$, можна розглядати як середнє значення рівня обізнаності про k -ий товар серед цільової аудиторії на час проведення рекламної кампанії. Очевидно, що $0 \leq \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2$. Значення α_k^0 , $k = 1, 2$, обраховуються шляхом маркетингових досліджень, тоді як $\alpha_k^1 = \alpha_k^1(I_k, \alpha_k^0)$, $k = 1, 2$, є розв'язком маркетингової задачі, який може бути знайдений одним із методів медіа-планування.

Розглядаючи задачу оптимізації рекламного бюджету, обов'язково потрібно розглянути задачу оптимізації розподілу рекламних інвестицій між медіа-ресурсами. Ця задача є такою задачею оптимізації, яка досі не розв'язана в повному обсязі. Суть задачі полягає в розподіленні рекламного бюджету при заданому розмірі та фіксованих медіа-ресурсах таким чином, щоб максимізувати величини α_k , $k = 1, 2$. В даній роботі не розглядається розв'язання такої задачі, увагу зосереджено лише на способі аналітичного визначення функції $\alpha_k^1(I_k, \alpha_k^0)$, $k = 1, 2$.

Величину $\alpha_k^1 = \alpha_k^1(I_k, \alpha_k^0)$, $k = 1, 2$, можна наближено спрогнозувати за допомогою еластичності. Нехай ε – еластичність реклами по відношенню до обізнаності про рекламований товар:

$$\varepsilon = \frac{I}{\alpha} \frac{d\alpha}{dI} \approx \frac{I}{\alpha} \frac{\alpha - I^0}{I - I^0} \quad (24)$$

Маючи статистичні дані щодо попередніх періодів, за незначних змін рекламного бюджету величину еластичності можна наближено обрахувати за допомогою (24). Нехтуючи похибкою дискретизації, запишемо наближене рівняння

$$\varepsilon_k \approx \frac{I_k}{\alpha_k^1} \frac{\alpha_k^1 - \alpha_k^0}{I_k - I_k^0}, \quad k = 1, 2,$$

розв'язуючи яке відносно α_k^1 , отримуємо :

$$\alpha_k^1 \approx \frac{I_k \alpha_k^0}{I_k(1 - \varepsilon) + \varepsilon I_k^0}, \quad k = 1, 2,$$

де I_k^0 – розмір попереднього рекламного бюджету, $k = 1, 2$, ε – еластичність реклами по відношенню до обізнаності, що визначається на основі статистичних даних за формулою (24).

Тоді

$$\alpha_k = \frac{\alpha_k^0 + \alpha_k^1}{2} \approx \frac{\alpha_k^0}{2} \left(1 + \frac{I_k}{I_k(1 - \varepsilon) + \varepsilon I_k^0} \right), \quad k = 1, 2. \quad (25)$$

Оптимізація рекламної політики. Нарешті можна перейти до задачі (1) з уже відомим аналітичним представленням функції попиту:

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{K^\lambda X}{1 + K^\lambda} (p_1 - c_1) - I_1 \\ Y_2 = \frac{X}{1 + K^\lambda} (p_2 - c_2) - I_2 \end{cases}, \quad (26)$$

де $K = \frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}$, $X = N_{\max} m \varepsilon$, λ визначається за допомогою статистичних даних попередніх кампаній за формулою

$\lambda = \log_K \left(\frac{X_1}{X_2} \right)$, α_k обчислюється за формулою (25), де I_k^0 – розмір попереднього рекламного бюджету, $k = 1, 2$,

ε – еластичність реклами по відношенню до обізнаності.

Формула (26) є прогнозованим прибутком обох гравців. Це дозволяє перейти до задачі оптимізації рекламних інвестицій, яка нерозривно зв'язана з задачею цінової оптимізації.

Зафіксуємо ціну і спробуємо визначити оптимальну величину витрат на рекламу. Для цього диференціюємо (26) по величинам I_1, I_2 і прирівнюємо похідні до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial I_1} = 0 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial I_2} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Розв'язком системи (27) будуть деякі точки (I_1^*, I_2^*) , що відповідають точкам рівноваги Неша по відношенню до рекламної стратегії при фіксованих цінах, а шукана оптимальна рекламна стратегія визначається системою (26).

Остаточно отримуємо правило побудови оптимальних стратегій, яке формально запишемо у вигляді

$$s_k^* \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial Y_k}{\partial I_k} = 0 \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (28)$$

Стратегія s_k^* максимізує прибуток k -го гравця, $k = 1, 2$, за одним виключенням. Мова йде про випадок, коли гра для k -го гравця полягає не в знаходженні $\sup_{p_k, I_k} Y_k$. За умов, якщо один з гравців є крупним товаровиробником, стратегії поведінки можуть бути записані у вигляді $\begin{cases} Y_k \rightarrow \max \\ Y_l \rightarrow \min, k \neq l \end{cases}$. У цьому випадку такий гравець витрачає на рекламу

кошти, які не можуть собі дозволити інші гравці, зменшуючи свій прибуток за рахунок значних рекламних видатків, але, в той же час, зменшуючи й прибутки конкурентів за рахунок відчутного падіння попиту.

За результатами аналітичного дослідження проведено обчислювані експерименти, в яких розглянуто ряд академічних прикладів. Отримані чисельні результати дозволили зробити висновок про конструктивність розглянутого підходу для моделювання і дослідження процесів розподілу та оптимізації рекламного бюджету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шведун В. А. Разработка методического обеспечения формирования совокупного рекламного бюджета предприятия // Бизнес Информ. – 2008. – № 9. – С. 60–68.
2. Долан Э., Линдсей Д. Микроэкономика. – СПб.: Санкт-Петербург-оркестр, 1994. – 537с.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 607с.
4. Макконнелл К., Брю С. Экономикс. – М.: ИНФРА-М, 2003. – С.983.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.16

Науменко Ю. А., асп.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМЫ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ТОВАРОПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ

В статье предложена и исследована модель оптимизации рекламного бюджета, рекламные расходы в которой рассмотрены в качестве инвестиций. Получена задача оптимизации на основе заданной функции полезности. Проведено моделирование построения функции полезности, предложен способ формирования функции спроса на товары двух производителей. Проведено аналитическое исследование влияния рекламы на спрос. На тестовых примерах получены числовые расчеты эффективности рекламного бюджета.

Ключевые слова: модель, реклама, распределение бюджета, эффективность, игровая задача, функция полезности, спрос.

Naumenko Yu. A., postgraduate,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

RESEARCH OF THE EFFECTIVENESS OF ADVERTISING IN CONDITIONS OF THE MANUFACTURERS COMPETITION

The article proposes a model to optimize the advertising budget. The advertising costs are considered as an investment. An optimization problem based on a given utility function was received. The construction of the utility function was modeled, a method to form the function of demand for products of two manufacturers was proposed. The analysis of the effect of advertising on demand was made. As a conclusion, numerical calculations which provide the effective advertising budget were done.

Keywords: model, advertising, budget allocation, efficiency, game problem, the utility function, demand.

УДК 571.929.4

В. Новотна, Ph.D.,
Б. Пужа, doc. RNDr, CSc.
Технологический университет, Брно, Чехия;
И. А. Джалладова, д-р физ.-мат. наук, проф.
КНЭУ имени Вадима Гетьмана, Киев
Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ВЛИЯНИЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ НА ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Одной из актуальных задач в настоящее время является умение оценивать характер воздействия человека на природу и масштабы его последствий, с целью минимизации вредных последствий антропогенных нагрузок. В этой ситуации наиболее многообещающим инструментом является математическое моделирование. Под математическим моделированием процессов будем понимать составление дифференциальных уравнений исследуемых процессов и численное решение их с выявлением характеристик поведения при различных значениях параметров системы. Трудности при математическом моделировании динамических процессов в биологии, экономике и экологии имеют свои особенности [1–3]. Составление уравнений динамики процессов связано, как с особенностями процессов, так и с возможностями математического аппарата. В настоящей работе при составлении математических моделей используются подходы, предложенные в [4]. Кроме того, авторы считают, что, в отличие от "ньютоновской динамики мгновенного действия", в экономических, экологических и социальных процессах существенную роль играет "эффект запаздывания" [5, 6]. При наличии достаточно большой величины запаздывания процесс может быть дестабилизирован. Предложены общие подходы исследования динамики моделей, записанных в виде дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, популяция, запаздывание, устойчивость, метод функций Ляпунова.

1. Модели динамики популяций на плоскости. При составлении математических моделей в биологии, экономике, динамике популяций, социальных процессах используют подход, состоящий в предположении, что скорость роста популяции пропорциональна ее количеству.

1.1. Первой моделью такого вида (для динамики популяций) была модель Мальтуса ("Опыт о законе народонаселения"). Модель имела вид скалярного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = kx(t), \quad x(t) \in R^1, \quad t \geq t_0. \quad (1.1)$$

К сожалению, как и для всех линейных моделей, возможности ее использования были значительно ограничены. В дальнейшем при составлении более сложных моделей на плоскости перешли от скалярного уравнения к векторно-матричному

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \quad t \geq t_0. \quad (1.2)$$

Недостатком линейной модели (1.2) было представление решений в виде функций экспоненциального вида. Модель могла достаточно адекватно отображать процесс только на небольшом промежутке времени.

1.2. Дальнейшим развитием математического моделирования динамических процессов в экологии, экономике, динамике популяций явилось использование квазилинейных моделей. В квазилинейных моделях коэффициент линейной части являлся функцией от фазовой переменной. В частности, для скалярной модели динамики популяций (1.1) модификацией являлось введение эффекта "насыщения" и коэффициент $k(x)$ являлся функцией фазовой переменной, причем такой, что $k(x)x > 0$ лишь при $0 \leq x \leq N$, где N - максимально допустимое количество особей. Одним из типов уравнений, при которых функция $k(x)x$ имела вид перевернутой параболы, являлась модель Ферхюльста, в которой

$$k(x)x = (\gamma - \delta x)x, \quad x \in R^1. \quad (1.3)$$

Модель (1.3) имела два положения равновесия $x_1 \equiv 0$ и $x_2 \equiv \gamma/\delta$. Если параметры были таковы, что $\gamma > 0$, $\delta > 0$, то нулевое положение равновесия являлось неустойчивым, а положение равновесия $x_2 \equiv \gamma/\delta$ устойчивым. Увеличение числа переменных приводило к моделям с квадратичными правыми частями более общего вида

$$\dot{x}_1(t) = [\lambda_1 + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)]x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = [\lambda_2 + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)]x_2(t).$$

Системы такого вида могли иметь несколько состояний равновесия. Однако интерес представляли положения равновесия, находящиеся в первом квадранте.

1.3. Еще одним из направлений составления нелинейных моделей являлись системы с дробно-рациональной правой частью

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\lambda_2 + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)}{1 + b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t)}x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \frac{\lambda_2 + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)}{1 + b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t)}x_2(t).$$

Дальнейшие обобщения привели к развитию квазилинейных математических моделей. В частности, развитие математических моделей динамики популяций для системы на плоскости привело к системам "квазилинейных" дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t), \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} a(x(t)) & b(x(t)) \\ c(x(t)) & d(x(t)) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где функции $a(x(t))$, $b(x(t))$, $c(x(t))$, $d(x(t))$ имели вид линейных, квадратичных или дробно-рациональных зависимостей.

В работе [4] рассматривалась математическая модель динамики популяций, описываемая системой вида (1.4) при следующих предположениях: $x_1(t)$ – численность популяции жертвы, $x_2(t)$ – численность популяции хищника, $a(x_1(t)) = r[1 - x_1(t)/K]$ – удельная скорость роста изолированной популяции жертвы, $b(x_1(t)) = bx_1(t)/[1 + Ax_1(t)]$ – трофическая функция хищника, $c(x_2(t)) = c - gx_2(t)$ – удельная скорость вымирания популяции хищника, Величины r , K , b , A , g являлись постоянными параметрами.

В работе [7] приводилось предположение о необходимости введения "фактора последствия". Действительно, в отличие от механических систем, в биологических, экономических и социальных процессах текущее состояние существенно зависит от предистории и более адекватными являются модели, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием и нейтрального типа. Рассматривалась система уравнений

$$\dot{x}_1(t) = \left[a \frac{K - x_1(t - \tau)}{K} - bx_2(t - \tau) \right] x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = -[c - dx_1(t - \tau)] x_2(t).$$

Параметры системы представляли собой коэффициенты взаимодействия особей популяций. Система имела три положения равновесия:

$$M_1(x_1^1, x_2^1), \quad x_1^1 = 0, \quad x_2^1 = 0; \quad M_2(x_1^2, x_2^2), \quad x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = a/b; \quad M_3(x_1^3, x_2^3), \quad x_1^3 = c/d, \quad x_2^3 = a(dK - c)/bdK.$$

Исследование устойчивости положений равновесия проводилось с использованием метода линеаризации. Проводилась оценка области устойчивости, аппаратом исследования был выбран второй метод Ляпунова. Проведено исследование динамики стационарного положения равновесия системы при произвольном запаздывании $\tau > 0$ и при запаздывании $\tau < \tau_0$, зависящем от параметров системы. Получена оценка сходимости (расходимости) в локальной окрестности положений равновесия.

Квазилинейные системы общего вида записывались в виде

$$\dot{x}(t) = A(x(t - \tau))x(t), \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(x(t - \tau)) = \begin{bmatrix} a(x(t - \tau)) & b(x(t - \tau)) \\ c(x(t - \tau)) & d(x(t - \tau)) \end{bmatrix}.$$

2. Системный подход исследования нелинейных моделей. При исследовании моделей динамических систем, описанных с использованием нелинейных дифференциальных уравнений, важным является качественное поведение системы в целом. В отличие от линейных систем, одни траектории могут быть устойчивыми, другие нет. Отсутствует само понятие "устойчивая система". Имеются понятия "грубая система", "структурно устойчивая" и др. Качественное поведение системы "в целом" (на плоскости) определяется особыми точками и периодическими траекториями. Причем, если нахождение особых точек сводится к решению систем алгебраических уравнений, то задача нахождения периодических траекторий нуждается в дополнительных исследованиях [8]. Для систем большей размерности возможны более сложные предельные структуры ("странные аттракторы"). Еще более сложные явления возможны в функционально-дифференциальных уравнениях, одним из простейших видов которых являются уравнения с одним постоянным запаздыванием.

В настоящей работе предлагается подход исследования нелинейных динамических систем с одним постоянным запаздыванием, описывающих модели динамики популяций на плоскости, основанный на нахождении особых точек и предельных циклов системы, линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности каждой из ее особенностей, исследовании и построении фазового портрета линеаризованных подсистем и "сшивании" отдельных траекторий каждой из подсистем в единый фазовый портрет системы в целом.

Пусть система двух стационарных уравнений с запаздыванием на плоскости имеет вид

$$\dot{y}_1(t) = P_0(y_1(t), y_2(t), y_1(t - \tau), y_2(t - \tau)), \quad \dot{y}_2(t) = Q_0(y_1(t), y_2(t), y_1(t - \tau), y_2(t - \tau)). \quad (2.1)$$

Система уравнений с запаздыванием имеет те же положения равновесия, что и система без запаздывания. Поэтому особые точки (точки покоя) определяются при решении системы уравнений

$$P_0(y_1, y_2, y_1, y_2) = 0, \quad Q_0(y_1, y_2, y_1, y_2) = 0. \quad (2.2)$$

Пусть решением системы (2.2) являются точки $M_i(y_1^i, y_2^i)$, $i \in I$. Исследование каждой из них будем проводить с использованием метода линейного приближения. Рассмотрим особую точку $M_0(y_1^0, y_2^0)$. Произведем замену

$$y_1(t) = x_1(t) + y_1^0, \quad y_2(t) = x_2(t) + y_2^0. \quad (2.3)$$

После подстановки замены (2.3) в систему (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= P_0(x_1(t) + y_1^0, x_2(t) + y_2^0, x_1(t - \tau) + y_1^0, x_2(t - \tau) + y_2^0), \\ \dot{x}_2(t) &= Q_0(x_1(t) + y_1^0, x_2(t) + y_2^0, x_1(t - \tau) + y_1^0, x_2(t - \tau) + y_2^0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначив

$$P_0(x_1(t) + y_1^0, x_2(t) + y_2^0, x_1(t - \tau) + y_1^0, x_2(t - \tau) + y_2^0) = P(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)),$$

$$Q_0(x_1(t) + y_1^0, x_2(t) + y_2^0, x_1(t - \tau) + y_1^0, x_2(t - \tau) + y_2^0) = Q(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)),$$

получим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= P(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= Q(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)).\end{aligned}$$

Или в векторно-матричном виде

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)), \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad F(x(t), x(t - \tau)) = \begin{pmatrix} P(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)) \\ Q(x_1(t), x_2(t), x_1(t - \tau), x_2(t - \tau)) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Причем

$$P(0, 0, 0, 0) = 0, \quad Q_0(0, 0, 0, 0) = 0,$$

т.е. особой точкой, соответствующей $M_0(y_1^0, y_2^0)$ будет уже нулевая $O_0(0, 0)$. При ее исследовании будем использовать метод линейного приближения. Система линейного приближения в окрестности особой точки $O_0(0, 0)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= P_{x_1(t)}(0, 0, 0, 0)x_1(t) + P_{x_2(t)}(0, 0, 0, 0)x_2(t) + P_{x_1(t-\tau)}(0, 0, 0, 0)x_1(t - \tau) + P_{x_2(t-\tau)}(0, 0, 0, 0)x_2(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) &= Q_{x_1(t)}(0, 0, 0, 0)x_1(t) + Q_{x_2(t)}(0, 0, 0, 0)x_2(t) + Q_{x_1(t-\tau)}(0, 0, 0, 0)x_1(t - \tau) + Q_{x_2(t-\tau)}(0, 0, 0, 0)x_2(t - \tau).\end{aligned}$$

Или в векторно-матричном виде

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 x(t - \tau). \quad (2.6)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x(t - \tau) = \begin{pmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= P_{x_1(t)}(0, 0, 0, 0), \quad a_{12} = P_{x_2(t)}(0, 0, 0, 0), \quad b_{11} = P_{x_1(t-\tau)}(0, 0, 0, 0), \quad b_{12} = P_{x_2(t-\tau)}(0, 0, 0, 0), \\ a_{21} &= Q_{x_1(t)}(0, 0, 0, 0), \quad a_{22} = Q_{x_2(t)}(0, 0, 0, 0), \quad b_{21} = Q_{x_1(t-\tau)}(0, 0, 0, 0), \quad b_{22} = Q_{x_2(t-\tau)}(0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Исследование устойчивости положения равновесия линеаризованной системы (2.6) можно проводить с использованием двух подходов. Во-первых, с использованием характеристического уравнения системы (2.6), а именно

$$\det(A_0 + e^{-\lambda\tau} B_0 - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} a_{11} + e^{-\lambda\tau} b_{11} - \lambda & a_{12} + e^{-\lambda\tau} b_{12} \\ a_{21} + e^{-\lambda\tau} b_{21} & a_{22} + e^{-\lambda\tau} b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + [p_{10} + e^{-\lambda\tau} p_{11}] \lambda + [p_{20} + e^{-\lambda\tau} p_{21} + e^{-2\lambda\tau} p_{22}] = 0, \quad (2.7)$$

$$p_{10} = a_{11} + a_{22}, \quad p_{11} = b_{11} + b_{22}, \quad p_{20} = a_{11}a_{22}, \quad p_{21} = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}, \quad p_{22} = b_{11}b_{22}.$$

Устойчивость нулевого положения равновесия определяется условием отрицательности действительных частей всех корней квазиполинома. Однако, исследование нулей характеристического квазиполинома (2.7) в общем случае является достаточно трудоемкой задачей. Уравнение имеет счетное число корней и в аналитическом виде, в общем случае, не разрешимо.

Альтернативой этому подходу является второй метод Ляпунова. Суть его заключается в исследовании поведения некоторой наперед заданной функции (функционала) вдоль решений системы в окрестности положения равновесия. Для систем с запаздыванием возможны два подхода, а именно, метод конечномерных функций Ляпунова с дополнительным условием Б.С.Разумихина и метод функционалов Ляпунова-Красовского.

3. Метод функций Ляпунова. Рассмотрим метод функций Ляпунова с условием Б.С.Разумихина [9-11]. Функция Ляпунова будет искажаться в виде квадратичной формы $V(x) = x^T H x$. Если матрица H положительно определенная, то функция является положительно определенной и для нее справедливы двусторонние оценки

$$\lambda_{\min}(H) |x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H) |x|^2, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ экстремальные собственные числа симметричной, положительно определенной матрицы

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix},$$

Равные

$$\lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2} \left[(h_{11} + h_{22}) + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right], \quad \lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2} \left[(h_{11} + h_{22}) - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right]. \quad (3.1)$$

Полная производная функции Ляпунова $V(x)$ вдоль решений нелинейной системы уравнений возмущений (2.5) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{x}^T(t)Hx(t) + x^T(t)Hx(t) = F^T(x(t), x(t-\tau))Hx(t) + x^T(t)HF(x(t), x(t-\tau)).$$

Перепишем систему (2.5), выделив линейную часть,

$$\dot{x}(t) = (A_0 + B_0)x(t) + B_0[x(t-\tau) - x(t)] + [F(x(t), x(t-\tau)) - (A_0x(t) + B_0x(t-\tau))]. \quad (3.2)$$

Тогда полную производную функции Ляпунова в силу системы (3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= (A_0 + B_0)^T Hx(t) + x^T(t)H(A_0 + B_0) + 2x^T(t)HB_0[x(t-\tau) - x(t)] + \\ &+ 2x^T(t)H[F(x(t), x(t-\tau)) - (A_0x(t) + B_0x(t-\tau))]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Известно [5,6,10,11], что необходимым условием асимптотической устойчивости линейных систем с запаздыванием является асимптотическая устойчивость системы без запаздывания

$$\dot{x}(t) = (A_0 + B_0)x(t). \quad (3.4)$$

А в этом случае, для произвольной положительно определенной матрицы C_0 матричное уравнение Ляпунова

$$(A_0 + B_0)^T H + H(A_0 + B_0) = -C_0 \quad (3.5)$$

имеет единственное решение – положительно определенную матрицу $H = H_0$.

Перепишем исходную нелинейную систему (2.5) в виде (3.2). Поскольку A_0 и B_0 матрицы линейной части, то нелинейная часть системы удовлетворяет условиям

$$|F(x(t), x(t-\tau)) - A_0x(t) - B_0x(t-\tau)| \leq N_1|x(t)|^{1+\alpha} + N_2|x(t-\tau)|^{1+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (3.6)$$

Пусть матрица $A_0 + B_0$ линейной части асимптотически устойчивая. Тогда, выбрав матрицу C_0 и решив матричное уравнение Ляпунова (3.5), перепишем полную производную (3.3) функции Ляпунова $V_0(x) = x^T H_0 x$ в силу системы (3.2) в виде

$$\frac{d}{dt}V_0(x(t)) = -x^T(t)C_0x(t) + 2x^T(t)H_0B_0[x(t-\tau) - x(t)] + 2x^T(t)H_0[F(x(t), x(t-\tau)) - (A_0x(t) + B_0x(t-\tau))].$$

Первое слагаемое характеризует "степень устойчивости" нулевого положения равновесия, второе слагаемое характеризует "степень влияния запаздывания линейной части", третье – "влияние нелинейной части".

Суть условия Б. С. Разумихина [9, 10, 11] заключается в том, что полная производная функции Ляпунова $V(x(t))$ в момент $t = T$ вычисляется при условии, что состояние системы $x(T - \tau)$ в предшествующий момент времени находится внутри поверхности уровня функции Ляпунова (решение подходит к поверхности уровня функции Ляпунова "изнутри").

Аналитически, это означает следующее. Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ поверхность уровня $\partial V^\alpha = \{x \in R^n : V(x) = \alpha\}$ функции Ляпунова $V(x) = x^T H x$ находится внутри сферы $U_\varepsilon = \{x \in R^n : |x| = \varepsilon\}$. Поместим внутри поверхности уровня ∂V^α сферу $U_{\delta(\varepsilon)} = \{x \in R^n : |x| = \delta(\varepsilon)\}$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\phi(H_0)}$, $\phi(H_0) = \lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0)$, где $\lambda_{\max}(H_0)$, $\lambda_{\min}(H_0)$ экстремальные собственные числа симметричной, положительно определенной матрицы H_0 . Пусть начальные условия $x(t) = \phi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ решения $x(t)$ находятся внутри шара $U_{\delta(\varepsilon)}$. Тогда, в силу непрерывности, при некотором $0 \leq t \leq T$ решение $x(t)$ будет находиться внутри поверхности уровня ∂V^α . Покажем, что оно будет находиться внутри и при $t > T$. Пусть, от противного, это не так и при некотором $t = T$ решение $x(t)$ достигнет поверхности уровня, т.е. $x(T) \in \partial V^\alpha$. Тогда

$$\lambda_{\min}(H_0)|x(T - \tau)|^2 \leq V_0(x(T - \tau)) < V_0(x(T)) \leq \lambda_{\max}(H_0)|x(T)|^2.$$

Отсюда получаем

$$|x(T - \tau)| < \phi(H_0)|x(T)|, \quad \phi(H_0) = \lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0). \quad (3.7)$$

Рассмотрим каждое из трех слагаемых, входящих в полную производную функции Ляпунова.

3.1. Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку матрица C_0 положительно определенная, то

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) \leq -\lambda_{\min}(C_0)|x(T)|^2 + 2|H_0B_0||x(T)||x(T) - x(T - \tau)| + 2|H_0||x(T)||F(x(T), x(T - \tau)) - A_0x(T) - B_0x(T - \tau)|.$$

3.2. Рассмотрим второе слагаемое. Можно получить условия устойчивости, не зависящие от запаздывания, и зависящие от него [10,11]. Рассмотрим условия, равномерные по запаздыванию. По предположению

$$|x(T) - x(T - \tau)| < (1 + \phi(H_0))|x(T)|.$$

Пусть существует положительно определенная матрица H_0 , при которой выполняется неравенство

$$L(H_0) = \lambda_{\min}(C_0) - 2|H_0 B_0|(1 + \phi(H_0)) > 0. \quad (3.8)$$

Тогда для полной производной функции Ляпунова в момент $t = T$ можно записать

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) < -[\lambda_{\min}(C_0) - L(H_0)]|x(T)|^2 + 2|H_0||x(T)|\|F(x(T), x(T-\tau)) - A_0 x(T) - B_0 x(T-\tau)\|.$$

3.3. Рассмотрим третье слагаемое. Поскольку оно определяет нелинейную часть, то его можно сделать достаточно малым за счет близости к началу координат. Согласно методу линеаризации, имеет место неравенство

$$\|F(x(T), x(T-\tau)) - A_0 x(T) - B_0 x(T-\tau)\| \leq N_1 |x(T)|^{1+\alpha} + N_2 |x(T-\tau)|^{1+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Вновь используя условие Б. С. Разумихина (3.7), для оценки полной производной получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) < -[\lambda_{\min}(C_0) - L(H_0)]|x(T)|^2 + 2|H_0|[N_1 |x(T)|^\alpha + N_2 \phi^{1+\beta}(H)|x(T)|^\beta]|x(T)|^2.$$

Обозначим

$$\gamma_0 = \lambda_{\min}(C_0) - L(H_0), \quad \gamma_1 = 2|H_0|N_1, \quad \gamma_2 = 2|H_0|N_2. \quad (3.9)$$

Тогда будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) < -(\gamma_0 - \gamma_1 |x(T)|^\alpha - \gamma_2 |x(T)|^\beta)|x(T)|^2.$$

И в области

$$D_\gamma = \{x \in R^n : \gamma_1 |x|^\alpha + \gamma_2 |x|^\beta < \gamma_0\} \quad (3.10)$$

полная производная квадратичной функции Ляпунова будет отрицательно определенной. Это означает, что вектор скорости движения на поверхности уровня функции Ляпунова будет направлен внутрь, т.е. допущение о достижении решением $x(t)$ в момент $t = T$ поверхности уровня неверно. Таким образом, нулевое решение нелинейной системы устойчиво по Ляпунову. И имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть матрицы A_0 и B_0 линеаризованной системы (2.6) таковы, что $A_0 + B_0$ асимптотически устойчивая и существует положительно определенная матрица H_0 , являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова (3.5), при которой выполняется неравенство (3.8). Тогда нулевое решение нелинейной системы (2.5) устойчиво по Ляпунову. Область устойчивости содержится внутри области $D_\gamma = \{x \in R^n : \gamma_1 |x|^\alpha + \gamma_2 |x|^\beta < \gamma_0\}$, где величины $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ определены в (3.9). Причем для произвольного решения $x(t)$ нелинейной системы (2.5) при $t > 0$ будет выполняться $|x(t)| < \varepsilon$, лишь только начальные условия удовлетворяют условиям $|x(t)| < \delta(\varepsilon)$, $-\tau \leq t \leq 0$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\phi(H_0)}$, $\phi(H_0) = \lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0)$.

Выводы. В работе проведено исследование математической модели динамики популяции. Модель описана в виде системы двух дифференциальных уравнений с одним постоянным запаздыванием. Определена особая точка, лежащая в первом квадранте плоскости. Проведено исследование устойчивости положения равновесия. Исследование устойчивости проводится с использованием метода функций Ляпунова с условием Б. С. Разумихина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., Наука, 1976. – 286 с.
2. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. – В. кн.: Проблемы кибернетики, в.25, М., Наука, 1972. – 100–106 С.
3. Смит Дж. Модели в экологии. – М., Мир, 189 с.
4. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М., Наука, 1985. – 181 с.
5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1970. – 240 с.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., Мир, 1964. – 421 с.
7. Гаркуша Н. І. Отримання оцінки області стійкості моделі популяції з післядією // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 2015. – С. 107–111.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л., Гос. издат. техн.-теор. лит., 1949. – 550 с.
9. Разумихин Б. С. Устойчивость эрдитарных систем. – М.: Наука, 1988. – 112 с.
10. Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.
11. Хусаинов Д. Я., Диблик Й., Ружичкова М. Линейные динамические системы с последствием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. – Киев, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, : ГП Информационно-аналитическое агентство, 2015. – 252 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.16

Новотна В., Ph.D., Пужа Б., doc. RNDr., CSc.

Технологічний університет, Брно, Чехія;

Джалладова И. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., КНЕУ імені Вадима Гетьмана, Київ

Хусайнов Д. Я., д-р фіз.-мат. наук, проф., КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ВПЛИВ ПІСЛЯДІЇ НА ОЦІНКИ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Однією з актуальних задач сучасності є уміння оцінювати характер взаємодії людини на природу та величини її післядії, з метою мінімізації шкідливих явищ та навантажень. В цій ситуації найбільш вагомим інструментом є математичне моделювання. Під математичним моделюванням процесів будемо розуміти складання диференціальних рівнянь процесів, що досліджуються, їх чисельне розв'язування з виявленням характеристик поведінки при різних значеннях параметрів системи. Труднощі при математичному моделюванні динамічних процесів в біології, економіці та екології мають свої особливості [1–3]. Складання рівнянь динаміки процесів пов'язане, як з особливостями процесів, так і з можливостями математичного апарату. В запропонованій роботі при складанні математичних моделей використовуються підходи, запропоновані в [4]. Крім того, автори вважають, що, на відміну від "ньютонівської динаміки миттєвої взаємодії", в економічних, екологічних та соціальних процесах важливе значення відіграє "ефект запізнення" [5, 6]. При наявності достатньо великої величини запізнення процес може бути дестабілізованим. Запропоновані загальні підходи дослідження динаміки моделей, які записані у вигляді диференціальних рівнянь з запізненням.

Ключові слова: математична модель, диференціальні рівняння, популяція, запізнення, стійкість, метод функцій Ляпунова.

Novotna V., P.Hd., Puzha B., P.Hd., doc. RNDr., CSc.

Brno University of Technology;

Irada Dzhalladova, Dr. of Sc., prof., Kijv Vadim Getman National Economical University of Kijv

D.Khusainov, Dr. of Sc., prof., Kijv Taras Shevchenko National University of Kijv,

INFLUENCE DELAY EFFECTS IN THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS IN NONLINEAR SYSTEMS

Now One of the actual tasks is the ability to assess the nature of the human impact on the nature and extent of its effects, in order to minimize the harmful effects of anthropogenic pressures. In this situation, the most promising is a tool for mathematical modeling. Under mathematical modeling processes we mean drawing up of the processes of differential equations and their numerical solution with the identification of the characteristics of behavior for different values of the system parameters. The difficulties in the mathematical modeling of dynamic processes in biology, economics and ecology have their own characteristics [1–3]. Writing equations related to process dynamics as a feature of the process, and with the possibilities of the mathematical apparatus. In this paper, in the preparation of mathematical models used approaches proposed in [4]. In addition, the authors believe that, in contrast to the "Newtonian dynamics instant action" in economic, environmental and social processes plays a significant role "lag effect" [5, 6]. At the sufficiently large value of the delay process can be destabilized. Proposed common approaches study the dynamics of models written in the form of differential equations with delay.

Keywords: mathematical modeling, differential equations, populations, delay, stability, Lyapunov function method

Work is conducted under the argument on scientific cooperation between the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv and the Faculty of Business and Management Brno University of Technology 04.08.2016.

This paper was supported by the Czech Science Foundation: The project: "Development of new methods of solving dynamic models of corporate processes management", No.: GA16-03796S.

УДК 004.655 (ст.. 32 сначала)

О. С. Сенченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

КРИТЕРІЇ ДИСТРИБУТИВНОСТІ ТА ПЕРЕСТАВНОСТІ ОПЕРАЦІЇ ПРОЕКЦІЇ В ТАБЛИЧНИХ АЛГЕБРАХ

В роботі досліджено властивості операції проекції в табличних алгебрах. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких у табличних алгебрах операція проекції є дистрибутивною відносно операцій перетину та різниці таблиць, а також критерій переставності операцій проекції та активного доповнення. Ці умови виражаються в термінах активних доменів таблиць та є природними.

Ключові слова: таблична алгебра, проекція, база даних.

Вступ. Процес інформатизації суспільства має об'єктивний характер. Ядром для переважної більшості сучасних інформаційних систем є бази даних. Наразі найбільш поширеними залишаються реляційні бази даних, математична модель яких була вперше запропонована Е. Коддом в 1970 році [1]. З математичної точки зору реляційна база даних є скінченною множиною скінчених відношень різної розмірності (арності) між заздалегідь визначеними множинами елементарних даних.

Табличні алгебри, які були визначені В. Н. Редько і Д. Б. Буєм [2], побудовані на основі реляційних алгебр Е. Кодда і суттєво їх розвивають. Вони складають теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. Елементи носія табличної алгебри уточнюють реляційні структури даних, а сигнатурні операції побудовані на базі основних табличних маніпуляцій в реляційних алгебрах і SQL-подібних мовах.

У монографії [3] встановлено значну кількість різних властивостей операцій табличних алгебр, більшість з яких для загального випадку виконуються у вигляді включень. У даній роботі наведено та доведено критерії переходу трьох таких включень в рівності. Ці рівності є цікавими для теорії табличних алгебр з тієї причини, що тільки на основі рівностей можна здійснювати еквівалентні перетворення виразів, які є необхідними для розв'язання актуальної задачі оптимізації запитів [4], [5].

Основні поняття та визначення. Зафіксуємо деяку непорожню множину атрибутів $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Довільну скінченну підмножину множини $\mathcal{A}$ назвемо схемою, причому схема може бути порожньою множиною. Рядком s схеми R є множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекція якої за першою компонентою дорівнює R , причому атрибути $A'_1, \dots, A'_k$ є попарно різними, тобто рядок є функціональним бінарним відношенням. Таблицею схеми R є скінченна множина рядків схеми R . Далі в роботі розглядаємо таблиці схеми R із кількістю атрибутів k . На множині всіх таких таблиць введено наступні операції:

1) об'єднання $\bigcup_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать хоча б одній з вихідних таблиць;

2) перетин $\bigcap_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які одночасно належать усім вихідним таблицям;

3) різниця $T_1 - T_2$ двох таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать таблиці T_1 та не належать таблиці T_2 .

Також на множині таблиць введена операція активного доповнення, для визначення якої необхідно дати означення допоміжного поняття. Активним доменом атрибуту A відносно таблиці T називається множина $D_{A,T} = \{d \mid \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, яка, якщо казати змістовно, складається з усіх можливих значень атрибуту A в таблиці T . Насиченням $C(T)$ називається таблиця $\prod_{A \in R} D_{A,T}$, де R – схема таблиці T , $\prod$ – оператор декартового добутку, що відповідає індексуванню за всіма атрибутами A схеми T . Активним доповненням таблиці T є таблиця $\tilde{T} = C(T) - T$.

Дамо визначення операції проєкції. Проєкцією за множиною атрибутів $X \subseteq R$ є унарна параметрична операція π_X , значенням якої є таблиця, що складається з обмежень за X усіх рядків вихідної таблиці: $\pi_X(T) = \{s \mid X \mid s \in T\}$. Тут обмеження розуміємо стандартно: $s \mid X = s \cap X \times pr_2 s$, де $pr_2 s$ – проєкція рядка s за другою компонентою. Нехай $X = \{X_1, \dots, X_p\}$. Далі в роботі через $O = \{O_1, \dots, O_{k-p}\}$ позначимо множину атрибутів $R - X$, що не мають участі у проєкції.

Крім цих операцій, на множині всіх таблиць введені операції селекції, ділення таблиць і операція перейменування атрибутів; означення цих операцій наведено в [3], [6]. Табличною алгеброю називають часткову алгебру з носієм – множиною всіх таблиць довільної схеми і наведеними вище дев'ятьма операціями (насичення розглядається як допоміжна операція). У табличній алгебрі виділяють дві особливі таблиці: таблицю $T_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, де ε – порожній рядок, при цьому схема T_ε є порожньою множиною, і таблицю $T_\emptyset = \emptyset$ – порожню множину рядків довільної (в тому числі і непорожньої) схеми.

Основні результати. У монографії [3] в підрозділі про властивості проєкції сформульовано і доведено ряд властивостей цієї операції. Автором були знайдені необхідні і достатні умови, за яких три з цих включень перетворюються в рівності.

Теорема 1 (про переставність проєкції та активного доповнення). Рівність $\left(\pi_X(\tilde{T})\right) = \pi_X(\tilde{T})$ виконується тоді і лише тоді, коли для кожного рядка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ та будь-яких значень $o_1 \in D_{O_1,T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$, рядок $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$ належить таблиці T .

Доведення. Необхідність. Нехай виконується рівність $\left(\pi_X(\tilde{T})\right) = \pi_X(\tilde{T})$. Від супротивного, припустимо, що умова теореми не виконується, тобто існують такий рядок $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ та значення $o_1 \in D_{O_1,T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$, що $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin T$. Тоді з приналежності $s \in \pi_X(T)$ випливає існування такого рядка s_1 , що $s \subseteq s_1$ та $s_1 \in T$, тому виконуються приналежності $x_1 \in D_{X_1,T}, \dots, x_p \in D_{X_p,T}$. Таким чином, $s' \in C(T)$ та з $s' \notin T$ за визначенням операції активного доповнення випливає приналежність $s' \in \tilde{T}$, тому $s \in \pi_X(\tilde{T})$. З іншого боку, з приналежності $s \in \pi_X(T)$ випливає $s \notin \left(\pi_X(\tilde{T})\right)$, тобто рівність $\left(\pi_X(\tilde{T})\right) = \pi_X(\tilde{T})$ не виконується, що неможливо за припущенням. Одержане протиріччя доводить необхідність.

Доведемо достатність. Нехай виконується умова теореми. Від супротивного, припустимо, що рівність $\left(\pi_X(\tilde{T})\right) = \pi_X(\tilde{T})$ не виконується. З огляду на виконуваність включення $\left(\pi_X(\tilde{T})\right) \subseteq \pi_X(\tilde{T})$, доведеного в [3] (наслідок 2.4.2), рівність може не виконуватися лише у тому випадку, коли існує такий рядок $w = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\}$, що $w \in \pi_X(\tilde{T})$ та $w \notin \left(\pi_X(\tilde{T})\right)$. Тоді, за визначенням проєкції, з $w \in \pi_X(\tilde{T})$ випливає, що в таблиці $\tilde{T}$ існує рядок $z = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$ для деяких значень $o_1 \in D_{O_1,T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$. За визначенням активного доповнення виконується $z \notin T$ та, крім того, виконуються приналежності $w_1 \in D_{X_1,T}, \dots, w_{k-p} \in D_{X_{k-p},T}$, звідки випливає приналежність $\{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\} \in C(\pi_X(T))$. Оскільки за припущенням умови теореми виконуються, то з $z \notin T$ випливає, що $w = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\} \notin \pi_X(T)$, тому за визначенням активного доповнення виконується приналежність $w \in \left(\pi_X(\tilde{T})\right)$, що суперечить припущенню. З цього протиріччя випливає, що припущення невірне, це доводить достатність умови.

Покажемо, що ця рівність виконується для обох особливих таблиць.

Нехай $T = T_\varepsilon$. Тоді $\left(\pi_X(\tilde{T}_\varepsilon)\right) = \tilde{T}_\varepsilon = T_\varnothing$ та $\pi_X(\tilde{T}_\varepsilon) = \pi_X(T_\varnothing) = T_\varnothing$.

Нехай тепер $T = T_\varnothing$. Тоді $\left(\pi_X(\tilde{T}_\varnothing)\right) = \tilde{T}_\varnothing = T_\varnothing$ та $\pi_X(\tilde{T}_\varnothing) = \pi_X(T_\varnothing) = T_\varnothing$.

Знайдемо необхідні та достатні умови, за яких операція проекції є дистрибутивною відносно операції перетину. В монографії [3] доведено включення $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$ (твердження 2.4.1, п. 8) та показано (наслідок 2.4.1, п. 1), що достатньою для рівності $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ є умова, за якою X – ключ таблиці $\bigcup_i T_i$, тобто всі набори значень на атрибутах з X у таблиці $\bigcup_i T_i$ є унікальними. Розглянемо посилення цього результату.

Теорема 2 (про дистрибутивність проекції відносно перетину). Рівність $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ виконується тоді і лише тоді, коли для кожного рядка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap_i \pi_X(T_i)$ існують такі значення $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$, що рядок $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$ належить таблиці $\bigcap_i T_i$.

Доведення. Необхідність. Нехай виконується рівність $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$. Від супротивного, припустимо, що умова теореми не виконується, тобто існує такий рядок $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap_i \pi_X(T_i)$, що для усіх значень $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$ рядки $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin \bigcap_i T_i$. Тоді, за визначенням проекції, одержуємо, що $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \notin \pi_X\left(\bigcap_i T_i\right)$, тобто рівність $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ не виконується, що неможливо за припущенням. Одержане протиріччя доводить необхідність.

Доведемо достатність. Нехай виконується умова теореми. Від супротивного, припустимо, що рівність $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ не виконується. З огляду на виконуваність включення $\pi_X\left(\bigcap_i T_i\right) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$, рівність може не виконуватися лише у тому випадку, коли існує такий рядок $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\}$, що $s \in \bigcap_i \pi_X(T_i)$ та $s \notin \pi_X\left(\bigcap_i T_i\right)$. За умовою теореми існують такі значення $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$, що $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap_i T_i$. Тоді за визначенням проекції $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X\left(\bigcap_i T_i\right)$, тобто $s \in \pi_X\left(\bigcap_i T_i\right)$, що суперечить припущенню. З цього протиріччя випливає, що припущення невірне, це доводить достатність.

Знайдемо необхідні та достатні умови, за яких операція проекції є дистрибутивною відносно операції різниці. В монографії [3] доведено включення $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ (твердження 2.4.1, п. 9) та показано (наслідок 2.4.1, п. 2), що достатньою для рівності $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ є умова, за якою X – ключ таблиці $T_1 \cup T_2$. Розглянемо посилення цього результату.

Теорема 3 (про дистрибутивність проекції відносно різниці). Рівність $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ виконується тоді і лише тоді, коли для кожного рядка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2)$ та усіх значень $o_1 \in D_{O_1, T_1 \cup T_2}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \cup T_2}$ з приналежності $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T_1$ випливає приналежність $s' \in T_2$.

Доведення. Необхідність. Нехай виконується рівність $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \setminus T_2)$. Від супротивного, припустимо, що умова теореми не виконується, тобто існує такий рядок $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2)$ і такі значення $o_1 \in D_{O_1, T_1 \cup T_2}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \cup T_2}$, що $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T_1$ та $s' \notin T_2$. Тоді $s' \in T_1 \setminus T_2$, та за визначенням проекції $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1 \setminus T_2)$, тобто $s \in \pi_X(T_1 \setminus T_2)$. З іншого боку, за припущенням $s \in \pi_X(T_1)$ та $s \notin \pi_X(T_2)$, тому за визначенням різниці таблиць $s \notin \pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2)$, тобто в цьому випадку рівність $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ не виконується, що неможливо за припущенням. Одержане протиріччя доводить необхідність.

Доведемо достатність. Нехай виконується умова теореми. Від супротивного, припустимо, що рівність $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ не виконується. З огляду на виконуваність включення $\pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 \setminus T_2)$, рівність може не виконуватися лише у тому випадку, коли існує такий рядок $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\}$, що $s \in \pi_X(T_1 \setminus T_2)$ та $s \notin \pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2)$. Оскільки $s \in \pi_X(T_1 \setminus T_2)$, то у таблиці $T_1 \setminus T_2$ існує рядок $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$, тому за визначенням різниці таблиць $s' \in T_1$ та $s' \notin T_2$. Тоді за визначенням проєкції виконується приналежність $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1)$, тобто $s \in \pi_X(T_1)$. За припущенням $s \notin \pi_X(T_1) \setminus \pi_X(T_2)$, що з урахуванням $s \in \pi_X(T_1)$ за визначенням різниці таблиць може бути лише в тому випадку, коли $s \in \pi_X(T_2)$, тому $s \in \pi_X(T_1) \cap \pi_X(T_2)$. За умовою теореми у цьому випадку рядок s' повинен належати таблиці T_2 , що суперечить припущенню. З цього протиріччя випливає, що припущення невірне, це доводить достатність.

Висновки. В роботі досліджено деякі властивості операції проєкції для табличних алгебр. Знайдено критерії, за яких деякі включення з [3] перетворюються в рівності. Результати роботи представляють теоретичний і практичний інтерес. На підставі рівності можна вводити аналоги визначальних співвідношень, що є ефективним засобом задання та аналізу різних дискретних структур, а також здійснювати еквівалентні перетворення виразів, необхідні для їх оптимізації, в тому числі і для оптимізації запитів в реляційних базах даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Codd E. F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E. F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – V.13, N. 6. – P. 377–387.
2. Редько В. Н. К основаниям теории реляционных моделей баз данных / В.Н. Редько, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №4. – С. 3–12.
3. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков]. – Київ: Видавничий дім "Академпериодика", 2001. – 198 с.
4. Donald E. Knuth. The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions. / D. E. Knuth // Addison-Wesley Professional, 2008. – 240 p.
5. Мендкович Н. А. Обзор развития методов лексической оптимизации запросов / Н. А. Мендкович, С. Д. Кузнецов // Труды ИСП РАН. – 2012. – Т. 23. – С. 195–214.
6. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.16

Сенченко А. С., канд. физ.-мат. наук, доц.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

КРИТЕРИИ ДИСТРИБУТИВНОСТИ И ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ОПЕРАЦИИ ПРОЕКЦИИ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе исследованы свойства операции проекции в табличных алгебрах. Найжены необходимые и достаточные условия, при которых в табличных алгебрах операция проекции дистрибутивна относительно операций пересечения и разности таблиц, а также критерий перестановочности операций проекции и активного дополнения. Эти условия выражаются в терминах активных доменов таблиц и являются естественными.

Ключевые слова: табличная алгебра, проекция, база данных.

Senchenko A. S., PhD

Taras Shevchenko National University of Kyiv

CRITERIA OF DISTRIBUTION AND PERMUTATION OF PROJECTION OPERATION IN TABLE ALGEBRA

In this paper was found the necessary and sufficient conditions for which a operation projection is distributive to intersection and difference operations. Also is found the criteria of permutability of operations projection and active complement. These conditions are expressed in terms of active domains of tables and are natural.

Keywords: table algebra, projection, database.

УДК 512.548.7+519.713

В. В. Скобелев, д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
В. Г. Скобелев, д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф.
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев
В. А. Щербаков, д-р физ.-мат. наук, проф.
Институт математики и информатики АН Молдовы, Кишинев

АВТОМАТЫ НА КВАЗИГРУППАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В настоящей работе определены и исследованы модели автоматов Мили и Мура, заданных рекуррентными соотношениями на конечных квазигруппах общего вида, а также на Т-квазигруппах. Предложенные в данной работе модели автоматов Мили, а также модели автоматов Мура, отличаются друг от друга независимым выбором левого, либо правого умножения состояния автомата на входной символ при определении функций переходов и выходов автомата. Показано, что предложенные автоматные модели являются обратимыми автоматами. Для каждой предложенной модели построен и исследован обратный автомат. Оценена временная сложность вычислений, осуществляемых предложенными автоматными моделями. Показана возможность применения предложенных автоматов Мили и Мура в качестве математических моделей поточных шифров, а также возможность применения соответствующих автоматов без выхода в качестве математических моделей криптографических хэш-функций.

Ключевые слова: конечные квазигруппы, Т-квазигруппы, автоматы Мили и Мура, обратимые автоматы, поточные шифры, криптографические хэш-функции.

Введение. Происходящий в течение последних двух десятилетий переход в криптографии от чисто комбинаторных к комбинаторно-алгебраическим моделям оказал существенное влияние на переосмысление актуальности задач, решаемых в рамках теории конечных алгебраических систем. В результате появились многочисленные исследования, посвященные применению теории конечных полей при решении модельных задач криптографии (в частности, криптография на эллиптических кривых над конечным полем считается одним из наиболее перспективных направлений современной криптографии). Значительно меньше исследований посвящено применению, как конечных колец, так и конечных квазигрупп при решении модельных задач криптографии (в этом направлении следует выделить работу [1], в которой представлены интересные результаты, связанные с использованием квазигрупп и колец в кодировании и построении криптосхем). По-видимому, такая ситуация в первую очередь характеризуется тем, что в настоящее время не завершена классификация этих алгебраических систем, а их свойства требуют дальнейшего более глубокого изучения.

Целесообразность использования конечных квазигрупп при решении модельных задач криптографии обусловлена следующими двумя факторами. Во-первых, операция в квазигруппе является обратимой. Во-вторых, отсутствие требований ассоциативности, коммутативности и существования единицы приводят к высокой сложности решения задач идентификации, сформулированных в терминах квазигрупп. Достаточно полный обзор результатов, связанных с использованием конечных квазигрупп для построения схем аутентификации, шифрования и односторонних функций, представлен в работах [2, 3].

Использование конечных квазигрупп для решения модельных задач криптографии естественно приводит к необходимости формирования нового раздела алгебраической теории автоматов, объектом исследования которого являются автоматы, заданные рекуррентными соотношениями на таких квазигруппах, а предметом исследования – анализ вычислительной стойкости соответствующих автоматных отображений. В связи со сказанным, основной целью настоящей работы является определение и исследование моделей автоматов Мили и Мура, заданных рекуррентными соотношениями на конечных квазигруппах, и рассмотрение возможности их применения в качестве математических моделей поточных шифров и криптографических хэш-функций.

1. Основные понятия. Квазигруппой [4] называется пара $(Q, \circ)$, где Q – множество (носитель), а $\circ$ – такая бинарная операция, что для любых $a, b \in Q$ каждое из уравнений $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$ имеет единственное решение. Отметим, что таблица Кэли конечной квазигруппы – это латинский квадрат. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только конечные квазигруппы, т.е. такие квазигруппы $(Q, \circ)$, что Q – конечное множество. Подчеркнем, что при логарифмическом весе объем памяти, необходимой для представления таблицы Кэли квазигруппы $(Q, \circ)$ определяется формулой $V = O(|Q| \log |Q|)$ ($|Q| \rightarrow \infty$). Кроме того, если квазигруппа $(Q, \circ)$ задана таблицей Кэли, то выполнение операции $\circ$ осуществляется с временной сложностью, которая при логарифмическом весе определяется формулой $T = O(|Q| \log |Q|)$ ($|Q| \rightarrow \infty$).

Обратимость операции $\circ$ квазигруппы $(Q, \circ)$ дает возможность определить следующие пять операций $\overset{r}{\circ}, \overset{l}{\circ}, \overset{rl}{\circ}, \overset{lr}{\circ}, \overset{s}{\circ}$ и $\overset{lr}{\circ}$ на множестве Q :

$$\overset{r}{a \circ b} = c \Leftrightarrow a \circ c = b, \quad (1)$$

$$\overset{l}{a \circ b} = c \Leftrightarrow c \circ b = a, \quad (2)$$

$$\overset{rl}{a \circ b} = c \Leftrightarrow b \circ c = a, \quad (3)$$

$$\overset{lr}{a \circ b} = c \Leftrightarrow c \circ a = b, \quad (4)$$

$$\overset{s}{a \circ b} = c \Leftrightarrow b \circ a = c. \quad (5)$$

Эти операции вместе с операцией $\circ$ называются парастрофами, а квазигруппы $(Q, \bullet)$ ($\bullet \in \{\overset{r}{\circ}, \overset{l}{\circ}, \overset{rl}{\circ}, \overset{lr}{\circ}, \overset{s}{\circ}\}$) – системой обратных квазигрупп. Таким образом, множество всех квазигрупп с одним и тем же носителем Q разбивается на системы обратных квазигрупп. Известно, что для любой квазигруппы $(Q, \circ)$ количество различных парастрофов равно 1, 2, 3 или 6. Из (1)–(5) непосредственно вытекает, что при задании квазигруппы $(Q, \circ)$ таблицей Кэли операции в любой квазигруппе, принадлежащей системе обратных квазигрупп, выполняются с использованием этой же таблицы Кэли. Отличие состоит только в порядке организации поиска по строкам и столбцам (включая их имена) таблицы Кэли. Отсюда вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 1. Если квазигруппа $(Q, \circ)$ задана таблицей Кэли, то при логарифмическом весе временная сложность выполнения операции в каждой квазигруппе, принадлежащей системе обратных квазигрупп, определяется формулой $T = O(|Q| \log |Q|)$ ($|Q| \rightarrow \infty$).

Квазигруппы $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ называются ортогональными, если система уравнений $x \circ_i y = a_i$ ($i=1,2$) имеет единственное решение для всех $a_1, a_2 \in Q$. Квазигруппа $(Q, \circ)$ называется totCO-квазигруппой, если все ее парастрофы различны и попарно ортогональны. Известно [5], что для любого натурального числа $n \geq 11$, взаимно простого с числами 2, 3, 5 и 7, существует totCO-квазигруппа порядка n .

Квазигруппа $(Q, \circ)$ называется Т-квазигруппой [6], если существуют абелева группа $(Q, +)$, упорядоченная пара ее автоморфизмов (φ, ψ) , а также элемент $c \in Q$, такие, что равенство

$$x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c \quad (6)$$

истинно для всех $x, y \in Q$. Истинно следующее утверждение.

Утверждение 2. Предположим, что для Т-квазигруппы $(Q, \circ)$ абелева группа $(Q, +)$, упорядоченная пара ее автоморфизмов (φ, ψ) и элемент $c \in Q$ выбраны так, что равенство $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$ истинно для всех $x, y \in Q$.

Тогда при логарифмическом весе временная сложность выполнения операции в Т-квазигруппе $(Q, \circ)$ определяется формулой $T = O(\max\{t_1, t_2\} + t_3)$ ($|Q| \rightarrow \infty$), где t_1 и t_2 – временная сложность (при логарифмическом весе) вычисления образа элемента для соответственно отображения φ и ψ , а t_3 – временная сложность (при логарифмическом весе) выполнения операции в абелевой группе $(Q, +)$.

Отметим, что каждая абелева группа $(Q, +)$, упорядоченная пара ее автоморфизмов (φ, ψ) и элемент $c \in Q$ порождают некоторую Т-квазигруппу $(Q, \circ)$, в которой операция $\circ$ определена равенством (6). В частности, если $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$), то для любой упорядоченной пары элементов $(k_1, k_2) \in Q \times Q$, которые являются взаимно простыми с числом n , Т-квазигруппой является пара $(Q, \circ)$, где операция $\circ$ определена равенством

$$x \circ y = (k_1 x + k_2 y) \pmod{n}. \quad (7)$$

При этом в [5] показано, что $(Q, \circ)$ является totCO-квазигруппой тогда и только тогда, когда все числа $k_i \pm 1$ ($i = 1, 2$), $k_1 \pm k_2$, $k_i^2 + k_{3-i}$ ($i = 1, 2$), $k_1 k_2 - 1$, взятые по модулю n , являются взаимно простыми с числом n .

Из равенства (7) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 3. Предположим, что $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$), $(k_1, k_2) \in Q \times Q$ – упорядоченная пара элементов, которые являются взаимно простыми с числом n , а операция в Т-квазигруппе $(Q, \circ)$ определена равенством $x \circ y = (k_1 x + k_2 y) \pmod{n}$. Тогда при логарифмическом весе временная и емкостная сложность операции $\circ$ определяется соответственно формулами $T = O(n \log n)$ ($n \rightarrow \infty$) и $V = O(\log n)$ ($n \rightarrow \infty$).

Из утверждения 3 непосредственно вытекает, что в Т-квазигруппе $(Q, \circ)$ ($Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$), операция в которой определена равенством (7), вычисления являются быстрыми и компактными.

Гомотопией квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ в квазигруппу $(Q_2, \circ_2)$ называется такая упорядоченная тройка $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ отображений $\alpha_i: Q_1 \rightarrow Q_2$ ($i = 1, 2, 3$), что равенство

$$\alpha_3(x \circ_1 y) = \alpha_1(x) \circ_2 \alpha_2(y) \quad (8)$$

истинно для всех $x, y \in Q_1$. Отметим, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то гомотопия – это гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ в квазигруппу $(Q_2, \circ_2)$.

Из равенства (8) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 4. Пусть квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ и $(Q_2, \circ_2)$ заданы таблицей Кэли и $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – гомотопия квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ в квазигруппу $(Q_2, \circ_2)$. Тогда при логарифмическом весе временная сложность выполнения операции в гомотопе квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ определяется формулой $T = O(\max\{t_1, t_2, t_3\}(|Q_1| \log |Q_1| + |Q_2| \log |Q_2|))$ ($|Q_1| \rightarrow \infty, |Q_2| \rightarrow \infty$), где t_i ($i = 1, 2, 3$) – временная сложность (при логарифмическом весе) вычисления образа для отображения α_i .

Если $Q_1 = Q_2 = Q$, а α_1, α_2 и α_3 – подстановки множества Q , то гомотопия $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется изотопией квазигруппы $(Q, \circ_1)$ на квазигруппу $(Q, \circ_2)$, подстановки α_1, α_2 и α_3 – соответственно левой, правой и главной компонентами изотопии T , а квазигруппа $(Q, \circ_2)$ – изотопом квазигруппы $(Q, \circ_1)$. При этом, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то изотопия – это изоморфизм квазигрупп $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$.

Пусть $\mathbf{T}$ – множество всех изотопий квазигруппы $(Q, \circ_1)$ на квазигруппу $(Q, \circ_2)$. Определим на множестве $\mathbf{T}$ операцию $\circ$ следующим образом:

$$T_1 = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}) \& T_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}) \Rightarrow T_1 \circ T_2 = (\alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)}),$$

где $\alpha\beta$ – суперпозиция подстановок α и β . Известно (см., напр., [4]), что $(\mathbf{T}, \circ)$ является группой.

Напомним, что конечным автоматом называется пятерка $M = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$, где Q – конечное множество состояний, X – конечный входной алфавит, Y – конечный выходной алфавит, $\delta: Q \times X \rightarrow Q$ – функция переходов, а $\lambda: Q \times X \rightarrow Y$ – функция выходов. В дальнейшем, для краткости, в словосочетании "конечный автомат" слово "конечный" будем опускать. В тех случаях, когда при исследовании автоматов интересуют только переходы состояний, рассматривают автомат без выхода. Такой автомат определяется как тройка $M = (Q, X, \delta)$.

Если для функции выходов λ переменная $x \in X$ – существенная, то говорят, что M – автомат Мили. Если же для функции выходов λ переменная $x \in X$ является фиктивной, то говорят, что M – автомат Мура. Для автомата Мура, как правило, считают, что $\lambda: Q \rightarrow Y$. Отметим, что любой автомат без выхода $M = (Q, X, \delta)$ можно рассматривать как автомат Мура $M = (Q, X, Q, \delta, \lambda)$, где $\lambda: Q \rightarrow Q$ – тождественное отображение.

При рассмотрении функционирования автомата во времени, следуя [7], будем считать, что автомат Мили функционирует в соответствии с рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} q_{t+1} = \delta(q_t, x_{t+1}) \\ y_{t+1} = \lambda(q_t, x_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

а автомат Мура – в соответствии с рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} q_{t+1} = \delta(q_t, x_{t+1}) \\ y_{t+1} = \lambda(q_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+).$$

2. Модели автоматов Мили. Зафиксируем упорядоченную пару квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$ с одним и тем же носителем Q , в которой квазигруппа $(Q, \circ_1)$ будет использоваться для определения функции переходов автомата Мили, а квазигруппа $(Q, \circ_2)$ – для определения функции выходов автомата Мили.

Функция переходов автомата Мили может быть определена либо формулой

$$\delta_r(q, x) = q \circ_1 x \quad (q, x \in Q), \quad (9)$$

либо формулой

$$\delta_l(q, x) = x \circ_1 q \quad (q, x \in Q), \quad (10)$$

а функция выходов автомата Мили – либо формулой

$$\lambda_r(q, x) = q \circ_2 x \quad (q, x \in Q), \quad (11)$$

либо формулой

$$\lambda_l(q, x) = x \circ_2 q \quad (q, x \in Q). \quad (12)$$

Таким образом, для заданной упорядоченной пары квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$ с одним и тем же носителем Q построены четыре модели автоматов Мили

$$A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v) \quad (u, v \in \{l, r\}).$$

Отметим, что с позиции теории категорий автоматы A_{rr} исследованы в [8,9].

Нетрудно доказать, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 5. Для каждой упорядоченной пары квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$:

- 1) равенства $A_{rr} = A_{ll}$ и $A_{rl} = A_{lr}$ истинны тогда и только тогда, когда $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – коммутативные квазигруппы;
- 2) равенства $A_{rr} = A_{lr}$ и $A_{rl} = A_{ll}$ истинны тогда и только тогда, когда $(Q, \circ_1)$ – коммутативная квазигруппа;
- 3) равенства $A_{rr} = A_{rl}$ и $A_{lr} = A_{ll}$ истинны тогда и только тогда, когда $(Q, \circ_2)$ – коммутативная квазигруппа.

Из утверждения 1 и формул (9)–(12) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 6. Предположим, что квазигруппы $(Q_1, \circ_1)$ и $(Q_2, \circ_2)$ заданы таблицей Кэли. Тогда при логарифмическом весе временная сложность моделирования функционирования автомата Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) на одном такте определяется формулой $T = O(\max\{|Q_1| \log |Q_1|, |Q_2| \log |Q_2|\})$ ($|Q_1| \rightarrow \infty, |Q_2| \rightarrow \infty$).

Пусть $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где (φ_i, ψ_i) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда формулы (9)–(12) принимают следующий вид

$$\delta_r(q, x) = \varphi_1(q) +_1 \psi_1(x) +_1 c_1 \quad (q, x \in Q), \quad (13)$$

$$\delta_l(q, x) = \varphi_1(x) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 \quad (q, x \in Q), \quad (14)$$

$$\lambda_r(q, x) = \varphi_2(q) +_2 \psi_2(x) +_2 c_2 \quad (q, x \in Q), \quad (15)$$

$$\lambda_l(q, x) = \varphi_2(x) +_2 \psi_2(q) +_2 c_2 \quad (q, x \in Q). \quad (16)$$

Из утверждения 2 и формул (13)–(16) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 7. Предположим, что $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где (φ_i, ψ_i) – упорядоченная пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда при логарифмическом весе временная сложность моделирования функционирования автомата Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) на одном такте определяется формулой $T = O(\max\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + \max\{t_5, t_6\})$ ($|Q_1| \rightarrow \infty, |Q_2| \rightarrow \infty$), где t_1, t_2, t_3 и t_4 – временная сложность (при логарифмическом весе) вычисления образа элемента для соответственно отображения $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$ и ψ_2 , а t_5 и t_6 – временная сложность (при логарифмическом весе) выполнения операции соответственно в абелевой группе $(Q, +_1)$ и $(Q, +_2)$.

Пусть $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$), $(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}) \in Q \times Q$ ($i = 1, 2$) – упорядоченные пары элементов, которые являются взаимно простыми с числом n , а $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – такие Т-квазигруппы, что $x \circ_i y = (k_1^{(i)}x + k_2^{(i)}y) \pmod{n}$ ($i = 1, 2$). Тогда формулы (9)–(12) принимают следующий вид:

$$\delta_r(q, x) = (k_1^{(1)}q + k_2^{(1)}x) \pmod{n} \quad (q, x \in Q), \quad (17)$$

$$\delta_l(q, x) = (k_1^{(1)}x + k_2^{(1)}q) \pmod{n} \quad (q, x \in Q), \quad (18)$$

$$\lambda_r(q, x) = (k_1^{(2)}q + k_2^{(2)}x) \pmod{n} \quad (q, x \in Q), \quad (19)$$

$$\lambda_l(q, x) = (k_1^{(2)}x + k_2^{(2)}q) \pmod{n} \quad (q, x \in Q). \quad (20)$$

Из утверждения 3 и формул (17)–(20) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 8. Предположим, что $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$), $(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}) \in Q \times Q$ ($i = 1, 2$) – упорядоченные пары элементов, которые являются взаимно простыми с числом n , а $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – такие Т-квазигруппы, что $x \circ_i y = (k_1^{(i)}x + k_2^{(i)}y) \pmod{n}$ ($i = 1, 2$). Тогда при логарифмическом весе временная и емкостная сложность моделирования функционирования автомата Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) на одном такте определяются соответственно формулами $T = O(n \log n)$ ($n \rightarrow \infty$) и $V = O(\log n)$ ($n \rightarrow \infty$).

Обозначим через Q^+ множество всех непустых слов в алфавите Q и положим $Q^* = Q^+ \cup \{\Lambda\}$, где Λ – пустое слово. Функции переходов и выходов автомата Мили A_{uv} ($u, v \in \{l, r\}$) распространим на множество $Q \times Q^*$ обычным образом, а именно:

$$\delta_u(q, \Lambda) = q, \quad \lambda_v(q, \Lambda) = \Lambda, \quad \delta_u(q, px) = \delta_u(\delta_u(q, p), x), \quad \lambda_v(q, px) = \lambda_v(q, p)\lambda_v(\delta_u(q, p), x)$$

для всех $q, x \in Q$ и $p \in Q^*$.

Зафиксировав в автомате A_{uv} ($u, v \in \{l, r\}$) начальное состояние $q \in Q$, получим инициальный автомат Мили (A_{uv}, q) . Такой автомат реализует отображение $F_{(A_{uv}, q)}: Q^* \rightarrow Q^*$ входной полугруппы Q^* в выходную полугруппу Q^* , определенное равенством $F_{(A_{uv}, q)}(p) = \lambda_u(q, p)$ для всех $p \in Q^*$. Индукцией по длине входного слова несложно доказать, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 9. Для каждого автомата Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, при каждом начальном состоянии $q \in Q$ отображение $F_{(A_{uv}, q)}$ является биекцией. При этом если $q_1 \neq q_2$ ($q_1, q_2 \in Q$), то $F_{(A_{uv}, q_1)} \neq F_{(A_{uv}, q_2)}$, т.е. автомат $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) – приведенный.

Следствие 1. Каждый автомат Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемый упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, является приведенным автоматом, состояния которого 1-диагностируемы.

Следствие 2. Автоматный граф каждого автомата Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, является размеченным полным $|Q|$ -вершинным направленным графом с петлей в каждой вершине.

Следствие 3. Каждый автомат Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемый упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, является обратимым автоматом.

Построим обратные автоматы для автоматов Мили $A_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$).

Построим автомат $A_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, обратный для автомата Мили $A_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$.

Из (1) и (11) вытекает, что

$$q \circ_2 x = y \Leftrightarrow q \circ_2^r y = x. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\lambda_r(q, y) = q \circ_2^r y \quad (q, y \in Q). \quad (22)$$

Из (9) и (21) вытекает, что

$$q \circ_1 x = q' \Leftrightarrow q \circ_1 (q \circ_2 y) = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_r(q, y) = q \circ_1 (q \circ_2 y) \quad (q, y \in Q). \quad (23)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 10. Для каждого автомата Мили $A_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ определяются соответственно формулами (23) и (22).

Следствие 4. Для каждого автомата Мили $A_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, при задании квазигрупп таблицами Кэли обратный автомат $A_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $A_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$.

Пусть $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Из (15) вытекает, что

$$\varphi_2(q) +_2 \psi_2(x) +_2 c_2 = y \Leftrightarrow \psi_2(x) = y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2 \Leftrightarrow x = (\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2). \quad (24)$$

Следовательно,

$$\lambda_r(q, y) = (\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2) \quad (q, y \in Q). \quad (25)$$

Из (13) и (24) вытекает, что

$$\varphi_1(q) +_1 \psi_1(x) +_1 c_1 = q' \Leftrightarrow \varphi_1(q) +_1 \psi_1((\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2)) +_1 c_1 = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_r(q, y) = \varphi_1(q) +_1 \psi_1((\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2)) +_1 c_1 \quad (q, y \in Q). \quad (26)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 11. Предположим, что $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда для автомата Мили $A_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ определяются соответственно формулами (26) и (25).

Построим автомат $A_l^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_l, \lambda_l)$, обратный для автомата Мили $A_l = (Q, Q, Q, \delta_l, \lambda_l)$.

Из (2) и (12) вытекает, что

$$x \circ_2 q = y \Leftrightarrow y \circ_2^l q = x. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\lambda_l(q, y) = y \circ_2^l q \quad (q, y \in Q). \quad (28)$$

Из (9) и (27) вытекает, что

$$q \circ_1 x = q' \Leftrightarrow q \circ_1 (y \circ_2 q) = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_H(q, y) = q \circ_1 (y \circ_2 q) \quad (q, y \in Q). \quad (29)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 12. Для каждого автомата Мили $A_H = (Q, Q, Q, \delta_H, \lambda_H)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_H^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_H^{-1}, \lambda_H^{-1})$ определяются соответственно формулами (29) и (28).

Следствие 5. Для каждого автомата Мили $A_H = (Q, Q, Q, \delta_H, \lambda_H)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, при задании квазигрупп таблицами Кэли обратный автомат $A_H^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_H^{-1}, \lambda_H^{-1})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $A_H = (Q, Q, Q, \delta_H, \lambda_H)$.

Пусть $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Из (16) вытекает, что

$$\varphi_2(x) +_2 \psi_2(q) +_2 c_2 = y \Leftrightarrow \varphi_2(x) = y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2 \Leftrightarrow x = (\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2). \quad (30)$$

Следовательно,

$$\lambda_H(q, y) = (\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2) \quad (q, y \in Q). \quad (31)$$

Из (13) и (30) вытекает, что

$$\varphi_1(q) +_1 \psi_1(x) +_1 c_1 = q' \Leftrightarrow \varphi_1(q) +_1 \psi_1((\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2)) +_1 c_1 = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_H(q, y) = \varphi_1(q) +_1 \psi_1((\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2)) +_1 c_1 \quad (q, y \in Q). \quad (32)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 13. Предположим, что $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда для автомата Мили $A_H = (Q, Q, Q, \delta_H, \lambda_H)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_H^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_H^{-1}, \lambda_H^{-1})$ определяются соответственно формулами (32) и (31).

Построим автомат $A_{Hr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}^{-1}, \lambda_{Hr}^{-1})$, обратный для автомата Мили $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$.

Так как $\lambda_{Hr} = \lambda_{Hr}$, то из (22) вытекает, что

$$\lambda_{Hr}(q, y) = q \circ_2 y \quad (q, y \in Q). \quad (33)$$

Из (10) и (21) вытекает, что

$$x \circ_1 q = q' \Leftrightarrow (q \circ_2 y) \circ_1 q = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{Hr}(q, y) = (q \circ_2 y) \circ_1 q \quad (q, y \in Q). \quad (34)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 14. Для каждого автомата Мили $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_{Hr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}^{-1}, \lambda_{Hr}^{-1})$ определяются соответственно формулами (34) и (33).

Следствие 6. Для каждого автомата Мили $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, при задании квазигрупп таблицами Кэли обратный автомат $A_{Hr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}^{-1}, \lambda_{Hr}^{-1})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$.

Пусть $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Так как $\lambda_{Hr} = \lambda_{Hr}$, то из (25) вытекает, что

$$\lambda_{Hr}(q, y) = (\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2) \quad (q, y \in Q). \quad (35)$$

Из (14) и (24) вытекает, что

$$\varphi_1(x) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 = q' \Leftrightarrow \varphi_1((\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2)) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{Hr}(q, y) = \varphi_1((\psi_2)^{-1}(y -_2 \varphi_2(q) -_2 c_2)) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 \quad (q, y \in Q). \quad (36)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 15. Предположим, что $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) +_i c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда для автомата Мили $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_{Hr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}^{-1}, \lambda_{Hr}^{-1})$ определяются соответственно формулами (36) и (35).

Построим автомат $A_{Hr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}^{-1}, \lambda_{Hr}^{-1})$, обратный для автомата Мили $A_{Hr} = (Q, Q, Q, \delta_{Hr}, \lambda_{Hr})$.

Так как $\lambda_{II} = \lambda_{II}$, то из (28) вытекает, что

$$\lambda_{II}(q, y) = y \circ_2 q \quad (q, y \in Q). \quad (37)$$

Из (10) и (27) вытекает, что

$$x \circ_1 q = q' \Leftrightarrow (y \circ_2 q) \circ_1 q = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{II}(q, y) = (y \circ_2 q) \circ_1 q \quad (q, y \in Q). \quad (38)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 16. Для каждого автомата Мили $A_{II} = (Q, Q, Q, \delta_I, \lambda_I)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_{II}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{II}, \lambda_{II})$ определяются соответственно формулами (38) и (37).

Следствие 7. Для каждого автомата Мили $A_{II} = (Q, Q, Q, \delta_I, \lambda_I)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, при задании квазигрупп таблицами Кэли обратный автомат $A_{II}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{II}, \lambda_{II})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $A_{II} = (Q, Q, Q, \delta_I, \lambda_I)$.

Пусть $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) + c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Так как $\lambda_{II} = \lambda_{II}$, то из (31) вытекает, что

$$\lambda_{II}(q, y) = (\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2) \quad (q, y \in Q). \quad (39)$$

Из (14) и (30) вытекает, что

$$\varphi_1(x) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 = q' \Leftrightarrow \varphi_1((\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2)) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 = q'$$

Следовательно,

$$\delta_{II}(q, y) = \varphi_1((\varphi_2)^{-1}(y -_2 \psi_2(q) -_2 c_2)) +_1 \psi_1(q) +_1 c_1 \quad (q, y \in Q). \quad (40)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 17. Предположим, что $(Q, \circ_1)$ и $(Q, \circ_2)$ – Т-квазигруппы, причем $x \circ_i y = \varphi_i(x) +_i \psi_i(y) + c_i$ ($i = 1, 2$), где φ_i и ψ_i – автоморфизмы абелевой группы $(Q, +_i)$, а $c_1, c_2 \in Q$ – фиксированные элементы. Тогда для автомата Мили $A_{II} = (Q, Q, Q, \delta_I, \lambda_I)$, определяемого упорядоченной парой квазигрупп $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$, функции переходов и выходов обратного автомата $A_{II}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{II}, \lambda_{II})$ определяются соответственно формулами (40) и (39).

3. Модели автоматов Мура. Зафиксируем упорядоченную пару $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, которая будет использоваться для определения функции переходов автомата Мура, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, которая будет использоваться для определения функции выходов автомата Мура.

Функция переходов автомата Мура (как и функция переходов автомата Мили) может быть определена либо формулой

$$\delta_r(q, x) = q \circ x \quad (q, x \in Q), \quad (41)$$

либо формулой

$$\delta_l(q, x) = x \circ q \quad (q, x \in Q), \quad (42)$$

а функция выходов автомата Мура – либо формулой

$$\lambda_r(q, x) = \zeta(q \circ x) \quad (q, x \in Q), \quad (43)$$

либо формулой

$$\lambda_l(q, x) = \zeta(x \circ q) \quad (q, x \in Q). \quad (44)$$

Таким образом, для заданной упорядоченной пары $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – отображение, построены четыре модели автоматов Мура

$$B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v) \quad (u, v \in \{l, r\}).$$

Отметим, что даже если перестановка $\zeta: Q \rightarrow Q$ задана таблицей, то для нее при логарифмическом весе сложность вычисления образа элемента определяется формулой $T = O(|Q| \log |Q|)$ ($|Q| \rightarrow \infty$). Поэтому из утверждения 1 и формул (41)-(44) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 18. Предположим, что квазигруппа $(Q, \circ)$ задана таблицей Кэли. Тогда при логарифмическом весе временная сложность моделирования функционирования автомата Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) на одном такте определяется формулой $T = O(|Q| \log |Q|)$ ($|Q| \rightarrow \infty$).

Пусть $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда формулы (41)-(44) принимают следующий вид

$$\delta_r(q, x) = \varphi(q) + \psi(x) + c \quad (q, x \in Q), \quad (45)$$

$$\delta_l(q, x) = \varphi(x) + \psi(q) + c \quad (q, x \in Q), \quad (46)$$

$$\lambda_r(q, x) = \zeta(\varphi(q) + \psi(x) + c) \quad (q, x \in Q), \quad (47)$$

$$\lambda_l(q, x) = \zeta(\varphi(x) + \psi(q) + c) \quad (q, x \in Q). \quad (48)$$

Из утверждения 2 и формул (45)-(48) вытекает, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 19. Предположим, что $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда при логарифмическом весе временная сложность моделирования функционирования автомата Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) на одном такте определяется формулой $T = O(\max\{t_1, t_2, t_3\} + t_4)$ ($|Q_1| \rightarrow \infty, |Q_2| \rightarrow \infty$), где t_1, t_2 и t_3 – временная сложность (при логарифмическом весе) вычисления образа элемента для соответственно отображения φ, ψ и ζ , а t_4 – временная сложность (при логарифмическом весе) выполнения операции в абелевой группе $(Q, +)$.

Распространим функции переходов и выходов автомата Мура B_{uv} ($u, v \in \{l, r\}$) на множество $Q \times Q^*$ обычным образом и для каждого состояния $q \in Q$ положим $F_{(B_{uv}, q)}(p) = \lambda_v(q, p)$ ($p \in Q^*$). Нетрудно доказать, что истинно следующее утверждение.

Утверждение 20. Для каждого автомата Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, при каждом начальном состоянии $q \in Q$ отображение $F_{(B_{uv}, q)}$ является биекцией. При этом если $q_1 \neq q_2$ ($q_1, q_2 \in Q$), то $F_{(B_{uv}, q_1)} \neq F_{(B_{uv}, q_2)}$, т.е. автомат $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$) – приведенный.

Следствие 8. Каждый автомат Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемый упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, является приведенным автоматом, состояния которого 1-диагностируемы.

Следствие 9. Автоматный граф каждого автомата Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, является размеченным полным $|Q|$ -вершинным направленным графом с петлей в каждой вершине.

Следствие 10. Каждый автомат Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$), определяемый упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, является обратимым автоматом.

Построим обратные автоматы для автоматов Мура $B_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_u, \lambda_v)$ ($u, v \in \{l, r\}$).

Построим автомат $B_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, обратный для автомата Мура $B_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$.

Из (1) и (43) вытекает, что

$$\zeta(q \circ x) = y \Leftrightarrow q \circ x = \zeta^{-1}(y) \Leftrightarrow q \circ \zeta^{-1}(y) = x. \quad (49)$$

Следовательно,

$$\lambda_r(q, y) = q \circ \zeta^{-1}(y) \quad (q, y \in Q). \quad (50)$$

Из (41) и (49) вытекает, что

$$q \circ x = q' \Leftrightarrow q \circ (q \circ \zeta^{-1}(y)) = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_r(q, y) = q \circ (q \circ \zeta^{-1}(y)) \quad (q, y \in Q). \quad (51)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 21. Для каждого автомата Мура $B_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, функции переходов и выходов обратного автомата $B_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ определяются соответственно формулами (51) и (50).

Следствие 11. Для каждого автомата Мура $B_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, при задании квазигруппы таблицей Кэли обратный автомат $B_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $B_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$.

Пусть $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент.

Из (47) вытекает, что

$$\zeta(\varphi(q) + \psi(x) + c) = y \Leftrightarrow \varphi(q) + \psi(x) + c = \zeta^{-1}(y) \Leftrightarrow \psi(x) = \zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c \Leftrightarrow x = \psi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c). \quad (52)$$

Следовательно,

$$\lambda_r(q, y) = \psi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c) \quad (q, y \in Q). \quad (53)$$

Из (45) и (52) вытекает, что

$$\varphi(q) + \psi(x) + c = q' \Leftrightarrow \varphi(q) + (\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c) + c = q' \Leftrightarrow \zeta^{-1}(y) = q'$$

Следовательно,

$$\delta_r(q, y) = \zeta^{-1}(y) \quad (q, y \in Q). \quad (54)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 22. Предположим, что $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда для автомата Мура $B_r = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, функции переходов и выходов обратного автомата $B_r^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_r, \lambda_r)$ определяются соответственно формулами (54) и (53).

Построим автомат $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, обратный для автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$.

Из (2) и (44) вытекает, что

$$\zeta(x \circ q) = y \Leftrightarrow x \circ q = \zeta^{-1}(y) \Leftrightarrow \zeta^{-1}(y) \circ q = x. \quad (55)$$

Следовательно,

$$\lambda_{\pi}(q, y) = \zeta^{-1}(y) \circ q \quad (q, y \in Q). \quad (56)$$

Из (41) и (55) вытекает, что

$$q \circ x = q' \Leftrightarrow q \circ (\zeta^{-1}(y) \circ q) = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{\pi}(q, y) = q \circ (\zeta^{-1}(y) \circ q) \quad (q, y \in Q). \quad (57)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 23. Для каждого автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$ определяются соответственно формулами (57) и (56).

Следствие 12. Для каждого автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, при задании квазигруппы таблицей Кэли обратный автомат $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$.

Пусть $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент.

Из (48) вытекает, что

$$\zeta(\varphi(x) + \psi(q) + c) = y \Leftrightarrow \varphi(x) + \psi(q) + c = \zeta^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi(x) = \zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c). \quad (58)$$

Следовательно,

$$\lambda_{\pi}(q, y) = \varphi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c) \quad (q, y \in Q). \quad (59)$$

Из (45) и (59) вытекает, что

$$\varphi(q) + \psi(x) + c = q' \Leftrightarrow \varphi(q) + \psi(\varphi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c)) + c = q'$$

Следовательно,

$$\delta_{\pi}(q, y) = \varphi(q) + \psi(\varphi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c)) + c \quad (q, y \in Q). \quad (60)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 24. Предположим, что $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда для автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$ определяются соответственно формулами (60) и (59).

Построим автомат $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, обратный для автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$.

Так как $\lambda_{\pi} = \lambda_{\pi\pi}$, то из (50) вытекает, что

$$\lambda_{\pi}(q, y) = q \circ \zeta^{-1}(y) \quad (q, y \in Q). \quad (61)$$

Из (42) и (49) вытекает, что

$$x \circ q = q' \Leftrightarrow (q \circ \zeta^{-1}(y)) \circ q = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{\pi}(q, y) = (q \circ \zeta^{-1}(y)) \circ q \quad (q, y \in Q). \quad (62)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 25. Для каждого автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$ определяются соответственно формулами (62) и (61).

Следствие 13. Для каждого автомата Мура $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, при задании квазигруппы таблицей Кэли обратный автомат $B_{\pi}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $B_{\pi} = (Q, Q, Q, \delta_{\pi}, \lambda_{\pi})$.

Пусть $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент.

Так как $\lambda_{\pi} = \lambda_{\pi\pi}$, то из (53) вытекает, что

$$\lambda_{\pi}(q, y) = \psi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c) \quad (q, y \in Q). \quad (63)$$

Из (46) и (52) вытекает, что

$$\varphi(x) + \psi(q) + c = q' \Leftrightarrow \varphi(\psi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c)) + \psi(q) + c = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{lr}(q, y) = \varphi(\psi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \varphi(q) - c) + \psi(q) + c) \quad (q, y \in Q). \quad (64)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 26. Предположим, что $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда для автомата Мура $B_{lr} = (Q, Q, Q, \delta_{lr}, \lambda_{lr})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{lr}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{lr}, \lambda_{lr})$ определяются соответственно формулами (64) и (63).

Построим автомат $B_{ll}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$, обратный для автомата Мура $B_{ll} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$.

Так как $\lambda_{ll} = \lambda_{lr}$, то из (56) вытекает, что

$$\lambda_{lr}(q, y) = \zeta^{-1}(y) \circ q \quad (q, y \in Q). \quad (65)$$

Из (42) и (55) вытекает, что

$$x \circ q = q' \Leftrightarrow (\zeta^{-1}(y) \circ q) \circ q = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{ll}(q, y) = (\zeta^{-1}(y) \circ q) \circ q \quad (q, y \in Q). \quad (66)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 27. Для каждого автомата Мура $B_{ll} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{ll}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$ определяются соответственно формулами (66) и (65).

Следствие 14. Для каждого автомата Мура $B_{ll} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, где $(Q, \circ)$ – квазигруппа, а $\zeta: Q \rightarrow Q$ – перестановка, при задании квазигруппы таблицей Кэли обратный автомат $B_{ll}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$ функционирует в два раза медленнее, чем исходный автомат $B_{ll} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$.

Пусть $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент.

Так как $\lambda_{ll} = \lambda_{lr}$, то из (59) вытекает, что

$$\lambda_{ll}(q, y) = \varphi^{-1}(\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c) \quad (q, y \in Q). \quad (67)$$

Из (46) и (58) вытекает, что

$$\varphi(x) + \psi(q) + c = q' \Leftrightarrow (\zeta^{-1}(y) - \psi(q) - c) + \psi(q) + c = q' \Leftrightarrow \zeta^{-1}(y) = q'.$$

Следовательно,

$$\delta_{ll}(q, y) = \zeta^{-1}(y) \quad (q, y \in Q). \quad (68)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 28. Предположим, что $(Q, \circ)$ – Т-квазигруппа, причем $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где (φ, ψ) – пара автоморфизмов абелевой группы $(Q, +)$, а $c \in Q$ – фиксированный элемент. Тогда для автомата Мура $B_{ll} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$, определяемого упорядоченной парой $((Q, \circ), \zeta)$, функции переходов и выходов обратного автомата $B_{ll}^{-1} = (Q, Q, Q, \delta_{ll}, \lambda_{ll})$ определяются соответственно формулами (68) и (67).

4. Приложения автоматов на квазигруппах.

4.1. Математические модели поточных шифров.

Каждый автомат $C_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_{uv}, \lambda_{uv})$ ($C \in \{A, B\}, u, v \in \{r, l\}$) является обратимым автоматом. Поэтому любая упорядоченная пара начальных автоматов $((C_{uv}, q), (C_{uv}^{-1}, q))$ ($q \in Q$) представляет собой математическую модель поточного шифра, в которой начальный автомат (C_{uv}, q) используется для шифрования информации, а начальный автомат (C_{uv}^{-1}, q) – для ее расшифрования.

Анализ построенных в предыдущих двух разделах обратных автоматов C_{uv}^{-1} ($C \in \{A, B\}, u, v \in \{r, l\}$) показывает, что в процессе шифрования/расшифрования оба автомата C_{uv} и C_{uv}^{-1} движутся в пространстве состояний Q по одной и той же траектории в одном и том же направлении. Это обстоятельство может быть эффективно использовано для организации дополнительного контроля ошибок, возникающих при передаче информации по каналу связи.

При использовании пары начальных автоматов $((C_{uv}, q), (C_{uv}^{-1}, q))$ ($q \in Q$) в качестве математической модели поточного шифра естественно выбирать начальное состояние q в качестве части секретного сеансового ключа, автомат C_{uv} – в качестве секретного ключа средней длительности, а упорядоченную пару $((Q, \circ_1), (Q, \circ_2))$ (для автомата Мили) и упорядоченную пару $((Q, \circ), \zeta)$ (в случае автомата Мура) – в качестве секретного долговременного ключа.

Каждый автомат C_{uv} ($C \in \{A, B\}, u, v \in \{r, l\}$) является приведенным 1-диагностируемым автоматом. Поэтому идентификация начального состояния q автомата A_{uv} сводится к решению при известных значениях $x, y \in Q$ уравнения $q \circ_2 x = y$ (если $v = r$) и уравнения $x \circ_2 q = y$ (если $v = l$). Аналогичным образом, идентификация начального состояния q автомата B_{uv} сводится к решению при известных значениях $x, y \in Q$ уравнения $\zeta(q \circ x) = y$

(если $v = r$) и уравнения $\zeta(x \circ q) = y$ (если $v = l$). Отсюда вытекает, что сложность идентификации начального состояния q автомата C_{uv} не ниже, чем сложность решения простейшего уравнения в квазигруппе.

В этой связи привлекательным является то обстоятельство, что достаточно высокой является сложность решения уравнения в квазигруппах, заданных в неявном виде. Нетривиальным классом таких квазигрупп являются Т-квазигруппы.

Действительно, пусть $(Q, +)$ – заданная в неявном виде абелева группа (которая может рассматриваться как часть секретного ключа), а (φ, ψ) – пара автоморфизмов этой абелевой группы (которая также может рассматриваться как часть соответствующего секретного ключа). Тогда заданная в неявном виде квазигруппа $(Q, \circ)$, где $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, где $c \in Q$ – фиксированный элемент (который также может рассматриваться как часть соответствующего секретного ключа), является Т-квазигруппой. Для того чтобы решать уравнения в этой квазигруппе необходимо вначале решить задачи идентификации пары автоморфизмов (φ, ψ) и элемента c . Известно, что эти задачи идентификации являются трудными задачами. При этом необходимым условием для решения этих задач является наличие у криптоаналитика средств, обеспечивающих проведение с исследуемым автоматом, при возможности установки его в требуемые начальные состояния, кратных экспериментов заранее неизвестной кратности и высоты.

Задача идентификации секретного сеансового ключа существенно усложняется, если используется нестационарная модель поточного шифра. Общая схема такого шифра была предложена в [10]. Основная идея этой схемы состоит в том, чтобы инициализация псевдослучайных генераторов управляла выборами автоматов, принадлежащих заданному семейству автоматов, а также выбором начального состояния этих автоматов. Таким образом, секретным сеансовым ключом является именно настройка псевдослучайных генераторов.

Нетривиальным примером, заслуживающим отдельного исследования при построении нестационарных моделей поточных шифров, являются семейства автоматов, определяемые системой обратных квазигрупп. Безусловным достоинством этих семейств автоматов является быстрый переход от одного автомата к другому.

4.2. Семейства хэш-функций.

Автоматы без выхода, соответствующие автоматам $C_{uv} = (Q, Q, Q, \delta_{uv}, \lambda_{uv})$ ($C \in \{A, B\}, u, v \in \{r, l\}$), имеют вид $D_{uv} = (Q, Q, \delta_{uv})$. Каждый инициальный автомат (D_{uv}, q) ($u, v \in \{r, l\}, q \in Q$) реализует отображение $\Delta_q^{(uv)}: Q^+ \rightarrow Q$ ($q \in Q$), определяемое равенством $\Delta_q^{(uv)}(p) = \delta_{uv}(q, p)$ ($p \in Q^+$). Это отображение представляет собой математическую модель некоторой хэш-функции. Таким образом, каждый инициальный автомат (D_{uv}, q) ($u, v \in \{r, l\}, q \in Q$) определяет некоторое семейство хэш-функций.

Как было установлено выше, автоматный граф автомата $D_{uv} = (Q, Q, \delta_{uv})$ ($u, v \in \{r, l\}$) является размеченным полным $|Q|$ -вершинным направленным графом с петлей в каждой вершине. Нетрудно доказать, что каждое отображение $\Delta_q^{(uv)}: Q^+ \rightarrow Q$ ($u, v \in \{r, l\}, q \in Q$) удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) для любых $q, q' \in Q$ истинно равенство

$$|\{x \in Q \mid \Delta_q^{(uv)}(x) = q'\}| = 1;$$

- 2) для любых $q, q', q'' \in Q$ ($q \neq q'$) истинно равенство

$$\{x \in Q \mid \Delta_q^{(uv)}(x) = q''\} \cap \{x \in Q \mid \Delta_{q'}^{(uv)}(x) = q''\} = \emptyset.$$

В [11] показано, что отображения, удовлетворяющие этим условиям, представляют собой хэш-функции, обладающие высокой вычислительной стойкостью. Поэтому исследование возможности применения автоматов без выхода, определенных на квазигруппах, в качестве математических моделей семейств криптографических хэш-функций является актуальной с теоретической и прикладной точки зрения.

Заключение. В настоящей работе определены и исследованы автоматные модели Мили и Мура, заданные рекуррентными соотношениями над конечными квазигруппами и показана возможность их использования при построении поточных шифров и криптографических хэш-функций. Полученные результаты показывают, что особый интерес представляют автоматные модели, заданные рекуррентными соотношениями на конечных Т-квазигруппах.

Детальный анализ структуры и свойств таких автоматов в зависимости от абелевой группы, ее автоморфизмов и элементов, используемых при определении Т-квазигрупп, представляет возможное направление дальнейших исследований. Другое направление связано с анализом сложности решения задач идентификации для таких автоматов, что в конечном итоге характеризует вычислительную стойкость отображений, реализуемых этими автоматами. Третье направление исследований состоит в детальном анализе вычислительной стойкости поточных шифров и хэш-функций, определяемых на основе введенных моделей автоматов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Марков В. Т., Михалев А. В., Грибов А. В. и др. Квазигруппы и кольца в кодировании и построении криптосхем // Прикладная дискретная математика. – 2012. – № 4. – С. 31–52.
2. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. – 2008. – № 2. – С. 28–32.
3. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. – 2009. – V. 17. – No. 2 (50). – P. 193–228.
4. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
5. Белявская Г. Б., Попович Т. В. Точно парастрофно-ортогональные квазигруппы и полные графы // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16. – Вып. 8. – С. 17–26.
6. Кепка Т., Nemes P. T-quasigroups. I // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. – 1971. – Vol. 12. – № 1. – P. 39–49.
7. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматлит, 1962. – 476 с.
8. Гварамия А. А. Представления квазигрупп и квазигрупповые автоматы графы // Фундаментальная и прикладная математика – 1997. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 775–800.
9. Гварамия А. А. Квазигруппы. Представления. Автоматы // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т. 12. – № 2. – С. 15–21.
10. Скобелев В. В., Скобелев В. Г. Анализ шифрсистем. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2009. – 479 с.
11. Скобелев В. В. Автоматы на алгебраических структурах. Модели и методы их исследования. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2013. – 307 с.

Скобелев В. В., д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
 Скобелев В. Г., д-р фіз.-мат. наук, д-р техн. наук, проф.,
 Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ
 Щербаків В. О., д-р фіз.-мат. наук, проф.,
 Інститут математики та інформатики Молдови, Кишинев

АВТОМАТИ НА КВАЗІГРУПАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

У даній роботі визначено та досліджено моделі автоматів Мілі та Мура, які визначено рекурентними співвідношеннями на скінченних квазігрупах загального виду, а також на Т-квазігрупах. Моделі автоматів Мілі, а також моделі автоматів Мура, які запропоновано в даній роботі, відрізняються одна від одної незалежним вибором лівого, або правого множення стану автомату на вхідний символ при визначенні функцій переходів та виходів автомату. Встановлено, що запропоновані автоматні моделі є оборотними автоматами. Для кожної з запропонованих моделей побудовано та досліджено обернений автомат. Оцінена часова складність обчислень, які здійснюють запропоновані автоматні моделі. Показана можливість застосування запропонованих автоматів Мілі та Мура у якості математичних моделей поточних шифрів, а також можливість застосування відповідних автоматів без виходу у якості математичних моделей криптографічних геш-функцій.

Ключові слова: скінченні квазігрупи, Т-квазігрупи, автомати Мілі та Мура, оборотні автомати, поточні шифри, криптографічні геш-функції.

Skobelev V. V., Dr. Phys. Math. Sci., Senior Researcher,
 Skobelev V. G., Dr. Phys. Math. Sci., Dr. Tech. Sci., Professor,
 V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine, Kyiv
 Shcherbakov V. A., Dr. Phys. Math. Sci., Professor,
 Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Chisinau

AUTOMATA OVER QUASIGROUPS AND THEIR APPLICATIONS

In the given paper there are defined models of Mealy and Moore automata that are presented via recurrence relations over finite quasigroups of general type as well as of T-quasigroups. Models of Mealy automata as well as of Moore automata proposed in the given paper differ from each other by independent choice of the left or right multiplication of the state of an automaton by the input symbol. It has been established that proposed automata models are invertible ones. For each proposed model the inverse automaton has been designed. Time complexity for computations carried out by proposed automata models has been estimated. It has been illustrated the possibility of application of proposed Moore and Mealy automata in the role of mathematical models of stream ciphers as well as the possibility of application of corresponding automata without output function in the role of mathematical models of cryptographic hash-functions.

Keywords: finite quasigroups, T-quasigroups, Mealy and Moore automata, invertible automata, stream ciphers, cryptographic hash-functions.

УДК 517.929.4

D. Khusainov, Dr. of Sc., prof., S. Kamratov, ingénieur,
 Kijv Taras Shevchenko National University of Kijv,
 Irada Dzhalladova, Dr. of Sc., prof.,
 Kijv Vadim Getman National Economical University of Kijv

CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF NONLINEAR SYSTEMS

One of the main requirements for the mathematical models of dynamic systems is the requirement of stability of their solutions, in particular the stability of stationary equilibria. At the time, the fact of establishing stability for most technical systems is insufficient. Even for linear time-invariant systems is the presence on the diagonal terms can lead to a "large emissions" at the end times. This can destroy the technical systems. In the report the system of linear equations stationary is considered. The research is conducted using the second method of Lyapunov with quadratic type function. Majoring estimate of the convergence solutions is received. In the future, we consider the nonlinear system with quadratic right-hand side. It is assumed that the linear part of the system is the asymptotically stable. Estimate of the area of no stability is reserved. For solutions from the field of no stability by the convergence of solutions to the equilibrium position is calculated [1–10].

Key words: stability, Lyapunov function, differential equations, delay.

INTRODUCTION. When solving practical tasks establish only one fact stability is often not enough. So all solutions of the linear system

$$\dot{x} = -x + \alpha y, \quad \dot{y} = -y$$

asymptotically stable under arbitrary α . However, their convergence depends on the parameter α . When $\alpha = 0$ the solution of the Cauchy problem has the form

$$x(t) = x(0)e^{-t}, \quad y(t) = y(0)e^{-t}.$$

And all solutions tend to zero monotonically to the equilibrium position. When $\alpha \neq 0$ the solution of the Cauchy problem $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ has the form

$$x(t) = (x_0 + ay_0t)e^{-t}, \quad y(t) = y_0e^{-t}.$$

At $\alpha > 2$ at the time

$$t_1 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - \alpha x_0 y_0}{2\alpha x_0 y_0}$$

"emission trajectory" and its maximum value has the form

$$x(t_1) = (x_0 + ay_0t_1)e^{-t_1}, \quad y(t_1) = y_0e^{-t_1}.$$

Thus, important is not so much the establishment of the fact of sustainability as having quantitative estimates of the behavior of solutions.

SYSTEM WITHOUT DELAY. In this section, we consider linear stationary systems and systems with quadratic right-hand side with one lag. Estimates of convergence of decisions are received with use of a method of square functions of Lyapunov.

Linear stationary systems. Estimates of convergence solutions for linear time-invariant systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{1.1}$$

can be obtained using the method of Lyapunov quadratic functions. The Lyapunov function is taken as a quadratic form $V(x) = x^T H x$, where H the symmetric positive definite matrix is a solution of the Lyapunov equation

$$A^T H + HA = -C. \quad (1.2)$$

For quadratic functions have a two-way evaluation

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2. \quad (1.3)$$

Here $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ the extreme eigenvalues of a symmetric, positive definite matrices H , under vector and matrix norms are understood

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad |B| = \left\{ \lambda_{\max}(B^T B) \right\}.$$

The complete derivative of the Lyapunov function along the trajectory of system (1.1) has the form

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T(t) (A^T H + HA) x(t).$$

You know, if the matrix A is asymptotically stable, a matrix Lyapunov equation

$$A^T H + HA = -C, \quad (1.4)$$

has a unique solution positive definite matrix H with arbitrary positive definite matrix C .

Using it, we obtain a linear differential inequality

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} V(x(t)).$$

The solution is to

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} t \right\}.$$

And, again using (1/3) to solve system (1.1) we obtain

$$|x(t)| \leq |x(0)| \phi(H) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \psi(H) t \right\}, \quad \phi(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}, \quad \psi(H) = \frac{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)}{\lambda_{\max}(H)}. \quad (1.5)$$

Quadratic systems. Let's consider the following a system with non-linearity of the particular (individual) forms namely systems with quadratic right-hand side, written in vector-matrix form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t) Bx(t). \quad (1.5)$$

where $B = [B_1, B_2, \dots, B_n]^T$ rectangle $n^2 \times n$ – matrix consisting symmetric matrix $n \times n$ – matrix B_i , $i = \overline{1, n}$,

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1n}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{1n}^i & b_{2n}^i & \dots & b_{nn}^i \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n},$$

$X^T(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]$ rectangular $n \times n^2$ – matrix consisting of square $n \times n$ – matrix $X_i(t)$, in which the i – x rows are vectors $x(t)$, the other elements are zero, i.e.

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Let the matrix A of the linear part of (2.1) is asymptotical stable. Then as it follows from the theory of stability of the linear approximation, the zero solution of a nonlinear system is also asymptotical stability. If it's taken as a quadratic form $V(x) = x^T H x$ of the Lyapunov function, then its derivative with respect to the system (2.1) has the form

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T(t) \left[(A^T H + HA) + (B^T X(t) H + H X^T(t) B) \right] x(t). \quad (1.6)$$

If matrix A is asymptotical stable, then for any positive definite matrix C , there is Lyapunov matrix equation (1.2) has a unique solution, a positive definite matrix C . Taking in account that the solution of this Lyapunov equation, we obtain

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -x^T(t) \left[C - (B^T X(t) H + H X^T(t) B) \right] x(t). \quad (1.7)$$

The stability domain of the zero equilibrium is the interior surface of the level of the Lyapunov function, whithing the area

$$G_0 = \{x \in R^n : C - B^T X H - H X^T B > \Theta\},$$

where the symbol denotes

$$C - B^T X H - H X^T B > \Theta$$

is positive definition of matrix.

Let's replace this condition with more "rough." Since, by the selected matrix and vector norms, then the total derivative of the Lyapunov function is satisfied

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -[\lambda_{\min}(C) - 2|H||B||x(t)|] |x(t)|^2. \quad (1.8)$$

Denote

$$G_0 = \left\{ x \in R^n : |x| < \frac{1}{2} \frac{\psi(H)}{|B|} \right\}. \quad (1.9)$$

Then the region of "guarantee" stability has the form

$$G_{r_0} = \max_{r>0} \{G_r : G_r \subset G_0\}, \quad G_r = \{x \in R^n : x^T H x < r^2\}. \quad (1.10)$$

If it follows from this dependence to determine the "maximum" of sustainable it should be placed inside a sphere of radius

$$R = \frac{\psi(H)}{2|B|}, \quad \psi(H) = \frac{\lambda_{\min}(-A^T H - H A)}{\lambda_{\max}(H)}$$

ellipse $x^T H x = r^2$ and "stretch" $r \rightarrow \infty$ as long as the ellipse touches the sphere.

We obtain an estimate of the convergence, the initial position of with it to "guarantee of stability".

Theorem 1.1. Suppose the matrix A of the linear part of system (2.1) asymptotically stable. Then the trivial solution of the system is asymptotically stable and for your solutions with initial conditions $x(0) \in G_{r_0}$

$$|x(t)| \leq \frac{\psi(H)|x(0)|}{\left[\psi(H) - 2|B|\phi(H)|x(0)| \right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2|B|\phi(H)|x(0)|} \quad (1.11)$$

are hold next estimates convergence

Nonlinear systems in general form. Consider a nonlinear system with a dedicated linear part

$$\dot{x} = Ax + R(x) \quad (1.12)$$

The total derivative of a quadratic Lyapunov function by virtue of the system (3.1) has the form

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T(t)(A^T H + H A)x(t) + 2x^T(t)HR(x(t)).$$

Let the vector functional $R(x)$ of a higher order than the first, and satisfies the condition,

$$|R(x)| \leq N|x|^{1+\alpha}, \quad N > 0, \quad \alpha > 1.$$

Then we get

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(C)|x(t)|^2 + 2\lambda_{\max}(H)N|x(t)|^{2+\alpha}. \quad (1.13)$$

As for systems with a square right-hand side, write

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\left[\lambda_{\min}(C) - 2\lambda_{\max}(H)N|x(t)|^\alpha \right] |x(t)|^2.$$

And in a bowl

$$G_\alpha = \left\{ x \in R^n : |x| < \left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)N} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

full derivative is negative definite. A guaranteed region of asymptotic stability is given by

$$G_{r_\alpha} = \max_{r>0} \{G_r : G_r \subset G_\alpha\}, \quad G_r = \{x \in R^n : x^T H x < r^2\}.$$

Obtain an estimate of the convergence solutions of the system (3.1), the initial conditions of the buyout are in the stability region. Now we have next theorem:

Theorem 1.2. Let the matrix A of the linear part of the non-linear system (3.1) is asymptotically stable. Then the zero solution of the system (1.12) is asymptotically stable and its solution satisfying the initial conditions

$$x(0) \in G_{r_0},$$

we have the following convergence estimate

$$|x(t)| \leq \left\{ \frac{\psi(H)|x(0)|}{\left[\psi(H) - 2N\phi(H)|x(0)| \right] e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2N\phi(H)|x(0)|} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (1.14)$$

Remark 3.1. At $\alpha = 1$ we receive estimates of systems with square right part.

SYSTEM WITH DELAY. Research of systems of the differential equations with the deviating argument with use of the second method of Lyapunov is conducted in two directions.

In one of them, Krasovskii N. N. proposed to consider the segment of the trajectory $x(t+s)$, $-\tau \leq s \leq 0$ as a point in a banach space. And $x(t) \equiv 0$ systems with an after-effect (with delay or neutral type) to consider research of stability of the zero decision how research of stability of a point $x(t) \equiv 0$ systems of the differential equations determined in functional space. Instead of Lyapunov's functions Lyapunov-Krasovsky's functionalities were entered, respectively. Theorems of stability and asymptotic stability were as appropriate formulated. The value of a method was its theoretical completeness. Theorems (generally) had necessary and sufficient character. Essential weakness of a method was difficulty in case of creation of functionality (especially for nonlinear systems) a specific type.

There is a system of the differential equations with the late argument

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-\tau)), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n,$$

meeting a condition $F(0,0)=0$, i.e. having the solution of zero $x(t) \equiv 0$. If there is a functionality $V[x(t)]$, that satisfies the bilateral estimates

$$a(\|x(t)\|) \leq V[x(t)] \leq b(\|x(t)\|),$$

whose derivative along the solutions $x(t)$

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{V[x(t) + hF(x(t), x(t-\tau))] - V[x(t)]\}$$

is a functional satisfying the condition

$$\frac{d}{dt}V[x(t) \leq -c(\|x(t)\|)],$$

where $a(\bullet)$, $b[\bullet]$, $c(\bullet)$ – a continuous, monotonically increasing on the half-line R^+ functions that satisfy the conditions

$$a(0) = b(0) = c(0) = 0,$$

and $\|x(t)\|$ – a certain norm in a function space $C_{[-\tau,0]}^1$, the solution $x(t) \equiv 0$ is asymptotically stable.

In the second direction of the second Lyapunov method proposed by Razumikhin B. S., has been used as before, nite-dimensional Lyapunov functions. But when evaluating the total derivative in force of system with delay was used an additional condition, called "condition Razumihin's".

As follows from the definition of stability of the zero solution and the basic theorems of the Lyapunov type, the initial disturbance is within the level surfaces of the Lyapunov function. In the proof of theorems of Lyapunov type, on the contrary, it is assumed that the decision was reached – the neighborhood of the origin. This neighborhood contains the area inside the level surface. It is proved that this is impossible, since the vector field of the system is inside (the derivative of the Lyapunov function is negative defined). Razumihin B. S. proposed to estimate the derivative of a nite-dimensional Lyapunov function under the assumption that prehistory is not in an arbitrary point in phase space, and inside the level surfaces of the Lyapunov function. Analytically, this condition has the

$$V(x(s), s) < V(x(t), t), \quad s < t.$$

Benefit of this approach was the possibility of use of well developed device of finite-dimensional functions of Lyapunov (especially for nonlinear systems). It should be noted that in case of practical research of systems with an after-effect both approaches give (generally) only sufficient stability conditions and majorant estimates of convergence of decisions.

Linear systems. The method of Lyapunov functions with the condition Razumihin's. Stability, uniform delay and stability that depends on the deviation of the argument.

In this part of the report describes the estimation of convergence of solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with retarded argument

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad x(t) \in R^n. \quad (2.1)$$

As a rule, for linear dynamic systems using the Lyapunov function of quadratic form. Let us estimate the convergence of the solutions $x(t)$, $t \geq 0$ system (2.1.1) is obtained using the finite-dimensional Lyapunov functions. Using the inequality of quadratic forms, the condition Razumihin's B. S. can be written as follows

$$\lambda_{\min}(H)|x(s)|^2 \leq V(x(s)) < V(x(t)) \leq \lambda_{\max}(H)|x(t)|^2.$$

From here we receive

$$|x(s)| < \sqrt{\phi(H)}|x(t)|, \quad \phi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}.$$

The conclusion about the stability of the system (2.1) will be made on the basis of "comparing" it with some so-called "model" system (comparison system) with the "stability margin"

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t). \quad (2.2)$$

It is assumed that the system (2.2) is asymptotically stable. In this case as the symmetric, positive definite matrix H , included in the Lyapunov function $V(x) = x^T H x$, you can take the solution of the matrix Lyapunov equation

$$(A+B)^T H + H(A+B) = -C, \quad (2.3)$$

which, if any positive definite matrix C has a unique solution – positive definite matrix H .

The conditions of asymptotic stability of system (2.1.1), independent of the lag $\tau > 0$, have the following form.

Theorem 2.1. Suppose that the system without delay (2.1) is asymptotically stable. Let there exist a positive definite matrix H , which is the solution of the matrix equation (2.1.3), at which the following inequality is satisfied

$$\lambda_{\min}(-A^T H - HA) - 2|HB|\left(1 + \sqrt{\phi(H)}\right) > 0, \quad \phi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad (2.4)$$

Then the system with delay (2.1) is asymptotically stable for any delay $\tau > 0$.

And for any solution of $x(t)$ of system (2.1) at $t > 0$ will run $|x(t)| < \varepsilon$, only $\|x(0)\|_{\tau} < \delta(\varepsilon)$, where

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\phi(H)}}. \quad (2.5)$$

The conditions stated in theorem 2.1.1, provide exponential stability, i.e. there are constant $N > 0$ and $\gamma > 0$, which is true

$$|x(t)| < N\|x(0)\|_{\tau} e^{-\frac{1}{2}\gamma t}, \quad t > 0.$$

When obtaining these values nonautonomous function of Lyapunov is already used $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$, where matrix H is the solution of the matrix Lyapunov equation, a constant $\gamma > 0$ depends on system parameters.

Theorem 2.2. Let the system without delay (2.1.2) asymptotically steady also exist positively certain matrix of H , which is the solution of the equation of Lyapunov (2.1.3), at which the inequality is fair (2.1.4). Then for decisions $x(t)$ of system with delay (2.1.1) the following assessment of exponential decrease is fair

$$|x(t)| < \sqrt{\phi(H)} \|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

where

$$\gamma \leq \left\{ \frac{\tau}{2} \left[\ln \frac{\lambda_{\min}(C) - 2|HB|}{2|HB|\sqrt{\phi(H)}} \right]^{-1} + \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C) - 2|HB|(1 + \sqrt{\phi(H)})} \right\}^{-1}, \quad (2.7)$$

$$C = -(A + B)^T H - H(A + B).$$

Let us formulate conditions for asymptotic stability, depending on the value $\tau > 0$.

Theorem 2.3. Let the system without delay (2.1.2) asymptotically be steady. Then at $\tau < \tau_0$, where

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|HB|(|A| + |B|)\sqrt{\phi(H)}} \quad (2.8)$$

is asymptotically stable and the system with delay (2.1.1). At the same time for any decision $x(t)$ system (2.1.1) of $t > 0$ will run $|x(t)| < \varepsilon$, only $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$, where

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \frac{e^{-|A|\tau} \varepsilon}{1 + |B|\tau \sqrt{\phi(H)}}. \quad (2.9)$$

Get estimates for the convergence of the solutions $x(t)$ assuming the conditions of the theorem. The proof will be carried out using a non-Autonomous Lyapunov function $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$.

Theorem 2.4. Let the system without delay (2.1.2) asymptotically be steady. Then at $\tau < \tau_0$, where τ_0 identified (2.8), it is defined in (2.8), for any decision $x(t)$ system (2.1.1) at $t > \tau$ the following exponential assessment of convergence will be carried out

$$|x(t)| < \sqrt{\phi(H)} (1 + |B|\tau) \exp\left\{|A|\tau - \frac{1}{2}\gamma(t - \tau)\right\}, \quad (2.10)$$

where

$$\gamma = \frac{1 - \xi}{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} - \frac{(1 - \xi)\tau}{\ln \xi}}, \quad \xi = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (2.11)$$

2.2. Receiving exponential estimates of convergence of solutions of the equations with delay by method of functionalities of Lyapunov-Krasovskiy

Again we will consider linear system with one delay

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (2.12)$$

Most natural to take the functional quadratic form

$$V[x(t)] = x^T(t) H x(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t + s) G x(t + s) ds \quad (2.13)$$

with positive definite matrix H and G . This functionality satisfies the bilateral estimates

$$\lambda_{\min}(H) |x(t)|^2 + \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_2^2 \leq V[x(t)] \leq \lambda_{\max}(H) |x(t)|^2 + \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_2^2 \quad (2.14)$$

where

$$\|x(t)\|_2 = \left\{ \int_{-\tau}^0 |x(t + s)|^2 ds \right\}^{1/2},$$

$\lambda_{\min}(\bullet)$, $\lambda_{\max}(\bullet)$ – minimum and maximum own numbers of the corresponding symmetric, positively certain matrixes.

For a functionality derivative $V[x(t)]$ owing to system (2.1) the ratio is fair

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] = -\left(x^T(t), x^T(t - \tau)\right) \begin{bmatrix} -A^T H - H A - G & -H B \\ -B^T H & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix}.$$

Here

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) (|x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2),$$

where

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - H A - G & -H B \\ -B^T H & G \end{bmatrix}.$$

Thus, if there exist a positive definite matrix H and G , under which the matrix $S[G, H]$ will also be positive definite, the system (1.2.3) is uniformly asymptotically stable for the delay $\tau > 0$.

Currently, there are a lot of types of functionals of sums of quadratic forms and integrals of quadratic forms. The simplest are

$$V[x(t)] = x^T(t)H_0x(t) + \gamma \int_{t-\tau}^t x^T(s)H_0x(s)ds$$

where H_0 – a positive definite matrix, and $\gamma > 0$ is some constant. Considered a functional of the form

$$V[x(t)] = x^T(t)H(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{t-\tau}^t H(s-t+\tau)Bx(s)ds + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t x^T(s_1)B^TH(s_2-s_1)Bx(s_2)ds_1ds_2$$

A number of studies have used the most general form of a quadratic functional

$$V[t, x(t)] = x^T(t)P(t)x(t) + x^T(t) \left[\int_{-\tau}^0 Q(t, s)x(s)ds \right] + \left[\int_{-\tau}^0 x^T(s)Q^T(t, s)ds \right] x(t) + \\ + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(s_1)R(t, s_1, s_2)x(s_2)ds_1ds_2.$$

Here $P(t), Q(t, s), R(t, s_1, s_2)$ – square matrix, $P(t)$ – symmetric, positive definite matrix, $R(t, s_1, s_2)$ – symmetric matrix. It is assumed that the elements of these matrices are limited and have piecewise continuous derivatives.

However, the conditions of stability, formulated in terms of this functional, contain a system of matrix differential equations with cumbersome boundary conditions and almost never used.

Consider the possibility of establishing convergence estimate for solutions $x(t)$, $x(t) \equiv \phi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ systems of the form (2.2.1). For this, we use the functional of the form

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} \left\{ x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^T(t+s)Gx(t+s)ds \right\}. \quad (2.16)$$

We denote

$$\phi_{11}(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \phi_{12}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \phi_{21}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(G)}, \quad \phi_{22}(G) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}, \\ S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^TH - HA - G & -HB \\ -B^TH & G \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Fairly following statement.

Theorem 2.5. Let there exist a positive definite matrix G and H , in which the matrix $S[G, H]$ is also positively defined. Then the system (2.1) is asymptotically stable and its solutions $x(t)$ fair the following upper exponential estimates for the convergence

$$|x(t)| \leq \left[\sqrt{\phi_{11}(H)}|x(0)| + \sqrt{\phi_{12}(G, H)}\|x(0)\|_{\tau, \beta} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2}\varsigma t \right\}, \quad t \geq 0, \quad (2.18)$$

and

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq \left[\sqrt{\phi_{21}(G, H)}|x(0)| + \sqrt{\phi_{22}(G)}\|x(0)\|_{\tau, \beta} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2}\varsigma t \right\}, \quad t \geq 0, \quad (2.19)$$

where

$$\varsigma(\beta, \gamma) = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[G, H])}{\lambda_{\max}(H)}, \beta \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} + \gamma \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} \right] \right\}, \quad (2.20)$$

The value $\beta \geq 0$ can be arbitrary when

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) \geq \lambda_{\max}(G)$$

and

$$\beta \leq \frac{1}{\tau} \ln \left\{ \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(G) - \lambda_{\min}(S[G, H])} \right\},$$

if

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) < \lambda_{\max}(H).$$

Value γ satisfies the condition $\gamma \leq \beta$.

Consider the case, where could not find matrix G and H , in which the matrix $S[G, H]$ will be positive definite.

We denote

$$S[G, H, \gamma] = \begin{bmatrix} -A^TH - HA - \gamma H - G & -HB \\ -B^TH & G \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Obviously, due to the choice of the scalar $\gamma < 0$ a matrix $S[G, H, \gamma]$ can always be positive definite.

Lemma 2.1. Let the matrix G , H is positive definite and the following inequality is satisfied

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}[-A^TH - HA - G - HBG^{-1}B^TH]}{\lambda_{\max}(H)} \quad (2.22)$$

Then the matrix will also be positive definite.

Using this lemma, we get the following statement.

Theorem 2.6. Let there are (or aren't found) a positive definite matrix G , H , at which the matrix $S[G, H]$ is also positively defined. If the value γ is selected according to inequality (2.2.11) and $\beta \geq \gamma$, for solutions of $x(t)$ system (2.1) is true upper exponential estimates for the convergence (2.2.7)

$$|x(t)| \leq \left[\sqrt{\phi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\phi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{\tau, \beta} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varsigma t \right\}, \quad t \geq 0,$$

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq \left[\sqrt{\phi_{21}(G, H)} |x(0)| + \sqrt{\phi_{22}(G)} \|x(0)\|_{\tau, \beta} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varsigma t \right\}, \quad t \geq 0,$$

And

$$\varsigma(\beta, \gamma) = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[G, H, \gamma])}{\lambda_{\max}(H)} + \gamma, \beta \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} + \gamma \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)} \right] \right\}, \quad (2.23)$$

The value β can be arbitrary when

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \gamma]) \geq \lambda_{\max}(G)$$

and

$$\beta \leq \frac{1}{\tau} \ln \left\{ \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\max}(G) - \lambda_{\min}(S[G, H, \gamma])} \right\},$$

If

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \gamma]) < \lambda_{\max}(H).$$

Remark 2.1. As for the value $\|x(t)\|_{\tau, \beta}^2$ value upper bounds

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 = \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} |x(t+s)|^2 ds \leq \max_{-\tau \leq s \leq 0} \left\{ |x(t+s)|^2 \right\} \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} ds \leq \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \tau}) \|x(t)\|_{\tau}^2 \leq \tau \|x(t)\|_{\tau}^2,$$

where

$$\|x(t)\|_{\tau} = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \{ |x(t+s)| \},$$

the inequality (2.2.7) can be replaced by the following

$$|x(t)| \leq \left[\sqrt{\phi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\phi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{\tau} \right] e^{-\frac{1}{2} \varsigma t}, \quad t \geq 0,$$

or even

$$|x(t)| \leq \left[\sqrt{\phi_{11}(H)} + \sqrt{\phi_{12}(G, H)} \right] \|x(0)\|_{\tau} e^{-\frac{1}{2} \varsigma t}, \quad t \geq 0, \quad (2.24)$$

Remark 2.2. Because marantao type, they contain two free parameter β and γ , and where in the second theorem γ can be negative. If you set the task of finding "optimal estimation" in given class of functionals, the parameters β and γ can be calculated exactly.

Consider the scalar linear differential equation with constant delay

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t - \tau), \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \tau > 0. \quad (2.25)$$

The functional of Lyapunov-Krasovskii functional has the form

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} \left\{ hx^2(t) + g \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^2(t+s) ds \right\}, \quad (2.26)$$

where $h > 0$, $g > 0$ the positive constants. To make divergent perturbations on a finite time interval. Because $h > 0$, $g > 0$ scalaria value, it6

$$\lambda_{\min}(H) = \lambda_{\max}(H) = h, \quad \lambda_{\min}(G) = \lambda_{\max}(G) = g.$$

For the full derivative of the functional along the solutions of an equation is the equality

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= \gamma e^{\gamma t} \left\{ hx^2(t) + g \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\xi \right\} + e^{\gamma t} \left\{ 2hx(t)[-ax(t) + bx(t - \tau)] + gx^2(t) - ge^{-\beta \tau} x^2(t - \tau) \right\} - \\ &\quad - e^{\gamma t} \left\{ \beta g \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

We rewrite it in the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= -e^{\gamma t} \left\{ (\beta - \gamma) g \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\xi \right\} - e^{\gamma t} (x(t), x(t - \tau)) \begin{bmatrix} 2ah - g & -hb \\ -hb & g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix} + \\ &\quad + e^{\gamma t} \gamma hx^2(t) + e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta \tau}) gx^2(t - \tau). \end{aligned}$$

We find $h > 0$, $g > 0$ from the condition of maximum positive definiteness of matrix

$$S[g, h] = \begin{bmatrix} 2ah - g & -hb \\ -hb & g \end{bmatrix}.$$

If the parameters of the equation and the functional of Lyapunov-Krasovskii functional such that then

$$g(2ah - g) - h^2b^2 > 0,$$

as follows from the Sylvester criterion, the matrix $S[g, h]$ will be positive definite. Because $h > 0$, $g > 0$, given the uniformity, put $h = 1$ can rewrite the inequality as

$$g(2a - g) - b^2 > 0.$$

A function $F(g) = g(2a - g) - b^2$ on a variable g represents a parabola with downward branches. And its extreme value it takes in $g = a$. Thus, the "maximum positive definiteness" of the matrix $S[g, h]$ will be at $g = a$. And the functional of Lyapunov-Krasovskii functional will take the form

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} \left\{ x^2(t) + a \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\xi \right\}.$$

In this case, the matrix $S[g, h]$ has the form

$$S[g, h] = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Here

$$|x(t)| \leq \sqrt{|x(0)|^2 + a \|x(0)\|_{\tau, \beta}^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)t}, \quad \|x(0)\|_{\tau, \beta} \leq \sqrt{\frac{1}{a} |x(0)|^2 + \|x(0)\|_{\tau, \beta}^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)t}, \quad t \geq 0.$$

We denote

$$\varsigma(\beta) = \min \{a - |b|, \beta\}.$$

Since the value β is subject to the extremum, we get the following the most accurate assessment of convergence.

Statement 2.1. Let the condition be satisfied $a > |b|$. Then the scalar equation is asymptotically stable and fair solutions to an exponential estimation convergence

$$|x(t)| \leq \sqrt{|x(0)|^2 + a \|x(0)\|_{\tau, \beta}^2} e^{-\frac{1}{2}\varsigma t}, \quad \|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq \sqrt{\frac{1}{a} |x(0)|^2 + \|x(0)\|_{\tau, \beta}^2} e^{-\frac{1}{2}\varsigma t}, \quad t \geq 0,$$

where

$$\varsigma = \min \left\{ a - |b|, \frac{1}{\tau} \ln \frac{a}{|b|} \right\}.$$

The estimation of perturbations in the case of unstable equations. We rewrite the expression for the total derivative in the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), t] &= -e^{\gamma t} \left\{ (\beta - \gamma) g \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\xi \right\} - \\ &- e^{\gamma t} (x(t), x(t-\tau)) \begin{bmatrix} 2ah - g - \gamma h & -hb \\ -hb & g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix} + e^{\gamma t} (1 - e^{-\beta\tau}) g x^2(t-\tau). \end{aligned}$$

Let $h = 1$, $g = a$. Then

$$S[g, h, \gamma] = \begin{bmatrix} a - \gamma & -b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) = a - \frac{1}{2}\gamma - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}.$$

We assume that $a < |b|$, i.e. the equation is unstable. Then when

$$\gamma < \frac{a^2 - b^2}{a}$$

the matrix $S[g, h, \gamma]$ is positive definite, i.e.

$$\lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) > 0$$

and the expression for the total derivative of the functional can be written in the form

$$\frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq -e^{\gamma t} \lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) |x(t)|^2 - e^{\gamma t} \left\{ \lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) - (1 - e^{-\beta\tau}) a \right\} |x(t-\tau)|^2 - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) a \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2.$$

The value

$$\lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) - a = -\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} < 0,$$

is always negative. When

$$\beta < \frac{1}{\tau} \ln \frac{a}{\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}}$$

for the total derivative of the functions will run inequality

$$\frac{d}{dt} V[x(t), t] \leq -e^{\gamma t} \lambda_{\min}(S[g, h, \gamma]) |x(t)|^2 - e^{\gamma t} (\beta - \gamma) a \|x(t)\|_{\tau, \beta}^2.$$

Statement 2.2. Let the condition be satisfied $a < |b|$. Then the equation is unstable and the solutions fair the following exponential estimate

$$|x(t)| \leq \sqrt{|x(0)|^2 + a\|x(0)\|_{\tau,\beta}^2} e^{-\frac{1}{2}\zeta t}, \quad \|x(0)\|_{\tau,\beta} \leq \sqrt{\frac{1}{a}|x(0)|^2 + \|x(0)\|_{\tau,\beta}^2} e^{-\frac{1}{2}\zeta t}, \quad \zeta = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad t \geq 0.$$

REFERENCE

1. Хусаинов Д. Я. Оценки решений линейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал, Т.32, №5(189), 1991. – С.196–198.
2. Хусаинов Д. Я., Джалладова И. А., Шатирко О. А. Оцінка області стійкості диференціальних систем з квадратичною правою частиною // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2011. – С.227–230.
3. Dzhalladova I. A., Bastinec J., Diblik J., Khusainov D. Ya. Estimates of Exponential Stability for Solutions of Stochastic Control Systems with Delay. – Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. Volume 2011, Article ID 920412, 14 pages, doi: 10.1155/2011/920412.
4. Shatyрко A. V., Khusainov D. Ya. Investigation of Absolute Stability of Nonlinear Systems of Special Kind with Aftereffect by the Lyapunov Functions Method // Journal of Automation and Information Science, 43(7), 2011. – pp. 61–75.
5. Хусаинов Д. Я., Шатирко А. В. Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. – К.: ДП "Інформац.-аналіт. агентство", 2012. – 73 с.
6. Джалладова И. А., Хусаинов Д. Я. Квадратичные системы с запаздыванием // Проблемы управления и информатики, №1, 2013, С. 5–13.
7. Shatyрко O. A., Khusainov D. Ya., Dzhalladova I. A. Modelling processes of population dynamics // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 2014. – С.101–106.
8. Shatyрко A., Nooijen van R., Kolehchikina A. and Khusainov D. Ya. Stabilization of Neutral Type Indirect Control Systems to Absolute Stability State. – Advances in Difference Equations, 2015, 2015:64 DOI 10.1186/S 13662-015-0405-y.
9. Diblik J., Khusainov D.Ya., Bastinec J., Sirenko A.S. Stability and exponential stability of linear discrete systems with constant coefficients and single delay // Applied Mathematics and Computation, Volume 269, 15 Oktober 2015, pp.9-16, doi:10.1016/j.amc.2015.07.037.
10. Хусаинов Д. Я., Диблик И., Ружичкова М. Линейные динамические системы с последствием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. – Киев, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, : ГП Информационно-аналитическое агентство, 2015. – 252 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.16

Хусаинов Д. Я., д-р физ.-мат. наук, проф.,
 Камратов С. В., инж., КНУ имени Тараса Шевченко, Київ
 Джалладова И. А. д-р физ.-мат. наук, проф., КНУ имени Вадима Гетьмана, Київ

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Однією з головних вимог математичного моделювання динамічних систем є вимога стійкості їх розв'язків, зокрема стійкість стаціонарної рівноваги. В той же час, наявність стійкості стаціонарної рівноваги для більшості технічних систем не достатня. Навіть для лінійних інваріантних за часом систем в теперішньому стані зсуви на діагональних членах можуть призвести до великих збурень. Це може зруйнувати систему. В статті розглядаються системи лінійних стаціонарних систем. Для дослідження використовується другий метод Ляпунова з функцією квадратичного типу. Отримані оцінки збіжності розв'язків. В майбутньому і розглянуто нелінійні системи з квадратичною правою частиною. Припущено, що лінійна частина асимптотична стійка. Отримані оцінки області стійкості. Для розв'язків з області стійкості обчислено збіжність розв'язків до стану рівноваги.

Ключові слова: стійкість, функція Ляпунова, диференціальні рівняння, запізнення.

Хусаинов Д. Я., д-р физ.-мат. наук, проф.
 Камратов С. В., инж., КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
 Джалладова И. А. д-р физ.-мат. наук, проф., КНУ имени Вадима Гетьмана, Киев

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Одним из главных требований математического моделирования динамических систем есть требование устойчивости решений, в частности, устойчивость стационарного положения равновесия. В то же время, существование устойчивости стационарного решения для большинства технических систем не является достатным. Даже для линейных стационарных систем возмущения диагональных членов может привести к большому возмущению решений. Это может разрушить техническую систему. В статье рассматриваются системы нелинейных уравнений. Для исследования используется второй метод Ляпунова с функцией квадратичного вида. Получены оценки сходимости решений. В дальнейшем рассмотрены нелинейные системы с квадратичной правой частью. Предполагается, что линейная часть асимптотически устойчива. Получены оценки области устойчивости. Для решений из области устойчивости вычислена оценка сходимости решений к положению равновесия.

Ключевые слова: устойчивость, функция Ляпунова, дифференциальные уравнения, запаздывание.

УДК 517.9

С. М. Чуйко, д-р физ.-мат. наук, проф.,
 Д. В. Сысоев, асп.,

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск

ЛИНЕЙНАЯ МАТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Традиционно изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что дифференциальное уравнение, а также краевое условие, известны и фиксированы [1, 2]. Как правило, изучение периодических задач в случае параметрического резонанса ограничивалось исследованием вопросов устойчивости [3, 4, 5]. В то же время, при изучении периодических краевых задач в случае параметрического резонанса в связи с многочисленными приложениями в электронике [3], теории плазмы [6], нелинейной оптике, механике [7] и станкостроении [8], наряду с нахождением решений требуется вычисление собственной функции соответствующей краевой задачи. Целью данной статьи является построение решений линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса, разрешимость которых обеспечена соответствующим выбором собственной функции краевой задачи. Используемая классификация линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от простоты или кратности корней уравнения для порождающих констант существенно отличается от аналогичной классификация периодических задач в случае параметрического резонанса [4, 5] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [1, 2]. Полученные для линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса условия разрешимости, а также уравнение для порождающих функций обобщают соответствующие условия разрешимости, а также традиционное уравнение для порождающих констант в случае параметрического резонанса [9, 10, 11] – на случай линейных матричных краевых задач [12]. В статье существенно используется техника решения матричных уравнений Ляпунова, а также их обобщений – матричных уравнения Сильвестра [13, 14, 15].

Ключевые слова: матричные краевые задачи, параметрический резонанс, матричные уравнения Сильвестра.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений

$$Z(t, \varepsilon): Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot), h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0; \varepsilon_0], \quad Z(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{R}^p$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) + Z(t, \varepsilon)B + F(t, \varepsilon) + \varepsilon \Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

подчиненных краевому условию

$$LZ(t, \varepsilon) = A(\varepsilon), \quad A(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\delta \times \gamma}. \quad (2)$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z'_0(t, \varepsilon) = AZ_0(t, \varepsilon) + Z_0(t, \varepsilon)B + F(t, \varepsilon), \quad LZ_0(\cdot, \varepsilon) = A(\varepsilon). \quad (3)$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ и $B \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$ – постоянные матрицы. Матричный оператор $\Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon): \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ предполагаем линейным по первому аргументу $Z(t, \varepsilon)$, а также линейным по второму аргументу $h(\varepsilon)$. Матрицы $F(t, \varepsilon)$ и $A(\varepsilon)$ предполагаем непрерывными по независимой переменной $t \in [a; b]$, и по малому параметру $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$. Кроме того, $LZ(t, \varepsilon)$ – линейный ограниченный матричный функционал: $LZ(t, \varepsilon): \mathbb{C}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\delta \times \gamma}$. Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) были приведены в монографии [16]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [17] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [18]. Как известно [16], общее решение $W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t)$, $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ – нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$ задачи Коши [17]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta \quad (4)$$

имеет вид

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

где

$$K[F(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(s)V^{-1}(s)ds$$

– оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (4). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (4) в краевое условие (2), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$LZ(\cdot, \Theta) = A - LK[F(s)](\cdot) \quad (5)$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$ – естественный базис [19] пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и c_j – константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ при этом

$$LW(\cdot, \Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} LU(\cdot) \cdot \Xi^{(j)} V(\cdot) c_j, \quad \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} LU(\cdot) \Xi^{(j)} V(\cdot) c_j = A - LK[F(s)](\cdot).$$

Определим оператор [13, 14] $M[B]: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $M[B] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ составленный из n столбцов матрицы B , а также обратный оператор $M^{-1}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, который ставит в соответствие вектор-столбцу $M[B] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ матрицу $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Q \cdot c = M[A] - M\{LK[F(s)](\cdot)\} \quad (6)$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$, равносильному уравнению (5); здесь

$$Q := \left[M\left[Q^{(1)}\right] M\left[Q^{(2)}\right] \dots M\left[Q^{(\alpha \cdot \beta)}\right] \right], \quad Q^{(j)} := LU(\cdot) \Xi^{(j)} V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}.$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [1, 13, 14, 15]

$$P_{Q_d^*} M\{A - LK[F(s)](\cdot)\} = 0. \quad (7)$$

Здесь P_{Q^*} – ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta \cdot \gamma \times \delta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*} матрицы $Q \in \mathbb{R}^{\delta \cdot \gamma \times \delta \cdot \gamma}$. При условии (7) и только при нем общее решение уравнения (6)

$$c = Q^* M\{A - LK[F(s)](\cdot)\} + P_{Q_r^*} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение [13, 14, 15] матричного уравнения (5)

$$\Theta = M^{-1}\{Q^* M\{A - LK[F(s)](\cdot)\}\} + M^{-1}[P_{Q_r^*} c_r],$$

а также общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2)

$$Z(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s); A](t), \quad \Theta_r := M^{-1} [P_{Q_r} c_r].$$

Здесь P_Q – ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta \times \alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta \times r}$, составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q ,

$$G[F(s); A](t) := W \left\{ t, M^{-1} \left\{ Q^* M [A - LK[F(s)](\cdot)] \right\} \right\} + K[F(s)](t)$$

– обобщенный оператор Грина [12] матричной краевой задачи (2), (4) Q^+ – псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [1, 19], при этом

$$W(t, \Theta_r) := \sum_{k=1}^r U(t) \cdot \Xi^{(jk)} V(t) c_{jk}, \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

– общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2). При условии $P_{Q^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом задача (3) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и A , для которых выполнено условие (7). В свою очередь, при условии $P_{Q^*} = 0$ для краевой задачи (3) имеет место не критический случай, при этом задача (3) разрешима для любых неоднородностей $F(t, \varepsilon)$ и $A(\varepsilon)$. Условие (7) является обобщением соответствующих условий [1] на случай матричной краевой задачи (3).

2. Условия разрешимости. Предположим, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом условие (7) выполнено и задача (1), (2) в малой окрестности решения

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s, \varepsilon); A(\varepsilon)](t)$$

порождающей задачи (3) имеет решение

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_r) + X(t, \varepsilon), \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция $h(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $h_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^p, \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t, \varepsilon): X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

матричной нетеровой краевой задачи

$$dX(t, \varepsilon)/dt = AX(t, \varepsilon) + X(t, \varepsilon)B + \varepsilon \Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), LX(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (8)$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*} MLK [\Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0.$$

Обозначим вектор

$$\tilde{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+p}, \quad \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

В силу непрерывности по $Z(t, \varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ нелинейной функции $\Phi(Z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ приходим к следующему уравнению

$$F(\tilde{c}_0(\varepsilon)) := MLK[\Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0.$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [11] на случай матричной краевой задачи, а также [1, 2] на случай параметрического резонанса и явной зависимости неоднородностей порождающей краевой задачи от малого параметра.

Лемма. Пусть матричная краевая задача (1), (2) представляет критический ($P_{Q^*} \neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости (7) порождающей задачи (3). Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ матричная краевая задача (1), (2) имеет решение

$$Z(t, \varepsilon): Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при этом в достаточно малой окрестности функции $h_0(\varepsilon)$ существует собственная функция $h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тогда имеет место равенство

$$F(\tilde{c}_0(\varepsilon)) = 0. \quad (9)$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2, 4, 5], уравнение (9) будем называть уравнением для порождающих функций матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Предположим, что уравнение (9) имеет непрерывные действительные корни. Фиксируя одно из решений $\tilde{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения (9), приходим к задаче об отыскании решения

$$X(t, \varepsilon): X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

матричной краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения

$$Z_0(t, \Theta_r(\varepsilon)) = W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + G[F(s); A](t), \quad \Theta_r(\varepsilon) := M^{-1} [P_{Q_r} c_r(\varepsilon)],$$

а также функции $h(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ в окрестности точки $h_0(\varepsilon)$. Обозначим $(d \times (r + \rho))$ – мерную матрицу

$$D_0(\tilde{c}_0(\varepsilon)) = F'_{\tilde{c}(\varepsilon)}(\tilde{c}(\varepsilon)) \Big|_{\tilde{c}(\varepsilon) = \tilde{c}_0(\varepsilon)}$$

При условии [11]

$$P_{D_0}^* P_{Q_d}^* = 0, \quad D_0^+(\tilde{c}_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0] \quad (10)$$

матричная краевая задача (1), (2) имеет по меньшей мере одно решение. Здесь $P_{D_0(\tilde{c}_0(\varepsilon))}^*$ – $(d \times d)$ – матрица-ортопроектор:

$$P_{D_0(\tilde{c}_0(\varepsilon))}^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*(\tilde{c}_0(\varepsilon))),$$

$D_0^+(\tilde{c}_0(\varepsilon))$ – псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица [1, 19].

Теорема. Пусть матричная краевая задача (1), (2) представляет критический ($P_Q^* \neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости (7) порождающей задачи (3). Тогда для каждого корня $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, $h_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^p$ равнения для порождающих функций (9) при условии (10) в малой окрестности решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи (3) и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ задача (8) имеет по меньшей мере одно решение

$$X(t, \varepsilon) : X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

и существует непрерывная функция $h(\varepsilon) : h(0) := h_0^*$. При этом в малой окрестности решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи (3) и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ матричная краевая задача (1), (2) имеет по меньшей мере одно решение

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

Для построения приближенного решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае (10) применим метод простых итераций [1, 2]. Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и непосредственно из условия сжимаемости соответствующего оператора аналогично [21, 20]. В случае параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующих утверждений [9, 10, 11] на случай матричной краевой задачи и векторной функции $h(\varepsilon)$. В отсутствие параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения [1, 2] на случай явной зависимости неоднородностей $F(t, \varepsilon)$ и $A(\varepsilon)$ порождающей краевой задачи (2) от малого параметра.

3. Уравнение типа Матье с параметрическим возбуждением. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π -периодической задачи для уравнения типа Матье

$$Z'(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) + Z(t, \varepsilon)B + \varepsilon \Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (11)$$

где

$$\Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) := \mu(\varepsilon)S_1Z(t, \varepsilon) + \nu(\varepsilon)Z(t, \varepsilon)S_2 + S_3 \cos^2 t Z(t, \varepsilon),$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad h(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \mu(\varepsilon) \\ \nu(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Общее решение полунормальной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения $Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B$, $Z(0) = \Theta$ имеет вид $W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t)$, $\Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, где $U(t)$ и $V(t)$ – нормальные ($U(0) = I_2, V(0) = I_2$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2 \sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Общее решение однородной матричной задачи (11) определяет матрица $Q = 0$ и ее ортопроекторы $P_Q = P_{Q^*} = I_4$. Таким образом, для матричной краевой задачи (11) имеет место критический случай. Уравнение (9) в случае матричного дифференциального уравнения (11) имеет действительный корень

$$\tilde{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad h_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} \mu_0(\varepsilon) \\ \nu_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad c_0(\varepsilon) := \frac{1}{5} (0 \ 1 \ 0 \ 1)^*, \quad \mu_0(\varepsilon) \equiv -\frac{1}{3}, \quad \nu_0(\varepsilon) \equiv 0.$$

Этому корню соответствует матрица полного ранга

$$D_0(\tilde{c}_0(\varepsilon)) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -10\pi & 0 & 0 & 0 & -6\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\pi & 0 \\ 0 & 0 & -10\pi & 0 & -6\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\pi & -3\pi \end{pmatrix},$$

при этом условие (10) выполнено, следовательно, согласно доказанной теореме, в малой окрестности порождающего решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ 2π -периодическая задача для уравнения типа типа Матвея (11) имеет по меньшей мере одно решение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
2. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5–29.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
6. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
7. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
8. Копелев Ю. Ф. Параметрические колебания станков. – Металлорежущие станки: респ. межвед. науч. – техн. сб. – Киев, 1984. Вып. 12. – С. 3–8.
9. Чуйко С. М., Кулиш П. В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С. 243–252.
10. Чуйко С. М., Чуйко Е. В., Кулиш П. В. Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. – 3(32). – №1. – 2013.
11. Чуйко С. М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. – 2014. – 17, № 1. – С. 137–148.
12. Чуйко С. М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. – 2014. – 4 (32), № 1–2. – С. 101–107.
13. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. – 2014, 19, Вып. 1 (21), С. 49–57.
14. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. – № 1120. – 2014. – С. 85–94.
15. Чуйко С. М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. – 2015. – 16, Вып. 1. – С. 52–66.
16. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука: 1969. – 367 с.
17. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – 37, № 4. – P. 464 – 471.
18. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – 50, № 8. – P. 1162–1169.
19. Боевовой В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. – 1984. – 318 с.
20. Чуйко А. С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – 8, № 2. – С. 278–288.
21. Чуйко С. М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – 9, № 3. – С. 416–432.

Стаття надійшла до редколегії 13.02.16

Чуйко С. М., д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Сисоев Д. В. асп.,
Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

ЛІНІЙНА МАТРИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Традиційне вивчення періодичних і нетерових крайових задач у критичних випадках було пов'язано з припущенням, що диференціальне рівняння, а також крайова умова, відомі та фіксовані [1,2]. Як правило, вивчення періодичних задач у випадку параметричного резонансу обмежувалося дослідженнями питань стійкості [3,4,5]. У той же час, при дослідженні періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу, пов'язаних із численними застосуваннями в електроніці [3], теорії плазми [6], нелінійній оптиці, механіці [7] і верстатобудуванні [8], окрім знаходження розв'язків потрібне обчислення власної функції відповідної крайової задачі. Метою цієї статті є побудова розв'язків лінійних матричних крайових задач у випадку параметричного резонансу, розв'язність яких забезпечується відповідним вибором власної функції крайової задачі. Використовувана класифікація лінійних матричних крайових задач у випадку параметричного резонансу залежно від простоти або кратності коренів рівняння для породжувачих констант, істотно відрізняється від аналогічної класифікації періодичних задач у випадку параметричного резонансу [4, 5] і відповідає загальній класифікації періодичних і нетерових крайових задач [1, 2]. Отримані для лінійних матричних крайових задач у випадку параметричного резонансу умови розв'язності, а також рівняння для породжувачих функцій, узагальнюють відповідні умови розв'язності, а також традиційне рівняння для породжувачих констант у випадку параметричного резонансу [9,10,11] на випадок лінійних матричних крайових задач [12]. У статті істотно використовується техніка розв'язання матричних рівнянь Ляпунова, а також їх узагальнень – матричних рівнянь Сильвестра [13–15].

Ключові слова: матричні крайові задачі, параметричний резонанс, матричні рівняння Сильвестра.

Chujko S. M., Dr. Sci., prof.,
Sysoiev D. V., postgraduate,
Donbass State Pedagogical University, Slavyansk

LINEAR MATRIX BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE CASE OF PARAMETRIC RESONANCE

Traditionally the study of periodic and Noether boundary value problems in critical cases is associated with the assumption that the differential equation and the boundary conditions are known and fixed [1, 2]. As a rule, the study of periodic problems in the case of parametric resonance is limited to researching of stability issues [3, 4, 5]. At the same time, during the study of periodic boundary value problems in the case of parametric resonance in connection with numerous applications in electronics, [3] theory of plasma [6], nonlinear optics, mechanics [7] and the machine tool [8], besides finding solutions we must calculate the eigenfunction of the corresponding boundary value problem. The purpose of this article is to construct solutions of matrix linear boundary value problems in the case of parametric resonance that is provided with an appropriate choice of eigenfunction of the boundary problem. The used classification of linear matrix boundary-value problems in the case of parametric resonance depending on the simplicity or multiplicity of the roots of the equation for generating constants significantly differs from similar periodic classification of periodic problems in the case of parametric resonance [4, 5] and corresponds to the general classification and periodic and Noether boundary value problems [1, 2]. The conditions for the solvability of linear matrix boundary value problems in the case of parametric resonance, which we have got, and the equation for the generating functions generalize the corresponding conditions for the solvability, as well as the traditional equation for generating constants in the case of parametric resonance [9, 10, 11] in the case of linear matrix boundary-value problems [12]. The technique of Lyapunov and Sylvester matrix equations solving is heavily used in the article [13–15].

Keywords: matrix boundary value-problem, parametric resonance, matrix Sylvester equation.

УДК 519.9+004.942 + 004.383.3

В. О. Яценко, д-р техн. наук, проф.,
Інститут космічних досліджень НАНУ-ДКАУ,
Ф. Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.,
В. М. Петрович, канд. техн. наук,
Н. М. Требіна, пров. інж.-математик,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
М. В. Наливайчук, асп.,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ

АПАРАТНЕ, МАТЕМАТИЧНЕ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СУПУТНИКОВОГО АДАПТИВНОГО НАДПРОВІДНОГО ГРАВІМЕТРА

Обґрунтовані принципи створення перспективного супутникового гравіметра, придатного для отримання оперативної інформації щодо гравітаційного поля. Розроблено математичні моделі динаміки та стійкості керованого надпровідного підвісу. Побудовано чисельні алгоритми оцінювання величини гравітаційного збурення, що впливає на левітаційне пробне тіло. Обґрунтовано технологію створення макету супутникового гравіметра на основі високотемпературних надпровідних наноплівко.

Ключові слова: вимірювально-обчислювальна система, алгоритм, пробне тіло, динамічна модель, гравіметр, математичне моделювання, оптимізація, керуючий вплив, адаптивна фільтрація, мікропроцесор.

Вступ. У галузі гравіметрії однією з актуальних проблем є підвищення точності супутникового гравіметра. Серед найкращих стаціонарних наземних гравіметрів точність складає $10^{-8}g$, для гравіметрів морського базування $-10^{-7}g$, а для авіаційного $-10^{-6}g$. При сучасних темпах розвитку багатьох галузей прикладних наук (космічні дослідження, геологія, навігація, моніторинг природних ресурсів на основі аналізу гравітаційних аномалій, вивчення глобальних геодинамічних процесів, гравітаційного поля і форми Землі, руху полюсів Землі тощо) зазначена точність є недостатньою. Підвищення точності гравіметра сприятиме збільшенню точності спостережень визначення місця розташування та орієнтації для довготривалих авіапольотів і навігацій підводних апаратів, тому необхідно знати гравітаційне поле Землі, а також його аномалії. Детальна інформація про гравітаційне поле Землі необхідна також багатьом галузям прикладних наук (космічні дослідження, геологія, навігація, наука про форму Землі). Дійсно, точне і швидке детектування геодинамічних процесів може дозволити отримати дані щодо зародження і розвитку критичних локальних і глобальних екологічних станів. Іншою практичною проблемою є потреба отримання інформації щодо нерозвіданих корисних копалин Землі.

Тому, для розв'язання даної проблеми, пропонуються різні макети надпровідних гравіметрів, що відрізняються способом неконтактного підвищення чутливості маси гравіметра, використанням електричних або магнітних сил, методами вимірювання зміщень чутливої маси гравіметра (системи оптичної реєстрації, Джозефсонівські ефекти як основа вимірювань тощо), а також комп'ютерними методами оброблення сигналів [5, 13]. Стрибок у вдосконаленні гравіметрів став можливим завдяки фінансуванню розробок надпровідних гравіметрів. У роботі [5] описується в деталях надпровідний гравіметр, базова конструкція якого залишається незмінною протягом більше 30-ти років з моменту першої публікації в [13]. Вільний стан (левітація) чутливої маси цього гравіметра досягається на основі ефекту Браунбека-Мейснера [10, 12].

Однак підвищення точності супутникового надпровідного гравіметра з керованим магнітним підвісом на основі наноплівко та процесорного мікромодуля, придатного для отримання оперативної інформації щодо гравітаційного поля Землі, раніше не проводились. Тому, оскільки апаратне, алгоритмічне і математичне забезпечення такого гравіметра є невід'ємною частиною, яка впливає на його точність, воно потребує подальшої уваги.

Метою даної статті є обґрунтування та розроблення наукових основ та пропозицій щодо створення перспективних супутникових гравіметрів, що включають принципово новий керований магнітний підвіс (чутливий елемент) на основі наноплівко з використанням явища керованої магнітної левітації та процесорного мікромодуля; обґрунтування технології розроблення функціональних вузлів на основі високотемпературних надпровідних наноплівко для створення малогабаритного супутникового гравіметра.

Поставлена мета обумовила розв'язання наступних задач:

- необхідно розробити математичну модель динаміки та стійкості керованого надпровідного підвісу;
- запропонувати алгоритми ідентифікації та оцінювання;
- побудувати чисельні алгоритми оцінювання величини гравітаційного збурення, що впливає на левітаційне пробне тіло;
- провести аналіз впливу різних чинників на жорсткість підвісу, серед яких, зокрема – наявність додаткової феромагнітної маси на вільній пробній масі, вплив пасивного фільтру сигналів на точність вимірювань;
- обґрунтувати технологію створення макету супутникового гравіметра на основі високотемпературних надпровідних наноплівко.

Функціональна структура вимірювально-обчислювальної системи. Структуру вимірювально-обчислювальної системи зручно представити схемою (Рис. 1). Основні складові частини цієї системи: надпровідний підвіс, оптична система реєстрації інформації та мікропроцесорний обчислювальний блок.

Підвіс є коаксіальним, тобто утримуючі магніти зміщені з коаксіальної позиції на позиції, коли їх осі паралельні осі підвісу. З різних варіантів кількості утримуючих магнітів (два, три, чотири) було обрано систему з чотирьох рідкісно-земельних постійних магнітів з вертикальною віссю. Кожен магніт в горизонтальній площині мав прямокутну форму. Вертикальні магнітні осі чотирьох наборів магнітів були зміщені від осі підвісу так, що утворився простір розміром 18 мм в діаметрі для розміщення оптичного датчика. Проблема не вертикальності положення підвішеної вільної проби, що виникла в результаті неоднакових магнітних властивостей наборів постійних магнітів, вирішувалася двома змінами конструкції. Одна з них – збільшення маятниковості пробної маси, інша зводилася до тонкого феромагнітного кільця, що компенсувало азимутальну неоднорідність магнітного поля підвісу. Після теоретичних та експериментальних досліджень підвісу, оптичного датчика та програмного забезпечення вимірювань, аналізувалася

доцільність реалізації обраної проектної конструкції в цілому. У частині підвісу основні роботи стосувалися змін конструкції магнітної системи, коли замість розміщення утримуючих магнітів на осі підвісу вони повинні були бути зміщені від осі для розташування на ній оптичного лазерного датчика. Нова конструкція робочого макету включає чотири набори постійних рідкісноземельних магнітів, вертикальні осі яких були зрушені від осі підвісу в чотирьох радіальних напрямках. Пробна маса має два ніобій-титанових кільця. Верхня площина пробного тіла була полірованою як відбиваюча площина для лазерних променів. Левітаційний зазор в залежності від маси пробного тіла був від 7-ми до 15-ти міліметрів. На базі цієї робочої моделі було проведено теоретичні та експериментальні дослідження спільної роботи системи "підвіс – реєстрація". Аналізувався вплив фізичного стану гелію (рідина або газ) на цю систему та вивчався вплив пасивного фільтра на точність вимірювань, а також – чинники, що впливають на зменшення жорсткості підвісу, зокрема, наявність додаткової феромагнітної маси на вільній пробі.

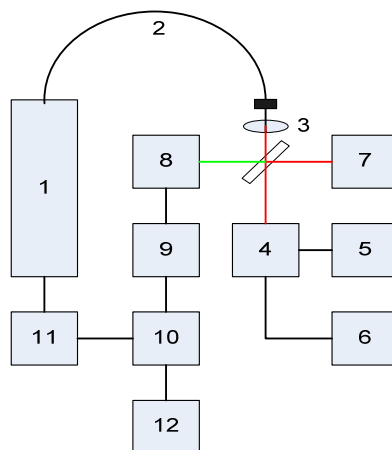


Рис. 1. Функціональна схема вимірювально-обчислювальної системи:

1 – кріостат з вставкою, на якому змонтована оптична головка; 2 – оптичний кабель;
3 – фокусуючий об'єктив; 4 – головка з лазерним діодом; 5 – блок живлення лазерного діода; 6 – блок стабілізації температури;
7 – інтерферометр Фарбі – Перо ІФП-1; 8 – фотоприймач; 9 – синхронний детектор; 10 – мікроконтролер з вбудованим ЦАП і АЦП;
11 – модулятор; 12 – блок клавіатури та індикації.

Були проведені експериментальні дослідження спільної роботи з визначення властивостей робочого макету гравіметра, динамічних характеристик магнітного підвісу вільної пробної маси робочого макета гравіметра (спільно з групою Інституту фізики НАНУ), а також доопрацювання чутливого елемента в частині магнітного підвісу, що було продиктовано експериментальними роботами.

Математична модель динаміки та стійкості пробного тіла. Однією з актуальних задач механіки вільного тіла в магнітному полі є завдання побудови та аналізу рівнянь динаміки вільного тіла в полі ідеально провідних струмових контурів. Це обумовлено можливістю застосування ефектів діаманітного відштовхування [10, 11] та мінімуму магнітної потенційної енергії [2, 11], що дозволяють стабілізувати рівновагу вільного тіла [11]. В [2] обґрунтовано ефект мінімуму магнітної енергії та стійкості рівноваги вільного ідеально провідного струмового кільця, співвісного в положенні рівноваги до нерухомого ідеально провідного струмового кільця.

Проведено дослідження рівняння руху і стійкості при наявності не одного, а двох нерухомих ідеально провідних струмових кілець, що являють собою консервативну потенційну систему. Ця система не вимагає спеціальних перетворень форми сигналів, що забезпечує її високу надійність. Для складання рівнянь динаміки використовується метод Лагранжа, який в [2, 4] розвинено, стосовно електромеханічних перетворювачів енергії. В якості кінетичної енергії виберемо енергію магнітного поля. Нехай механічними координатами вільного ідеально провідного кільця є циліндричні координати його центру маси ρ, α, ξ і кути Ейлера φ, ψ, θ , які визначають орієнтацію кільця щодо тригранника $O\xi\eta\zeta$ (Рис. 2). Початок тригранника $O\xi\eta\zeta$ розміщено в центрі верхнього нерухомого ідеально провідного кільця, а вісь $O\xi$ співпадає з спільною віссю двох нерухомих ідеально провідних кілець.

З метою вивчення властивостей робочого макету гравіметра були проведені експериментальні дослідження динамічних характеристик магнітного підвісу вільної пробної маси (спільно з групою Інституту фізики НАНУ), а також доопрацьовано чутливий елемент магнітного підвісу.

Система рівнянь для змінних стану $y_1, \dots, y_6$, функціонал z_1 описують відображення $y_1 \rightarrow z_1$ інтерферометра, що допускає лінійне представлення згідно [5]. Шляхом введення функції $z = \alpha y_1 + \beta y_2$, де β – константа, і прирівнюючи $\alpha_{ij} = 0$, $j = 2, \dots, 5$, одержуємо білінійну систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 + a_3 y_1 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_5 + a_4 y_1 \end{bmatrix} u_2^2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_6 \end{bmatrix} u_3(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$z = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad (2)$$

Тут $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{17}$, $a_3 = a_{18}$, $a_4 = a_{110}$, $a_5 = a_{19}$, $a_6 = a_{16}$, $a_7 = a_{111}$. Нехай $u_3(t) = 0$, $u_4(t) = 0$. Отримаємо умови асимптотичної стійкості білінійної системи із лінійної системи вимірювання, умови існування якої приведені в [2, 7]. Шляхом лінеаризації системи (1) в околі точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ стійкої рівноваги пробного тіла при $u_1(t) = 0$, одержимо (3) і (4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \end{bmatrix} u_1(t), \quad (3)$$

$$Z = [\alpha\beta][x_1 \ x_2]^T, \quad (4)$$

де Z – вихідний сигнал лазерного інтерферометра, α, β – коефіцієнти підсилення, x_1 – стан системи, x_2 – прискорення пробного тіла, $t \in [0, T]$, $u_1(t)$ – обернений зв'язок.

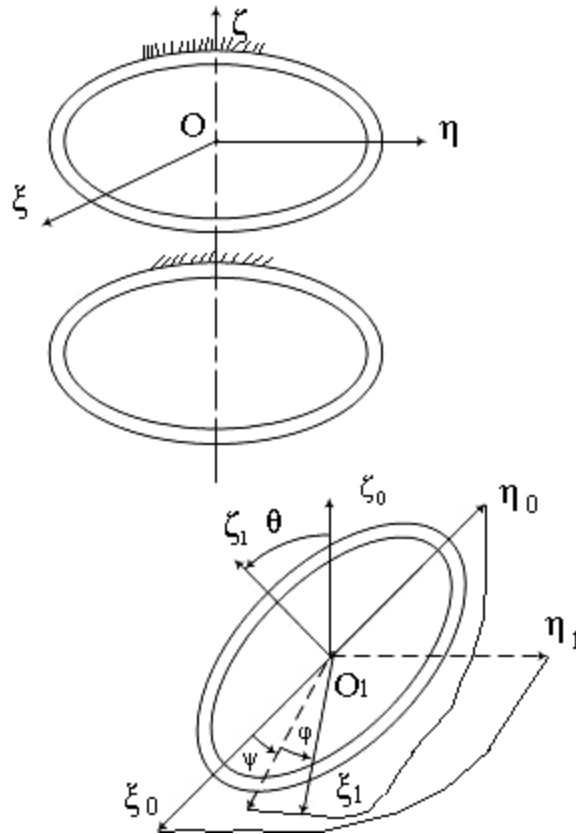


Рис. 2. Орієнтація кільця відносно тригранника $O\xi\eta\zeta$

Систему (3), (4) запишемо в більш загальному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu_1(t), \quad z = Cx. \quad (5)$$

Визначимо керування [6, 9, 10]:

$$u_1(t) = K(z), \quad K(0) = 0, \quad (6)$$

яке забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного руху $x = 0$.

Із керованості лінійної системи (5), випливає стабілізованість білінійної системи (1) лінійним керуванням $u_1(t) = Fx$.

Нехай $\Theta(\lambda) = a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ – будь який ненормований многочлен, всі корені якого мають від'ємні дійсні частини. Знайдемо таку матрицю K , щоб корені характеристичного полінома матриці $A + BKC$ співпадали з коренями полінома $\Theta(\lambda)$.

В силу керованості системи (6) існує матриця $F = \|f_j\|$ ($j=1,2$) така, що $A + BF$ має заданий спектр. Отже, існування шуканої матриці K еквівалентне існуванню розв'язку рівняння

$$KC = F. \quad (7)$$

Введемо наступні позначення:

$$C_1 = \alpha, \quad C_2 = \beta, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для існування матриці K , яка задовольняє рівнянню (8), необхідно і достатньо виконання умови

$$FQ = 0, \quad Q = E_2 - E_1 C_1^{-1} C_2, \quad (9)$$

в якій враховується (4),

$$Q = \begin{bmatrix} -\alpha^{-1}\beta \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Якщо елементи матриці (10) розглядати як координати вектора Q в двовірному просторі, то умова (9) означає, що вектор $s = \{f_j\}$, $j=1,2$, повинен бути колінеарним вектору $q = \{1, \alpha^{-1}\beta\}$. Отже, при фіксованій орієнтації осі чутливості квантового інтерферометра рівняння (9) задовольняє одно параметричній множині матриць F вигляду

$$F = [f_1 \alpha^{-1} \quad \beta f_1]. \quad (11)$$

Щоб характеристичний поліном матриці $A + BF$ співпадав з заданим поліномом $\Theta(\lambda)$, необхідно, щоб виконувалися умови $f_1 = -(a_3 + a_1)a_2^{-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = -a_2 \alpha^{-1} \beta f_1$. Таким чином, при $a_1 = 1$, $a_2 \neq 0$, $\alpha \neq 0$, матриця $K = F E_1 C_1^{-1}$ зворотного зв'язку по виходу визначається виразом

$$K = [f_1 \alpha^{-1}] \quad (12)$$

і керування $u_1(t) = Kz = f_1 \alpha^{-1} z$ забезпечує асимптотичну стійкість положення рівноваги (1) в деякій області N зміни X .

Висновки. Обґрунтовано принципи створення перспективного супутникового гравіметра, придатного для отримання оперативної інформації щодо гравітаційного поля. Розроблено математичну модель динаміки та стійкості керованого надпровідного підвісу. Побудовано чисельні алгоритми оцінювання величини гравітаційного збурення, що впливає на левітуюче пробне тіло.

Розроблено технічні пропозиції щодо створення магнітного підвісу на високотемпературних наноплівках та здійснено обґрунтування макету супутникового гравіметра на основі високотемпературних надпровідних наноплівок з використанням процесорного мікро модуля.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Яценко В. О., Наливайчук М. В. Моделирование та оптимізація адаптивного криогенного гравіметра // 19 Міжнародна конференція з автоматичного керування, 26–28 вересня 2012. Київ, Україна. – С. 344.
2. Козорез В.В. Динамические системы свободных магнитно взаимодействующих тел. – Киев: "Наукова думка", 1981, 140 с.
3. Yatsenko V. A., Nalivaichuk M. V. Mathematical modeling and optimization of controlled superconducting sensors with magnetic levitation // Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем: Збірник наукових праць міжнародної конференції (DSMSI-2011), Київ, 2011. – С. 146.
4. Yatsenko V. A. and Kryuchkov E. I. On the possibility of application of "Magnetic Potential Well" effect for creation of a graviinertial cryogenic device // Journal of Automation and Information Science, Vol. 34, 2003. – P. 106–119.
5. Prothero W.A. and Goodkind J. M. A superconducting gravimeter. – Rev. Sci. Instr. № 2, Vol. 39, № 9. 1968. – P. 1257–1261.
6. Yatsenko V. and Pardalos P. Global optimization of cryogenic-optical sensor, in Sensors, Systems, and Next-Generation Satellites, K. W.H. Fujisada, J. Lirie, ed., Proc. SPIE 4550, pp. 433–441, 2001.
7. Yatsenko V., Nalivaichuk M.. Modeling and Optimization of Cryogenic-Optical Gravimeters // International Journal information theories & applications. – 2012. – P. 232–240. Vol. 19. № 3.
8. Yatsenko V., Nalivaichuk M.. Cryogenic-Optical Gravimeter: Principles, Methods and Applications // Kharkov University Vestnik, Ser.: Radiophysics and Electronics. – 2011. – P. 107–113.
9. Yatsenko V., Nalivaichuk M., Gnidenko V., Kochkodan O.. Modeling of Superconducting Gravimeter for Futute Space Missions: Optimization. Control, and Estimation // 2nd International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V. S. Melnik, 4–6 April, 2012. Kyiv, Ukraine. – P. 110.
10. Moon F. C. Superconducting Levitation: Application to bearings and magnetic transportation, John Wiley & Sons, NY, 1994, – 295 p.
11. Kozoriz V. Novel Magnetic Levitation and Propulsion Phenomena, ISBN 966-7108-10-4, Zaporizhya, 1999. – 271 p.
12. Goodkind J. M.. The superconducting gravimeter. Rev. Sci. Instrum. – Vol. 70, № 11, 1999. – P. 4131–4152.
13. Goodkind J. M. and Warburton R. J., IEEE Trans. Magn. MAG – 11, № 2, 1975.
14. Гніденко В., Наливайчук М., Яценко В. Нейромережеве оцінювання слабких впливів на кероване левітуюче пробне тіло // Наукові праці національного університету харчових технологій. – Київ: Видавництво національного університету харчових технологій. – 2013. – № 48. – С. 44–48.
15. Наливайчук М., Яценко В., Гніденко В. Вимірювально-обчислювальна система для отримання оперативної інформації щодо гравітаційного поля // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк: Видавництво Луцького національного технічного університету. – 2013. – № 12. – С. 167–173.
16. Yatsenko V., Nalivaichuk M.. Opto-cryogenic sensitive element with ultrasensitive laser interferometer and microprocessor controller // Abstracts. IEEE International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers, CAOL. – 2013. – Kharkov, UIRE. – 2013. – P. 39.
17. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – Москва: Мир, 1972. – 544 с.
18. Каминский В. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям. Ч.1. – Вильнюс: Мокслас, 1982. – 245 с.
19. Згуровский М. З., Подладчиков В. Н. Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределённостью. – Киев: Наукова думка, 1998. – 283 с.
20. Степанов О. А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – Санкт-Петербург: ЦНИИ "Электронприбор", 2003. – 370 с.
21. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – Москва: Наука, 1988. – 320 с.
22. Ту Ю. Современная теория управления. – Москва: Машиностроение, 1971. – 472 с.
23. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – Москва: Мир, 1977. – 652 с.
24. Сучасні методи та інформаційні технології математичного моделювання, аналізу і оптимізації складних систем: Монографія / Ф. Г. Гаращенко, М. Ф. Кириченко, Ю. В. Крак та ін. / За редакцією Ф. Г. Гаращенко, І. І. Харченко. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 200 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.16

Яценко В. А., д-р техн. наук, проф.,
 Інститут космічних досліджень НАНУ-ГКАУ,
 Гаращенко Ф. Г., д-р техн. наук, проф.,
 Петрович В.Н., канд. техн. наук,
 Требіна Н.Н., вед. инж.-математик,
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
 Наливайчук М. В., асп.,
 Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені І. Сикорського", Київ

АППАРАТНОЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СПУТНИКОВОГО АДАПТИВНОГО НАДПРОВОДНОГО ГРАВИМЕТРА

Обоснованы принципы создания перспективного спутникового гравиметра, пригодного для получения оперативной информации о гравитационном поле. Разработаны математические модели динамики и устойчивости управляемого сверхпроводящего подвеса. Построены численные алгоритмы оценивания величины гравитационного возмущения, влияющего на левитирующее пробное тело. Обоснована технология создания макета спутникового гравиметра на основе высокотемпературных сверхпроводящих нанопленок.

Ключевые слова: измерительно-вычислительная система, алгоритм, пробное тело, динамическая модель, гравиметр, моделирование, оптимизация, управляющее воздействие, адаптивная фильтрация, микропроцессор.

Yatsenko V., Doctor of Engineering Sci., professor
Space Research Institute of NAS of Ukraine, Head of Space Research Institute Department,
Garashchenko F., Doctor of Engineering Sci., professor
Nalivaichuk N., graduate student, National technical university of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute"
Petrovich V., PhD, Engineering Sci., scientist
Trebina N., leading engineer-mathematician
Taras Shevchenko National University of Kyiv

**APPARATUS, MATHEMATICAL AND ALGORITHMIC GUARANTEE
OF SATELLITE ADAPTIVE SUPER-WIRE GRAVIMETER**

Principles of satellite gravimeter creation to obtain an information about gravitational field are considered. The mathematical model of the dynamic and stability of controlled superconducting suspension has been developed. Numerical algorithms for gravitational perturbation estimation acting on levitated probe have been proposed. The technology of satellite gravimeter creation based on high-temperature superconducting nanofilms has been proposed.

Key words: measuring-computing system, algorithm, probe, dynamic model, gravimeter, modeling, optimization, control, adaptive filtering, microprocessor.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 1(16)

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,44. Наклад 300. Зам. № 216-8016.

Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № K1.

Підписано до друку 12.04.17

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43

☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128

e-mail: vpc@univ.kiev.ua

<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02