ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1728-2276

КІБЕРНЕТИКА 1(13)/2013

Засновано 1999 року

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів.

Приведены результаты исследований по анализу, оценке, управлению и оптимизации динамических систем, проблем эколого-экономического анализа и численных методов моделирования процессов.

Для преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.

For scientists, professors, aspirants and students.

Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 28.10.2013 (протокол № 2)
Затверджено	Постанова Президії ВАК України № 1-05/1 від 26.01.11
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16271-4743Р від 31.12.09
Засновник Та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 517.929

E. Azizbayov, Cand. Sc. phys. math., Senior Lecturer
Baku State University, Baku,
M. Pokojovy, Dr. rer. nat., Research Fellow
Universität Konstanz, Germany, Konstanz
D. Khusainov, Dr. Sc. phys. math. Professor,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

REPRESENTATION OF CLASSICAL SOLUTIONS TO A LINEAR WAVE EQUATION WITH PURE DELAY

We consider the linear differential equation of heat conduction delay.

Keywords: dynamical systems, difference equations, stationary points, asymptotic stability, phase portrait.

Introduction

The wave equation is a typical linear hyperbolic second-order partial differential equation which naturally arises when modeling various phenomena of continuum mechanics such as sound, light, water or other kind of waves in acoustics, (electro)magnetics, elasticity and fluid dynamics, etc. [6, 13]. Providing a rather adequate description of physical processes, partial differential equations, or equations with distributed parameters in general, have found numerous applications in mechanics, medicine, ecology, etc. Introducing after-effects such as delay into such equations has gained a lot of attention over several past decades [2, 3, 7, 8]. Mathematical treatment of such systems requires additional carefulness since distributed systems with delay often turn out to be even ill-posed [4, 5, 12].

In the present paper, we consider an initial-boundary value problem for a general linear wave equation with pure delay and constant coefficients in a bounded interval subject to non-homogeneous Dirichlet boundary conditions. To solve the equation, we employ Fourier's separation method as well as the special functions referred to as delay sine and cosine functions which were introduced in [9, 10]. We prove the existence of a unique classical solution on any finite time interval, show its continuous dependence on the data, give its representation as a Fourier series and prove its absolute and uniform convergences under certain conditions on the data.

1. Equation with pure delay

We consider the following linear wave equation in a bounded interval $(0,l)$ with a single delay being a second order partial difference-differential equation for an unknown function η

$$\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\eta(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b\frac{\partial\eta(x,t-\tau)}{\partial x}+d\eta(x,t-\tau)+g(x,t) \tag{1.1}$$

subject to non-homogeneous Dirichlet boundary conditions and initial conditions

$$\eta(0,t)=\theta_1(t),\ \eta(l,t)=\theta_2(t),\ t\ge-\tau,$$

$$\eta(x,t)=\psi(x,t),\ 0\le x\le l,\ -\tau\le t\le 0. \tag{1.2}$$

Since we are interested in studying classical solutions, the following compatibility conditions are required to assure for the smoothness of solution on the boundary of space-time cylinder

$$\eta(x,t)=\theta_1(t),\ \eta(l,t)=\theta_2(t),\ -\tau\le t\le 0.$$

Definition 1.1. Under a classical solution to the problem (1.1), (1.2) we understand a function $\eta\in C([0,l]\times[-\tau,T])$ which satisfies $\partial_{tt}\eta,\partial_{tx}\eta,\partial_{xx}\eta\in C([0,l]\times[-\tau,0])$ as well as $\partial_{tt}\eta,\partial_{tx}\eta,\partial_{xx}\eta\in C([0,l]\times[0,T])$ and, being plugged into Equations (1.1), (1.2), turns them into identity.

Remark 1.2. The previous does not impose any continuity of time derivatives in $t=0$. If the continuity is desired, additional compatibility conditions on the data, including $g(x,t)$, are required.

Let $\|\cdot\|_{k,2}:=\|\cdot\|_{H^{k,2}((0,l))}$ denote the standard Sobolev norm (cf. [1]) and $\|\cdot\|_{-k,2}:=\|\cdot\|_{H^{-k,2}((0,l))}$ denote the norm of corresponding negative Sobolev space. We introduce the norm $\|\cdot\|_X:=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\|\cdot\|_{-k,2}^2}$ and define the Hilbert space X as a completion of $L^2((0,l))$ with respect to $\|\cdot\|_X$. Obviously, $X\subset\left(D((0,l))\right)'$, i.e., X can be continuously embedded into the space of distributions.

With this notation, we easily see that $A:=a^2\partial_x^2+b\partial_x+d$ (with ∂_x denoting the distributional derivative) is a bounded linear operator on X since

$$\|A\|_{L(X)}=\sup_{\|u\|_X=1}\|Au\|_X=\sup_{\|u\|_X=1}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left\|a^2\partial_x^2u+b\partial_xu+du\right\|_{-k,2}^2}\le\sup_{\|u\|_X=1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^2\|u\|_{-k-2,2}+b\|u\|_{-k-1,2}+d\|u\|_{-k,2}\right)$$

$$\le\sup_{\|u\|_X=1}\left(a^2\sum_{k=0}^{\infty}\|u\|_{-k-2,2}+b\sum_{k=0}^{\infty}\|u\|_{-k-1,2}+d\sum_{k=0}^{\infty}\|u\|_{-k,2}\right)\le\sup_{\|u\|_X=1}(a^2+b+d)\|u\|_X=a^2+b+d\ .$$

First, we obtain an *a priori* estimate in the distributional space X.

Theorem 1.2. There exists a constant $C>0$, dependent only on a,b,d,l,τ,T, such that the estimate

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\|\eta(\cdot,t)\|_X^2+\|\eta_t(\cdot,t)\|_X^2\right)\le C\left(\|\psi(\cdot,0)\|_X^2+\|\psi_t(\cdot,t)\|_X^2\right)+$$

$$C\int_{-\tau}^{0}\|\psi(\cdot,t)\|_X^2+\|\psi_t(\cdot,t)\|_X^2\,dt+C\int_0^T\left(\|g(\cdot,t)\|_X^2+|\theta_1(t)|^2+|\theta_2(t)|^2\right)dt$$

holds true for any classical solution of Equations (1.1), (1.2).

Proof. Let η be a classical solution to Equations (1.1), (1.2). We define

$$w(x,t) := \eta(x,t) \text{ for } -\tau \le t \le 0,$$

$$w(x,t) := \eta(x,t) - \theta_1(t) - \frac{x}{l}\left[\theta_2(t) - \theta_1(t)\right] \text{ for } t > 0.$$

Then $w(x,t)$ satisfies homogeneous Dirichlet boundary conditions and solves the equation

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = Aw(x,t-\tau) + f(x,t) \tag{1.3}$$

in the extrapolated space X with

$$f(x,t) = g(x,t) + b\left(\theta_2(t) - \theta_1(t)\right) + \theta_1(t) + \frac{dx}{l}\left(\theta_2(t) - \theta_1(t)\right).$$

We multiply the equation with $w_t(\cdot,t)$ in the scalar product of X and use Young's inequality to get the estimate

$$\begin{aligned}\partial_t \|w_t(\cdot,t)\|_X^2 &= \langle Aw(\cdot,t-\tau), w_t(\cdot,t)\rangle_X + \langle f(\cdot,t), w_t(\cdot,t)\rangle_X \\ &\le \|w(\cdot,t-\tau)\|_X^2 + \left(1 + \|A\|_{L(X)}^2\right)\|w_t(\cdot,t)\|_X^2 + \|f(\cdot,t)\|_X^2 .\end{aligned} \tag{1.4}$$

As in [11], we introduce the history variable

$$z(x,t,s) := w(x,t-s) \text{ for } (x,t,s) \in [0,l]\times[0,T]\times[0,\tau]$$

and obtain

$$z_t(\cdot,t,s) + z_s(\cdot,t,s) = 0 .$$

Multiplying these identities with $w(\cdot,t)$ in X and performing a partial integration, we find

$$\partial_t \int_0^\tau \|z(\cdot,t,s)\|_X^2 ds = -\int_0^\tau \partial_s \|z(\cdot,t,s)\|_X^2 ds = \|w(\cdot,t)\|_X^2 - \|w(\cdot,t-\tau)\|_X^2 . \tag{1.5}$$

Adding Equations (1.4) and (1.5) to the trivial identity

$$\partial_t \|w(\cdot,t)\|_X^2 \le \|w(\cdot,t)\|_X^2 + \|w_t(\cdot,t)\|_X^2 ,$$

we obtain

$$\partial_t \left\{ \|w(\cdot,t)\|_X^2 + \|w_t(\cdot,t)\|_X^2 + \int_{-\tau}^0 \|w(\cdot,t,s)\|_X^2 ds \right\} \le \left(2 + \|A\|_{L(X)}^2\right)\|w(\cdot,t)\|_X^2 + \|w_t(\cdot,t)\|_X^2 + \|f(\cdot,t)\|_X^2 .$$

Thus, we have shown

$$\partial_t E(t) \le \left(2 + \|A\|_{L(X)}^2\right) E(t) + \|f(\cdot,t)\|_X^2 , \tag{1.6}$$

where

$$E(t) := \|w(\cdot,t)\|_X^2 + \|w_t(\cdot,t)\|_X^2 + \int_{-\tau}^0 \|z(\cdot,t,s)\|_X^2 ds .$$

From Equation (1.6) we conclude

$$E(t) \le E(0) + \left(2 + \|A\|_{L(X)}^2\right)\int_0^t E(s)ds + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|_X^2 ds .$$

Using now the integral form of Gronwall's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}E(t) &\le E(0) + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|_X^2 ds + \int_0^t \exp\left\{\left(2 + \|A\|_{L(X)}^2\right)(t-s)\right\}\left(E(0) + \int_0^s \|f(\cdot,\xi)\|_X^2 d\xi\right)ds \\ &\le \left(\tilde{C}E(0) + \int_0^T \|f(\cdot,s)\|_X^2 ds\right)\end{aligned} \tag{1.7}$$

for certain $\tilde{C} > 0.$ Taking into account

$$c_2\left(\|w(\cdot,t)\|_X^2 + |\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2\right) \le \|\eta(\cdot,t)\|_X^2 \le C_2\left(\|w(\cdot,t)\|_X^2 + |\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2\right),$$

$$c_2\left(\|f(\cdot,t)\|_X^2 + |\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2\right) \le \|g(\cdot,t)\|_X^2 \le C_2\left(\|f(\cdot,t)\|_X^2 + |\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2\right)$$

for some constants $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ and exploiting the definition of $E(t)$, the proof is a direct consequence of Equation (1.7).

Corollary 1.2. Solutions of Equations (1.1), (1.2) are unique. The solution map

$$\left(\psi, g, \theta_1, \theta_2\right) \mapsto \eta$$

is well-defined, linear and continuous in the norms from Theorem 1.1.

Remark 1.3. It was essential to consider the weak space X. If the space corresponding to the usual wave equation is used, i.e., $(\eta,\eta_t) \in H_0^1\left((0,l)\right)\times L^2\left((0,l)\right)$, there follows from [5] that Equation (1.1), (1.2) is an ill-posed problem due to the lack of continuous dependence on the data even in the homogeneous case.

Next, we want to establish conditions on the data allowing for the existence of a classical solution. Performing the substitution

$$\xi(x,t) = e^{-\frac{b}{2a^2}x}\xi(x,t) \tag{1.8}$$

with a new unknown function $\xi(x,t)$ (cp. [11]), the initial boundary value problem (1.1), (1.2) can be written in following simplified form with a self-adjoint operator on the right-hand side

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial\xi(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c\xi(x,t-\tau) + f(x,t),\ c = d - \frac{b^2}{4a^2} \tag{1.9}$$

complemented by the following boundary and initial conditions

$$\xi(0,t) = \mu_1(t),\ \mu_1(t) = \theta_1(t),\ \xi(l,t) = \mu_2(t),\ \mu_2(t) = e^{\frac{b}{2a^2}l}\theta_2(t)\ \ t \ge -\tau\ , \tag{1.10}$$

$$\xi(x,t) = \phi(x,t),\ \phi(x,t) = e^{\frac{b}{2a^2}x}\psi(x,t),\ f(x,t) = e^{\frac{b}{2a^2}x}g(x,t),\ 0 \le x \le l,\ -\tau \le t \le 0\ . \tag{1.11}$$

The solution will be determined in the form

$$\xi(x,t) = \xi_0(x,t) + \xi_1(x,t) + G(x,t)\ .$$

Here, $G(x,t)$ is an arbitrary function with $\partial_{tt}G, \partial_{tx}G, \partial_{xx}G \in C([0,l]\times[-\tau,T])$ satisfying the boundary conditions

$$G(x,0) = \mu_1(t),\ G(x,l) = \mu_2(t)\ .$$

Assuming $\mu_1, \mu_2 \in C^2([-\tau,T])$, we let

$$G(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]. \tag{1.12}$$

– $\xi_0(x,t)$ solves the homogeneous equation

$$\frac{\partial^2\xi_0(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial\xi_0(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c\xi_0(x,t-\tau) \tag{1.13}$$

subject to homogeneous boundary and non-homogeneous initial conditions

$$\xi_0(0,t) \equiv 0,\ \xi_0(l,t) \equiv 0,\ t \ge -\tau\ ,$$

$$\xi_0(x,t) = \Phi(x,t),\ \Phi(x,t) = \phi(x,t) - G(x,t),\ \ -\tau \le t \le 0,\ 0 \le x \le l\ . \tag{1.14}$$

In particular, with the function $G(x,t)$ selected as in Equation (1.12), we obtain

$$\Phi(x,t) = \phi(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]. \tag{1.15}$$

– $\xi_1(x,t)$ solves the non-homogeneous equation

$$\frac{\partial^2\xi_1(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial\xi_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c\xi_1(x,t-\tau) + F(x,t) \tag{1.16}$$

with

$$F(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t-\tau) + cG(x,t-\tau) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t) \tag{1.17}$$

subject to homogeneous boundary and initial conditions. For $G(x,t)$ from Equation (1.12), we have

$$F(x,t) = f(x,t) + c\left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)\right]\right\} - \left\{\mu_1''(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right]\right\}. \tag{1.18}$$

2. Homogeneous equation. In this section, we obtain a formal solution to the initial-boundary value problem (1.13) with initial and boundary conditions given in Equations (1.10), (1.11). We exploit Fourier's separation method to determine $\xi_0(x,t)$ in the product form $\xi_0(x,t) = X(x)T(t)$. After plugging this ansatz into Equation (1.13), we find

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t-\tau) + cX(x)T(t-\tau)\ .$$

Hence,

$$X(x)\left[T''(t) - cT(t-\tau)\right] = a^2X''(x)T(t-\tau)\ .$$

By formally separating the variables, we deduce

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) - cT(t-\tau)}{a^2T(t-\tau)} = -\lambda^2\ .$$

Thus, the equations can be decoupled as follows

$$T''(t) + \left(a^2\lambda^2 - c\right)T(t-\tau) = 0,\ \ X''(x) + \lambda^2X(x) = 0\ . \tag{2.1}$$

These are linear second order (delay) ordinary differential equations with constant coefficients.

Due to the zero boundary conditions for ξ_0, the boundary conditions for the second equation in (2.1) will also be homogeneous, i.e.,

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0\ .$$

Therefore, we obtain a Sturm-Liouville problem admitting nontrivial solutions only for the eigennumbers

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; n = 1,2,3,...$$

and the corresponding eigenfunctions

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \; n = 1,2,3,...$$

Assuming

$$\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 - c > 0,$$

we denote

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 - c}, \; n = 1,2,3,...$$

and consider the first equation in (2.1), i.e.,

$$T''(t) + \omega_n^2 T(t-\tau) = 0, \; n = 1,2,3,... . \tag{2.2}$$

The initial conditions for each of the equations in (2.2) can be obtained by expanding the initial data into a Fourier series with respect to the eigenfunction basis of the second equation in (2.1)

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \; \Phi_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n'(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \; n = 1,2,...,$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\phi(s,t) - G(s,t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds, \; \Phi_n'(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\phi_t(s,t) - G_t(s,t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds. \tag{2.3}$$

Let us further determine the solution of the Cauchy problem associated with each of the equations in (2.2) subject to the initial conditions from (2.3).

First, we briefly present some useful results from the theory of second order delay differential equations with pure delay obtained in [9]. The authors considered a linear homogeneous second order ordinary delay differential equation

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t-\tau) = 0, \; t \ge 0, \; \tau > 0, \; x(t) = \beta(t), \; -\tau \le t \le 0. \tag{2.4}$$

They introduced two special functions referred to as delay cosine and sine functions. Exploiting these functions, a unique solution to the initial value problem (2.4) was obtained.

Definition 2.1. Delay cosine is the function given as

$$\cos_\tau\{\omega,t\} = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \le t < 0, \\ 1 - \omega^2\dfrac{t^2}{2!}, & 0 \le t < \tau, \\ \cdots & \cdots \\ 1 - \omega^2\dfrac{t^2}{2!} + \omega^4\dfrac{(t-\tau)^4}{4!} + \cdots + \\ \quad + (-1)^k\omega^{2k}\dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau \end{cases} \tag{2.5}$$

with $2k$-order polynomials on each of the intervals $(k-1)\tau \le t < k\tau$ continuously adjusted at the nodes $t = k\tau, \; k = 0,1,2,...$.

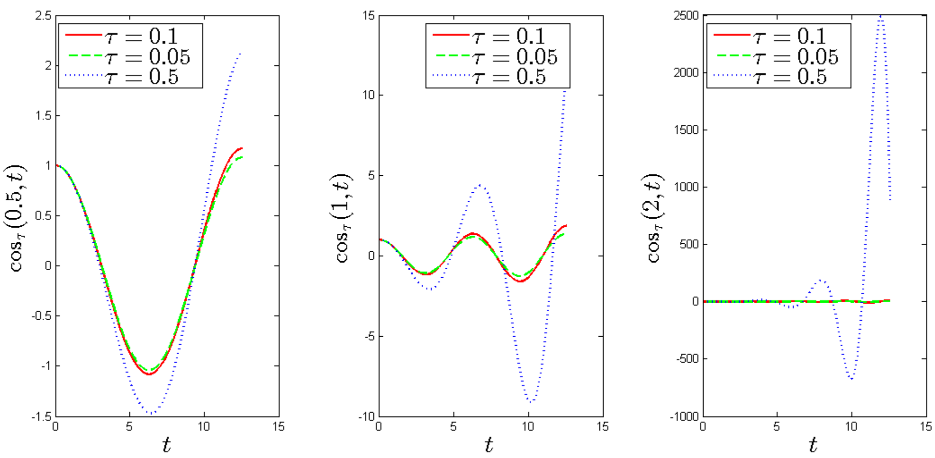

Figure 2.2. Delay cosine function

Definition 2.1. Delay sine is the function given as

$$\sin_\tau\{\omega,t\} = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ \omega(t+\tau), & -\tau \le t < 0, \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \dfrac{t^3}{3!}, & 0 \le t < \tau, \\ \dots & \dots \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \dfrac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \omega^{2k+1} \dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau \end{cases} \quad (2.6)$$

with $(2k+1)$-order polynomials on each of the intervals $(k-1)\tau \le t < k\tau$ continuously adjusted at the nodes $t = k\tau,\ k = 0,1,2,\dots$.

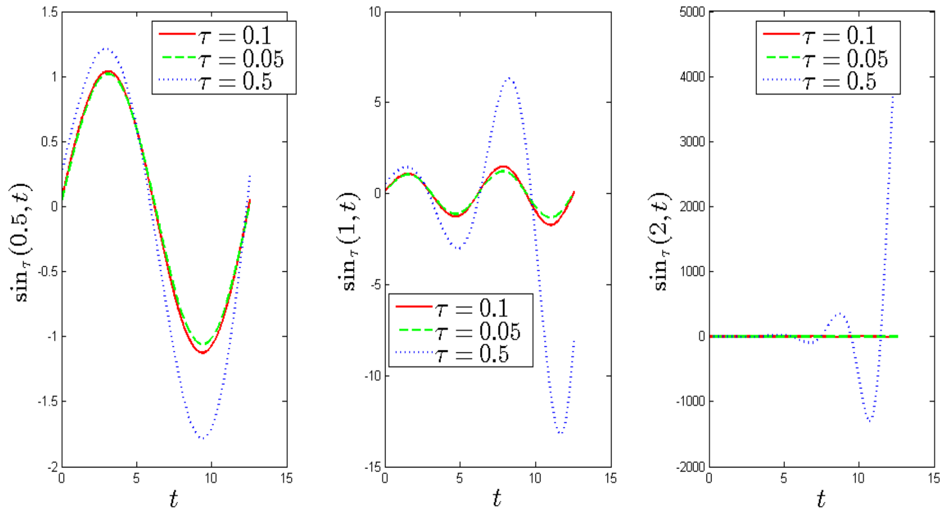

Figure 2.2. Delay sine function

There has further been proved that delay cosine uniquely solves the linear homogeneous second order ordinary delay differential equation with pure delay subject to the unit initial conditions $x(t) \equiv 1$, $-\tau \le t \le 0$, and the delay sine in its turn solves Equation (2.4) subject to the initial conditions $x(t) \equiv \omega(t+\tau)$, $-\tau \le t \le 0$.

Using the facts above, the unique solution of the Cauchy problem was represented in the integral form. In particular, the solution $x(t)$ to the homogeneous delay differential equation (2.4) with the initial conditions $x(t) = \beta(t)$, $-\tau \le t \le 0$ for an arbitrary $\beta \in C^2([-\tau,0])$ was shown to be given as

$$x(t) = \beta(-\tau)\cos_\tau\{\omega,t\} + \frac{1}{\omega}\beta'(-\tau)\sin_\tau\{\omega,t\} + \frac{1}{\omega}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\{\omega,t-\tau-s\}\beta''(s)ds. \quad (2.7)$$

Turning back to the delay differential equation (2.2) with the initial conditions (1.4), we obtain their unique solution in the form

$$T_n(t) = \Phi_n(-\tau)\cos_\tau\{\omega_n,t\} + \frac{1}{\omega_n}\Phi_n'(-\tau)\sin_\tau\{\omega_n,t\} + \frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}\Phi_n''(s)ds. \quad (2.8)$$

Thus, assuming sufficient smoothness of the data to be specified later, the solution $\xi_0(x,t)$ to the homogeneous equation (1.13) satisfying homogeneous boundary and non-homogeneous initial conditions $\xi(x,t) = \Phi(x,t)$, $-\tau \le t \le 0$, $0 \le x \le l$, reads as

$$\xi_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Phi_n(-\tau)\cos_\tau\{\omega_n,t\} + \frac{1}{\omega_n}\Phi_n'(-\tau)\sin_\tau\{\omega_n,t\} + \frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}\Phi_n''(s)ds\Big\}\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad (2.9)$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l[\phi(s,t) - G(s,t)]\sin\frac{\pi n}{l}sds,\ n = 1,2,3,\dots.$$

3. Non-homogeneous equation. Next, we consider the non-homogeneous Equation (1.16) with the right-hand side from Equation (1.18) subject to homogeneous initial and boundary conditions

$$\frac{\partial^2\xi_1(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial\xi_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c\xi_1(x,t-\tau) + F(x,t),\ F(x,t) = f(x,t) + c\Big\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)]\Big\} - \Big\{\mu_1''(t) + \frac{x}{l}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]\Big\}.$$

The solution will be constructed as a Fourier series with respect to the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem from the previous section, i.e.,

$$\xi_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,. \tag{3.1}$$

Plugging (3.1) into Equation (1.6) and comparing the time-dependent Fourier coefficients, we obtain a system of countably many second order delay differential equations

$$T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t-\tau)=F_n(t)\,,\ F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds\,. \tag{3.2}$$

In [9], the initial value problem for the non-homogeneous delay differential equation

$$x''(t)+\omega^2x(t-\tau)=f(t)\,,\ t\ge 0\,,\ \tau>0$$

with homogeneous initial conditions $x(t)\equiv 0$, $-\tau\le t\le 0$ was shown to be uniquely solved by

$$x(t)=\int_0^t \sin_\tau\{\omega,t-\tau-s\}f(s)ds\,. \tag{3.3}$$

Exploiting Equation (3.3), the equations in (3.2) subject to zero initial conditions are uniquely solved by

$$T_n(t)=\int_0^t \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\,, \tag{3.4}$$

Therefore, the non-homogeneous partial delay differential equation with homogeneous initial and boundary conditions formally reads as

$$\xi_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds\,. \tag{3.5}$$

General case solution. The solution in the general case can thus formally be represented as the following series

$$\begin{aligned}\xi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{&\Phi_n(-\tau)\cos_\tau\{\omega_n,t\}+\frac{1}{\omega_n}\Phi_n'(-\tau)\sin_\tau\{\omega_n,t\}+\\&+\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^0 \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}\Phi_n''(s)ds\Bigg\}\sin\frac{\pi n}{l}x+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+G(x,t)\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Convergence of the Fourier series. Further, we present the conditions guaranteeing that the series converges to the classical solution of Problem (1.9)–(1.11) in the sense of Definition 1.1.

Theorem 3.1. Let $T>0$, $\tau>0$ and $m:=\left\lceil\frac{T}{\tau}\right\rceil$. Further, let the data functions $\phi(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ and $f(x,t)$ be such that their Fourier coefficients $\Phi_n(t)$ and $F_n(t)$ given in Equations (2.3) and (3.5) satisfy the conditions

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\Phi_n(-\tau)\right|+\left|\Phi_n'(-\tau)\right|\right)n^{2m+3+\alpha}=0\,,\ \lim_{n\to\infty}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\Phi_n''(s)\right|n^{2m+3+\alpha}=0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k=1,\cdots,m}\max_{(k-1)\tau\le t\le\max\{k\tau,T\}}\left|F_n(t)\right|n^{2k+3+\alpha}=0 \tag{3.7}$$

for an arbitrary, but fixed $\alpha>0$. Let $\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2>c$.

Then the classical solution to problem (1.9)–(1.11) can be represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier series given in Equation (3.6). The latter series is a twice continuously differentiable function with respect to both variables. Its derivatives of order less or equal two with respect to $0\le x\le l$, $0\le t<T$ can be obtained by a term-wise differentiation of the series and the resulting series are also absolutely and uniformly convergent.

Proof. We regroup the series from Equation (3.6) into the following sum

$$\xi(x,t)=S_1(x,t)+S_2(x,t)+S_3(x,t)+G(x,t)\,,$$

where

$$S_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ S_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ S_3(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$A_n(t)=\Phi_n(-\tau)\cos_\tau\{\omega_n,t\}+\frac{1}{\omega_n}\Phi_n'(-\tau)\sin_\tau\{\omega_n,t\}\,,$$

$$B_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^0 \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}\Phi_n''(s)ds\,,\ C_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^0 \sin_\tau\{\omega_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\,,$$

$$\omega_n=\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2-c}\,,\ n=1,2,3,\ldots\,.$$

1. First, we consider the coefficient functions $A_n(t)$. For an arbitrary $t \in [0,T]$ with $(k-1)\tau \le t < k\tau$, we find

$$A_n(t) = \Phi_n(-\tau)\cos_\tau\{\omega_n, t\} + \frac{1}{\omega_n}\Phi'_n(-\tau)\sin_\tau\{\omega_n, t\} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^{2k} \frac{\left[t-(k-1)\tau\right]^{2k}}{(2k)!}\right\} \times \Phi_n(-\tau) +$$

$$+ \left\{(t+\tau) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^{2k} \frac{\left[t-(k-1)\tau\right]^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\} \times \Phi'_n(-\tau).$$

If $\Phi_n(-\tau)$ and $\Phi'_n(-\tau)$ are such that the condition

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\Phi_n(-\tau)\right| + \left|\Phi'_n(-\tau)\right|\right) n^{2k+3+\alpha} = 0$$

holds true, the series $S_1(x,T)$ as well as its derivatives of order less or equal 2 converge absolutely and uniformly. Note that a single differentiation with respect to x corresponds, roughly speaking, to a multiplication with n.

2. Next, we consider the coefficients $B_n(t)$. For an arbitrary $t \in [0,T]$ with $(k-1)\tau \le t < k\tau$, we perform the substitution $t - \tau - s = \xi$ and exploit the mean value theorem to estimate

$$\left|B_n(t)\right| = \left|\frac{1}{\omega_n}\int_{t-\tau}^{t} \sin_\tau\{\omega_n, \xi\}\Phi''_n(t-\tau-\xi)\,d\xi\right| \le \tau \max_{-\tau\le s\le 0}\left|\Phi''_n(s)\right| \times$$

$$\times \max_{j=k-1,k}\max_{t-\tau\le s\le t}\left|(s-\tau) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 \frac{s^3}{3!} + \ldots + (-1)^j \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^{2j} \frac{\left[s-(j-1)\tau\right]^{2j+1}}{(2j+1)!}\right|.$$

Applying the theorem on differentiation under the integral sign to $B_n(t)$ and taking into account that $\sin_\tau\left\{\frac{\pi n}{l}a, t\right\}$ is twice weakly differentiable for $t \ge 0$, its derivatives are polynomials of order lower than those of $\sin_\tau\left\{\frac{\pi n}{l}a, t\right\}$ and their convolution with Φ''_n is continuous, analogous estimates can be obtained for $B'_n(t)$ and $B''_n(t)$ which, in their turn, follow to be also continuous functions.

Now, if the condition

$$\lim_{n\to\infty}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\Phi''_n(s)\right| n^{2k+3+\alpha} = 0$$

is satisfied, the series $S_2(x,t)$ as well as its derivatives of order less or equal 2 converge absolutely and uniformly.

3. Finally, we look at the Fourier coefficients $C_n(t)$. Again, for an arbitrary time moment $t \in [0,T]$ with $(k-1)\tau \le t < k\tau$, $0 \le k \le m$, we substitute $t - \tau - \xi = s$. Once again, using the mean value theorem, we estimate

$$\left|C_n(t)\right| = \left|\frac{1}{\omega_n}\int_{t-\tau}^{t} \sin_\tau\left\{\frac{\pi n}{l}a, \xi\right\} F_n(t-\tau-\xi)\,d\xi\right| \le \tau \max_{t-\tau\le s\le t}\left|\Phi''_n(s)\right| \times$$

$$\times \max_{j=k-1,k}\max_{t-\tau\le s\le t}\left|(s-\tau) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 \frac{s^3}{3!} + \ldots + (-1)^j \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^{2j} \frac{\left[s-(j-1)\tau\right]^{2j+1}}{(2j+1)!}\right|.$$

As before, $C_n(t)$ can be shown to be twice continuously differentiable. If now

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k=1,\cdots,m}\max_{(k-1)\tau\le t\le \max\{k\tau,T\}}\left|F_n(t)\right| n^{2k+3+\alpha} = 0,$$

is satisfied, then both $S_3(x,t)$ its derivatives of order less or equal 2 converge absolutely and uniformly.

Since all three conditions are guaranteed by the assumptions of the Theorem due to $k \le n$, the proof is finished. □ **Remark 3.2.** From the practical point of view, the rapid decay condition on the Fourier coefficients of the data given in Equation (3.7) means a sufficiently high Sobolev regularity of the data and corresponding higher order compatibility conditions on the boundary (cf. [11]).

References

1. Adams, R.A., Fournier, J.J.F. Sobolev Spaces, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Academic Press Inc, 2003 – pp. 1-320.
2. Azizbayov, E.I., Khusainov, D.Ya. The solution of an equation with delay // Bulletin of the Kyiv National University. Series: Cybernetics, 12, 2012. – pp. 4-14 (in Russian).
3. Bátkai, A., Piazzera, S. Semigroups for delay equations, Research Notes in Mathematics, 10, A.K. Peters: Wellesley MA, 2005 – pp. 1-259.
4. Datko, R. Two examples of ill-posedness with respect to time delays revisited // IEEE Trans. Automatic Control, VOl. 42, 1997 – pp. 511-515.
5. Dreher, M., Quintanilla, R., Racke, R. Ill-posed problems in thermomechanics // Applied Mathematics Letter, 22(9), 2009 – pp. 1374-1379.
6. Eck, Ch., Garcke, H., Knabber, P. Mathematische Modellierung. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008 – pp. 1-503.
7. Els'gol'ts, L.E., Norkin, S.B. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 105, Academic Press, 1973 – pp. 1-357.
8. Hale, J. K. Theory of Functional Differential Equations. – Applied Mathematical Sciences Series, Vol. 3, 1977 – pp. 1-365.
9. Khusainov, D.Ya., Diblík, J., Růžičková, M., Lukáčová, J. Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay // Nonlinear Oscillations, Vol. 11, Is. 2, 2008 – pp 276-285.

10. Khusainov, D.Ya., Ivanov, A.F., Kovarzh, I.V., The solution of wave equation with delay // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, Vol. 4, 2006 – pp. 243-248 (in Ukrainian with English summary).
11. Khusainov, D.Ya., Pokojovy, M., Azizbayov, E.I. On classical Stability for a linear 1D heat equation with one constant delay // to appear in Journal Appl. Math., No.1, 2013.
12. Racke, R. Instability of coupled systems with delay // Commun. Pure Appl. Anal, Vol. 11, Is. 5, 2012 – pp. 1753-1773.
13. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, 1990 – pp. 1-765.

Надійшла до редколегії 25.02.13

**Е. Азізбеков, канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.
Бакинський державний університет, Баку,
М. Покойовий, д-р наук, наук. співроб.
Университет Констанца, Німеччина, Констанц
Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**

ПРЕДСТАВЛЕННЯ КЛАСИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ЧИСТИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Розглянуто лінійне диференціальне рівняння теплопровідності з запізнюванням.
Ключові слова: динамічна система, різницеві рівняння, точки спокою, асимптотична стійкість, фазовий портрет.

**Е. Азизбеков, канд. физ.-мат. наук, ст. препод.
Бакинского государственного университета, Баку,
М. Покойовый, д-р наук, науч. сотр.
Университет Констанца, Германия, Констанц
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрено линейное дифференциальное уравнение теплопроводности с запаздыванием.
Ключевые слова: динамическая система, разностные уравнения, точки покоя, асимптотическая устойчивость, фазовый портрет.

УДК 519.87

**Almodars Barraq Subhi Kaml, post-graduate
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv**

APPROACH FOR SOLVING OF TRANSPORTATION PROBLEM WITH FUZZY RESOURCES

In this paper, a method is proposed to find the fuzzy optimal solution of fuzzy transportation model by representing all the parameters as triangle fuzzy numbers. To illustrate the proposed method a fuzzy transportation problem is solved by using the proposed method and the results are obtained. The proposed method is easy to understand, and to apply for finding the fuzzy optimal solution of fuzzy transportation models in real life situations.

Keywords: fuzzy transportation problem, triangle fuzzy numbers, optimal solution.

INTRODUCTION

The transportation problem which, is one of network integer programming problems is a problem that deals with distributing any commodity from any group of 'sources' to any group of destinations or 'sinks' in the most cost effective way with a given 'supply' and 'demand' constraints . Depending on the nature of the cost function, the transportation problem can be categorized into linear and nonlinear transportation problem.

Transportation problem is a linear programming (LP) problem stemmed from a network structure consisting of a finite number of nodes and arcs attached to them. In a typical problem a production is to be transported from m sources to n destinations and their capacities are a_1, a_2, ... a_m and b_1 ,b_2, ... b_n, respectively. There is a penalty C_{ij} and variable X_{ij} associated with transporting unit of production and unknown quantity to be shipped from source *i* to destination *j*.

Efficient algorithms have been developed for solving the transportation problem when the cost coefficients and the supply and demand quantities are known exactly. However, there are cases that these parameters may not be presented in a precise manner. For example, the unit shipping cost may vary in a time frame. The supplies and demands may be uncertain due to some uncontrollable factors.

Bellman and Zadeh [1] proposed the concept of decision making in fuzzy environment. Lai and Hwang [2] considered the situation where all parameters are fuzzy. In 1979, Isermann [3] introduced algorithm for solving this problem which provides effective solutions. The Ringuest and Rinks [4] proposed two iterative algorithms for solving linear, multi criteria transportation problem. S.Chanas and D.Kuchta [6] the approach based on interval and fuzzy coefficients had been elaborated. Tien Fuling [7] applied the method of interactive fuzzy multi-objective linear programming to transportation planning decisions. A new approach called fuzzy modified computational procedure to find the optimal solution was discussed in [8]. The new arithmetic operations of trapezoidal fuzzy numbers are employed to get the fuzzy optimal solutions. In this work, the fuzzy transportation problems using triangle fuzzy numbers are discussed. Here after, we have to propose the method of fuzzy modified distribution to be finding out the optimal solution for the total fuzzy transportation minimum cost.

There are also studies discussing the fuzzy transportation problem. Chanas et al. [6] investigate the transportation problem with fuzzy supplies and demands and solve them via the parametric programming technique in terms of the Bellman and Zadeh criterion. Their method is to derive the solution which simultaneously satisfies the constraints and the goal to a maximal degree. In this paper fuzzy transportation problem is discussed with constraints where the supply and demand are triangle fuzzy numbers. This paper aims to find out the best compromise solution among the set of feasible solutions for fuzzy transportation problem.

FUZZY TRANSPORTATION MODEL FORMULATION

We deal with the production and transportation planning of a certain manufacturer that has production facilities and central stores for resellers. Each store can receive products from all production plants and it is not necessary that all products are produced in all production units.

Assume that a logistics center seeks to determine the transportation plan of a homogeneous commodity from *m* sources to *n* destinations. Each source has an available supply of the commodity to distribute to various destinations, and each destination has a forecast demand of the commodity to be received from various sources. This work focuses on developing a fuzzy linear programming (FLP) method for optimizing the transportation plan in fuzzy environments.

Let's consider

– *index sets:*

i – index for source, for all i = 1, 2, ….., m,

j – index for destination, for all j = 1, 2, ….., n;

– *decision variables:*

x_{ij} – units transported from source i to destination j (units);

– *objective functions:*

Z – total transportation costs;

– *parameters:*

c_{ij} – transportation cost per unit delivered from source i to destination j ,

a_i – total available supply at each source i (units),

b_j – total forecast demand at each destination j (units).

Then the transportation problem is formulated as:

minimize total transportation costs

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} , \tag{1}$$

with constraints on total available supply for each source i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

and constraints on total forecast demand for each destination j

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \quad j = \overline{1,n} , \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0 , \; i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} .$$

Matrix $X = \|x_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m},\\ j=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$, that satisfy the conditions (2), (3), is called by transportation plan. The balance condition

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{4}$$

is necessary and sufficient for transportation problem solving.

If any of the parameters ai, or bj is fuzzy, the total transportation cost Z becomes fuzzy as well. The conventional transportation problem defined then turns into the fuzzy transportation problem (FTP).

FUZZY TRANSPORTATION MODEL SOLUTION

We propose to explore the solution of transportation problem with fuzzy distributing any commodity resources which defines as triangle fuzzy numbers [9] $\tilde{a}_i, i = \overline{1,m}, \; \tilde{b}_j, j = \overline{1,n}$.

In this case we consider transportation problem as linear programming problem that may be written in the next form:

$$\min \; Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} , \tag{5}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i , \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j , \quad j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

and

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j . \tag{8}$$

Fuzzy values $\tilde{a}_i, i = \overline{1,m}, \; \tilde{b}_j, j = \overline{1,n},$ are consider as Triangular Fuzzy Numbers (TFN) $\tilde{a}_i = (a_i - a_i^l, a_i, a_i + a_i^r), i = \overline{1,m},$ with tolerances $a_i^l \; (< a_i)$, $a_i^r \; (> 0)$ for $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i, i = \overline{1,m}$ and $\tilde{b}_j = (b_j - b_j^l, b_j, b_j + b_j^r), j = \overline{1,n},$ with tolerances $b_j^l \; (< b_j)$, $b_j^r \; (> 0)$ for $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j, j = \overline{1,n}$, respectively.

Triangular Fuzzy Numbers $\widetilde{b}_i = (b_i - b_i^l, b_i, b_i),\quad i = \overline{1,m},$ are called Left Triangular Fuzzy Number (LTFN) with tolerance $b_i^l\ (< b_i),\quad i = \overline{1,m},$ and Triangular Fuzzy Numbers $\widetilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^r),\quad i = \overline{1,m},$ are called Right Triangular Fuzzy Number (RTFN) with tolerance $b_i^r\ (> 0),\quad i = \overline{1,m}$.

The solution of FTP (5)-(8) according to approach [10] is offered. Let L_1 and U_1 are the lower and upper bound for the objective function Z. When the aspiration levels for objective have been obtained, we form a fuzzy model which is as follows:
find x_{ij} , $i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n},$ so as to satisfy

$$Z \geq \widetilde{s},\ \ \widetilde{s} = (L_1, U_1, U_1)\,, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \widetilde{a}_i,\quad i = \overline{1,m},\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \widetilde{b}_j,\quad j = \overline{1,n},\qquad \sum_{i=1}^{m} \widetilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_j\ , \tag{10}$$

$$x_{ij} \geq 0\ ,\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}\ .$$

The membership functions for fuzzy constraints of (1.3, 1.4) are defined as:
for first constraint (9)

$$\mu^1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, & \text{for } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} < L_1, \\ \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - L_1\right) \Big/ (U_1 - L_1), & \text{for } L_1 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} < U_1, \\ 1, & \text{for } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq U_1, \end{cases}$$

for the *i*-th constrains, $i = \overline{1,m},$

$$\mu_i^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, & \text{for } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i - a_i^l, \\ \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i + a_i^l\right) \Big/ a_i^l, & \text{for } a_i - a_i^l \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, \\ \left(a_i + a_i^l - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \Big/ a_i^r, & \text{for } a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i + a_i^r, \\ 1, & \text{for } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i + a_i^r, \end{cases}$$

for the *j*-th constrains, $j = \overline{1,n}$,

$$\mu_j^3\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, & \text{for } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j - b_j^l, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j + b_j^l\right) \Big/ b_j^l, & \text{for } b_j - b_j^l \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_i, \\ \left(b_j + b_j^r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \Big/ b_j^r, & \text{for } b_i \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j + b_j^r, \\ 1, & \text{for } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j + b_j^r. \end{cases}$$

Using the max-min operator (as Zimmermann [3]) linear programming problems for (9), (10) is formulated as follows:

$$\max\ \lambda \tag{11}$$

subject to

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \lambda(U_1 - L_1) \geq L_1\,, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \lambda a_i^l \geq a_i - a_i^l\,, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \lambda a_i^r \leq a_i - a_i^r\,, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \lambda b_i^l \geq b_j - b_j^l\,, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \lambda b_i^r \geq b_j + b_j^r\,, \\ 0 \leq \lambda \leq 1\,,\ x_{ij} \geq 0\,,\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}\,. \end{gathered} \tag{12}$$

APPLICATION IN TRANSPORTATION MODELS

The following data adopted from J. Reeb and S. Leavengood [11] is used to show that the above Fuzzy Transportation Problem with fuzzy constraints can be employed to solved.

First, let's formulate our problem and we will solve using the LP software WINQSB. The XYZ Sawmill Company's CEO asks to see next month's log hauling schedule to his three sawmills. He wants to make sure he keeps a steady, adequate flow of logs to his sawmills to capitalize on the good lumber market. Secondary, but still important to him, is to minimize the cost of transportation. The harvesting group plans to move to three new logging sites. The distance from each site to each sawmill is in Table 1. The average haul cost is $2 per mile for both loaded and empty trucks. The logging supervisor estimated the number of truckloads of logs coming off each harvest site daily. The number of truckloads varies because terrain and cutting patterns are unique for each site. Finally, the sawmill managers have estimated the truckloads of logs their mills need each day. All these estimates are in Table 1.

Table **1. Supply and demand of sawlogs for the XYZ Sawmill Company.**

Logging site	Distance to mill (miles)			Maximum truckloads/day per logging site
	Mill A	Mill B	Mill C	
1	8	15	50	20
2	10	17	20	30
3	30	26	15	45
Mill demand (truckloads/day)	30	35	30	

The next step is to determine costs to haul from each site to each mill (Table 2).

Table **2. Round-trip transportation costs for XYZ Sawmill Company.**

Logging site	Mill A	Mill B	Mill C
1	32	60	200
2	40	68	80
3	120	104	60

We can set the LP problem up as a cost minimization; that is,we want to minimize hauling costs and meet each of the sawmills. This problem is formulate as:

let x_{ij} = amounts transported from Site *i* to Mill *j, i = 1, 2, 3* (logging sites), *j = 1, 2, 3* (sawmills),

objective function

$$32x_{11}+40x_{21}+120x_{31}+60x_{12}+68x_{22}+104x_{32}+200x_{13}+80x_{23}+60x_{33}\to \min \tag{13}$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{21}+x_{31}&=30 \text{ Truckloads to Mill A}\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}&=35 \text{ Truckloads to Mill B}\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}&=30 \text{ Truckloads to Mill C}\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}&=20 \text{ Truckloads from Site 1}\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}&=30 \text{ Truckloads from Site 2}\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}&=45 \text{ Truckloads from Site 3}
\end{aligned} \tag{14}$$

In this model all right hand side are fuzzy numbers as follow:

$$\tilde{30}=(28,30,32),\ \tilde{35}=(34,35,37),\ \tilde{30}=(29,30,31),\ \tilde{20}=(18,20,23),\ \tilde{30}=(28,30,33),\ \tilde{45}=(44,45,46).$$

By using equation (11) the model become

$$\max\ \lambda$$

subject to

$$32x_{11}+40x_{21}+120x_{31}+60x_{12}+68x_{22}+104x_{32}+200x_{13}+80x_{23}+60x_{33}-\lambda(5760-5560)\ge 5560,$$

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{21}+x_{31}&\ge 28+2\lambda,\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}&\le 32-2\lambda,\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}&\le 34+2\lambda,\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}&\le 38-3\lambda,\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}&\ge 29+\lambda,\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}&\le 31-\lambda,\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}&\ge 18+2\lambda,\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}&\le 23-3\lambda,\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}&\ge 28+2\lambda,\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}&\le 33-3\lambda,\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}&\ge 44+\lambda,\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}&\le 46-\lambda,\\
x_{ij}&\ge 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3.
\end{aligned}$$

The optimal solution is :

$$x_{11}=0, x_{21}=26,\ x_{31}=0,\ x_{12}=15.8, x_{22}=0,\ x_{32}=17.17,\ x_{13}=2.17, x_{23}=0,\ x_{33}=25.8,\ \lambda=1, z=5842.8.$$

FUZZY APPROACH TO SOLVING PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING BASED ON METHODS FOR DECISION MAKING

The parameter in the formulation of the optimization problem (11) – (12) determines the total guaranteed level of fuzzy defined resources. In practice the tolerance depends from type and specific resources. This allows us to generalize the above proposed approach to the case of using multiple parameters.

Let it be known that the tolerance of demand and supply resources in constraints are independent and can be formalized in the form of inequalities

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \lambda_1 a_i^l \ge a_i - a_i^l, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \lambda_1 a_i^r \le a_i - a_i^r, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \lambda_2 b_j^l \ge b_j - b_j^l, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \lambda_2 b_j^r \le b_j + b_j^r, \\ &i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},\ 0 \le \lambda_p \le 1,\ \ p=\overline{1,2}. \end{aligned} \tag{13}$$

To find the marginal values change resource use way to compare the importance of constraints on the basis of decision-making methods.

Consider the method of constructing membership functions using pairwise comparisons. Let the set of elements $X=\{x_i \ge 0,\ i=\overline{1,k}\}$. The degree of association elements to fuzzy sets can be obtained by comparing the elements together. Let q_{ij} denote the element's estimation x_i in compare with element x_j, $i,j=\overline{1,k}$. For consistency, $q_{ij}=1/q_{ij}$. Estimations q_{ij} are define the matrix $Q=\left\|q_{ij}\right\|$, $i,j=\overline{1,k}$.

Further find the eigenvector $w=(w_1,...,w_m)$ corresponding to maximal eigenvalue $\lambda(Q)$ of matrix Q. The values $w_i \ge 0,\ i=\overline{1,k}$ are considering as levels of elements membership $x_i,\ i=\overline{1,k}$ to fuzzy set.

Coefficients of the relative importance of elements q_{ij} derived from estimates of the importance scale (Table 3).

Table 3

Relative importance of elements	Matrix *A* elements
Equal importance of elements	1
Slightly important	3
More important	5
Essentially important	7
Far more important	9
Intermediate values	2,4,6,8

Comparing the importance of constraints that define the area of solutions of fuzzy linear programming problem, finally we obtain the problem model, taking into account the importance of group constraints:

find $\lambda_0 \in [0,1]$ as solution linear programming task

$$\lambda_0 \to \max \tag{13}$$

subject to

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \lambda_0(U_1 - L_1) \ge L_1, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \lambda_1 a_i^l \ge a_i - a_i^l, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \lambda_1 a_i^r \le a_i - a_i^r, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \lambda_2 b_j^l \ge b_j - b_j^l, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \lambda_2 b_j^r \le b_j + b_j^r, \end{aligned} \tag{14}$$

$$w_1 \le \lambda_1,\ w_2 \le \lambda_2,\ \ x_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},\ \lambda_p \ge \lambda_0,\ 0 \le \lambda_p \le 1,\ \ p=\overline{1,2}.$$

In this case, we assume the matrix Q is define as

$$Q=\begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

The maximal eigenvalue of matrix $\lambda(Q)=2$ and eigenvector w corresponding to this value is $w=(5/6, 1/6)$. According to our new approach the model become

max λ

subject to

$$32x_{11} + 40x_{21} + 120x_{31} + 60x_{12} + 68x_{22} + 104x_{32} + 200x_{13} + 80x_{23} + 60x_{33} - \lambda_0(5760 - 5560) \ge 5560,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 28 + 2\lambda_1,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 32 - 2\lambda_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 34 + 2\lambda_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 38 \quad 3\lambda_1,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 29 + \lambda_1,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 31 - \lambda_1,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge 18 + 2\lambda_2,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 23 - 3\lambda_2,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \ge 28 + 2\lambda_2,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 33 - 3\lambda_2,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \ge 44 + \lambda_2,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 46 - \lambda_2,$$
$$5/6 \le \lambda_1,\ 1/6 \le \lambda_2,\ \lambda_1 \ge \lambda_0,\ \lambda_2 \ge \lambda_0,$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3.$$

The optimal solution is :

$$x_{11} = 0.23,\ x_{21} = 29.42,\ x_{31} = 0,\ x_{12} = 19.78,\ x_{22} = 0,\ x_{32} = 14.8,\ x_{13} = 0,\ x_{23} = 0,\ x_{33} = 29.83,\ \lambda_0 = 0.712,\ \lambda_1 = 0.83,\ \lambda_2 = 0.712,\ z = 5699.96$$

CONCLUSION

Transportation models have wide applications in logistics and supply chain for reducing the cost. Some previous studies have devised solution procedures for fuzzy transportation problems. In this paper we have thus obtained an optimal solution for a fuzzy transportation problem using triangle fuzzy number. A new approach to find the optimal solution of transportation problem with fuzzy resources is discussed. The new method is planned to use for solving the transportation problem with all fuzzy parameters.

References

1. Bellman R., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment // Management Sci. – 17(B). – 1970. – P.141-164.
2. Lai Y.J., Hwang C.L.. Fuzzy Mathematical Programming Methods and Application. – Berlin: Springer, 1992.
3. Zimmermann H.J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions// Fuzzy Sets and System. – №1. – 1978. – P.45-55.
4. Chanas S., Kuchta D. A concept of the optimal solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficients// Fuzzy Sets and Systems. – №82. – 1996. – P.299-305.
5. Klir G. J, Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. – Prentice-Hall, International Inc., 1995.
6. Chanas S., Kuchta D. Fuzzy integer transporting problem// Fuzzy Sets and Systems. – №98. – 1998. – P.291-298.
7. Tien Fuling. Applying interactive fuzzy multi-objective Linear programming to transportation planning decisions // Journal of information and optimization sciences. – Vol.27. – №1. – 2006. – P.107-126.
8. Arun Patil, Chandgude S. B. Fuzzy Hungarian Approach for Transportation Model //International Journal of Mechanical and Industrial Engineering (IJMIE). – Vol.2. – Issue-1. – 2012. – P.77-80.
9. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – Vol.21. – №2. – 2005. – P.243-268.
10. Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml, Single-Objective Linear Programming Problems With Fuzzy Coefficients and Resources// Computational and Applied Math. – №2. – 2013.
11. Reeb J., Leavengood S. Transportation Problem: A Special Case for Linear Programming Problems //Performance Eexcellence in the Wood Products Industry EM 8779, June 2002.

Надійшла до редколегії 15.03.13

Б. Алмодарс, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПІДХІД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З НЕЧІТКИМИ РЕСУРСАМИ

В роботі розглянуто метод пошуку оптимального розв'язку нечіткої транспортної задачі, ресурси в якій представлено нечіткими трикутними числами. Проілюстровано використання методу на прикладі реальної транспортної задачі. Запропоновано залучення розробленого підходу для вирішення нечітких транспортних задач загального вигляду.

Ключові слова: нечітка транспортна задачя, трикутник з нечіткими числами, оптимальне рішення.

Б. Алмодарс, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ РЕСУРСАМИ

В работе рассмотрен метод поиска оптимального решения нечеткой транспортной задачи, ресурсы в которой представлены нечеткими треугольными числами. Проиллюстрировано использование метода на примере реальной транспортной задачи. Предложено привлечения разработанного подхода для решения нечетких транспортных задач общего вида.

Ключевые слова: нечеткая транспортная задача, треугольник с нечеткими числами, оптимальное решение.

UDC 517.95:519.86:539.3

K. Dvirnychuk, PhD student
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

ABOUT PROBLEM OF CONTROL THREE-DIMENSIONAL FIELD TRANSVERSE DYNAMIC DISPLACEMENTS OF THICK ELASTIC PLATE

The problems managing three-dimensional cross-field dynamic displacement of thick elastic plates discretely observed for the initial boundary condition. Formulated terms of accuracy and uniqueness of the solution of the problem.

Keywords: differential model, integrated model, three-dimensional problem.

Introduction. Research and robust control of production, socio-economic and technical processes are not possible without quality mathematical model. The nature of these processes is not always possible to construct an adequate model that would fit into a set of mathematical models available for the study of classical methods of mathematical physics, computational mathematics and control theory. Problems [1-3] associated with the core processes of different nature, deep relationships that are difficult to formalize, and the inability to obtain the information necessary to build accurate mathematical model. Often the considered process is described mathematically model only partially and it goes incomplete.

One of these processes is the classic process control three-dimensional field transverse dynamic displacements of thick elastic plates. The background for it is the differential model of transverse dynamic displacement of thick elastic layer. There are many classical [4, 5] and not classical [6, 7] approaches to building such models, however, are not without some mechanical hypotheses. Differential elastic layer model without hypotheses proposed in [8], limited to the static case. Built as our generalization [9] results [8] applies to the dynamics of thick elastic layer.

In solving the problem of controlling three-dimensional field transverse dynamic displacements of thick elastic plates with in [9] results in the presence of limited information about their initial boundary value condition and sent this scientific research.

Differential model of transverse dynamic displacement of thick elastic layer. For the task of controlling three-dimensional field transverse dynamic displacements of thick elastic plates look for it original differential model and some of its features are given in [9]. To suppose that a thick elastic layer thickness $2h$ is in the Cartesian coordinate system x, y, z so that its surface defined planes $z=\pm h$. Assuming that the surface of this layer under the action of normal $q_1^{\pm}(x,y,t)$ and tangential $q_2^{\pm}(x,y,t)$ unknown external dynamic forces ($t\in[0,T]$ – time), through $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ denote the shift points via the layer in the coordinate axes Ox, Oy, Oz respectively. Dynamic transverse displacements $w(x,y,z,t)$ at this present amount

$$w(x,y,z,t)=\sum_{l=1}^{2} w^{(l)}(x,y,z,t)\,. \tag{1}$$

Differential same model under consideration layer constructed in [9], has the form

$$Q^{(l)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)w^{(l)}(x,y,z,t)=d_1^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)q_1^{(l)}(x,y,t)+d_2^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)q_2^{(l)}(x,y,t)\ \ (l=\overline{1,2})\,, \tag{2}$$

Here and further

$$q_1^{(1)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_1^{+}(x,y,t)+q_1^{-}(x,y,t))\,,\ q_2^{(1)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_2^{+}(x,y,t)-q_2^{-}(x,y,t))\,,$$

$$q_1^{(2)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_1^{+}(x,y,t)-q_1^{-}(x,y,t))\,,\ q_2^{(2)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_2^{+}(x,y,t)+q_2^{-}(x,y,t))\,,$$

$$Q^{(1)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)=(\Delta+D_2^2)((\lambda+2\mu)D_1^2-\lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}-4\mu\Delta D_1^2\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\,,$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=D_1^2\left[(\Delta+D_2^2)\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2}-2\Delta\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\frac{\sin(zD_2)}{D_2}\right],$$

$$d_2^{(1)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=2d\left[\frac{1}{\mu}((\lambda+2\mu)D_1^2-\lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(zD_2)}{D_2}-2D_1^2\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\right],$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=(\Delta+D_2^2)\cos(zD_1)\cos(hD_2)-2\Delta\cos(hD_1)\cos(zD_2)\,,$$

$$d_2^{(2)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=2d\left[2D_2^2\cos(zD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}+\frac{1}{\mu}(\lambda\Delta-(\lambda+2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(zD_2)\right], \tag{3}$$

at Δ, D_1^2, D_2^2 that ratios

$$\Delta=d(\partial_x+\partial_y)\,,\ D_1^2=\Delta_1+\frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\,,\ D_2^2=\Delta_2-\frac{1}{c_2^2}\partial_t^2$$

determined through

$$\Delta_1=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\Delta+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Delta_2\,,\ \Delta_2=\partial_x^2+\partial_y^2\,,$$

Lame constants λ and μ, speeds $c_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ and $c_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ propagation of elastic waves of expansion and shift in the considered environment (ρ – density material) and operator d, for which $d(u+v)=\partial_x u+\partial_y v$.

After of returning trigonometric components $\frac{\sin(zD_m)}{D_m}$, $\frac{\sin(hD_m)}{D_m}$, $\cos(zD_m)$, $\cos(hD_m)$ $(m=\overline{1,2})$ operators (3) of their differential content equations (2) and will describe the three-dimensional field of dynamic displacements of thick elastic layer.

Note that equation (2), recorded with varying degrees of accuracy include classical equation [4, 5], two-dimensional theory of deflection plates, and are known for their generalization [7], are based on non-classical models of mechanics of solid deformable body.

Integrated model of transverse dynamic displacement thick elastic layer. Here are useful for studying the dynamics of three-dimensional fields of transverse dynamic displacements of thick elastic plates equivalent integral differential model (2), which is built by us in [10] and has the form

$$w^{(l)}(x,y,z,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{(l)}(x',y',t')G^{(l)}(x-x',y-y',z,t-t')dx'dy'dt', \tag{4}$$

where

$$q^{(l)}(x',y',t')=\sum_{k=1}^{2} q_k^{(l)}(x',y',t'),$$

$$G^{(l)}(x-x',y-y',z,t-t')=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{2} d_k^{(l)}(p_1,p_2,z,q)}{Q^{(l)}(p_1,p_2,q)}e^{p_1(x-x')+p_2(y-y')+q(t-t')}\right)dp_1dp_2dq. \tag{5}$$

We note in passing that the integrated model (4) is specified and refined axial symmetric case study of the dynamics layer when $d=\partial_x+\partial_y$. Given the recent and structure of operators $Q^{(l)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)$, $d_k^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)$ $(l,k=\overline{1,2})$ given in (3), we conclude that the functions $Q^{(l)}(p_1,p_2,q)$ і $d_k^{(l)}(p_1,p_2,z,q)$ $(l,k=\overline{1,2})$ meet axial symmetric case of integrated mathematical model (4), written with the degree of accuracy h^3 are as follows:

$$Q^{(1)}(p_1,p_2,q)=\mu h\left\{\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\rho}{\mu}q^2\right\}-$$
$$-\mu\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)^2-\frac{4(2\lambda^2+8\lambda\mu+7\mu^2)}{(\lambda+2\mu)^2}(p_1^2+p_2^2)\frac{\rho}{\mu}q^2+\frac{\lambda+5\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}q^2\right)^2\right\},$$
$$Q^{(2)}(p_1,p_2,q)=h\rho q^2+\mu\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)^2-\frac{4(3\lambda+4\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)\frac{\rho}{\mu}q^2+\frac{3\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}q^2\right)^2\right\}, \tag{6}$$
$$d_1^{(1)}(p_1,p_2,z,q)=zh\left\{p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right\},\ d_2^{(1)}(p_1,p_2,z,q)=z(p_1+p_2)\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{2}h^2\left[p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{3!}z^3(p_1+p_2)\left\{\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\rho}{\mu}q^2\right\},$$
$$d_1^{(2)}(p_1,p_2,z,q)=1-\frac{1}{2}h^2\left\{\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\rho}{\mu}q^2\right\}+\frac{1}{2}z^2\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right\},$$
$$d_2^{(2)}(p_1,p_2,z,q)=h(p_1+p_2)\left\{1-\frac{1}{3!}h^2\left[\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho}{\mu}q^2\right]\right\}+\frac{1}{2}z^2h(p_1+p_2)\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\mu}q^2\right)\right\}.$$

Method of calculating integrals (5), recorded with regard to (6), we examined in detail in [11].

Criterion and features three-dimensional problem solving control field transverse dynamic displacements of thick elastic plates. Consider the dynamics of plate cylinder $\Gamma(x,y)=0$ of the examined cut above the elastic layer. Points of such plate assign to some spatial area S_0.

Pose and solve the problem of the determination of the control function $q^{(l)}(x,y,t)$ $(l=\overline{1,2})$, which would be a function $w(x,y,z,t)$ of the plate, the average square coordinated with discretely defined initial and boundary observations

$$L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in S_0}}=Y_{rj}^0\ \ (j=\overline{1,J_r},\ r=\overline{1,R_0}), \tag{7}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{\substack{t=t_j\in[0,T]\\ \sigma=\sigma_j^\Gamma\in S_\Gamma}}=Y_{\rho j}^\Gamma\ \ (j=\overline{1,J_\rho},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}), \tag{8}$$

point area S_0 examining the plates exasperated in neighborhood Y_{ij} $(i=\overline{1,I},\ j=\overline{1,J})$ preset ratios

$$L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in S_0\times[0,T]}=Y_{ij},\ \ (j=\overline{1,J_i},\ i=\overline{1,I}). \tag{9}$$

Here and further $S_\Gamma=\Gamma(x,y)\times[-h,h]$, $\sigma=(x,y,z)$, $s=(\sigma,t)$, ∂_t and $\partial_\sigma=(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$ – derivatives with respect to time and spatial coordinates x, y, z, $L_r^0(\partial_t)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{1,I})$ – linear differential operators. On the number of initial R_0 and boundary R_Γ observations displacements $w(s)$ will not impose any restrictions.

Criterion control function $q^{(l)}(x,y,t)$ $(l=\overline{1,2})$ written in the form

$$\Phi=\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{j=1}^{J_r}\left(L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in S_0}}-Y_{rj}^0\right)^2+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{j=1}^{J_\rho}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{\substack{t=t_j\in[0,T]\\ \sigma=\sigma_j^\Gamma\in S_\Gamma}}-Y_{\rho j}^\Gamma\right)^2+ \\ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\left(L_i(\partial_s)w(s)\Big|_{s=s_{ij}\in S_0\times[0,T]}-Y_{ij}\right)^2\to\min_{q^{(l)}(x,y,t)\ (l=\overline{1,2})}. \tag{10}$$

To solve this problem we use the method proposed in [1] and developed in [2, 3]. According to this function will submit the amount

$$w(s)=w^{(1)}(s)+w^{(2)}(s)=\sum_{l=1}^{2}(w_\infty^{(l)}(s)+w_0^{(l)}(s)+w_\Gamma^{(l)}(s)), \tag{11}$$

which

$$w_\infty^{(l)}(s)=\int_S G^{(l)}(\xi-\xi',z)q^{(l)}(\xi')d\xi', \tag{12}$$

$$w_0^{(l)}(s)=\int_{S^0} G^{(l)}(\xi-\xi',z)u_0^{(l)}(\xi')d\xi', \tag{13}$$

$$w_\Gamma^{(l)}(s)=\int_{S^\Gamma} G^{(l)}(\xi-\xi',z)u_\Gamma^{(l)}(\xi')d\xi'\ \ (l=\overline{1,2}), \tag{14}$$

$S=(S_0\cap((z=h)\cup(z=-h)))\times[0,\mathrm{T}]$, $S^0=(S_0\cap((z=h)\cup(z=-h)))\times(-\infty,0]$, $S^\Gamma=((R^3\setminus S_0)\cap((z=h)\cup(z=-h)))\times[0,T]$, $\xi=(x,y,t)$, $\xi'=(x',y',t')$.

Functions $u_0^{(l)}(\xi)$, $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ defined outside the considered area $S_0\times[0,\mathrm{T}]$, affecting the function of the transverse dynamic displacement $w(s)$ through the function $G^{(l)}(\xi-\xi',z)$ call a further modeling.

The task of controls a three-dimensional field transverse dynamic displacement of thick elastic plates through the function surface distributed external dynamic disturbances. The problem (10) to find a control function $q^{(l)}(\xi)$ $(l=\overline{1,2})$ to synchronize finding vector function

$$\overline{u}(\xi)=col(col(u_0^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^0),\ \ u_\Gamma^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^\Gamma),\ \ q^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S)),\ \ l=\overline{1,2}), \tag{15}$$

such that

$$\Phi\to\min_{\overline{u}(\xi)}. \tag{16}$$

After substituting relations (11) – (14) in the initial boundary conditions (7), (8) and taking into account the desired state defined in (9), we obtain the system of integral equations

$$\int A(\xi')\overline{u}(\xi')d\xi'=\overline{Y} \tag{17}$$

at a known vector

$$\overline{Y}=col(Y^0,Y^\Gamma,Y)$$

and matrix functions

$$A(\xi)=str\,((A_1^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^0),\ \ A_2^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^\Gamma),\ \ A_3^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S)),\ \ l=\overline{1,2}),$$

$$A_n^{(l)}(\xi)=col\,(A_{kn}^{(l)}(\xi),\ \ k=\overline{1,3})\ \ (n=\overline{1,3},\ \ l=\overline{1,2}),$$

in which

$$Y^0=col((Y_{rj}^0,j=\overline{1,J_r}),r=\overline{1,R_0}),\ \ Y^\Gamma=col((Y_{\rho j}^\Gamma,j=\overline{1,J_\rho}),\rho=\overline{1,R_\Gamma}),\ \ Y=col((Y_{ij},j=\overline{1,J_i}),i=\overline{1,I}),$$

$$A_{1n}^{(l)}(\xi')=col\left(\left(L_r^0(\partial_t)G^{(l)}(\xi-\xi',z)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0}},\ \ j=\overline{1,J_r}\right),\ \ r=\overline{1,R_0}\right),$$

$$A_{2n}^{(l)}(\xi')=col\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G^{(l)}(\xi-\xi',z)\Big|_{\substack{t=t_j\\ \sigma=\sigma_j^\Gamma}},\ \ j=\overline{1,J_\rho}\right),\ \ \rho=\overline{1,R_\Gamma}\right),$$

$$A_{3n}^{(l)}(\xi')=col\left(\left(L_i(\partial_s)G^{(l)}(\xi-\xi',z)\Big|_{s=s_{ij}},\ \ j=\overline{1,J_i}\right),\ \ i=\overline{1,I}\right)\ \ (l=\overline{1,2},\ \ n=\overline{1,3}).$$

Here the integration is performed over the region change argument integrand and $\sigma_j^0\in S_0$, $t_j\in[0,T]$, $\sigma_j^\Gamma\in S_\Gamma$, $s_{ij}\in S_0\times[0,T]$.

As a result pseudo inverse system (17) such that

$$\left\|\int A(\xi)\overline{u}(\xi)d\xi-\overline{Y}\right\|^2\to\min_{\overline{u}(\xi)}, \tag{18}$$

controlling-modeling functions $u_0^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^0)$, $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^\Gamma)$, $q^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S)$ define [3] ratios (at $l = \overline{1,2}$):

$$u_0^{(l)}(\xi) \in \Omega_0^{(l)} = \{u_0^{(l)}(\xi):\ u_0^{(l)}(\xi) = (A_1^{(l)}(\xi))^T P^+(\overline{Y} - A_v) + v_0^{(l)}(\xi),\ \forall v_0^{(l)}(\xi)\}\ (\xi \in S^0),$$

$$u_\Gamma^{(l)}(\xi) \in \Omega_\Gamma^{(l)} = \{u_\Gamma^{(l)}(\xi):\ u_\Gamma^{(l)}(\xi) = (A_2^{(l)}(\xi))^T P^+(\overline{Y} - A_v) + v_\Gamma^{(l)}(\xi),\ \forall v_\Gamma^{(l)}(\xi)\}\ (\xi \in S^\Gamma),$$

$$q^{(l)}(\xi) \in \Omega_q^{(l)} = \{q^{(l)}(\xi):\ q^{(l)}(\xi) = (A_3^{(l)}(\xi))^T P^+(\overline{Y} - A_v) + v^{(l)}(\xi),\ \forall v^{(l)}(\xi)\}\ (\xi \in S), \quad (19)$$

in which for arbitrarily defined and integrated in the change of its argument functions $v_0^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^0)$, $v_\Gamma^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^\Gamma)$, $v^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S)$

$$A_v = \sum_{l=1}^{2}\left(\int_{S^0} A_1^{(l)}(\xi)v_0^{(l)}(\xi)d\xi + \int_{S^\Gamma} A_2^{(l)}(\xi)v_\Gamma^{(l)}(\xi)d\xi + \int_S A_3^{(l)}(\xi)v^{(l)}(\xi)d\xi \right),$$

P^+ – matrix pseudo inverse to

$$P = \sum_{l=1}^{2}\left(\int_{S^0} A_1^{(l)}(\xi)(A_1^{(l)}(\xi))^T d\xi + \int_{S^\Gamma} A_2^{(l)}(\xi)(A_2^{(l)}(\xi))^T d\xi + \int_S A_3^{(l)}(\xi)(A_3^{(l)}(\xi))^T d\xi \right) (l = \overline{1,2}).$$

Note that the average quadratic precision with which the control-modeling functions $u_0^{(l)}(\xi)$, $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ and $q^{(l)}(\xi)$ $(l = \overline{1,2})$ satisfy (17), and found their use the function $w(\xi)$ is consistent with initial and boundary conditions controlling (7) – (9), will be determined by size [3]

$$\varepsilon^2 = \min_{\overline{u}(\xi)} \left\| \int A(\xi)\overline{u}(\xi)d\xi - \overline{Y} \right\|^2 = \overline{Y}^T\overline{Y} - \overline{Y}^T PP^+\overline{Y}. \quad (20)$$

Constituents $w^{(l)}(s)$ $(l = \overline{1,2})$ function of transverse dynamic displacement $w(s)$ will be determined at the same ratios (11) – (14) taking into account found under (19) control-modeling functions $u_0^{(l)}(\xi)$, $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ and $q^{(l)}(\xi)$ $(l = \overline{1,2})$.

The condition for the uniqueness $(v_0^{(l)}(\xi) = v_\Gamma^{(l)}(\xi) = v^{(l)}(\xi) = 0)$ of the obtained solution is

$$\lim_{N\to\infty} \det[A^T(\xi_i)A(\xi_j)]_{i,j=1}^N > 0 .$$

The task of controls a three-dimensional field transverse dynamic displacement of thick elastic plates via a discrete set of surface distributed external dynamic disturbances. Problem (10) can be successfully resolved if the modeling $u_0^{(l)}(\xi)$, $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ $(l = \overline{1,2})$ and control $q^{(l)}(\xi)$ $(l = \overline{1,2})$ functions determine the vectors

$$u_0^{(l)} = col\,(u_{0m}^{(l)} = u_0^{(l)}(\xi_m^{0(l)}), m = \overline{1, M_0^{(l)}}), \quad (21)$$

$$u_\Gamma^{(l)} = col\,(u_{\Gamma m}^{(l)} = u_\Gamma^{(l)}(\xi_m^{\Gamma(l)}), m = \overline{1, M_\Gamma^{(l)}}), \quad (22)$$

$$q_*^{(l)} = col\,(q_m^{(l)} = q^{(l)}(\xi_m^{(l)}), m = \overline{1, M^{(l)}}) \quad (l = \overline{1,2}) \quad (23)$$

values $u_{0m}^{(l)}$ $(m = \overline{1,M_0^{(l)}})$, $u_{\Gamma m}^{(l)}$ $(m = \overline{1,M_\Gamma^{(l)}})$ and $q_m^{(l)}$ $(m = \overline{1,M^{(l)}})$ $(l = \overline{1,2})$ at points $\xi_m^{0(l)} \in S^0$, $\xi_m^{\Gamma(l)} \in S^\Gamma$ and $\xi_m^{(l)} \in S$ respectively.

In this case the functions $w_0^{(l)}(\xi)$, $w_\Gamma^{(l)}(\xi)$ $(l = \overline{1,2})$ and criteria for solving the problem in contrast to (13), (14) and (16) represent the ratios

$$w_0^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_0^{(l)}} G^{(l)}(\xi - \xi_m^{0(l)}, z)u_{0m}^{(l)}, \quad (23)$$

$$w_\Gamma^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma^{(l)}} G^{(l)}(\xi - \xi_m^{\Gamma(l)}, z)u_{\Gamma m}^{(l)} \quad (l = \overline{1,2}), \quad (24)$$

$$\Phi \to \min_{\substack{u_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}},\ u_\Gamma^{(l)} \in R^{M_\Gamma^{(l)}},\\ q_*^{(l)} \in R^{M^{(l)}}\ (l=\overline{1,2})}}. \quad (25)$$

The problem is (25) is equivalent to the average square inversion of linear algebraic equations

$$A\overline{u} = \overline{Y}, \quad (26)$$

in which the vector $\overline{Y}$ defined above and

$$\overline{u} = col(col(u_0^{(l)},\ u_\Gamma^{(l)},\ q_*^{(l)}),\ l = \overline{1,2}),$$

$$A = str((A_1^{(l)},\ A_2^{(l)},\ A_3^{(l)}),\ l = \overline{1,2}),\ A_n^{(l)} = col(A_{kn}^{(l)},\ k = \overline{1,3})\ \ (n = \overline{1,3},\ l = \overline{1,2}),$$

where

$$A_{1n}^{(l)} = col\left(\left(\left(str\left(L_r^0(\partial_t)G^{(l)}(\xi - \xi_{nm}^{(l)}, z)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0 \in S_0}},\ m = \overline{1, M_n^{(l)}}\right),\ j = \overline{1,J_r}\right),\ r = \overline{1,R_0}\right),$$

$$A_{2n}^{(l)} = col\left(\left(\left(str\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G^{(l)}(\xi - \xi_{nm}^{(l)}, z)\Big|_{\substack{t=t_j \in [0,T]\\ \sigma=\sigma_j^\Gamma \in S_\Gamma}},\ m = \overline{1, M_n^{(l)}}\right),\ j = \overline{1,J_\rho}\right),\ \rho = \overline{1,R_\Gamma}\right),$$

$$A_{3n}^{(l)} = col\left(\left(str\left((L_i(\partial_s)G^{(l)}(\xi - \xi_{nm}^{(l)}, z)\big|_{s=s_{ij}\in S_0\times[0,T]}\ ,\ m=\overline{1,M_n^{(l)}}\right),\ j=\overline{1,J_i}\right),\ i=\overline{1,I})\right)$$

at $l=\overline{1,2}$, $n=\overline{1,3}$, $\xi_{1m}^{(l)}=\xi_m^{0(l)}$, $\xi_{2m}^{(l)}=\xi_m^{\Gamma(l)}$, $\xi_{3m}^{(l)}=\xi_m^{(l)}$, $M_1^{(l)}=M_0^{(l)}$, $M_2^{(l)}=M_\Gamma^{(l)}$, $M_3^{(l)}=M^{(l)}$.

After average square inversion (26) such that

$$\left\|A\bar{u}-\bar{Y}\right\|^2 \to \min_{\bar{u}},$$

by analogy with the previous case we find that the control-modeling vectors $u_0^{(l)}$, $u_\Gamma^{(l)}$, $q_*^{(l)}$ determined [3] ratios (at $l=\overline{1,2}$):

$$u_0^{(l)} \in \Omega_0^{(l)} = \{u_0^{(l)}:\ u_0^{(l)} = (A_1^{(l)})^T P^+(\bar{Y}-A\bar{v}) + v_0^{(l)}\}\ ,$$

$$u_\Gamma^{(l)} \in \Omega_\Gamma^{(l)} = \{u_\Gamma^{(l)}:\ u_\Gamma^{(l)} = (A_2^{(l)})^T P^+(\bar{Y}-A\bar{v}) + v_\Gamma^{(l)}\}\ ,$$

$$q_*^{(l)} \in \Omega_q^{(l)} = \{q_*^{(l)}:\ q_*^{(l)} = (A_3^{(l)})^T P^+(\bar{Y}-A\bar{v}) + v_*^{(l)}\}$$

for arbitrary $\bar{v}=col(col(v_0^{(l)}\in R^{M_0^{(l)}}, v_\Gamma^{(l)}\in R^{M_\Gamma^{(l)}}, v_*^{(l)}\in R^{M^{(l)}}),\ l=\overline{1,2})$, where P^+ – matrix pseudo inverse to $P=AA^T$.

The accuracy of the solution of the problem is defined [3] ratio

$$\varepsilon = \min_{\bar{u}} \Phi = \bar{Y}^T\bar{Y} - \bar{Y}^T PP^+\bar{Y}$$

and by the uniqueness $(v_0^{(l)} = v_\Gamma^{(l)} = v_*^{(l)} = 0)$ of the obtained solution is $\det A^T A > 0$.

References

1. Skopetskiy V.V., Stoyan V.A., Kryvonos Yu.G. Mathematical modeling of direct and inverse problems of distributed parameters systems dynamics.– Kyiv: Naukova dumka, 2002. – 361 p. [in Ukrainian]
2. Skopetskiy V.V., Stoyan V.A. Zvarydchuk V.B. Mathematical modeling of the dynamics of distributed space-time processes. – Kyiv: publisher "Steel", 2008. – 316 p. [in Ukrainian]
3. Stoyan V.A. Mathematical modeling of dynamics of linear, quasilinear and nonlinear systems. – Kyiv: STPC "University of Kiev", 2011. – 319 p. [in Ukrainian]
4. Timoshenko S.P., Voynovskyy-Krieger S. Plates and shells. – Moscow: FIZMATLIT, 1966. – 635 p. [in Russian]
5. Donnell L.G. Beams, plates and shells. – Moscow: Nauka, 1982. – 568 p. [in Russian]
6. Grigorenko Ya.M., Vlaycov G.G., Grigorenko A.Ya. Numerical-analytical solution of problems in the mechanics of shells on the basis of various models. – Kyiv: Academperiodika, 2006. – 472 p. [in Russian]
7. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Solid mechanics. Volume 5: Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells. – Moscow: VINITI, 1973. – 272 p. [in Russian]
8. Lurie A.I. Dimensional problem of elasticity. – Moscow: Gostekhizdat, 1955. – 370 p. [in Russian]
9. Stoyan V.A., Dvirnychuk K.V. On the construction of a differential model of dynamic transverse displacement of thick elastic layer // Problems of cybernetics and Informatics. – 2012. – № 4. – P.74-83. [in Russian]
10. Stoyan V.A., Dvirnychuk K.V. Integral models of dynamic transverse displacement of thick elastic layer // Problems of cybernetics and Informatics. – 2013. – № 1.
11. [in Russian] Stoyan V.A., Dvirnychuk K.V. By building the equivalent integral linear differential models // Reports of NAS of Ukraine. – 2012. – № 9. – P.36-43. [in Ukrainian]

Надійшла до редколегії 07.06.13

К. Двірничук, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ПРОБЛЕМУ КЕРУВАННЯ ТРИВИМІРНИМ ПОЛЕМ ПОПЕРЕЧНОГО ДИНАМІЧНОГО ЗМІЩЕННЯ ТОВСТОЇ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянуті задачі керування трьохвимірним полем поперечних динамічних зміщень товстих пружних плит, дискретно спостережуваних за початково-крайовим станом. Сформульовані умови точності та однозначності розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова: диференціальна модель, інтегрована модель, тривимірна задача.

К. Двирничук, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫМ ПОЛЕМ ПОПЕРЕЧНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ ТОЛСТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрены задачи управления трехмерным полем поперечных динамических смещений толстых упругих плит, дискретно наблюдаемых за начально-краевым состоянием. Сформулированные условия точности и однозначности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: дифференциальная модель, интегрированная модель, трехмерная задача.

УДК 517.9

M. Langerova, professor,
M. Ruzickova, professor
Faculty of Humanities, University of Zilina, Slovakia, Zilina

PHARMACOKINETIC MODEL OF INTRAVENOUS MEDICATION ADMINISTRATION

Model of intravenous medication administration is considered, i.e. Cauchy initial problem for a nonlinear differential equation. It is shown that, under certain assumption, there exists positive bounded solution of the considered model. In the proof of the main result, we apply the topological retract method. An illustrative example is solved for particular function describing elimination rate of medication from the compartment using programming system MATLAB.

Keywords: pharmacokinetic model, intravenous, medication

1. Introduction

Drugs are introduced into the body by several routes. The intramuscular route is preferred to the subcutaneous route when larger volumes of a drug product are needed. When given intravenously, a drug is immediately delivered to the bloodstream and tends to take effect more quickly than when given by any other route. Some drugs must be given by continuous infusion to keep their effect constant.

Living organism is so much complex system that the study of the movement of the active substance in the body requires some degree of simplification. This can be achieved by creating a substitute system or model. In the pharmacokinetic are known compartmental models based on the existence of certain barriers, which must be overcome by molecules of the active substance, and which restrict their movement to the part of the organism. Decisive process for the movement of the medicament is the diffusion of molecules through the biological barriers what facilitates the mathematical description of the fate of the drug in the body. Most of pharmacokinetic processes conform to the rules of the kinetics of chemical reactions first order, for which is the speed of process in any moment proportional to the concentration of the active substance. We can imagine the compartment as a single entity having a capacity in which the drug is homogeneously dispersed. Supply of drug into the compartment and its removal are characterized by rate constants. In practice, for most drugs are used one-compartment or two-compartment models [3].

We will focus on solving one-compartment pharmacokinetic model of intravenous administration of treatment medication. In the simplest case, this model is in the form of differential equation

$$y'(t) = -py(t) + y_0, \tag{1}$$

where p is the rate constant of medicament elimination and y_0 is a constant rate of infusion. Function $y(t)$ indicates the quantity of active substance in the compartment in time t.

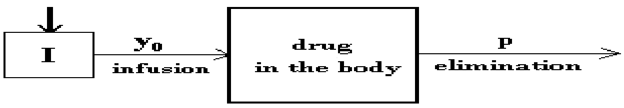

Fig. 1: Block diagram of one-compartment pharmacokinetic model

In generally, the rate of active substance elimination does not have to be constant, it can vary with time. This case describes real process more accurately.

Let us consider an initial Cauchy problem

$$y' = -p(t)y + y_{0,} \tag{2}$$

$$y(0) = 0, \tag{3}$$

where $t \geq 0, y_0 > 0$ and $p(t)$ is continuous function on $I_{\delta_2} = (0, \delta_2),\ \delta_2 > 0,$ which satisfies the inequality

$$0 < p_0 \leq p(t) \leq p_1.$$

The solution of Cauchy initial problem can be written in the form

$$y(t) = y_0 \left(e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s} - 1 \right).$$

We can see that this solution contains definite integral of the function $p(t)$. It is known that there exist such functions which integrals we cannot describe by elementary functions. The solution of Cauchy problem (2), (3) cannot be written without integral of these functions. In this case others accesses to the searching for quantity of medicament in the compartment are needed.

2. Preliminaries

In the proof of the main result the topological method of Ważewski is used. Therefore we give a short summary of it. Let us consider the system of differential equations

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

with known vector function *f* of two variables and unknown function *y* of one variable *x*. It will be assumed below that the right-hand side of the system (4) is a continuous function defined on the open (x, y)-set Ω. [1, p. 927]

Definition 1 [2, p. 281]. An open subset Ω^0 of the set Ω is called a (u, v)-subset of Ω with respect to the system (4) if the following conditions are satisfied:

1. There exist functions $v_i(x, y) \in C^1(\Omega),\ i = 1, \ldots, l$; $u_j(x, y) \in C^1(\Omega),\ j = 1, \ldots, m,$ such that

$$\Omega^0 = \{(x, y) : v_i(x, y) < 0,\ u_j(x, y) < 0\ for\ all\ i, j\}.$$

2. $\dot{v}_\alpha(x,y) < 0$ *holds for the derivatives of the functions* $v_\alpha(x,y), \alpha = 1,\ldots,l,$ along the trajectories of (4) on the set

$$V_\alpha = \{(x,y) : v_\alpha = 0, v_i(x,y) \le 0, u_j(x,y) \le 0 \text{ for all } i, j \text{ and } \alpha, i \ne \alpha\}.$$

3. $\dot{u}_\beta(x,y) > 0$ *holds for the derivatives of the functions* $u_\beta(x,y), \beta = 1,\ldots,m,$ along the trajectories of (4) on the set

$$U_\beta = \{(x,y) : u_\beta = 0, u_j(x,y) \le 0, v_i(x,y) \le 0 \text{ for all } i, j \text{ and } \beta, j \ne \beta\}.$$

The number l *or the number* m can be zero in this definition.

Definition 2 [4, p. 595]**.** The point $(x_0, y_0) \in \Omega \cap \delta\Omega^0$ is called an *egress point* (or *ingress point*) of Ω^0 with respect to the system (2) if, for every solution of the problem $y(x_0) = y_0$, there exists an $\varepsilon > 0$ *such that* $(x, y(x)) \in \Omega^0$ *for* $x_0 - \varepsilon \le x < x_0$ $(x_0 < x \le x_0 + \varepsilon)$. An egress point (ingress point) (x_0, y_0) *of* Ω^0 is called a *strict egress point* (*strict ingress point*) of Ω^0 *if* $(x, y(x)) \notin \bar{\Omega}^0$ *on the interval* $x_0 < x \le x_0 + \varepsilon_1$ $(x_0 - \varepsilon_1 \le x < x_0)$ *for a small* $\varepsilon_1 > 0$. The set of all points of egress (strict egress) is denoted by Ω_e^0 (Ω_{se}^0). Finally, the point $(x_0, y_0) \in \Omega \cap \delta\Omega^0$ is called an *outward tangency point* of Ω^0 with respect to the system (2) if, for every solution of the problem $y(x_0) = y_0$, there exists an $\varepsilon > 0$ *such that* $(x, y(x)) \notin \bar{\Omega}^0$ *for* $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,\ x \ne x_0$.

The points distinguished in the above definition can be visualized in Figure 2, where the fragments of trajectories of some planar equation near the boundary of the square are shown. The open vertical sides of the square consist of strict egress points, the open horizontal sides consist of strict ingress points and the four vertices form the set of outward tangency points [4, p. 595].

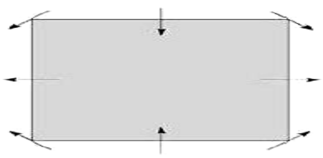

Fig. 2: Ingress, egress and outward tangency points

Lemma 1 [2, p. 281]**.** *Let* Ω^0 *be a* (u,v)*-subset of* Ω *with respect to the system* (4). *Then*

$$\Omega_{se}^0 = \Omega_e^0 = \left(\bigcup_{\beta=1}^{m} U_\beta\right) \setminus \left(\bigcup_{\alpha=1}^{l} V_\alpha\right)$$

The following theorem formulates sufficient conditions for the existence of at least one solution, having its graph in Ω^0 [1, p. 928].

Theorem 1 (Theorem of Ważewski) [2, p. 282]**.** *Let* Ω^0 *be some* (u,v)*-subset of* Ω *with respect to the system* (4). *Let* S *be a nonempty compact subset of* $\Omega^0 \cup \Omega_e^0$ *such that the set* $S \cap \Omega_e^0$ *is not a retract of* Ω_e^0. *Then there is at least one point* $(x_0, y_0) \in S \cap \Omega^0$ *such that the graph of a solution* $y(x)$ *of the Cauchy problem* $y(x_0) = y_0$ *lies in* Ω^0 *on its right-hand maximal interval of existence*.

3. Main result

Now, we consider one-compartment pharmacokinetic model of intravenous medication administration in the case when the rate of active substance elimination can vary with time.

Theorem 2 *Let* $p(t)$ *be a continuous function on* $I_{\delta_2} = (0, \delta_2),\ \delta_2 > 0,$ *and let the function* $p(t)$ *be bounded by positive constants* $p_0,\ p_1$, *i.e. the inequality* $0 < p_0 \le p(t) \le p_1$ *holds. Let* y_0 *be a positive constant. Then there exist a positive solution of the problem* (2), (3) *on an interval* $I_{\delta_3} \subset I_{\delta_2}$. *Moreover, the solution satisfies the inequality*

$$\frac{y_0}{p_1} < \lim_{t\to\infty} y(t) < \frac{y_0}{p_0}$$

on the interval I_{δ_3}.

Proof: Let the functions $\varphi(\delta t),\ \varphi(kt)$ be defined on the interval I_{δ_2} in the form

$$\varphi(\delta t) = -\frac{y_0}{p_1} e^{-\delta t} + \frac{y_0}{p_1},$$

$$\varphi(kt) = -\frac{y_0}{p_0} e^{-kt} + \frac{y_0}{p_0},$$

where δ *and* k are constants satisfying the inequality

$$0 < \delta < p_0 < 1 < k.$$

With regard to this it is easy to verity, that the functions $\varphi(\delta t)$, $\varphi(kt)$ satisfy the inequality

$$\varphi(\delta t) < \varphi(kt).$$

Let us define domain Ω_0 in the form

$$\Omega_0 = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \in (0,\delta_3), \varphi(\delta t) < y(t) < \varphi(kt)\}, \delta_3 > 0,$$

and the auxiliary functions

$$u(t,y) \equiv (y - \varphi(\delta t))(y - \varphi(kt)),$$
$$v(t,y) \equiv v(t) \equiv t - \delta_3.$$

Then

$$\Omega_0 = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u(t,y) < 0, v(t,y) < 0\}.$$

Next, we will show that all the points of the set

$$U = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u(t,y) = 0, v(t,y) \le 0\}$$

are the points of strict ingress of the set Ω_0 with respect to the equation (2) and all the points of the set

$$V = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u(t,y) \le 0, v(t,y) = 0\}$$

are the points of strict egress of set Ω_0 with respect to the equation (2).

For verifying this, we compute the full derivative of the function $u(t,y)$ along the trajectories of the equation (2) on corresponding set U at first. We get

$$\frac{du}{dt} = (y' - \delta\varphi'(\delta t))(y - \varphi(kt)) + (y - \varphi(\delta t))(y' - k\varphi'(kt))$$

If $(t,y) \in U$, then either $y = \varphi(\delta t)\, or\, y = \varphi(kt)$.

In the first case we have

$$\frac{du}{dt} /_{(t,y)\in U,\ y=\varphi(\delta t)} = (-p(t)y + y_0 - \delta\varphi'(\delta t))(\varphi(\delta t) - \varphi(kt)) < 0.$$

Thus, if $y = \varphi(\delta t)$ then all the points $(t,y) \in U$ are points of strict ingress.

In the second case, i.e., if $y = \varphi(kt)$, we get

$$\frac{du}{dt} /_{(t,y)\in U,\ y=\varphi(kt)} = (\varphi(kt) - \varphi(\delta t))(-p(t)y + y_0 - k\varphi'(kt)) < 0.$$

This means that if $y = \varphi(kt)$ then all the points $(t,y) \in U$ are also points of strict ingress. Therefore, in both considered cases we have obtained

$$\frac{du}{dt} /_{(t,y)\in U} < 0.$$

Now let us compute the full derivative of the function $v(t,y)$ along the trajectories of the equation (2) on corresponding set V. We have

$$\frac{dv}{dt} = 1 > 0.$$

Thus, all the points $(t,y) \in V$ are points of strict egress. So the set Ω_0 is the (u,v)-set and therefore we can apply the theorem of Ważewski. This means that the domain Ω_0 contains the graph of the solution of considered problem (2), (3) and this solution is bounded, i.e.

$$-\frac{y_0}{p_1}e^{-\delta t} + \frac{y_0}{p_1} < y(t) < -\frac{y_0}{p_0}e^{-kt} + \frac{y_0}{p_0}.$$

If we pass to the limit for $t \to \infty$ we get

$$\frac{y_0}{p_1} < \lim_{t\to\infty} y(t) < \frac{y_0}{p_0}.$$

On the basis of the last inequality, we can conclude that the level of the medicament in the compartment after long-lasting infusion will be close to the value, which is always greater than the ratio of infusion rate y_0 and p_1 of the function $p(t)$ and less than the ratio of y_0 and lower limit p_0 of the same function $p(t)$.

4. Examples

Let us consider a nonlinear Cauchy problem:

$$y' = p(t)y(t) + y_0,$$
$$y(0^+) = 0,$$

with

$$p(t) = 0.6e^{-\frac{1}{t}} + 0.2, \qquad y_0 > 0.$$

Let the function $p(t)$ be bounded for $t > 0$, i.e.

$$0.2 \le p(t) \le 0.8, \quad \forall t > 0.$$

This problem has, by Theorem 2, one positive solution, which is bounded on $I = (0, \infty)$ (see figure 3).

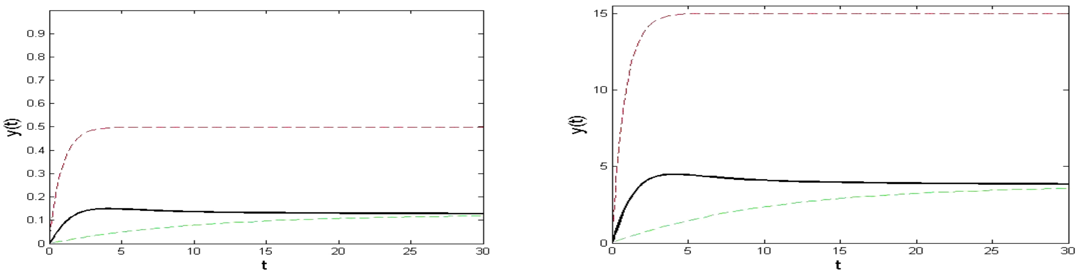

Fig. 3. The level of the medicament for $0 \le t \le 30$ **and** $\delta = 0.1, k = 2, y_0 = 0.1$ $\delta = 0.1, \mathrm{k} = 2, \mathrm{y}_0 = 0.1$ **or** $\delta = 0.1, k = 1.2, y_0 = 3$

We can make conclusion: In the case when the rate of active substance elimination is described by bounded function $0 < p_0 \le p(t) \le p_1,$ the level of the medicament in the compartment after long-lasting infusion is between values $\frac{y_0}{p_1}$ and $\frac{y_0}{p_0}$. Moreover, if the function $p(t)$ is the exponential function of the form mentioned above, the level of the medicament in the compartment convergent to the value $\frac{y_0}{p_1}$. For two considered values of the parameters $\delta = 0.1, k = 2, y_0 = 0.1;\ \delta = 0.1, k = 1.2, y_0 = 3$ the limit value is 0.125 or 3.75 respectively.

References

1. Diblik, J. – Ruzickova , M. 2004. Existence of positive solutions of singular initial problem for a nonlinear system of differential equations. In Rocky Mountain Journal of Mathematics. ISSN 0035-7596, 2004, vol. 34, no. 3, p. 923-944.
2. Hartman, P. 2002. Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhauser, 2002. 278 p. ISBN 0-89871-510-5.
3. Kaclik, P. 2008. Kapitoly matematiky a matematickej statistiky. 1. vyd. Bratislava: Univerzita Komenskeho, 2008. 274 p. ISBN 978-80-223-2466-3.
4. Srzednicki, R. 2004. Wazewski Method and Conley Index. In Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 1. Amsterdam: Elsevier, 2004. ISBN 978-0-444-51128-7. p. 593-600.

Надійшла до редколегії 10.09.13

М. Лангерова, проф.,
Ружикова М., проф.
Університет Жиліна, Словаччина, Жиліна

ФАРМАКОКІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ ВНУТРИВЕННОГО ВВЕДЕННЯ ЛІКІВ

Розглядається модель внутривенного введення препарату побудована на вихідній завдачі Коші для нелінійного диференціального рівняння. Показано, що при деяких умовах існує позитивне обмеження розв'язку розглянутої моделі. При доказі основного результату, ми застосовуємо метод топологічних відмовлення. Наочний приклад вирішується для конкретної функції, що описує швидкість виведення лікарського засобу з відсіку, застосувавши системи програмування MATLAB.

Ключові слова: фармакокінетичні моделі, внутрішньовенно, ліки.

М. Лангерова, проф.,
М. Ружикова, проф.
Университет Жилина, Словакия, Жилина

ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРИВЕННОГО ВВЕДЕНИЯ ЛЕКАРСТВ

Рассматривается модель внутривенного введения препарата построена на исходной завдачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения. Показано, что при некоторых условиях существует положительное ограничения решения рассматриваемой модели. При доказательстве основного результата, мы применяем метод топологического отказа. Наглядный пример решается для конкретной функции, описывающей скорость выведения лекарственного средства из отсека, применив системы программирования MATLAB.

Ключевые слова: фармакокинетические модели, внутривенно, лекарства.

УДК 517.929

Н. Гаркуша, канд. екон. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПОПУЛЯЦІЇ ЛЕСЛІ

В роботі проведено дослідження нелінійної моделі популяції Леслі. Модель записана у векторно-матричному вигляді різницевих рівнянь. Зроблено припущення про нелінійний вплив щільності популяції на динаміку системи. Визначено точки спокою. Досліджено вплив параметрів системи на її "грубість".

Ключові слова: динамічна система, різницеві рівняння, точки спокою, асимптотична стійкість, фазовий портрет.

Вступ

В наступній роботі продовжується дослідження динаміки моделі популяції Леслі, що проводилась в роботах [1-3]. Розглянута нелінійна (квазілінійна) модель. Модифікуємо Лінійна модель динаміки популяції Леслі, що була записана у векторний-матричному вигляді в роботі [8], модифікується наступним чином. Для обліку впливу щільності популяції на її плодючість, введена величина, що є зваженим розміром популяції [4-5]

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \ , \tag{0.1}$$

$\alpha_j > 0$, $j = \overline{1,n}$ – сталіі, які відображають вплив віку на життєві темпи зростання популяції. Зроблено припущення, що щільність популяції надає вплив на плодючість лінійним чином і залежність від неї у всіх класів однакова. Тоді плодючість середнього індивіда f_i класу $i = \overline{1,n}$ є функцією вигляду

$$f_i = a\tilde{f}_i g[w(x)], \; j = \overline{1,n}, \tag{0.2}$$

де $\tilde{f}_i$ – максимальний вихід відтворення середнього індивіда, що відноситься до вікового класу, $g[w]$ – залежність падіння народжуваності від щільності, a – ймовірність виживання індивідів першого вікового класу до моменту переходу до другого класу.

На функцію $g[w]$ зазвичай накладають наступні умови:

1) $g[w]$ є неперервно диференційованою, монотонно спадаючою при $0 \le w < +\infty$ функцією;

2) $g[w]$ задовольняє наступним умовам

$$g : [0,+\infty) \to (0,1], \; g(0) = 1, \; \lim_{w \to +\infty} g[w] = 0. \tag{0.3}$$

Можливі наступні варіанти вибору функцій, що задовольняють поставленим умовам:

а) $g[w] = \dfrac{1}{1+cw}$, $c > 0$;

б) $g[w] = \dfrac{1}{1+(cw)^\alpha}$, $c > 0$, $\alpha > 0$;

в) $g[w] = e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$;

Тоді матриця L системи матиме вигляд

$$L[w(x)] = \begin{bmatrix} a\tilde{f}_1 g[w(x)] & a\tilde{f}_2 g[w(x)] & \dots & a\tilde{f}_{n-1} g[w(x)] & a\tilde{f}_n g[w(x)] \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

і система буде квазілінійною

$$x(k+1) = L[w(x(k))], \; k = 0,1,2,... \tag{0.5}$$

1. Обчислення точок спокою

Дослідження системи проводиться наступним чином. Визначаються особливі точки системи. Їх дослідження проводиться методом лінеаризації. Знаходяться стаціонарні розв'язки квазілінійної системи. Позначимо

$$R_f = \tilde{f}_1 + p_1\tilde{f}_2 + p_1p_2\tilde{f}_3 + \dots + p_1p_2\dots p_{n-1}\tilde{f}_n. \tag{1.1}$$

Має місце наступне твердження.

Лема 1.1. Нехай функція $g[w]$, неперервно диференційована при $0 \le w < +\infty$, монотонно згасаюча і задовольняє умовам (0.3)

1. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f > 0$, то єдиним станом рівноваги системи (0.5) є початок координат $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$.

2. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f = 0$, то система (0.5) також має єдиний стан рівноваги $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$.

3. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f < 0$, то існують два стани рівноваги $x(k) \equiv 0$, $x(k) \equiv x^*$, $k = 0,1,2,...$,

$$\left(x^*\right)^T = \left(\frac{w^*}{R_\alpha}, p_1\frac{w^*}{R_\alpha}, p_1p_2\frac{w^*}{R_\alpha}, \dots, p_1p_2\dots p_{n-1}\frac{w^*}{R_\alpha}\right), \; R_\alpha = \alpha_1 + p_1\alpha_2 + p_1p_2\alpha_3 + \dots + p_1p_2\dots p_{n-1}\alpha_n,$$

де w^* – корінь рівняння $ag[w]R_f = 1$.

Доведення. Стаціонарний стан системи (0.5) взначається розв'язком рівняння

$$\begin{gathered} x_1 = ag[w(x)]\left(\tilde{f}_1x_1 + \tilde{f}_2x_2 + \dots + \tilde{f}_nx_n\right) \\ x_2 = p_1x_1 \dots \\ x_n = p_{n-1}x_{n-1}, \; w(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Підставивши в перше рівняння значення

$$x_2 = p_1x_1, \; x_3 = p_1p_2x_1, \; \dots, \; x_n = p_1p_2\dots p_{n-1}x_1,$$

отримаємо

$$x_1 = ag[R_\alpha x_1](\widetilde{f}_1 + p_1\widetilde{f}_2 + ... + p_1p_2...p_{n-1}\widetilde{f}_n)x_1 ,$$

або

$$\{1 - ag[R_\alpha x_1]R_f\}x_1 = 0 . \tag{1.3}$$

1. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1 - ag[R_\alpha x_1] > 0 .$$

Оскільки, за умовою леми, функція $g[w]$ є монотонно спадаючою, що задовольняє умовам (0.3), тобто $g[0] = 1$, і

$$\lim_{w\to+\infty} g[w] = 0 ,$$

то

$$1 - ag[R_\alpha x_1]R_f > 0$$

при довільному $x_1 \ge 0$. Таким чином, рівняння має єдиний розв'язок $x_1^* = 0$. З останніх $n-1$ – го рівнянь системи отримуємо, що $x_i^* = 0$, $i = \overline{2,n}$. Таким чином система має лише єдину стаціонарну точку $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$

2. Нехай параметри системи такі, що ввиконується нерівність.

$$1 - aR_f = 0 .$$

Тоді рівняння розщеплюється на два

$$x_1 = 0 ,\ ag[x_1 R_\alpha] = 0 . \tag{1.4}$$

Подставивши ( ) в друге рівняння ( ), отримуємо

$$g[x_1 R_\alpha] = 1 .$$

Як випливає з властивостей функції $g[w]$, це можливо лише при

$$x_1 R_\alpha = 0 ,$$

тобто лише при $x_1^* \equiv 0$. Звідси отримуємо, що $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$ є єдиною сталою точкою системи ( ).

3. Нехай параметри системи такі, що виконується ( ), тобто

$$1 - aR_f < 0 .$$

Тоді рівняння ( ) знов має два розв'язки вигляду ( ). Крім того, як випливає з властивостей функції $g[w]$ (монотонність, $g[0] = 1$, $\lim_{w\to+\infty} g[w] = 0$) друге з рівнянь ( ) має ненульовий розв'язок $w = w^*$, $0 < w^* < +\infty$. Звідси, крім $x_1^* = 0$, розв'язком також буде $x_1^* = \frac{w^*}{R_\alpha}$. Знов використовуючи останні $(n-1)$ – рівнянь системи, отримуємо

$$x_2^* = \frac{w^*}{R_\alpha} p_1 ,\ \ x_3^* = \frac{w^*}{R_\alpha} p_1 p_2 ,\ ...,\ x_n^* = \frac{w^*}{R_\alpha} p_1 p_2 ... p_{n-1} .$$

тобто твердження леми 1.1.

Зауваження 1.1. Значення параметрів системи, при яких $1 - aR_f = 0$, називаються біфуркаційними, тобто критичними для роздвоєння стану рівноваги системи.

Зауваження 1.2. Для нелинійної системи Лесли виляду ( ) з функцїєю $w(x)$ вигляду $w(x) = \frac{1}{1+cw}$, $c > 0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1 - aR_f \ge 0$ початок координат $x^* = 0$,

2) при $1 - aR_f \ge 0$ початок координат $x_1^* = 0$ і

$$\left(x_2^*\right)^T = \left(\frac{aR_f - 1}{cR_\alpha}, \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha} p_1, \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha} p_1 p_2, ..., \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha} p_1 p_2 ... p_{n-1}\right).$$

Зауваження 1.3. Для нелінійної системы Лесли вигляду ( ) з функцією $w(x)$ вигляду $w(x) = \frac{1}{1+(cw)^\alpha}$, , $c > 0$ $\alpha > 0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1 - aR_f \ge 0$ початок координат $x^* = 0$,

2) при $1 - aR_f \ge 0$ початок координат $x_1^* = 0$ і $\left(x_2^*\right)^T = \left(\frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha}, \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha} p_1, \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha} p_1 p_2, ..., \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha} p_1 p_2 ... p_{n-1}\right).$

Зауваження 1.4. Для нелінійної системы Лесли вигляду ( ) з функцією $w(x)$ вигляду $w(x)=e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1-aR_f\geq 0$ початок координат $x^*=0$,

2) при $1-aR_f\geq 0$ початок координат $x_1^*=0$ і $\left(x_2^*\right)^T=\left(\frac{\ln(aR_f)}{cR_\alpha},\frac{\ln(aR_f)}{cR_\alpha}p_1,\frac{\ln(aR_f)}{cR_\alpha}p_1p_2,...,\frac{\ln(aR_f)}{cR_\alpha}p_1p_2...p_{n-1}\right)$.

2. Дослідження стійкості точок спокою

Проведемо дослідження кожного з станів рівноваги. При дослідженні нелінійних систем одним з достатньо універсальних методів дослідження станів рівноваги є лінеаризація системи в околі точки спокою. Якщо нелінійні члени порядку вище першого, то при певних припущеннях їх можна відкидати і робити висновок про асимптотичну стійкість або нестійкість стану рівноваги на підставі системи лінійного наближення.

Проведемо заміну

$$x(k)=y(k)+x^*,$$

де x^* точка спокою системи (x^* може бути і початком координат), і перепишемо вихідну квазілінійну систему у вигляді

$$\begin{cases} y_1(k+1)+x_1^*=ag\left[w^*+w(y(k))\right]\sum_{i=1}^{n}\tilde f_i\left(y_i(k)+x_i^*\right) \\ y_j(k+1)+x_j^*=p_{j-1}\left[y_{j-1}(k)+x_{j-1}^*\right],\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут w^*- розв'язок рівняння

$$ag[w]R_f=1,\ w(y(k))=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(k). \quad (2.2)$$

Оскільки $\left(x^*\right)^T=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$ є розв'язком системи, то після підстановки отримаємо

$$\begin{cases} y_1(k+1)=ag\left[w^*+w(y(k))\right]\sum_{i=1}^{n}\tilde f_i\left(y_i(k)+x_i^*\right)-x_1^* \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Лінеаризуючи систему (2.3) в точці $y(k)\equiv 0$, отримуємо систему рівнянь обурень

$$\begin{cases} y_1(k+1)=a\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha_i\frac{dg\left[w^*\right]}{dw}\sum_{j=1}^{n}\tilde f_i x_j^*+g\left[w^*\right]\tilde f_i\right\}y_i(k) \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Зокрема, якщо лінеаризація проведена в нульовій точці, то система набуде вигляду

$$\begin{cases} y_1(k+1)=a\sum_{i=1}^{n}\tilde f_i y_i(k) \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Позначимо

$$\frac{df_i\left(x^*\right)}{dy_i}=a\left\{\alpha\left[\frac{dg\left[w^*\right]}{dw}\sum_{j=1}^{n}\tilde f_j x_j^*\right]+g\left[w^*\right]\tilde f_i\right\},\ i=\overline{1,n}. \quad (2.6)$$

Тоді лінеаризована система набуде вигляду

$$y(k+1)=L\left[x^*\right](k),$$

де

$$L\left[x^*\right]=\begin{bmatrix} \frac{df_1\left(x^*\right)}{dy_1} & \frac{df_2\left(x^*\right)}{dy_2} & ... & \frac{df_{n-1}\left(x^*\right)}{dy_{n-1}} & \frac{df_n\left(x^*\right)}{dy_n} \\ p_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Знов розглянемо перераховані три випадки.

І. Нехай параметри системи такі, що

$$1-aR_f>0.$$

Тоді стан рівноваги $x(k)\equiv 0$ є асимптотично стійким.

II. Нехай параметри системи такі, що виконується рівність

$$1-aR_f=0\,.$$

У цьому випадку система також має один стан рівноваги $x(k)\equiv 0$. Проте випадок є критичним і для висновку про стійкість (або нестійкості) стану рівноваги лінійного наближення вже недостатньо. Але дослідження за допомогою членів вищого порядку показує, що стан рівноваги є стійким.

III. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1-aR_f<0\,.$$

У цьому випадку виникають два стани рівноваги $x(k)\equiv 0$ і $x(k)=x^*$, тобто стан рівноваги $x^*=0$ роздвоюється. Причому нульовий стан рівноваги буде нестійким, а другий стан рівноваги $x(k)=x^*$ асимптотично стійким.

Висновок. Таким чином при, що відповідає

Список використаних джерел

1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с.
2. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
3. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Смит Ж.М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
5. Уатт К. Экология и управление природными ресурсами. – М.: Мир, 1971. – 463 с.
6. Хусаінов Д.Я., Никифорова Н.С. Стійкість однієї моделі динаміки популяції // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 1997. – С.218-229.
7. Хусаинов Д.Я., Никифорова Н.С. Устойчивость одного разностного уравнения с положительными коэффициентами // Украинский математический журнал, Т.51, N9, 1999. – С.1276-1280.
8. Гаркуша Н.И., Хусаінов Д.Я. Динаміка лінійної системи моделі популяції Леслі // Вісник Київського національного університета імені Тараса Шевченка: Серія :Кібернетики, в.11. – 2011.

Надійшла до редколегії 15.02.13

Н. Гаркуша, канд. экон. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПОПУЛЯЦИИ ЛЕСЛИ

В работе проведено исследование нелинейной модели популяции Лесли. Модель записана в векторно-матричном виде разностных уравнений. Сделано допущение про нелиное влияние плотности популяции на динамику системы. Определены точки покоя. Исследовано влияние параметров системі на ее "грубость".

Ключевые слова: динамическая система, разностные уравнения, точки покоя, асимптотическая устойчивость, фазовый портрет.

N. Harkusha, Ph.D. economy. Sciences
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

NONLINEAR DYNAMICS MODEL OF POPULATION LESLIE

Study conducted in the work nelyneynoy models populyatsyy Leslie. The model is written in vector-matrix equations raznostnыh video. Done assumption of nelynoe populyatsyy Effect of Density on the dynamics of the system. Opredelenы point of rest. Effect of research on system parameters ee "rudeness".

Keywords: dynamic system, difference equations, the rest point, asymptotic stability, phase portrait.

УДК 519.83 – Теория игр

С. Доценко, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИГРОВЫЕ СИТУАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО ИЛИ НАИХУДШЕГО ОБЪЕКТА

В статье рассмотрена игровая модификация задачи оптимального выбора, связанной с выбором наилучшего или наихудщего элемента. В рассмотренной задаче каждый из игроков осуществляет выбор на своем множестве элементов и исход взбора одного из игроков становится известным другому. Равновесие по Нэшу найдено в явном виде.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, оптимальный выбор, игра симметричная, игра несимметричная.

Введение

В [1] была рассмотрена задача выбора наилучшего объекта, сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо от вергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т.е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. "Ознакомление в случайном порядке" означает, что изначально все n! перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех n в дальнейшем будем называть *наилучшим,* а объект, лучший среди k просмотренных – *максимальным.* Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p(k,j)=\dfrac{k}{j(j-1)},\ j>k$. Более того, независимо от того, был ли k-й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1,...,n$ минимальный индекс максимального элемента будет j, равна $\frac{k}{j(j-1)}, j>k$ и с вероятностью $\frac{k}{n}$ в последователь-ности $k+1,...,n$ не встретится ни одного максимального элемента.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из n, нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами $1,...,k^*-1$ и затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе, индекс которого не меньший k^*, где k^* определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*}+...+\frac{1}{n-1}\le 1<\frac{1}{k^*-1}+...+\frac{1}{n-1}. \quad (1)$$

Оказывается, что при $n\to\infty$ $\frac{k}{n}\to\frac{1}{e}$, а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к 1/e.

В дальнейшем данная задача претерпевала множественные модификации. Оказалось, что рабочим методом нахождения оптимальных стратегий в большинстве модификаций задачи является метод обратной индукции ([2]). Для задачи оптимального выбора и ее модификаций в [3]-[8] были рассмотрены различные игровые постановки задач. Одна из игровых постановок рассматривается в данной статье.

Оптимальный выбор наилучшего или наихудшего объекта

Пусть задачей просматривающего является выбор наилучшего или наихудшего элемента, причем за нахождение наилучшего элемента он получает единичный выигрыш, а за нахождение наихудшего – выигрыш α, где $0\le\alpha\le 1$. Пусть целью просматривающего является максимизация ожидаемого выигрыша. Покажем, что в этом случае его оптимальная стратегия будет иметь пороговый вид:

1) Пропустить все элементы $k\le k_1$.
2) При $k_1\le k\le k_2$ остановиться на просматриваемом элементе, если он является максимальным.
3) При $k>k_2$ остановиться на просматриваемом элементе, если он является либо максимальным, либо минимальным,

где k_1,k_2 - пороговые значения, зависящие от количества просматриваемых элементов n и от параметра α.

Применим метод обратной индукции. Пусть просматривается самый последний элемент с индексом n и он является минимальным. Тогда, поскольку достигнут конец просмотра, то очевидно, что он является наихудшим. Если на нем остановиться, то выигрыш составит α, а если продолжить просмотр, то 0, поэтому на данном элементе следует остановиться. Исходя из аналогичных рассуждений, на данном элементе тем более следует остановиться, если он является наилучшим.

Пусть просматривается k-й элемент, он является минимальным, и по предположению индукции следует остановиться на любом из последую-щих элементов, если только он окажется максимальным или минималь-ным из просмотренных (в дальнейшем такой элемент будем называть экстремальным). Если остановиться на текущем элементе, то ожидаемый выигрыш равен $f_2(k)=\alpha\frac{k}{n}$. Если же продолжить просмотр, то ближайший встреченный экстремальный элемент будет иметь индекс j>k, если только среди элементов от k+1 до j-1 включительно не окажется экстремального элемента, а k-й элемент окажется таковым. Поскольку, как было доказано в [1] распределение ранга каждого просматриваемого элемента не зависит от распределения рангов предшествующих элементов, то указанные выше события являются независимыми, значит, по формуле произведения вероятностей имеем:

$$p_2(k,j)=\frac{(k+1)-2}{k+1}\cdot\frac{(k+2)-2}{k+2}\cdot...\cdot\frac{(j-1)-2}{j-1}\cdot\frac{2}{j}=\frac{2k(k-1)}{j(j-1)(j-2)}.$$

Таким образом, средний выигрыш в случае продолжения просмотра и остановки на ближайшем экстремальном элементе составляет

$$f_2^{'}(k)=\sum_{j=k+1}^{n}p_2(k,j)\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1+\alpha}{2}=\frac{(1+\alpha)(k-1)k}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}=\frac{(1+\alpha)(k-1)k}{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{n-1}\right)$$

Неравенство $f_1(k)\ge f_2(k)$ сводится к виду $k\ge\frac{n-1}{1+\alpha}+1$.

Обозначим $k_2^*=\left\lceil\frac{n-1}{1+\alpha}+1\right\rceil$.

Таким образом, при оптимальной стратегии следует останавливаться на минимальном элементе, если только для его индекса выполняется неравенство $k\ge k_2^*$ и продолжать просмотр в противном случае.

Очевидно, что предел отношения $\frac{k_2^*}{n}$ при $n\to\infty$ равен $t_2(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}$.

Найдем условия остановки на максимальном элементе. Пусть по предположению индукции следует останавливаться на элементах

k+1,…,n, если они окажутся максимальными. Пусть просматриваемый элемент с индексом k, где $k<k_2^*$,оказался максимальным. Если на этом элементе сделать остановку, то он окажется наилучшим с вероятностью $\frac{k}{n}$, и таким образом, ожидаемый выигрыш также равен $f_1(k)=\frac{k}{n}$. Если же продолжить просмотр, то, согласно предпо-

ложения индукции, следует остановиться на ближайшем наибольшем элементе, начиная с номера k+1, либо на наименьшем элементе, начиная с номера k_2^*, и таким образом, согласно формулы полной вероятности, ожидаемый выигрыш составит

$$f_1^{'}(k) = \sum_{j=k+1}^{k2^*-1} p_1(k,j)\cdot\frac{j}{n} + \frac{k}{k_2^*-1} f_2^{'}(k_2^*-1) = \frac{k}{n}\left(\sum_{j=k}^{k2^*-2}\frac{1}{j} + (1+\alpha)\left(1-\frac{k_2^*-2}{n-1}\right)\right).$$

Аналогично предыдущему случаю, поскольку $f_1^{'}(k)$ монотонно убывает по k, то неравенство $f_1(k) \ge f_1^{'}(k)$ выполняется, начиная с некоторого номера, который обозначим через k_1^*. Это доказывает пороговую структуру оптимальной стратегии, описанную выше. Обозначим предел отношения $\frac{k_1^*}{n}$ при $n \to \infty$ через $t_1(\alpha)$. Этот предел найдем, приравняв $f_1(k)$ и $f_1^{/}(k)$ и устремив n к бесконечности.

Принимая во внимание найденное выше значение предела отношения $\frac{k_2^*}{n}$,

Равенство $f_1(k) = f_1^{/}(k)$ в результате элементарных преобразований приобретает вид $1 = \alpha + \sum_{j=k}^{\frac{1}{1+\alpha}n}\frac{1}{j}$, отсюда $1 = \alpha - \ln\left[(1+\alpha)t_1\right]$, отсюда $t_1(\alpha) = \frac{e^{\alpha-1}}{1+\alpha}$.

Заметим, что $t_1(\alpha)$ монотонно возрастает, а $t_2(\alpha)$ монотонно убывает по α. Таким образом, с ростом α границы диапазона индексов, для которых следует останавливаться на наилучшем элементе, но не следует останавливаться на наихудшем, сужаются с обеих сторон и при $\alpha = 1$ стягиваются в одну точку.

При α=0 имеем: $t_1 = e^{-1}$, $t_2 = 1$, что соответствует стратегии классической задачи- пропустить первые $e^{-1}n$ элементов и остановиться после этого на ближайшем максимальном элементе.

При α=1 имеем: $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$, т.е. следует пропустить половину элементов и затем остановиться на ближайшем экстремальном элементе.

Найдем предельные значения вероятностей нахождения отдельно для наилучшего и отдельно для наихудшего элемента при заданном значении параметра α (обозначим их соответственно через $\pi_1(\alpha)$ и $\pi_2(\alpha)$).

Наихудший элемент может быть найден в такой ситуации: на интервале от $t_1(\alpha)\cdot n$ до $t_2(\alpha)\cdot n$ не встретилось ни одного максимального элемента, а на интервале от $t_2(\alpha)\cdot n$ до n встретился экстремальный элемент, который оказался именно минимальным, а не максимальным. Далее, должно оказаться, что минимальный элемент, на котором была сделана остановка, к тому же оказался наихудшим (условная вероятность такого события равна k/n). Таким образом, согласно формуле полной вероятности

$$\pi_2(\alpha) = \frac{t_1(\alpha)\cdot n}{t_2(\alpha)\cdot n}\cdot\sum_{j=t2(\alpha)n}^{n} p_2(t_2(\alpha)\cdot n-1,j)\frac{1}{2}\cdot\frac{j}{n} = e^{\alpha-1}(\alpha+1)\frac{(t_2(\alpha)n-1)t_2(\alpha)n}{n}\left[\frac{1}{t_2(\alpha)n-1}-\frac{1}{n-1}\right] \sim e^{\alpha-1}\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left[(1+\alpha)-1\right] = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}e^{\alpha-1}$$

Наилучший элемент может быть найден в двух ситуациях:

1) на интервале от $t_1(\alpha)\cdot n$ до $t_2(\alpha)\cdot n$ встретился максимальный элемент, на нем была сделана остановка, и этот элемент впоследствии оказался наилучшим.

2) на интервале от $t_1(\alpha)\cdot n$ до $t_2(\alpha)\cdot n$ не встретилось максимального элемента, но на интервале $t_2(\alpha)\cdot n$ до n встретился экстремальный элемент, который оказался именно максимальным, а не минимальным. Далее, должно оказаться, что максимальный элемент, на котором была сделана остановка, к тому же оказался наилучшим.

Таким образом, согласно формуле полной вероятности

$$\pi_1(\alpha) = \sum_{j=t1(\alpha)n}^{t2(\alpha)n-1} p_1(t_1(\alpha)n-1,j)\cdot\frac{j}{n} + \frac{t_1(\alpha)\cdot n}{t_2(\alpha)\cdot n}\cdot\sum_{j=t2(\alpha)n}^{n} p_2(t_2(\alpha)\cdot n-1,j)\frac{1}{2}\cdot\frac{j}{n} \sim \frac{e^{\alpha-1}}{1+\alpha}\sum_{j=t1(\alpha)n}^{t2(\alpha)n}\frac{1}{j-1} \sim e^{\alpha-1}\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}e^{\alpha-1} = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}e^{\alpha-1}$$

Суммарный средний выигрыш составляет $w(\alpha) = \pi_1(\alpha) + \alpha\pi_2(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}e^{\alpha-1}$.

Обозначим $\pi_3(\alpha) = 1 - \pi_1(\alpha) - \pi_2(\alpha)$. Оказывается, что функции $\pi_2(\alpha)$ и $w(\alpha)$ монотонно возрастают, а $\pi_1(\alpha)$ и $\pi_3(\alpha)$ монотонно убывают по α на интервале [0;1].

Игровая ситуация выбора наилучшего или наихудшего объекта

Пусть в игре принимает участие два игрока. Каждый из игроков осуществляет просмотр и выбор на своем множестве элементов. Результатом выбора может быть один из трех исходов (в порядке убывания благоприятности):

1) Выбор наилучшего элемента
2) Выбор наихудшего элемента
3) Не выбраны элементы из п. 1,2.

Если номер исхода одного из игроков меньше номера исхода другого, то он считается выигравшим и получает 1, при этом другой игрок считается проигравшим и получает 0.

Если исходы обоих игроков равны 1 или 2, то игроки делят выигрыш поровну, и, таким образом, выигрыш каждого игрока составляет ½.

Если номера исходов игроков совпадают и равны 3, то оба игрока считаются проигравшими и получают 0.

Рассмотрим несимметричную игру в смысле информированности игроков. Пусть первый игрок первым осуществляет свой выбор и исход его выбора становится известным второму игроку.

Вначале рассмотрим оптимальное поведение второго игрока в зависимости от исхода первого.

Если второму игроку становится известно, что исход выбора первого – 1, то положительный исход выбора наихудшего элемента для него не имеет значения и он применяет свою стратегию поиска с $\alpha = 0$ (т.е. стратегию поиска классической задачи). При этом он с вероятностью 1/e находит наилучший элемент (и выигрыши игроков распределяются как $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$) и с дополнительной вероятностью приходит ко 2-му или 3-му исходу (и выигрыши распределяются как (1;0)).

Если второму игроку становится известно, что исход первого игрока – 3, то выбор наилучшего или наихудшего элемента являются для него одинаково благоприятными и обеспечивают выигрыш и таким образом он применяет свою стратегию выбора с параметром $\alpha = 1$. При этом он придет к исходу 1 или 2 с вероятностью 1/2 (и выигрыш распределится как (0;1)) или к исходу 3 с вероятностью 1/2 (и выигрыш распределится как (0;0)).

Если второму игроку становится известно, что исход первого игрока- 2, то в случае выбора наилучшего элемента он получит 1, а в случае выбора наихудшего – 1/2, поэтому он применяет свою стратегию выбора с $\alpha = 1/2$.

Найдем оптимальное поведение первого игрока в предположении, что второй игрок ведет себя оптимальным образом.

Пусть исход первого игрока- 1. Об этом узнает второй игрок и применяет стратегию выбора с $\alpha = 0$ и ему с вероятностью 1/e удастся забрать у первого игрока половину выигрыша. С дополнительной вероятностью первый игрок получит единичный выигрыш целиком, и таким образом, ценность выбора наилучшего элемента для первого игрока составляет $\frac{1}{e}\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\cdot 1 = 1 - \frac{e}{2} \approx 0.816$

Пусть исход первого игрока – 2. Об этом узнает второй игрок и Тогда он выбирает свою оптимальную стратегию выбора с $\alpha = 1/2$, что порождает такое вероятностное распределение исходов выбора:

$$\left(\pi_1(1/2), \pi_2(1/2), \pi_3(1/2)\right) = \left(\frac{5}{9}e^{-1/2}; \frac{2}{9}e^{-1/2}; 1 - \frac{7}{9}e^{-1/2}\right) \approx \left(0.337;\, 0.135;\, 0.528\right).$$

Тогда первый игрок с вероятностью $1 - \frac{7}{9}e^{-1/2}$ получит единичный выигрыш, а с вероятностью $\frac{2}{9}e^{-1/2}$ получит только половину, разделив выигрыш со вторым игроком и ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$1 - \frac{7}{9}e^{-1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}e^{-1/2}\right) = 1 - \frac{2}{3}e^{-1/2} \approx 0.596 .$$

Таким, образом, отношение ценности наихудшего элемента к ценности наилучшего для первого игрока составляет $\alpha_1 = \frac{0.596}{0.816} \approx 0.730$. Стратегия выбора первого игрока с таким параметром приведет к такому вероятностному распределению исходов:

$$\left(\pi_1(0.73), \pi_2(0.73), 1 - \pi_1(0.73) - \pi_2(0.73)\right) = \left(0.305; 0.186\,; 0.508\right).$$

При этом значения порогов в оптимальной стратегии выбора составляют: $t_1(0.73, t_2(0.73)) \approx \left(0.441,\, 0.578\right)$.

В случае оптимального поведения обоих игроков ожидаемый выигрыш первого игрока составит 0.305·0.816+0.186·0.596≈0.360, а выигрыш второго-

$$0.305 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e}\right) + 0.186 \cdot \left(\frac{5}{9}e^{-1/2} + \frac{2}{9}e^{-1/2}\frac{1}{2}\right) + 0.508 \cdot \frac{1}{2} \approx 0.385$$

Найдем цену анархии (т.е. отношение суммарного выигрыша в случае корпоративного поведения к суммарному выигрышу в равновесной ситуации в случае эгоистического поведения игроков).

При корпоративном поведении игроки должны минимизировать вероятность ситуации, когда каждый из них ничего не получает (т.е. исход просмотра обоих игроков- 3. В противном случае они каким-то образом делят единичный выигрыш, и для них не важно, как именно. Тогда каждый из игроков должен осуществлять свой выбор с $\alpha = 1$. При этом каждый из игроков приходит независимо от другого к третьему исходу с вероятностью 1/2, и таким образом их ожидаемый суммарный выигрыш составит 3/4, и цена анархии равна $\frac{0.75}{0.36 + 0.385} \approx 1.007$.

Найдем теперь равновесную ситуацию для симметричной игры, когда игрокам ничего не известно об исходах выбора друг друга.

Равновесную ситуацию будем искать в симметричном виде, т.е. оба игрока должны осуществить оптимальную стратегию поиска с одинаковым параметром α.

Предположим, что при некотором значении α достигается равновесие по Нэшу. Пусть один из игроков незначительно отклонился от равновесной стратегии и применил стратегию выбора с параметром α+dα. Тогда прирост вероятности выбора наилучшего элемента составит $d\pi_1(\alpha) = \pi_1'(\alpha)d\alpha$, что обеспечит ему прирост выигрыша $\pi_1'\left[\frac{1}{2}\pi_1 + (1 - \pi_1)\right]d\alpha$, а прирост вероятности выбора наихудшего – $d\pi_2(\alpha) = \pi_2'(\alpha)d\alpha$, что обеспечит прирост выигрыша

$\pi_2^{/}\left[\left(1-\pi_1-\pi_2\right)+\frac{1}{2}\pi_2\right]d\alpha$, и таким образом суммарное значение прироста выигрыша составляет

$$dw(\alpha)=\left[\pi_1^{/}\left(1-\frac{1}{2}\pi_1\right)+\pi_2^{/}\left(1-\pi_1-\frac{1}{2}\pi_2\right)\right]d\alpha .$$

Исходя из определения равновесия по Нэшу, игроку не выгодно отклоняться от выбранной стратегии, поэтому $dw(\alpha)\le 0$. Поскольку отклонение dα может быть как положительным, так и отрицательным, то выражение, стоящее в квадратных скобках должно быть рано нулю. После элементарных преобразований это условие сводится к уравнению

$$-\alpha\left(1-\frac{1}{2}\frac{1+\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}e^{\alpha-1}\right)+\left(1-\frac{1+(3/2)\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}e^{\alpha-1}\right)=0$$

Левая часть данного уравнения монотонно убывает на интервале [0;1], и данное уравнение имеет единственный корень, примерно равный 0.71.

Таким образом, при отсутствии информации об исходе выбора друг друга, игроки должны придерживаться оптимальной стратегии выбора с параметром $\alpha\approx 0.71$. При этом значения порогов в оптимальной стратегии выбора составляют: $t_1(0.71,t_2(0.71))\approx\left(0.438,\,0.585\right)$.

Найдем цену анархии. В найденной равновесной ситуации оба игрока не получат выигрыша с вероятностью $(1-\pi_1(0.71)-\pi_2(0.71)))^2\approx 0.260$, значит, с дополнительной вероятностью, равной 0.74 игроки разделят каким-то образом единичный выигрыш между собой. Таким образом, цена анархии составляет $\frac{0.75}{0.74}\approx 1.014$.

Выводы. Были рассмотрены два варианта игры- симметричный и несимметричный. В несимметричной игре выигрыш второго игрока превосходит выигрыш первого вследствие того, что он более информирован. В симметричной игре оба игрока находятся в одинаковых условиях, и их выигрыши равны. Однако, такое установление справедливости порождает и большее значение анархии.

Список использованных источников

1. Е.Б.Дынкин, А.А.Юшкевич. Теоремы и задачи о процессах Маркова. Москва, изд-во "Наука", с. 91-102.
2. С. М. Гусейн-Заде. Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний, ТВП, 11:3 (1966), с. 534–537.
3. В.В.Мазалов. Математическая теория игр и приложения. Изд-во "Лань", СПБ., 2010. 446 с.
4. В.В.Мазалов. Игровые моменты остановки. Изд-во "Наука", Новосибирск, 1987. 191 с.
5. С.Доценко. Задача выбора наилучшего объекта как игра двух лиц. Кибернетика и Вычислительная техника, вып. 164, 2011, с. 43-53.
6. С.Доценко. Игровые ситуации в модифицированной задаче оптимального выбора. Кибернетика и Вычислительная техника, вып. 168, 2012, с. 3-8.
7. Melissa de Carvalho, Lucas M. Chaves, Ricardo Martins. Variations of secretary problem via game theory and linear programming. Journal of computer science, vol. 7, N 3, September 2008.
8. О справедливом разделе выигрыша в одной игровой задаче оптимального выбора. Кибернетика и вычислительная техника, вып. 167, 2012, с. 87-96.

Надійшла до редколегії 18.01.13

С. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ІГРОВІ СИТУАЦІЇ В ЗАДАЧІ ВИБОРУ НАЙКРАЩОГО ЧИ НАЙГІРШОГО ОБ'ЄКТА

В статті розглянута ігрова модифікація задачі оптимального вибору, пов'язана з вибором найкращого або найгіршого елементу. Розглянуто модифікацію задачі, в якій кожен з гравців здійснює вибір на своїй множині елементів, а наслідок вибору одного з гравців стає відомим іншому. Рівновага за Нешем знайдено в явній формі.

Ключові слова: рівновага Неша, оптимальний вибір, гра симетрична, гра несиметрична.

S. Dotsenko, PhD. Sci. Sciences, Senior Research Fellow.
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

GAME OF THE SITUATION IN THE PROBLEM OF THE BEST CHOICE OR OBJECT OF THE WORST

The article considers secretary problem game modification, associated with the best or the worst element choice. Each of the players makes his choice at separate set and choice outcome of one of the players became known to the other. Nash equikibrium is found at explicit form.

Ключові слова: Nash equilibrium, the optimal choice, the game is symmetric, asymmetric game.

УДК 519.9

В. Зубенко, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

КОМПОЗИЦІЙНА МОДЕЛЬ КОМУНІКАТИВНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Розглядається алгебрична модель комунікативних інформаційних систем.

Ключові слова: композиційна модель,комунікативна система, конструктор, правило декларації, еквітонне розширення.

В [1-3] введено поняття комунікативної платформи інформатики. Проголосивши предметом комунікативної інформатики конструктивні моделі комунікативних процесів та систем, ми хочемо піти далі і запропонувати певну алгебричну їхню модель. При такому підході суб'єкти комунікативних систем – суб'єкт-ініціатор та суб'єкт-виконавець – конкретизуються як спеціальні формалізовані композиційні $\Omega-$системи, в яких операції та предикати визначаються не тільки на кортежах, а й на даних і можуть повертати дані, а композиція суперпозиції доповнюється сукупністю інших композицій (у тому числі і логічних) для утворення похідних операцій та предикатів.

1. Нагадаємо деякі поняття, пов'язані з комунікативною платформою і насамперед центральне в ній – комунікативної системи. У *комунікативних системах (КС)* обов'язковою є наявність:

1) предметної області (ПрО) з певною сукупністю інформаційних об'єктів та співвідношень між ними;

2) суб'єкта-ініціатора, який формує і передає суб'єкту-виконавцю певну вхідну та приймає від нього певну вихідну інформацію;

3) суб'єкта-виконавця(обробника), який приймає вхідну інформацію, аналізує її, обробляє та повертає як вихідну суб'єкту-ініціатору.

Усі інформаційні об'єкти КС – структуровані, а саме: в них явно виділяють повідомлення v, його значення a та зв'язок між ними α. Перше є формою, завдяки якій інформацію ідентифікують і передають, друге відповідає за зміст інформації і враховуються при її перетворенні, а третій подає спосіб, яким встановлюється (визначається) відношення між першими двома, та, можливо, з іншими інформаційними об'єктами. Будемо ототожнювати інформаційний об'єкт з вказаними трьома його елементами і зображати його діаграмою вигляду $v \underset{\alpha}{\mapsto} a$, а суб'єкти-ініціатори та суб'єкти-виконавці називатимемо скорочено *ініціаторами* та *виконавцями (обробниками)*.

Головне призначення комунікативних систем полягає у здійсненні *комунікативних процесів*, кожний з яких розгортається в певному часовому просторі і в результаті встановлює зв'язок між певними об'єктами предметної області системи. За своєю роллю в процесі ці об'єкти розподіляються на вхідні та вихідні. З перших розпочинається процес, другими закінчується. Комунікативний процес складається з етапів, які разом утворюють його життєвий цикл. Останній розпочинається ініціатором, який формує й передає виконавцю за допомогою засобів зв'язку повідомлення, що містить *запит*[1] на обробку певних вхідних інформаційних об'єктів. Запит окрім останніх містить інформацію про мету обробки, яка може бути сформульована неявно – як вимоги до очікуваних вихідних об'єктів або явно – як детальний опис їх отримання за вхідними об'єктами. В обох випадках мета декларує певне співвідношення між об'єктами і сама подається у вигляді спеціального інформаційного об'єкту – програми. Підкреслимо, що програма не обов'язково є імперативною, на відміну від *внутрішніх процедур* обробника, які за означенням є імперативними, призначеними для виконання. Вихідні об'єкти з'являються як раз в результаті виконання їх обробником.

Зазвичай виконавець має власні інформаційні об'єкти – *внутрішні* (сукупності яких утворюють його стани), на відміну від *зовнішніх* – тих, що фігурують в предметній області, Тому сам запит містить не вхідні об'єкти виконавця, а тільки їхні прообрази, які після кодування утворюють початковий стан виконавця. Це стосується й вихідних внутрішніх обєктів поданих у заключному стані процесу обробки. Вони потребують декодування.

Комунікативна платформа накладає певні обмеження на КС та їхні моделі, а саме: вони мають бути обовязково дескрипитивними і не просто дескриптивними – а конструктивними. Дескриптивність КС означає, що до складу її елементів входять дескриптивні системи (ДС), в яких подаються (описуються) усі її інформаційні об'єкти: вхідні і вихідні дані, запити та внутрішні процедури. Мова йде не про одну, а, як правило, про декілька ДС, тому що інформаційні об'єкти різних суб'єктів системи потребують різних дескриптологічних засобів. Як мінімум – мову специфікації запитів для ініціатора і внутрішню мову для виконавця. Остання описує внутрішні інформаційні об'єкти та внутрішні процедури, які задають правила для реалізації кожної з програм мови специфікацій. Внутрішні мови на відміну від мов специфікацій обовязково є імперативними.

Конструктивність КС означає, що її мова (мови) специфікацій та внутрішня мова є фінітними, тобто усі об'єкти в них – скінченно подані. Мови специфікацій конструктивних КС самі називаються *конструктивними,* їхня внутрішня мова – *алгоритмічною*, а внутрішні процедури – *алгоритмами.* Наголосимо, що для конструктивності довільної мови специфікацій недостатньо тільки її фінітності – необхідна також наявність алгоритмічної мови, яка задає реалізацію її запитів.

Важливим прикладом конструктивних КС є обчислювальні комп'ютерні системи. В таких системах внутрішніми процедурами (алгоритмами) виступають машинні програми.

Сформулюємо тепер, що таке композиційна та формалізована композиційна $\Omega-$ системи. Зафіксуємо певну багатосортну сигнатуру $\Omega = (\Omega_s, \Omega_v, \Omega_f, \Omega_p, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_c)$, де $\Omega_s, \Omega_v, \Omega_f, \Omega_p, \Omega_F$, Ω_P та Ω_c – сукупність імен відповідно типів, типізованих предметних змінних, основних операцій та предикатів, типізованих функціональних та предикатних змінних та символів композицій. Деякі з цих сукупностей можуть бути порожніми.

Виділемо серед імен типів ім'я логічного типу $Bool$. Щоб проінтерпретувати сигнатуру Ω на певному універсумі U, $\{0,1\} \subseteq U$, необхідно вибрати в ньому конкретні підмножини для символів-типів (для типу $Bool$ - підмножину істиностних значень $\{0,1\}$), предметним змінним поставити у відповідність їхній тип, іменам операцій та предикатів – конкретні типізовані операції та предикати, функціональним та предикатним змінним – відповідні типи операцій та предикатів, символам композицій – операції на функціях та предикатах. Таке співставлення I сигнатурним символам їхніх значень називається *інтерпретацію* сигнатури Ω з основою U. Значення сигнатурного симола c при інтерпретації I будемо позначати c^I. Інтерпретація I може бути частковою. Наприклад, ім'я типу $Bool$ можна не інтерпретувати, якщо сигнатура основних предикатів $\Omega_p = \varnothing$. В інших впадках можуть залишатись неінтерпретованими деякі змінні, а також деякі основні операції та предикати.

Проінтерпретовані сигнатури називаються *композиційними* $\Omega-$ *системами* і позначають $C = (U, \Omega, I)$ або Ω_U^I. Фактично композиційна $\Omega-$ система C складається з двох алгебр – *функціональної* $C_{f,p}$ та *предметної* C_U. Операціями першої є композиції системи і вона є породженою основними операціями та предикатами сигнатур Ω_f та Ω_p. Елементи її носія називаються *похідними* операціями та предикатами системи C і є класичними в тому сенсі, що вони визначені на типізованих кортежах фіксованої довжини, значення яких теж типізоване. Інтерпретація I дозволяє проінтерпретувати всі похідні операції та предикати функціональної алгебри $C_{f,p}$. Носієм предметної алгебри C_U є сукупність типів, а операціями та предикатами – перетворення типів, похідні операції та предикати системи.

[1] Не змішувати з запитами в інформаційно-пошуковими системах. Тут термін "запит" трактується як загальне поняття з більш широким змістом.

Коли композиції в сигнатурі Ω_c відсутні або не проінтерпретовані в системі C, то вона називається *простою.* Композиція називається *логічною*, якщо її аргументи (не обов'язково усі) та результат є предикатами. Прикладами логічних композицій є логічні зв'язки та типізовані композиції суперпозиції з першим аргументом предикатного типу. Композиційна $\Omega-$ система називається *логічною*, якщо серед її композицій присутні логічні композиції.

Система C називається *системою з внутрішніми перетвореннями типів*, якщо до її сигнатури долучено сукупність імен таких перетворень $\Omega_\chi = \{\chi_{s,t} : s,t \in \Omega_s\}$ з інтерпретацією вигляду $\chi^I_{s,t} : s^I \to t^I$ для $s,t \in \Omega_s$. Для деяких типів $s,t \in \Omega_s$ перетворення $\chi^I_{s,t}$ може бути не визначено в інтерпретації I. Відомим прикладом внутрішніх перетворень типів є стандартне перетворення числових типів у логічний тип $Bool$.[2]

З'ясуємо тепер, що таке фінітарні операції та неокласичні композиційні $\Omega-$ системаи. Класична $n-$ арна операція визначена на кортежах $\overline{a} = (a_1,...,a_n)$ довжини n, кожний з яких може трактуватись як функція $\overline{a}$ яка, з натуральним $1 \le i \le n$ пов'язує значення a_i, що належить основі A, тобто $\overline{a}(i) = a_i$. Можна піти далі і пов'язувати з елементами не числа, а довільні індекси (імена) з певної множини $X = \{v_1,...,v_n\}$. Результат такого співставлення будемо записувати $\{v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n\}$ і називати *індексованою* множиною або $X-$ множиною. Функції визначені на $X-$ множинах називаються *фінітарними* (*$X-$ арними*), а композиційні $\Omega-$ системи з фінітарними основними операціями, предикатами та композиціями – *неокласичними.* Як приклад фінітарних операцій можна навести об'єднання та перетину інденксованих сімей множин: $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} B_i$.

Неокласичні прості $\Omega-$ системи зберігають усі загальні властивості притаманні звичайним простим $\Omega-$ системам [4]. Це ж стосується і окремих класів неокласичних композиційних $\Omega-$ систем, зокрема регулярних та рекурсивних [5,6].

Але перехід від нумерації елементів до індексації їх значно збільшує дескриптивні можливості неокласичних $\Omega-$ систем.

Щоб отримати формалізований варіант довільної композиційної системи C, необхідно вибрати формальну мову L_Ω для подання всіх її похідних операцій та предикатів. Алфавіт мови L_Ω обов'язково включає сигнатуру Ω та правила для побудови основних синтаксичних конструкцій – *термів* та *формул*. Перші подають похідні операції, а другі – такі ж предикати системи. Двійка $S = (C, L_\Omega)$ називається *формалізованою композиційною $\Omega-$ системою*.

2. Вхідні системи представляють алгебричну модель суб'єкта-ініціатора. Якщо абстрагуватись від несуттєвих деталей і зосередитися на семантиці, то вхідні системи можна обмежити описом предметної області та сукупності запитів. І тут необхідно вирішити дилему: привносити чи ні інтенсіональні функціональні елементи в модель ПрО. Наша відповідь буде – ні. Щоб не перевантажувати цю модель деталями, будемо переносити усі можливі такі інтенсіональні елементи у запити.

Багатосортність реальних ПрО, а відтепер і апріорі їхня екстенсіональність логічно приводять до застосування формалізованих композиційних Ω-систем S для уточнення вхідних систем. При такому підході композиційна $\Omega-$ система представляє ПрО, а формальна мова (а більш точно її формули) – запити.

У вхідних системах у якості інформаційних об'єктів виступають проінтерпретовані та означені елементи сигнатури Ω. Особливістю таких інформаційних об'єктів є те, що зв'язок в них сугубо формальний, "призначений", результат інтерпретації та формальної оцінки, а не виник природно в результаті тих чи інших процесуальних дій. Проінтерпретовані предметні, функціональні та предикатні змінні сигнатури Ω мають свої екстенсіонали – типи і їх можна формально означувати (конкретизовувати) допустимими значеннями. Конкретизація змінних називається їх *оцінкою.* З іменами основних операцій та предикатів теж можна пов'язати екстенсіонали – це ті типізовані відношення, які є їхніми значеннями в інтерпретації, і тому вони також можуть оцінюватись. Оцінка їх полягає у формальному співставленні імені операції (предикату) певного конкретного варіанту аргументів та його значення на ньому. Таке формальне зв'язування імен, аргументів та значень операції (предикату) приводить до утворення інформаційного об'єкту і називається *формальною аплікацією* функції (предикату), на відміну від аплікацій-дій функцій та предикатів в процесах обчислень.

Нехай $v \in \Omega_v$, $f \in \Omega_f$ та $p \in \Omega_p$, – довільні предметна, функціональні та предикатні символи, а тип T, f^I та p^I – їхні екстенсіонали в інтерпретації I відповідно. Оцінка змінної v та символів f, p в інтерпретації I – це довільне їхнє відображення α у свої екстенсіонали. Нехай $a \in T$, $(a_1,...,a_n,a_{n+1}) \in f^I$ та $(b_1,...,b_m,b_{m+1}) \in p^I$ – значення змінної v та символів f, p при оцінці α, тобто $\alpha(v) = a$, $\alpha(f) = (a_1,...,a_n,a_{n+1})$ та $\alpha(p) = (b_1,...,b_m,b_{m+1})$. Тут a_{n+1} та b_{m+1} – значення операції f^I та предиката p^I на аргументах відповідно $(a_1,...,a_n)$ та $(b_1,...,b_m)$. Такі конкретизовані змінні та символи будемо подавати діаграмами $v \underset{I}{\mapsto} a$, $f \underset{I}{\mapsto} (a_1,...,a_n,a_{n+1})$ та $p \underset{I}{\mapsto} (b_1,...,b_m,b_{m+1})$ і трактувати як зовнішні інформаційні об'єкти. Якщо із контексту зрозуміло, про яку інтерпретацію йде мова, то індекс I в діаграмах можна опускати, а формальну аплікацію функціонального та предикатного символів зображати скорочено $\Omega-$ термами $f(a_1,...,a_n)$ та $p(a_1,...,a_m)$ відповідно. Для заданої інтерпретації I обидва терми дозволяють однозначно відновити відповідний інформаційний об'єкт[3].

Оцінені функціональні та предикатні змінні сигнатур Ω_F та Ω_P теж можуть конкретизуватися так, як і основні функціональні та предикатні символи сигнатури Ω.

[2] При ньому ненульові числа відображаються в 1, а число нуль – в 0.

[3] Традиційно терми подають тільки значення відповідних проінтерпретованих операцій та предикатів на заданих аргументах.

В предметній алгебрі C_U як інформаційній моделі ПрО усі співвідношеннями між інформаційними об'єктами визначаються функціями та предикатами цієї алгебри. Вони є сугубо семантичними і залежать тільки від значень об'єктів. Якщо взяти довільну $n-$арну операцію f алгебри C_U, то вона визначає відношення f^I не тільки на кортежах значень змінних, а й переносить його на кортежі самих конкретизованих змінних так, що $(v_1 \mapsto a_1,..., v_n \mapsto a_n, v_{n+1} \mapsto a_{n+1}) \in f^I \Leftrightarrow (a_1,...,a_n,a_{n+1}) \in f^I$ для будь-яких змінних $v_1,...,v_n$. Аналогічно і для предикатів.

Якщо запити у вхідних системах подаються формулами формальної мови L_Ω, то для подання вхідних об'єктів використовують оцінки вхідних змінних (це можуть бути як предметні, так і функціональні та предикатні змінні).

В класичних простих $\Omega-$ системах похідні операції та предикати породжуються за допомогою композицій суперпозиції. Для отримання інших використовують логічні надбудови простих $\Omega-$ систем різного штабу. Найбільш відомою логічною $\Omega-$ системою є прикладне числення предикатів (ПЧП) – композиційна $\Omega-$ система з тотальними основними операціями та предикатами та з класичними логічними звя'зками та композиціями квантифікації. Головними синтаксичними конструкціями ПЧП є терми та формули. Розрізнюють ПЧП першого, другого та вищих порядків. У перших квантори застовуються тільки до предметних змінних, у других – також і до функціональних та предикатних[4].

Як відомо, ПЧП обох порядків у цілому неконструктивні. Причиною тому є неконструктивність композицій квантифікації [6]. Щоб зробити вхідну систему на базі ПЧП конструктивною, використовують лише частину їхніх формул та обмежують інтерпретації.

Наведемо кілька прикладів запитів в ПЧП. Безкванторні формули $x^2=1$ та $z = 2\times x + 3\times y$ подають в натуральній арифметиці похідні предикати з областями істинності відповідно $\{x \mapsto 1, x \mapsto -1\}$ та $\{(x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto 2\times a + 3\times b) : a,b \in N\}$, а формула другого порядку

$\forall x(F(x) = (x=0 \to 1, x\times F(x-1)))\,\&\,\forall G(\forall x(G(x) = (x=0 \to 1, x\times G(x-1))) \to F \subseteq G)$ – оцінку $F \mapsto n!$, де $n!$ – факторіал числа n. Для формули Φ, предметних u,v,w та функціональних F,G змінних рівність $w = (\Phi \to u,v)$ та формула $F \subseteq G$ є скороченнями відповідно формул $\exists y(w = y\,\&\,\Phi \to y = u\,\&\,\neg\Phi \to y = v)$ та $\forall x(\exists y(y = F(x) \to y = G(x))$.

Аналогічно визначається неокласичний варіант ПЧП.

Можна збагатити сукупність похідних операцій в $\Omega-$ системах, допустивши до їх утворення опріч суперпозиції й інші композиції $n-$арних та фінітарних функцій. *Регулярному* збагаченню відповідає долучення усіх регулярних композицій, а *рекурсивному* – додатково композиції рекурсії за одним із обчислювальних правил. До регулярних, опріч суперпозиції, належать композиції розгалуження, недетермінованого вибору, перестановки та ототожнення аргументів та ітерація по компоненті. Регулярно (рекурсивно) збагачені композиційні Ω-системи будемо називати ***регулярними (рекурсивними)*** як і відповідні ПЧП та їхні терми та формули. Якщо останні містять композицію ітерації чи рекурсії, то їх називають (на наш погляд невдало) ще *динамічними.* Відносно динамічний характер регулярних та рекурсивних термів пов'язаний з тим, що в процесі обчислення їхніх значень що відповідає заданій оцінці змінних може виникнути потреба у залученні інших їхніх оцінок (як, правило, не одноразовій). Назвемо цю динаміку, пов'язану з розширенням об'єму оцінок, *динамікою об'єму* або *об'ємною.*

Якщо до основних операцій $\Omega-$ системи додати функціональні константи–проекції $pr_i^n(x_1,...,x_n) = x_i$ для кожного $1 \le i \le n$, то в таких ПЧП усі регулярні композиції можуть бути зведені до суперпозиції та рекурсії. А якщо основа U є ще й індуктивною[5], то в збагаченому ПЧП другого порядку можна елімінувати і композицію рекурсії. Щоправда не для усіх правил її обчислення, а тільки для тих, які обчислюють найменшу нерухому точку композиції [7].

Деталі ПЧП першого та другого порядків можна знайти в [9], формалізованих композиційних систем – [4,10], динамічних логік в – [11].

Нехай S – класична (неокласична) рекурсивна формалізована логічна Ω-система.

Двійка $\mathrm{S}_{in} = (S,\mathrm{O})$, де $\mathrm{O} \subseteq (\Omega_v^I)^U$ – сукупність допустимих оцінок вхідних змінних, називається класичною (неокласичною) **вхідною системою** комунікативних інформаційних систем. За означенням, не всі можливі оцінки вхідних змінних є допустимими, а тільки ті, що належать сукупності O.

Така універсальна алгебрична модель ініціатора виявляється достатньо змістовною й має свої переваги. З одного боку, високий рівень абстракції дозволяє при уточненні предметних областей використовувати весь потужний арсенал екстенсіональних алгебричних засобів, а з другого, робить можливим використання логічних засобів для специфікації запитів. Запити у цьому випадку мають вигляд логічних формул $\Phi = \Phi(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$, де $X = \{x_1,...,x_n\}$ – сукупість вхідних змінних, а $Y = \{y_1,...,y_m\}$ – вихідних, зображених у мові L_Ω .

3. Вихідні системи є алгебричною семантичною моделлю суб'єктів-виконавців. Як і вхідні системи, вони належать до класу формалізованих композиційних $\Omega-$ систем. Наша задача – з'ясувати специфіку цих систем і, насамперед, специфіку внутрішніх інформаційних об'єктів, якими оперують виконавці КС. Тому що композиційна складова вихідних систем – та ж, що і в нелогічній частині вхідних систем і, як правило, нерекурсивна.

Відразу відзначимо, що вихідні системи, на відміну від об'ємно динамічих вхідних систем, є динамічними по суті, тобто в них властивості об'єктів (їхні значення і навіть зв'язки між іменами та значеннями) можуть в процесі обчислень змінюватись, а самі об'єкти утворюватися і руйнуватися в процесі обчислень[6]. Щоб підкреслити цю обставину,

[4] У ПЧП третього порядку квантори застосовуються до змінних-композицій другого порядку і т.д. Але в цій роботі ми їх торкатися не будемо.
[5] Часково впорядкована множина є індуктивною, якщо кожий незпадний ланцюг елементів в ній має найменшу вержню границю.
[6] У цьому сенсі ще раз наголосимо, що об'єкти вхідних систем тільки за назвою є змінними й динамічними, а по суті – це іменовані константи. Тут змінність означає плюралізм, паралельне існування в часі кількох оцінок однієї і тієї ж змінної (кількох одноіменних об'єктів), при якому поява нової її оцінки не відміняє вже існуючих її оцінок.

операції та функції з динамічними об'єктами, будемо називати *діями* [12], а застосування їх до конкретних об'єктів – *аплікацією,* але вже не формальною, а *операційною*.

Імена, значення та зв'язки. Повідомлення у вихідних системах представляють *імена*. Нехай $V=\{v_1,v_2,...\}$ – певна сукупність імен, $V_0 \subseteq V$ – певна сукупність *атомних* імен. На природу атомних імен не будемо накладати жодних обмежень, вважається тільки, що серед них присутні всі натуральні числа. Таке припущення дозволить використовувати там, де це доцільно, кортежі і послідовності при структуруванні інформаційних об'єктів і класичні операції та предикати в діях над ними. Неатомні імена називаються *структурованими* – вони певним чином будуються з атомних імен. Правила їх побудови визначаються у формальній мові L_Ω вихідної системи.

Нехай $U=\{a_1,a_2,...\}$ – довільний універсум *значень* об'єктів, серед яких присутні як імена, тобто $V \subset U$, так і зв'язки. Як бачимо, у вихідних системах самі імена при деяких умовах можуть виступати значеннями об'єктів. Об'єкти з такими значеннями отримали назву *покажчиків.*

Роль імен у вхідних і вихідних системах суттєво різниться. Якщо в перших вони є лише сигнатурними елементами, то у других імена не тільки позначають значення, а й самі у якості значень стають активними учасниками обчислювальних процесів. Їх можна обчислювати за допомогою дій, пересилати тощо.

Усі значення розподіляються на дві категорії: *предметні* та *імперативні*. Перші подають предмети, другі – певну конкретну дію над предметами, наприклад, арифметичну або певний зв'язок. Як і імена, значення теж можуть мати певну структуру і розподіляються на *атомні* (неструктуровані) та *складені* (структуровані). Елементами останніх можуть бути і самі інформаційні об'єкти (зокрема покажчики) та їхні сукупності. Тобто в загальному вигляді інформаційні об'єкти мають ієрархічну будову[7].

Імена та значення об'єднуються в об'єкти за допомогою *зв'язків*. Структуру зв'язків ми конкретизувати не будемо, але деякі важливі їхні характеристики обговоримо. Позначимо Σ – сукупність усіх зв'язків в системі.

Об'єкти та інформаційні поля. Для утворення об'єктів існує спеціальна дія – *конструктор* об'єктів $\mapsto$, яка встановлює заданий зв'язок між іменами та їхніми значеннями. Об'єкт, який є результатом застосування конструктора до імені v, зв'язку $\alpha \in \Sigma$ та значення $a \in U$, подається діаграмою $v \underset{\alpha}{\longmapsto} a$ [8]. Покладемо Θ сукупність усіх потенційних об'єктів вихідної системи. Сукупності об'єктів можуть об'єднуватися в *інформаційні поля*. Останні не є множини – вони мають інтенсіональну, а не екстенсіональну природу, наприклад, об'єкти в них можуть збігатися. Розрізнюють інформаційні поля зі *слабким* і *сильним* іменуванням. У першому випадку імена об'єктів у полі можуть повторюватись, у другому – ні.

Інформаційні поля утворюються спеціальним конструктором $[...]$ і позначаються $[v_1 \underset{\alpha_1}{\longmapsto} a_1,...,v_n \underset{\alpha_n}{\longmapsto} a_n,...]$ або $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Ми використовуємо квадратні дужки у записі інформаційного поля, щоб підкреслити їхню відмінність від множин. Останній запис використовують, коли відомо (наприклад, з контексту) які саме зв'язки маються на увазі чи, навпаки, це не має значення. Покладемо $\varnothing$ – порожнє поле. За означенням, об'єкт $v \underset{\alpha}{\longmapsto} a$ і одноелементне інформаційне поле $[v \underset{\alpha}{\longmapsto} a]$, не збігаються. Зазначимо, що ми не виключаємо з розгляду і нескінченні поля, але вони теж мають бути результатом певних дій.

Коли усі зв'язки всередині об'єктів інформаційного поля збігаються зі зв'язком α, то його можна утворити *груповим* конструктором $\mapsto$, який зображається $v_1,...,v_n \underset{\alpha}{\longmapsto} a_1,...,a_m$ і повертає поле $[v_1 \underset{\alpha}{\longmapsto} a_1,...,v_n \underset{\alpha}{\longmapsto} a_n, v_n \underset{\alpha}{\longmapsto} a_{n+1},...,v_n \underset{\alpha}{\longmapsto} a_m]$, якщо $n \le m$ і поле $[v_1 \underset{\alpha}{\longmapsto} a_1,...,v_m \underset{\alpha}{\longmapsto} a_m, v_{m+1} \underset{\alpha}{\longmapsto} a_m,...,v_n \underset{\alpha}{\longmapsto} a_m]$, якщо $n > m$.

Інформаційні поля будемо трактувати як передмножини [13], які складаються з елементів-об'єктів. На передмножинах не визначено відношення рівності елементів, тому елементи в них можуть повторюватись. Основними діями на них є: *об'єднання* $\cup$, *вибір* ch, *вибір з вилученням* chd, *опустошення* $\bar{\varnothing}$ та *обчислення потужності* – $card$. Перша дія за двома полями повертає поле, яке складається з усіх без винятку їхніх об'єктів (немає склеювання однакових елементів), друга – реалізує недетермінований вибір об'єкта поля, третя – те саме, але ще й з вилученням вибраного елементу з поля, четверта – перетворює поле в порожнє і п'ята – повертає кількість елементів у полі.

Наступні чотири дії над полями пов'язані зі специфікою об'єктів. Дія *розіменування* $\grave{v}$ – параметризована і за фіксованим іменем v на полі $d=[v_1 \underset{\alpha_1}{\longmapsto} a_1,...,v_n \underset{\alpha_n}{\longmapsto} a_n,...]$ повертає значення a_i, якщо $v=v_i$ для деякого $i \ge 1$.

Перевірка приналежності $v!d$ за іменем v та полем d повертає поле d, коли об'єкт з іменем v присутній в d та порожнє поле $\varnothing$ у супротивному.

Іменування в полі $d_1 \cup d_2$ може виявитись слабким навіть коли об'єднуються два поля із сильним іменуванням. Це не так у випадку дії *оновлення* $d_1 \nabla d_2$, результатом якої є поле d_2, до якого долучено всі об'єкти поля d_1 з іменами, які відсутні в d_2. Дія оновлення не- комутативна – вважається, що інформація в об'єктах поля d_2 "свіжіша" ніж в одноіменних об'єктах поля d_1.

---

[7] У даній роботі ми її деталізувати не будемо.

[8] Якщо нас цікавить тільки сам факт існування певного зв'язку між іменами та їхніми значеннями, а його інтенсіонал – ні, то подання інформаційних об'єктів можна традиційно обмежити упорядкованими парами (v,a), в яких перший компонент – ім'я, а другий – його значення.

Дія *деструктора* $des(v,d)$ полягає у вилученні з поля d об'єкта з іменем v, якщо v - статична змінна, та – і його декларації, якщо – динамічна.

Типізація. У конкретних вихідних системах існують обмеження на встановлення зв'язків між іменами та значеннями. За цими обмеженнями усі зв'язки системи типізовані – кожний з них має справу не из усіма значеннями універсуму U, а тільки з деякими, що належать певному фіксованому типу $T \subset U$. Сукупність таких прив'язаних до типу T зв'язків будемо позначати $T\uparrow$. Вона сама є типом і її зв'язки – унікальні і не можуть належати іншим типам. Таким чином, універсум U вихідної системи апріорі розбивається на систему типів Θ, так що $U = \bigcup_{T\in\Theta} T$. Вона структурована відносно типів-зв'язків. За означенням, $\Theta = \bigcup_{i\geq 0}\Theta_i$, де Θ_0 сукупність усіх типів-незв'язків системи, $\Theta_i = \{T\uparrow : T \in \Theta_{i-1}\}$, $i \geq 0$. Вважається, що порожньому типу T_0 відповідає тільки один ("фіктивний") зв'язок – *nil*. тобто $T_0\uparrow = \{nil\}$ і цей зв'язок, як виключення, входить до усіх типів-зв'язків системи Θ.

У зв'язку з типізацією універсуму U з'являються нові дії – *конструктури типів* $\underset{c}{\Longrightarrow}$ та *типізованих змінних* $\rightarrow$. Перший – параметризований, за типами $T_1,...,T_n$ і іменем v утворює новий тип T і пов'язує його з іменем v. Другий – утворює зв'язок α типу T і пов'язує його з іменем v. Ці дії називаються *деклараціями* і позначаються (як і їхні результати) діаграмами $v\underset{c}{\Longrightarrow}(T_1,...,T_n)$ та $v \rightarrow T$ відповідно. Говорять, в процесі цих декларацій ім'я v набуває статусу *імені типу* T та *змінної типу* T і стає *задекларованим*. Перший статус дозволяє за іменем v ідентифікувати тип T і використовувати його в інших конструктурах для побудови нових типів та в деклараціях змінних (в деклараціях типів фігурують насправді не самі типи $T_1,...,T_n$, а їхні імена). Він не може бути змінений під час обробки полів.

Для того щоб за допомогою конструктурів типів породжувати нові типі, деякі з них – *первинні* – мають бути визначені апріорі. В противагу первинним, породжені типи отримали назву – *похідних.* Введемо спеціальний конструктор $v \Rightarrow T\uparrow$, що утворює за типом T відповідний іменований тип $T\uparrow$ зв'язків. Усі такі іменовані типи-зв'язки є похідними.

Для кожного типу T серед зв'язків типу $T\uparrow$ розрізнюють статичні та динамічні їхні варіанти і відповідно такі ж варіанти змінних. Змінна після набуття свого *статичного* статусу типу T не може змінити його на інший – типу T', а *динамічна* – може. За означенням, статус імен типів – теж статичний.

Долучимо до складу інформаційних полів декларації типів та змінних. Таким чином, відтепер до складу інформаційних полів можуть входити не тільки інформаційні об'єкти, а й декларації типів та змінних при умові, що всі імена типів та змінних в них попарно різні.

Введемо спеціальне "неконкретизоване" значення $\#$, яке належить усім типам $T \in \Theta$. Будемо вважати, що в процесі декларації змінної $v \rightarrow \alpha$ паралельно утворюється ще й "неконкретизований" інформаційний об'єкт $v\underset{T}{\longmapsto}\#$.

Покладемо $pt(d)$, $st(d)$, $var(d)$, $sn(d)$, $dn(d)$, $nm(d)$ – множини усіх імен відповідно типів, задекларованих типів[9], змінних, статичних та динамічних змінних та об'єктів, які фігурують в полі d. У кожному інформаційному полі d виконується **правило декларації:**

1) кожне з задекларованих імен типів, як і змінних, є унікальним (поле містить тільки одну декларацію типу чи змінної з таким іменем);[10],

2) $pt(d) = st(d)$, $nm(d) = var(d)$, $sn(d) \cap dn(d) = \varnothing$, $var(d) = sn(d) \cup dn(d)$.

За правилом декларації усі імена похідних типів та об'єкти поля мають бути обов'язково задекларовані в ньому.

Покладемо V^U (X^U) сукупність усіх інформаційних полів з іменами із множини V (X) та значеннями з U, які задовольняють правилам декларації.

Конкретизація. Задекларована змінна в полі може бути *конкретизована* в ньому відповідним конструктором*,* але тільки значеннями свого типу. Якщо значення належить іншому типу, то воно має бути перетворене до типу змінної. Цей тип можна змінити, якщо оновити її декларацію. Конкретизація змінної типу T полягає в її означенні, тобто в утворенні об'єкту $v\underset{T}{\longmapsto}a$, $a \in T \setminus \{\#\}$ і долученні його до поля. Говорять, що після цього змінна отримала або має значення a. Якщо змінна була вже конкретизована в полі, то в процесі нової конкретизації чи зміні її типу попередній зв'язок втрачається. Перша конкретизація змінної називається її *ініціалізацією.* Іноді ініціалізація відбувається разом з декларацією змінної, при цьому в деяких випадках – за замовчуванням (наприклад, при обов'язковому початковому обнулінні арифметичної змінної). До ініціалізації вважається, що змінна має "неконкретизоване" значення $\#$. Позначимо $ini(d)$ сукупність усіх ініціалізованих змінних поля d. Тоді $ini(d) \subseteq var(d)$.

Рівні доступу. У зв'язку з конкретизацією важливими є можливість та характер доступу до значень змінних. Тому характеризуючи зв'язки, враховують не тільки тип значень, а й ті можливості (рівень) доступу до об'єктів, які вони (зв'язки) забезпечують. За рівнем доступу зв'язки розподіляються на такі, що дозволяють доступ: 1) тільки для дій *читання* значення об'єкту, 2) тільки для дій *запису* (заміни значення об'єкту), 3) *повний* доступ для читання і запису, 4) *повний* доступ до дубліката дозволяє дії читання та запису з дублікатом об'єкту, 5) *обмежений* доступ – доступ тільки для окремих дій, 6) *блокування* – неможливість будь-яких дій.

За рівнем доступу серед змінних виділяють *публічні* (за умовчуванням*)*, *приватні* та *змінні-константи*. До перших (або їхніх частин) є повний доступ, до других – обмежений, треті доступні для читання. Дії читання та запису називаються *інтерфейсними.*

[9] Усі первинні типи, за означенням, належать до задекларованих.
[10] Щоправда, це не розповсюджується на імена типів та змінних – вони між собою збігатися можуть.

Оператори. У внутрішніх мовах вихідних систем інформаційні поля називаються даними, дії, що перетворюють дані – операторами, а операції та функції є діями, визначеними на даних. Результат застосування оператора до даного позначається як звичайними термами, так і термами вигляду. Говорять, що одне дане включає (містить) більше інформації, ніж інше дане або що воно розширює дане.

Зазвичай при роботі з даними увага фокусується не на всій їхній інформації, а тільки на актуальній на даний момент її частині, що міститься в певному фрагменті поля. Під фрагментом поля будемо розуміти його частину, яка відповідає певній сукупності його імен. Це стосується й операторів – вони змінюють, як правило, не всю інформацію в полі, а тільки ту, що належить певному скінченному його фрагменту. Такі актуальні фрагменти даних отримали назву $X-$*фреймів,* де *X* – фіксована сукупність імен об'єктів, яка ідентифікує ці фрагменти[11]. Наприклад, класичні $n-$арні операції визначені на кортежах $(a_1,...,a_n)$, які подаються у вихідних системах $X-$фреймами вигляду $[1\mapsto a_1,...,n\mapsto a_n]$, $X=\{1,...,n\}$. Області визначення (D_φ) та значень (E_φ) операторів вихідних систем складають певні відповідно $X-$та $Y-$фрейми та їхні розширення. Змінні з $X-$фрейму обов'язково мусять мати доступ як мінімум для читання, а з $Y-$фрейму – як мінімум для запису.

Найчастіше в даних змінюється значення якоїсь однієї змінної. Таку змінну здійснює оператор **присвоювання** $:=$, який має два аргументи: вираз le- задає ім'я змінної, функція re обчислює нове її значення. Нехай $d=[v_1\underset{T_1}{\longmapsto}a_1,...,v_n\underset{T_n}{\longmapsto}a_n]$ дане з області визначень функцій le та re і $v=le(d)$ для деякого імені $v\in V$, $a=re(d),\ a\in T'$.

Позначимо d_{-v} результат вилучення з даного d конкретизованої змінної v, якщо вона статична в d, а також і її декларації, якщо вона динамічна в d. Зазначимо, що $d_{-v}=d$, коли $v\notin var(d)$. Дія оператора присвоювання на даному d залежить від того, чи є ім'я v серед змінних даного d чи немає, а також від її типу T і статусу – статична вона чи динамічна. Якщо $v\in sn(d)$, то $le:=re|_d=[v\underset{T}{\longmapsto}a']\cup d_{-v}$, де 1) $a'=a$, коли $T'=T$, 2) $a'=\chi_{T',T}(a)$, коли $T'\neq T$ і $\chi_{T',T}:T'\to T-$ внутрішнє перетворення типу T' в тип T, 3) невизначено, коли $T'\neq T$ і такого перетворення не передбачено. У решті випадків $le:=re|_d=[v\to T',v\underset{T'}{\longmapsto}a]\cup\alpha_{-v}$.

Вираз le та функція re називаються відповідно *l*- та *r-виразами*[12]. Оператор присвоєння може використовуватись і для ініціалізації змінних.

Серед *r*-виразів виділяють найпростіші – розіменування $\grave{v}$ змінних та змінних-констант. За означенням, якщо змінна v задекларована, але не ініціалізована у полі d, то $\grave{v}|_d=\#$.

Нехай $X=\{x,y\}\subset V$ та $d=[x\to int\uparrow,y\to int\uparrow,z\to real\uparrow,x\mapsto 2,y\mapsto 5,z\mapsto\#]$. Розглянемо оператор-присвоювання $x:=x+2*y$. *l*-виразом у ньому є ім'я змінної x, *r*-виразом – функція, яка з довільного стану X-фрейму читає значення змінних x та y, підставляє їх у терм $x+2*y$ та обчислює його значення. Результатом застосування оператора $x:=x+2*y|_d$ буде поле $d'=[x\to int,y\to int,z\to real,x\mapsto 12,y\mapsto 5,z\mapsto\#]$.

У мовах програмування функції розіменнування змінних подаються скорочено – просто як їхні імена, а відрізняють їх від імен змінних за контекстом. Наприклад, у попередньому операторі перше входження x є іменем змінної (*l*-виразом), а друге, як і входження інших змінних – операціями читання, при цьому $x|_d=2,y|_d=5,z|_d=\#$.

Змінити значення $Y-$фрейму $Y=\{v_1,...,v_n\}$ можна за допомогою *групового* оператора присвоєння $v_1,...,v_n:=re_1,...,re_n$. Дія цього оператора на даному d зводиться до одночасного застосування до нього операторів присвоєння $v_i:=re_i$, $1\le i\le n$. Наприклад, обміняти значеннями змінні x та y можна груповим присвоєнням $x,y:=y,x$.

Оператори присвоювання належать до фундаментальних засобів перетворення інформації в системах обробки інформації та їхніх моделях. Вони є прикладом важливого класу, так званих, операторів оновлення.

Нехай $X=\{x_1,...,x_n\}\subset V$ –довільний $X-$фрейм. Функція φ називається $X-$*функцією,* якщо $D_\varphi\subseteq X^U$. X-функція природним чином поширюється на всі дані, що містять даний $X-$фрейм.

Функція φ називається **еквітонним розширенням** $X-$функції ϕ, якщо $\forall d\in D_\phi\forall d'\in V^U(d\subseteq d'\Rightarrow\varphi(d')=\phi(d))$.

Еквітонно розширені $X-$функції зі значеннями в множині U будемо називати $X-$*арними операціями* (або просто *узагальненими* операціями, якщо фрейм X не фіксовано). Значення $X-$арної операції φ на довільному даному d' залежить лише від стану $X-$фрейму в ньому, тобто інформаційні об'єкти поза цим $X-$фреймом не є актуальними і жодним чином не впливають на значення $\varphi(d')$. Узагальнені операції обчислюють нові значення змінних в ході перетворень даних.

Нехай X,Y – певні сукупності імен. За областю значень серед еквітонно розширених $X-$функцій φ виділяють: 1) $X-Y-$*оператори*, якщо $E_\varphi\subset Y^U$; 2) $X-$*предикати*, якщо $E_\varphi\subseteq\{0,1,\#\}$; 3) $l-$*операції,* якщо $E_\varphi\subseteq V$.

Нехай ϕ – довільний $X-Y$-оператор. Розглянемо еквітонно розширену $X-$функцію φ таку, яка для довільного поля d $\varphi(d)\overset{def}{=}d\nabla\phi(d')$. Функцію φ будемо називаєти $X-Y-$оператором **оновлення**.

---

[11] Іноді X-фреймом називають саму таку сукупність імен X.

[12] Від положення їх в операторі присвоювання: англ. – left (лівий) і – right (правий).

Зазначимо, що $X-\varnothing$ - оператори оновлення залишають інформаційне поле без змін ($d_{-\varnothing}=d$). Вже згадувані оператори присвоювання $x:=x+2*y$ та $x,y:=y,x$ є $\{x,y\}-\{x\}-$ та $\{x,y\}-\{x,y\}-$ операторами оновлення.

$X-Y-$ оператори оновлення здійснюють усі перетворення даних у вихідних системах[13]. Надалі $X-Y-$ оператори оновлення будемо називати просто $X-Y-$ операторами. Загальна схема перетворення інформаційного поля певним $X-Y-$ оператором виглядає так: 1) береться поточна інформація (значення інформаційних об'єктів) з $X-$ фрейму поля; 2) на її підставі отримується нова інформація за допомогою звичайних n -арних операцій; 3) нова інформація заноситься у $Y-$ фрейм. Дану схему можна дещо конкретизувати:

1) спочатку l -функції формують імена змінних із $X-$ та $Y-$ фреймів та можливо інших необхідних змінних поля;

2) операції читання за отриманими іменами знаходять поточні їхні значення в інформаційному полі і за допомогою n -арних операцій за цими значеннями виробляють нові значення змінних;

3) оператори присвоювання та більш складні оператори оновлення виробляють новий стан $Y-$ фрейму й усього інформаційного поля.

Таким чином, для обробки інформації у вихідній системах мають бути наявні такі елементи:

1) сукупність V^U інформаційних полів з іменами з V і значеннями з універсуму U ;

2) сукупності базових інтерфейсних l - та r -операцій та операцій запису для кожного типу об'єктів;

3) базова багатосортна система (U,Ω,I) з внутрішніми перетвореннями типів;

4) сукупність регулярних (рекурсивних) композицій для породження складених $X-$ арних операцій та таких же предикатів, а також $X-Y-$ операторів з елементів пунктів 2)-3).

Усі чотири наведені елементи об'єднуються в композиційну регулярну (рекурсивну) $\Omega-$ систему D *маніпулювання даними*. Вона описує модель станів виконавця та сукупність $X-Y-$ операторів, які він здатен обчислити. Незважаючи на свою апріорі функціональність, ця модель є алгоритмічною, що випливає з того, що всі регулярні та рекурсивні композиції зберігають алгоритмічність своїх аргументів, тобто якщо їхні аргументи конструктивні і обчислюються певними процедурами, то і результат є конструктивним і обчислюється певною процедурою. Усі похідні елементи функціональної алгебри системи D є алгоритмами відносно базових елементів з пунктів 2)-3), для подання яких використовується формальна мова L'_Ω звичайних та регулярних (рекурсивних) $\Omega-$ термів з сигнатурою Ω . Мова L'_Ω – аналогічна формальній мові вхідних систем L_Ω , але не використовує кванторів і основними її конструкціями є терми, а не формули. Вона збагачена синтаксичними правилами для побудови структурованих імен, системи типів, типізованих об'єктів, декларацій типів, статичних та динамічних змінних з різними рівнями доступу, інформаційних полів (даних). Сигнатура Ω розширена символами для подання базових інтерфейсних операцій для кожного з типів та сигнатурою Ω_χ операцій внутрішнього перетворення типів.

Двійка $\boldsymbol{S}_{out}=(D,L'_\Omega)$ називається **вихідною системою.**

Елементами КС є також функції кодування й декодування об'єктів, які пов'язують між собою вхідну й вихідну системи. Нехай S_{in} та S_{out} – певні вхідна й вихідна системи. Довільні типізовані однозначні часткові відображення $c_1:\mathrm{O}\to V^U$ та $c_2:V^U\to(\Omega_v)^U$ називаються відповідно *функціями кодування* й *декодування*. Функція кодування відображає допустимі оцінки вхідних змінних запитів КС у відповідні інформаційні поля, які підлягають обробці у вихідній системі, а функція декодування повертає у вхідну систему результати цієї обробки у вигляді певної оцінки вихідних змінних запитів. Дані функції можуть включати також процеси шифрації та дешифрації даних.

Ми готові дати загальне означення композиційної моделі комунікативних інформаційних систем.

Зафіксуємо певні функції кодування c_1 й декодування c_2. Вихідна система S_{out} називається *коректною* відносно запиту $\Phi=\Phi\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)$ вхідної системи S_{in} , де $\{x_1,...,x_n\}$ – сукупність його вхідних змінних, а $\{y_1,...,y_m\}$ – сукупність вихідних, якщо у вихідній системі S_{out} знайдеться $X-Y$ -оператор φ такий, що

$$\forall\alpha\in\mathrm{O}\exists\beta\in(\Omega_v^I)^U\left(\left(\beta=c_2\left(\varphi\,|_{c_1(\alpha)}\right)\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i\alpha=a_i\mathop{\&}_{j=1}^{m}y_j\beta=b_j\right)\supset\Phi\left(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m\right)\right)\ (*).$$

Умова (*) означає: якщо закодувати будь-який варіант вхідних даних запиту Φ і застосувати до отриманого інформаційного поля оператор O, а потім узяти результат роботи O і розкодувати його, то після підстановки в запит Φ вхідних і отриманих вихідних значень змінних x_i та y_j запит буде задоволено. Назвемо оператор O *реалізацією* запиту Φ . Вихідна система S_{out} називається *коректною* по відношенню до вхідної системи S_{in} , якщо вона коректна відносно всіх запитів S_{in} .

Четвірка $\mathrm{S}=\left(\mathrm{S}_{in},\mathrm{S}_{out},c_1,c_2\right)$, де вихідна система S_{out} є коректною по відношенню до вхідної системи S_{in} , називається **композиційною моделлю** комунікативних інформаційних систем.

Висновки. В роботі введено поняття композиційної моделі комунікативних систем. Ця модель є сугубо алгебричною і описує функціональну семантику КС. Базовими її поняттями є поняття формалізованої композиційної рекурсивної $\Omega-$ системи з внутрішніми перетвореннями типів, інформаційного об'єкту, інформаційного поля (даного) та $X-Y-$ оператора оновлення даних. Для конструктивізації цієї моделі необхідно доповнити вихідні системи конструктивною операційною семантикою.

Список використаних джерел

1. Зубенко В. В, Омельчук Л. Л. Програмування: Навчальний посібник. – К., 2011.
2. Зубенко В.В. Про комунікативну платформу інформатики // В кн.: Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем. – К., 2012.

[13] Це справедливо тільки для вихідних систем без, так званих, побічних еффектів.

3. Зубенко В.В. Про комунікативну інформатику // Вісник КНУ ім.Тараса Шевченка, сер. фіз.-мат.наук, вип.4. – 2012.
4. Нікітченко М.С. Шкільняк С. С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
5. Зубенко В.В. Элементарные програмные алгебры: Автореф. дисс. на соиск. степ. канд.физ.-мат. наук / Зубенко В.В. – К., 1986.
6. Зубенко В.В. Элементарная схематология //В кн.: Системное и теоретичское програмирование. – Кишинев, 1983.
7. Клини С. Математика метаматематики. – М., 1956.
8. Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сборник. Новая серия. – М.: Мир, 1978. – Вып. 15.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
10. Нікітченко М.С.Теорія програмування. Частина І: Навчальний посібник. – Ніжин, 2010.
11. Плюшкявичус Р.А., и др. О прикладных логиках // Кибернетика, №2. – 1979.
12. Редько В.Н., Редько І.В., Гришко Н.В. Дескриптивні основи сутнісної платформи//Проблеми програмування, № 2-3.
13. Nikitchenko M. Chentsov A. Basics of Intensionalized Data: Presets, Sets and Nominats // Computer Science Journal of Moldova, vol. 20, no.3 (60). – 2012.

Надійшла до редколегії 08.04.13

В. Зубенко, канд. физ.-мат. наук, доц.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

КОМПОЗИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ КОММУНИКАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается алгебраическая модель коммуникативных информационных систем.

Ключевые слова: композиционная модель, коммуникативная система, конструктор правило декларации, эквитонное расширения.

V. Zubenko, PhD. Sci. Sciences,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kiev

COMPOSITIONAL COMMUNICATIVE MODEL INFORMATION SYSTEMS

The algebraic model of communicative informations systems is considered.

Keywords: composite model communication system designer usually Declaration equitone expansion.

УДК 519.852:519.876

В. Кудін, д-р техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО СХЕМИ МЕТОДУ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Проаналізовано варіанти методу базисних матриць для розв'язання двоїстої пари задач лінійного програмування з однотипними обмеженнями. На прикладі матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: метод базисних матриць пряма и двоїстна задача.

Вступ. Для багатьох практичних задач встановлення існування та знаходження оптимального розв'язку, наприклад, задачі лінійного програмування (матричної гри) є лише однією із задач дослідження [1-6]. Виникає і ряд інших задач такі як, дослідження властивостей розв'язків. Від вибору варіанту симплекс-методу та його алгоритму залежить ефективність розв'язання таких задач вцілому. Слід зазначити, що ряд задач потребують аналізу як прямої, так і двоїстої задачі, наприклад, матричні ігри у змішаних стратегіях [5-6].

Встановлено [1,5], як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування з однотипними обмеженнями, розв'язок яких визначає оптимальні стратегії гравців заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Постановка задачі. В даній роботі розглянуто варіанти алгоритмічних схем методу базисних матриць [7] для задач з однотипними обмеженнями (саме до таких відносяться матричні ігри у змішаних стратегіях, як задачі лінійного програмування).

В процесі доведення основної теореми теорії ігор для матричної гри з платіжною матрицею $A = \|a_{ij}\|_{i=1,\, j=1}^{m,n}$ $(a_{ij} > 0)$ було встановлено зв'язок з парою двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6) з однотипними обмеженнями, які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \tag{3}$$

Або в матричному вигляді введемо в розгляд задачу [1] лінійного програмування вигляду:

$$\min Cx,$$
$$Ax \le B^T ,$$
$$x \ge 0 ,$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)–(3) має матрицю обмежень А в якій кількість стовпців більш ніж рядків ("довга").

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m} \ ). \qquad (6)$$

Двоїста до (1)–(3) може бути записана у вигляді:

$$\min Bu,$$

$$A^T u \geq C^T,$$

$$u \geq 0 \ , \ (u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T \ ).$$

Встановлено, що матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4].

Пряма задача вигляду (1)-(3), де $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, c_j = 1, \ j = \overline{1, n}$.

Двоїста задача вигляду (4)-(6), де $u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \ c_j = 1, \ j = \overline{1, n}.$

Задача (4)-(6) є двоїстою до задачі (1)-(3), яку називають прямою.

Положення методу базисних матриць (МБМ).

Означення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Дві базисні матриці з відмінним одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай: $\beta_{ij}, \quad i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ – елементи $A_б$; e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розкладу нормалі $a_r u_1 \leq c_r$ за рядками $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ - вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками, $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ – нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = Bu_0$ – значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ – множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}, \quad \overline{\alpha}_r, \overline{L}_i, \quad \overline{\Delta}_k, \quad \overline{e}_{ri}, (\overline{A}_b^{-1})_i \quad \overline{\alpha}_0$.

За своїми властивостями БМ можна розподілити на наступні:

Означення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати допустимою базисною, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С допустимим базисним при виконанні умови

$$\begin{aligned} \Delta_r &= a_r u_0^T - c_r < 0, \ \ r \notin J_b, \\ \Delta_r &= a_r u_0^T - c_r = 0, \ \ r \in J_b \end{aligned} .$$

Означення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *псевдо базисною*, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С псевдо базисним при виконанні умови $\alpha_{0i} \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Означення 3. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *штучною базисною,* а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С штучно базисним якщо знаки $\Delta_r = a_r u_0 - c_r, \ r \in J$ та $\alpha_{0i}, i = \overline{1, m}$ можуть набувати як від'ємних так і додатніх значень.

Означення 4. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *невиродженою* базисною, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С невиродженим базисним при виконанні умови $\Delta_r = 0, \ r \in J_б, \Delta_r \neq 0, \ r \notin J_б$.

В протилежному випадку, підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати ***виродженою базисною***, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С виродженим базисним при виконанні умови $\Delta_r = 0, \ r \in J_б, \exists \ r, \Delta_r = 0, \ r \notin J_б$.

В сучасних точних методах типу Гауса та відомих сімплекс-методах передбачається, що ведучий елемент перетворення відмінний від нуля (операція ділення на нуль). Обмеження на ведучий елемент має іще і іншу властивість.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u \le c_j, j \in J_б$ де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ – індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l – вектор-нормалі $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Лема 1. Необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$ при заміні вектора a_{i_k}, що утворює к-й рядок в $A_б$ вектором а $_l$ є $\alpha_{lk} \ne 0$.

Теорема 1. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв'язках мають місце такі співвідношення

$$\bar{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \bar{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r = \overline{0,n}; \ i = \overline{1,m}; \ i \ne k; \tag{7}$$

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \ r = \overline{1,m}; \ i = \overline{1,m}; \ i \ne k; \tag{8}$$

$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}}\Delta_l, \ j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\bar{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \bar{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \ r = \overline{1,n}; \ r \ne k; \tag{10}$$

$$B\bar{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{11}$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку – $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції – $\alpha_{0k} < 0$.

Знаходження початкової базисної матриці та розв'язку. Введемо в розгляд систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Iu = K \tag{12}$$

з відомим розв'язком та оберненою матрицею (допоміжна система), де I – квадратна БМ – (m*m), а K – вектор розмірності m.

Знайти базисну матрицю $A_б$ (підматрицю А) таку, що $A_б u_0^T = c^0$ на основі (12), а u_0 – базисний розв'язок для (5).

Умови Теореми 1 та Леми 1 лежать в основі знаходження величини рангу, початкової базисної матриці та розв'язку (5) з постійними елементами. Це елементи при оптимізаційному аналізі (5).

Алгоритм 1

Крок 1. Проводимо сімплексні ітерації по заміщенню рядків базисної матриці I (12) нормалями обмежень (5), згідно (7)-(11).

Знаходимо відповідні елементи методу: розвинення за рядками базисних матриць обмежень (5), обернену БМ, штучні базисні розв'язки $u_0^{(k)}$, де k - номер ітерації.

Крок 2. Перевіряємо кількість ітерацій r заміщення рядків допоміжної системи рядками основної системи для яких виконуються умови Леми 1 (про опорність): $\alpha_{lk} \ne 0$ - число визначає ранг основної системи.

Крок 3. Якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i} \ne 0$, рівна m, то переходимо на наступний крок. В супротивному на передостанній крок.

Крок 4. Знаходимо єдиний розв'язок згідно співвідношення: $A_б^{-1} \cdot c^0 = u^0$ та базисну матрицю (5).

Крок 5. Виконання умови $r < m$ означає порушення умови єдиності розв'язку і потребує подальшого аналізу розв'язності задачі.

Останній крок. Формування вихідної інформації за результатами аналізу (12).

Наслідок 1. Ранг системи (5) визначається кількістю коректних заміщень на основі симплексних ітерацій згідно Леми 1.

На основі теореми 1 та алгоритму 1 знаходиться базисна матриця та розв'язок (5). За своїми властивостями базисні матриці можуть бути відповідно допустимими, псевдо та штучними. Для кожного типу базисної матриці запропонована своя схема аналізу та оптимізації.

Схеми аналізу моделей методом базисних матриць

I. **Схема методу допустимих базисних матриць** (аналіз лінійної моделі на випадок існування допустимої початкової базисної матриці):

між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4), елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних допустимих базисних розв'язках мають місце співвідношення (7)-(11) причому умовою: опорності базисної матриці при вводі вектору нормалі a_l обмеження $a_l u^T \le c_l$ к-м рядком базисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку є $\alpha_{lk} < 0$, зростання цільової функції $\alpha_{0k} < 0$, спадання – $\alpha_{0k} \ge 0$, сталості $\alpha_{0k} = 0$.

ІІ. Схема методу псевдо базисних матриць (при існуванні початкової псевдобазисної матриці та розв'язку, що знайдено на основі алгоритму 1 встановлено, що

між елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях мають місце співвідношення (7)-(11) причому умовою: опорності псевдобазисності матриці при вводі вектора нормалі a_l обмеження $\alpha_l u^T \le c_l$ на к-ту позицію базисної матриці $A_б$ є $\alpha_{lk} \ne 0$; псевдобазисності опорних розв'язків, тобто $\alpha_{0i} \ge 0, \ i=\overline{1,n}$ є $\alpha_{lk} > 0$: спадання цільової функції у новій псевдобазисній матриці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$, зростання цільової функції $\Delta_l < 0$, сталості $\Delta_l = 0$.

ІІІ. Схема методу штучних базисних матриць (при існуванні початкової штучної базисної матриці та розв'язку, що знайдено на основі алгоритму 1 обгрунтовано:

між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками штучної базисної матриці, елементами обернених матриць, штучними базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних штучних базисних матрицях мають місце співвідношення (4)-(11), які встановлюють єдиний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратною невиродженою матрицею обмежень за схемою алгоритму 1 та твірні конуса загального розв'язку відповідної системи $A_б u^T \le C^0$, що представляється

$$K = \{u \,/\, u = u_0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i, \text{ де вершина } u_0,\ \lambda_i > 0,\ \text{твірні } e_i = (A_б^{-1})_i \ \} .$$

В сукупності встановлені співвідношення (7)-(11), теореми 1 та леми 1 є основоположними при побудові **обчислювального методу базисних матриць для аналізу та оптимізації** лінійних та слабконелінійних моделей (до таких систем відносяться і матричні ігри у змішаних стратегіях),

схеми методу допустимих базисних матриць (МДБМ),

схеми методу псевдобазисних матриць (МПБМ),

схеми методу штучних псевдобазисних матриць (МШБМ).

Обгрунтування положень наведених схем методу базисних матриць детально розкрито в [7].

Встановлено, що аналіз та оптимізацію в ЛС на основі МБМ доцільно проводити в такій послідовності.

Фази дослідження лінійних моделей:

- визначення рангу r матриці обмежень (5) та грані мінімальної розмірності,
- знаходження базисної матриці (корекція рангу),
- аналіз розв'язності (сумісності, обмеженості, замкнутості,), регуляризація нерозв'язності,
- побудова апроксимуючих (оціночних) множин, загальних розв'язків систем лінійних алгебраїчних нерівностей (СЛАН) та СЛАР,
- визначення статусу обмежень (пасивність, активність, породжувать нерозв'язність за сумісністю),
- аналіз оптимальних розв'язків (існування, єдність та структура),
- оцінка впливу збурень на статус обмеження, виродженість, ранг, розв'язки.

Висновки. На основі базового обчислювального методу (МБМ) аналізу та оптимізації лінійних моделей досліджуються наступні задачі:

– дооптимізаційного аналізу (встановлення рангу матриці обмежень та її невиродженості у випадку його повноти, знаходження початкових базисних матриць, встановлення сумісності системи обмежень, побудова початкових оціночних множин – встановлення властивості обмеженості та замкнутості допустимих розв'язків, дооптимізаційне скорочення розмірності моделі);

– оптимізаційного аналізу (знаходження одним із симплекс-методів оптимального розв'язку задачі, існування, єдиності, неєдиності розв'язків або необмеженості множини їх розв'язків, ідентифікація та відсів пасивних та неактивних обмежень системи в ході ітерацій методів, побудові раціональних за критеріями розмірності моделей релаксаційних, агрегаційних та декомпозиційних алгоритмічних схем;

– поелементний, покомпонентний та структурний аналіз лінійної системи, дослідження областей збереження властивостей при варіантах ″збурення″ систем, побудова агрегованих оціночних множин для допустимих множин системи з визначеними властивостями;

– знаходження областей розв'язків лінійних систем, що описуються системами лінійних алгебраїчних рівнянь, аналіз цих множин при різноманітних змінах компонент моделі;

– постоптимізаційний аналіз лінійних систем при регулярних та нерегулярних збуреннях з класу слабонелінійних в елементах та компонентах моделі (однопараметричні функціонально лінійно та нелінійно залежні від параметру, а також багатопараметричній нелінійній залежності від векторного параметру;

При розв'язанні двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) на основі методу базисних матриць можна встановити властивості оптимальних розв'язків (стратегій гравців) прямої та двоїстої задачі (єдиність, неєдиність) та побудувати ефективні алгоритми.

Список використаних джерел

1. Golshteyn E.G., Yudin D.B. New directions in linear programming. – M. – Sovetskoe radio. – 1969, – 524p. (in Russian).
2. Dantzig G.B Linear programming and application. M.: Progress. – 1966. (in Russian).
3. Dantzig G.B., Thapa M.N. Linear Programming 1: introduction, Springer. – 1997. – 435 p.
4. Dantzig G.B. Dikin's Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, – 1988.
5. Golshteyn E.G., Yudin D.B. Linear programming/.Theory and methods. –M.: Nauka, – 1963. – 776 p. (in Russian).
6. Leon S. Lasdon . Optimization theory for large System. – M.: Nauka, – 1975. – 430 p. (in Russian).
7. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. – 2007. – N 4. – P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.05.13

В. Кудин, д-р техн. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СХЕМЫ МЕТОДА БАЗИСНЫХ МАТРИЦ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Проанализированы варианты метода базисных матриц для решения двойственной пары задач линейного программирования с однотипными ограничениями. На примере матричной игры в смешанных стратегиях.
Ключевые слова: метод базисных матриц, прямая и двоистна задача.

V. Kudyn, Dr. Sc .. Science
Kiev National University of Taras Shevchenko, Kiev

METHOD OF CIRCUIT ANALYSIS BASIS MATRICES LINEAR SYSTEMS

Analyzed variants of basis matrices for solving the dual pair of linear programming problems with the same type of restrictions. The example matrix game in mixed strategies.
Keywords: method of basis matrices, direct and dual task.

УДК 517.929

А. Сиренко, асп.,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В работе предлагаются достаточные условия и алгоритм нахождения единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем.
Ключевые слова: гибридная система, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

Введение

Одним из бурно развивающихся в последнее время направлений теории динамических систем является исследование устойчивости гибридных систем [1-3]. В системах этого типа подразумевается, что динамика на отдельных этапах описывается подсистемами различного вида. В частности, гибридные системы могут быть заданы набором систем обыкновенных дифференциальных уравнений с логическим законом переключения. Переключение может быть задано фиксированными временными промежутками или алгебраическими условиями принадлежности фазовой координаты определенным областям. Одним из важных направлений динамики систем указанного типа является исследование устойчивости с использованием второго метода Ляпунова [2,3]. Как отмечалось в ряде работ за счет выбора закона переключения из двух неустойчивых систем можно составить одну асимптотически устойчивую систему и наоборот, из двух асимптотически устойчивых одну неустойчивую [4]. Поэтому одной из центральных проблем исследования устойчивости гибридных систем является проблема существования единой функции Ляпунова [5]. Вопросы существования единой функции Ляпунова для систем дифференциальных уравнений рассматривались в работах [5,6]. В работе [6] получены необходимые и достаточные условия существования единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем на плоскости. Насколько известно авторам настоящей статьи, аналогичных результатов для систем общего вида не существует.

1. Линейные системы общего вида

Пусть гибридная система состоит из двух линейных стационарных систем

$$\dot{x} = A_1 x \tag{1.1}$$

и

$$\dot{x} = A_2 x \tag{1.2}$$

Если матрицы A_1 и A_2 асимптотически устойчивы, то при произвольных положительно определенных матрицах C_1 и C_2 матричные уравнения Ляпунова

$$A_1^T H + HA_1 = -C_1 \tag{1.3}$$

и

$$A_2^T H + HA_2 = -C_2 \tag{1.4}$$

имеют единственные решения – положительно определенные матрицы H_1 и H_2 [7,8]. И для каждой из систем (1.1), (1.2) существует своя функция Ляпунова квадратичного вида $V_1(x) = x^T H_1 x$ и $V_2(x) = x^T H_2 x$. Интерес представляет нахождение простых и легко проверяемых условий существования и алгоритма нахождения "единой" для обеих систем квадратичной функции Ляпунова.

В работах [9,10] было показано, что пространство симметричных положительно определенных матриц образует выпуклый конус K_0 с центром в начале координат, лежащий в пространстве R^N, $N = \frac{n(n+1)}{2}$, т.е. $K_0 \subset R^N$. А множество положительно определенных матриц, являющихся решением уравнения Ляпунова, представляет собой выпуклый конус K_1, находящийся внутри конуса K_0, т.е. $K_1 \subset K_0 \subset R^N$. Очевидно, что системам (1.1) и (1.2) отвечают два конуса K_1 и K_2. И вопрос существования единой для систем (1.1) и (1.2) функции Ляпунова эквивалентен вопросу существования непустого пересечения конусов K_1 и K_2. Возьмем в конусе K_1 точку H_1, а в конусе K_2 точку H_2, и соединим их отрезком прямой $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$, $0 \le \alpha \le 1$. Найдем параметр α и условия, накладываемые на матрицы H_1 и H_2, при выполнении которых матрица H_α будет находиться в пересечении конусов K_1 и K_2, т.е. функция Ляпунова $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ будет общей для двух систем (1.1) и (1.2).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть A_1 и A_1 две асимптотически устойчивые матрицы, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i(A_1) < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i(A_2) < 0$, $i = \overline{1,n}$, C_1 и C_2 – фиксированные, положительно определенные матрицы, H_1 и H_2 – решения соответствующих матричных уравнений Ляпунова

1. Если $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ и $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ являются положительно определенными матрицами, то при произвольном $0 < \alpha < 1$ квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

2. Пусть $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ является положительно определенной матрицей, а матрица $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ не является положительно определенной. Тогда при

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \tag{1.5}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

3. Пусть $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ не является положительно определенной матрицей, а матрица $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ является положительно определенной.

Тогда при

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha \le 1 \tag{1.6}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

4. Если ни одна из матриц $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$, $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ не являются положительно определенными матрицами, но выполняется условие

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

то при произвольном

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \tag{1.7}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

Доказательство. Если матрицы H_1 и H_2 положительно определенные, то при произвольном $0 < \alpha < 1$ матрица $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет положительно определенной матрицей. Таким образом, квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ будет положительно определенной функцией. Вычислим полные производные функции $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ в силу систем (1.1) и (1.2).

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x = -\alpha x^T C_1 x - (1-\alpha)x^T C_{12} x.$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x = -(1-\alpha)x^T C_2 x - \alpha x^T C_{21} x.$$

1. Пусть выполняется первое условие, т.е. матрицы $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ и $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ при заданных матрицах H_1 и H_2 являются положительно определенными матрицами. Тогда при произвольном $0 \le \alpha \le 1$ суммы матриц

$$\alpha_1 C_1 + (1-\alpha)C_{12} \text{ и } (1-\alpha)C_2 + \alpha C_{21}$$

будут также положительно определенными, а полные производные для каждой из систем отрицательно определены. Следовательно, при всех значениях $0 \le \alpha \le 1$ функция $V_\alpha(x)$ будет общей функцией Ляпунова для двух систем.

2. Пусть выполняется второе условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x = -\alpha x^T C_1 x - (1-\alpha)x^T C_{12} x,$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x \le \alpha\|C_{21}\||x|^2 - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2)|x|^2.$$

И, если будет выполняться неравенство

$$\alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0,$$

т.е.

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

3. Пусть выполняется третье условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x \le -\alpha x^T C_1 x + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x\|^2.$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x = -\alpha x^T C_{21} x - (1-\alpha)x^T C_2 x.$$

И, если будет выполняться неравенство

$$-\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\left|A_1^T H_2 + H_2 A_1\right| < 0,$$

т.е.

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + |C_{12}|} < \alpha \le 1,$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

4. Пусть выполняется четвертое условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x \le -\alpha x^T C_1 x + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x\|^2,$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x \le \alpha\|C_{21}\|\|x\|^2 - (1-\alpha)x^T C_2 x \cdot$$

И, если будут одновременно выполняться неравенства

$$-\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\|C_{12}\| < 0, \quad \alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0,$$

т.е.

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

Замечание 1.1. Если использовать геометрическую интерпретацию и рассматривать сечение конусов K_1 и K_2, содержащие внутри себя точки H_1 и H_2, то взаимное их расположение и случаи 1-4, представлены на рис. 1.1-1.4.

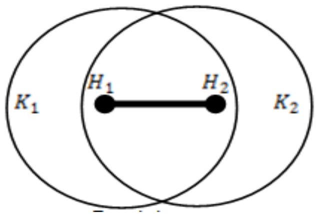

Рис.1.1.
Точки H_1 и H_2 находятся внутри пересечения конусов K_1 и K_2.

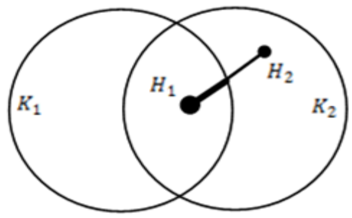

Рис. 1.2.
Точка H_1 находятся внутри пересечения конусов K_1 и K_2, а точка H_2 вне

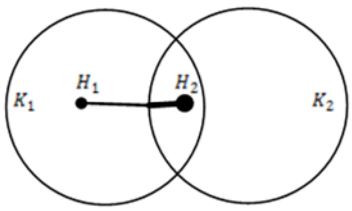

Рис. 1.3.
Точка H_2 находятся внутри конусов K_1 и K_2, а точка H_2 вне

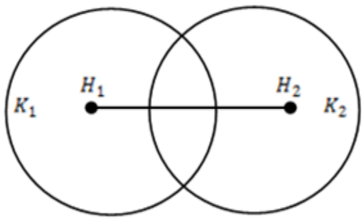

Рис. 1.4.
Точки H_1 и H_2 находятся вне пересечения конусов K_1 и K_2, но на соединяющей их прямой имеется промежуток существования единой функции Ляпунова

Пример 1.1.

1. Рассмотрим систему с матрицей

$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Рассмотрим систему с матрицей

$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_2 = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Возьмем квадратичную форму в виде

$$V_\alpha(x,y) = \alpha x^T H_1 x + (1-\alpha) x^T H_2 x = x^T\left(\alpha H_1 + (1-\alpha) H_2\right) x\,,$$

т.е.

$$H_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_1 имеет вид

$$A_1^T H_\alpha + H_\alpha A_1 = -\alpha\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $C_{12} = \begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}$ является положительно определённой. Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_2. Оно имеет вид

$$A_2^T H_\alpha + H_\alpha A_2 = -\alpha\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

Матрица $C_{21} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ тоже является положительно определённой. И, как следует из первого условия теоремы 1, квадратичная форма $V_\alpha(x,y)$ является единой функцией Ляпунова для систем с матрицами A_1 и A_2 при всех $0 \le \alpha \le 1$.

Пример 1.2.

1. Рассмотрим систему с матрицей

$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Рассмотрим систему с матрицей

$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Положив $C_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 47 \end{bmatrix}$.

Возьмем квадратичную форму в виде

$$V_\alpha(x,y) = \alpha x^T H_1 x + (1-\alpha) x^T H_2 x = x^T\left(\alpha H_1 + (1-\alpha) H_2\right) x\,,$$

т.е.

$$H_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 47 \end{bmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_1 имеет вид

$$A_1^T H_\alpha + H_\alpha A_1 = -\alpha\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} -6 & -14 \\ -14 & 170 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $C_{12} = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ -14 & 170 \end{bmatrix}$ не является положительно определённой. Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_2. Оно имеет вид

$$A_2^T H_\alpha + H_\alpha A_2 = -\alpha\begin{bmatrix} 16 & -50 \\ -50 & -36 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Матрица $C_{21} = \begin{bmatrix} 16 & -50 \\ -50 & -36 \end{bmatrix}$ является положительно определённой. И, как следует из третьего условия теоремы 1, квадратичная форма $V_\alpha(x,y)$ является единой функцией Ляпунова для систем с матрицами A_1 и A_2 при

$$\frac{\|C_{12}\|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} \le \alpha \le 1\,,$$

где $\|C_{12}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}^2} = 171$ и $\lambda_{\min}(C_1) = 6$.

Таким образом при $\frac{171}{177} \le \alpha \le 1$ функция Ляпунова $V_\alpha(x,y)$ будет общей для двух систем.

2. Системы диагонального вида

Рассмотрим системы диагонального вида

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i \,, \ \lambda_i > 0 \,, \ i = \overline{1,n} \,. \tag{2.1}$$

2.1. Очевидно, что любая квадратичная функция вида

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2 \,, \ h_{ii} > 0 \,, \ i = \overline{1,n}$$

будет функцией Ляпунова для систем этого вида. Действительно, ее полная производная в силу системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x,y) = -2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \lambda_i x_i^2$$

и, учитывая условия (2.1), является отрицательно определенной квадратичной формой.

2.2. Покажем, что квадратичная функция общего вида

$$V(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j \tag{2.2}$$

при наличии ненулевых недиагональных элементов не всегда может быть единой функцией для систем (2.1).

Действительно, как следует из критерия Гурвица [7], условия положительной определенности функции (2.2) имеют вид

$$h_{ii} > 0 \,, \ \Delta_i(H) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0 \,, \ \ i = \overline{1,n} \,, \tag{2.3}$$

Полная производная функции (2.2) в силу диагональной системы (2.1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x) = -x^T C x \,, \ C = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 h_{11} & (\lambda_1 + \lambda_2) h_{12} & \dots & (\lambda_1 + \lambda_n) h_{1n} \\ (\lambda_2 + \lambda_1) h_{12} & 2\lambda_2 h_{22} & \dots & (\lambda_2 + \lambda_n) h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ (\lambda_n + \lambda_1) h_{1n} & (\lambda_n + \lambda_2) h_{2n} & \dots & 2\lambda_n h_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Условиями отрицательной определенности полной производной являются

1) $h_{11}\lambda_1 > 0 \,, \ i = \overline{1,n}$,

2) $\Delta_i(C) = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 h_{11} & (\lambda_1 + \lambda_2) h_{12} & \dots & (\lambda_1 + \lambda_n) h_{1n} \\ (\lambda_2 + \lambda_1) h_{12} & 2\lambda_2 h_{22} & \dots & (\lambda_2 + \lambda_1) h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ (\lambda_n + \lambda_1) h_{1n} & (\lambda_n + \lambda_2) h_{2n} & \dots & 2\lambda_n h_{nn} \end{vmatrix} > 0 \,, \ i = \overline{1,n} \,.$

Первое условие выполняется всегда. Рассмотрим второе условие. Пусть $\lambda_1 = \lambda_0$ заданная величина. Определим, насколько может отличаться от λ_0 величина λ_2 , чтобы для систем (2.1) существовала единая функция Ляпунова. При фиксированном $\lambda = \lambda_0$ второй определитель второго условия имеет вид

$$\Delta_2 = 4h_{11}h_{22}\lambda_0\lambda_2 - h_{12}^2\lambda_0^2 - 2h_{12}^2\lambda_0\lambda_2 - h_{12}^2\lambda_2^2 > 0 \,.$$

Перепишем его в виде квадратичного неравенства

$$\lambda_2^2 - 2\frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)\lambda_2 + \lambda_0^2 < 0 \,. \tag{2.5}$$

Корни дифференциального уравнения

$$\lambda_2^2 - 2\frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)\lambda_2 + \lambda_0^2 = 0 \,.$$

имеют вид

$$\lambda_2^{1,2} = \frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right) \pm \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{h_{12}^4}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)^2 - \lambda_0^2} \,.$$

Подкоренное выражение

$$\Delta = \lambda_0^2\left[\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1\right] = \lambda_0^2\left[\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} - 1\right]\left[\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} + 1\right] = \ = 4\lambda_0^2\,\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\,h_{11}h_{22} > 0 \,.$$

Поэтому квадратное уравнение имеет действительные положительные корни. И неравенство (2.5) выполняется при

$$\lambda_2^2 < \lambda_2 < \lambda_2^1 \,,$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} + \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1}\right\}, \qquad \lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} - \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1}\right\}.$$

А поскольку

$$\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} > 1 \,,$$

то для существования единой функции Ляпунова вида (2.2) сотношение "допустимости первых двух собственных чисел" для существования единой функции Ляпунова имеет вид

$$\lambda_0 \left\{ \frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} - \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} \right)^2 - 1} \right\} < \lambda_2 < \lambda_0 \left\{ \frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} + \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} \right)^2 - 1} \right\}.$$

Остальные соотношения можно вычислить аналогично.

Список использованных источников

1. Wicks M. A., Peleties P., DeCarlo R.A. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems // Euro J Contr. – 1998 – V.4, № 2 – pp. 140-147
2. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектное управление динамическими системами. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 352 с.
3. О. С. Бичков, М. Г. Меркур'єв, О. Г. Павлюченко Чисельний метод дослідження стійкості лінійного гібридного автомату // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2(108), 2012 – с. 66 – 74.
4. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. Бобылев Н.А., Ильин А.Н., Коровин С.К., Фомичев В.В. Об устойчивости семейств динамических систем // Дифференциальные уравнения, Т.38, №4, С.447-452.
6. Пакшин П.В., Поздяев В.В. Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Успехи современного естествознания. – 2005. – № 2 – стр. 23-24
7. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
9. Сарыбеков Р.А. Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сибирский математический журнал, Т.18, №5, 1977. – С.1159-1167.
10. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, МВиССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.

Надійшла до редколегії 11.03.13

А. Сіренко, асп.,
Д. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ІСНУВАННЯ ЄДИНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

У роботі пропонуються достатні умови і алгоритм знаходження єдиної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем.
Ключові слова: гібридна система, функція Ляпунова, асимптотична стійкість.

Sirenko A., graduate,
Khusainov, D., Dr. Sc. phys. math. Professor
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kiev

ON THE EXISTENCE OF A SINGLE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR LINEAR SYSTEMS

The paper proposes the sufficient conditions and an algorithm for finding a common Lyapunov function for linear time-invariant systems.
Keywords: hybrid system, Lyapunov function, asymptotic stability.

УДК 517.929

А. Шатирко, канд. фіз.-мат. наук,
Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОПТИМІЗАЦІЇЙНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ

Розглядається задача дослідження стійкості в цілому нульового стану рівноваги нелінійних диференцыальнорызницевих систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі, тобто задача абсолютної стійкості систем з післядією. Умови стійкості отримані за допомогою методу функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної складової і інтеграла від нелінійності Для знаходження функції Ляпунова запропоновано оптимізаційний підхід. Відповідна функція Ляпунова названа оптимальною.

Ключові слова: система регулювання, система з запізнюванням, функція Ляпунова, умова Разуміхіна, абсолютна стійкість.

Вступ

При дослідженні динаміки систем різного вигляду досить часто використовується другий метод Ляпунова, причому в різних модифікаціях. Основні формулювання тверджень мають наступний зміст. Нехай існує функція з необхідними властивостями (неперервно диференційована, додатно визначена, повна похідна якої в силу системи є від'ємно визначеною). Тоді нульовий розв'язок системи стійкий (асимптотично стійкий). Доведено, що основні теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість мають необхідний і достатній характер. Тобто, якщо нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий, то відповідна функція завжди існує. Але центральною і нерозв'язаною проблемою є власне побудова цієї функції. По своєму сенсу "найкраща" функція Ляпунова є інтегралом системи (К.П.Персидський). Тому, в якомусь сенсі, знаходження найкращої функції Ляпунова подібно до задачі знаходження інтеграла системи. Проблема спрощується, якщо функція шукається в наперед параметрично заданому класі функцій, наприклад в класі квадратичних функцій. В цьому випадку задачу знаходження "найкращої" функції Ляпунова можна звести до задачі опуклого програмування.

Як наголошується багатьма авторами, вдало побудована функція Ляпунова дозволяє не тільки надати умову стійкості конкретної системи, але і отримати деякі якісні характеристики динаміки системи (величину перерегулювання, час перехідного процесу, різні інтегральні характеристики). Причому отримана оцінка істотно залежить від вибраної функції Ляпунова. Виникло поняття "оптимальної функції Ляпунова" [1-10].

Задача дослідження стійкості в цілому нульового стану рівноваги нелінійних систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі отримала назву абсолютної стійкості системи регулювання [11-14]. При дослідженні абсолютної стійкості отримали розвиток два підходи. Один з них, має назву "частотний метод" [14,15]. Іншим є метод функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної складової і інтеграла від нелінійності [16,17]. Спочатку розглядалися системи, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. Останнім часом отримав розвиток напрямок дослідження задач абсолютної стійкості систем, що описуються різницевими та диференціально-різницевими системами із запізнюванням і нейтрального типу [17,18].

1. Задачі оптимізації, що виникають при дослідженні задач абсолютної стійкості систем регулювання

Як правило умови стійкості розв'язків динамічних систем, що отримані за допомогою другого методу Ляпунова мають достатній зміст. А саме, шукається неперервно диференційована функція, яка задовольняє двум вимогам. По-перше, треба щоб вона була додатно визначеною, а по-друге, її повна похідна в силу системи була від'ємно визначено. Оскільки функція Ляпунова, в основному, будується у вигляді квадратичної форми, то умови знаковизначености функції і її похідної переходять в умови додатної визначеності деяких спеціальних матриць. Наведемо умови абсолютної стійкості систем регулювання, що описані звичайними диференціальними рівняннями, диференціально-різницевими рівняннями із запізнюванням та нейтрального типу, і отримані за допомогою другого методу Ляпунова.

1.1. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод функцій Ляпунова

Системи прямого регулювання. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf\big(\sigma(x(t))\big),\ \sigma(x(t)) = c^T x(t)\ . \qquad (1.1.1)$$

Тут $b, c, x(t) \in R^n$, A – квадратна асимптотично стійка матриця. Нелінійна функція одного аргументу $f(\sigma)$ розташована в області, що обмежена двома прямими, і знаходиться в першому і третьому чвертях координатної площини, тобто задовольняє умовам

$$0 < f(\sigma)\sigma < k\sigma^2\ . \qquad (1.1.2)$$

Система (1.1.1) часто називається системою "прямого регулювання". Асимптотична стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1.1.1) при довільній функції $f(\sigma)$, яка задовольняє умовам (1.1.2), отримала назву абсолютної стійкості.

Розглянемо використання другого методу Ляпунова при дослідженні абсолютної стійкості системи (1.1.1). Як правило, функція Ляпунова має вигляд суми квадратичної форми з додатно визначеною матрицею H і інтеграла від нелінійності

$$V(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\sigma)d\sigma\ ,\ \beta > 0\ . \qquad (1.1.3)$$

Функція Ляпунова (1.1.3) задовольняє двостороннім нерівностям

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \le V(x) \le \left[\lambda_{\max}(H) + \frac{1}{2}\beta k|c|^2\right]|x|^2\ , \qquad (1.1.4)$$

де $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ – екстремальні власні числа відповідних симетричних, додатно визначених матриць.

Позначимо

$$C_1(H,\beta,\nu) = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I\nu)c\right] \\ -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I\nu)c\right]^T & \frac{\nu}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix}. \qquad (1.1.5)$$

Мають місце наступні умови абсолютної стійкості, які отримані за допомогою функції Ляпунова (1.1.3) [19].

Теорема 1.1.1. Нехай існує додатно визначена матриця H і сталі $\beta > 0,\ \nu > 0$ такі, що матриця $C_1(H,\beta,\nu)$ є додатно визначеною. Тоді система прямого регулювання (1.1.1) є абсолютно стійкою.

Системи непрямого регулювання. Розглянемо так звані системи "непрямого регулювання". Вони характеризуються наявністю одного нульового власного числа матриці лінійного наближення і їх можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\sigma(t)),\quad \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \qquad (1.1.6)$$

Тут $b, c, x(t) \in R^n$, A – квадратна асимптотично стійка матриця, $\rho > 0$ скаляр. На відміну від системи (1.1.3), скалярна функція керування $f(\sigma)$ знаходиться в межах сектора, розташованого в першій і третій координатних четвертях, тобто задовольняє "більш жорсткiм" умовам

$$k_1\sigma^2 \le f(\sigma)\sigma \le k_2\sigma^2,\quad k_2 > k_1 > 0. \qquad (1.1.7)$$

При дослідженні абсолютної стійкості використовується функція Ляпунова змінних $(x,\sigma) \in R^{n+1}$ вигляду

$$V(x,\sigma) = x^T Hx + \beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma\ ,\ \beta > 0\ . \qquad (1.1.8)$$

Вона задовольняє двостороннім оцінам

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_1\sigma^2 \le V(x,\sigma) \le \lambda_{\max}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_2\sigma^2\ . \qquad (1.1.9)$$

Позначимо

$$C_2(H,\beta)=\begin{bmatrix} -A^T H - HA & Hb+\frac{1}{2}\beta c \\ b^T H+\frac{1}{2}\beta c^T & \rho \end{bmatrix}. \qquad (1.1.10)$$

Має місце наступний результат [19].

Теорема 1.1.2. Нехай існують додатно визначена матриця H і параметр $\beta>0$, при яких матриця $C_2(H,\beta)$ є додатно визначеною. Тоді система непрямого регулювання (1.6) є абсолютно стійкою.

Таким чином дослідження абсолютної стійкості систем регулювання без запізнювання зводиться до знаходження додатно визначеної матриці H і параметрів $\beta>0$, $\nu>0$, при яких відповідно матриці $C_1(H,\beta,\nu)$ і $C_2(H,\beta)$ є також додатно визначеними.

1.2. Системи різницевих рівнянь без запізнювання.

Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(k+1)=Ax(k)+bf(\sigma(k)),\ \sigma(k)=c^T x(k),\ x(k)\in R^n,\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (1.2.1)$$

нелінійна частина $f(\sigma)$ яких є неперервною функцією, що задовольняє умові сектора (1.1.2) і обмеженню

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi)d\xi \le L_1 f(\sigma)\Delta\sigma+\frac{1}{2}L_2(\Delta\sigma)^2. \qquad (1.2.2)$$

При дослідженні абсолютної стійкості будемо використовувати функцію (1.1.8)

$$V(x)=x^T Hx+\beta\int_0^{c^T x} f(\xi)d\xi,\ \beta>0.$$

Позначимо

$$C_{31}(H)=\begin{bmatrix} H-A^T HA & -A^T Hb \\ -b^T HA & -b^T Hb \end{bmatrix},\ C_{32}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_1(A-I)^T cc^T(A-I) & -\left[L_1+L_2(b^T c)\right](A-I)^T c \\ -\left[L_1+L_2(b^T c)\right]c^T(A-I) & -(b^T c)\left[2L_1+L_2(b^T c)\right] \end{bmatrix},\ C_{33}=\begin{bmatrix} \Theta & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

Θ – нульова матриця.

Можна довести наступне твердження.

Теорема 1.2.1. Нехай існує додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0$ та $\nu>0$, при яких матриця

$$C_3(H,\beta,\nu)=C_{31}(H)+\beta C_{32}+\nu C_{33}$$

буде також додатно визначеною. Тоді система (1.2.1) буде абсолютно стійкою [18].

1.3. Системи диференціальних рівнянь із запізнюванням. Метод функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна

При дослідженні стійкості розв'язків систем функціонально диференціальних рівнянь другим методом Ляпунова використовуються два підходи. Першим є метод скінченовимірних функцій Ляпунова з використнням додаткової умови Б.С.Разуміхіна при обчисленні повної похідної функції Ляпунова взвовж розв'язків систем. Другим є метод функціоналів Ляпунова-Красовського. Розглянемо метод функцій Ляпунова.

Системи прямого регулювання. Система "прямого регулювання" із запізнюванням має вигляд

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma(t)). \qquad (1.3.1)$$

Нелінійна функція $f(\sigma)$ задовольняє умові (1.1.2). Будемо брати функцію Ляпунова вигляду (1.1.3). При обчисленні її похідної в силу системи використовується умова Б.С.Разуміхіна. Вона має вигляд умови

$$V(x(s))<V(x(t)),\ s<t.$$

Для функцій Ляпунова (1.1.3) вона має вигляд

$$\lambda_{\min}(H)|x(s)|^2 \le V(x(s))<V(x(t))\le\left[\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2\right]|x(t)|^2.$$

Звідси

$$|x(s)|<\sqrt{\phi(H,\beta)}|x(t)|,\ \phi(H,\beta)=\frac{\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2}{\lambda_{\min}(H)}. \qquad (1.3.2)$$

Отримаємо дві умови абсолютної стійкості. Першою є умова абсолютної стійкості, рівномірна за запізнюванням, тобто для довільного $\tau>0$ [17].

Позначимо

$$C_4(H,\beta,\nu)=\begin{bmatrix} -(A+B)^T H-H(A+B) & -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta(A+B)^T+I\nu)c\right] \\ -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta(A+B)^T+I\nu)c\right]^T & \frac{\nu}{k}-\beta b^T c \end{bmatrix}, \qquad (1.3.3)$$

$$L_1(H,\beta,\nu)=\lambda_{\min}\left[C_3(H,\beta,\nu)\right]-\gamma|\beta|,\ \gamma=2|H|\left(1+\sqrt{\phi(\tilde{H})}\right),$$

$$\phi(\tilde{H})=\frac{\lambda_{\min}\left(H+\frac{1}{2}\beta kcc^T\right)}{\lambda_{\max}(H)}. \tag{1.3.4}$$

Теорема 1.3.1. Нехай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0,\ \nu>0$ такі, що виконується нерівність

$$L_1(H,\beta,\nu)>0. \tag{1.2.5}$$

Тоді система прямого регулювання з запізнюванням (1.2.1) є абсолютно стійкою при довільному запізнюванні $\tau>0$.

Другою є умова абсолютної стійкості, нерівномірна за запізнюванням $\tau>0$. Має місце наступний результат [17].

Теорема 1.3.2. Нехай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0,\ \nu>0$ такі, що матриця $C_4(H,\beta,\nu)$ є додатно визначеною. Тоді система прямого регулювання (1.3.1) є абсолютно стійкою при $\tau<\tau_0$, де

$$\tau_0=\frac{\lambda_{\min}\left[C_4(H,\beta,\nu)\right]}{2|HB|\left(|A|+|B|+k|\beta|c|\right)\sqrt{\phi(\tilde{H})}}. \tag{1.3.6}$$

Системи непрямого регулювання. Розглянемо систему непрямого регулювання з запізнюванням

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma(t)),\quad \dot{\sigma}(t)=c^Tx(t)-\rho f(\sigma(t)). \tag{1.3.5}$$

Позначимо

$$C_5(H,\beta)=\begin{bmatrix}-(A+B)^TH-H(A+B) & -\left(Hb+\frac{1}{2}c\right)\\ -\left(Hb+\frac{1}{2}c\right)^T & \rho\end{bmatrix},$$

$$L_2(H,\beta)=\lambda_{\min}\left[C_5(H,\beta)\right]-2|HB|\left(1+\sqrt{\phi(\bar{H})}\right)>0,\ \phi(\bar{H})=\frac{\lambda_{\min}(\bar{H})}{\lambda_{\max}(\bar{H})},$$

$$\lambda_{\min}(\bar{H})=\min\left\{\lambda_{\min}(H),\frac{1}{2}k_1\right\},\quad \lambda_{\max}(\bar{H})=\max\left\{\lambda_{\max}(H),\frac{1}{2}k_2\right\}. \tag{1.3.5}$$

Теорема 1.3.3. Нехай існує додатно визначена матриця H і параметр $\beta>0$ при яких виконується нерівність

$$L_2(H,\beta,\nu)>0. \tag{1.3.6}$$

Тогда система (1.3.5) абсолютно абсолютно стійка при довільному запізнюванні $\tau>0$.

Мають місце наступні умови абсолютної нерівномірної за запізнюванням стійкості.

Теорема 1.3.4. Нехай існує додатно визначена матриця H, така що $\lambda_{\min}\left(C_5[H,\beta]\right)>0.$ Тоді при $\tau<\tau_0,$ де

$$\tau_0=\frac{\lambda_{\min}\left[C_5(H,\beta)\right]}{2|HB|\left(|A|+|B|+k_2|b||c|\right)\sqrt{\phi(\overline{H})}} \tag{1.3.7}$$

система (1.3.5) буде абсолютно стійкою.

1.4. Системи диференціальних рівнянь із запізнюванням. Метод функціоналів Ляпунова-Красовського

В попередніх розділах при дослідженні абсолютної стійкості систем прямого та непрямого регулювання із заізнюванням використвувались скінченовимірні функції Ляпунова. Альтернативою є метод функціоналів Ляпунова-Красовського. В свій час на представницьких конференціях було висловлено думку, що оба методи рівноцінні і "мають право на існування". Розглянемо використання функціоналів Ляпунова-Красовського вигляду

$$V[x(t)]=x^T(t)Hx(t)+\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s)Gx(t+s)ds+\beta\int_{0}^{c^Tx(t)}f(\xi)d\xi.$$

Системи прямого регулювання. Позначимо

$$C_6(G,H,\beta,\nu)=\begin{bmatrix}-A^TH-HA-G & -HB & -\left[Hb+\frac{1}{2}\left(\beta A^T+I\nu\right)c\right]\\ -B^TH & G & -\frac{1}{2}\beta B^Tc\\ -\left[Hb+\frac{1}{2}\left(\beta A^T+I\nu\right)c\right]^T & -\frac{1}{2}\beta c^TB & \frac{\nu}{k}-\beta b^Tc\end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 1.4.1. Нехай існують додатно визначені матриці G та H й сталі $\beta>0$, $\nu>0$, при яких матриця $C_6(G,H,\beta,\nu)$ також додатно визначена. Тоді система прямого регулювання (1.3.1) з запізнюванням є абсолютно стійкою.

Системи непрямого регулювання. Далі розглянемо системи непрямого регулювання із запізнюванням (1.3.5)

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma(t))\\ \dot{\sigma}(t)=c^Tx(t)-\rho f(\sigma(t))\end{cases}$$

Для дослідження абсолютної стійкості системи будемо використовувати функціонал

$$V[x(t),\sigma(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta\int_{0}^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi\ ,\ \ \beta>0\ ,$$

що залежить від векторної функціїї $x(t)$ і функції $\sigma(t)$ з додатно визначеними матрицями H і G. Позначимо

$$C_7(G,H,\beta) = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -HB & -\left(Hb + \frac{1}{2}\beta c\right) \\ -B^T H & G & \theta \\ -\left(Hb+\frac{1}{2}\beta c\right)^T & \theta^T & \rho \end{bmatrix}, \qquad (1.4.3)$$

θ – нульовий вектор.

Теорема 1.4.2. Нехай існують додатно визначені матриці $G,\ H$ і параметр $\beta>0$, при яких матриця $C_7(G,H,\beta)$ також додатно визначена. Тоді система з запізнюванням є абсолютно стійкою.

1.5. Різницеві системи із запізнюванням

В работі [18] розглядались системи нелінійних різницевих рівнянь з одним запізнюванням

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + bf(\sigma(k)),\ x(k)\in R^n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (1.5.1)$$

Тут A, B сталі матриці, b вектор, $f(\sigma)$ нелінійна функція, що задовольняє "умові сектора" (1.1.2). Якщо для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням функціонали Ляпунова-Красовського беруться у вигляді суми квадратичної складової поточної координати та интегралу від квадратичної складової по проміжку запізнювання, то для систем різницевих рівнянь (1.5.1) інтеграл замінюється сумою квадратичних складових по передісторії. Функціонал береться у вигляді

$$V\left[x(k)\right] = x^T(k)Hx(k) + \sum_{j=0}^{m} x^T(k-j)Gx(k-j) + \beta\int_0^{\sigma(k)} f(\xi)d\xi\ ,\ \sigma(k) = c^T x(k)\ . \qquad (1.5.2)$$

Введемо наступні позначення

$$C_{81}(G,H) = \begin{bmatrix} H - A^T(H+G)A & -A^T(H+G)B & -A^T(H+G)b \\ -B^T(H+G)A & G - B^T(H+G)B & -B^T(H+G)b \\ -b^T(H+G)A & -b^T(H+G)B & -b^T(H+G)b \end{bmatrix},$$

$$C_{82} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_2(A-I)^T cc^T(A-I) & -L_2(A-I)^T cc^T B & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right](A-I)^T c \\ -L_2 B^T cc^T(A-I) & -L_2 B^T cc^T B & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]B^T c \\ -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(A-I) & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]c^T B & -\left[2L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]\left(b^T c\right) \end{bmatrix},$$

$$C_{83} = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta & -\frac{1}{2}c \\ \Theta & \Theta & \theta \\ -\frac{1}{2}c^T & \theta^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix}. \qquad (1.5.3)$$

Умови абсолютної стійкості мають вигляд

Теорема 1.5.1. Нехай функція $f(\sigma)$ задовольняє умові сектора (1.1.2) і нерівності

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi)d\xi \le L_1 f(\sigma)\Delta\sigma + \frac{1}{2}L_2(\Delta\sigma)^2\ , \qquad (1.5.4)$$

де L_1, L_2 деякі сталі. Якщо існують параметри $\beta>0$, $\nu>0$ і додатно визначені матриці H та G, при яких матриця

$$C_8(H,G,\beta,\nu) = C_{81}(H,G) + \beta C_{82} + \nu C_{83}$$

також додатно визначена, то система (1.5.1) абсолютно стійка при довільному запізнюванні m.

Тут Θ – нулевая матриця, θ – нулевой вектор. Задача отримання гарантованої умови стійкості в розглянутому класі функціоналів (1.5.2), тобто знаходження додатно визначених матриць G, H та параметрів β, ν, при яких матриця "максимально" додатно визначена співпадає з відповідними задачами для диференціальних систем.

2. Умови розв'язку задач оптимізації, які виникають при дослідженні проблем абсолютної стійкості

З наведеного вище видно, що знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання, які описані різного типу динамічними системами, зводиться до знаходження симетричних додатно визначених матриць і параметрів, лінійна комбінація яких також є додатно визначеною матрицею. Відомо, що довільна симетрична матриця є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли її мінімальне власне число є додатним. Для додатної визначеності функції Ляпунова достатньо додатної визначеності матриці H і умови $\beta>0$. Для додатної визначеності функціоналів Ляпунова-Красовського достатньо існування додатно визначених матриць H і G і параметрів $\beta>0$, $\nu>0$. Для від'ємної визначеності повної похідної достатньо, щоб відповідні матриці, що визначають повну похідну, також були додатно визначені.

2.1. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем прямого регулювання

Спочатку детально розглянемо системи прямого регулювання, що описані системою (1.1.1). Розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в заданому класі функцій Ляпунова (1.1.3), тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величин $\beta^0 \geq 0$, $\nu^0 \geq 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_1\left(H^0,\beta^0,\nu^0\right)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оптимізаційна задача розглядається на множині трійок $L=\left\{\left(H,\beta,\nu\right): H\geq 0, \beta\geq 0, \nu\geq 0\right\}$, де під $H \geq 0$ розумітимемо додатну напіввизначеність матриць H. Виберемо за норму

$$\left|(H,\beta,\nu)\right|=\sqrt{\left|H\right|^2+\beta^2+\nu^2}\ ,\ \left|H\right|=\lambda_{\max}\left(H\right).$$

Тут і надалі позначатимемо через $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – екстремальні власні числа відповідних симетричних матриць.

Як відомо, симетрична матриця $C_1\left(H,\beta,\nu\right)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]>0.$ І завдання знаходження гарантованої умови абсолютної стійкості системи (1.1.1) в класі функцій (1.1.3) можна розглядати як оптимізаційну задачу

$$\phi_1(H,\beta,\nu)\rightarrow \min_{(H,\beta,\nu)\in L} \tag{2.1.1}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}\left(H\right)\geq 0,\ \ \beta\geq 0\ \ \ h\geq 0,\ \ \phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]. \tag{2.1.2}$$

Неважко бачити, що множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.1.1), (2.1.2) матиме розв'язком трійку (H^0,β^0,ν^0), для якої буде виконуватись

$$\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)<0,$$

то система регулювання (1.1.1) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)>0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функцій вигляду (1.1.3) за рахунок вибору параметрів H, β не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з трійок (H,β,ν), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda^2_{\max}\left(H\right)+\beta^2+\nu^2\leq 1\,. \tag{2.1.3}$$

Лема 2.1.1. Задача оптимізації (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) має розв'язок.

Доведення. Множина додатно напіввизначених матриць є опуклим конусом. Тому L – є множиною трійок, що складаються з додатно напівпевної матриці H і двох невід'ємних чисел. Множина L являє собою опуклий конус з центром, що складається з трійки нульової матриці і двох нулів. А множина L_1 є перетином одиничної кулі і замкнутого конуса. І, отже, є компактним множиною. Функція $\phi_1(H,\beta,\nu),$ як власне число симетричної матриці, є неперервною функцією і, отже, за теоремою Вейерштраса на компакті досягає мінімального значення.

Розв'язок задач оптимізації значно спрощується, якщо функції і області їх визначення є опуклими. В цьому випадку вдається сформулювати необхідні і достатні умови оптимальності. Причому, якщо функції неперервно диференційовані, то умови формулюється в термінах похідних, інакше в термінах узагальнених похідних.

Лема 2.1.2. Функція $\phi_1(H,\beta,\nu)$ на множині L_1 є опуклою.

Доведення. Оскільки матриця $C_1(H,\beta,\nu)$ по змінним (H,β,ν) є лінійним оператором, а мінімальне власне число додатно визначеної матриці є увігнутою функцією, то для двох довільних трійок $\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)$, $\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)$, буде виконуватись

$$\begin{aligned}
&\phi_1(\xi H_1^1+\left(1-\xi\right)H_1^2,\xi\beta^1+\left(1-\xi\right)\beta^2,\xi\nu^1+\left(1-\xi\right)\nu^2)=\\
&\quad=-\lambda_{\min}\left[C_1\left(\xi H^1+\left(1-\xi\right)H^2,\xi\beta^1+\left(1-\xi\right)\beta^2,\xi\nu^1+\left(1-\xi\right)\nu^2\right)\right]=\\
&\qquad=-\lambda_{\min}\left[\xi C_1\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)+\left(1-\xi\right)C_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)\right]\leq-\xi\lambda_{\min}\left[C_1\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)\right]-\\
&\qquad\quad-\left(1-\xi\right)\lambda_{\min}\left[C_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)\right]=\ \xi\phi_1(H^1,\beta^1,\nu^1)+\left(1-\xi\right)\phi_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right),
\end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Таким чином задачі (2.1.1)-(2.1.3) є задачами опуклої оптимізації. Екстремальні власні числа симетричних додатно визначених матриць є кусково неперервно диференційованими функціями. Тому умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.1.1. Скалярним добутком двох трійок (H^1,β^1,ν^1) і (H^2,β^2,ν^2) назвемо величину

$$\left\langle(H^1,\beta^1,\nu^1),(H^2,\beta^2,\nu^2)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}h^1_{ij}h^2_{ij}+\beta^1\beta^2+\nu^1\nu^2\,, \tag{2.1.4}$$

де $H^1=\left\{h^1_{ij}\right\}$, $H^2=\left\{h^2_{ij}\right\}$, $h^1_{ij}=\overline{1,n}$, $h^2_{ij}=\overline{1,n}$.

Введемо наступні позначення. Через Δ_{ij} - будемо позначати симетричну $\left(n\times n\right)$ – матрицю, у якої на місці $\left(i,j\right)$ – го та $\left(j,i\right)$ – го елементів стоїть $0{,}5$, якщо $i\neq j$ і одиниця, якщо $i=j$. Через Θ будемо позначати квадратну

$(n\times n)$ – матрицю з нульовими елементами. Тоді довільні симетричні матриці $H^1=\{h_{ij}^1\}$, $H^2=\{h_{ij}^2\}$, $h_{ij}^1=\overline{1,n}$, $h_{ij}^2=\overline{1,n}$ можна представити у виді розкладу

$$H^1=\sum_{i,j}^{n}h_{ij}^1\Delta_{ij}\ ,\ H^2=\sum_{i,j}^{n}h_{ij}^2\Delta_{ij}\ .$$

Введемо наступні означення.

Означення 2.1.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ назвемо трійку (E_0,f_0,k_0), для якої, при будь-яких $(H,\beta,\nu)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge\left\langle(E_0,f_0,k_0,(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle. \tag{2.1.5}$$

Екстремальні власні числа симетричних додатно напіввизначених матриць є кусково неперервно диференційованими функціями. Тому в точці (H^0,β^0,ν^0) може існує не один вектор, а ціла множина, що задовольняє умові (2.1.5).

Означення 2.1.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,f,k\}$ функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ називатимемо множину трійок (E_0,f_0,k_0), що задовольняють нерівності (2.1.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]$$

у внутрішній точці. Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.1.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]$$

у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ є трійка (E_0,f_0,k_0), що складається з матриці E_0, скалярів f_0, k_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\{e_{ij}^0\}\ ,\ e_{ij}^0=-z_0^TC_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)z_0\ ,\quad i,j=\overline{1,n}\ ,$$
$$f_0=-z_0^TC_1\left(\Theta,1,0\right)z_0\ ,\ k_0=-z_0^TC_1\left(\Theta,0,1\right)z_0\ . \tag{2.1.6}$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

Доведення. Мінімальне власне число симетричної додатно напіввизначеної матриці дорівнює мінімальному значенню квадратичної форми з цією матрицею на одиничній сфері. Тому маємо наступне

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]+\lambda_{\min}\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\right]=$$
$$=-\min_{|z|=1}z^TC_1(H,\beta,\nu)z+\min_{|z|=1}z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z.$$

Нехай квадратична форма $z^TC_1(H,\beta,\nu)z$ приймає мінімальне значення на векторі $z=z_1$, а квадратична форма $z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z$ на векторі z_0. Тоді отримуємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=-z_1{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_1+z_0{}^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z_0=$$
$$=z_0{}^T\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)-C_1(H,\beta,\nu)\right]z_0+z_0{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_0-z_1{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_1.$$

Оскільки квадратична форма $z^TC_1(H,\beta,\nu)z$ приймає мінімальне значення на векторі z_1, то

$$z_0{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_0-z_1C_1(H,\beta,\nu)z_1\ge 0.$$

Звідси

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge z_0{}^T\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)-C_1(H,\beta,\nu)\right]z_0.$$

Через лінійність оператора $C(H,\beta,\nu)$, маємо

$$C_1(H,\beta,\nu)=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}C_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)+\beta C_1\left(\Theta,1,0\right)+\nu C_1\left(\Theta,0,1\right),$$

$$C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}^0C_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)+\beta^0C_1\left(\Theta,1,0\right)+\nu^0C_1\left(\Theta,0,1\right).$$

Тому має місце нерівність

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0-h_{ij}\right)z_0^TC_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)z_0\ +\left(\beta^0-\beta\right)z_0^TC_1\left(\Theta,1,0\right)z_0+\ +\left(\nu_0-\nu\right)z_0^TC_1\left(\Theta,0,1\right)z_0\ .$$

Використовуючи позначення (2.1.6), отримуємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}-h_{ij}^0)e_{ij}^0+\left(\beta-\beta^0\right)f_0+\left(\nu-\nu^0\right)k_0\ .$$

З означення 2.1.1 скалярного добутку випливає

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge\ \left\langle\left(E_0,f_0,k_0\right),\quad\left(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0\right)\right\rangle,$$

що і потрібно було довести.

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.1.1), (2.1.2),(2.1.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.1.2. Щоб функція $\phi_1(H,\beta,\nu)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H,\beta,v)\in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle (E_0,f_0,k_0),\quad (H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu_0)\right\rangle \geq 0\ . \tag{2.1.7}$$

Причому точка (H^0,β^0,ν^0) задовольняла граничній умові

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0\right)^2+\left(\beta^0\right)^2+\left(\nu^0\right)^2=1.$$

Необхідність. Як випливає з приведених вище тверджень, функція $\phi_0(H,\beta,\nu)$ є опуклою L_1 – опуклий конус додатного октанту $H>0$ $\beta>0$, $\nu>0$. Нехай виконується умова

$$\min_{(H,\beta,\nu)\in L_1}\left\{\phi_1(H,\beta,\nu)\right\}=\phi_1^*.$$

Розглянемо множину M четвірок

$$M=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ -\infty<\gamma<+\infty\right\}.$$

Побудуємо в цій множині дві підмножини

$$M_1=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ \gamma\geq\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1^*\right\},$$

$$M_2=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ \gamma<0\right\}.$$

З побудови виходить, що вони не мають загальних точок. Крім того, через опуклість функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$, підмножини M_1 і M_2 є опуклими. Тому існує гіперплощина

$$\left\langle (E,f,k),\ (H,\beta,\nu)\right\rangle+\varsigma\gamma=0$$

з нормалями (E,f,k) і ς, яка розділяє множини M_1 і M_2. І для довільних точок

$$(H,\beta,\nu,\gamma)\in M_1,\quad (H^*,\beta^*,\nu^*,\gamma^*)\in M_2$$

та екстремальної точки $(H^0,\beta^0,\nu^0,0)$ буде виконуватись співвідношення

$$\left\langle (E,f,k),\ (H,\beta,\nu)\right\rangle+\varsigma\gamma\geq\left\langle (E,f,k),\ (H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle\geq\ \left\langle (E,f,k),\left(H^*,\beta^*,\nu^*\right)\right\rangle+\varsigma\gamma^*\ . \tag{2.1.8}$$

Визначимо знак скаляра ς. Для цього розглянемо праву нерівність при умові $(H^*,\beta^*,\nu^*,\gamma^*)=(H^0,\beta^0,\nu^0,-1)$. Отримуємо

$$\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle\geq\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle-\varsigma.$$

Таким чином $\varsigma\geq 0.$ Покажемо, що $\varsigma>0.$ Нехай, від супротивного, $\varsigma=0.$ Тоді, поклавши в лівій частині нерівності (2.1.8)

$$(H,\beta,\nu)=(H^0,\beta^0,\nu^0)+\varepsilon(E,f,k),\ \varepsilon<0,\ \ \gamma>\phi_0(H,\beta,k)-\phi_0^*\ ,$$

отримуємо

$$\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)+\varepsilon(E,f,k)\right\rangle\geq\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle,$$

або

$$\varepsilon\left|(E,f,k)\right|^2\geq 0.$$

А оскільки $\varepsilon<0,$ то це можливо лише при $\left|(E,f,k)\right|=0.$ Таким чином, припущення невірне і $\varsigma>0.$ Розділимо нерівності (2.1.8) на $\varsigma>0$. Отримаємо

$$\left\langle\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H,\beta,\nu)\right\rangle+\gamma\geq\left\langle\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),\left(H^0,\beta^0,\nu^0\right)\right\rangle\geq\ \left\langle\frac{1}{\varsigma}(E,f,k)\left(H^*,\beta^*,\nu^*\right)\right\rangle+\gamma^* \tag{2.1.9}$$

Звідси випливає, що при довільному $\gamma,$ яке задовольняє умові

$$\gamma\geq\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1^*,$$

ліва частина нерівності (2.1.9) повинна задовольняти співвідношенню

$$\gamma\geq\left\langle -\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle .$$

Поклавши

$$\gamma=\phi_0\left(H,\beta,\nu\right)-\phi_0(H^0,\beta^0,\nu^0),$$

отримаємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq\left\langle -\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle.$$

Таким чином трійка $\left(-\frac{1}{\varsigma}E,-\frac{1}{\varsigma}f,-\frac{1}{\varsigma}k\right),$ як випливає з означення, є узагальненим градієнтом. І отримуємо, що

$$\left(-\frac{1}{\varsigma}E,-\frac{1}{\varsigma}f,-\frac{1}{\varsigma}k\right)=\left(E_0,f_0,k_0\right),$$

з елементами, визначеними в (2.1.6). Поклавши в правій частині нерівності (2.1.9) $\gamma^* = 0,$ отримуємо

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right), \left(H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0\right)\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\varsigma}\left(E, f, k\right), \left(H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0\right)\right\rangle,$$

що і доводить необхідність теореми.

Достатність. Нехай умови теореми виконуються і в точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in L_1$ існує узагальнений градієнт функції $\phi_1(H, \beta, \nu),$ при якому виконується нерівність

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right)\left(H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right)\right\rangle \geq 0.$$

Але тоді, як випливає з означення узагальненого градієнта, виконується

$$\phi_1(H, \beta, \nu) - \phi_1(H^0, \beta^0, \nu^0) \geq 0 ,$$

тобто

$$\phi_1(H, \beta, \nu) \geq \phi_1(H_0, \beta^0, \nu^0),$$

і точка (H^0, β^0, ν^0) є точкою мінімуму для функції $\phi_1(H, \beta, \nu).$

Належність точки (H^0, β^0, ν^0) границі сфери виходить з однорідності функції $\phi_1(H, \beta, \nu)$ по змінній (H, β, ν) і виду області $L_{1^{\cdot}}$.

Теорема доведена.

Таким чином, умови абсолютної стійкості системи (1.1.1) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.1.3. Нехай H^0 - додатно визначена матриця, а β^0, ν^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right), \left(H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right)\right\rangle \geq 0 , \quad \lambda^2_{\max}\left(H^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1 .$$

Тут

$$E_0 = \left\{e^0_{ij}\right\}, \quad e^0_{ij} = z_0^T C_1\left(\Delta_{ij}, 0, 0\right) z_0$$
$$f_0 = -z_0^T C_1\left(\Theta, 1, 0\right) z_0 , \; k_0 = -z_0^T C_1\left(\Theta, 0, 1\right) z_0 ,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_1(H^0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.1.1) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_1(H^0, \beta^0, \nu^0)$ вигляду (1.1.5) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_1(H^0, \beta^0, \nu^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функції Ляпунова вигляду (1.1.3) отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функція

$$V_0\left(x\right) = x^T(t) H^0 x\left(t\right) + \beta^0 \int\limits_0^{\sigma(x)} f\left(\sigma\right) d\sigma$$

є оптимальною в даному класі функцій.

2.2. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання

В цьому розділі розглянемо системи непрямого регулювання, що описані системою (1.1.6). Розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в класі функцій Ляпунова (1.1.8), тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величини $\beta^0 \geq 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_1\left(H^0, \beta^0\right)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оскільки задача майже повністю співпадає з розглянутою в попередньому розділі, будемо приводити лише твердження.

Оптимізаційна задача розглядається на множині пар $L = \left\{\left(H, \beta\right) : H \geq 0, \beta \geq 0\right\}$. За норму вибирається

$$\left|(H, \beta)\right| = \sqrt{\left|H\right|^2 + \beta^2} , \; \left|H\right| = \lambda_{\max}\left(H\right).$$

Симетрична матриця $C_2\left(H, \beta\right)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}\left[C_2(H, \beta)\right] > 0.$ І розглядається оптимізаційна задача

$$\phi_2(H, \beta) \to \min_{(H, \beta) \in L} \tag{2.2.1}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}\left(H\right) \geq 0, \quad \beta \geq 0 , \phi_2(H, \beta) = -\lambda_{\min}\left[C_2(H, \beta)\right] . \tag{2.2.2}$$

Множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.2.1), (2.2.2) матиме розв'язком пару (H^0, β^0), для якої

$$\phi_2(H^0, \beta^0) < 0,$$

то система регулювання (1.1.6) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_2(H^0, \beta^0) > 0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функцій вигляду (1.1.8) за рахунок вибору параметрів H, β не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з пар (H,β), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda_{\max}^2(H)+\beta^2 \le 1 . \tag{2.2.3}$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 2.2.1. Задача оптимізації (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) має розв'язок.

Лема 2.2.2. Функція $\phi_2(H,\beta)$ на множині L_1 є опуклою.

Таким чином задачі (2.2.1)-(2.2.2) є задачами опуклої оптимізації. Умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.2.1. Скалярним добутком двох пар (H^1,β^1) і (H^2,β^2) назвемо величину

$$\left\langle (H^1,\beta^1),(H^2,\beta^2)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^1 h_{ij}^2 + \beta^1\beta^2 , \tag{2.2.4}$$

де $H^1=\left\{h_{ij}^1\right\}$, $H^2=\left\{h_{ij}^2\right\}$, $h_{ij}^1=\overline{1,n}$, $h_{ij}^2=\overline{1,n}$.

Введемо наступні означення.

Означення 2.2.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_2(H,\beta)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ назвемо пару (E_0,f_0), для якої, при будь-яких $(H,\beta)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_2(H,\beta)-\phi_2(H^0,\beta^0) \ge \left\langle (E_0,f_0),(H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle. \tag{2.2.5}$$

Означення 2.2.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,f\}$ функції $\phi_2(H,\beta)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ називатимемо множину пар (E_0,f_0), що задовольняють нерівності (2.2.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_2(H,\beta) = -\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta)\right]$$

у внутрішній точці. Маэмо наступне твердження.

Теорема 2.2.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_2(H,\beta) = -\lambda_{\min}\left[C_2(H,\beta)\right]$$

у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ є пара (E_0,f_0), що складається з матриці E_0 і скаляру f_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\left\{e_{ij}^0\right\},\ e_{ij}^0=-z_0^T C_1(\Delta_{ij},0)z_0,\ \ i,j=\overline{1,n},\ f_0=-z_0^T C_1(\Theta,1)z_0 . \tag{2.2.6}$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_2(H_0,\beta^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.2.1), (2.2.2),(2.2.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.2.2. Щоб функція $\phi_2(H,\beta)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H,\beta)\in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle (E_0,f_0),\ \ (H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle \ge 0 . \tag{2.2.7}$$

Причому точка (H^0,β^0) задовольняла граничній умові

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0\right)^2+\left(\beta^0\right)^2=1.$$

Таким чином, умови абсолютної стійкості системи (1.1.6) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.2.3. Нехай H^0 - додатно визначена матриця, β^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle (E_0,f_0),(H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle \ge 0 ,\quad \lambda_{\max}^2\left(H^0\right)+\left(\beta^0\right)^2=1 .$$

Тут

$$E_0=\left\{e_{ij}^0\right\},\ e_{ij}^0=z_0^T C_1(\Delta_{ij},0)z_0,\ \ f_0=-z_0^T C_1(\Theta,1)z_0 ,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_2(H^0,\beta^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.1.6) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_1(H^0,\beta^0)$ вигляду (1.1.10) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_2(H^0,\beta^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функції Ляпунова вигляду (1.1.8) отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функція

$$V_0(x,\sigma)=x^T(t)H^0x(t)+\beta^0\int_0^\sigma f(\xi)d\xi$$

є оптимальною в даному класі функцій.

2.3. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання з запізнюванням методом функцій Ляпунова

При дослідженні абсолютної стійкості систем прямого (1.3.1) і непрямого (1.3.5) регулювання методом функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна функції Ляпунова мають той же вигляд, що і для систем без запізнювання. Повні похідні в силу системи визначаються квадратичними формами з матрицями $C_3(H,\beta,\nu)$ і $C_4(H,\beta)$, які трошки відрізняються від відповідних матриць $C_1(H,\beta,\nu)$ і $C_2(H,\beta)$. Тому постановки задач оптимізації і методи їх розв'язку повністю співпадають з запропонованими для систем без запізнювання в попередніх двох розділах.

2.4. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання з запізнюванням методом функціоналів Ляпунова-Красовського

В цьому розділі розглянемо систему прямого регулювання з запізнюванням, що описана в (1.3.1). На відміну від попереднього, розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в класі функціоналів Ляпунова-Красовського, тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величини $\beta^0 \geq 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_6(G,H,\beta,\nu)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оскільки задача схожа з розглянутою в першому розділі, будемо приводити лише твердження.

Системи прямого регулювання. Оптимізаційна задача розглядається на множині четвірок $L=\{(H,G,\beta,\nu): H \geq 0, G>0, \beta \geq 0, \nu>0\}$. За норму вибирається

$$|(H,G,\beta,\nu)|=\sqrt{|H|^2+|G|^2+\beta^2+\nu^2}, \quad |H|=\lambda_{\max}(H), \quad |G|=\lambda_{\max}(G).$$

Симетрична матриця $C_6(H,G,\beta,\nu)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}[C_2(H,G,\beta,\nu)]>0.$ І розглядається оптимізаційну задачу

$$\phi_6(H,G,\beta,\nu) \to \min_{(H,\beta)\in L} \tag{2.4.1}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}(H) \geq 0, \quad \beta \geq 0, \qquad \phi_6(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]. \tag{2.4.2}$$

Множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.4.1), (2.4.2) матиме розв'язком пару (H^0,G^0,β^0,ν^0), для якої

$$\phi_6(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)<0,$$

то система регулювання (1.3.5) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_6(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)>0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функціоналів за рахунок вибору параметрів H, G, β, ν не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з четвірок (H,G,β,ν), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda^2_{\max}(H)+\lambda^2_{\max}(G)+\beta^2+\nu^2 \leq 1. \tag{2.4.3}$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 2.4.1. Завдання оптимізації (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) має розв'язок.

Лема 2.4.2. Функція $\phi_0(H,G,\beta,\nu)$ на множині L_1 є опуклою.

Таким чином задачі (2.4.1)-(2.4.2) є задачами опуклої оптимізації. Умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.4.1. Скалярним добутком двох четвірок (H^1,G^1,β^1,ν^1) і (H^2,G_2,β^2,ν^2) назвемо величину

$$\left\langle (H^1,\beta^1),(H^2,\beta^2)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} h^1_{ij}h^2_{ij}+\sum_{i,j=1}^{n} g^1_{ij}g^2_{ij}+\beta^1\beta^2+\nu^1\nu^2, \tag{2.4.4}$$

де $H^1=\{h^1_{ij}\}$, $H^2=\{h^2_{ij}\}$, $G^1=\{g^1_{ij}\}$, $G^2=\{g^2_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Введемо наступні означення.

Означення 2.4.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_6(H,G,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ назвемо четвірку (E_0,K_0,f_0,l_0), для якої, при будь-яких $(H,G,\beta,\nu)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_0(H,G,\beta,\nu)-\phi_0(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0) \geq \left\langle (E_0,K_0,f_0,l_0),(H-H^0,G-G^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle. \tag{2.4.5}$$

Означення 2.4.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,K,f,l\}$ функції $\phi_0(H,G,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ називатимемо множину четвірок (E_0,K_0,f_0,l_0), що задовольняють нерівності (2.4.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_6(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]$$

у внутрішній точці. Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.4.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_0(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]$$

у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ є четвірка (E_0,K_0,f_0,l_0), що складається з двох матриць E_0, K_0 і двох скалярів f_0 l_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\{e^0_{ij}\}, \ e^0_{ij}=-z_0^T C_1(\Delta_{ij},\Theta,0,0)z_0, \quad K_0=\{k^0_{ij}\}, \ k^0_{ij}=-z_0^T C_1(\Theta,\Delta_{ij},0,0)z_0, \ i,j=\overline{1,n},$$

$$f_0=-z_0^T C_1(\Theta,\Theta,1,0)z_0, \quad k_0=-z_0^T C_1(\Theta,\Theta,0,1)z_0. \tag{2.4.6}$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_6(H_0, G_0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.4.1), (2.4.2),(2.4.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.4.2. Щоб функція $\phi_0(H,\beta)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0) \in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H, G, \beta, \nu) \in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle \left(E_0, K_0, f_0, l_0\right), \left(H - H^0, G - G^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right) \right\rangle \ge 0 \qquad (2.4.7)$$

Причому точка $(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ задовольняла граничній умові

$$\lambda_{\max}^2\left(H^0\right) + \lambda_{\max}^2\left(G^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1.$$

Таим чином, умови абсолютної стійкості системи (1.3.1) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.4.4. Нехай H^0, G^0 - додатно визначені матриці, β^0, ν^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle \left(E_0, K_0, f_0, l_0\right), \left(H - H^0, G - G_0, \beta - \beta^0, \nu - \nu_0\right) \right\rangle \ge 0, \quad \lambda_{\max}^2\left(H^0\right) + \lambda_{\max}^2\left(G^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1.$$

Тут

$$E_0 = \left\{e_{ij}^0\right\},\ e_{ij}^0 = z_0^T C_6\left(\Delta_{ij}, \Theta, 0, 0\right) z_0,\ K_0 = \left\{k_{ij}^0\right\},\ k_{ij}^0 = z_0^T C_6\left(\Theta, \Delta_{ij}, 0, 0\right) z_0,\ f_0 = -z_0^T C_6\left(\Theta, \Theta, 1, 0\right) z_0,\ l_0 = -z_0^T C_6\left(\Theta, \Theta, 0, 1\right) z_0,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_6(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.3.1) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_6(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ вигляду (1.4.2) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_2(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функціонал

$$V_0\left[x(t)\right] = x^T(t) H^0 x(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T\left(t+s\right) G x\left(t+s\right) ds + \beta^0 \int_{0}^{c^Y x(t)} f\left(\xi\right) d\xi$$

є оптимальним в даному класі функціоналів.

Системи непрямого регулювання. Формулювання всіх основних результатів знаходження оптимальних функціоналів Ляпунова-Красовського щодо систем непрямого регулювання зберігається в тій же самій формі. Лише оптимізаційна задача розглядається на множині трійок $L = \left\{\left(H, G, \beta\right) : H \ge 0, G > 0, \beta \ge 0\right\}$. За норму вибирається

$$\left|(H, G, \beta)\right| = \sqrt{\left|H\right|^2 + \left|G\right|^2 + \beta^2},\ \left|H\right| = \lambda_{\max}\left(H\right),\ \left|G\right| = \lambda_{\max}\left(G\right).$$

І розглядається оптимізаційна задача

$$\phi_7(H, G, \beta) \to \min_{(H,G,\beta) \in L} \qquad (2.4.8)$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}\left(H\right) \ge 0,\ \ \lambda_{\min}\left(G\right) \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \ \phi_6(H, G, \beta) = -\lambda_{\min}\left[C_7(H, G, \beta)\right]. \qquad (2.4.9)$$

2.5. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості різницевих систем із запізнюванням

При дослідженні абсолютної стійкості різницевих систем з запізнюванням методом функціоналів Ляпунова-Красовського функціонал та його похідні залежать від додатно визначених матриць H, G і параметрів β, ν. Тому умови абсолютної стійкості визначаються квадратичною формою з матрицею $C_8\left(H, G, \beta, \nu\right)$, яка трошки відрізняються від відповідної матриці $C_6\left(H, G, \beta, \nu\right)$. Але постановки задач оптимізації і методи їх розв'язку повністю співпадають з запропонованими для систем прямого регулювання із запізнюванням.

Список використаних джерел

1. Хусаинов Д.Я. Об оптимизации оценивания времени переходного процесса в линейных системах с использованием функции Ляпунова. – В сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления, в.69. – К.: Изд.-во Института кибернетики АН УССР, 1986. – С.33-37.
2. Жуйкова А.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки области изменения параметров в системах непрямого регулирования // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.6. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.93-97.
3. Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки времени переходного процесса в задачах регулирования.- В сб.: Вычислительная и прикладная математика, в.61. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.106-112.
4. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Оптимизация оценок начальных возмущений в линейных стохастических системах.- Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.7. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1988. – С.40-45.
5. Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 1992. – С.27-33.
6. Бычков А.С., Лобок А.П., Нечаева И.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок устойчивости систем стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ, №4, 1992. – С.38-43.
7. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптмизационный метод исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием // Кибернетика и системный анализ, N4, 1996. – С.88-93.
8. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод построения функционалов Ляпунова-Красовского в стационарных системах с запаздыванием. – В сб. Вычислительная и прикладная математика, в.80, 1996. – С.142-151.
9. Хусаинов Д.Я., Стадник О.И., Давыдов В.Ф. Оптимизация оценок характеристик динамических систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики, N1 (84), 1999, – С.128-136.
10. Ивохин Е.В., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок характеристик динамических систем. – Український математичний конгрес-2001. Динамічні системи. Секція 2. Тези доповідей, Київ, 2001. – С.8.
11. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с.
12. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с.

13. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36.
14. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с.
15. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.
16. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущенияз параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.
17. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.
18. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Абсолютная устойчивость разностных систем с запаздыванием //Обчислювальна та прикладна математика, в.2, 2009.
19. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
19. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., Наука, 1988. – 552 с.
20. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М., Наука, 1975. – 320 с.
21. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, Изд.-во МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.
22. Шатирко А.В. Про один оптимізаційний підхід дослідження задач абсолютної стійкості // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2010. – С.197-204.

Надійшла до редколегії 09.07.13

А. Шатырко, канд. физ.-мат. наук,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМИЗАЦИИЙНИ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача исследования устойчивости в целом нулевого положения равновесия нелинейных дифференциально-разностных систем регулирования с нелинейностью, которая находится в заданном секторе, т.е. задача абсолютной устойчивости систем с последействием. Условия устойчивости получены с использованием метода функций Ляпунова з функцией вида суммы квадратичной составляющей и итеграла от нелинейности Для нахождения функции Ляпунова предложен оптимизационный подход. Соответствующая функция Ляпунова названа оптимальной.

Ключевые слова: истема регулирования, система с запаздыванием, функция Ляпунова, условие Разумихина, абсолютная устойчивость.

Shatyrko A., Ph.D. Physics and Mathematics,
Khusainov, Denys Ya., Dr. Sc. phys. math. Professor,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

OPTYMIZATSIYIYNI METHODS OF ABSOLUTE STABILITY CONTROL SYSTEM

The problem of studying the stability of the whole of the zero equilibrium position of non-linear difference-differential control systems with non-linearity, which is located in a given sector, ie the problem of absolute stability of systems with aftereffect. The conditions of stability are obtained using the method of Lyapunov functions h function of the type and amount of the quadratic component of the non-linearity of itegrala To find the Lyapunov function proposed optimization approach. The corresponding Lyapunov function is called optimal.

Keywords: regulatory system with delay, Lyapunov function, the condition Razumikhina, absolute stability.

УДК 004.42:510.69

С. Шкільняк, д-р фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

СИЛЬНИЙ ЛОГІЧНИЙ НАСЛІДОК В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ ТА СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЙОГО ФОРМАЛІЗАЦІЇ

Досліджено відношення сильного логічного наслідку в чистих першопорядкових логіках часткових однозначних квазіарних предикатів. Для цього відношення побудовано секвенційні числення та доведено їх коректність і повноту. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних.

Ключові слова: Коректність, повнота, QSLR-числення, секвенційні числення, секвенційне дерева.

Основоположним поняттям логіки є поняття логічного слідування. В роботі [1] запропоновано уточнення логічного слідування в композиційно-номінативних логіках квазіарних предикатів за допомогою відношень логічного наслідку. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул можна ввести 5 таких "природних" відношень: "істиннісний" $|=_T$, "хибнісний" $|=_F$, "сильний" $|=_{TF}$, "неспростовнісний" $|=_{Cl}$, "насичений" $|=_{Cm}$ логічні наслідки. Для першопорядкових логік квазіарних предикатів зазначені відношення досліджено в [1–3], для пропозиційної логіки такі відношення розглядались в [4]. Для випадку однозначних часткових предикатів (некласична семантика) немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|=_{Cm}$, тому можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$. Традиційним для логік однозначних предикатів є "неспростовнісний" логічний наслідок, його називають також некласичним. Відношення $|=_{Cl}$ розглядається, зокрема, в роботах [5–7], для цього відношення, поширеного на множини формул, збудовано низку числень секвенційного типу. Це зроблено як для логік еквітонних [5], так і для загального випадку логік однозначних квазіарних предикатів [6, 7]. Відношення $|=_T$ та $|=_F$ в певному розумінні однобічні та не зовсім адекватні інтуїтивному розумінню логічного слідування в логіках однозначних предикатів, тому основну увагу приділимо відношенню $|=_{TF}$ сильного логічного наслідку.

Метою даної роботи є побудова числень секвенційного типу, які формалізують відношення $|=_{TF}$ для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти. При побудові числень використовуємо спеціальні предикати (див. [7, 8]), які визначають наявність значення для предметних імен. Подібні числення для формалізації відношення $|=_{Cl}$ запропоновано в [7], дана робота є безпосереднім її продовженням.

Будемо дотримуватись позначень роботи [7]. Необхідні для розуміння даної роботи поняття і визначення наведені в [7], тому тут лише нагадаємо основні з них.

Областю істинності та областю хибності квазіарного предиката $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T\} \text{ та } \boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F\}.$$

В роботі розглядаємо чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних преликатів (ЧКНЛ). Базовими композиціями ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists \boldsymbol{x}$.

Предикат, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо Φ_A.

Введемо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z. Предикати εz задаємо так:

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \in asn(d)\}$; $\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \notin asn(d)\}$.

Такі предикати εz назвемо індикаторами наявності значення для предметного імені (змінної).

Далі в роботі розглядатимемо ЧКНЛ, мови яких розширені множиною $\{\varepsilon x \mid x \in V\}$ символів предикатів-індикаторів εx. Такі розширені логіки названі [7] ε-ЧКНЛ. Базовими композиціями ε-ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists \boldsymbol{x}$, εx.

Відношення логічного наслідку. Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

1) "Істиннісний" наслідок ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_T$: $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_T\; \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2) "Хибнісний" наслідок ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_F$: $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_F\; \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3) "Сильний", або "строгий" наслідок ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{TF}$: $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{TF}\; \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

4) "Неспростовнісний", або "неокласичний" наслідок ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{Cl}$: $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{Cl}\; \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного наслідку $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi \models_* \Psi \Leftrightarrow \Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_*\; \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Зрозуміло, що $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{TF}\; \Psi \Leftrightarrow \Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_T\; \Psi$ та $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_F\; \Psi$; $\Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_T \Psi$ та $\Phi \models_F \Psi$.

Неформально кажучи, $\Phi \models_{TF} \Psi$ означає, що при переході від Φ до Ψ завжди не зменшується "істинність" та не збільшується, "хибність", що відповідає інтуїтивному розумінню логічного слідування. Водночас при $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_T\; \Psi$ можливе одночасне збільшення як "істинності", так і "хибності", а при $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_F\; \Psi$ можливе одночасне зменшення як "хибності", так і "істинності", що видається не зовсім адекватним.

Зауважимо, що в найзагальнішому випадку логік неоднозначних часткових предикатів маємо $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_{TF} \Psi$ та немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $\models_{Cm}$ чи відношенні $\models_{Cl}$ (див. [1]), тому в цьому випадку маємо єдине природне змістовне відношення логічного наслідку $\models_{TF}$.

Відношення еквівалентності в моделі мови $\boldsymbol{A}$ ${}_{A}{\sim}_T$, ${}_{A}{\sim}_F$, ${}_{A}{\sim}_{TF}$, ${}_{A}{\sim}_{Cl}$ та відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\sim}_*\; \Psi$, якщо $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_*\; \Psi$ та $\Psi \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_*\; \Phi$; $\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \models_* \Psi$ та $\Psi \models_* \Phi$.

Відношення $\sim_{Cl}$ – це традиційне відношення еквівалентності в логіках однозначних часткових предикатів (див. [5]), воно зазвичай позначається $\sim$.

Відношення сильної еквівалентності $\sim_{TF}$ називають також відношенням строгої еквівалентності.

Для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо: $\Phi \;{}_{A}{\sim}_{TF}\; \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тобто $\Phi_A = \Psi_A$. Тому $\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

Відношення логічного наслідку та еквівалентності мають [1–3] вельми специфічні властивості. Зокрема, для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ закон контрапозиції невірний, для $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності. Це веде до розщеплення властивостей для $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, які треба записувати для формул та їх заперечень. Маємо також:

– $\Phi \,\&\, (\Phi \to \Psi) \models_T \Psi$, $\Phi \,\&\, (\Phi \to \Psi) \not\models_F \Psi$; $\Phi \not\models_T \Psi \vee \Phi \& \neg\Psi$; $\Phi \models_F \Psi \vee \Phi \& \neg\Psi$;

– $\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi \sim_T \Phi$ та невірно $\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi \sim_F \Phi$; $\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi) \sim_F \Phi$ та невірно $\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi) \sim_T \Phi$.

Поширимо відношення логічного наслідку на довільні множини формул. Нехай Γ та Δ – множини формул.

Δ є *Cl*-наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}\; \Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

Δ є *TF*-наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{TF}\; \Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$ та $\bigcap\limits_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$.

Δ є *Cl*-логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \models_{Cl} \Delta$), якщо $\Gamma \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{Cl}\; \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Δ є *TF*-логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \models_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma \;{}_{\boldsymbol{A}}{\models}_{TF}\; \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Подібним чином вводимо відношення ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_T$, ${}_{\boldsymbol{A}}{\models}_F$, та $\models_T$, $\models_F$.

Для $\sim_{TF}$ та $\sim_{Cl}$ справджується теорема заміни еквівалентних (зауважимо, що для $\sim_T$ та $\sim_F$ така теорема невірна).

Теорема 1 1) *Нехай* $\Phi \sim_{TF} \Psi$; *тоді* $\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{TF} \Delta$ *та* $\Gamma \models_{TF} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi$;

2) *нехай* $\Phi \sim_{Cl} \Psi$; *тоді* $\Phi, \Gamma \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{Cl} \Delta$ *та* $\Gamma \models_{Cl} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{Cl} \Delta, \Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $\models_{TF}$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models_{TF} \Delta \Rightarrow \Lambda \models_{TF} \Sigma$.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для однозначних предикатів маємо також властивість *CLR*:

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

$\neg\neg_{\vdash}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \Phi$.

$\vee_{\vdash}$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_{\vdash}$) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\Psi$.

$\mathrm{RT}_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\mathrm{RT}_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

$\neg\mathrm{RT}_{\vdash}$) $\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg\mathrm{RT}_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

$\Phi\mathrm{N}_{\vdash}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\Phi\mathrm{N}_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ (тут $y \in \nu(\Phi)$).

$\neg\Phi N_{\vdash}$) $\neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$\neg\Phi N_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$ (тут $y\in\nu(\Phi)$.

$RR_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$RR_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)$.

$\neg RR_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$\neg RR_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)$.

$R\neg_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$R\neg_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

$\neg R\neg_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$\neg R\neg_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$.

$R\vee_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$R\vee_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)$.

$\neg R\vee_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$\neg R\vee_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$ та $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)$.

$R\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$R\exists R_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\exists x\Phi,\models\Delta$ та $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi$.

$\neg R\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\neg\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar u}_{\bar v}(\neg\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$;

$\neg R\exists R_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\neg\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\neg\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta$ та $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg\exists x\Phi$.

Наведемо тепер властивості, пов'язані з елімінацією кванторів (зокрема, елімінації кванторів під реномінацією).

$\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon z$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$).

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$.

$\neg\exists R_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(\Phi),\varepsilon z$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$).

$\neg\exists_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg\exists x\Phi\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\neg R^{x}_{z}(\Phi),\varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$.

$\exists Rf_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(\Phi),\varepsilon z$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$).

$\exists f_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi,R^{x}_{z}(\Phi),\varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$).

$\neg\exists Rf_{\vdash}$) $\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon z$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$).

$\neg\exists f_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\neg\exists x\Phi,\neg R^{x}_{z}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$).

$\exists Rv_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\varepsilon y\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi),\varepsilon y$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$).

$\exists v_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi,\varepsilon y\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi,R^{x}_{y}(\Phi),\varepsilon y$.

$\neg\exists Rv_{\vdash}$) $\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y\Leftrightarrow\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$).

$\neg\exists v_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y\Leftrightarrow\neg\exists x\Phi,\neg R^{x}_{y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y$.

$\exists Rd_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\varepsilon y,\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma\models_{TF}\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi),\varepsilon y$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$).

$\exists d_{\dashv}$) $\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi\Leftrightarrow\varepsilon y,\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi$ та $\Gamma\models_{TF}\Delta,\exists x\Phi,R^{x}_{y}(\Phi),\varepsilon y$.

$\neg\exists Rd_{\vdash}$) $\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\varepsilon y,\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta$ та $\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y$ (за умови $x\notin\{\bar u\}$).

$\neg\exists d_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta\Leftrightarrow\varepsilon y,\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_{TF}\Delta$ та $\neg\exists x\Phi,\neg R^{x}_{y}(\Phi),\Gamma\models_{TF}\Delta,\varepsilon y$.

Секвенційні числення для формалізації відношення $\models_{TF}$. Числення секвенційного типу, які формалізують відношення $\models_{TF}$ сильного логічного наслідку для множин формул ЧКНЛ однозначних квазіарних предикатів, будуємо на основі наведених вище властивостей цього відношення.

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих спеціальними символами $\vdash$ та $\dashv$. Секвенції позначаємо як $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, або, не деталізуючи, у вигляді Σ. Формули секвенції, відмічені символом $\vdash$, називають *T*-формулами, а відмічені символом $\dashv$, – *F*-формулами. Секвенційне числення будуємо так, що $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow\Gamma\models_{TF}\Delta$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає, що $\Gamma\models_{TF}\Delta$.

Базова умова замкненості секвенції:

C) Σ замкнена, якщо існує формула Φ така: $\vdash\Phi\in\Sigma$ та $\dashv\Phi\in\Sigma$.

Додаткові умови замкненості: CLR та *unv*-замкненість. Умова CLR індукована властивістю *CLR* відношення $\models_{TF}$:

CLR) Σ замкнена, якщо існують формули Φ та Ψ: $\vdash\Phi\in\Sigma$, $\vdash\neg\Phi\in\Sigma$, $\dashv\Psi\in\Sigma$, $\dashv\neg\Psi\in\Sigma$.

Секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un* назвемо *unv-замкненою*, якщо існує пара *unv*-еквівалентних відносно *Un R*-формул Φ та Ψ таких, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi\in\Delta$ (деталі див. у [7]).

Множина *unv*-змінних секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ – це $Un=\{u\in V\mid\varepsilon(u)\in\Gamma\}$. Якщо секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнена, то $\Gamma\models_{TF}\Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення логічного наслідку для множин формул.

Секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

На основі властивостей відношення $|\!=_{TF}$ вводимо такі базові секвенційні форми:

$$_{\vdash}\mathrm{RT}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{RT}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{RT}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{RT}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\Phi\mathrm{N}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);\qquad {}_{\dashv}\Phi\mathrm{N}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);$$

$$_{\vdash}\neg\Phi\mathrm{N}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);\qquad {}_{\dashv}\neg\Phi\mathrm{N}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);$$

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists R}\ \frac{\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R\exists R}\ \frac{\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma}\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists p}\ \frac{\vdash \exists xA,\Sigma}{\vdash R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R\exists p}\ \frac{\dashv \exists xA,\Sigma}{\dashv R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{\vdash \neg\exists xA,\Sigma}{\vdash \neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{\dashv \neg\exists xA,\Sigma}{\dashv \neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma}.$$

Форми типів RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg\Phi$N, R$\exists$R, $\neg$R$\exists$R, R$\exists$p $\neg$R$\exists$p – *допоміжні*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

$$_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{RR}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{RR}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\quad \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\neg\ \frac{\vdash A,\ \Sigma}{\vdash \neg\neg A,\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\neg\ \frac{\dashv A,\ \Sigma}{\dashv \neg\neg A,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{\vdash A,\Sigma\quad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\vee\ \frac{\dashv A, \dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\vee\ \frac{\vdash \neg A,\ \vdash \neg B,\ \Sigma}{\vdash \neg(A\vee B),\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\vee\ \frac{\dashv \neg A,\ \Sigma\quad \dashv \neg B,\ \Sigma}{\dashv \neg(A\vee B),\ \Sigma}.$$

Ми вводимо дві різновидності форм для елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією ($\exists$R-форми) та елімінації зовнішнього квантора ($\exists$-форми).

$$_{\vdash}\exists\ \frac{\vdash R^{x}_{z}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\vdash \exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma,\exists xA);\qquad {}_{\dashv}\neg\exists\ \frac{\dashv \neg R^{x}_{z}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\dashv \neg\exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma,\neg\exists xA);$$

$$_{\vdash}\exists\mathrm{R}\ \frac{\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм $_{\dashv}\exists$R та $_{\vdash}\neg\exists$R умова: $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA))$.

Секвенційні форми $_{\vdash}\exists$R, $_{\dashv}\neg\exists$R та $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\neg\exists$ будемо називати $\exists_T$-формами.

$_{\dashv}\exists$f $\dfrac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$; $_{\vdash}\neg\exists$f $\dfrac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$;

$_{\dashv}\exists$Rf $\dfrac{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}$; $_{\vdash}\neg\exists$Rf $\dfrac{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}$.

Для форм $_{\dashv}\exists$Rf та $_{\vdash}\neg\exists$Rf умова: $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA))$.

Для $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f та $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf додаткова умова: Σ не містить спеціальних предикатних символів (ПС) вигляду εz. Форми $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f та $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf назвемо формами типу $\exists$f.

$_{\dashv}\exists$v $\dfrac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}$; $_{\vdash}\neg\exists$v $\dfrac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}$;

$_{\dashv}\exists$Rv $\dfrac{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}$, де $x\notin\{\bar u\}$; $_{\vdash}\neg\exists$Rv $\dfrac{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}$, де $x\notin\{\bar u\}$.

Форми $_{\dashv}\exists$v, $_{\vdash}\neg\exists$v та $_{\dashv}\exists$Rv, $_{\vdash}\neg\exists$Rv назвемо формами типу $\exists$v.

$_{\dashv}\exists$d $\dfrac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}\exists xA,\Sigma \qquad _{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\Sigma}$; $_{\vdash}\neg\exists$d $\dfrac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma \qquad _{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}$;

$_{\dashv}\exists$Rd $\dfrac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma \qquad _{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar u\}$;

$_{\vdash}\neg\exists$Rd $\dfrac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma \qquad _{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar u\}$.

Форми $_{\dashv}\exists$d, $_{\vdash}\neg\exists$d та $_{\dashv}\exists$Rd, $_{\vdash}\neg\exists$Rd назвемо формами типу $\exists$d.

Для форм типу $\exists$d умова: εy не входить до складу Σ, водночас Σ містить принаймі один спеціальний ПС вигляду εz.

Секвенційні форми типів $\exists$f, $\exists$v, $\exists$d будемо називати $\exists_F$-формами.

Секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів із наведеними вище базовими секвенційними формами назвемо *QSLR-численнями.*

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ фактично однакова для різних першопорядкових числень числень (див., напр., [5, 7]). Подібна процедура для *QSC*-числень описана в [7], тому тут акцентуємо увагу на особливостях процедури для *QSLR*-числень.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Така процедура розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально (строго) неістотних імен такий, що $nm(\Sigma)\cap TN=\varnothing$.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку *T*-формул та списку *F*-формул. На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Нехай виконано *k* етапів процедури. На етапі *k*+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією (див. [7]). Поява фінальної секвенції ξ сигналізує про про наявність в дереві незамкненого шляху (від кореня до ξ), всі його вершини незамкнені.

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули секвенції ξ.

(2) До кожної активної формули застосовуємо відповідну основну секвенційну форму (так, як це описано нижче).

За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми типів RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg\Phi$N, R$\exists$R, $\neg$R$\exists$R, R$\exists$p. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я *z* як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Після цього застосовуємо форми типу RR, $\neg$RR, R$\neg$, $\neg$R$\neg$, R$\vee$, $\neg$R$\vee$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо таким чином.

Якщо в момент застосування $\exists_F$-форми до формули Φ серед формул секвенції ξ ще немає формул вигляду $_{\dashv}\varepsilon y$, то застосовуємо відповідну форму типу $\exists$f, інакше до Φ застосовуємо форму типу $\exists$v для всіх *y* таких, що $_{\dashv}\varepsilon y\in\xi$. Нехай після цього отримана секвенція $\boldsymbol{\eta}$. Далі до Φ застосовуємо форму типу $\exists$d для всіх $y\in nm(_{\mathbf{0}})$ таких, що $\varepsilon y\notin\boldsymbol{\eta}_0$, де $\boldsymbol{\eta}_0$ – множина доступних формул секвенції $\boldsymbol{\eta}$, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною $\boldsymbol{\eta}$.

Після виконання кожної форми перевіряємо секвенції-вершини на замкненість. При появі замкненої секвенції до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то маємо скінченне замкнене дерево.

Якщо така процедура завершено негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або ця процедура не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Коректність та повнота *QSLR*-числень. Для побудованих числень справджується

Теорема 2 (коректності). *Нехай секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Доведення. Нехай $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із процедури побудови випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ маємо $\Lambda \models_{TF} \mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження секвенційними формами відношення $\models_{TF}$ (від засновків до висновків) випливає із відповідних однойменних властивостей цього відношення. Отже, $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для доведення повноти *QSLR*-числень використаємо метод модельних (хінтікківських) множин. За його допомогою доводиться теорема про існування контрмоделі, звідки стандартним чином отримуємо теорему повноти.

Теорема 3 (про контрмодель)**.** Нехай $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві*, ***H*** *– множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови* ***A*** = (*A*, ***I***), ***B*** = (*A*, ***I***) *та* δ, $\eta \in {}^{V}\!A$ *такі*:

1) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ *та* $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$; 2) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ *та* $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Пари (***A***, δ) та (***B***, η) із наведеними вище властивостями назвемо *T*-контрмоделлю та *F*-контрмоделлю.

Задамо множини *W* та *Un* означених імен та неозначених імен множини ***H***:

$W = \{y\in nm(\boldsymbol{H}) \mid \dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$; $Un = \{y\in nm(\boldsymbol{H}) \mid \vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується жодна з умов замкненості. Тому для множини ***H*** гарантовано виконуються наступні умови коректності:

HC) Не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$;

HCLR) Не існують примітивні формули Φ та Ψ такі, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$, $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$, $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

HCU) Не існує пари примітивних *Un-unv*-еквівалентних формул $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A$ таких, що $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A \in \boldsymbol{H}$.

Зауважимо, що умова HCLR рівносильна умові "HCL або HCR", де умови HCL і HCR такі:

HCL) не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HCR) не існує примітивної формули Ψ такої, що $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої виконуються згідно з секвенційними формами *QSLR*-числення. Звідси випливає, що для ***H*** справджуються наступні умови.

HRT) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬RT) Якщо $\vdash\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HΦN) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬ΦN) Якщо $\vdash\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃R) Якщо $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

H¬R∃R) Якщо $\vdash\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

HR∃p) Якщо $\vdash R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H¬R∃p) Якщо $\vdash\neg R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HRR) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬RR) Якщо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR¬) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬R¬) Якщо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∨) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬R∨) Якщо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬¬) Якщо $\vdash\neg\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H¬∨) Якщо $\vdash\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H∃) Якщо $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$.

H¬∃) Якщо $\vdash\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$; якщо $\dashv\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\dashv\neg R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H∃R) Якщо $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

H¬∃R) Якщо $\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$;

якщо $\dashv \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то існує $y{\in}W$ таке, що $\dashv \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються наведені вище умови, назвемо *модельною*.

Побудуємо контрмодель за модельною множиною $\boldsymbol{H}$.

Для множини $W = \{y{\in}nm(\boldsymbol{H}) \mid \dashv\varepsilon y{\in}\boldsymbol{H}\}$ візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$. Фактично така A дублює множину усіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$. Візьмемо деяку ін'єктивну $\delta{\in}{}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$.

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ та η, а також на ІМ вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$:

Якщо $\vdash\varepsilon y{\in}\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y(\delta) = T$, що й означає $y{\notin}asn(\delta)$; якщо $\dashv\varepsilon y{\in}\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y(\delta) = F$, що й означає $y{\in}asn(\delta)$.

Якщо $\vdash p{\in}\boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) = T$ та $p_B(\eta) \neq F$; якщо $\dashv p{\in}\boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) \neq T$ та $p_B(\eta) = F$.

Якщо $\vdash \neg p{\in}\boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) = F$ та $p_B(\eta) \neq T$; якщо $\dashv \neg p{\in}\boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) \neq F$ та $p_B(\eta) = T$.

Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in\boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$ та $p_B(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)) \neq F$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in\boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) \neq T$ та $p_B(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)) = F$.

Якщо $\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in\boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$ та $p_B(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)) \neq T$; якщо $\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in\boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) \neq F$ та $p_B(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)) = T$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ та їх заперечень твердження теореми випливають із наведеного визначення значень базових предикатів.

Далі доведення проводиться стандартним чином індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини $\boldsymbol{H}$. Наведемо для прикладу доведення для пп. H¬R¬ та H¬∃R.

Нехай $\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A(\delta) = T$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A(\delta) = T$. За припущенням індукції для η маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B(\eta) \neq F$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B(\eta) \neq F$.

Нехай $\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A(\delta) \neq T$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A(\delta) \neq T$. За припущенням індукції для η маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B(\eta) = F$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B(\eta) = F$.

Нехай $\vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬∃R тоді для всіх $y{\in}W$ маємо $\vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A(\delta) = T$ для всіх $y{\in}W$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto \delta(y)) = F$ для всіх $y{\in}W$. Згідно з $\delta{\in}A^W$ маємо $\delta(y){\downarrow}$ для всіх $y{\in}W$. Позаяк δ є бієкцією $W{\to}A$, то кожне $b{\in}A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y{\in}W$. Отже, $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto b) = F$ для всіх $b{\in}A$, звідки $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A(\delta) = T$. За припущенням індукції для η маємо $\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_B(\eta) \neq F$ для всіх $y{\in}W$. Звідси $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u} \mapsto \eta(\bar{v})\nabla x \mapsto \eta(y)) \neq T$ для всіх $y{\in}W$. Згідно з $\eta{\in}A^W$ тоді $\eta(y){\downarrow}$ для всіх $y{\in}W$. Позаяк δ – бієкція, то кожне $b{\in}A$ має вигляд $b = \eta(y)$ для деякого $y{\in}W$. Отже, $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u} \mapsto \eta(\bar{v})\nabla x \mapsto b) \neq T$ для всіх $b{\in}A$, звідки $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B(\eta) \neq F$.

Нехай $\dashv \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬∃R тоді існує $y{\in}W$ таке, що $\dashv \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A(\delta) \neq T$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto \delta(y)) \neq F$. Однак $\delta(y){\downarrow}$ згідно з $\delta{\in}{}^{W}\!A$ та $y{\in}W$, тому для $a = \delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto a) \neq F$ звідки $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A(\delta) \neq T$. За припущенням індукції для η маємо $\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_B(\eta) = F$. Звідси $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u} \mapsto \eta(\bar{v})\nabla x \mapsto \eta(y)) = T$. Однак $\eta(y){\downarrow}$ згідно з $\eta{\in}{}^{W}\!A$ та $y{\in}W$, тому отримуємо $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u} \mapsto \eta(\bar{v})\nabla x \mapsto a) = T$ для $a = \eta(y)$, звідки $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B(\eta) = F$.

Для вибору T-контрмоделі чи F-контрмоделі беремо до уваги наступне.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCL (тоді маємо HCR), то для T-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо F-контрмодель.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCR (тоді маємо HCL), то для F-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо T-контрмодель.

Якщо виконуються HCL та HCR, то можна брати як T-контрмодель, так і F-контрмодель.

На основі теореми 3 отримуємо теорему повноти для *QSLR*-числень.

Теорема 4 (повноти). *Нехай* $\Gamma \models_{TF} \Delta$. *Тоді секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна.*

Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = \vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Тоді (теорема 3) множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – модельна. Згідно з теоремою 3 існують T-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та F-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$ такі:

1) $\vdash\Phi{\in}\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv\Phi{\in}\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$; 2) $\vdash\Phi{\in}\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ та $\dashv\Phi{\in}\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Для T-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi{\in}\Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Psi{\in}\Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) \neq T$. Звідси $\delta{\in}\boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $\delta{\notin}\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, звідки невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}\!\models_T \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для F-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi{\in}\Gamma$ маємо $\Phi_B(\eta) \neq F$, для всіх $\Psi{\in}\Delta$ маємо $\Psi_B(\eta) = F$. Звідси $\eta{\notin}\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$ та $\eta{\in}\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, звідки невірно $\boldsymbol{F}(\Delta_B) \subseteq \boldsymbol{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{B}}\!\models_F \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Висновки. В роботі досліджено відношення сильного логічного наслідку в чистих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових однозначних квазіарних предикатів. Для цього відношення побудовано числення секвенційного типу, доведено коректність і повноту цих числень. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Подібні числення для логік неоднозначних квазіарних предикатів будуть запропоновані в наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. № 1.
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011, Вип. 4.
3. Шкільняк С.С. Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2011, № 4.
4. Смирнова Е.Д. Логика и философия. – М., 1996.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
6. Шкильняк С.С. Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Спеціальні секвенційні числення чистих композиційно-номінативних логік першого порядку. // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2012, Вип. 12.
8. Nikitchenko M., Tymofieiev V. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 0137. – Springer, 2012.

Надійшла до редколегії 28.09.12

С. Шкильняк, д-р физ.-мат. наук, доц.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

СИЛЬНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ В ЛОГИКАХ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ И СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ЕГО ФОРМАЛИЗАЦИИ

Исследовано отношение сильного логического следствия в чистых першопорядковых логиках частичных однозначных квазиарних предикатов. Для этого отношения построены секвенциальные исчисления и доказана их коректность и полноту. Для такого построения использованы специальные предикаты, определяющие наличие значения для переменных.

Ключевые слова: корректность, полнота, QSLR-исчисление, секвенциальные исчисления, секвенциальные дерева.

Shkilnyak S., Dr. Sc. phys. math.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

STRONG LOGICAL CONSEQUENCE IN THE LOGIC QUASIARY PREDICATES AND SEQUENT CALCULUS FOR IT FORMALIZATION

Relation of strong logical consequence of pure first-order logics of partial single-valued quasi-ary predicates is study. For this relation sequent calculi are constructed, the soundness and completeness of these calculi are proved. For this construction special variable definedness predicates are used.

Keywords: correctness, completeness, QSLR-calculus, sequent calculus sequent tree.

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 1(13)

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60х84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 8,3. Наклад 300. Зам. № 213-6807.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К1.
Підписано до друку 28.11.13

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02