

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.

Для викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.

For scientists, professors, aspirants and students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	О.К. Закусило, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАПН України
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	А.В. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України (заст. відп. ред.); В.В. Акименко, д-р техн. наук, проф., Ю.А. Белов, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.Б. Буй, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф.; В.А. Заславський, д-р техн. наук, проф.; В.І. Кудін, д-р техн. наук, ст.. наук. співроб.; Є.О. Лебедєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.М. Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; О.Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Д.А. Номіровський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.І. Провотар, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.Н. Редько, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України; Д.Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (відп. секретар); В.О. Яценко, д-р техн. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 13.06.2011 (протокол № 10)
Затверджено	Постанова Президії ВАК України № 1-05/1 від 26.01.11
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16271-4743Р від 31.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

Голубєва К., Ключин Д., Петунін Ю. Непараметричні методи перевірки гіпотези про однорідність двох вибірок.....	4
Гаркуша Н., Хусаїнов Д. Динаміка лінійної системи моделі популяції Леслі	9
Джалладова І. Умови стійкості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь із запізнюванням аргументу та лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами без запізнювання аргументу	15
Доленко Г., Конарєва Є., Мановицька Д. Математична модель оцінки ефективності регіонального економічного розвитку	19
Доценко С.І Стратегії гри на одновимірних симетричних випадкових блуканнях.....	20
Козоріз В. Коливання двох коаксіальних надпровідних кілець	23
Кухаренко О. Отримання розв'язку задачі Коші для рівняння коливання із запізнюванням	28
Нікітченко М., Шкільняк С. Композиційно-нормативні логіки кванторно-екваційного рівня.....	32
Піскунов О., Петренко С. Формалізація парадигм ООП: наслідування в абстрактних автоматах	40
Славко Г. Зведення повторного контурного інтегралу до одноконтурного при моделюванні магнітної підвіски	45
Шатирко А., Хусаїнов Д. Дослідження абсолютної нерівномірної інтервальної стійкості систем нейтрального типу методом функцій Ляпунова	51
Чуйко С. Нетерові крайові задачі з імпульсним впливом	58

CONTENTS

Golubeva K., Kliushin D., Petunin Y. Nonparametric test to check whether two underlying probability distributions differ	4
Garkusha N., Khusainov D. Dynamics of the linear Leslie model of population	9
Dzhalladova I. Comparison of stability conditions for solutions of linear stochastic differential equations with delay and without delay of arguments.....	15
Dolenko G., Konareva E., Manovytska D. Mathematical model for efficiency estimations of regional economical development	19
Dotsenko S. Game strategies on one-dimensional random walks	20
Kozoriz V. Oscillating of two coaxial superconducting rings	23
Kukhareenko O. Solutions of the Cauchy problem for oscillatory equation with delay	28
Nikitchenko M., Shkilniak S. Composite-normative logic of quantum-equational level	32
Piskunov A., Petrenko S. Formalization of the OOP Paradigm: Inheritance of Abstract Automata.....	40
Slavko G. Reducing of an iterated contour integral to one-contour integral in magnetic suspension modeling	45
Shatyrko A., Khusainov D. Using the Lyapunov functions method for investigation of an absolute inhomogeneous interval stability of neutral systems.....	51
Chuiiko S. Neter boundary problems with impulse action	58

НЕПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО ОДНОРІДНІСТЬ ДВОХ ВИБІРОК

На сьогоднішній час існує дуже багато різних непараметричних критеріїв. Кожен з них має свої особливості та умови використання. Існують непараметричні критерії для незалежних вибірок, для залежних вибірок та критерії, що можна використовувати в обох варіантах. В залежності від кількості досліджуваних вибірок та їх об'єму вибирається оптимальний критерій, який при заданих вимогах буде мати найбільшу потужність. З огляду на результати аналізу умов застосування непараметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез, як конкуренти критерію, що пропонується в цій статті, ми вибрали критерії Колмогорова-Смірнова, Уїлкоксона, Манна-Уїтні й критерій знаків.

There are a lot of different nonparametric criteria. Each of them has its own peculiarities and conditions of use. There are nonparametric criteria for independent samples, for dependent samples, and criteria that can be used in both cases. Depending on the number of investigated samples and their volume the optimal criterion, which will have the greatest power at the given requirements, is chosen. Considering results of the analysis of use conditions for nonparametric statistical criteria for validation of hypotheses, as competitors of the criterion proposed in this paper, we chose the criteria of Kolmogorov-Smirnov, Uilkoksona, Mann-Whitney criterion and the characters criterion.

1. Вступ. Для перевірки гіпотези про однорідність двох вибірок розроблені класичні непараметричні критерії Колмогорова-Смірнова, Уїлкоксона, Манна-Уїтні, критерій знаків та інші [1]. Вони відмінно працюють при перевірці вибірок, отриманих за допомогою простого випадкового вибору з генеральних сукупностей із різними математичними очікуваннями, проте мають ряд недоліків. Зокрема, ці критерії ґрунтуються на односторонніх довірчих границях, що відповідають заданому рівню значущості, що може призвести до невизначеності й неприйняття рішення. Крім того, імовірність потрапляння тестової статистики в довірчий інтервал (тобто, довірчий рівень критерію) можна точно визначити лише за умови, що нульова гіпотеза є істинною; у супротивному випадку ця ймовірність залишається невизначеною.

У роботі [2] на основі гіпотези Хілла [3-4] і формул Вільсона [5] побудована міра близькості між вибірками й двосторонній непараметричний критерій, асимптотичний рівень значущості якого не залежить від істинності або хибності нульової гіпотези, й продемонстрована перевага нового критерію над критеріями Колмогорова-Смірнова й Уїлкоксона. Проте асимптотичний характер запропонованого критерію означає, що рівень значущості, рівний 0,05, можна досягти лише при досить великих об'ємах вибірок. Отже, необхідно досліджувати модифікацію цього критерію, що допускає використання вибірок малих об'ємів.

2. Непараметричні критерії. На сьогоднішній час існує дуже багато різних непараметричних критеріїв. Кожен з них має свої особливості та умови використання. Умовно критерії можна розподілити в залежності від вхідних даних, до яких вони застосовуються. Існують непараметричні критерії для незалежних вибірок, для залежних вибірок та критерії, що можна використовувати в обох варіантах. В залежності від кількості досліджуваних вибірок та їх об'єму вибирається оптимальний критерій, який при заданих вимогах буде мати найбільшу потужність.

Критеріями для незалежних вибірок є критерії Колмогорова-Смірнова, Манна-Уїтні для перевірки двох вибірок та критерій Крускала-Уолліса для багатовимірного випадку. Критеріями для двох залежних вибірок є критерій знаків та Уїлкоксона, а для більшого числа вибірок: критерії Фрідмана та Пейджа.

Критерій згоди Колмогорова-Смірнова є достатньо чутливим до наявності відмінностей у досліджуваних вибірках, але при співставленні двох емпіричних розподілів необхідно, щоб об'єм вибірок був більший або рівний 50. Із збільшенням кількості елементів у вибірках, збільшується точність критерію. У випадку, коли об'єм вибірок малий, доцільно використовувати інші критерії, наприклад критерій Манна-Уїтні.

Для коректної роботи критерію Манна-Уїтні необхідно, щоб у вибіркових даних не було співпадаючих значень, або ж кількість таких значень була мінімальною. За допомогою критерію Манна-Уїтні можливо досліджувати вибірки з різними об'ємами, його можна застосовувати навіть до вибірок невеликого об'єму (не менше трьох; можна навіть два значення в одній вибірці, але в іншій повинно бути не менше п'яти елементів).

Критерій Крускала-Уолліса можна розглядати як багатовимірне узагальнення критерію Манна-Уїтні. Критерій дозволяє з'ясувати ступінь зміни ознаки у вибірках, але не дозволяє дізнатися напрямок цих змін.

Критерій Уїлкоксона має досить високу потужність, але об'єм досліджуваних вибірок повинен мати від 5 до 50 елементів, а розподіл, який досліджується, повинен бути неперервним і симетричним відносно медіани. У випадку, коли ці умови не виконуються, можна використовувати більш загальний критерій знаків.

Критерій знаків можна використовувати для вибірок об'ємом від 5 до 300 елементів, але є дуже великий мінус: потужність критерію дуже мала.

Критерій Фрідмана можна розглядати як розширення критерію Уїлкоксона на випадок трьох і більше вимірювань залежної вибірки. Критерій дає можливість встановити рівень статистичної вірогідності відмінностей одночасно в кількох вимірюваннях (від 3 до 100), але не дозволяє з'ясувати напрямок змін.

Критерій Пейджа є аналогом критерію Фрідмана, але на відміну від останнього дозволяє не лише виявити наявність змін, а й з'ясувати їх напрямок.

Отже, з огляду на результати аналізу умов застосування непараметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез, як конкуренти критерію, що пропонується в цій статті, ми вибрали критерії Колмогорова-Смірнова, Уїлкоксона, Манна-Уїтні й критерій знаків.

3. Міра близькості між вибірками. Припустимо, що абсолютно неперервні функції розподілу $F_1(u)$ й $F_2(u)$ генеральних сукупностей G_1 і G_2 відповідно збігаються. Нехай $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1$ та $y = (y_1, \dots, y_n) \in G_2$,

$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}, \quad y_{(1)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ – порядкові статистики. Позначимо через $A_{ij}^{(k,n)}$, $k=1,2,\dots,n$ випадкову подію $A_{ij}^{(k,n)} = \{y_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})\}$. У такому випадку [4-6]

$$p_{ij}^{(n)} = p(A_{ij}^{(k,n)}) = p(y_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = \frac{j-i}{n+1}.$$

Покладемо

$$p_{ij}^{(n,1)} = \frac{h_{ij}^{(n)}n + g^2/2 - g\sqrt{h_{ij}^{(n)}(1-h_{ij}^{(n)})n + g^2/4}}{n + g^2}, \quad p_{ij}^{(n,2)} = \frac{h_{ij}^{(n)}n + g^2/2 + g\sqrt{h_{ij}^{(n)}(1-h_{ij}^{(n)})n + g^2/4}}{n + g^2}, \quad (1)$$

де $h_{ij}^{(n)}$ – частота появи події $A_{ij}^{(k,n)}$ у n випробуваннях, а $g = 3$.

Позначимо через $N = n(n-1)/2$ кількість всіх довірчих інтервалів $I_{ij}^{(n)} = (p_{ij}^{(n,1)}, p_{ij}^{(n,2)})$, L – кількість подій $B_{ij}^{(n)} = \{p_{ij}^{(n)} \in I_{ij}^{(n)}\}$. Покладемо $h^{(N)} = \rho(x, y) = \frac{L}{N}$. Довірчий інтервал $I^{(N)} = (p^{(N,1)}, p^{(N,2)})$ для ймовірності $p(B_{ij}^{(n)})$ обчислюється за формулами

$$p^{(N,1)} = \frac{h^{(N)}N + g^2/2 - g\sqrt{h^{(N)}(1-h^{(N)})N + g^2/4}}{N + g^2}, \quad p^{(N,2)} = \frac{h^{(N)}N + g^2/2 + g\sqrt{h^{(N)}(1-h^{(N)})N + g^2/4}}{N + g^2}.$$

Статистика $h^{(N)}$ є мірою близькості $\rho(x, y)$ між вибірками x та y . Довірчі інтервали $I_{ij}^{(n)} = (p_{ij}^{(n,1)}, p_{ij}^{(n,2)})$ та $I^{(N)} = (p^{(N,1)}, p^{(N,2)})$ будемо називати інтервалами, побудованими за правилом 3σ , якщо $g = 3$.

Якщо вибірки мають досить великий об'єм, то для перевірки еквівалентності генеральних сукупностей можна використати критерій, запропонований у роботі [2]. Якщо ж об'єм вибірок малий, то доцільно застосувати усереднення відстаней між багатьма малими вибірками. Отже, для перевірки еквівалентності генеральних сукупностей порівняємо вибірку $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1$ з вибірками $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \in G_2$, $m = 1, 2, \dots, M$. За тестову статистику будемо використати середню міру близькості між вибірками

$$h = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M h^{(n,m)}, \quad \text{де } h^{(n,m)} = \rho(x, y^{(m)}).$$

4. Оцінка асимптотичного довірчого рівня значущості. Для доведення коректності запропонованої міри близькості необхідно оцінити рівень значущості довірчих інтервалів $I_{ij}^{(n)}$ та $I^{(N)}$. Якщо $F_1(u) = F_2(u)$, то схема випробувань, у яких можуть з'являтися взаємозалежні події $A_{ij}^{(k,n)}$, $k=1,2,\dots,n$, називається узагальненою схемою Бернуллі [7]; якщо $F_1(u) \neq F_2(u)$ – модифікованою схемою Бернуллі [8], а якщо істинність гіпотези значення не має – МП-схемою [9].

Оцінки асимптотичного рівня значущості довірчих інтервалів $I_{ij}^{(n)}$ та $I^{(N)}$ наведені в роботі [2]. Наведемо відомі теореми.

Теорема 1. Якщо в узагальненій схемі випробувань Бернуллі 1) $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_0 < 1$ і 2) $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n+1} = p^* < 1$, то асимптотичний рівень значущості β послідовності довірчих інтервалів $I_{ij}^{(n)}$ для ймовірностей $p_{ij}^{(n)} = p(A_{ij}^{(n)})$ не перевищує 0,05.

Теорема 2. Асимптотичний рівень значущості інтервалу $I^{(N)} = (p^{(1,N)}, p^{(2,N)})$ не перевершує 0,05.

Тепер розглянемо асимптотичний рівень значущості довірчого інтервалу нової статистики. За довірчий інтервал для статистики h будемо використати інтервал $I^{(M)} = (p^{(1,M)}, p^{(2,M)}) = (h - 2s_h, h + 2s_h)$, де

$$s_h^2 = \frac{h(1-h)}{MN} + h \frac{\tilde{L}-1}{N-1} - \frac{h^2}{N}$$

де $g = 3$. Надалі індекс m означає, що розглядається пара вибірок $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1$ та $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \in G_2$, де $1 \leq m \leq M$.

Теорема 3. Асимптотичний рівень значущості інтервалу $I^{(M)} = (p^{(1,M)}, p^{(2,M)})$ не перевершує 0,05.

Доведення. Розглянемо довірчі інтервали $I_{ij}^{(n,m)} = (p_{ij}^{(1,n)}, p_{ij}^{(2,n)})$, $i < j$, побудовані за допомогою формул (1) за частотою $h_{ij}^{(n,m)}$ випадкової події $\{y_k^{(m)} \in (x_{(i)}, x_{(j)})\}$, де $y_k^{(m)}$ – довільні елементи вибірки $y^{(m)}$. Введемо випадкові величини

$$\delta_{ij}^{(n,m)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p_{ij}^{(n,m)} \in I_{ij}^{(n,m)}, \\ 0, & \text{якщо } p_{ij}^{(n,m)} \notin I_{ij}^{(n,m)}, \end{cases} \quad z^{(n,m)} = \frac{1}{N} \sum_{i < j} \delta_{ij}^{(n,m)} = h^{(n,m)}, \text{ де } p_{ij}^{(n,m)} = p\left(y_k^{(m)} \in (x_{(i)}, x_{(j)})\right), \quad N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Тоді

$$p^{(n,m)} = E\left(z^{(n,m)}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i < j} p\left(B_{ij}^{(n,m)}\right), \quad (2)$$

де $B_{ij}^{(n,m)} = \left\{p_{ij}^{(n,m)} \in J_{ij}^{(n,m)}\right\}$.

Пронумеруємо випадкові величини $\delta_{ij}^{(n,m)}$ довільним чином і складемо з них множину $X^{(m)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots, X_N^{(m)})$, координати яких мають спільну функцію розподілу $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$. У роботі [9] був запропонований наступний метод одержання вибірки із множини $X^{(m)}$: витягнемо з неї без повернення випадкові елементи $\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \dots, \gamma_N^{(m)}$. Відповідна багатомірна випадкова величина $\gamma^{(N,m)} = (\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \dots, \gamma_N^{(m)})$ називається індукованою вибіркою. Функція спільного розподілу $F_{\gamma^{(N,m)}}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ індукованої вибірки $\gamma^{(N,m)}$ має вигляд [10]

$$F_{\gamma^{(N,m)}}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \frac{1}{N!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_N) \in G_N} F(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_N}), \quad (3)$$

де G_N – група перестановок чисел $(1, 2, \dots, N)$. З формули (3) випливає, що елементи $\gamma_k^{(m)}, k = 1, 2, \dots, N$ індукованої вибірки є симетрично залежними випадковими величинами з маргіальною функцією розподілу

$$F_{\gamma_k^{(m)}}(u) = \frac{1}{N!} \left[F(u, \infty, \dots, \infty)(N-1)! + F(\infty, u, \infty, \dots, \infty)(N-1)! + \dots + F(\infty, \dots, \infty, u)(N-1)! \right] = \frac{1}{N} \left[F_1(u) + \dots + F_N(u) \right].$$

Звідси випливає, що всі маргіальні функції розподілу $F_{\gamma_k^{(m)}}(u)$ однакові та мають вигляд

$$F_{\gamma_k^{(m)}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u \leq 0, \\ 1 - p^{(n,m)}, & \text{якщо } 0 < u < 1, \\ 1, & \text{якщо } u \geq 1, \end{cases} \quad (4)$$

де $p^{(n,m)} = E\left(z^{(n,m)}\right)$ визначається за формулою (2). Оскільки подія $B_{ij}^{(n,m)}$ відбувається тоді й тільки тоді, коли $\delta_{ij}^{(n,m)} = 1, k = 1, 2, \dots, N$, індувану вибірку $\gamma^{(N,m)}$ можна інтерпретувати як результат схеми випробувань, у яких подія $B_{ij}^{(n,m)}$ може з'явитися з імовірністю $p^{(n,m)}$.

Середню міру близькості між вибірками

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1 \text{ та } y = (y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \in G_2,$$

де $1 \leq m \leq M$ запишемо в наступному вигляді:

$$h = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(m)}$$

У такому випадку

$$E(h) = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N E(\gamma_k^{(m)}) = p^{(n,m)},$$

оскільки $E(\gamma_k^{(m)}) = p^{(n,m)}$, і

$$D(h) = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{m=1}^M \left(\sum_{k=1}^N D(\gamma_k^{(m)}) + \sum_{k \neq s} K(\gamma_k^{(m)}, \gamma_s^{(m)}) \right). \quad (5)$$

Легко бачити, що $D(\gamma_k^{(m)}) = p^{(n,m)}(1 - p^{(n,m)})$, а коефіцієнт коваріації $K(\gamma_k^{(m)}, \gamma_s^{(m)})$ не залежить від k і s . Отже,

$$\frac{1}{N^2 M^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k \neq s} K(\gamma_k^{(m)}, \gamma_s^{(m)}) = \frac{N-1}{NM} C,$$

де $C = K(\gamma_k, \gamma_s)$.

Далі,

$$C = K(\gamma_k^{(m)}, \gamma_s^{(m)}) = E(\gamma_k^{(m)} \gamma_s^{(m)}) - \left(p^{(n,m)}\right)^2,$$

так що змішаний момент другого порядку $E(\gamma_k^{(m)} \gamma_s^{(m)})$ теж є постійною величиною. Оскільки величини C та $p^{(n,m)}$, що входять у формулу (4), невідомі, замінимо їхніми оцінками

$$p^{(n,m)} \approx h = \frac{\tilde{L}}{NM},$$

де $\tilde{L}$ – кількість появ події $B_{ij}^{(n,m)}$.

$$C \approx \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k \neq s} \gamma_k^{(m)} \gamma_s^{(m)} - h^2 = \frac{\tilde{L}(\tilde{L}-1)}{N(N-1)} - \frac{\tilde{L}^2}{N^2 M^2} = \frac{\tilde{L}(\tilde{L}-1)}{N(N-1)} - h^2.$$

В силу формули (5)

$$D(\gamma_k^{(m)}) = E\left[\left[E(\gamma_k^{(m)})\right]^2 - E\left[(\gamma_k^{(m)})^2\right]\right] = p^{(n,m)} - \left(p^{(n,m)}\right)^2 = p^{(n,m)}(1 - p^{(n,m)}).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{M^2 N^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N D(\gamma_k^{(m)}) = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N p^{(n,m)}(1 - p^{(n,m)}) = \frac{p^{(n,m)}(1 - p^{(n,m)})}{MN}$$

і

$$D(h) = \frac{p^{(n,m)}(1 - p^{(n,m)})}{MN} + \frac{N-1}{NM} C.$$

Тому

$$D(h) \approx s_h^2 = \frac{h(1-h)}{MN} + \frac{\tilde{L}}{MN} \frac{\tilde{L}-1}{N} - \frac{N-1}{MN} h^2.$$

Із центральної граничної теореми для суми симетрично залежних випадкових величин [10], одержуємо, що асимптотичний рівень значущості довірчого інтервалу $I^{(M)}$ не перевершує 0,05.

Теорема доведена.

5. Обчислювальний експеримент. Для перевірки працездатності запропонованого критерію був проведений обчислювальний експеримент. У рамках цього експерименту за допомогою датчика псевдовипадкових чисел були згенеровані три групи навчальних вибірок з генеральних сукупностей нормально розподілених випадкових величин: 1) з нульовим математичним очікуванням та одиничною дисперсією, $N(0,1)$; 2) з нульовим математичним очікуванням і дисперсією, рівною двом, $N(0,2)$, і 3) з одиничним математичним очікуванням й одиничною дисперсією, $N(1,1)$. Це дозволяє досліджувати три ситуації: 1) коли вибірка з генеральної сукупності $N(0,1)$ порівнюється із групою вибірок з тієї ж генеральної сукупності; 2) коли вибірка з генеральної сукупності $N(0,1)$ порівнюється із групою вибірок, узятих з генеральної сукупності з таким же математичним очікуванням, але іншою дисперсією, $N(0,2)$ і 3) коли вибірка з генеральної сукупності $N(0,1)$ порівнюється із групою вибірок витягнутих з генеральної сукупності з іншим математичним очікуванням, $N(1,1)$. Для порівняння були використані стандартні непараметричні критерії для перевірки гіпотези про рівність функцій розподілу для двох вибірок: 1) критерій Колмогорова-Смірнова, 2) критерій знаків; 3) критерій Уїлкоксона та 4) критерій Манна-Уїтні. Об'єм кожної вибірки дорівнює 100. Кожна група складається із 10 вибірок. За контрольну вибірку було взято вибірку з генеральної сукупності $N(0,1)$. Нульова гіпотеза стверджує, що контрольна вибірка вилучена із тієї ж генеральної сукупності, що й навчальні вибірки. Як показники якості критеріїв було вибрано р-значення, тобто ймовірність відхилити істинну нульову гіпотезу, а також фактичну кількість помилок першого й другого роду. Моделювання було проведене за допомогою програми XLSTAT 2009.

Рішення про прийняття або відхилення нульової гіпотези будемо приймати, ґрунтуючись на середньому р-значенні або середній р-статистиці відповідно. Якщо в критеріях Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона й Манна-Уїтні середнє р-значення буде перевищувати 0,05, нульова гіпотеза повинна бути прийнята. При використанні р-статистики вирішальне правило говорить: гіпотеза про рівність функцій розподілу приймається, якщо довірчий інтервал для 1-р (тобто для р-значення) містить 0,05.

Результати розрахунків наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Імовірність відхилити істинну гіпотезу H_0 і частота помилок, коли відхиляється істинна гіпотеза (у дужках)

	Генеральні сукупності		
	$N(0,1) - N(0,1)$	$N(0,1) - N(0,2)$	$N(0,1) - N(1,1)$
Критерій Колмогорова-Смірнова	0,6393 (0,0)	0,0505 (0,4)	<0,0001 (0,0)
Критерій знаків	0,6358 (0,0)	0,4840 (0,9)	<0,0001 (0,0)
Критерій Уїлкоксона	0,5637 (0,0)	0,5654 (0,9)	<0,0001 (0,0)
Критерій Манна-Уїтні	0,5222 (0,0)	0,5222 (0,9)	<0,0001 (0,0)
Р-статистика	0,0434 (0,0)	0,3647 (0,2)	0,4703 (0,0)

Як випливає з табл. 1, при порівнянні вибірки з генеральної сукупності $N(0,1)$ з десятьма вибірками з тієї ж самої генеральної сукупності, всі критерії приймають істинну нульову гіпотезу. Однак р-значення при цьому у всіх критеріїв, крім р-статистики, коливаються в дуже широких межах: від 0,11 до 0,99. У той же час, р-статистика виявилася дуже стійкою і не виходила за межі інтервалу (0,016; 0,084). Графіки р-значень наведені на рис. 1.

При порівнянні тестової вибірки з вибірками з генеральної сукупності $N(0,2)$ характеристики критеріїв Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона та Манна-Уїтні різко погіршуються. Кількість помилок при перевірці гіпотези за допомогою критерію Колмогорова-Смірнова виявилася рівною 4 з 10 (4 рази прийнята хибна гіпотеза), а середнє р-значення перевищує 0,0505, тобто варто прийняти хибну нульову гіпотезу. Критерії знаків, Уїлкоксона та Манна-Уїтні в 9 випадках з 10 приймали хибну гіпотезу про рівність функцій розподілу. Розкид р-значень продемонстровано на

рис. 2. У той же час р-статистика для 8 вибірок відхилила хибну гіпотезу про рівність функцій розподілу. Крім того, середня р-статистика також приводить критерій до правильного висновку.

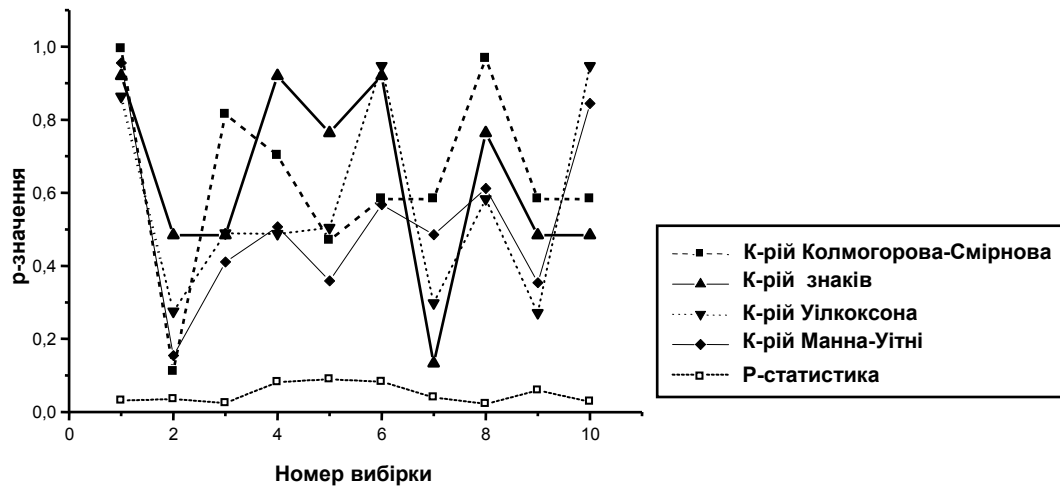


Рис. 1. Р-значення критеріїв Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона, Манна-Уїтні й Р-статистики для вибірок з генеральних сукупностей $N(0,1)$

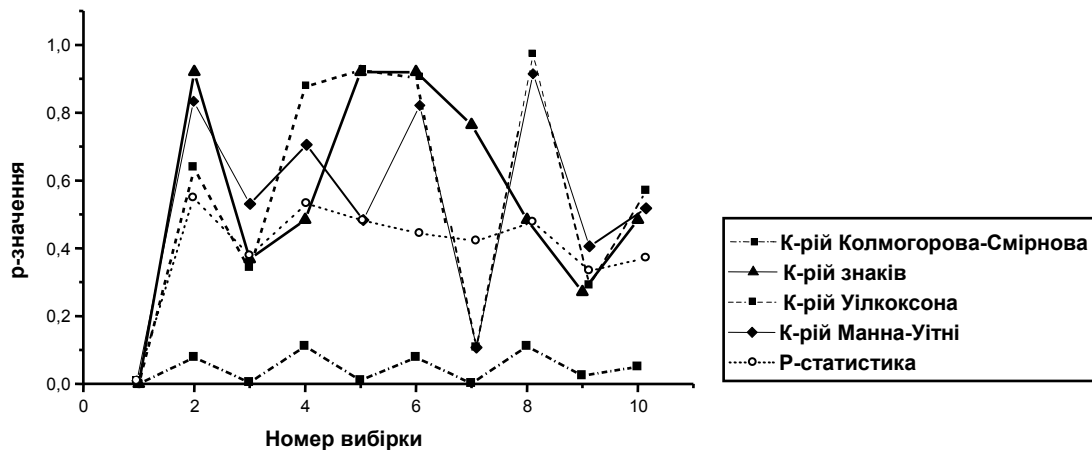


Рис. 2. Р-значення критеріїв Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона, Манна-Уїтні й Р-статистики для вибірок з генеральних сукупностей $N(0,1)$ і $N(0,2)$

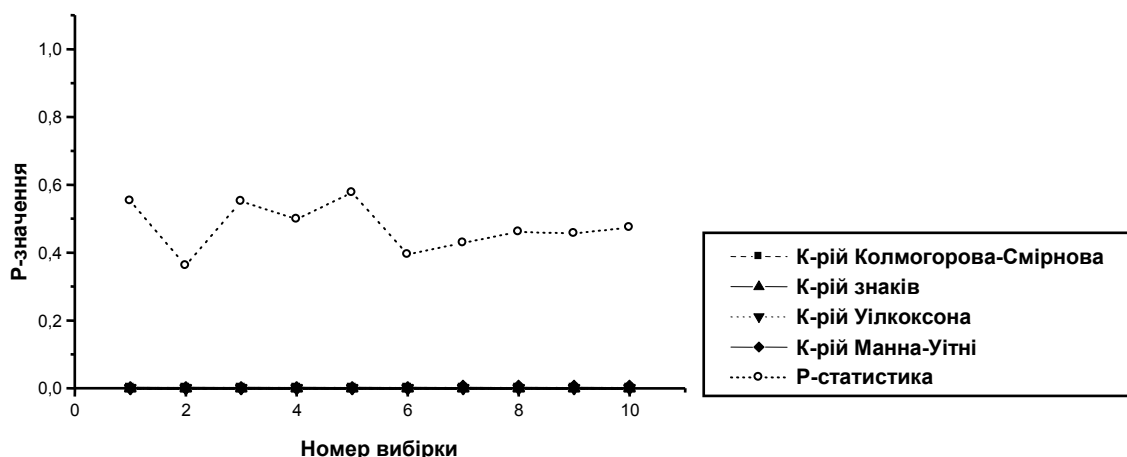


Рис. 3. Р-значення критеріїв Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона, Манна-Уїтні й Р-статистики для вибірок з генеральних сукупностей $N(0,1)$ і $N(1,1)$

Третя група вибірок, отриманих з генеральної сукупності $N(1,1)$, математичне сподівання якої співпадає з математичним сподіванням генеральної сукупності $N(0,1)$, до якої належить тестова вибірка, являє собою найбільш сприятливий набір даних для всіх критеріїв. Вважається загальновідомим фактом, що критерії Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона й Манна-Уїтні, власне кажучи, перевіряють гіпотезу про зсув математичного сподівання. У той же час варто підкреслити, що критерій, заснований на р-статистиці, є більш універсальним. Як і слід було сподіватися, всі критерії, крім критерію, заснованого на р-статистиці, відхилили хибну гіпотезу з дуже низьким р-значенням (менше 0,0001). Р-статистика також свідчить про хибність нульової гіпотези.

Отже, обчислювальний експеримент показав, що критерій, заснований на p -статистиці, є дуже надійним, стійким і більш універсальним, ніж критерії Колмогорова-Смірнова, знаків, Уїлкоксона й Манна-Уїтні.

6. Застосування критерію для діагностики онкологічних захворювань Розглянемо застосування критерію, що використовує усереднену p -статистику, для діагностики ракової пухлини у молочній залозі. Для дослідження були взяті групи жінок із діагнозами рак молочної залози (РМЗ) – 38 випадків і фіброаденоматоз (ФАМ) – 44 випадки. Після полоскання і зняття поверхневого шару клітин слизової оболонки порожнини рота були отримані клітини з різноманітної глибини шиповатого шару. Клітини були висушені при кімнатній температурі і зафіксовані в суміші Нікіфорова, а потім проведена реакція Фельгена з холодним гідролізом у 5 н. HCl протягом 15 хв. при температурі $t=21-22^{\circ}\text{C}$. Оптична щільність ядра реєструвалася за допомогою мікроскопа Olympus BX41 System, обладнаного цифровою фотокамерою CAMEDIA C-5050ZOOM і програмним забезпеченням Olympus DP-SOFT 3.2 на базі комп'ютера Pentium 4, 2,6 ГГц. У кожному препараті досліджувалося від 50 до 70 клітин. В результаті були отримані вибірки, що містять значення площі інтерфазних ядер букального епітелію у пацієнтів, хворих на РМЗ і ФАМ.

Позначимо групу пацієток, хворих на РМЗ, через G_1 , а хворих на ФАМ – через G_2 . Для діагностики будемо використовувати метод перехресної перевірки leave-one-out [11]: почергово виключимо пацієнтів із навчальних вибірок, вважаючи їх діагноз невідомим, і обчислимо середню відстань від пацієнта x до пацієнтів, що залишилися в групах G_1 та G_2 , тобто усереднену p -статистику.

Аналіз результатів показує, що усі значення усереднених p -статистик між пацієнтами РМЗ та групою пацієнтів РМЗ розташовані в межах між $x_{(1)} = 0,649$ та $x_{(n)} = 0,887$, а між пацієнтами РМЗ та групою пацієнтів ФАМ – у межах між $x_{(1)} = 0,415$, $x_{(n)} = 0,493$. Звідси випливає, що маємо безпомилкову діагностику для пацієнтів РМЗ: якщо позначити за H гіпотезу про захворювання пацієнта на РМЗ, а за $\bar{H}$ – альтернативну гіпотезу про захворювання на ФАМ обстеженого пацієнта, то імовірність похибки першого роду дорівнює нулю $P(\bar{H}/H) = 0$ у цього критерію. Таким чином, кожному пацієнту, хворому на РМЗ, буде завжди ставитись правильний діагноз.

Використовуючи усереднену p -статистику між ФАМ-пацієнтом та групою РМЗ-пацієнтів та довірчий інтервал $x_{(1)} = 0,649$ та $x_{(n)} = 0,887$, побудований за допомогою порядкових статистик для РМЗ-пацієнтів отримуємо, що для 44 ФАМ-пацієнтів 11 пацієнтів будуть помилково продіагностовані як РМЗ-пацієнти, оскільки показники цих пацієнтів належать довірчому інтервалу $I = (0,649; 0,887)$. Решта усіх інших пацієнтів (33 людини) будуть продіагностовані правильно, як ФАМ-пацієнти. Таким чином, похибка помилково продіагностованих пацієнтів складає 25%.

Основні висновки, отримані на підставі аналізу одержаних результатів, можна сформулювати таким чином.

1) Якщо внаслідок застосування критерію діагностуємо наявність ФАМ-захворювання у пацієнта, то імовірність цієї події близька до одиниці та імовірність події, що у цього пацієнта може бути рак молочної залози практично дорівнює нулю.

2) Якщо при застосуванні критерію отримали діагноз РМЗ, то це ще не означає, що у цього пацієнта дійсно є захворювання на РМЗ, імовірність цієї події дорівнює 75%, тобто є досить високою, але при цьому усі РМЗ-пацієнти діагностуються як РМЗ-пацієнти, та імовірність їх пропустити дорівнює нулю. Для остаточного переконання наявності РМЗ у такого пацієнта, необхідно використовувати додаткові критерії, що описані у монографіях [12, 13].

1. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с. 2. Ключин Д.А., Петунин Ю.И. Непараметрический критерий эквивалентности генеральных совокупностей, основанный на мере близости между выборками // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 147–163. 3. Hill B.M. Posterior distribution of percentiles: Bayes' theorem for sampling from a population // Journal of American Stat. Assoc. – 1968. – vol. 63, № 322. – P. 677–691. 4. Мадреимов И., Петунин Ю.И. Характеризация равномерного распределения с помощью порядковых статистик // Теор. вероятностей и мат. статистика. – 1982. – 27. – С. 96–102. 5. Andrushkiw R.I., Klyushin D.A., Petunin Yu.I., Lysyuk V.N. Construction of the bulk of general population in the case of exchangeable sample values // In: Proceedings of the International Conference of Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Science (METMBS'03). – Las Vegas, Nevada, USA, June 26–29, 2003. – P.486–489. 6. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 436 с. 7. Матвейчук С.А., Петунин Ю.И. Обобщение схемы Бернулли, возникающее в вариационной статистике. I // Укр. матем. журнал. – 1991. – 42, № 4. – С. 518–528. 8. Матвейчук С.А., Петунин Ю.И. Обобщение схемы Бернулли, возникающее в вариационной статистике. II // Укр. матем. журнал. – 1991. – 48, № 6. – С. 779–785. 9. Johnson N., Kotz S. Some generalizations of Bernoulli and Polya-Eggenberger contagion models // Statist. Paper. – 1991 – 32. – P.1–17. 10. Петунин Ю.И., Семейко Н.Г. Случайные точечные процессы с независимым маркированием // ДАН СССР. – 1986. – Т.288, № 4. – с.823–827. 11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т.II. – М.: Мир, 1967. – 752 с. 12. Ключин Д.А., Петунин Ю.И. Доказательная медицина. Применение статистических методов. – М.: "Издательский дом Вильямс", 2008 – 320 с. 13. Andrushkiw R.I., Boroday N.V., Klyushin D.A., Petunin Yu.I. Computer-Aided Cytogenetical Method of Cancer Diagnosis. – N.Y.: Nova Science Publisher, , 2007. – 303 p.

Надійшла до редколегії 07.02.10

УДК 517.929

Н. Гаркуша, канд. екон. наук, наук. співроб.
Д. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ДИНАМІКА ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЇ ЛЕСЛІ

При вивченні екологічних процесів у широкому ежітку присутні математичні моделі різних типів – як неперервні, так і дискретні моделі. В роботі розглянута лінійна дискретна модель вікової структури популяції – модель Леслі. Знайдено умови існування вироджених станів рівноваги та їх стійкості.

Different types of mathematical models, both continuous and discrete, are widely used in studying of ecological processes. A linear discrete model of age structure of population (the Leslie model) is considered in the paper. Existing conditions of singular states of equilibrium and their stability were obtained.

1. Лінійна стаціонарна дискретна модель Леслі

Існує велика кількість різноманітних математичних моделей динаміки популяції [1–4]. Але більша їх частина описує тільки загальну кількість популяції. Особливістю моделі Леслі є те, що у ній враховується вікова структура. У

життєвому циклі кожного виду можна виділити декілька стадій розвитку. Тоді популяція природним чином розпадається на деяку кількість вікових груп. Спосіб розбиття популяції на групи визначається біологічними особливостями виду та специфікою задачі. Ці твердження приводять до побудови моделі Леслі.

Розіб'ємо популяцію на декілька вікових класів $i = \overline{1, n}$. Нехай $x_i(k)$ кількість осіб вікового класу i в момент часу k . Час k визначає дискретні моменти, що співпадають з моментами переходу з одної вікової групи у наступну. Зміна структури популяції у часі складається з наступних процесів. В момент часу $k = 1, 2, 3, \dots$ відбувається перехід популяції вікового класу i у віковий клас $i+1$, $i = \overline{1, n-1}$. Причому частина популяції вмирає, а переходить лише $p_i x_i(k)$, $0 < p_i < 1$, $i = \overline{1, n-1}$. Популяція вікового класу $i = n$ вмирає повністю. А популяція новонароджуваного вікового класу $i = 1$ складається з суми осіб, що народились в кожному з $i = \overline{2, n}$ класів з коефіцієнтами народжуваності f_i , $i = \overline{1, n}$. Тобто f_i – це середня кількість нащадків, що народжуються однією особою віку i за одиницю часу. За своєю суттю всі параметри f_i є невід'ємними величинами і $f_i = 0$ тоді і тільки тоді, коли відповідний i -й віковий клас не залишає нащадків. Тоді чисельність осіб наймолодшого віку в момент часу $k+1$ визначається виразом

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^n f_i x_i(k).$$

Функція переходу з вікової групи i у вікову групу $i+1$, $i = \overline{2, n}$ має вигляд лінійної функції

$$x_i(k+1) = p_{i-1} x_{i-1}(k), \quad i = \overline{2, n},$$

де коефіцієнти p_i , $0 \leq p_i \leq 1$ визначають частку осіб віку i , що дожила до наступного року. При побудові моделі не враховується вплив середовища та вплив загальної кількості популяції на народжуваність та смертність.

Кількісний розподіл популяції по вікових групах в кожний момент часу визначається вектор-стовбчиком $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$. Звідси математичну модель динаміки можна записати у векторно-матричному вигляді

$$x(k+1) = Lx(k), \quad (1.1)$$

де квадратна матриця L розмірності $n \times n$ має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

і називається матрицею Леслі.

2. Дослідження стійкості лінійної моделі Леслі

Розглянемо лінійну дискретну модель Леслі (1.1). В роботах [1, стор.57], [2, 59-70] дослідження динаміки моделі Леслі спиралось на теорему Декарта ("кількість додатних коренів у поліномі з додатними коефіцієнтами дорівнює кількості змін значень в ряді коефіцієнтів, або на парне число менше". Окремі відомості про динаміку моделі Леслі освітлені в [4]. В роботах [5,6] дослідження моделі Леслі більш математично обґрунтоване. В наведеній статті проведено детальне, строго математичне дослідження існування особливої точки (особливого променя) та її стійкості (асимптотична стійкість).

Нехай система стаціонарна, тобто коефіцієнти народжуваності f_i та коефіцієнти p_i , які визначають частину осіб, що перейшли в іншу вікову групу, сталі для всіх вікових груп $i = \overline{1, n}$, є сталими. Знайдемо стан рівноваги автономної лінійної дискретної моделі Леслі.

Введемо наступне позначення

$$R_0 = f_1 + f_2 p_1 + f_3 p_1 p_2 + \dots + f_n p_1 p_2 \dots p_{n-1}. \quad (2.1)$$

Має місце твердження.

Лема 2.1. Система лінійних різницевих рівнянь (1.1) має єдиний стан рівноваги $x(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ тоді і тільки тоді, коли $R_0 \neq 1$. Якщо ж $R_0 = 1$, то стан рівноваги являє собою промінь

$$l = (\xi, p_1 \xi, p_1 p_2 \xi, \dots, p_1 p_2 \dots p_{n-1} \xi), \quad 0 \leq \xi \leq +\infty. \quad (2.2)$$

Доведення. Стаціонарний стан рівноваги $x(k) = x^*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ різницевої системи (1.1) визначається розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь

$$Lx^* = x^*, \text{ або } (L - I)x^* = 0.$$

А однорідна система алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок $x^* = 0$ тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю. Розкривши визначник по верхньому рядку, отримаємо

$$\det(L-I) = \begin{vmatrix} f_1-1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (f_1-1) + (-1) p_1 \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкривши другий визначник, отримаємо

$$\det(L-I) = (-1)^{n-1} (f_1-1) + (-1)^{n-1} p_1 f_2 + (-1)^2 p_1 p_2 \begin{vmatrix} f_3 & f_4 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -1 \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи процес далі, отримаємо

$$\det(L-I) = (-1)^{n-1} [(f_1-1) + p_1 f_2 + p_1 p_2 f_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n] = (-1)^{n-1} [R_0 - 1].$$

Таким чином, система має єдиний розв'язок $x(k) \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли $R_0 \neq 1$. Оскільки визначник, складений з останніх $n-1$ рядків і останніх $n-1$ стовпців, завжди відмінний від нуля, то

$$\text{rank}(L-I) = n-1$$

і розв'язок (додатний розв'язок) системи має вигляд

$$x_1 = \xi, x_2 = p_1 \xi, x_3 = p_1 p_2 \xi, \dots, x_n = p_1 p_2 \dots p_{n-1} \xi, \xi \geq 0. \quad (2.3)$$

Проведемо дослідження стійкості особливого проміння у випадку $R_0 = 1$ і нульового стану рівноваги у випадку $R_0 \neq 1$. Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. Нехай $R_0 = 1$. Тоді особливий промінь є асимптотично стійкою множиною.

Доведення. Розкриємо характеристичне рівняння системи

$$\det(L - \lambda I) = 0.$$

Як і для попереднього випадку отримуємо

$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} f_1 - \lambda & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (f_1 - \lambda) + (-1) p_1 \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_2 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Розкривши другий визначник, отримаємо

$$\det(L - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - p_1 f_2 \lambda^{n-2}] + (-1)^2 p_1 p_2 \begin{vmatrix} f_3 & f_4 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_3 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи процес далі, маємо

$$\det(L - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - p_1 f_2 \lambda^{n-2} - p_1 p_2 \lambda^{n-3} - \dots - p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n].$$

І характеристичне рівняння лінійної системи Леслі має вигляд

$$\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - p_1 f_2 \lambda^{n-2} - p_1 p_2 f_3 \lambda^{n-3} - p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n = 0. \quad (2.4)$$

За умовою $R_0 = 1$, $R_0 = f_1 + p_1 f_2 + p_1 p_2 f_3 + p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n$. Тому, як неважко перевірити, рівняння має один корінь $\lambda_1 = 1$, і випадок критичний.

Покажемо, що, не дивлячись на це, стан рівноваги $x(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ є стійким, а промінь – асимптотично стійка множина. Доведення складається з наступних чотирьох пунктів.

1. Покажемо, що корінь $\lambda_1 = 1$ є коренем кратності одиниця. Нехай, від супротивного, це не так і корінь $\lambda_1 = 1$ є коренем кратності $m > 1$. Тоді корінь $\lambda_1 = 1$ є також і коренем похідної

$$f'(\lambda) = n \lambda^{n-1} - (n-1) f_1 \lambda^{n-2} - (n-2) f_2 p_1 \lambda^{n-3} - \dots - f_{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-2},$$

Тобто

$$n - (n-1) f_1 - (n-2) f_2 p_1 - \dots - f_{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-2} = 0. \quad (2.5)$$

За умовою

$$R_0 = f_1 + f_2 p_1 + f_3 p_1 p_2 + \dots + f_n p_1 p_2 \dots p_{n-1} = 1.$$

Перепишемо (2.5) у вигляді

$$n[1 - f_1 - f_2 p_1 - f_3 p_1 p_2 - \dots - f_{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-2} - f_n p_1 p_2 \dots p_{n-1}] + f_1 + 2 f_2 p_1 + 3 f_3 p_1 p_2 + \dots + (n-1) f_{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-2} + n f_n p_1 p_2 \dots p_{n-1} = 0$$

Звідси отримуємо, що

$$f_1 + 2f_2p_1 + 3f_3p_1p_2 + \dots + (n-1)f_{n-1}p_1p_2\dots p_{n-2} + nf_n p_1p_2\dots p_{n-1} = 0,$$

чого не може бути, оскільки всі коефіцієнти $f_i, p_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n-1}$ додатні.

2. Покажемо, що характеристичне рівняння не має дійсних коренів, більших за одиницю. Запишемо характеристичний поліном у вигляді

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n-1}} = \lambda - \left(f_1 + \frac{f_2p_1}{\lambda} + \frac{f_3p_1p_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{f_n p_1p_2\dots p_{n-1}}{\lambda^{n-1}} \right).$$

При $\lambda = 1$ виконується рівність $f(1) = 1$. При $\lambda \rightarrow +\infty$ перший доданок монотонно збільшується, а другий доданок

$$f_1 + \frac{f_2p_1}{\lambda} + \frac{f_3p_1p_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{f_n p_1p_2\dots p_{n-1}}{\lambda^{n-1}}$$

монотонно згасає. Тому

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n-1}} \rightarrow +\infty.$$

І функція $f(\lambda)$ при $\lambda > 1$ не має коренів.

3. Покажемо, що характеристичне рівняння не має комплексних коренів, модуль яких більше одиниці. Нехай, від супротивного, існує корінь $\lambda_s = Ae^{i\phi}$, причому $A > 1$. Але тоді

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\lambda_s)}{\lambda_s^{n-1}} \right| &= \left| \lambda_s - \left(f_1 + \frac{f_2p_1}{\lambda_s} + \frac{f_3p_1p_2}{\lambda_s^2} + \dots + \frac{f_n p_1p_2\dots p_{n-1}}{\lambda_s^{n-1}} \right) \right| \geq \left| Ae^{i\phi} \right| - f_1 - \frac{f_2p_1}{|Ae^{i\phi}|} - \frac{f_3p_1p_2}{|Ae^{i\phi}|^2} - \dots - \frac{f_n p_1p_2\dots p_{n-1}}{|Ae^{i\phi}|^{n-1}} = \\ &= |A| - f_1 - f_2p_1 - f_3p_1p_2 - \dots - f_n p_1p_2\dots p_{n-1} > 0, \end{aligned}$$

що суперечить припущенню про те, що $\lambda_s = Ae^{i\phi}$ – корінь рівняння.

4. Нарешті, покажемо, що характеристичне рівняння не має коренем $\lambda_s = -1$. Дійсно, якщо $\lambda_s = -1$ є коренем, то

$$(-1) - f_1(-1)^{n-1} - f_2p_1(-1)^{n-2} - f_3p_1p_2(-1)^{n-3} - \dots - f_n p_1p_2\dots p_{n-1} = 0,$$

тобто

$$f_1(-1)^{n-1} + f_2p_1(-1)^{n-2} + f_3p_1p_2(-1)^{n-3} + \dots - f_n p_1p_2\dots p_{n-1} = (-1)^n.$$

Оскільки всі коефіцієнти додатні, то помноживши записану рівність на $(-1)^n$, отримаємо протиріччя

$$\begin{aligned} 1 &= (-1)^{2n} = f_1(-1)^{2n-1} + f_2p_1(-1)^{2n-2} + \\ &+ f_3p_1p_2(-1)^{2n-3} + \dots - (-1)^n f_n p_1p_2\dots p_{n-1} > \\ &> f_1 + f_2p_1 + f_3p_1p_2 + \dots + f_n p_1p_2\dots p_n = 1. \end{aligned}$$

Таким чином отримали, що при $R_0 = 1$ характеристичне рівняння системи має лише один корінь $\lambda_1 = 1$, а інші корені $\lambda_i: |\lambda_i| < 1, i = \overline{2, n}$. І нульовий стан рівноваги $x(k) \equiv 0, k = 0, 1, 2, \dots$ є стійким по Ляпунову, а особлива пряма (2.3) є асимптотично стійкою множиною.

Розглянемо другу можливість розташування параметрів системи, а саме, коли $R_0 \neq 1$.

Теорема 2.2. Нехай $R_0 \neq 1$. Тоді для асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги необхідно і достатньо, щоб $R_0 < 1$.

Необхідність. Нехай стан рівноваги $x(k) \equiv 0, k = 0, 1, 2, \dots$ є асимптотично стійким, тобто всі власні числа системи (1.1) по модулю менші одиниці $\lambda_i: |\lambda_i| < 1, i = \overline{1, n}$. Покажемо, що $R_0 < 1$. Нехай, від супротивного, це не так і

$$R_0 = f_1 + f_2p_1 + f_3p_1p_2 + \dots + f_n p_1p_2\dots p_{n-1} > 1.$$

Для простоти зробимо заміну

$a_1 = f_1, a_2 = p_1f_2, a_3 = p_1p_2f_3, a_n = p_1p_2\dots p_{n-1}f_n$. Тоді характеристичне рівняння (2.4) прийме вигляд

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - a_3\lambda^{n-3} - \dots - a_n = 0, a_i > 0, i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Зробимо заміну

$$\lambda = \frac{1+z}{1-z}, \quad (2.7)$$

і перейдемо до характеристичного рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню. Отримаємо

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n - a_1 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{n-1} - a_2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{n-2} - a_3 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{n-3} - \dots - a_n = 0, a_i > 0, i = \overline{1, n}. \quad (2.8)$$

Або

$$(1+z)^n - a_1(1+z)^{n-1}(1-z) - a_2(1+z)^{n-2}(1-z)^2 - a_3(1+z)^{n-3}(1-z)^3 - \dots - a_n(1-z)^n = 0.$$

Перетворимо отримане рівняння до стандартного вигляду

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0. \quad (2.9)$$

Попередньо зробимо проміжну заміну

$$z = 1-t \text{ або } 1-z=t, \quad 1+z=2-t \quad (2.10)$$

І отримаємо

$$(2-t)^n - a_1(2-t)^{n-1}t - a_2(2-t)^{n-2}t^2 - a_3(2-t)^{n-3}t^3 - \dots - a_nt^n = 0.$$

Розкриємо дужки

$$\begin{aligned} & \left[(-1)^0 C_n^0 2^n t^0 + (-1)^1 C_n^1 2^{n-1} t^1 + (-1)^2 C_n^2 2^{n-2} t^2 + \dots + (-1)^n C_n^n 2^0 t^n \right] - \\ & - a_1 t \left[(-1)^0 C_{n-1}^0 2^{n-1} t^0 + (-1)^1 C_{n-1}^1 2^{n-2} t^1 + (-1)^2 C_{n-1}^2 2^{n-3} t^2 + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 2^0 t^{n-1} \right] - \\ & - a_2 t^2 \left[(-1)^0 C_{n-2}^0 2^{n-2} t^0 + (-1)^1 C_{n-2}^1 2^{n-3} t^1 + (-1)^2 C_{n-2}^2 2^{n-4} t^2 + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} 2^0 t^{n-2} \right] - \dots \\ & \dots - a_{n-1} t^{n-1} \left[(-1)^0 C_1^0 2^1 t^0 + (-1)^1 C_1^1 2^0 t^1 \right] - a_n t^n \left[(-1)^0 C_0^0 t^0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях t^i , $i = \overline{1, n}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n t^0 + \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} t + \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} t^2 + \dots \\ & \dots + \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 t^n = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Повертаємось до змінної $z : t = 1-z$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n + \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} (1-z) + \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} (1-z)^2 + \dots \\ & \dots + \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 (1-z)^n = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A_0 &= \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n, \\ A_1 &= \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1}, \\ A_2 &= \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2}, \\ A_{n-1} &= \left[(-1)^{n-1} C_n^{n-1} - a_1 (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} - a_2 (-1)^{n-3} C_{n-2}^{n-3} - \dots - a_{n-1} (-1)^0 C_1^0 \right] 2^1, \\ A_n &= \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тоді характеристичне рівняння (2.11) буде мати вигляд

$$A_0 + A_1(1-z) + A_2(1-z)^2 + \dots + A_n(1-z)^n = 0.$$

Розкриємо дужки

$$(1-z)^i = (-1)^0 C_i^0 z^0 + (-1)^1 C_i^1 z^1 + (-1)^2 C_i^2 z^2 + \dots + (-1)^i C_i^i z^i, \quad i = \overline{1, n}$$

і підставимо замість відповідних членів. Отримаємо

$$\begin{aligned} & A_0 \left[(-1)^0 C_0^0 z^0 \right] + A_1 \left[(-1)^0 C_1^0 z^0 + (-1)^1 C_1^1 z^1 \right] + A_2 \left[(-1)^0 C_2^0 z^0 + (-1)^1 C_2^1 z^1 + (-1)^2 C_2^2 z^2 \right] + \dots \\ & + A_n \left[(-1)^0 C_n^0 z^0 + (-1)^1 C_n^1 z^1 + (-1)^2 C_n^2 z^2 + \dots + (-1)^n C_n^n z^n \right] = 0. \end{aligned}$$

Зберемо члени при однакових степенях z^i , $i = \overline{1, n}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & (-1)^0 \left[C_0^0 A_0 + C_1^0 A_1 + C_2^0 A_2 + \dots + C_n^0 A_n \right] z^0 + (-1)^1 \left[C_1^1 A_1 + C_2^1 A_2 + \dots + C_n^1 A_n \right] z^1 + (-1)^2 \left[C_2^2 A_2 + C_3^2 A_3 + \dots + C_n^2 A_n \right] z^2 + \\ & \dots + (-1)^{n-1} \left[C_{n-1}^{n-1} A_{n-1} + C_n^{n-1} A_n \right] z^{n-1} + (-1)^n C_n^n A_n z^n = 0. \end{aligned}$$

Нарешті, підставимо замість A_i , $i = \overline{0, n}$ їх значення, що визначені в (2.12). Отримаємо наступне

$$\begin{aligned} & (-1)^0 \left\{ C_0^0 \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n + C_1^0 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} + C_2^0 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \left. + C_n^0 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\} z^0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + C_n^1 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \Big\} z^1 + \\ & \dots + (-1)^{n-1} \left\{ C_{n-1}^{n-1} \left[(-1)^{n-1} C_n^{n-1} - a_1 (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} - a_2 (-1)^{n-3} C_{n-2}^{n-3} - \dots - a_{n-1} (-1)^0 C_1^0 \right] 2^1 + \right. \\ & \quad \left. + C_n^{n-1} \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] \right\} z^{n-1} + \\ & + (-1)^n C_n^n \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 z^n = 0. \end{aligned}$$

Таким чином отримали характеристичне рівняння вигляду (2.9), де

$$\begin{aligned} p_0 &= (-1)^n C_n^n \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0, \\ p_1 &= (-1)^{n-1} \left\{ C_{n-1}^{n-1} \left[(-1)^{n-1} C_n^{n-1} - a_1 (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} - a_2 (-1)^{n-3} C_{n-2}^{n-3} - \dots - a_{n-1} (-1)^0 C_1^0 \right] 2^1 + \right. \\ & \quad \left. + C_n^{n-1} \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] \right\} \\ p_{n-1} &= (-1)^1 \left\{ C_1^1 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_0^0 \right] 2^{n-1} + C_2^2 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + C_n^1 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\}, \\ p_n &= (-1)^0 \left\{ C_0^0 \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n + C_1^1 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} + C_2^2 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + C_n^0 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\}. \end{aligned}$$

Обчислимо коефіцієнти p_0 і p_n .

$$\begin{aligned} p_0 &= (-1)^n C_n^n \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 = \\ &= (-1)^n \left[(-1)^n - a_1 (-1)^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} - \dots - a_n \right] = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} p_n &= (-1)^0 \left\{ C_0^0 \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n + C_1^1 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} + C_2^2 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + C_n^0 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\} = \\ &= \left[C_n^0 2^n - C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} + \dots + (-1)^n C_n^n 2^0 \right] + (-1)^1 \left[C_{n-1}^0 2^{n-1} - C_{n-1}^1 2^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 2^0 \right] a_1 + \\ & \quad + (-1)^3 \left[C_{n-2}^0 2^{n-2} - C_{n-2}^1 2^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} 2^0 \right] a_2 + \dots (-1)^{2n+1} C_0^0 2^0 a_n. \end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення

$$(2-1)^i = C_i^0 2^i - C_i^1 2^{i-1} + C_i^2 2^{i-2} + \dots + (-1)^i C_i^i 2^0, \quad (2.14)$$

отримуємо, що

$$p_n = 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n. \quad (2.15)$$

Обчислимо суму

$$S_n = p_0 + \dots + p_{n-2} + p_{n-1} + p_n.$$

Маємо

$$\begin{aligned} S &= (-1)^n C_n^n \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 + \\ &+ (-1)^{n-1} \left\{ C_{n-1}^{n-1} \left[(-1)^{n-1} C_n^{n-1} - a_1 (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} - a_2 (-1)^{n-3} C_{n-2}^{n-3} - \dots - a_{n-1} (-1)^0 C_1^0 \right] 2^1 + \right. \\ &+ C_n^{n-1} \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] \Big\} + (-1)^2 \left\{ C_2^2 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + C_n^2 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\} + \\ &+ (-1)^1 \left\{ C_1^1 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} + C_2^2 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + C_n^1 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\} + \end{aligned}$$

$$+(-1)^0 \left\{ C_0^0 \left[(-1)^0 C_n^0 \right] 2^n + C_1^0 \left[(-1)^1 C_n^1 - a_1 (-1)^0 C_{n-1}^0 \right] 2^{n-1} + C_2^0 \left[(-1)^2 C_n^2 - a_1 (-1)^1 C_{n-1}^1 - a_2 (-1)^0 C_{n-2}^0 \right] 2^{n-2} + \dots \right. \\ \left. \dots + C_n^0 \left[(-1)^n C_n^n - a_1 (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} - a_2 (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} - \dots - a_n (-1)^0 C_0^0 \right] 2^0 \right\}.$$

Використовуючи (2.14), отримуємо, що

$$S = -2^n < 0.$$

Звідси, якщо буде виконуватись нерівність $R_0 > 1$, то хоч один інший коефіцієнт характеристичного рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню, буде від'ємним і буде порушуватись необхідна умова стійкості, що суперечить умові теореми.

Достатність. Якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння (2.6) додатні і задовольняють умові

$$\sum_{i=1}^n a_i < 1,$$

то асимптотична стійкість нульового розв'язку впливає з відомих результатів з стійкості різницевого рівняння [7,8].

Таким чином, отримали наступне.

1. Якщо $R_0 \neq 1$, то існує єдина особлива точка $x(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Причому вона асимптотично стійка, якщо $R_0 < 1$ і нестійка, якщо $R_0 > 1$.
2. Якщо $R_0 \neq 1$, то існує напівпряма особливих точок, яка є стійкою по Ляпунову.
3. Звідси, значення параметрів системи, при яких $R_0 = 1$ є біфуркаційними.

1. Недорезов Л.В. Лекции по математической экологии. – Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. – 161 с. 2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с. 3. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с. 4. Смит Ж.М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. – 184 с. 5. Хусаинов Д.Я., Никифорова Н.С. Стійкість однієї моделі динаміки популяції // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 1997. – С.218-229. 6. Хусаинов Д.Я., Никифорова Н.С. Устойчивость одного разностного уравнения с положительными коэффициентами // Украинский математический журнал, Т.51, №9, 1999. – С.1276-1280. 7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 461 с. 8. Хейл Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

Надійшла до редколегії 17.02.11

УДК 517.9

І. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ПОРІВНЯННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТІВ ТА БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ АРГУМЕНТІВ

Побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу у випадку коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму, а також для розв'язку системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення аргументу у випадку коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму коефіцієнти залежать від марковського процесу. Досліджено за допомогою побудованих моментних рівнянь умови L_2 -стійкості нульового розв'язку та умови стійкості у середньому квадратичному такого типу систем.

Constructing the moment's equations for the system of linear differential equations with delay arguments in case where right part of system has random process white noise type and without delay with random coefficients. Investigating with help that moment's equations conditions L_2 – stability of zero solutions and conditions of stability in mean square.

Вступ

Більш реально і природно описують ситуацію для побудови моделей економічних систем, зокрема моделей накопичення капіталу для інвестиційних компаній [1], системи стохастичних систем із запізненням, які поряд зі стохастичними рівняннями з випадковими коефіцієнтами без запізнення будуть розглядатися в даній роботі. В роботі [2] розглядаються питання стійкості руху систем стрибкоподібного типу. В роботах [3] вивчено алгебраїчні критерії стійкості, асимптотичної стійкості динамічних систем. В роботі [4] досліджено питання стійкості, асимптотичної стійкості диференціально-функціональних систем нейтрального типу із запізненням. В монографії [6] викладено загальні теореми і алгоритми практичної стійкості динамічних систем із різними фазовими обмеженнями. В монографії [5] та роботах [7,8] розглянуто питання стійкості асимптотичної стійкості і р-стійкості стохастичних динамічних систем із післядією та нейтрального типу. В даній роботі спираючись на методи дослідження стохастичних систем в роботах [9,10], побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням у випадку коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму і для систем стохастичних рівнянь з випадковими параметрами без запізнення.

1. Постановка задачі.

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}_t, t \geq 0\})$ розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь для $X(t) \equiv X(t, \omega)$

$$dX(t) = A(\xi(t))X(t)dt + B(\xi(t))X(t)dw(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

з початковою умовою $X(0) = \phi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, де $w(t)$ – процес Вінера, для якого виконано умови

$$w(0) = 0; \quad \langle w(t) \rangle = 0 \quad (t > 0); \quad \langle w^2(t) \rangle = t; \quad (2)$$

$w(t)$ – нормальний процес.

Припускається, що $\xi(t)$ – марковський випадковий процес, який приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з ймовірностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\} \quad (k = 1, \dots, n),$$

які задовольняють систему диференціальних рівнянь [11]

$$\begin{aligned} \frac{dp_k(t)}{dt} &= \sum_{s=1}^n a_{ks}(t)p_s(t) \quad (k = 1, \dots, n), \quad \sum_{k=1}^n a_{ks}(t) \equiv 0, \\ a_{ks}(t) &\geq 0 \quad (k \neq s), \quad a_{kk}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ставиться задача побудови моментних рівнянь другого порядку для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь (1).

Крім того, на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}_t, t \geq 0\})$ розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу для $X(t) \equiv X(t, \omega)$

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)X(t-\tau)dw(t), \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

з початковою умовою $X(0) = \phi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, де $w(t)$ – процес Вінера, для якого виконано умови (2).

Ставиться задача побудови моментних рівнянь другого порядку для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь (4).

2. Основний результат.

Теорема 2. Нехай система диференціальних рівнянь (4) має сильний розв'язок $X(t) \equiv X(t, \omega)$. Тоді існують моменти другого порядку $D(t) \equiv \langle X(t)X^*(t) \rangle$ випадкового розв'язку $X(t)$, які задовольняють систему рівнянь

$$\frac{dD(t)}{dt} = D(t)A^*(t) + A(t)D(t) + B(t)D(t-\tau)B^*(t). \quad (5)$$

Доведення. 1. Перейдемо від системи диференціальних рівнянь до апроксимуючої системи різницевих рівнянь [8, 9]

$$X_{n+1} = X_n + hA(t_n)X_n + B(t_n)X_{n-N}\sqrt{h}\zeta_n, \quad (6)$$

де використовуються позначення

$$t_n = nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad h > 0, \quad X_n = X(nh), \quad N = \tau h^{-1}.$$

"Зірочка" позначає транспонування вектора або матриці. При цьому знаходимо рівність

$$X_{n+1}^* = X_n^* + hX_n^*A_n^* + X_{n-N}^*B_n^*\sqrt{h}\zeta_n$$

Знаходимо добуток векторів

$$\begin{aligned} X_{n+1}X_{n+1}^* &= X_nX_n^* + hX_nX_n^*A_n^* + hA_nX_nX_n^* + \sqrt{h}\zeta_nX_nX_{n-N}^*B_n^* + \sqrt{h}\zeta_nB_nX_{n-N}X_{n-N}^*X_n^* + h\zeta_n^2B_nX_{n-N}X_{n-N}^*B_n^* + \\ &+ h^2A_nX_nX_n^*A_n^* + h\sqrt{h}\zeta_nA_nX_nX_{n-N}^*B_n^* + h\sqrt{h}\zeta_nB_nX_{n-N}X_n^*A_n^*. \end{aligned}$$

Застосовуємо операцію знаходження математичного сподівання $\langle \cdot \rangle$. Припускаємо, що ζ_n – послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\zeta_n = \pm 1$; $P\{\zeta_n = 1\} = 0,5$; $P\{\zeta_n = -1\} = 0,5$

При цьому виконуються рівності

$$\langle \zeta_n \rangle = 0, \quad \langle \zeta_n^2 \rangle = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для матриці других початкових моментів

$$D_n = \langle X_nX_n^* \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

отримаємо систему різницевих рівнянь

$$D_{n+1} = D_n + h_nA_n^* + hA_nD_n + h^2B_nD_{n-N}B_n^*,$$

яка при $h \rightarrow +0$ перетворюється в систему диференціальних рівнянь (5) для матриці $D(t)$.

Теорема 2. Нехай система диференціальних рівнянь (1) має сильний розв'язок $X(t) \equiv X(t, \omega)$. Тоді існують моменти другого порядку $K(t) \equiv \langle X(t)X^*(t) \rangle$ випадкового розв'язку $X(t)$ системи рівнянь (1) які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{s=1}^n K_s(t) \\ \frac{dK_s(t)}{dt} &= K_s(t)A_s^* + A_sK_s(t) + B_sK(t)B_s^*, \quad n = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

Ідея доведення теореми аналогічна доведенню теореми 1.

Означення. Якщо при довільних початкових умовах будь-який розв'язок рівняння (5) або (7) прямує до нульової матриці, тоді нульовий розв'язок відповідно системи стохастичних диференціальних рівнянь (3) і (1) асимптотично стійкий у середньому квадратичному.

Нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) і (4) будемо називати L_2 – стійким, якщо для будь-якого розв'язку $X(t)$ системи рівнянь (1) або (4) збігається невластний інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \|x(t)\|^2 dt > 0.$$

3. Загальний випадок

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, P, F \equiv \{F_t, t \geq 0\})$ розглянемо систему лінійних диференціальних стохастичних рівнянь з декількома аргументами із запізненням

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + \sum_{k=1}^N B_k(t)X(t-\tau_k)dw_k(t),$$

$$\tau_k \geq 0, (k=1, \dots, N), \quad (8)$$

де $w_k(t)$ ($k=1, \dots, N$) – незалежні вінеровські випадкові процеси в стандартній формі, що задовольняють умови

$$w_k(0) = 0, \quad \langle w_k(t) \rangle = 0, \quad \langle w_k^2(t) \rangle = t,$$

$$\langle w_k(t)w_j(t) \rangle = 0 \quad (k \neq j); k, j = 1, \dots, N$$

Теорема 3. Матриці других початкових моментів $D(t) = \langle X(t)X^*(t) \rangle$ розв'язку $X(t) \equiv X(t, \omega)$ системи рівнянь (8) задовольняють систему матричних диференціальних рівнянь

$$\frac{dD(t)}{dt} = D(t)A^*(t) + A(t)D(t) + \sum_{k=1}^N B_k(t)D(t-\tau_k)B_k^*(t). \quad (9)$$

4. Модельні задачі

Модельна задача 1. Дослідимо стійкість розв'язків скалярного лінійного стохастичного диференціального рівняння виду (9)

$$dx(t) = ax(t)dt + \sum_{k=1}^N b_k x(t-\tau_k)dw_k(t), \quad \tau_k \geq 0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (10)$$

Рівняння (5) матиме вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2ay(t) + \sum_{k=1}^N b_k^2 y(t-\tau_k), \quad \tau_k \geq 0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (11)$$

для $y(t) = \langle x^2(t) \rangle$. Згідно з означенням розв'язку рівняння (11) асимптотично стійкі при

$$2a + \sum_{k=1}^N b_k^2 < 0$$

і нестійкі при

$$2a + \sum_{k=1}^N b_k^2 > 0.$$

Модельна задача 2. Дослідимо стійкість розв'язків скалярного лінійного стохастичного диференціального рівняння виду (1)

$$dx(t) = ax(t)dt + b(\xi(t))x(t)dw(t),$$

Рівняння виду (7) матиме вид

$$\frac{dk(t)}{dt} = 2ak(t) + \sum_{s=1}^n b_s^2 k(t), \quad (12)$$

для $k(t) = \langle x^2(t) \rangle$. Згідно з означенням розв'язку рівняння (12) асимптотично стійкі при

$$2a + \sum_{k=1}^n b_k^2 < 0$$

і нестійкі при

$$2a + \sum_{k=1}^n b_k^2 > 0.$$

Зауваження. В роботі [10] доведено наступний результат, який дозволяє отримати аналогічні умовам (7), умови стійкості за допомогою побудованих функцій Ляпунова

$$v_s(t, x) = \int_t^{+\infty} \langle w(y, X(y), \xi(y)) | X(t) = x, \xi(t) = \theta_s \rangle dy \quad (s=1, \dots, n) \quad (13)$$

Оскільки $v_s(t, x)$ ($s=1, \dots, n$) є квадратичними формами від x , покладаємо

$$v_s(t, x) = x^* C_s(t) x \quad (s=1, \dots, n),$$

де квадратична форма $w(x, \xi(t)) = x^* B(\xi(t)) x$, $B(\xi(t)) > 0$ задовольняє умови:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq w(x, \xi_k) \leq \lambda_2 \|x\|^2 \quad (\lambda_1 > 0; k = 1, \dots, n).$$

Теорема 4. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (1) був асимптотично стійким у середньому квадратичному і L_2 – стійким необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь для сталих матриць $C_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$)

$$C_s A_s + A_s^* C_s + \sum_{k=1}^n a_{ks} C_s + H_s^* C_s H_s + B_s = 0$$

$$(s = 1, \dots, n)$$

при $B_s > 0$ мала єдиний розв'язок $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$), де позначено

$$A_s = A(\xi_s), \quad H_s = H(\xi_s), \quad B_s = B(\xi_s) \quad (s = 1, \dots, n)$$

Зауваження. Також отримано моментні рівняння, у випадку, коли коефіцієнти системи рівнянь (1) залежать від напівмарковського (марковського) процесу.

Висновки

В даній роботі спираючись на методи дослідження стохастичних систем в інших роботах автора побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням у випадку коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму і для систем стохастичних рівнянь з випадковими параметрами без запізнення.

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения: пер. с англ. / Б. Оксендаль. – М.: Мир, ООО "Изд-во АСТ", 2003. – 408 с.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений / А.В. Скороход. – Київ : Наук. думка, 1987. – 328 с.
3. Кореневский Д.Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах / Д.Г. Кореневский. – К.: Академперіодика, 2008. – 128 с.
4. Хусаинов Д.Я. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д.Я. Хусаинов, А.В. Шатырко. – Изд-во КНУ, 1997. – 236 с.
5. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К.Ю. Острем. – М.: Мир, 1973. – 322 с.
6. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гарашенко, Н.Ф. Кириченко. – К.: Вища шк., 1975. – 328 с.
7. Ясинський В.К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В.К. Ясинський, Є.В. Ясинський. – Київ : Вид-во "ТВИМС", 2005. – 578 с.
8. Проблеми стабілізації імпульсних систем випадкової структури зі скінченною післядією / Королік В.С., Ясинський В.К., Мусурівський В.І., Дорошенко І.В. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2010. – 240 с. – монографія.
9. Валєєв К.Г. Оптимізація випадкових процесів: монографія / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2008. – 222 с.
10. Джалладова І.А. Оптимізація стохастичних систем: монографія / І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2005. – 284 с.
11. Тихонов В.Н., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

Надійшла до редколегії 18.02.11

УДК 519.85

Г. Доленко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Є. Конарева, студ., Д. Мановицька, студ.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ РЕГІОНАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ

Метою статті є формування математичної моделі оцінки ефективності регіонального економічного розвитку організаційної системи.

The aim of this paper is forming of the mathematical model of evaluation of regional economic development effectiveness of organizational system. This model is proposed to consideration.

Вступ

Актуальною проблемою організаційних систем на рівні регіонів є оцінка ефективності їх економічного розвитку [1-12].

Розробка математичних моделей для проведення оцінки діяльності організаційної системи на регіональному рівні є основою для вдосконалення регіональної політики управління процесами розвитку економіки та формування методології оцінки елементів регіональної системи.

Методологічні підходи до вивчення національних і регіональних систем сформулювали такі науковці, як Глушков В.М., Міхалевич В.С., Іріков В.А. та ін. Детальне вивчення розвитку організацій проведено в роботах: Волковица В.Л., Треньова В.М., Новікова Д.О., Недосєкіна А.О. та інших [1-10].

В статті запропоновано нову модель для визначення комплексної оцінки соціально-економічного розвитку регіональної організаційної системи, яка дозволяє побудувати ієрархічний підхід для оцінки ефективності регіонального економічного розвитку.

Математична модель для оцінки ефективності

Побудуємо математичну модель оцінки ефективності регіонального соціально-економічного розвитку організаційної системи (EEDM- Evaluation Efficiency Development Model):

$$EEDM = \langle T, L, \Phi \rangle,$$

де T – дерево показників, що представлено на рисунку 1.

Нехай F_0 – головна ціль організаційної системи.

На другому рівні ієрархії T - підсистеми організаційної системи R_i , $i = 1, \dots, m$. Для задачі оцінки регіонального розвитку R_i , $i = 1, \dots, m$, – це регіони.

На третьому рівні ієрархії $T - F_s$, $s = 1, \dots, S$ – критерії соціально-економічного розвитку регіонів організаційної системи.

L – набір якісних оцінок рівнів кожного критерію та кожного регіону в ієрархії T . При цьому:

$L = \{ \text{Дуже низький рівень (ДН)},$
Низький рівень (Н),
Середній рівень (С),

Високий рівень (В),

Дуже високий рівень (ДВ)).

Φ – система відношень переважання одних показників над іншими для одного рівня ієрархії моделі.

$$\Phi = \{F_i(\Phi)F_j | \Phi \in (>, \approx), i \neq j\},$$

де $>$ – відношення строгої переваги,

$\approx$ – відношення байдужості.

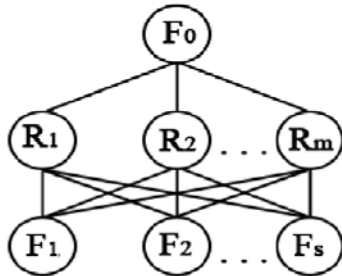


Рис.1. Дерево показників для оцінки ефективності регіонального економічного розвитку

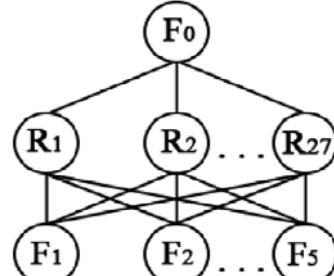


Рис. 2. Дерево показників для оцінки економічного розвитку України

Приклад застосування математичної моделі оцінки ефективності регіонального економічного розвитку для України

Застосуємо запропоновану модель оцінки ефективності регіонального економічного розвитку на прикладі України.

Розглянемо 27 регіонів (24 області, АРК, м. Київ, м. Севастополь).

Для кожного регіону визначені – п'ять критеріїв соціально-економічного розвитку.

Ієрархія показників (рис. 1) набуває вигляду, що представлений на рис. 2, де:

F_0 – ефективність розвитку функціонування економіки на державному рівні:

1) F_1 – ефективність розвитку реального сектору економіки.

F_1 визначається за 5-ма показниками:

- Індекс промислової продукції, у відсотках до відповідного періоду попереднього року.
- Рівень оплати за спожиту електроенергію наростаючим підсумком з початку звітного періоду у відсотках.
- Рівень оплати за спожитий природний газ наростаючим підсумком з початку звітного періоду у відсотках.
- Темп зростання (зменшення) валової продукції сільського господарства, у відсотках до відповідного періоду попереднього року.
- Частка інноваційних активних підприємств у загальній кількості промислових підприємств у відсотках.

2) F_2 – ефективність розвитку інвестиційної та зовнішньоекономічної діяльності.

F_2 визначається за 11-ма показниками:

- Темп зростання (зменшення) обсягу інвестицій в основний капітал.
- Обсяг інвестицій в основний капітал на одну особу.
- Приріст (зменшення) прямих іноземних інвестицій.
- Темп зростання (зменшення) обсягу прямих іноземних інвестицій.
- Обсяг прямих іноземних інвестицій на одну особу наростаючим підсумком з початку інвестування.
- Темп зростання (зменшення) обсягу інвестицій у житлове будівництво.
- Темп зростання (зменшення) обсягу введення в експлуатацію житла.
- Обсяг введеного в експлуатацію житла у розрахунку на 10 тис. населення, кв. метрів загальної площі.
- Темп зростання (зменшення) обсягу експорту товарів.
- Темп зростання (зменшення) обсягу імпорту товарів.
- Коефіцієнт покриття експортом імпорту.

3) F_3 – збільшення державних фінансів та фінансових результатів діяльності підприємств (визначається за 8-ма показниками):

- Рівень виконання доходів місцевих бюджетів, у відсотках до запланованих Мінфіном показників.
- Темп зростання (зменшення) доходів місцевих бюджетів.
- Темп зростання (зменшення) податкового боргу за податковими зобов'язаннями платників до зведеного бюджету.
- Питома вага податкового боргу регіону в загальному обсязі податкового боргу.
- Темп зростання (зменшення) прибутків прибуткових підприємств від звичайної діяльності до оподаткування.
- Темп зростання (зменшення) збитків збиткових підприємств від звичайної діяльності до оподаткування.
- Рівень рентабельності операційної діяльності підприємств.
- Питома вага збиткових підприємств у загальній кількості підприємств.

4) F_4 – ефективність розвитку соціального сектору економіки (визначається за 10-ма показниками):

- Приріст (зменшення) населення.
- Рівень безробіття населення у віці 15-70 років.
- Утворено робочих місць, у відсотках до чисельності економічно активного населення.
- Середньомісячна номінальна заробітна плата.
- Темп зростання (зменшення) реальної заробітної плати.
- Частка працівників, яким нарахована заробітна плата нижче прожиткового мінімуму для працездатної особи.
- Темп зростання (зменшення) заборгованості з виплати заробітної плати.
- Темп зростання (зменшення) заборгованості з виплати заробітної плати на економічно активних підприємствах.

- Темп зростання (зменшення) заборгованості економічно активних платників до Пенсійного фонду.
 - Рівень злочинності в розрахунок на 10 тис. населення.
- 5) F_5 – ефективність розвитку споживчого ринку (розраховується за 5-ма показниками):
- Темп зростання (зменшення) обороту роздрібною торгівлі.
 - Абсолютний приріст обсягу обороту роздрібною торгівлі.
 - Абсолютний приріст обсягу реалізованих послуг.
 - Індекс споживчих цін.
 - Рівень оплати населенням житлово-комунальних послуг.

$R_i, i = 1, \dots, 27$ – рейтинги по 24-м областям України, АР Крим, м. Києву та м. Севастополю.

Нехай визначена система відношень переважання одних критеріїв над іншими:

$$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \succ F_4 \succ F_5,$$

де F_s – критерії соціально-економічного розвитку регіонів України, $s = 1, \dots, 5$.

Якісні оцінки рівнів соціально-економічного розвитку регіонів визначаються за допомогою застосування методів математичної статистики до набору статистичних даних за останні n періодів часу.

$[t_1, t_n]$ – період часу, який розглядається поквартально, відповідно надходженню статистичних даних.

Висновок

Запропонована модель оцінки ефективності регіонального економічного розвитку організаційної системи. Для описаної моделі можна знайти множину якісних і кількісних оцінок розвитку організаційної системи на державному та регіональному рівнях.

Наступним кроком в дослідженні планується розробка методики оцінки рівня розвитку регіонів організаційної системи на основі запропонованої моделі. Дослідження економічного розвитку регіонів має великий потенціал.

1. Г. Доленко, Задача багатокритеріального прийняття рішень на ринку фінансового капіталу, в: PDMU-2009 (International Conference- Problems of Decision Making under Uncertainties), Україна, квітень 27-30, 2009, 20-21. 2. Г. Доленко, Метод багатокритеріального прийняття рішень на ринку фінансового капіталу, в: PDMU-2009 (International Workshop- Problems of Decision Making under Uncertainties), Кам'янець-Подільський, Україна, жовтень 05-09, 2009, 14-15. 3. G. Dolenko, E. Konareva, D. Manovytska, Multicriteria decision making problem of evaluating the effectiveness of Ukrainian regional economic development: PDMU-2011 (XVI I International Conference- Problems of Decision Making under Uncertainties), Ukraine, Skhidnytsia, May 23-27, 2011, 20-21. 4. A. Nedosekin, Complex evaluation of Bankruptcy Risk Model on the base of fuzzy set methods. Sezam, St-Petersburg, 2002. 5. M. Sables, Regional Policy DSS: Result Indicators Definition Problems, Collaborative Decision Making: Perspectives and Challenges, edited by P. Zarate, IOS Press, 2008, 485-492. 6. Ruiz Estrada, Mario Arturo (2009, January 5). The Regional Cooperative Scheme Theoretical Framework (RC-Scheme). SciTopics. Retrieved May 9, 2011, from http://www.scitopics.com/The_Regional_Cooperative_Scheme_Theoretical_Framework_RC_Scheme.html 7. Ruiz Estrada, Mario Arturo (2009, January 6). The Global Dimension of Regional Integration Model (GDRI-Model). SciTopics. Retrieved May 9, 2011, from http://www.scitopics.com/The_Global_Dimension_of_Regional_Integration_Model_GDRI_Model.html 8. Ruiz Estrada, Mario Arturo (2009, February 20). A New Multi-Dimensional 9. Framework for Analyzing Regional Integration: Regional Integration Evaluation (RIE) Methodology. SciTopics. Retrieved May 9, 2011, from http://www.scitopics.com/A_New_Multi_Dimensional_Framework_for_Analyzing_Regional_Integration_Regional_Integration_Evaluation_RIE_Methodology.html 10. <http://www.kmu.gov.ua> 11. <http://www.sta.gov.ua/control/uk/index> 12. <http://www.ukrstat.gov.ua>

Надійшла до редколегії 18.09.10

УДК 519.21

С. Доценко, канд. фіз.-мат наук, доц.

СТРАТЕГІЇ ГРИ НА ОДНОВИМІРНИХ СИМЕТРИЧНИХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАННЯХ

Розглянута гра двох осіб, основу якої складає задача оптимальної зупинки одновимірного випадкового блукання. Для заданої гри знайдено оптимальні стратегії гравців.

Two persons game based on optimal random walk stop problem is considered. For the game being considered optimal strategies were found.

В [1] була розглянута задача оптимальної зупинки одновимірного випадкового блукання з поглинанням на кінцях. Нехай частинка здійснює симетричне випадкове блукання по цілочисельних точках відрізка $[a; b]$ з поглинанням на кінцях. Тобто, якщо частинка потрапляє в один зі станів a або b , то вона припиняє блукання. З інших станів k , $a < k < b$ частинка з ймовірностями $\frac{1}{2}$ переходить в один з сусідніх станів ($k-1$ або $k+1$). Нехай на множині станів задано функцію виграшу $f(k)$ і нехай особа, що спостерігає за частинкою, грає в таку гру. Якщо частинка знаходиться в стані k , то особа має альтернативу – припинити спостереження, та отримати $f(k)$ або продовжити спостереження (сподіваючись на те, що частинка потрапить в деякий інший стан j , такий, що $f(j) > f(k)$). Якщо частинка потрапляє в один з поглинаючих станів, то спостереження припиняються і особа отримує виграш $f(a)$ або $f(b)$ відповідно. Треба знайти оптимальну стратегію зупинки спостереження, яка б максимізувала середнє значення виграшу. Оптимальна стратегія зупинки буде наступним чином. Нехай $v(k)$ – середнє значення виграшу за умови, що частинка знаходиться в стані k та подальшої оптимальної поведінки спостерігача (поки що невідомо, якої саме, але гіпотетично оптимальної). Виявляється, що $v(x)$ є мінімальною з опуклих функцій, таких, що $v(x) \geq f(x)$. Наочно $v(x)$ можна уявити собі таким чином. Нехай на декартовій площині в точках $(k; f(k))$ забиті цвяхи. Тоді нитка, що натягнута над цвяхами між точками $(a; f(a))$ та $(b; f(b))$ є графіком шуканої (шматково-лінійної) функції $v(x)$.

В [2] наведений результат був використаний для аналізу такої гри. Нехай є два гравці, кожен з яких спостерігає за симетричними випадковими блуканнями на відрізках $[0; k]$ (кожен з гравців має "свій" відрізок). Нехай в початковий момент часу частинки, за якими спостерігають гравці, знаходяться в точках a та b відповідно, і це є відомим обом гравцям. Подальший хід спостережень кожного з гравців є тайною для його суперника. Нехай гравці зупинили (навмисно чи вимушено) свої спостереження в точках x та y відповідно. Тоді вважається, що виграв гравець, чия координата зупинки є більшою, тобто перший гравець виграв при $x > y$, програв при $x < y$, а при $x = y$ має місце нічия. Далі, для даної гри було знайдено рівновагу за Нешем та ціну гри. Спочатку було показано,

що дотримання гравцями будь-яких допустимих стратегій рівнозначно вибору стратегії з так званого спектру мішаних стратегій $(s_1, \dots, s_k)$ та $(t_1, \dots, t_k)$ відповідно, де s_i, t_i - ймовірність того, що у 1-го/2-го гравця результатом зупинки спостереження буде i , де компоненти спектру стратегії задовольняють співвідношенням

$$s_i \geq 0, i = 0, \dots, k, \quad \sum_{i=0}^k s_i = 1, \quad \sum_{i=0}^k i s_i = a, \quad t_i \geq 0, i = 0, \dots, k, \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1, \quad \sum_{i=0}^k i t_i = b.$$

Далі було показано, що при $a < b$ ціна гри дорівнює $\frac{a-b}{b}$, а пара стратегій $(s_1, \dots, s_k), (t_1, \dots, t_k)$ для якої має місце рівновага за Нешем має вид:

При $k \leq 2b$

$$s_i = \begin{cases} 1 - \frac{a}{b+1}, i = 0 \\ \frac{a}{b(b+1)}, i = 2, 4, \dots, 2(k-b-1) \\ \frac{a(2b-k+1)}{b(b+1)}, i = k \\ 0, \text{ для решти } i \in E \end{cases}$$

При $k \geq 2b+1$

$$s_i = \begin{cases} 1 - \frac{a}{b+1}, i = 0 \\ \frac{a}{b(b+1)}, i = 2, 4, \dots, 2b \\ 0, \text{ для решти } i \in E \end{cases}$$

При $k < 2b-1$

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{b}, i = 1, 3, \dots, 2(k-b)-1 \\ 1 - \frac{k-b}{b}, i = k \\ 0, \text{ для решти } i \in E \end{cases}$$

При $k \geq 2b-1$

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{b}, i = 1, 3, \dots, 2b-1 \\ 0, \text{ для решти } i \in E \end{cases}.$$

Розглянемо модифікацію даної гри. Нехай другий гравець дізнається про точку, в якій зупинився перший до того, як розпочати свої спостереження. Факт такої несиметричної інформованості є відомим обом гравцям. Інші умови гри залишаються без змін. Проаналізуємо дану ситуацію, виходячи зі складної раціональної поведінки гравців.

Нехай перший гравець зупинився в точці x . Тоді функція виграшу другого гравця має вигляд $\phi(y) = \text{sgn}(y-x)$, тоді ціна гри дорівнює

$$u(y) = \begin{cases} -1 + \frac{2}{x+1}, y \leq x \\ 1, y > x \end{cases}.$$

Оптимальна поведінка другого гравця буде такою: негайно зупинитись, якщо $b \geq x+1$, в іншому разі проводити спостереження доти, доки частинка не потрапить у стан $x+1$ (це вдасться зробити з ймовірністю $\frac{b}{x+1}$, і це означає тиме виграш) або 0 (що означатиме програш). Нехай перший гравець припускає, що другий, дізнавшись про точку зупинки першого, буде вести себе саме таким чином. Тоді функція виграшу першого гравця матиме вигляд

$$f(x) = \begin{cases} -1, x \leq b+1 \\ \frac{x+1-2b}{x+1}, b \leq x \leq k-1 \\ 1 - \frac{b}{k}, x = k \end{cases}$$

Дослідимо асимптотичну поведінку першого гравця при великих k .

Введемо позначення $t = \frac{x}{k}$, $\beta = \frac{b}{k}$. Тоді при $k \rightarrow \infty$ гранична функція виграшу матиме вигляд

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \leq \beta \\ 1 - 2\frac{\beta}{t}, & \beta \leq t < 1 \\ 1 - \beta, & t = 1 \end{cases}$$

Знайдемо ціну гри $v(t)$ в залежності від параметру β . Позначимо $g(t) = 1 - 2\frac{\beta}{t}$, $\beta \leq t$, $A(0; -1), D(1; 1 - \beta)$. Функція $g(t)$ є опуклою вгору. Рівняння дотичної, проведеної до $g(t)$ з точки $A(0; -1)$ має вигляд $y = \frac{1}{2\beta}t - 1$. Якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної (тобто $\frac{1}{2\beta}$) не перевищує кутового коефіцієнту AD (тобто $2 - \beta$), то це означатиме, що графік $f(t)$ лежить під відрізком AD, і отже $v(t)$ співпадає з рівнянням AD, тобто $v(t) = (2 - \beta)t - 1$, і таким чином оптимальною стратегією першого гравця буде грати до попадання частинки в один з поглинаючих станів, 0 або k.

З умови $\frac{1}{2\beta} \leq 2 - \beta$ маємо $\beta \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Нехай $\beta < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді точки дотику до $g(t)$ для дотичних, проведених з точок A та B мають відповідно координати $B(2\beta; 0)$ та $C(2 - \sqrt{2}; 1 - (2 + \sqrt{2})\beta)$, а ціна гри матиме вигляд

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}t - 1, & 0 \leq t \leq 2\beta \\ 1 - \frac{2\beta}{t}, & 2\beta \leq t \leq 2 - \sqrt{2} \\ (3 + 2\sqrt{2})\beta t + 1 - (4 + 2\sqrt{2})\beta, & 2 - \sqrt{2} \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

Оптимальна стратегія першого гравця в цьому випадку буде такою

- 1) При $0 \leq t \leq 2\beta$ (тобто $x \leq 2b$) грати доти, доки частинка не потрапить в точку 0 або $2b$.
- 2) При $2\beta \leq t \leq 2 - \sqrt{2}$ (тобто $2b \leq x \leq (2 - \sqrt{2})k$) негайно зупинитись.
- 3) При $t \geq 2 - \sqrt{2}$ (тобто $x \geq (2 - \sqrt{2})k$) грати доти, доки частинка не потрапить в точку $(2 - \sqrt{2})k$ або k .

Графіки $f(t)$ та $v(t)$ у випадках $\beta \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\beta < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ зображені на рис. 1, 2 відповідно.

Якщо припустити, що початкові координати частинок мали дискретний рівномірний розподіл на інтервалі $0 \dots k$, то середній виграш першого гравця за умови, що обидва гравці дотримуються своїх оптимальних стратегій складає

$$v = \int_0^1 d\beta \int_0^1 v(t, \beta) dt = \frac{\sqrt{2} - 2}{4} \approx -0.146.$$

Припустимо тепер, що початкові координати обох частинок мають дискретний рівномірний розподіл, як і в попередньому випадку, перший гравець зупиняє свою частинку першим, після чого другий гравець дізнається про координату зупинки, але на відміну від попереднього випадку, першому гравцю невідоме початкове положення частинки другого гравця. Розглянемо асимптотичний випадок, коли k велике. Тоді можна вважати, що гравці спостерігають значення вінерівських процесів, значення яких належать інтервалу $[0; 1]$, де 0 та 1 є поглинаючими станами. Нехай перший гравець зупиняє свій процес в точці $t < 1$. Тоді оптимальною стратегією другого гравця буде негайно зупинити свій процес, якщо його початкове значення більше за t , інакше проводити спостереження доти, доки процес не набуде значення $t + \varepsilon$ або 0.

Тоді ймовірність виграшу другого гравця дорівнює $1 - t + \int_0^{\beta} \frac{\beta}{t} d\beta = 1 - \frac{t}{2}$, отже ймовірність виграшу першого дорівнює

$\frac{t}{2}$ а функція виграшу має вигляд $t - 1$. Якщо ж перший гравець зупиняє спостереження в 1, то другий гравець також прагнути потрапити в 1, це йому вдасться зробити з ймовірністю $\int_0^1 \beta d\beta = \frac{1}{2}$ (і таким чином гра закінчиться у нічию) і в про-

тивному разі (з додатковою ймовірністю $\frac{1}{2}$) виграє перший гравець, таким чином функція виграшу в 1 дорівнює $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція виграшу має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t = 1 \end{cases},$$

тоді ціна гри дорівнює $v(t) = \frac{3}{2}t - 1$, отже середній виграш першого гравця складає $\int_0^1 v(t) dt = -\frac{1}{4}$.

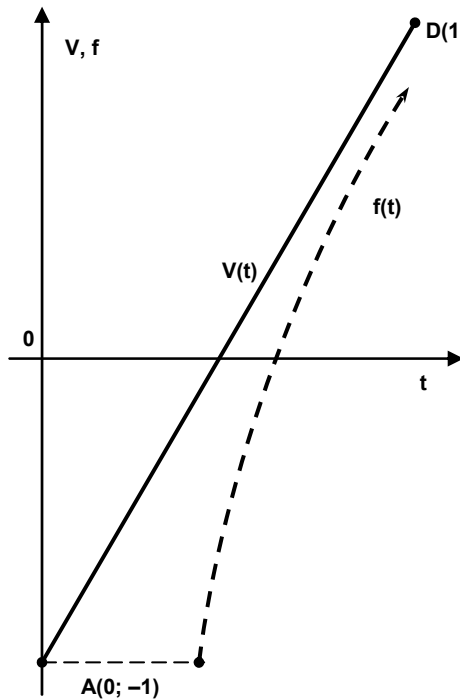


Рис. 1

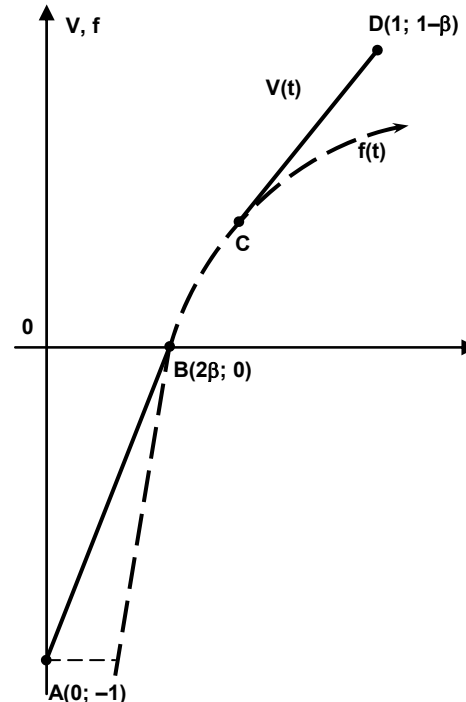


Рис. 2

1. Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич. Теоремы и задачи о процессах Маркова. Москва, Наука, 1967. 2. В.В. Мазалов. Математическая теория игр и ее приложения. Санкт Петербург, изд-во Лань, 2010 г.

Надійшла до редколегії 19.04.11

УДК 519.664.7; 519.688; 531.37

В. Козоріз, д-р фіз.-мат. наук, проф.

OSCILLATING OF TWO COAXIAL SUPERCONDUCTING RINGS

The dynamic system of two coaxial superconducting rings is analyzed with taking into account of the rings' perfect electric conductivity. The existence of local minima of pairwise magnetic energy as function of spacing between rings ("Magnetic Potential Well" or MPW phenomenon) is proved and unusual behavior of parameters (potential energy, force, ring's electric currents) are represented and analyzed. Modeling of the one-directional motion of a smaller ring with taking into account friction based on a software Maple is analyzed.

Динамічна система двох коаксіальних надпровідних кілець аналізується з врахуванням ідеальної електропровідності кілець. Обґрунтовується існування локальних мінімумів потенціальної енергії парної магнітної взаємодії як функції відстані між кільцями ("магнітна потенціальна яма" або МПЯ – феномен) і представлені незвичайна поведінка параметрів (потенціальної енергії, сили, електричних струмів кілець). Досліджується одновимірний рух меншого кільця при наявності тертя на основі використання системи комп'ютерної алгебри Maple.

Introduction

According to the established understanding, among fundamental forces in physics (gravity, electromagnetism, strong, and weak interactions), only nuclear forces pairwise interaction potential energy has a local minimum. Others are monotonic functions of spacing between two particles, for example: inverse-distance law for two point masses and electric charges, inverse cubic distance law for two magnetic dipoles etc. The monotony of pairwise potential energy does not allow realizing the stable free equilibrium by electrostatic or magnetic forces (Earnshaw's theorem, see e.g. [4;2;8]) because conditions of the free equilibrium stability cannot be achieved without force control or diamagnetic substance including bulk superconductors [3]. The author first discovered that zero electric resistance of a closed current carrying loop and restrictions on geometric and magnetic parameters can result in a local minimum of the pairwise magnetic interaction (so called "Magnetic Potential Well" phenomenon, or MPW) [5;6;1]). Here this result is extended and investigated for a case without restriction on spacing between two magnetic elements.

The Pairwise Magnetic Energy Minimum

In accordance with theory [9], the magnetic energy of inductively coupled current carrying loops expressed in terms of magnetic linkages and mechanical coordinates must be considered as the potential energy. For two inductively coupled loops with self-inductances L_1 , L_2 and mutual inductance $L_{12}(x)$, this assertion results in the formula for the magnetic potential energy as a function of relative displacement between loops x

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Psi_2^2}{L_2} \cdot \frac{(p-y)^2}{1-y^2}, \quad p = \frac{\Psi_1}{\Psi_2} \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \quad (1)$$

$$y = \frac{L_{12}(x)}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (2)$$

where an item (constant) unessential for the magnetic potential energy U is omitted, Ψ_1 and Ψ_2 are full magnetic fluxes (magnetic linkages) coupled with the loops, p is the magnetic-geometric parameter, and $y(x)$ is non-dimensional mutual inductance of the loops.

According to the Faraday's electromagnetic induction law, zero resistance closed loop keeps its magnetic linkage constant. Therefore, for two thin superconducting loops (filaments) in the expressions (1) and (2) determining the potential energy of magnetic interaction U as function of a single mechanical coordinate x all parameters are constant with the exception of mutual inductance $L_{12}(x)$ (or non-dimensional mutual inductance $y(x)$). When loops are characterized by more than one mechanical coordinate (for example, six degrees of freedom in a case of one free solid body), the expressions for the potential energy (1) and (2) holds true with generalization that the mutual inductance must be expressed as function of all independent mechanical coordinates.

Additionally, for two magnetically interacting current carrying loops the electric currents I_1 and I_2 flowing in the loops can be determined by expressions

$$I_1 = \frac{\Psi_2}{\sqrt{L_1 L_2}} \cdot \frac{p-y}{1-y^2}, \quad I_2 = \frac{\Psi_2}{L_2} \cdot \frac{1-py}{1-y^2} \quad (3)$$

where in a case of the perfect electric conductivity of two loops all parameters are constants with the exception of non-linear mutual inductance $y = y(x)$.

Formally it can be easily shown that for the potential energy U determined as a function of x by (1) and (2), one of two ratios is the necessary and sufficient conditions for the minimum U at spacing x_0 [5]

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \frac{L_{12}(x_0)}{L_2}, \quad \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{L_{12}(x_0)}{L_1} \quad (4)$$

or in the non-dimensional form

$$p = y(x_0), \quad p^{-1} = y(x_0). \quad (5)$$

Physically this means that two loops can interact like usual mechanical spring and instead of amplifying attraction during decrease in spacing, the two-magnet force decreases, becomes zero and transforms into repulsive magnetic force.

Selection of one or another condition (4) is determined by numeration of the loops and well-known fact that the mutual inductance of two loops is always less than each self-inductance of these loops. Thus, the right side of all expressions (4) and (5) are less than unity.

From another hand, of some interest can be displacements x_0 less than infinity that for the non-dimensional relative inductance is equivalent to the inequality $y(x_0) > 0$. Thus, target value of x_0 where the minimum U exists requires two restrictions must be satisfied: 1) the ratio of constant magnetic linkages (frozen full fluxes) must be less than one, and 2) said ratio must be more than zero.

Physical meaning of the MPW consists in the following. A single in the space closed perfect conductor loop keeps both its electric current and magnetic linkage coupled with it. Yet in a case of inductively coupled perfect conductor loops with their changeable relative geometrical configuration, the magnetic linkage coupled with any loop must be constant by virtue of the Faraday's electromagnetic induction law. Because the linkage includes a changeable magnetic flux of the mutual inductances, its "own" part created by electric current in the loop by must be changeable to satisfy the Faraday's law. When the linkage is equal to the mutual inductive coupling flux, the electric current in the loop must be zero.

Therefore "the persistent mode" term in a case of inductively coupled closed zero resistance loops is related rather to the full magnetic fluxes than to electric currents which at different relative geometrical configurations must assume different values and even change direction to satisfy the constancy of the full magnetic fluxes coupled with zero resistance closed loops.

MPW for Two Coaxial Rings

Consider a particular case of two coaxial thin zero resistance rings of radii R_i ($i = 1, 2$) and thicknesses $r_i \ll R_i$. Making non-dimensional linear sizes by division on the immobile ring radius R_2 (we suppose that $R_1 < R_2$), non-dimensional inductances l_1 , l_2 , $l_{12}(x)$ by division of corresponding inductances on $\mu_0 R_2$, non-dimensional currents i_1 and i_2 by division of corresponding currents on $\Psi_2 L_2^{-1}$, and non-dimensional energy u by division of U on $2L_2 \Psi_2^{-2}$, we can derive such formulae

$$i_1 = \sqrt{l_2 l_1^{-1}} \cdot \frac{p-y}{1-y^2}, \quad i_2 = \frac{1-py}{1-y^2},$$

$$u = \frac{(p-y)^2}{1-y^2}, \quad f = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6)$$

where for non-dimensional inductances such expressions hold true

$$\begin{aligned}
 l_i &= \ln(16\delta_i^{-1}) - 1.75, \quad (i = 1, 2), \\
 y &= (l_1 l_2)^{-\frac{1}{2}} \left[(2k^{-1} - k)K(k) - 2k^{-1}E(k) \right], \\
 k &= 2\sqrt{n[(1+n)^2 + x^2]^{-1}}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

where $n = R_1 R_2^{-1} < 1$ is the ratio of movable and immobile ring radii, δ_i is the non-dimensional thickness ($i = 1, 2$), $K(k)$ and $E(k)$ are complete elliptic integrals of the first and the second kind, respectively, k is the modulus of the complete elliptic integrals, and for dimensionless distance between rings the denotation x is retained.

Assuming that $n = 0.5$; $\delta_i = 0.1$, formulae (7) give the maximal magnitude of the non-dimensional mutual inductance $y(x_0 = 0) = 0.1856781459$ that determines the range for p inside of which the MPW can exist $0 < p < 0.1856781459$.

Suppose p the magnitude of which is in our discretion assumes three values: less ($p = 0.12$), equal ($p = 0.1856781459$), and more ($p = 0.27$) than allowed by said range. Then formulae (6), (7) and using the computer software allow obtaining plots for the non-dimensional potential energy u , magnetic force f , and electric currents i_1 and i_2 in the immobile and movable rings respectively, as function of the non-dimensional distance x (Figures 1-4).

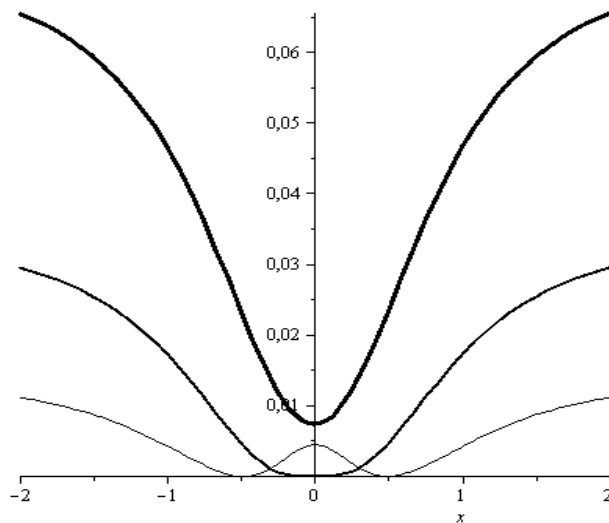


Figure 1. Magnetic potential energy versus distance x

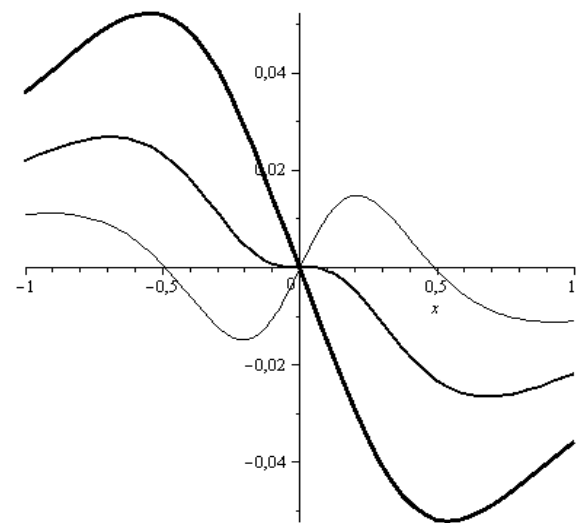


Figure 2. Magnetic force f versus distance x

The middle and upper curves in Figure 1 demonstrate one minimum of the magnetic potential energy at coplanar position ($x_0 = 0$) that is the result of the two coaxial rings symmetry. The lower curve in Figure 1 demonstrates two new local minima at distances $x_0 = \pm 0.5$ and "conversion" the minimum at $x_0 = 0$ into the maximum for u .

Magnetic force f at new positions is zero and changes the sign. This proves the MPW-phenomenon existence: two removed and mutually attracting coaxial perfect conductor rings during approaching decrease their attractive magnetic force up to zero before distance between them is zero and change magnetic attraction into repulsion after passing zero magnetic force position (Figure 2). Instead of the rings symmetry at $x_0 = 0$, zero magnetic force at $x_0 = \pm 0.5$ is caused by zero electric current i_1 in the immobile ring (see Figure 3, the lower curve) whereas at the local minimum of the upper curve in Figure 1 is achieved with both non-zero electric currents (see upper curves in Figures 3, 4). The u -minimum of the middle curve in Figure 1 is achieved by two reasons, the rings symmetry and MPW-condition at zero distance between rings resulting in zero current i_1 in the movable ring. This case corresponds to the maximal magnitude of parameter p when two distances on both opposite sides relative to the immobile ring representing MPW-minimums due to zero current in one ring coincide excluding the u -maximum arising at non-zero distances with the MPW-manifestation.

In the case of two u -minimums and one u -maximum, the repulsive magnetic force arising between each u -minimum and u -maximum reaches maximal value and zero value at the coplanar position.

Model of Dynamics with Friction

The one-directional motion of a body with magnetic interaction of two above considered coaxial zero resistance rings without friction is undamped shuttling around the minimum of the magnetic potential energies for two upper curves in Figure 1. This oscillation is inherently loss-less. For the lower curve (the MPW-case of two minima) continuous shuttling can be around each said minimum without jumping over the potential hill at $x = 0$ or in the x -range wider than $x_0 = \pm 0.5$.

Dynamics analysis with friction is sufficiently complicated. It requires computer digital methods and some simplifications that in our case were reduced to:

1. The computer algebra system was used to analyze the dynamics with friction
2. Instead of (7) for mutual inductance y where $(l_1 l_2)^{-1/2} = 0.3007361587$ we used the series derived by the computer algebra system:

$$\begin{aligned}
 y &= \pi \cdot (0.0187960099 \cdot k^3 + 0.011409700744 \cdot k^5 + 0.0110132287 \cdot k^7 + \\
 &\quad + 0.0089944184 \cdot k^9 + 0.007588843 \cdot k^{11} + 0.0065589287 \cdot k^{13}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

This simplification is obliged to the used computer algebra system unable to operate with special functions like complete elliptic integrals $K(k)$ and $E(k)$ in formula for the mutual inductance for the coaxial current carrying rings.

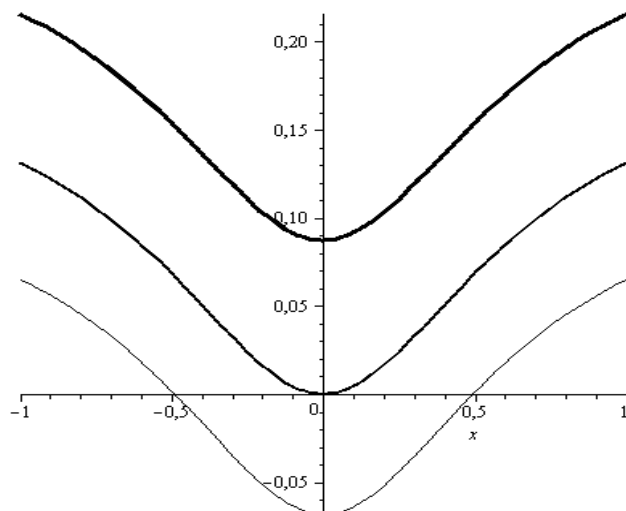


Figure 3. Electric current in the immobile ring i_1 versus distance

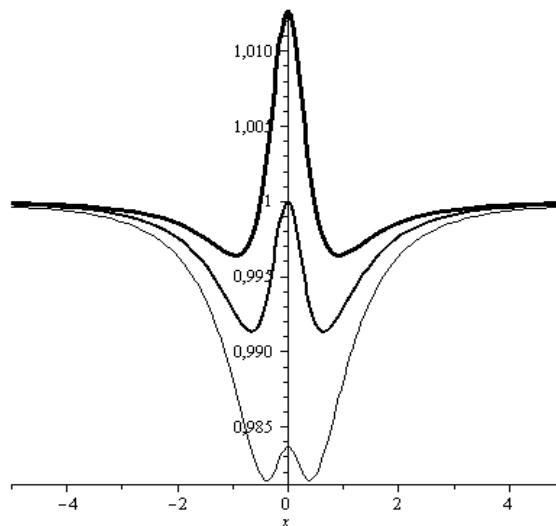


Figure 4. Electric current in the movable ring i_2 versus distance x

3. The differential equation of the motion was used in the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= V(t), \\ \frac{d}{dt} V(t) &= -A \cdot V(t) - B \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(y(k(x(t)))) \end{aligned} \quad (9)$$

where A and B are constants determining contributions of the friction chosen to be proportional to the velocity $V(t)$, and magnetic force between rings f with the potential energy $u(y(k(x(t))))$ defined by (6), (8), and (7).

4. Chosen initial conditions were $x(0) = 0.8$, $V(0) = 0$ that corresponds with removed rings at the motion beginning and zero initial velocity.

5. Three cases of parameter p chosen above to integrate dynamics motions (9).

6. Chosen quantities of parameters A , B were $A = 0.025$ and $B = 1$ for all magnitudes of parameter p . Additionally, for $p = 0.12$ the case of $A = 0.02$ was considered.

7. Caused by using Taylor's series (8) instead formula (7) for the non-dimensional mutual inductance $y(x)$, conditions on spacing x were customized that resulted in new positions of the MPW-existence: $x_0 = \pm 0.376$ instead of $x_0 = \pm 0.5$ in the case of the exact formula (7) for $y(x)$.

Modeling Results

The Case of $p = 0.12$ (two u -minima)

In order to derive the initial value problem solution on the basis of the used computer algebra system, two non-linear differential equations (9) of the first order relative the non-dimensional time t must be represented in the explicit form. This form is too cumbersome to be written out here. We used corresponding commands to solve the system (9) and derive the plots for the displacements $x(t)$ and phase portraits displacement $x(t)$ – velocity $V(t)$.

The results of modeling for $A = 0.02$ and $B = 1$ are given by plots in Figures 5, 6. They demonstrate damped vibrations finishing the rest at the MPW-position $x \approx 0.376$.

The case $A = 0.025$ and $B = 1$ is represented by solution in Figures 7, 8. In this case a movable body jumps over into the range of x on another side relative to the coplanar position ($x = 0$) and demonstrates attenuation of x -oscillations at the MPW position $x \approx -0.376$. Corresponding phase portrait is shown in Figure 8.

In both cases of damping oscillations in the MPW at $x = \pm 0.376$, the electric current in the movable ring is zero.

Cases of $p = 0.1856781459$ and $p = 0.27$ (one u -minimum)

These cases, the MPW-position at $x = 0$ and interaction without MPW for the dynamic equations (9) was investigated as explained above. Figures 9 and 10 show that in this case the damped oscillations come to the rest at position $x = 0$. Electric current in the movable ring at the end of vaulting is zero.

The case $p = 0.27$, $A = 0.025$, $B = 1$ demonstrates more quick damped oscillations as showed in Figures 11 and 12. Electric currents in both rings at the end of the oscillation process are non-zero.

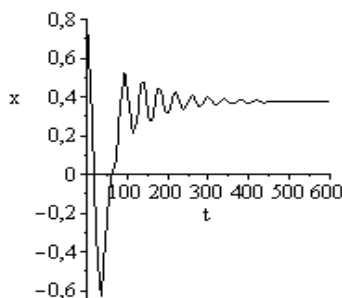


Figure 5. Attenuation of $x(t)$ in the MPW-position at $x = 0.376$

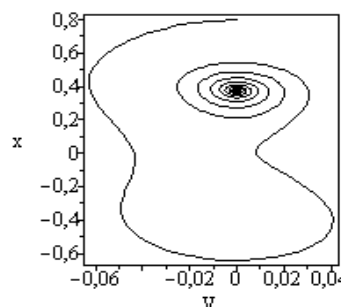


Figure 6. Phase portrait $[x(t), V(t)]$, case $A = 0.02$, $B = 1$

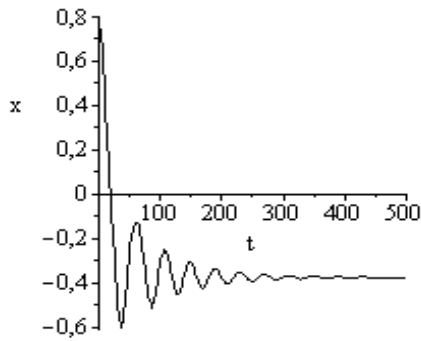


Figure 7. Attenuation of $x(t)$ with vaulting in the MPW-position at $x = -0.376$

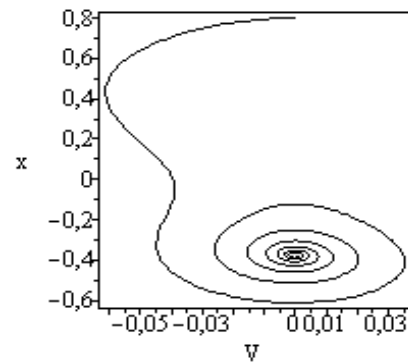


Figure 8. Phase portrait $[x(t), V(t)]$ with vaulting, case $A = 0.025, B = 1$

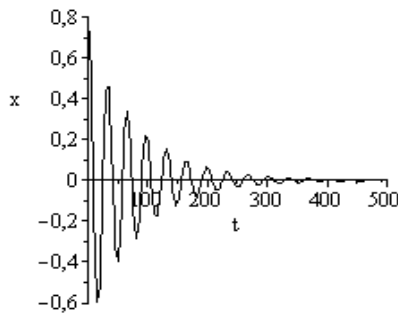


Figure 9. Displacement $x(t)$ in the case: $A = 0.025, B = 1, p = 0.1856781459$

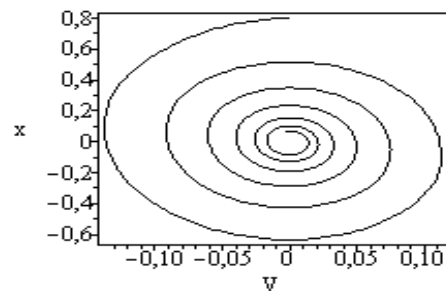


Figure 10. Phase portrait $[x(t), V(t)]$, case: $A = 0.025, B = 1, p = 0.1856781459$

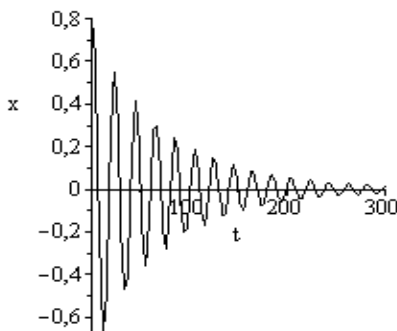


Figure 11. Solution for the $x(t)$, case: $A = 0.025, B = 1, p = 0.27$

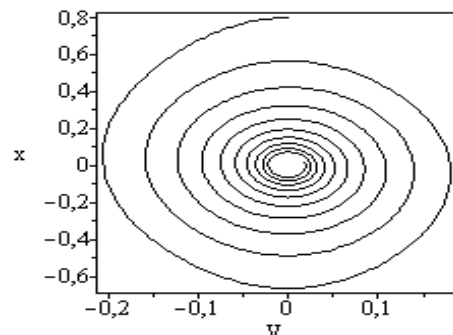


Figure 12. Phase portrait $[x(t), V(t)]$, case: $A = 0.025, B = 1, p = 0.27$

Other initial conditions and parameter values to analyze the dynamic behavior under magnetic forces between two coaxial zero resistance rings present no problems with modern computer algebra systems.

Conclusions

The pairwise potential energy of magnetic interaction, according to the established understanding, as a function of distance between two magnetically interacting particles cannot have a local minimum. But in a case when the magnetic interaction is represented or realized by electric currents flowing in closed zero resistance loops, this understanding can be incorrect. This incorrectness consists in the possibility of a local minimum existence for the magnetic potential energy. As showed in [5], such the minimum called Magnetic Potential Well (MPW) can exist. We considered a version of two-magnet one-directional dynamic system with possibility for the movable magnet to occupy positions from infinity to zero distance and further to infinity on the opposite side relative to the immobile magnetic body, that always results in the magnetic energy minimum at zero distance. In this case, when conditions of the MPW-existence derived before are satisfied, the picture is another. Instead of one minimum at zero distance, the MPW-manifestation results in two local minima on both sides relative to the one body and transformation of the pre-existing minimum into the potential hill. The arbitrary dispositions at which the MPW exists depend on the magnetic and geometric parameters which are in our discretion.

Dynamic behavior in the considered one-dimensional dynamic system sufficiently depends on the friction. Without friction, we have the one-directional motion with given potential energy with known solution in the general case of the potential energy law [7]. Friction force proportional to the velocity complicates dynamic analysis and requires modern computer technologies allowing obtaining solutions and presenting theirs by visual plots.

The MPW sufficiently diversifies dynamic behavior. If a motion with friction always ends at one position (zero distance), in a case of two potential minima due to the MPW, the damped oscillation can jump over from the initial position to the second MPW-position. In any case of the MPW-manifestation the electric current in one zero resistance loop is zero. However, it does not mean that magnetic energy stored in a pair of zero resistance loops is lost for the work against friction force. The

energy spent to work against friction equals the difference between stored magnetic energies at a position determined by initial condition for relative dislocation and position of the rest as the result of damped oscillations fulfilled by the external source of energy during formation of the rings initial configuration.

1. Bhan K., Kozorez O., Kozoriz V. Maglev Concept as Proposals to Reduce the Global Climat Problem // The 20th Int. Conf. on Maglev Transportation and Linear Drives, San-Diego, 2008. (www.maglev2008.com) 2. Brandt E.H. Levitation in Physics // Science. – 1989. – Vol. 243, № 1, P. 349-355. 3. Braunbeck W. Fries Schweben Diamagnetischer Korper in Magnetfeld // Zeitschrift fur Physick. – 1939. – № 112, P. 764-769. 4. Earnshaw S. On the Nature of Molecular Forces which Regulate the Constitution of Luminiferous Ether // Transaction of Cambridge Philosophical Society. – 1842. – № 7, P. 97-112. 5. Kozoriz V.V. Dynamic Systems of Free Magnetically Interacting Bodies. – Naukova Dumka, Kyiv, 1981. (in Russian) 6. Kozoriz V. Magnetic Potential Well (MPW) Phenomenon Testing // The 20th Int. Conf. on Maglev Transportation and Linear Drives, San-Diego, 2008. (www.maglev2008.com) 7. Landau L.D., Lifshits E.M. Mechanics. – Moscow, Mir, 1965. 8. Moon F.C. Superconducting Levitation Application to Bearings and Magnetic Transportation. – New-York, John Wiley & Sons, Inc., 1993. 9. White D.C., Woodson H.H. Electromagnetic Energy Conversion. – New-York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.

Надійшла до редколегії 19.07.10

УДК 517.929

O. Kukhareno, PhD Student

SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR OSCILLATORY EQUATION WITH DELAY

Ordinary differential equations of the second order with one constant delay are considered in this paper. An analytical representation of the solution is obtained using the method of steps.

В даній роботі розглянуто диференціальне рівняння другого порядку з одним сталим запізнюванням. Використовуючи метод кроків, отримано аналітичний розв'язок цього рівняння.

Introduction

Many mathematical models of oscillating processes are described by linear differential equations of the second order [1,2]. If a prehistory has to be considered, what is typical for models in biology, economy, dynamics of populations, delay differential equations [3-6] are used. In the paper [7] the equations and systems of differential equations with pure delay have been considered. Special functions have been introduced and a solution of the Cauchy problem has been obtained.

It is known, a solution of linear inhomogeneous differential equation of the second order

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

with initial condition $x(0) = x_0$, can be written as

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \sin \omega(t-s) f(s) ds. \quad (1.2)$$

For the delay equation

$$x''(t) + \omega^2 x(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \quad \tau > 0,$$

with initial conditions $x(t) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, an analogical representation has the next form

$$x(t) = \varphi(-\tau) \cos_{\tau}(\omega, t) + \frac{1}{\omega} \dot{\varphi}(-\tau) \sin_{\tau}(\omega, t) + \frac{1}{\omega} \int_{-\tau}^0 \sin_{\tau}(\omega, t-\tau-\xi) \ddot{\varphi}(\xi) d\xi + \int_0^t \sin_{\tau}(\omega, t-\tau-\xi) f(\xi) d\xi,$$

where $\cos_{\tau}(\omega, t)$, $\sin_{\tau}(\omega, t)$ are the special functions named the delay cosine and sine functions [7]. They can be presented as follows.

The delay cosine function $\cos_{\tau}(\omega, t)$ is a function which can be written as

$$\cos_{\tau}(\omega, t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t < 0, \\ 1 - \omega^2 \frac{t^2}{2!}, & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ 1 - \omega^2 \frac{t^2}{2!} + \omega^4 \frac{(t-\tau)^4}{4!} + \dots + (-1)^k \omega^{2k} \frac{[t-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases}$$

a $2k$ -degree polynomial on intervals $(k-1)\tau \leq t < k\tau$ merged in points $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$

The delay sine function $\sin_{\tau}(\omega, t)$ is a function which can be written as

$$\sin_{\tau}(\omega, t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ \omega(t+\tau), & -\tau \leq t < 0, \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \frac{t^3}{3!}, & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \omega^{2k+1} \frac{[t-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases}$$

a $(2k+1)$ -degree polynomial on intervals $(k-1)\tau \leq t < k\tau$ merged in points $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$

1. Homogeneous Equation

In the presented paper a linear inhomogeneous equation with one constant delay is considered

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) + \omega_2^2 x(t - \tau) = f(t), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0 \quad (1.3)$$

with an initial condition

$$x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.4)$$

Here $\varphi(t)$ is an arbitrary, continuously differentiable function on an initial interval $-\tau \leq t \leq 0$. By a solution of the Cauchy problem (1.4) for the equation (1.3) we mean a function $x(t)$, which is defined for $t \geq -\tau$, continuously differentiable for $t \geq 0$ and identically satisfies (1.3) with initial conditions (1.4). It is known, the solution of the Cauchy problem (1.4) for the inhomogeneous equation (1.3) can be presented in the form of sum

$$x(t) = x^0(t) + \bar{x}(t),$$

where $x^0(t)$ is a solution of homogeneous equation

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) + \omega_2^2 x(t - \tau) = 0, \quad t > 0, \quad \tau > 0 \quad (1.5)$$

with initial conditions (1.4). And $\bar{x}(t)$ is a solution of the inhomogeneous equation (1.3) with zero initial conditions $\bar{x}(t) \equiv 0, \quad \bar{x}'(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0$.

Let $x_1(t)$ is a solution of the homogeneous differential equation with initial conditions

$$\begin{aligned} x_1(t) &\equiv 1, \quad x_1'(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad x_1(t) \equiv 0, \\ x_1'(t) &\equiv 0, \quad t < -\tau, \end{aligned} \quad (1.6)$$

and $x_2(t)$ is a solution of the homogeneous differential equation (1.5) with initial conditions

$$\begin{aligned} x_2(t) &\equiv t + \tau, \quad x_2'(t) \equiv 1, \quad -\tau \leq t \leq 0, \\ x_1(t) &\equiv 0, \quad x_1'(t) \equiv 0, \quad t < -\tau. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Preliminary we will formulate the statement about representation of solution of the Cauchy problem (1.4) for the homogeneous equation (1.5), using functions $x_1(t)$, $x_2(t)$ with initial conditions (1.6), (1.7). The obtained representation is similar to the one formulated at [4].

Theorem 1.1. A solution of the homogeneous equation (1.5) with initial conditions (1.4) can be written as

$$x(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s) \varphi''(s) ds, \quad (1.8)$$

where $x_1(t)$ is the solution of the equation (1.5) with the conditions (1.6), $x_2(t)$ is the solution of (1.5) with the conditions (1.7).

Proof. We seek solutions of (1.5) of the form

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s) c''(s) ds, \quad (1.9)$$

where a , b are arbitrary constants and $c(t)$ is a twice continuously differentiable function. Substituting (1.9) into the equation (1.5), we obtain

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} \left[ax_1(t) + bx_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s) c(s) ds \right] + \\ &\omega_1^2 \left[ax_1(t) + bx_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s) c''(s) ds \right] + \\ &+ \omega_2^2 \left[ax_1(t - \tau) + bx_2(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - 2\tau - \xi) c''(s) ds \right] = 0. \end{aligned}$$

We rewrite the obtained expression and get

$$\begin{aligned} &a \left[\ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) + \omega_2^2 x_1(t - \tau) \right] + b \left[\ddot{x}_2(t) + \omega_1^2 x_2(t) + \omega_2^2 x_2(t - \tau) \right] + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \left[\ddot{x}_2(t - \tau - s) + \omega_1^2 x_2(t - \tau - s) + \omega_2^2 x_2(t - 2\tau - s) \right] c''(s) ds \equiv 0. \end{aligned}$$

By the definition, $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are solutions of the homogeneous equation, so expressions in square brackets are identically equal to zero, and the obtained identity shows that (1.9) is a solution of the equation (1.5) for the arbitrary constants a , b and the function $c(t)$.

We will show that for $a = \varphi(-\tau)$, $b = \varphi'(-\tau)$, $c(t) = \varphi(t)$ initial conditions are satisfied

$$x(t) = \varphi(t), \quad x'(t) = \varphi'(t), \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

i.e. the solution of the Cauchy problem (1.4) for the homogeneous equation (1.5) has the form (1.8).

Substituting initial conditions (1.4) into (1.8), we obtain

$$\varphi(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t-\tau-s)\varphi''(s)ds, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

We make the change of variables $t - \tau - s = \xi$ in the integral, so that

$$\varphi(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{t-\tau}^t x_2(\xi)\varphi''(t-\tau-\xi)d\xi, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

The integral is divided into two

$$\varphi(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{t-\tau}^{-\tau} x_2(\xi)\varphi''(t-\tau-\xi)d\xi + \int_{-\tau}^t x_2(\xi)\varphi''(t-\tau-\xi)d\xi.$$

Considering that for $t - \tau \leq \xi \leq -\tau$ $x_1(\xi) \equiv 0$, the first integral vanishes, and

$$\varphi(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^t x_2(\xi)\varphi''(t-\tau-\xi)d\xi, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

The integral is taken by parts

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) - x_2(\xi)\varphi'(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^{\xi=t} + \int_{-\tau}^t x_2'(\xi)\varphi'(t-\tau-\xi)d\xi = \\ &= \varphi(-\tau)x_1(t) + x_2(-\tau)\varphi'(t) + \int_{-\tau}^t x_2'(\xi)\varphi'(t-\tau-\xi)d\xi. \end{aligned}$$

$x_1(t) \equiv 1$, $x_2(-\tau) = 0$, $x_2'(t) \equiv 1$ in the interval $-\tau \leq t \leq 0$ and we have

$$\varphi(t) = \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^t \varphi'(t-\tau-\xi)d\xi = \varphi(-\tau) - \varphi(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^{\xi=t} = \varphi(t).$$

Thus the first initial condition is fulfilled. We will show that for the expression (1.8) the second initial condition is fulfilled also. Differentiating (1.8), we obtain

$$x'(t) = \varphi(-\tau)x_1'(t) + \varphi'(-\tau)x_2'(t) + \int_{-\tau}^0 x_2'(t-\tau-s)\varphi''(s)ds.$$

After the change of variables in the integral, we have

$$x'(t) = \varphi(-\tau)x_1'(t) + \varphi'(-\tau)x_2'(t) + \int_{t-\tau}^t x_2'(\xi)\varphi''(t-\tau-\xi)d\xi.$$

Considering that on the initial interval $x_1'(t) \equiv 0$, $x_2'(t) \equiv 1$, we get

$$x'(t) = \varphi'(-\tau) + \int_{-\tau}^t \varphi''(t-\tau-\xi)d\xi = \varphi'(-\tau) - \varphi'(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^{\xi=t} = \varphi'(t).$$

The second initial condition is fulfilled.

Thus, to obtain a solution of the Cauchy problem it is necessary to have functions $x_1(t)$, $x_2(t)$, which are solutions of homogeneous equation with the special (unit) initial conditions.

Theorem 1.2. Solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ of the equations (1.5) with initial conditions (1.6), (1.7) can be presented in the following form

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{11}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \\ x_{1k}(t), & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} x_{20}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{21}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \\ x_{2k}(t), & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases} \quad (1.10)$$

where

$$x_{1k}(t) = x_{1k-1}((k-1)\tau)\cos\omega_1(t-(k-1)\tau) + \frac{x_{1k-1}'((k-1)\tau)}{\omega_1}\sin\omega_1(t-(k-1)\tau) - \omega_2^2 \int_{(k-1)\tau}^t \sin\omega_1(t-s)x_{1k-1}(s)ds,$$

$$(k-1)\tau \leq t < k\tau, \quad x_{10}(t) = 1, \quad x_{10}'(t) = 0,$$

$$x_{2k}(t) = x_{2k-1}((k-1)\tau)\cos\omega_1(t-(k-1)\tau) + \frac{x_{2k-1}'((k-1)\tau)}{\omega_1}\sin\omega_1(t-(k-1)\tau) - \omega_2^2 \int_{(k-1)\tau}^t \sin\omega_1(t-s)x_{2k-1}(s)ds,$$

$$(k-1)\tau \leq t < k\tau, \quad x_{20}(t) = t + \tau, \quad x_{20}'(t) = 1. \quad (1.11)$$

Proof. To obtain solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ of the equation (1.5) we will use the method of steps [4]. As it was shown above, the solution of the linear inhomogeneous equation without delay (1.1) is (1.2).

Firstly, we consider the first interval $T_1: 0 \leq t < \tau$. In this interval (1.5) is a linear inhomogeneous differential equation without delay of the following form

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) = -\omega_2^2 x_{10}(t - \tau) \quad (1.12)$$

with the right-hand side presented as a known function $x_{10}(t) = 1$, $x'_{10}(t) = 0$. As it was shown in (1.2), a solution of (1.12) on the interval $T_1: 0 \leq t < \tau$ will be

$$x_{11}(t) = x_{10}(0) \cos \omega_1 t + \frac{x'_{10}(0)}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \omega_2^2 \int_0^t \sin \omega_1(t-s) x_{10}(s) ds. \quad (1.13)$$

Next, we consider the second interval $T_2: \tau \leq t < 2\tau$. In this interval the equation (1.5) has the next form

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) = -\omega_2^2 x_{11}(t - \tau). \quad (1.14)$$

a solution of (1.14) on the interval $T_2: \tau \leq t < 2\tau$ has a similar representation

$$x_{12}(t) = x_{11}(\tau) \cos \omega_1(t - \tau) + \frac{x'_{11}(\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - \tau) - \omega_2^2 \int_\tau^t \sin \omega_1(t-s) x_{11}(s) ds. \quad (1.13)$$

Continuing process, we obtain solutions of the homogeneous equation (1.5) on intervals $T_k: (k-1)\tau \leq t < k\tau$:

$$x_{1k}(t) = x_{1k-1}((k-1)\tau) \cos \omega_1(t - (k-1)\tau) + \frac{x'_{1k-1}((k-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (k-1)\tau) - \omega_2^2 \int_{(k-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s) x_{1k-1}(s) ds.$$

Thus, $x_1(t)$ has the following form

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{11}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{1k}(t), & (k-1)\tau \leq t < k\tau. \end{cases}$$

And the solution $x_2(t)$ of (1.5) with initial conditions $x_{20}(t) \equiv t + \tau$, $x'_{20}(t) \equiv 1$, $-\tau \leq t \leq 0$ can be presented in the similar form

$$x_2(t) = \begin{cases} x_{20}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{21}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{2k}(t), & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases}$$

$$x_{2k}(t) = x_{2k-1}((k-1)\tau) \cos \omega_1(t - (k-1)\tau) + \frac{x'_{2k-1}((k-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (k-1)\tau) - \omega_2^2 \int_{(k-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s) x_{2k-1}(s) ds.$$

2. Inhomogeneous Equation

Now we will consider the linear inhomogeneous equation with one constant delay (1.3)

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) + \omega_2^2 x(t - \tau) = f(t), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0,$$

with zero initial conditions

$$x(t) \equiv 0, \quad x'(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.1)$$

Theorem 2.1. A solution of the delay inhomogeneous equation (1.3) with zero initial conditions (2.1) is

$$\bar{x}(t) = \int_0^t x_1(t-s-\tau) f(s) ds,$$

where $x_1(t)$ is a solution of the homogeneous equation with initial conditions $x_1(t) \equiv 1$, $x'_1(t) \equiv 0$, $-\tau \leq t \leq 0$.

Proof. To proof statements of the theorem we will use the method of variation of parameters. We seek a particular solution $\bar{x}(t)$ of (2.1) in the next form

$$\bar{x}(t) = \int_0^t x_1(t-\tau-s) c(s) ds,$$

where $c(t)$ is an unknown function. Substituting this expression into (1.3), we obtain

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t x_1(t-\tau-s) c(s) ds \right\} + \omega_1^2 \left\{ \int_0^t x_1(t-\tau-s) c(s) ds \right\} + \omega_2^2 \left\{ \int_0^{t-\tau} x_1(t-2\tau-s) c(s) ds \right\} = f(t).$$

After calculating derivatives, we have

$$x_1(-\tau)c(t) + \int_0^t x_1'(t-\tau-s)c(s)ds + \omega_1^2 \left\{ \int_0^t x_1(t-\tau-s)c(s)ds \right\} + \omega_2^2 \left\{ \int_0^{t-\tau} x_1(t-2\tau-s)c(s)ds \right\} = f(t).$$

We rewrite the obtained expression in the following form

$$x_1(-\tau)c(t) + \int_0^t \{x_1'(t-\tau-s) + \omega_1^2 x_1(t-\tau-s) + \omega_1^2 x_2(t-2\tau-s)\}c(s)ds - \omega_2^2 \left\{ \int_{t-\tau}^t x_1(t-2\tau-s)c(s)ds \right\} = f(t),$$

and make the change of variables $t-2\tau-s = \xi$ in the second integral

$$\int_{t-\tau}^t x_1(t-2\tau-s)c(s)ds = \int_{-\tau}^{-2\tau} x_1(\xi)c(t-2\tau-\xi)d\xi = 0.$$

Considering that $x_1(-\tau) = 1$ and $x_1(t)$ is a solution of the homogeneous equation, we have

$$c(t) = f(t),$$

i.e. the statements of the theorem 2.1.

Using obtained result we can formulate the following statement.

Theorem 2.2. A solution of the delay inhomogeneous equation (1.3) with zero initial conditions (1.4) is

$$x(t) = \varphi(-\tau)x_1(t) + \varphi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t-\tau-s)\varphi''(s)ds + \int_0^t x_1(t-s-\tau)f(s)ds,$$

where $x_1(t)$, $x_2(t)$ are defined in (1.10), (1.11).

1. Babakov I.M., Oscillation theory. – M: Nauka, 1968. – 559 p. [Russian]
2. Mitropolskij J.A., Martynjuk D.I., Periodic and quasiperiodic oscillations of systems with delay. – K: Vyshcha shkola, 1979. – 247 p. [Russian]
3. Hale J., Theory of functional differential equations. – M: Mir, 1984. – 421p. [Russian]
4. Elsgolts L.E., Norkin S.B., Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments. – M: Nauka, 1970. – 296 p. [Russian]
5. Myshkis A.S., Linear differential equations with delay argument. – M: Nauka, 1972. – 352 p. [Russian]
6. Belman R., Cook K.L., Differential-difference equations. – M: Mir, 1967. – 548 p. [Russian]
7. Khusainov D.J., Diblik J., Ruzhichkova M., Lukachova J., Representation of solution of the Cauchy problem for oscillating system with pure delay // Nelinijni kolyvannia, Vol.11, №2, 2008. – P.261-270. [Russian]

Надійшла до редколегії 05.02.10

УДК 004.42:510.69

М. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С. Шкільняк, д-р фіз. мат. наук, доц.

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ КВАНТОРНО-ЕКВАЦІЙНОГО РІВНЯ

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості X–Y-означеного відношення логічного наслідку. На цій основі для загального випадку логік квазіарних предикатів побудовано числення секвенційного типу, для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

First-order composition-nominative logics of quasi-ary predicates of quantifier level are studied. We define basic semantic properties of the introduced logics, particularly the properties of the X–Y-valued relation of logical consequence. On this basis we construct sequent calculi for the general case of logics of quasi-ary predicates; for such calculi soundness and completeness are proved.

Розвиток інформаційних технологій в наш час веде до розширення сфери застосування математичної логіки. Розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]), які з великим успіхом використовуються в інформатиці та програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів [2]. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування, на її основі будуються спеціальні логіки, орієнтовані на вирішення тих чи інших конкретних задач. Водночас класична логіка має принципові обмеження, що істотно ускладнює її використання. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, вона недостатньо враховує неповноту, частковість, структурованість інформації про предметну область, а в програмуванні широко використовуються часткові відображення над складними іменними (номінативними) даними. Обмеження класичної логіки роблять актуальною проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів на спільній для логіки і програмування основі. За таку основу природно взяти композиційно-номінативний підхід [3] до побудови моделей програм і орієнтованих на них логік. На його базі розроблено [4] низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. Логіки, збудовані на основі композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Передумовою їх виникнення стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язку нових задач інформатики й програмування.

Метою даної роботи є дослідження першопорядкових композиційно-номінативних логік кванторно-екваційного рівня та побудова для цих логік числень секвенційного типу в загальному випадку квазіарних предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [4–6].

Основні принципи композиційно-номінативного підходу. На основі розгляду з семантичного погляду основних конструкцій традиційних мов програмування та їх формалізацій можна зробити висновок, що провідну роль при побудові програмно-орієнтованих логік посідають алгебраїчні та композиційно-номінативні аспекти. Тому основою побудови нових логік є композиційно-номінативний підхід (КНП). Він задає принципи визначення і дослідження формальних мов програм та логічних систем. КНП є подальшим розвитком розробленого В.Н.Редьком композиційного

програмування. Він опирається на загальнометодологічний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного і базується [3] на таких основних принципах:

- інтегрованості інтенціональних та екстенціональних аспектів;
- пріоритетності семантики над синтаксисом;
- композиційності;
- номінативності.

Згідно КНП програмні поняття формалізуємо за допомогою композиційно-номінативних систем. Центральним поняттям логіки є поняття предиката. З математичного погляду предикати – це спеціальні функції вигляду $D \rightarrow \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істинних (булевих) значень. Тому класи предикатів можна задавати композиційно-номінативними системами. Це дозволяє подавати і вивчати логічні та програмні системи в єдиному стилі.

КНЛ будемо за семантико-синтаксичною схемою. Це означає наступне.

1. Спочатку задаємо інтенціональні (змістовні) моделі логік. Такі моделі найперше визначаються рівнями розгляду даних, тому для їх задання фіксуємо рівень абстракції розгляду. Інтенціональні моделі індукують мову логіки.

2. Будемо відповідні розглянутому рівню екстенціональні моделі, які задають семантичні аспекти логік, – предикатні композиційні системи. Предикатна композиційна система – це трійка (D, Pr, C) , де D – множина (клас) даних, Pr – множина (клас) предикатів, заданих на D , C – множина (клас) композицій (операцій) породження нових предикатів, вона задається множиною базових композицій відповідного рівня. Така система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних (D, Pr) та алгебру предикатів (Pr, C) , терми якої трактуються як формули мови логіки. Композиції визначають універсальні методи побудови предикатів, виступаючи ядром логіки певного типу.

3. Будемо формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти логік. Основні їх типи – формальні системи гільбертівського типу і системи ґенценівського типу (секвенційні числення).

Побудову КНЛ починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня розгляду даних. Можна виділити пропозиційний, сингулярний (тут не розглядаємо) та номінативний рівні.

На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно, як "чорні скриньки". Предикати мають вигляд $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – сукупність абстрактних даних. Базовими композиціями є сильні Клінієві зв'язки $\vee$ та $\neg$.

На номінативному рівні дані розглядаються як "сірі" скриньки, побудовані з "білих" (гранично конкретних) і "чорних" (гранично абстрактних). Такі дані називаються номінатами. Номінативний рівень розпадається на низку підрівнів. Найважливішим є підрівень однозначних номінатів – іменних множин (ІМ). Іменні множини – це множини пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – його значення. Функції та предикати, задані на ІМ, називають квазіарними.

Формальне визначення ІМ таке: V -ІМ над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \rightarrow A$.

Тут V та A – множини предметних імен та предметних значень. Клас всіх V -ІМ над A позначаємо ${}^V A$.

V -ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n, \dots]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для ІМ вводимо функцію $im : {}^V A \rightarrow 2^V$ так: $im(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta \text{ для деякого } a \in A\}$.

Визначаємо $\delta \parallel X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$. Замість $\delta \parallel (V \setminus X)$ пишемо $\delta \parallel \neg X$.

Операцію накладки вводимо так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \parallel (V \setminus im(\delta_2)))$.

Операцію реномінації $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} : {}^V A \rightarrow {}^V A$ задаємо так: $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), \dots, v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \parallel (V \setminus \{v_1, \dots, v_n\}))$.

Функцію вигляду $P : {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ називають V -квазіарним предикатом на A .

Клас V -квазіарних предикатів на A позначаємо Pr^A .

Ім'я x строго неістотне для V -квазіарного предиката P , якщо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \parallel \neg x)$ для довільних $d \in {}^V A$ та $a \in A$.

Областю істинності та областю хибності предиката $P : {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ назовемо множини

$$T(P) = \{d \in {}^V A \mid P(d) = T\} \text{ та } F(P) = \{d \in {}^V A \mid P(d) = F\}.$$

V -квазіарний предикат P (частково) істинний, якщо $F(P) = \emptyset$.

V -квазіарний предикат P виконуваний, якщо $T(P) \neq \emptyset$.

На рівні ІМ можна виділити реномінативний та першопорядковий рівні. Із першопорядкових в роботі розглядаємо логіки кванторно-екваційного рівня, або чисті логіки з рівністю. Базовими композиціями кванторно-екваційного рівня є $\neg$, $\vee$, реномінації $R_{\bar{x}}$, квантори $\exists x$ та спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності $=_{xy}$.

Для визначення цих композицій задамо предикати $\neg P$, $P \vee Q$, $R_{\bar{x}}(P)$, $\exists x P$, $=_{xy}$ областями їх істинності й хибності:

$$T(\neg P) = F(P); \quad F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q); \quad F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(R_{\bar{x}}(P)) = r_{\bar{x}}^{\bar{x}}(T(P)); \quad F(R_{\bar{x}}(P)) = r_{\bar{x}}^{\bar{x}}(F(P));$$

$$T(\exists x P) = \{d \in {}^V A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A\}; \quad F(\exists x P) = \{d \in {}^V A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$T(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\}; \quad F(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\}.$$

Композиційні системи квазіарних предикатів. Семантичними моделями композиційно-номінативних логік кванторно-екваційного рівня, або чистих композиційно-номінативних логік з рівністю (ЧКНЛР), є композиційні системи квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня $({}^V A, Pr^A, C)$, де C визначається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}$, $\exists x$, $=_{xy}$. Терми відповідної композиційної алгебри (Pr^A, C) можуть трактуватися як формули мови ЧКНЛР.

Опишемо мову ЧКНЛР. Алфавіт мови ЧКНЛР: символи базових композицій, множина Ps предикатних символів (ПС), множина V предметних імен. Множину Ps назовемо сигнатурою мови.

Дамо визначення множини Fr формул мови ЧКНЛР.

1) Кожний $p \in Ps$ та символ $=_{xy}$ є формулою, такі формули атомарні.

2) Якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg \Phi$, $\vee \Phi \Psi$, $R_{\bar{x}} \Phi$, $\exists x \Phi$ – формули.

Надалі вживатимемо також символи похідних композицій $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall x$. "Формули", записані з їх використанням, вважаємо скороченнями "справжніх" формул. Замість $=_{xy}$ також будемо писати в традиційному вигляді $x = y$.

Позначаємо $nm(\Phi)$ множину всіх предметних імен із V , які фігурують у формулі Φ .

Відображення інтерпретації формул $J: Fr \rightarrow Pr^A$ визначається за допомогою тотального однозначного відображення $I: Ps \rightarrow Pr^A$, яке позначає символами Ps базові предикати:

- 1) $J(p) = I(p)$ для кожного $p \in Ps$; $J(=_{xy}) = I(=_{xy}) = =_{xy}$ для всіх $x, y \in V$.
- 2) $J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi))$, $J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$, $J(R_x^V\Phi) = R_x^V(J(\Phi))$, $J(\exists x\Phi) = \exists x(J(\Phi))$.

Відображення $I: Ps \rightarrow Pr$ поєднує АС даних (A, Pr) із мовою ЧКНЛР. Отримуємо АС з доданою сигнатурою [4] вигляду $((A, Pr^A), I)$, яку позначаємо (A, I) . Така АС фактично визначає композиційну систему (V, Pr^A, C) , тому АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які поєднують мову із неокласичними АС даних.

Предикат $J(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на моделі мови $A = (A, I)$, – позначаємо Φ_A .

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для формули Φ , якщо для кожної моделі мови A ім'я x строго неістотне для Φ_A .

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_x^V p$, причому відсутні тотожні перейменування та $\bar{v}$ не містить строго неістотних для p імен.

Φ (частково) істинна при інтерпретації на A , або A -неспростовна (позначаємо $A \models \Phi$), якщо Φ_A – неспростовний.

Φ всюди істинна, або неспростовна (позначаємо $\models \Phi$), якщо Φ A -неспростовна для кожної моделі мови A .

Φ виконується при інтерпретації на $A = (A, I)$, або A -виконується, якщо Φ_A – виконуваний.

Φ виконується, якщо Φ A -виконується для кожної моделі мови A .

Формула Φ – логічний наслідок формули Ψ (позначаємо $\Phi \models \Psi$), якщо $T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \emptyset$ для кожної моделі мови A .

Формули Φ та Ψ логічно еквівалентні (позначаємо $\Phi \sim \Psi$), якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Формули Φ та Ψ строго еквівалентні в моделі мови A (позначаємо $\Phi_{A \sim TF} \Psi$), якщо $T(\Phi_A) = T(\Psi_A)$ та $F(\Phi_A) = F(\Psi_A)$.

Формули Φ та Ψ логічно строго еквівалентні (позначаємо $\Phi \sim_{TF} \Psi$), якщо $\Phi_{A \sim TF} \Psi$ для кожної моделі мови A .

Формула Ψ є слабким логічним наслідком [4] формули Φ (позначаємо $\Phi \models \Psi$), якщо для кожної моделі мови A з умови $A \models \Phi$ випливає $A \models \Psi$.

Семантичні властивості формул. Розглянемо властивості формул ЧКНЛР, пов'язані з композиціями. Вони відбивають відповідні властивості цих композицій. Властивості пропозиційного рівня аналогічні відповідним властивостям класичної пропозиційної логіки [2], вони відбивають властивості логічних зв'язок.

До основних властивостей формул, пов'язаних з композицією реномінації, належать [4, 5] RT , $R\neg$, $R\vee$, RR , RSN .

Властивості композицій квантифікації [4, 5] в основному аналогічні відповідним властивостям класичної логіки.

Водночас далеко не всі закони класичної логіки справджуються для логік квазіарних предикатів.

Приклад 1. Візьмемо ПС p та q , проінтерпретуємо їх на певній АС $A = (A, I)$ так:

$$p_A(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } x \in im(d), \\ F, & \text{якщо } x \notin im(d); \end{cases} \quad q_A(d) = \begin{cases} F, & \text{якщо } x \in im(d), \\ T, & \text{якщо } x \notin im(d). \end{cases}$$

Тоді $A \models \forall x p$, $A \not\models p$, $A \not\models R_z^x p$, $A \models \forall x p \rightarrow R_z^x p$, $A \not\models R_z^x q \rightarrow \exists x q$, $A \models \forall x p \rightarrow p$, $A \not\models q \rightarrow \exists x q$.

Нехай Φ – це формула $\forall x p \rightarrow p$, Ψ – це формула $\forall x p \& \neg p$. Тоді маємо:

$\Phi_A \models \forall x \Phi$ та $\exists x \Phi_A \not\models \Phi$; $\Phi_A \models \exists x \Phi$ та $\forall x \Phi_A \not\models \Phi$; $\exists x \Psi_A \models \Psi$ та $\Psi_A \not\models \forall x \Psi$; $\forall x \Psi_A \models \Psi$ та $\Psi_A \not\models \exists x \Psi$.

Таким чином, для загального випадку логіки квазіарних предикатів маємо:

Твердження 1. Не завжди справджуються $\models \forall x \theta \rightarrow R_z^x(\theta)$, $\models R_z^x(\theta) \rightarrow \exists x \theta$, $\forall x \theta \models R_z^x(\theta)$.

Зокрема, не завжди справджуються закони класичної логіки $\models \forall x \theta \rightarrow \theta$, $\models \theta \rightarrow \exists x \theta$, $\forall x \theta \models \theta$.

В класичній логіці кожна формула вигляду $\neg \exists x \Phi \& \Phi$ невиконується. Для логіки квазіарних предикатів це не так.

Твердження 2. Існують виконувані формули вигляду $\neg \exists x \Phi \& \Phi$.

Нехай Φ – ПС. Проінтерпретуємо Φ на певній АС A як q_A прикладу 1. Тоді для кожного $d \in {}^V A$ маємо $\exists x \Phi_A(d) = F$, звідки $\neg \exists x \Phi_A(d) = T$ для кожного $d \in {}^V A$. Візьмемо $\delta \in {}^V A$ таке, що $x \notin im(\delta)$. Тоді $\Phi_A(\delta) = T$, звідки $(\neg \exists x \Phi \& \Phi)_A(\delta) = T$.

До основних властивостей формул, пов'язаних з композиціями квантифікації та реномінації, належать [4, 5] NRS , $R\exists$, $R\exists S$, RZS . Основними властивостями рівності є рефлексивність, симетричність, транзитивність, заміна рівних.

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності. Вона формулюється в різних формах – традиційній для $\sim$ (див. [2, 4]) та посиленій для $\sim_{TF}$ (див. [5]).

Для формул мови ЧКНЛР традиційним чином (див. [4]) визначаються поняття квазізамкненої формули, нормальної формули. Доводиться [4], що для кожної формули можна збудувати еквівалентну їй нормальну формулу.

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх вільні предметні імена, від яких може залежати значення відповідних предикатів. Для логіки квазіарних предикатів важлива *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів вказують [5] множину строго неістотних імен, від яких не залежить значення таких предикатів.

Для кожного $p \in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $v: Ps \rightarrow 2^V$. Така функція природним чином [6] продовжується як $v: Fr \rightarrow 2^V$. При цьому $v(=_{xy}) = V \setminus \{x, y\}$.

Можливість виконання еквівалентних перетворень довільних формул вимагає наявності нескінченної множини

$\bigcap_{p \in Ps} v(p)$ тотально строго неістотних імен. Така умова постулюється для семантичних моделей ЧКНЛР.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$.

Δ є логічним наслідком Γ в моделі мови АС A (позначаємо $\Gamma_A \models \Delta$), якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \emptyset$.

Δ є логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma \models \Delta$), якщо $\Gamma_A \models \Delta$ для кожної моделі мови A .

Теорема 1 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді: $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $\models$.

С) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, то $\Gamma \models \Delta$.

У) Нехай $\Gamma \models \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Sigma$;

нехай $\Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda \models \Delta$.

→) $\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

∨) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

RT) $R_{z,x}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RR) $R_{x,y}^{\bar{v}}(R_{y,y}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{x,y}^{\bar{v} \circ \bar{w}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R¬) $R_{x,x}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R∨) $R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{x,x}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

ΦNS) $R_{z,x}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R∃) $R_{x,x}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R∃S) $R_{x,x}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{x,z}^{\bar{v}} \circ \bar{y}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\Gamma \models \Delta, R_{z,x}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\Gamma \models \Delta, R_{x,y}^{\bar{v}}(R_{y,y}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{x,y}^{\bar{v} \circ \bar{w}}(\Phi)$.

$\Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{x,x}^{\bar{v}}(\Psi)$.

$\Gamma \models \Delta, R_{z,x}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi)$ (умова $y \in v(\Phi)$).

$\Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R_{x,x}^{\bar{v}}(\Phi)$ (умова $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$).

$\Gamma \models \Delta, R_{x,x}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{x,z}^{\bar{v}} \circ \bar{y}(\Phi)$.

Для R∃S умова: z тотально строго неістотне та $z \notin nm(R_{x,x}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

X–Y-означені відношення логічного наслідку. Для загального випадку логіки квазіарних предикатів значення предиката P на даному d може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул на моделях мови необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. Поняття X–Y-означеної іменної множини та X–Y-означеного логічного наслідку введені [6].

Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ (X та Y диз'юнктні, якщо $X \cap Y = \emptyset$) множини X–Y-означених V-IM задамо так:

$$V_{X-Y}A = \{d \in V \mid X \subseteq im(d) \text{ та } Y \cap im(d) = \emptyset\}.$$

В X–Y-означених IM імена із X мають значення, імена із Y не мають значення.

Твердження 3 (див. [6]). Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді $V, W-U A = \bigcup_{Y \subseteq Z} V, W \cup Y-U \cup (Z \setminus Y) A$.

Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ задамо X–Y-означені області істинності й хибності квазіарного предиката P :

$$T_{X-Y}(P) = \{d \in V \mid P(d) = T \text{ та } X \subseteq im(d), Y \cap im(d) = \emptyset\} = \{d \in V_{X-Y}A \mid P(d) = T\}.$$

$$F_{X-Y}(P) = \{d \in V \mid P(d) = F \text{ та } X \subseteq im(d), Y \cap im(d) = \emptyset\} = \{d \in V_{X-Y}A \mid P(d) = F\}.$$

Теорема 2 (див. [6]). При умові $y \in Y$ маємо $T_{Y-Z}(R_Y^x(P)) \subseteq T_{Y-Z}(\exists x(P))$ та $F_{Y-Z}(\exists x(P)) \subseteq F_{Y-Z}(R_Y^x(P))$.

Для довільних диз'юнктних множин $X, Y \subseteq V$ визначимо X–Y-означене відношення наслідку $a_{X-Y} \models$ для двох формул при фіксованій моделі мови AC **A**: $\Phi_{A, X-Y} \models \Psi$, якщо $T_{X-Y}(\Phi_A) \cap F_{X-Y}(\Psi_A) = \emptyset$.

Якщо $Y = \emptyset$ то отримуємо X-означене відношення $a_{X-\emptyset} \models$; якщо $X = \emptyset$ – то Y-неозначене відношення $a_{\emptyset-Y} \models$.

У випадку $X = Y = \emptyset$ маємо відношення наслідку $a \models$ при фіксованій моделі мови **A**.

Для загального випадку квазіарних предикатів не завжди вірними є (приклад 1) $R_z^x(\Phi)_A \models \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi_A \models R_z^x(\Phi)$.

Водночас, згідно теореми 2, при умові $z \in X$ отримуємо: $R_z^x(\Phi)_A \models \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi_{A, X-Y} \models R_z^x(\Phi)$.

Поширимо поняття X–Y-означеного логічного наслідку на довільні множини формул.

$\Delta \in X$ –Y-означеним логічним наслідком Γ в AC **A** (позначаємо $\Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$), якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) = \emptyset$.

Окремими випадками відношення $a_{X-Y} \models$ є відношення $a_{X,X} \models$, $a_{\emptyset-Y} \models$, $a \models$.

Відношення $a_{X-Y} \models$, $a_{X,X} \models$, $a_{\emptyset-Y} \models$, $a \models$ рефлексивні, проте нетранзитивні.

Із визначень безпосередньо випливають наступні твердження.

Твердження 4. Нехай $\Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma_{A, X-Y} \models \Sigma$; нехай $\Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda_{A, X-Y} \models \Delta$.

Твердження 5. $\Gamma_A \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$ та $\Gamma_A \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, -Y} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$.

Якщо z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Phi)$, то $\Phi_A(d \nabla x \rightarrow a) = \Phi_A(d \parallel_{-x})$ для довільних **A**, $d \in V$, $a \in A$. Звідси:

Твердження 6. Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma \cup \Delta)$. Тоді маємо:

1) $\Gamma_{A, \{z\} \cup X-Y} \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta$; 2) $\Gamma_{\{z\} \cup X-Y} \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{X-Y} \models \Delta$.

Теорема 3. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді $\Gamma_{A, W-U} \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{A, W \cup Y-U \cup (Z \setminus Y)} \models \Delta$ для кожної $Y \subseteq Z$.

Беручи до уваги теорему 2, маємо: нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини, нехай $Y \subseteq Z$; тоді

$$\Gamma_{A, W \cup Y-U \cup (Z \setminus Y)} \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma_{A, W \cup Y-U \cup (Z \setminus Y)} \models \Delta, \exists x\Phi, R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \dots, \text{ де всі } y_i \in Y.$$

Звідси, беручи до уваги теорему 3, отримуємо:

Твердження 7. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді

$$\Gamma_{A, W-U} \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z \Gamma_{A, W \cup Y-U \cup (Z \setminus Y)} \models \Delta, \exists x\Phi, R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \dots, \text{ де всі } y_i \in Y.$$

Для формул вигляду $R_{x,x}^{\bar{v}}\Phi$ введено [6] поняття U-неозначуваної форми. Тут $U \subseteq V$ – довільна множина предметних імен, які трактуємо як множину неозначених імен. Це означає, що при інтерпретаціях усі імена U не мають значення.

Нехай $R_{s_1 \dots s_k, y_1 \dots y_n, v_1 \dots v_m}^{r_1 \dots r_k, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi$ така, що $\{x_1, \dots, x_n\} \cap U = \emptyset$, $\{v_1, \dots, v_n\} \cap U = \emptyset$, усі $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, y_1, \dots, y_n \in U$.

U-неозначувана форма формули $R_{s_1 \dots s_k, y_1 \dots y_n, v_1 \dots v_m}^{r_1 \dots r_k, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi$ – це вираз $R_{\perp, \dots, \perp, v_1, \dots, v_m}^{x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi$, де $\perp$ – спеціальний символ, який позначає невизначене значення.

Нехай $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}\Phi$ мають однакові U -неозначувані форми. Тоді при всіх A -інтерпретаціях предикати $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi_A$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}\Phi_A$ приймають однакові значення на всіх даних $d \in V, -U$: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi_A(d) = R_{\bar{y}}^{\bar{u}}\Phi_A(d)$. Звідси маємо таку властивість:

UnD) Якщо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}\Phi$ мають однакові U -неозначувані форми, то $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \Gamma_{A, -U} \models R_{\bar{y}}^{\bar{u}}\Phi, \Delta$.

Теорема 4 (див. [6]). *Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді $\Gamma, R_z^x(\Phi)_A \models \Delta \Rightarrow \Gamma, \exists x\Phi_A \models \Delta$.*

Згідно теореми 2, при $z \in X$ маємо $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models \Delta \Rightarrow \Gamma, R_z^x(\Phi)_{A, X-Y} \models \Delta$. Звідси отримуємо

Наслідок 1. *Нехай z тотально неістотне та $z \notin pm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при умові $z \in X$ маємо:*

$\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, R_z^x(\Phi)_{A, X-Y} \models \Delta$.

Секвенційні числення композиційно-номінативних логік першого порядку. На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул побудуємо числення секвенційного типу для ЧКНЛР. Секвенцією будемо називати множину формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $\vdash$ та $\neg$, які не входять до алфавіту мови. Секвенції позначаємо у вигляді $\vdash \Gamma, \neg \Delta$, або, не деталізуючи, у вигляді Σ .

У ролі аксіом секвенційного числення виступають замкнені секвенції. Замкненість $\vdash \Gamma, \neg \Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$.

Базова умова замкненості: секвенція Σ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $\vdash \Phi \in \Sigma$ та $\neg \Phi \in \Sigma$.

В загальному випадку логік квазіарних предикатів треба ввести додаткову умову замкненості секвенції в даній вершині секвенційного дерева.

Нехай U – множина всіх неозначених імен в даній вершині Σ . Секвенція Σ U -замкнена, якщо існує пара формул $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A \in \Sigma$ та $\neg R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A \in \Sigma$ таких, що $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A$ мають однакові U -неозначувані форми.

Із властивості *UnD* маємо: якщо $\vdash \Gamma, \neg \Delta$ U -замкнена, то $\Gamma_{A, -U} \models \Delta$ для довільної A .

Отже, якщо $\vdash \Gamma, \neg \Delta$ U -замкнена, то $\Gamma_{A, X-U} \models \Delta$ для довільних A та $X \subseteq V$, де $X \cap U = \emptyset$.

Семантичним властивостям відношення $\models$ зіставимо їх синтаксичні аналоги – секвенційні форми. Вони є правилами виведення секвенційних числень.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції.

Такі дерева називають секвенційними. Формально визначення секвенційного дерева дається [2, 4] індуктивно.

Тривіальне секвенційне дерево з єдиною вершиною Σ замкнене, якщо Σ – замкнена секвенція.

Нетривіальне секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ .

Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ .

Секвенційні числення логік кванторно-екваційного рівня можна розглядати як окремий випадок *прикладних* секвенційних числень кванторного рівня. Виведення в прикладному численні з множиною власних аксіом Ax секвенції Σ означає виведення збагаченої секвенції (секвенції з доданими власними аксіомами) $\Sigma_R = \Sigma \cup Ax$, де $Ax = \{\vdash A \mid A \in Ax\}$.

В численнях логік кванторно-екваційного рівня Ax складається з таких аксіом для рівності (тут x, y, z – тотально неістотні): рефлексивності $\forall x(x = x)$; симетричності $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$; транзитивності $\forall x \forall y \forall z(x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z)$; заміни рівних $\forall x \forall y(x = y \rightarrow (R_{x, \bar{u}}^{\bar{v}}(p) \leftrightarrow R_{y, \bar{u}}^{\bar{v}}(p)))$ для всіх $p \in Ps$ та $x, \bar{u}, \bar{v}$, де x, y – тотально неістотні й відмінні від $z, \bar{u}, \bar{v}$.

Беручи до уваги семантичні властивості відношення $\models$, формул вводимо такі базові секвенційні форми:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma} & \neg \vdash \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma} \\
 \vdash \vee \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma} & \neg \vee \frac{\vdash A, \neg B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma} \\
 \vdash RT \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{z}, \bar{x}}^{\bar{z}, \bar{v}}(A), \Sigma} & \neg RT \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{z}, \bar{x}}^{\bar{z}, \bar{v}}(A), \Sigma} \\
 \vdash RR \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{y}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma} & \neg RR \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{y}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma} \\
 \vdash R \neg \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma} & \neg R \neg \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma} \\
 \vdash R \vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma} & \neg R \vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma} \\
 \vdash \Phi NS \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{z}, \bar{u}}^{\bar{y}, \bar{v}}(A), \Sigma} \text{ при } y \in v(A) & \neg \Phi NS \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{z}, \bar{u}}^{\bar{y}, \bar{v}}(A), \Sigma} \text{ при } y \in v(A) \\
 \vdash R \exists \frac{\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma} \text{ при } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\} & \neg R \exists \frac{\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma} \text{ при } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}
 \end{array}$$

$$\vdash R\exists S \frac{\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{y}} \circ_z^y(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\exists y A), \Sigma}$$

$$\neg \vdash R\exists S \frac{\neg \vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{y}} \circ_z^y(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\exists y A), \Sigma}$$

Для $\vdash R\exists S$ та $\neg \vdash R\exists S$ умови: $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, z тотально строго неістотне, $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(A))$.

За умови $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $\vdash R\exists$ та $\neg \vdash R\exists$, а якщо $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то використовуємо форми $\vdash R\exists S$ та $\neg \vdash R\exists S$.

$$\vdash \exists \frac{\vdash R_y^x(A), \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma}$$

$$\neg \vdash \exists \frac{\neg \vdash R_z^x(A), \neg \vdash x A, \Sigma}{\neg \vdash \exists x A, \Sigma}$$

Для $\vdash \exists$ ім'я y тотально строго неістотне та $y \notin nm(\Sigma, A)$; таке y гарантовано означене.

Секвенційні числення кванторно-екваційного рівня із такими базовими формами назовемо *QEG-численнями*.

Для *QEG*-числень не будемо явно вносити до формул секвенції аксіоми рівності, а будемо враховувати їх при потребі. Це означає введення додаткової умови замкненості секвенції та допоміжних секвенційних форм.

Додаткова умова замкненості секвенції враховує аксіому рефлексивності:

секвенція Ξ замкнена, якщо $\neg \vdash x = x \in \Xi$ для деякого $x \in V$.

Для врахування аксіом симетричності й транзитивності вводимо такі допоміжні форми:

$$ESm \frac{\vdash x = y, \vdash y = x, \Sigma}{\vdash x = y, \Sigma}$$

$$ETr \frac{\vdash x = y, \vdash y = z, \vdash x = z, \Sigma}{\vdash x = y, \vdash y = z, \Sigma}$$

Для врахування аксіом заміни рівних вводимо такі допоміжні форми:

$$\vdash EPS \frac{\vdash a = b, \vdash R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \vdash R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \Sigma}{\vdash a = b, \vdash R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \Sigma}$$

$$\neg \vdash EPS \frac{\vdash a = b, \neg \vdash R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \neg \vdash R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \Sigma}{\vdash a = b, \neg \vdash R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p), \Sigma}$$

Побудова секвенційного дерева. Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ . Для загального випадку логіки квазіарних предикатів треба враховувати, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. В процедурі побудови секвенційного дерева така особливість проявляється при формуванні прикладів для формул вигляду $\neg \vdash \Phi$ за допомогою $\neg \vdash$ -форм: приклади можуть мати тільки вигляд $\neg \vdash R_y^u(\Phi)$, де y означене.

Таким чином, при застосуванні $\neg \vdash$ -форми треба перебрати всі можливі випадки розподілу наявних предметних імен на означені й неозначені. Це можна реалізувати за допомогою побудови відповідних розгалужень секвенційного дерева: якщо у вершині Ξ до формули вигляду $\neg \vdash \Phi$ застосовується $\neg \vdash$ -форма, то для Ξ будується не одна, а багато вершин-"сестер", які є безпосередніми предками Ξ і мають одну й ту ж множину наявних імен та відрізняються лише різними множинами означених імен та відповідними множинами прикладів вигляду $\neg \vdash R_y^u(\Phi)$.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Таку процедуру розіб'ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку $\vdash$ -формул та списку $\neg \vdash$ -формул. Якщо в секвенції недоступних $\vdash$ -формул чи $\neg \vdash$ -формул немає (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку.

На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина $\vdash$ -формула чи $\neg \vdash$ -формула, якщо один зі списків порожній).

Перед побудовою дерева для Σ зафіксуємо деякий нескінченний список TN "нових" тотально строго неістотних імен такий, що імена із TN не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

Із кожною вершиною дерева пов'язуємо множину наявних та множину означених предметних імен. Множина означених імен явно виділяється лише на шляхах, де були хоч раз застосовані $\neg \vdash$ -форми (до такого застосування явне виділення множини означених імен непотрібне). Множина наявних імен – це множина імен усіх доступних в даній вершині формул. Усі тотально строго неістотні імена, задіяні при застосуванні $\vdash$ -форм, в даному виведенні гарантовано означені.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі $k+1$ перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ .

(2) По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Секвенційні форми $\vdash RT$ та $\neg \vdash RT$ допоміжні: перед застосуванням однієї з форм типу ΦNS , RR , $R\rightarrow$, $R\vee$, $R\exists$, $R\exists S$ усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування, застосовуючи належну кількість разів $\vdash RT$ чи $\neg \vdash RT$.

Спочатку виконуємо всі $\vdash \exists$ -форми. Застосування $\vdash \exists$ -форми додає нове тотально неістотне ім'я y до множини означених імен вершини, таке y беремо як перше незадіяне на даному шляху від кореня ім'я зі списку TN . Ім'я y гарантовано означене, додаємо його до множин наявних та означених імен, далі для кожної доступної формули вигляду $\neg \vdash \Phi$ додаємо приклад $\neg \vdash R_y^u(\Phi)$. Далі виконуємо $R\exists S$ -форми, при цьому беремо $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\exists x \Phi))$ із задіяних на даному шляху від кореня дерева імен списку TN , якщо такі є, інакше беремо z як перше ім'я списку TN . В останньому випадку z додаємо до множин наявних та означених імен, далі для кожної доступної формули вигляду $\neg \vdash \Phi$

Для $\neg\exists$ -форм збереження відповідних відношень логічного наслідку від засновку до висновку впливає вже з теореми 4 (збереження логічного наслідку в зворотному напрямі гарантується наслідком 1).

Для $\neg\exists$ -форм збереження відповідних відношень логічного наслідку при русі до вершини Σ , яка містить активну $\neg\exists x\Phi$, від вершин, які є її безпосередніми предками та містять приклади вигляду $\neg R_z^x(\Phi)$, гарантується твердженнями 7 та 6.

Нехай секвенція $\neg\Gamma\Delta$ вивідна, тоді для неї згідно нашої процедури збудоване замкнене секвенційне дерево. При такій побудові введені $\neg\exists$ -формами (в окремих випадках також $\neg\exists$ -формами) нові тотально строго неістотні імена гарантовано означені в даному виведенні секвенції $\neg\Gamma\Delta$, тому можна обмежитись розглядом тільки інтерпретацій (моделей мови) $\mathbf{A}$ із G -означеними даними, де G – множина таких гарантовано означених імен. Неформально кажучи, гарантовано означені імена ведуть себе подібно до константних символів класичної логіки предикатів. Беручи до уваги твердження 6, отримуємо: $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$ для кожної $\mathbf{A}$ маємо $\Gamma_{\mathbf{A}, G} \models \Delta$, де G – множина таких гарантовано означених імен.

Таким чином, для побудованого QEG-числення справджується

Теорема 5 (коректності). *Нехай секвенція $\neg\Gamma\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.*

Для доведення повноти QEG-числень будемо опиратися на метод модельних (хіттиківських) множин [7].

Нехай $\mathbf{H}$ – множина специфікованих формул із виділеною множиною $W \subseteq nm(\mathbf{H})$ означених імен; тоді $U = nm(\mathbf{H}) \setminus W$ – множина її неозначених імен.

Множина $\mathbf{H}$ модельна, якщо виконуються наступні умови:

HC) Для кожної формули Φ лише одна з $\neg\Phi$ чи $\neg\Phi$ може належати до $\mathbf{H}$.

HCU) Не існує пари формул $\neg R_x^y A \in \mathbf{H}$ та $\neg R_y^x A \in \mathbf{H}$ таких, що $R_x^y A$ та $R_y^x A$ мають однакові U -неозначувані форми.

HCE) Жодна формула вигляду $\neg x = x$ не може належати до $\mathbf{H}$.

HES) Якщо $\neg x = y \in \mathbf{H}$, то $\neg y = x \in \mathbf{H}$.

HET) Якщо $\neg x = y \in \mathbf{H}$ та $\neg y = z \in \mathbf{H}$, то $\neg x = z \in \mathbf{H}$.

HER) Якщо $\neg x = y \in \mathbf{H}$ та $\neg R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_{x,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg x = y \in \mathbf{H}$ та $\neg R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_{x,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p) \in \mathbf{H}$.

HRT) Якщо $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_{x,\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_{x,\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

HFN) Якщо $\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in v(\Phi)$, то $\neg R_{x,\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in v(\Phi)$, то $\neg R_{x,\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

H $\neg$) Якщо $\neg\neg\Phi \in \mathbf{H}$, то $\neg\Phi \in \mathbf{H}$; якщо $\neg\neg\Phi \in \mathbf{H}$, то $\neg\Phi \in \mathbf{H}$.

H $\vee$) Якщо $\neg\Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$, то $\neg\Phi \in \mathbf{H}$ або $\neg\Psi \in \mathbf{H}$; якщо $\neg\Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$, то $\neg\Phi \in \mathbf{H}$ та $\neg\Psi \in \mathbf{H}$.

HRR) Якщо $\neg R_x^y(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_x^y \circ \bar{w}(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_x^y(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_x^y \circ \bar{w}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

HR $\neg$) Якщо $\neg R_x^y(\neg\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\neg\neg R_x^y(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_x^y(\neg\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\neg\neg R_x^y(\Phi) \in \mathbf{H}$.

HR $\vee$) Якщо $\neg R_x^y(\Phi \vee \Psi) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_x^y(\Phi) \vee \neg R_x^y(\Psi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_x^y(\Phi \vee \Psi) \in \mathbf{H}$, то $\neg R_x^y(\Phi) \vee \neg R_x^y(\Psi) \in \mathbf{H}$.

HR $\exists$) Якщо $\neg R_x^y(\exists u\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\neg\exists u R_x^y(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_x^y(\exists u\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\neg\exists u R_x^y(\Phi) \in \mathbf{H}$.

HR $\exists S$) Якщо $\neg R_x^y(\exists u\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\neg\exists z R_x^y \circ \bar{z}(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg R_x^y(\exists u\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\neg\exists z R_x^y \circ \bar{z}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

Тут z строго тотально неістотне та $z \notin nm(R_x^y(\exists u\Phi))$.

H $\exists$) Якщо $\neg\exists x\Phi \in \mathbf{H}$, то існує $y \in W$ таке, що $\neg R_y^x(\Phi) \in \mathbf{H}$; якщо $\neg\exists x\Phi \in \mathbf{H}$, то для всіх $y \in W$ маємо $\neg R_y^x(\Phi) \in \mathbf{H}$.

Теорема 6. *Нехай ρ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, $\mathbf{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді існують AC $\mathbf{A} = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі: 1) $\neg\Phi \in \mathbf{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$; 2) $\neg\Phi \in \mathbf{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.*

Доведення. Нехай ρ – незамкнений шлях у секвенційному дереві. Переходи від нижчої вершини шляху до вищої виконуються згідно з базовими чи допоміжними секвенційними формами. Переходи, виконані згідно з такими формами, відповідають пунктам визначення модельної множини. Кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху ρ , рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху ρ незамкнені, тому виконуються умови HC, HCU, HCE коректності модельної множини. Отже, $\mathbf{H}$ – модельна.

Нехай W – множина усіх означених предметних імен, що фігурують у $\mathbf{H}$.

Рівність індукує на W відношення еквівалентності: $x \sim y \Leftrightarrow \neg x = y \in \mathbf{H}$. Нехай $A = W / \sim$ – фактор-множина множини W за відношенням $\sim$. Позначимо $[v]$ клас еквівалентності з представником v .

Визначимо тепер $\delta = [v \mapsto [v] \mid v \in W]$. Таке δ – сюр'єкція $W \rightarrow A$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на IM вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\neg x = y \in \mathbf{H}$, то $x \sim y$, тому $(x = y)_A(\delta) = T$ за побудовою δ .

Якщо $\neg p \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(\delta) = T$; якщо $\neg p \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\neg R_x^y(p) \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$; якщо $\neg R_x^y(p) \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільним чином, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності: для всіх $d, h \in {}^V A$ таких, що $d \Vdash \neg v(p) = h \Vdash \neg v(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Це гарантує, що імена $y \in v(p)$ строго неістотні для p_A .

Далі доведення ведеться індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної множини.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_x^y(p)$ твердження 1) та 2) теореми впливають із наведеного визначення значень базових предикатів. Крок індукції для тверджень 1) та 2) доводиться стандартним чином (див. [4, 6]).

Наведемо для прикладу доведення для п. H $\exists$.

Нехай $\neg \exists x \Phi \in H$. Згідно НЗ тоді існує $y \in W$ таке, що $\neg R_y^x(\Phi) \in H$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_A(\delta) = T$. Звідси $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = T$. Однак $\delta(y) \downarrow$ згідно з $\delta \in {}^W A$ та $y \in W$, тому для $a = \delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow a) = T$, звідки $(\exists x \Phi)_A(\delta) = T$.

Нехай $\neg \exists x \Phi \in H$. Згідно НЗ для всіх $y \in W$ маємо $\neg R_y^x(\Phi) \in H$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_A(\delta) = F$ для всіх $y \in W$. Звідси $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W$. Згідно з $\delta \in {}^W A$, маємо $\delta(y) \downarrow$ для всіх $y \in W$. Позаяк $\delta \in \text{сюр'єкцією } W \rightarrow A$, то кожне $b \in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W$. Отже, $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow b) = F$ для всіх $b \in A$, звідки дістаємо $(\exists x \Phi)_A(\delta) = F$.

На основі теореми 6 отримуємо теорему повноти для QEG-числень.

Теорема 7 (повноти). *Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\neg \Gamma, \Delta$ невивідна.*

Доведення. Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та $\neg \Gamma, \Delta$ невивідна. Якщо $\neg \Gamma, \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево δ для $\neg \Gamma, \Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях $\wp$. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$. Така H – модельна. Згідно з теоремою 6 існують $AC \ A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі: $\neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\neg \Psi \in H \Rightarrow \Psi_A(\delta) = F$. Згідно з $\neg \Gamma, \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) = F$. Це суперечить умові $\Gamma \models \Delta$.

Висновки. В роботі досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості X–Y-означеного відношення логічного наслідку. На цій основі побудовано числення секвенційного типу для загального випадку логік квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Для збудованих числень доведено теореми коректності та повноти. Надалі планується продовжити дослідження для логік неоднозначних квазіарних предикатів.

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Клини С. Математическая логика. – М.: 1973. 3. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999, № 1. 4. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. 5. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010, № 1. 6. Шкільняк С.С. Логіки квазіарних предикатів першого порядку // Кибернетика и сист. анализ. – 2010, № 6. 7. Смирнова Е.Д. Логика и философия. – М.: 1996.

Надійшла до редколегії 29.08.11

УДК 519.6

А. Піскунов, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
С. Петренко, мол. наук. співроб.

FORMALIZATION OF THE OOP PARADIGM: INHERITANCE OF ABSTRACT AUTOMATA

В роботі представлено спробу визначити такі поняття об'єктно-орієнтованого програмування (ООП) як абстрактний тип даних, клас, об'єкт, процес, наслідування через прямі добутки, відношення на множинах, функції та абстрактні автомати. Запропонована формалізація понять ООП суттєво відрізняється від формалізації Люка Карделлі, яку можна вважати загальноприйнятою.

In the paper some important terms of object – oriented programming (abstract data type, class, object, process, type, inheritance) are mathematically defined through relations, functions and automata. Proposed formalization of OOP notions significantly differs from the formalization of Luca Cardelli, which could be considered as generally accepted.

1. Introduction

Following B. Mayer,

- by an abstract data type, we mean the quadruple: (type; function signatures; axioms connected the functions; preconditions of function execution) (see Abstract data types, Formalizing the specification, [1]);
- by a class, we mean an abstract data type (in what follows, ADT) equipped with a possibly partial implementation (the static structure: classes, [1]), i.e., implemented in a programming language.

Since the definition of a class implicitly contains the notion of programming language, it should be formulated more rigorously in the following form:

By a Λ -class, we mean an ADT equipped with a possibly partial implementation in the programming language Λ .

If, as the implementation language Λ , we take the language of formal specifications, which admits an implicit description of functions (i.e., with the help of signatures, axioms, and preconditions), then we should agree that the notion of ADT cannot be distinguished from the notion of Λ -class. For example, as such a language, we may use Z [2] (a method of mathematical notation adapted for requirements of programmers) or, furthermore, RSL [3], which allows any style of program writing from functional to imperative one. In [4] one can find an examples of algebraic design of ADT via RAISE developer method. In this method, one uses the implicit description of functions of ADT on early stages of designing; then, one passes to the imperative style of function writing in a subset of the RSL language such that it admits an automated translation of the RSL-code into C++ (or ADA). This implies that the notion of RSL-class is equivalent to the notion of C++-class (ADA-class).

Thus, we assume that ADT, as well as a class, are synonyms of the pair (type, set of functions). Then, in the paper, we pass from the pair (type, set of functions) to the triplet (set of states, next-state function, transition function), i.e., to an abstract automaton and specify inheritance relations on the sets of automata.

The inheritance condition for output function of the Mealy automaton, which is added in this paper, allows us to generalize in a natural way the definition of polymorphism introduced in [5] for the Moore automaton.

2. Main Definitions and Results

2.1. Main definitions

Semicomputable function. A function f is called semicomputable [6] if there exists a program
such that:

- it returns a value $f(x)$ if a value x from its definition domain $\text{dom } f$ is given to the input;
- it never stops if a value which does not belong to its definition domain $x \notin \text{dom } f$ is given to the input.

Mealy automaton. Assume that Q is a set of states, X is a set of input signals, Y is a set of output signals.

Then the triplet $(Q, \delta : Q \times X \rightarrow Q, \lambda : Q \times X \rightarrow Y)$ where δ is a next-state function (transition function) and λ is an output function, is referred to as an abstract Mealy automaton.

Diagonal product of mappings. Let mappings $g_1 : X \rightarrow Y_1, \dots, g_k : X \rightarrow Y_k$ be given. Then, the mapping $(g_1, \dots, g_k) : X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_k$, specified by the condition $(g_1, \dots, g_k)(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ for any $x \in X$, is referred to as the diagonal product of mappings $g_1, \dots, g_k$. The mappings $g_1, \dots, g_k$ are components of the diagonal product.

Projection. The mapping $\pi_{X_j} : X_1 \times \dots \times X_k \rightarrow X_j$ specified by $\pi_{X_j}(x_1, \dots, x_k) = x_j$, where $1 \leq j \leq k$ and $x_j \in X_j$ will be referred to as a projection.

2.2. Proposition

Let T, X , and Y be some sets. Then, any function $f : T \rightarrow X \times Y$ can be represented as the diagonal product of compositions of function f and corresponding projections of $X \times Y$ onto the its factors.

Proof. Suppose that f satisfies the condition $f(t) = (x, y)$, $t \in T, x \in X, y \in Y$. Then, by the definition of projection, we have:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\pi_X(x, y), \pi_Y(x, y)) = (\pi_X(f(t)), \pi_Y(f(t))) \\ &= (\pi_X \circ f(t), \pi_Y \circ f(t)) = (\pi_X \circ f, \pi_Y \circ f)(t) = f(t).\end{aligned}$$

Thus, f is the diagonal product of the functions $\pi_X \circ f$ and $\pi_Y \circ f$.

2.3. Corollary

Any (semicomputable) function $h : T \rightarrow Q \times Y$ may be derived from two (semicomputable) functions g and f , where $g : T \rightarrow Q$ and $f : T \rightarrow Y$.

Discussion. In the proof of Proposition 2.2, we have used the simplest functions, namely, projections and elementary operations over the function, namely, composition and diagonal product (partial recursive functions, [6]). Therefore, if a function f is partially recursive, then the functions-components $f_s = \pi_Q \circ f$ and $f_0 = \pi_Y \circ f$ are also partially recursive and, hence, semicomputable. Thus, we may assume that function f is derived from simpler functions-components. We will consider the semicomputability of a function as a synonym of the possibility to write this function in some programming language.

Remark. In the Rogers paper (example: primitive recursive functions, [7]) there is primitive operation (IV) for the constructing of primitive recursive functions. This operation substitutes operations of composition and diagonal product used by Manin [6]. This operation maps some functions $f : Y_1 \times \dots \times Y_k \rightarrow Z$ and $g_1 : T \rightarrow Y_1, \dots, g_k : T \rightarrow Y_k$ to the function $\lambda x : T \rightarrow f(g_1(x), \dots, g_k(x))$.

As we can see: in one partial case ($k = 1$) it is equivalent to definition of composition; in other partial case (f is identity function, $f(x) = x$) it is equivalent to definition of diagonal product.

λ is symbol of λ -expression.

Next-state function and output function. Let, for some sets Q, X, Y (such that Y cannot be represented as the Cartesian product of Q with any other set) function $g : Q \times X \rightarrow Q$ will be referred to as a next-state function, and function $f : Q \times X \rightarrow Y$ will be referred to as the Mealy output function (function $f : Q \rightarrow Y$

will be referred to as the Moore output function).

Remark. It seems that, in [8, pp. 47, 95] a next-state function is called a generator, an output function is called an observer, and set Q – a type of interests.

2.4. Proposition

Let Q be a set, I be a set of indices $\{1, \dots, n\}$. Then, any set of functions $\{h_i : Q \times X_i \rightarrow Q \times Y_i \mid i \in I\}$ specifies a Mealy automaton.

Proof. First, in accordance with 2.3, we construct two sets of functions

$$\begin{aligned}G &= \{g_i : Q \times X_i \rightarrow Q \mid i \in I\}, \\ F &= \{f_i : Q \times X_i \rightarrow Y_i \mid i \in I\}.\end{aligned}$$

Then, by the first set of functions, we specify the next-state function

$$\delta : Q \times I \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Q \text{ as follows: } \delta(q, i, x_1, \dots, x_n) \equiv$$

case i of

$$1 \rightarrow g_1(q, x_1), 2 \rightarrow g_2(q, x_2), \dots, n \rightarrow g_n(q, x_n)$$

end

By the second set, we specify the output function $\lambda : Q \times I \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ as follows:

$$\lambda(q, i, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ is } (f_1(q, x_1), f_2(q, x_2), \dots, f_n(q, x_n)).$$

Denoting $I \times X_1 \times \dots \times X_n$ by X , and $Y_1 \times \dots \times Y_n$ by Y , we may see that, by construction, the obtained triplet (Q, δ, λ) satisfies the definition of the Mealy automaton.

Class, type. For any Mealy automaton (Q, δ, λ) , the set of its states Q will be referred as the type. We consider the term an automaton as a synonym of the class term.

For an automaton A , we denote its type by $Q(A)$.

By virtue of Proposition 2.4, by a class, we may also call the triplet $(Q, \{g_i : Q \times X_i \rightarrow Q \mid i \in I\}, \{f_j : Q \times X_j \rightarrow Y_j \mid j \in J\})$, where I, J are set of indices.

Object, process. Below, for any class $A = (Q, F_s, F_o)$:

- we may use the notation of class A instead of the type of class $Q(A)$ in the signature of functions, in particular, from sets F_s and F_o ;

- the notation $a \in A$, instead of $a \in Q(A)$ is also accepted. This means that value a being a tuple as any element of $Q(A)$, may be used in no expressions either than functions with class A (or with a derived class A) in the signature.

The concepts of object (process) are meaningless if the program is written in the applicative style. Maybe, it is meaningful to refer to a tuple a as $a \in A$ as to an object. If, in the set of next-state functions F_s , there is at least one function with the empty second factor, i.e., of the form $g : A \rightarrow A$, then the tuple a may be referred to as a process.

In the imperative style of a programming, for an abstract automaton A , by an object (process), we mean the variable declared by this automaton.

Note that, since the notion of type $Q(A)$ is different from that of class A , we may speak about an object of class A and an object of type $Q(A)$.

Associativity of the Cartesian product. Note that the operation of joining and, hence, Cartesian product, is associative, that is $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ [9, p. 153].

The associativity of the Cartesian product means that, for $X = A \times B$, function $f : X \rightarrow T$, may be treated as a function with the signature $f : A \times B \rightarrow T$.

Lambda expressions. Below, we use the symbol λ to write a function expression. An expression $\lambda val_1 : T_1, \dots, val_n : T_n \bullet \text{expression}(val_1, \dots, val_n)$ representing a function $T_1 \times \dots \times T_n \rightarrow T$, where T is the type of expression $(val_1, \dots, val_n)$.

For example, the expression $\lambda x : \text{Int}, y : \text{Int} \bullet x + y$ determines the function of addition of two integers with the signature $\text{Int} \times \text{Int} \rightarrow \text{Int}$.

3. Conditions of Function Inheritance

Suppose that some sets Q_l, Q_1, Q_r, Q_2 , connected by the relation $Q_2 = Q_l \times Q_1 \times Q_r$. Let $g_l \in Q_l$, $g_1 \in Q_1$, $g_r \in Q_r$.

Inheritance of next-state functions. A function $g_2 : Q_2 \times X \rightarrow Q_2$ is in the inheritance relation with a function $g_1 : Q_1 \times X \rightarrow Q_1$ if $g_2 = \lambda(q_l, q_1, q_r, x) : Q_2 \times X \bullet (q_l, q_1(q_1, x), q_r)$, where $x \in X$, i.e., function g_2 is the diagonal product of functions of the form $g_2 = (\pi_{Q_l}, g_1 \circ (\pi_{Q_l}, \pi_X), \pi_{Q_r})$ (figure 1).

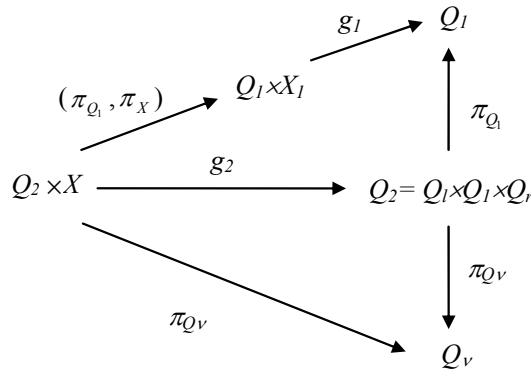


Figure 1. Inheritance of next-state functions, $v \in \{l, r\}$

Inheritance of the Mealy output functions. A function $f_2 : Q_2 \times X \rightarrow Y$ is in the inheritance relation with a function $f_1 : Q_1 \times X \rightarrow Y$ if $f_2 = \lambda(q_l, q_1, q_r, x) : Q_2 \times X \bullet f_1(q_1, x)$, where $x \in X$, i.e., function f_2 is a composition of functions of the form $f_2 = f_1 \circ (\pi_{Q_l}, \pi_X)$ (figure 2).

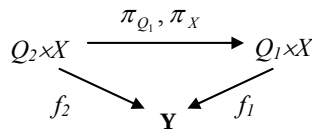


Figure 2. Inheritance of the Mealy output functions

Inheritance of the Moore output functions. A function $f_2 : Q_2 \rightarrow Y$ is in the inheritance relation with a function $f_1 : Q_1 \rightarrow Y$ if $f_2 = \lambda(q_l, q_1, q_r, x) : Q_2 \bullet f_1(q_1)$, i.e., function f_2 is a composition of functions of the form $f_2 = f_1 \circ \pi_{Q_l}$ (figure 3).

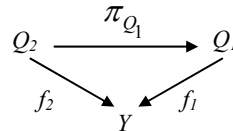
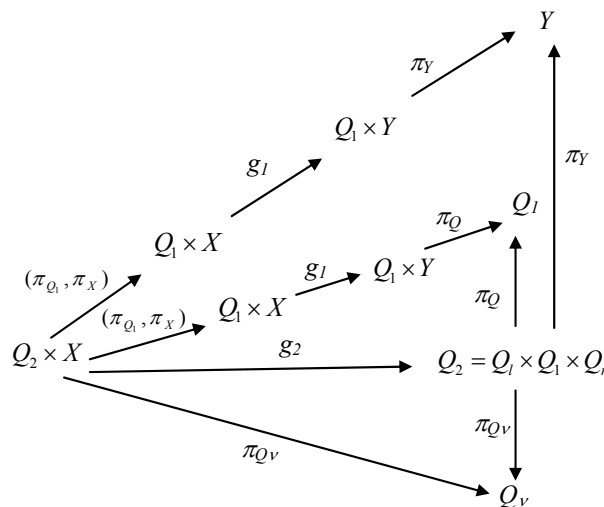


Figure 3. Inheritance of the Moore output functions

Inheritance of functions of the general form. A function $g_2 : Q_2 \times X \rightarrow Q_2 \times Y$ is in the inheritance relation with a function $g_1 : Q_1 \times X \rightarrow Q_1 \times Y$ if $g_2 = \lambda(q_l, q_1, q_r, x) : Q_2 \times X \bullet (q_l, \pi_{Q_1}(g_1(q_1, x)), q_r, \pi_Y(g_1(q_1, x)))$, where $x \in X$, i.e., function g_2 is the diagonal product of functions of the form $g_2 = (\pi_{Q_2}, \pi_{Q_2} \circ g_1 \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X), \pi_{Q_2}, \pi_Y \circ g_1 \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X))$ (figure 4).

Remark 1. In the definition of inheritance of functions of the general form, we use different projection functions $\pi_{Q_1} : Q_1 \times X \rightarrow Q_1$ and $\pi_{Q_1} : Q_1 \times Y \rightarrow Q_1$.

Remark 2. The discussion of the inheritance of functions of the general form is beyond the scope of this paper due to Proposition 2.2. We gave the definition in order to show that a general definition of inheritance exists.

Figure 4. Inheritance of functions of the general form, $v \in \{l, r\}$

Visible and true signatures of functions. Let an object q and a function f belong to an automaton A . By virtue of programmers' tradition to record expression $f(q, x)$ as $q \cdot f(x)$ the signature $f : Q \times X \rightarrow Q \times Y$ we'll be referred to as to a true signature. The signature of the same function written in the brief form $f : X \rightarrow Y$ will be referred to as a visible signature.

4. Inheritance of Abstract Mealy Automata

Suppose that we have an automaton $B = (Q_2, \{g_{2,i} : Q_2 \times X_{2,i} \rightarrow Q_2 \mid i \leq n_2\}, \{f_{2,j} : Q_2 \rightarrow Y_{2,j} \mid j \leq m_2\})$ and an automaton $A = (Q_1, \{g_{1,i} : Q_1 \times X_{1,i} \rightarrow Q_1 \mid i \leq n_1\}, \{f_{1,j} : Q_1 \rightarrow Y_{1,j} \mid j \leq m_1\})$.

We say that automaton B is in the inheritance relation with automaton A (inherits automaton A) (Class B inherits class A), if:

- Q_2 is a Cartesian product $Q_l \times Q_1 \times Q_r$, where Q_l and/or Q_r may be empty sets;
- there exists a partial injection $\tau : \{i \mid i \leq n_1\} \rightsquigarrow \{i \mid i \leq n_2\}$ such that, for any $i \leq n_1$, the next-state functions $g_{2,\tau(i)}$ and $g_{1,i}$ are in the inheritance relation;
- there exists a partial injection $\rho : \{i \mid i \leq m_1\} \rightsquigarrow \{i \mid i \leq m_2\}$ such that the output functions $f_{2,\rho(i)}$ and $f_{1,i}$, $i \leq m_1$, are in the inheritance relation.

Remark. Function $f : X \rightarrow Y$ is injection if f maps different elements of the domain X to different elements of the rang Y , that is $f(x_1) = f(x_2)$ implies $x_1 = x_2$.

Automaton A be referred to as a parent and automaton B will be called child.

Then, for each pair of the parent automaton A with type Q_1 and child automaton B with type Q_2 , the inheritance conditions for next-state and output functions allow one to specify the inheritance operators (ζ similar to S and θ similar to O):

- for any next-state function g from A , by $\zeta_{B:A}(g)$, we denote the function $(\pi_{Q_l}, g \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X), \pi_{Q_r})$;
- for any function g of the general form from A , by $\zeta_{B:A}(g)$ we denote the function $(\pi_{Q_l}, \pi_{Q_l} \circ g \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X), \pi_{Q_r}, \pi_Y \circ g \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X))$;
- similarly, for any output function f from A , $\theta_{B:A}(f) = f \circ (\pi_{Q_1}, \pi_X)$ (the Mealy output function),

$\theta_{B:A}(f) = f \circ \pi_{Q_1}$ (the Moore output function).

We will omit one subscript or both subscripts $B:A$ if it is clear what automata are discussed.

5. Construction of the Child Automaton for a Single Inheritance

Single inheritance [10] occurs when a subclass (child class) inherits attributes from only one class. We define the following procedure for constructing the child automaton $B = \{ Q_2, G_2, F_2 \}$ by the parent automaton

$A = \{ Q_1, G_1, F_1 \}$:

- We specify a factor Q_r (maybe empty) by enumerating (as programmers use to do) types of its components to the right from automaton A ;

- Let for any next – state function g of automaton A there is its image $\zeta_{B:A}(g)$ in the set of next-state functions of automaton B : $G_2 \supseteq \{ B.A.g \mid B.A.g : Q_2 \times X_g \rightarrow Q_2 \bullet B.A.g = \zeta_{B:A}(g) \wedge g \in G_1 \}$;

- Similarly, let for any output function f of automaton A there is its image $\theta_{B:A}(f)$ in the set of output functions of B : $F_2 \supseteq \{ B.A.f \mid B.A.f : Q_2 \times X_f \rightarrow Y_f \bullet B.A.f = \theta_{B:A}(f) \wedge f \in F_1 \}$.

If, for a function denoted by $B.A.h$, sets G_2 or F_2 contain no other function denoted by h with the same signature, then we may omit references to automata $B.A$ in the notation $B.A.h$ or explicitly give a synonym as one uses to do in SQL. For example, $\theta_{B:A}(f)$ as f_1 .

The automaton B constructed in this way is, by construction, in the inheritance relation with automaton A . Note that this procedure allows one to construct only partial cases of pairs of automata in the inheritance relation.

5.1. Remarks about the Syntax

For access to an attribute x of the class, i.e., in our terms, to an element of a type T of some proper tuple, the next-state function $x : Q \times T \rightarrow Q$ and the output function $x : Q \rightarrow T$ are used. In the notation system from "Variant Definition" [11], these functions may be written in the form $x : T \leftrightarrow x$. The first occurrence of x (namely, $x : T$) denotes the output function $x : Q \rightarrow T$, the second occurrence ($T \leftrightarrow x$) denotes the next-state $x : Q \times T \rightarrow Q$. In that case it is not necessary to mention functions such as x in the next – state functions set and the output functions set. The other functions of the automaton must be explicitly defined indicating the visible signature.

Consider an example of a class in terms of the C++ language:

```
class A { public: int a; public void g (int b) { a*=b; } };
```

this class may be written, for example, as follows: $A = (a : \text{Int} \leftrightarrow a, \{ g = \lambda b : \text{Int} \bullet a(\text{this}, a(\text{this}) * b) \}, 0)$ where the full form of the λ expression defined function g must be:

$g = \lambda \text{this} : \text{Int}, b : \text{Int} \bullet a(\text{this}, a(\text{this}) * b)$.

In the following example, class $B : A \{ \text{public: float } x; \}$ the inheritance operator may look like this:

$B = A \times (x : \text{Float} \leftrightarrow x, 0, 0)$.

6. Multiple Inheritance

Suppose that we have automata $A = (Q(A), G_A, F_A)$, $B = (Q(B), G_B, F_B)$, C , such that automata C and A are in the inheritance relation and automata C and B are in the inheritance relation. Then, automata C and A, B are in the relation of multiple inheritance if

- the sets of states $Q(A)$ and $Q(B)$ are direct factors of the set $Q(C)$;

- for any pair $g_A \in G_A$ and $g_B \in G_B$ holds $\zeta_{C:A}(g_A) \neq \zeta_{C:B}(g_B)$;

- for any pair $f_A \in F_A$ and $f_B \in F_B$ holds $\theta_{C:A}(f_A) \neq \theta_{C:B}(f_B)$.

It is rather simple to generalize the definition of multiple inheritance from two parents to an arbitrary number of them.

6.1. Remarks about the Syntax

Consider an example of multiple inheritance in terms of the C++ language.

```
class A { public: int a; };
```

```
class B { public: int a; };
```

```
class C : public A, public B { };
```

In our terms, it is written as follows:

$A = (a : \text{Int} \leftrightarrow a, 0, 0)$

$B = (a : \text{Int} \leftrightarrow a, 0, 0)$

$C = A \times B$

The notation $a((x,y), z)$ for some $x, y, z : \text{Int}$ means usage of the next – state function

$a : (\text{Int} \times \text{Int}) \times \text{Int} \rightarrow (\text{Int} \times \text{Int})$ inherited from class A (as the first one met from the left) is applied. So, we will assume that it is the brief form of the $C.A.a((x, y), z)$ notation. To apply the second function, we must either specify it explicitly $C.B.a((x, y), z)$ or declare a synonym, for instance, in the form $C = A \times B (a \text{ as } a1)$.

It also seems rational to introduce synonyms for classes. Then, for the C++ text

```
class A { public: int a; };
```

```
class C : public A, public A { };
```

an analogue could be the following:

$A = (a : \text{Int} \leftrightarrow a, 0, 0)$

$C = A \times A \text{ as } B (a \text{ as } a1)$.

1. *Bertrand Meyer*. Object-Oriented Software Construction. Second Edition. Santa Barbara, USA: Prentice Hall Professional Technical Reference, ISE Inc., 1997. 2. *Jonathan Bowen*. Formal Specification and Documentation using Z: A Case Study Approach, 2003. www.jpbowen.com/pub/zbook.pdf. 3. *Chris George*. Introduction to RAISE. UNU-IIST report No. 249, 2002. www.iist.unu.edu/pub/techreports/report249.pdf. 4. *The RAISE Method Group*. The RAISE Development Method, 1999. www.iist.unu.edu/pub/RAISE/method_book/book.zip. 5. *Piskunov A.G.* Formalization of the object-oriented programming paradigm (In Russian), 2007. www.realcoding.net/article/view/4570. 6. *Manin Yu.I.* Computable and incomputable (in Russian), 1980. agp1.nm.ru/arts/manin2.html. 7. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Москва: Мир, 1972. 8. *Chris George*. Introduction to RAISE. UNU-IIST report No. 249, 2002. users.iptelecom.net.ua/~agp1/arts/report249.pdf. 9. *Date C.J.* An Introduction to Database Systems. Sixth edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1995. 10. *Jamie Shield*. Towards an Object-Oriented Refinement Calculus, 2001. Thesis. 11. *Chris George*. Introduction to RAISE, 2002. users.iptelecom.net.ua/~agp1/arts/RAISE4.pdf.

УДК 519.664.7; 519.688; 531.37

Г. Славко, канд. техн. наук, доц.

ЗВЕДЕННЯ ПОВТОРНОГО КОНТУРНОГО ІНТЕГРАЛУ ДО ОДНОКОНТУРНОГО ПРИ МОДЕЛЮВАННІ МАГНІТНОЇ ПІДВІСКИ

Розроблено метод зведення повторного контурного інтегралу до одноконтурного для обчислення взаємної індуктивності в задачах магнітної левітації вільного тіла. Метод застосовний для довільного просторового розташування кругових струмових контурів.

A method to reduce the iterated line integral to the line integral to calculate the mutual inductance in the tasks of magnetic suspension of a free body is represented. The produced method is applicable for the arbitrary space disposition and orientation of circular loop current carrying elements.

В задачах магнітної підвіски на основі силової взаємодії надпровідних струмонесучих витків [1, 2] виникає проблема обчислення індуктивностей, які визначаються повторним контурним інтегралом (так звана формула Неймана, див., наприклад, [3]). В загальному вигляді обчислення вдається виконати тільки в простих випадках. Часто такі спроби приводять до отримання шуканих формул у вигляді спеціальних функцій для тих або інших допущень за параметрами контурів. Саме цим пояснюється представлення чисельних значень індуктивностей і взаємних індуктивностей у вигляді довідкових таблиць, що є результатами обчислення значень спеціальних функцій [3].

Зазвичай вирішення проблеми знаходять в застосуванні чисельних методів для обчислення подвійних інтегралів з урахуванням специфіки інтегрованих виразів. Але застосування чисельних методів виявляється малоефективним для обчислення значення взаємної індуктивності не для визначеної конфігурації розташування елементів системи при певних геометричних і електромеханічних параметрах, а для їх довільних значень. Такі завдання виникають при дослідженні динаміки електромеханічних систем, зокрема систем магнітної левітації. Якщо говорити тільки про взаємне просторове розташування магнітних елементів, відкидаючи технічні параметри системи, то навіть в цьому випадку мова йде про обчислення взаємної індуктивності залежно від шести параметрів – координат, що визначають положення одного елемента щодо іншого. В значній мірі завдання ускладнюється, коли вказані формули застосовуються для отримання розподілу магнітного поля, обчислення взаємних індуктивностей довільно розташованих котушок, вивчення динаміки магнітної левітації.

Особливо завдання ускладнюється при використанні формул взаємної індуктивності для дослідження стійкості рівноваги систем магнітного підвісу і динаміки коливань або обертання вільно підвішеного безконтактного елемента. Критерії стійкості породжують необхідність диференціювання під знаком інтегралу аналітично складних виразів. Застосування чисельних методів диференціювання у поєднанні з чисельними методами інтегрування приводить до накопичення обчислювальної похибки. Як відомо, взаємна індуктивність чутлива до приведеної середньої відстані між елементами системи: невеликі зміни відстані можуть приводити до значних змін величини індуктивності. Більш того, величина індуктивності може мати значення того ж порядку, що й величина накопичуваної похибки. А це приводить до втрати стійкості чисельних методів.

Основними елементами електромеханічних систем є струмові контури. Заміна струмових контурів тонкими лініями дозволяє спростити модель і вважати, що струм рівномірно розподілений по перетину. Відмінність полів зникає при наближенні до нуля параметра $\tau = d/a$, що характеризує відношення діаметру перетину d до радіуса a кругового контура, тому розглядатимемо випадок малих τ (тонкі контури). Такий підхід дозволяє використовувати для отримання взаємних індуктивностей елементів системи формулу Неймана.

Розглянемо (рис.1) тонкий лінійний дріт кругового перетину, зігнутий по дузі кола, причому дріт може замикатися в повне кільце (надалі струмовий елемент 1). Струмовий елемент 2 – повне кільце, жорстко пов'язане з віссиметричним не магнітним тілом, вісь кільця співпадає з віссю цього тіла. Центр мас O зв'язки лежить на загальній осі. Зв'язка має шість степенів вільності і може займати будь-яке положення щодо першого струмового елемента. Введемо системи координат (праві), як показано на рис.1. Нехай a_1, a_2 – радіуси кілець 1 і 2, відповідно. Центр мас O віддалений від площини кільця 2 на відстань s , тобто $|O_2O| = s$. Якщо за початок відліку узяти вісь $O_1\xi_1$, то початок дугового провідника задається кутом β_1 , а закінчення – кутом β_2 .

Нехай ρ, α, ζ – циліндричні координати центру мас O у системі $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ (ρ – відстань за полярним променем, повернутим на кут α відносно вісі $O_1\xi_1$ у площині $O_1\xi_1\eta_1$ проти часової стрілки і перенесеним паралельно уздовж вісі $O_1\xi_1$ на величину ζ). Кутова орієнтація зв'язки визначається кутами Ейлера (θ – кут нутації, ψ – кут прецесії, φ – кут власного обертання), які визначають положення $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ відносно $O\xi_1\eta_1\zeta_1$.

У роботах [1,2] для обчислення взаємної індуктивності, використовується формула, отримана з формули Неймана [3] і, представлена у вигляді повторних інтегралів:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 a_1 a_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda_1 \int_0^{2\pi} d\lambda_2 \left[\sin(\lambda_1 - \psi) \sin(\lambda_2 + \phi) + \cos\theta \cos(\lambda_2 + \phi) \cos(\lambda_1 - \psi) \right] \times \\ \times \left\{ a_1^2 + a_2^2 + \rho^2 + \zeta^2 + s^2 - 2a_1\rho \cos(\lambda_1 - \alpha) - 2a_1s \cdot \sin\theta \cdot \sin(\psi - \lambda_1) - \right. \\ \left. - 2a_1a_2 \left[\cos(\lambda_2 + \phi) \cdot \cos(\lambda_1 - \psi) + \sin(\lambda_1 - \psi) \sin(\lambda_2 + \phi) \cos\theta \right] + \right. \\ \left. + 2s\rho \sin\theta \sin(\psi - \alpha) + 2s\zeta \cos\theta + 2a_2\zeta \sin\theta \sin(\lambda_2 + \phi) + \right. \\ \left. + 2a_2\rho \left[\cos(\lambda_2 + \phi) \cos(\psi - \alpha) + \sin(\alpha - \psi) \sin(\lambda_2 + \phi) \cos\theta \right] \right\}^{-1/2} d\lambda_2.$$

Використання наведеної формули, стало причиною відсутності досліджень стійкості систем левітації для несиметричних випадків струмових елементів. Така формула, в окремих випадках співвісних кілець, може бути зведена до повних еліптичних інтегралів. У решті випадків доведеться виконати подвійне інтегрування. У деяких окремих випадках взаємного розташування контурів можна отримати аналітичні (у вигляді рядів спеціальних функцій) представлення взаємної індуктивності, але вони мають слабку збіжність, громіздкі та мають жорсткі обмеження на параметри і не можуть бути застосовані для досліджень.

Спираючись на роботу [3] можна зробити припущення про можливість виконання в аналітичному вигляді одного з двох інтегрувань, якщо хоч би один з контурів є замкненим круговим контуром. Побудуємо алгоритм зведення формули взаємної індуктивності до визначеного інтеграла для випадку, коли один із струмових елементів є замкненим круговим контуром, а іншим елементом – лінійний дріт, зігнутий за дугою кола або повний замкнений круговий контур.

Розглянемо елемент довжини $d\ell_1$ дроту струмового елементу 1 (у загальному випадку, $d\ell_1$ може бути елементом довжини будь-якого криволінійного дроту). Нехай $d\ell_1$ розглядається у точці P. Через точку P паралельно площині $O_2\xi_{02}\eta_{02}$ проведемо коло з радіусом $r_2 = |Q_2P|$ з центром у точці Q_2 , що розташована на подовженні вісі OO_2 (рис.2). Позначимо коло – γ_2 (рис.2). Розкладемо $d\ell_1$ на складові: $d\zeta_{02}$ по осі ζ_{02} , dr_2 по прямій Q_2P , перпендикулярній до вісі ζ_{02} , і $d\gamma_2$ за дугою кола γ_2 . Зрозуміло, взаємна індуктивність елемента $d\zeta_{02}$ і контура 2 дорівнює нулю, через те що $d\zeta_{02}$ перпендикулярний площині кола. Взаємна індуктивність dr_2 і кола 2 буде теж нульова через симетрію контура відносно напрямку dr_2 . На підставі цього можна зробити висновок про те, що взаємна індуктивність dL_{12} елемента $d\ell_1$ і контура 2 дорівнює взаємній індуктивності $dM_{2\gamma_2}$ елемента $d\gamma_2$ і контура 2. Враховуючи коаксіальність кола γ_2 і контура 2 (симетричність), можна записати:

$$\frac{dM_{2\gamma_2}}{M_{2\gamma_2}} = \frac{d\gamma_2}{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{2\pi r_2},$$

де $M_{2\gamma_2}$ – взаємна індуктивність контурів γ_2 і 2.

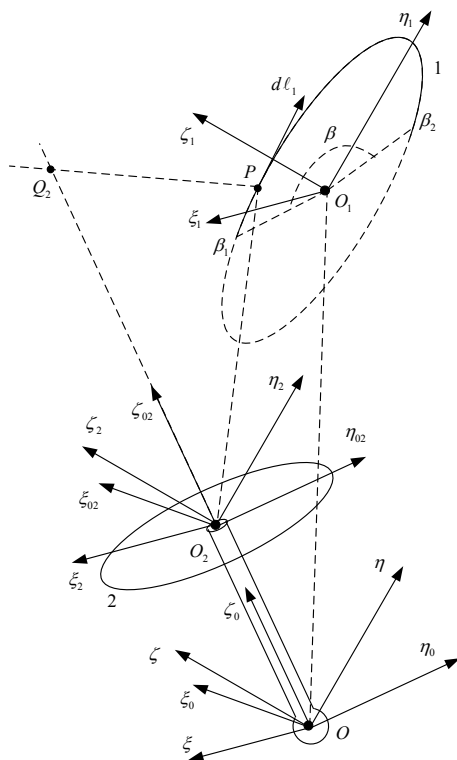


Рис.1. Системи координат струмових елементів
Користуючись рис.2, отримаємо:

$$\begin{aligned} d\gamma_2 &= \cos(\lambda_2)d\eta_{02} - \sin(\lambda_2)d\xi_{02} = \\ &= (\cos(\lambda_2)\cos(\beta_2) - \sin(\lambda_2)\cos(\alpha_2))d\ell_1, \end{aligned}$$

де $\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2)$ – направляючі косинуси елемента $d\ell_1$ по осях ξ_{02}, η_{02} , а $\lambda_2 = \text{arctg}(\eta_{02}/\xi_{02})$.

Тоді

$$dL_{12} = dM_{2\gamma_2} = M_{2\gamma_2} \cdot \frac{\cos(\lambda_2)\cos(\beta_2) - \sin(\lambda_2)\cos(\alpha_2)}{2\pi r_2} d\ell_1.$$

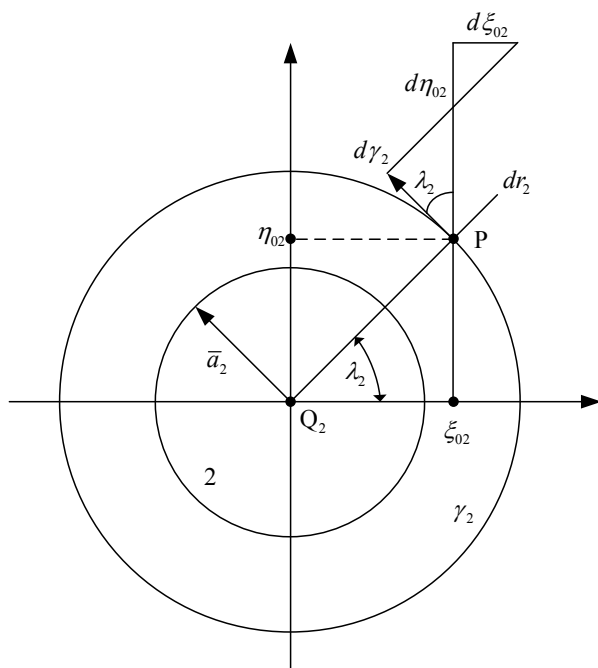


Рис.2. Допоміжні побудовання

Виконуючи інтегрування за всією довжиною дуги ℓ_1 матимемо [3]:

$$L_{12} = \frac{1}{2\pi} \int M_{2\gamma_2} (\cos(\lambda_2) \cos(\beta_2) - \sin(\lambda_2) \cos(\alpha_2)) r_2^{-1} d\ell_1. \quad (1)$$

Виразимо $r_2, \cos(\alpha_2), \cos(\beta_2)$ та інші складові формули через $\rho, \alpha, \zeta, \theta, \psi, \phi$. Якщо струмовий елемент 1 – кільце або дуга кільця, то циліндрові координати деякої точки елемента $d\ell_1$ у системі $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ наступні: $a_1, \lambda_1, 0$, де a_1 – радіус кільця λ_1 – кут повороту (відлік від осі $O_1\xi_1$ проти годинникової стрілки), 0 – апліката. Тоді можна записати для радіус-вектора кола і для елемента дуги:

$$\vec{a}_1 = a_1 (\cos(\lambda_1) \vec{i} + \sin(\lambda_1) \vec{j}_1) \quad (2)$$

$$d\vec{\ell}_1 = a_1 (-\sin(\lambda_1) \vec{i} + \cos(\lambda_1) \vec{j}_1) d\lambda_1. \quad (3)$$

Необхідно знайти направляючі косинуси елемента дуги $d\ell_1$ по осях ξ_{02}, η_{02} . З цією метою виразимо вектор $d\vec{\ell}_1$ через координати системи $O_2\xi_{02}\eta_{02}\zeta_{02}$ користуючись матрицею переходу від $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ до $O\xi_0\eta_0\zeta_0$:

$$\begin{aligned} d\vec{\ell}_1 = & a_1 \left((-a_{11} \sin \lambda_1 + a_{21} \cos \lambda_1) \cdot \vec{i}_0 + \right. \\ & \left. (-a_{12} \sin \lambda_1 + a_{22} \cos \lambda_1) \cdot \vec{j}_0 + \right. \\ & \left. + (-a_{13} \sin \lambda_1 + a_{23} \cos \lambda_1) \cdot \vec{k}_0 \right) \cdot d\lambda_1. \end{aligned}$$

Таким чином, отримані направляючі косинуси елемента $d\vec{\ell}_1$ по осях ξ_{02}, η_{02} :

$$\cos(\alpha_2) = -a_{11} \sin \lambda_1 + a_{21} \cos \lambda_1, \cos(\beta_2) = -a_{12} \sin \lambda_1 + a_{22} \cos \lambda_1.$$

Радіус уявного кільця γ_2 можна знайти, якщо спроекувати вектор $\vec{O_2P}$ на площину $O_2\xi_{02}\eta_{02}$, а потім знайти довжину вектора-проекції. Аналогічно знаходиться відстань між площинами кільця 2 і кільця γ_2 . Необхідно тільки спроекувати $\vec{O_2P}$ на вісь $O_2\xi_{02}$. Знайдемо вектор $\vec{O_2P} = \vec{R}$ у координатах системи $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. З рис.1 випливає очевидна векторна рівність

$$\vec{R}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{p}_{12} - \vec{s},$$

де

$$\vec{a}_1 = a_1 (\cos \lambda_1 \vec{i}_1 + \sin \lambda_1 \vec{j}_1), \quad \vec{p}_{12} = \rho \cos(\alpha) \vec{i}_1 + \rho \sin(\alpha) \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1.$$

Після переходу до системи координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ матимемо:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 = & a_1 \left((a_{11} \cos \lambda_1 + a_{21} \sin \lambda_1) \cdot \vec{i}_0 + (a_{12} \cos \lambda_1 + a_{22} \sin \lambda_1) \cdot \vec{j}_0 + \right. \\ & \left. + (a_{13} \cos \lambda_1 + a_{23} \sin \lambda_1) \cdot \vec{k}_0 \right), \\ \vec{p}_{12} = & (a_{11} \rho \cos \alpha + a_{21} \rho \sin \alpha + a_{31} \zeta) \cdot \vec{i}_0 + (a_{12} \rho \cos \alpha + a_{22} \rho \sin \alpha + a_{32} \zeta) \cdot \vec{j}_0 + \\ & + (a_{13} \rho \cos \alpha + a_{23} \rho \sin \alpha + a_{33} \zeta) \cdot \vec{k}_0, \quad \vec{s} = s \vec{k}_0. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{R}_{12} = & \vec{i}_0 [a_1 (a_{11} \cos \lambda_1 + a_{21} \sin \lambda_1) - \rho (a_{11} \cos \alpha + a_{21} \sin \alpha) - a_{31} \zeta] + \\ & + \vec{j}_0 [a_1 (a_{12} \cos \lambda_1 + a_{22} \sin \lambda_1) - \rho (a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) - a_{32} \zeta] + \\ & + \vec{k}_0 [a_1 (a_{13} \cos \lambda_1 + a_{23} \sin \lambda_1) - \rho (a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) - a_{33} \zeta - s]. \end{aligned}$$

Знайдемо проекцію вектора $\vec{R}_{12}$ на площину $O_2\xi_{02}\eta_{02}$ а потім на вісь $O_2\xi_{02}$. Матимемо відповідно:

$$\begin{aligned} \text{пр } \vec{R}_{12} \Big|_{O_2\xi_{02}\eta_{02}} = & \vec{i}_0 [a_1 (a_{11} \cos \lambda_1 + a_{21} \sin \lambda_1) - \rho (a_{11} \cos \alpha + a_{21} \sin \alpha) - a_{31} \zeta] + \\ & + \vec{j}_0 [a_1 (a_{12} \cos \lambda_1 + a_{22} \sin \lambda_1) - \rho (a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) - a_{32} \zeta], \\ \text{пр } \vec{R}_{12} \Big|_{O_2\xi_{02}} = & \vec{k}_0 [a_1 (a_{13} \cos \lambda_1 + a_{23} \sin \lambda_1) - \rho (a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) - a_{33} \zeta - s]. \end{aligned}$$

Скориставшись тим, що $\vec{i}_0^2 = \vec{j}_0^2 = 1$, $\vec{i}_0 \cdot \vec{j}_0 = 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2^2 = & a_1^2 + \rho^2 - 2a_1\rho \cos(\lambda_1 - \alpha) + \\ & + \zeta^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cdot (a_1 \sin(\lambda_1 - \psi) - \rho \sin(\alpha - \psi))^2 - \\ & - a_1 \zeta \sin 2\theta \sin(\lambda_1 - \psi) + \rho \zeta \sin 2\theta \sin(\alpha - \psi). \end{aligned}$$

Знайдемо відстань h_2 між площиною кільця 2 і площиною уявного кільця γ_2 :

$$h_2 = |a_1 (a_{13} \cos \lambda_1 + a_{23} \sin \lambda_1) - \rho (a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) - a_{33} \zeta - s|.$$

З урахуванням коефіцієнтів a_{ij} після зміни знаку, матимемо:

$$h_2 = |\sin \theta \cdot (a_1 \sin(\lambda_1 - \psi) - \rho \sin(\alpha - \psi)) + \zeta \cos \theta + s|.$$

Знайдемо вирази для $\cos \lambda_2, \sin \lambda_2$. Для цього досить розглянути трикутник $O_2 P \xi_{02}$ на рис.2 і скористатися співвідношеннями:

$$\sin \lambda_2 = \eta_{02}/r_2, \cos \lambda_2 = \xi_{02}/r_2,$$

де r_2 – радіус кола γ_2 , а ξ_{02} і η_{02} – коефіцієнти при ортах (координати) проекції вектора $O_2 P$ на площину $O_2 \xi_{02} \eta_{02}$. Тоді

$$\sin \lambda_2 = [a_1(a_{12} \cos \lambda_1 + a_{22} \sin \lambda_1) - \rho(a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) - a_{32}\zeta] \cdot r_2^{-1},$$

$$\cos \lambda_2 = [a_1(a_{11} \cos \lambda_1 + a_{21} \sin \lambda_1) - \rho(a_{11} \cos \alpha + a_{21} \sin \alpha) - a_{31}\zeta] \cdot r_2^{-1}.$$

Враховуючи останні вирази для $\sin \lambda_2, \cos \lambda_2$, а також раніше отримані вирази для направляючих косинусів $\cos \alpha_2, \cos \beta_2$, після перетворень матимемо:

$$\cos \lambda_2 \cos \beta_2 - \sin \lambda_2 \cos \alpha_2 =$$

$$= [a_1 \cos \theta - \rho \cos(\lambda_1 - \alpha) \cos \theta - \zeta \sin(\lambda_1 - \psi) \sin \theta] \cdot r_2^{-1}.$$

Підставляючи вирази для r_2 і $\cos \lambda_2 \cos \beta_2 - \sin \lambda_2 \cos \alpha_2$ у формулу для L_{12} отримаємо:

$$L_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{\ell_1} M_{2\gamma_2} [a_1 \cos \theta - \rho \cos(\lambda_1 - \alpha) \cos \theta - \zeta \sin(\lambda_1 - \psi) \sin \theta] \times \\ \times [a_1^2 + \rho^2 + \zeta^2 - 2a_1\rho \cos(\lambda_1 - \alpha) - (\zeta \cos \theta + [a_1 \sin(\lambda_1 - \psi) - \rho \sin(\alpha - \psi)] \cdot \sin \theta)^2]^{-1} \cdot d\ell_1$$

Крива ℓ_1 – дуга (або все коло) радіусу a_1 . Скористаємося формулою переходу від криволінійного інтеграла до звичайного, враховуючи, що змінною інтегрування є кутова величина λ_1 , а рівняння кола в полярній формі $r = a_1 \cos \lambda_1$. Тоді

$$d\ell_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda_1}\right)^2} d\lambda_1 = a_1 d\lambda_1.$$

З урахуванням останнього виразу формула для L_{12} прийме вигляд:

$$L_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} M_{2\gamma_2} [a_1^2 \cos \theta + \rho a_1 \cos(\lambda_1 - \alpha) \cos \theta - \zeta a_1 \sin(\lambda_1 - \psi) \sin \theta] \times \\ \times [a_1^2 + \rho^2 + \zeta^2 - 2a_1\rho \cos(\lambda_1 - \alpha) - (\zeta \cos \theta + [a_1 \sin(\lambda_1 - \psi) - \rho \sin(\alpha - \psi)] \cdot \sin \theta)^2]^{-1} \cdot d\lambda_1, \quad (4)$$

де $\beta_1 \leq \lambda_1 \leq \beta_2$.

Як указувалося раніше $M_{2\gamma_2}$ – взаємна індуктивність коаксіальних кілець 2 і γ_2 , що мають відстань між площинами рівну h_2 і радіуси a_2 і r_2 , відповідно. Користуючись відомою формулою [1] для взаємної індуктивності співвісних кілець матимемо:

$$M_{2\gamma_2} = \mu_0 \sqrt{r_2 a_2} \left[\left(\frac{2}{k_{12}} - k_{12} \right) K(k_{12}) - \frac{2}{k_{12}} E(k_{12}) \right], \\ k_{12} = 2 \sqrt{\frac{r_2 a_2}{(r_2 + a_2)^2 + h_2^2}}, \quad (5)$$

де $K(k_{12}), E(k_{12})$ – повні еліптичні інтеграли модуля k_{12} .

Після введення позначень з урахуванням останньої формули, запишемо взаємну індуктивність кільця 2 і ділянки дуги (струмового елементу 1) в наступному вигляді:

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{a_1 a_2} \cdot \tilde{L}_{12}, \quad \tilde{L}_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{M_{12} f_{12}}{A_{12}^{3/2}} d\lambda, \quad (6)$$

$$M_{12} = \left(\frac{2}{k_{12}} - k_{12} \right) K(k_{12}) - \frac{2}{k_{12}} E(k_{12}),$$

$$k_{12} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(a_2/a_1) \cdot A_{12}}{[(a_2/a_1) + A_{12}]^2 + H_{12}^2}},$$

$$A_{12}^2 = 1 + \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 - 2\frac{\rho}{a_1}\cos(\lambda - \alpha) - \left(\frac{\zeta}{a_1}\cos\theta + (\sin(\lambda - \psi) - \frac{\rho}{a_1}\sin(\alpha - \psi))\sin\theta\right)^2,$$

$$f_{12} = \cos(\theta) - \frac{\rho}{a_1}\cos(\lambda - \alpha)\cos\theta - \frac{\zeta}{a_1}\sin(\lambda - \psi)\sin\theta,$$

$$H_{12} = \left| \sin\theta(\sin(\lambda - \psi) - \frac{\rho}{a_1}\sin(\alpha - \psi)) + \frac{\zeta}{a_1}\cos(\theta) + \frac{s}{a_1} \right|,$$

де $K(k_{12}), E(k_{12})$ – повні еліптичні інтеграли модуля k_{12} , μ_0 – магнітна константа.

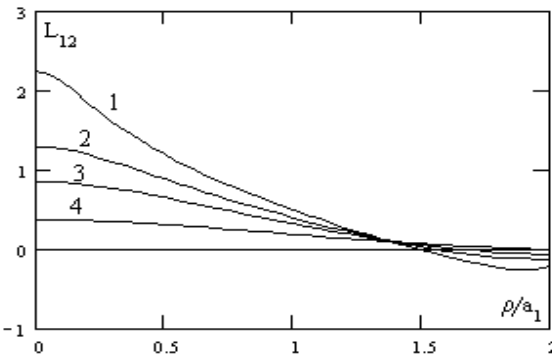
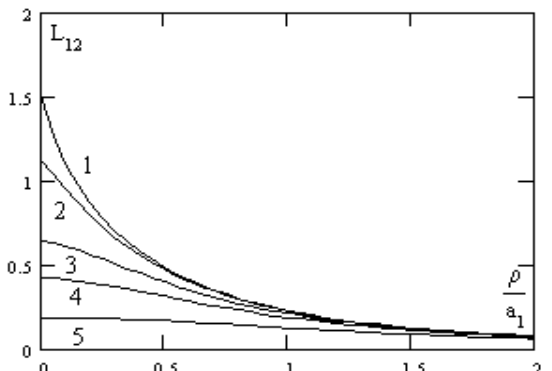
Зупинимося на деяких важливих особливостях отриманої формули (6). Відразу відзначимо, що на відміну від формул, що використовувалися в [1,2], тут відсутня координата φ , що визначає власне обертання кільця 2 навколо своєї осі. Через осьову симетрію зв'язки це обґрунтовано. Крім того, замість подвійного інтеграла, ми отримали звичайний інтеграл. Другий інтеграл вдалося звести до функції повних еліптичних інтегралів. Отримана формула дозволяє знаходити взаємну індуктивність не тільки двох кілець при довільному розташуванні, але також і для дуги і кільця. Можна, наприклад, отримати відому формулу взаємної індуктивності [3] для випадку співвісних кілець. Для цього досить прийняти $\rho = \theta = 0$.

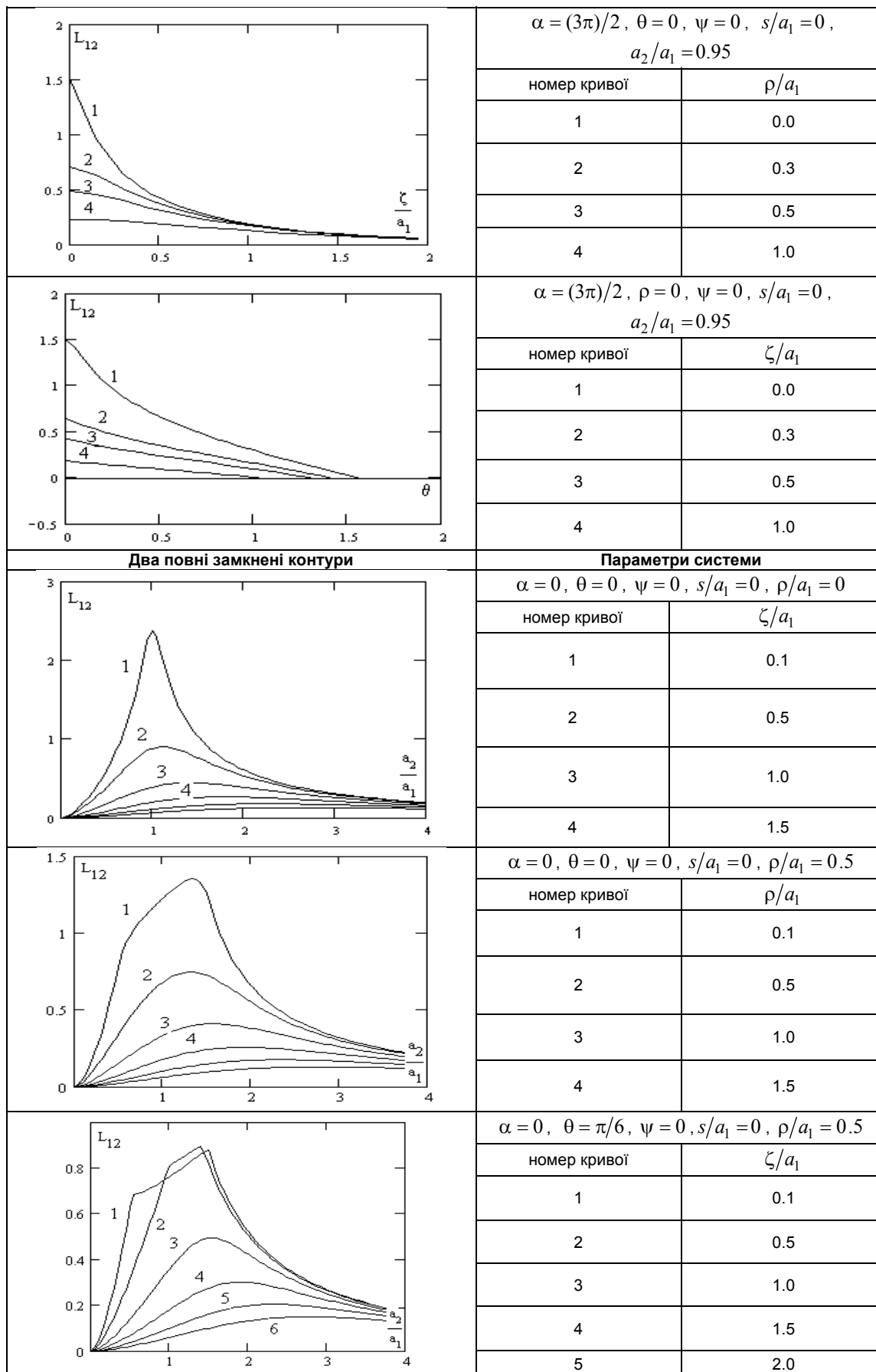
Головною перевагою формули (6) є оптимальне поєднання аналітичного і чисельного інтегрування, особливо під час знаходження похідних взаємної індуктивності по координатах. Формула легко тестується на всіх прикладах для кільцевих контурів з довідника [1]. Ще одна перевага формули в тому, що після виконання аналітичного диференціювання при отриманні частинних похідних для досліджень стійкості, немає необхідності зводити отримані вирази до повних еліптичних інтегралів. Формула (6) взаємної індуктивності істотно спрощує проведення досліджень стійкості систем магнітної левітації і робить можливим дослідження стійкості систем з горизонтальною віссю обертання, а також не вісесиметричних систем. Крім того, до неї ефективно застосовуються чисельні методи інтегрування. Більш того, формула може бути використана в стандартних математичних пакетах типу MathCad, Matlab.

Приклади застосування формули взаємної індуктивності

На графіках в таблицях 1, 2 взаємних індуктивностей представлено в безрозмірному вигляді $\tilde{L}_{12} = L_{12}/(\mu_0\sqrt{a_1a_2})$, де $\tilde{L}_{12}$ – безрозмірна величина, L_{12} – розмірна величина. В таблиці 1 показані приклади залежності взаємної індуктивності від координат, а в таблиці 2 від відношення радіусів струмопровідних витків. Всі обчислення виконані із застосуванням формули (6).

Таблиця 1

Залежність взаємної індуктивності від координат		
Два повні струмові кільця		
	Параметри системи	
	$\alpha = 0, \theta = 0, \psi = 0, s/a_1 = 0, a_2/a_1 = 0,95$	
	номер кривої	ζ/a_1
	1	0.1
	2	0.2
	3	0.5
4	1.0	
Півкільце і кільце		
	Параметри системи	
	$\alpha = (3\pi)/2, \theta = 0, \psi = 0, s/a_1 = 0, a_2/a_1 = 0,95$	
	номер кривої	ζ/a_1
	1	0.0
	2	0.1
	3	0.3
4	0.5	
5	1.0	



1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих тел. - Киев: Наук. думка, 1981. 2. Магнитная потенциальная яма – эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем / Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г.: – Киев: Наук. думка, 1991. 3. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справ.кн.–Л.: Энергоатомиздат, 1986.

УДК 517.929

А. Шатирко, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Д. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ДОСЛІДЖЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ РІВНОМІРНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ З ПІСЛЯДІЄЮ МЕТОДОМ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

Отримано достатні умови абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання нейтрального типу. Побудовано оцінки експоненціального затухання розв'язків. Результати представлені у вигляді конструктивних алгебраїчних критеріїв. Апаратом дослідження обрано прямий метод Ляпунова з функцією типу Лур'є-Постнікова та додатковою умовою Разуміхіна.

Sufficient conditions of absolute stability of nonlinear regulator systems of neutral type are received. Estimations of exponential dumping of solutions are constructed. Results are presented in the form of constructive algebraic criteria. The instrument of research chooses Lyapunov's direct method with function of Lurie-Postnikov's type and an additional condition of Razumikhin.

Вступ

Асимптотична стійкість в цілому нульового розв'язку систем з нелінійністю "секторного вигляду" отримала назву абсолютної стійкості [1,2]. В статті розглядаються системи диференціально-різницеви рівнянь нейтрального типу. Дослідження проводиться методом функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної форми та інтеграла від нелінійності [3]. Деякі результати досліджень в цьому напрямку, отримані з використанням функціоналів Ляпунова-Красовського, опубліковані в роботах [4-7]. В даній статті отримані достатні умови абсолютної стійкості і коефіцієнти експоненціального затухання розв'язків.

Абсолютна стійкість систем прямого регулювання

Розглядаються системи з післядією нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-\tau)] = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)),$$

$$\sigma(t) = c^T x(t), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Тут $x(t) \in R^n$, A , B , D - квадратні матриці з сталими коефіцієнтами, $b, c \in R^n$, $\tau > 0$ - стале запізнювання, $f(\sigma)$ - неперервна функція, що задовольняє умову Ліпшиця й $f(0) = 0$. Під розв'язком системи будемо розуміти кусково неперервно диференційовну функцію $x(t)$, що тотожно задовольняє систему (1) і початкові умови $x(t) = \phi(t)$, $x'(t) = \psi(t)$, де $\phi(t)$, $\psi(t)$ - довільні неперервні функції, визначені при $-\tau \leq t \leq 0$.

Означення 1. Нульовий розв'язок системи нейтрального типу експоненціально стійкий в метриці C^0 , якщо існують сталі $N_i > 0$, $i = \overline{1,2}$ і $\gamma > 0$ такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ рівняння виконується нерівність

$$|x(t)| \leq \left[N_1 \|x(0)\|_\tau + N_2 \left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma t \right\}, \quad t > 0. \quad (2)$$

Означення 2. Нульовий розв'язок системи нейтрального типу експоненціально стійкий в метриці C^1 , якщо він стійкий в метриці C^0 і існують сталі $R_i > 0$, $i = \overline{1,2}$ і $\eta > 0$ такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ рівняння виконується нерівність

$$\left| \dot{x}(t) \right| \leq \left[R_1 \|x(0)\|_\tau + R_2 \left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta t \right\}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Тут і далі використовуються наступні норми

$$|A| = \left\{ \lambda_{\max}(A^T A) \right\}^{1/2}, \quad |x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{1/2},$$

$$\|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \{ |x(s+t)| \}. \quad (4)$$

$\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ - екстремальні власні числа відповідних симетричних, додатно визначених матриць.

Означення 3. Система (1) абсолютно стійка, якщо її нульовий розв'язок експоненціально стійкий для довільної функції $f(\sigma)$, що задовольняє "умовам сектора"

$$[k\sigma - f(\sigma)]\sigma > 0, \quad k > 0. \quad (5)$$

Для дослідження абсолютної інтервальної стійкості буде використовуватися функція Ляпунова виду Лур'є-Постнікова з експоненціальним множником

$$V(x, t) = e^{\gamma t} \left\{ x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\sigma) d\sigma \right\}, \quad \beta > 0, \quad (6)$$

з додатно визначеною матрицею H . Для функції Ляпунова (6) справедлива наступна двостороння оцінка

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(H) |x|^2 \leq V(x, t) \leq e^{\gamma t} \bar{\lambda}_{\max}(H, \beta) |x|^2, \quad \bar{\lambda}_{\max}(H, \beta) = \lambda_{\max}(H) + \frac{1}{2} \beta k |c|^2. \quad (7)$$

Будемо вважати, що система без відхилення аргументу

$$\frac{d}{dt}(I-D)x(t) = (A+B)x(t) + bf(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = c^T x(t), \quad t \geq 0$$

асимптотично стійка. Оскільки за умовою, $|D| < 1$, тож її можна записати в вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (I-D)^{-1}(A+B)x(t) + (I-D)^{-1}bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) &= c^T x(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

І, якщо матриця $(I-D)^{-1}(A+B)$ асимптотично стійка, тоді матричне рівняння Ляпунова

$$\left[(I-D)^{-1}(A+B) \right]^T H + H (I-D)^{-1}(A+B) = -C \quad (9)$$

при довільній додатно визначеній матриці C має єдиний розв'язок – додатно визначену матрицю H .

Наступні дослідження будемо проводити з використанням функції Ляпунова виду (6) й умови Б.С.Разуміхіна [8]. Позначимо через $\partial V_t^{\alpha, \gamma}$ поверхню рівня $V(x, t) = \alpha$ функції Ляпунова (6), а $V_t^{\alpha, \gamma}$ – область в розширеному фазовому просторі $R^n \times R$, яку вона обмежує, тобто

$$\begin{aligned} \partial V_t^{\alpha, \gamma} &= \{(x, t) \in R^n \times R : V(x, t) = \alpha\}, \\ V_t^{\alpha, \gamma} &= \{(x, t) \in R^n \times R : V(x, t) < \alpha\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Наведемо ряд допоміжних тверджень.

Лема 1. Нехай $(m-1)\tau \leq t < m\tau$. Тоді система рівнянь нейтрального типу (1) еквівалентна системі рівнянь з запізненням

$$\dot{x}(t) = D^m \dot{x}(t - m\tau) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{m-1} D^{i-1}(DA+B)x(t - i\tau) + D^{m-1}Bx(t - m\tau) + \sum_{i=0}^{m-1} D^i bf(\sigma(t - i\tau)) \quad (11)$$

з початковими умовами $x(t) \equiv \phi(t)$, $\dot{x}(t) = \psi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$.

Доведення. Перепишемо систему (1) у вигляді

$$\dot{x}(t) = D \dot{x}(t - \tau) + Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)). \quad (12)$$

Підставимо замість $\dot{x}(t - \tau)$ його значення, що задається аналогічною залежністю

$$\dot{x}(t - \tau) = D \dot{x}(t - 2\tau) + Ax(t - \tau) + Bx(t - 2\tau) + bf(\sigma(t - \tau)),$$

Отримаємо наступну систему рівнянь

$$\dot{x}(t) = D^2 \dot{x}(t - 2\tau) + Ax(t) + (DA+B)x(t - \tau) + DBx(t - 2\tau) + bf(\sigma(t)) + Dbf(\sigma(t - \tau)).$$

Зробивши ще одну ітерацію, отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= D^3 \dot{x}(t - 3\tau) + Ax(t) + (DA+B)x(t - \tau) + \\ &+ bf(\sigma(t)) + Dbf(\sigma(t - \tau)) + D^2 bf(\sigma(t - 2\tau)) + \\ &+ D(DA+B)x(t - 2\tau) + D^2 Bx(t - 3\tau) + \end{aligned}$$

Нехай $(m-1)\tau \leq t < m\tau$. Зробивши $m-1$ -ітерацію, отримаємо співвідношення (11).

Лема 2. Нехай для похідної функції $V(x, t)$ (6) вздовж розв'язків системи (1) $x(t)$ при $t > 0$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), t) &< -Me^{\gamma t} |x(t)|^2 + Ne^{\theta t} |x(t)|, \\ M &> 0, \quad N > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тоді справедливо

$$\begin{aligned} |x(t)| &< \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \frac{N\phi(H, \beta)}{M + (2\theta + \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ &\times \left[\exp\{(\theta - \gamma)t\} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right], \quad \phi(H, \beta) = \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \end{aligned} \quad (14)$$

Доведення. Використовуючи нерівності квадратичних форм (7), перепишемо співвідношення (13) у вигляді

$$\frac{d}{dt}V(x(t), t) < -\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} V(x(t), t) + \frac{N}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} e^{\left(\theta - \frac{1}{2}\gamma\right)t} \sqrt{V(x(t), t)}.$$

Розв'язуючи отриману диференціальну нерівність (типу рівняння Бернуллі), отримаємо

$$\sqrt{V(x(t), t)} < \sqrt{V(x(0), 0)} \exp \left\{ -\frac{M}{2\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} t \right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \times \frac{N}{M + (2\theta - \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ \times \left[\exp \left\{ \left(\theta - \frac{1}{2}\gamma \right) t \right\} - \exp \left\{ -\frac{M}{2\bar{\lambda}_{\max}(H, \alpha)} t \right\} \right].$$

Використовуючи двосторонню нерівність квадратичних форм, отримаємо

$$e^{\frac{1}{2}\gamma t} \sqrt{\lambda_{\min}(H)} |x(t)| \leq \bar{\lambda}_{\max}(H, \beta) |x(0)| \exp \left\{ -\frac{M}{2\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} t \right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \times \frac{N}{M + (2\theta - \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ \times \left[\exp \left\{ \left(\theta - \frac{1}{2}\gamma \right) t \right\} - \exp \left\{ -\frac{M}{2\bar{\lambda}_{\max}(H, \alpha)} t \right\} \right].$$

Звідси

$$|x(t)| < \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \\ + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{N}{M + (2\theta + \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ \times \left[\exp \{ (\theta - \gamma)t \} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right],$$

Що й треба було показати.

Лема 3. Нехай для розв'язку $x(t)$ системи (1) при $-\tau \leq s < T$, $T \geq 0$ виконується $(x(s), s) \in V_t^{\alpha, \gamma}$, $(x(T), T) \in \partial V_t^{\alpha, \gamma}$. Тоді справедлива нерівність

$$|x(T) - x(T - \tau)| \leq \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|. \quad (15)$$

Доведення. Як витікає з двосторонніх оцінок (7) має місце співвідношення

$$e^{\gamma(T-\tau)} \lambda_{\min}(H) |x(T - \tau)|^2 \leq V(x(T - \tau), T - \tau) < V(x(T), T) \leq e^{\gamma T} \bar{\lambda}_{\max}(H, \beta) |x(T)|^2.$$

Звідси

$$|x(T - \tau)| < e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} |x(T)|.$$

Й отримуємо

$$|x(T) - x(T - \tau)| \leq |x(T)| + |x(T - \tau)| < \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|.$$

Лема 4. Нехай для розв'язку $x(t)$ системи (1) при $-\tau \leq s < T$, $(m-1)\tau \leq T < m\tau$ виконується $(x(s), s) \in V_t^{\alpha, \gamma}$, $(x(T), T) \in \partial V_t^{\alpha, \gamma}$. Тоді справедлива нерівність

$$\left| \dot{x}(T) - \dot{x}(T - \tau) \right| \leq 2|D|^{m-1} (1 + |D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + K \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|, \\ K = \frac{|A| + |B| + k|b|c|}{1 - |D|}. \quad (16)$$

Доведення. Як витікає з виду системи (1), має місце нерівність

$$\left| \dot{x}(T) - \dot{x}(T - \tau) \right| \leq |D| \left| \dot{x}(T - \tau) - \dot{x}(T - 2\tau) \right| + |A| |x(T) - x(T - \tau)| + \\ + |B| |x(T - \tau) - x(T - 2\tau)| + |b| |f(\sigma(T)) - f(\sigma(T - \tau))|.$$

Повторюючи оцінку ще раз, отримаємо

$$\left| \dot{x}(T) - \dot{x}(T - \tau) \right| \leq |D|^2 \left| \dot{x}(T - 2\tau) - \dot{x}(T - 3\tau) \right| + |A| |x(T) - x(T - \tau)| + |D| |A| |x(T - \tau) - x(T - 2\tau)| + \\ + |B| |x(T - \tau) - x(T - 2\tau)| + |D| |B| |x(T - 2\tau) - x(T - 3\tau)| + |b| |f(\sigma(T)) - f(\sigma(T - \tau))| \\ + |D| |b| |f(\sigma(T - \tau)) - f(\sigma(T - 2\tau))|.$$

За умовою $(m-1)\tau \leq T < m\tau$. Тоді провівши $(m-1)$ – ітерацію, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left| \dot{x}(T) - \dot{x}(T-\tau) \right| \leq |D|^{m-1} \left[\left| \dot{x}(T-(m-1)\tau) - \dot{x}(0) \right| + \left| \dot{x}(0) - \dot{x}(T-m\tau) \right| \right] + \\ & + |A| |x(T) - x(T-\tau)| + |D| |A| |x(T-\tau) - x(T-2\tau)| + \dots + |D|^{m-2} |A| |x(T-(m-2)\tau) - x(T-(m-1)\tau)| + \\ & + |B| |x(T-\tau) - x(T-2\tau)| + |D| |B| |x(T-2\tau) - x(T-3\tau)| + \dots + |D|^{m-2} |B| |x(T-(m-1)\tau) - x(T-m\tau)| + \\ & + |b| |f(\sigma(T)) - f(\sigma(T-\tau))| + |D| |b| |f(\sigma(T-\tau)) - f(\sigma(T-2\tau))| + \dots + |D|^{m-2} |b| |\sigma(T-(m-2)\tau) - \sigma(T-(m-1)\tau)| < \\ & < 2|D|^{m-1} (1+|D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + \frac{|A|}{1-|D|} \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)| + \\ & + \frac{|B|}{1-|D|} \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)| + \frac{|b|k|c|}{1-|D|} \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо твердження леми 4.

Позначимо

$$S_1[H, \beta, v, \gamma] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 - \frac{1}{2}\gamma\beta k^2 & S_{12}^0 + \frac{1}{2}vc \\ \left(S_{12}^0\right)^T + \frac{1}{2}vc^T & S_{22}^0 + \frac{1}{k}v \end{bmatrix}, \quad S_0[H, \beta, \gamma] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 \\ \left(S_{12}^0\right)^T & S_{22}^0 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^0 = -\gamma H - \left[(I-D)^{-1} (A+B) \right]^T H - H \left[(I-D)^{-1} (A+B) \right], \quad (17)$$

$$S_{12}^0 = -H \left[(I-D)^{-1} b \right] - \frac{1}{2}\beta(A+B)c, \quad S_{22}^0 = -\beta c^T (I-D)^{-1} b,$$

$$R_1(B, D) = \left\{ 2 \left[HB(I-D)^{-1} + HD(I-D)^{-1}k \right] + \beta k|c| \left[c^T(I-D)^{-1}B + c^T(I-D)^{-1}K \right] \right\} \times \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right],$$

$$R_2(B, D) = 2(1+D) \left[HD(I-D)^{-1} + \beta k|c| c^T(I-D)^{-1}D \right],$$

$$M[\bullet] = \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) - R_1(B, D), \quad N[\bullet] = \frac{R_2(B, D)}{|D|} \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau}, \quad \theta = \gamma - \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{|D|},$$

Наведемо твердження про стійкість нульового розв'язку системи (1) і, відповідно, оцінки збіжності розв'язків.

Теорема 1. Нехай $|D| < 1$, й існує додатно визначена матриця H і параметри $\beta > 0$, $v > 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}$, при

яких виконується нерівність

$$M[\bullet] = \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) - R_1(B, D) > 0.$$

Тоді нульовий розв'язок системи (1) абсолютно стійкий в метриці C^1 для довільного $\tau > 0$. Крім того для довільного розв'язку $x(t)$, $t > 0$ справедлива наступна оцінка збіжності

$$\begin{aligned} |x(t)| & \leq \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{N[\bullet]}{M[\bullet] + (2\theta - \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ & \times \left[\exp \{ (\theta - \gamma)t \} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

а для його похідної

$$\begin{aligned} \left| \dot{x}(t) \right| & \leq \left[\left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + \frac{|B|}{|D|} \|x(0)\|_{\tau} \right] e^{-\frac{t}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}} + \left[|A| + \frac{k|b||c| + |DA+B|}{1-|D|} \right] \times \left\{ \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \times \right. \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{N[\bullet]}{M[\bullet] + (2\theta - \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ & \times \left[\exp \{ (\theta - \gamma)t \} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Доведення. Перепишемо систему (1) в вигляді

$$(I - D)\dot{x}(t) = (A + B)x(t) + B[x(t - \tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)).$$

Оскільки $|D| < 1$, тоді можна записати

$$\dot{x}(t) = (I - D)^{-1} \left\{ (A + B)x(t) + B[x(t - \tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)) \right\}. \quad (20)$$

Обчислимо повну похідну функції Ляпунова виду (6) вздовж розв'язків системи (20). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), t) = & \gamma e^{\gamma t} \left\{ x^T(t) H x(t) + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \right\} + \\ & + e^{\gamma t} \left[(I - D)^{-1} \left\{ (A + B)x(t) + B[x(t - \tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)) \right\} \right]^T H x(t) + \\ & + e^{\gamma t} x^T(t) H (I - D)^{-1} \left\{ (A + B)x(t) + B[x(t - \tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)) \right\} + \\ & + e^{\gamma t} \beta f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} \left\{ (A + B)x(t) + B[x(t - \tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)) \right\} \end{aligned}$$

Перепишемо отриманий вираз наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), t) = & e^{\gamma t} x^T(t) \left\{ \gamma H + \left[(I - D)^{-1} (A + B) \right]^T H + H \left[(I - D)^{-1} (A + B) \right] \right\} x(t) + \\ & + 2e^{\gamma t} [x(t - \tau) - x(t)]^T \left[(I - D)^{-1} B \right]^T H x(t) + 2e^{\gamma t} [\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] \left[(I - D)^{-1} D \right]^T H x(t) + \\ & + 2e^{\gamma t} x^T(t) H (I - D)^{-1} bf(\sigma(t)) + \\ & + e^{\gamma t} \beta f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} (A + B)x(t) + e^{\gamma t} \beta f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} B[x(t - \tau) - x(t)] + \\ & + e^{\gamma t} \beta f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + e^{\gamma t} \beta c^T (I - D)^{-1} bf^2(\sigma(t)) + \gamma \beta e^{\gamma t} \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \}. \end{aligned}$$

Використовуючи позначення (17), перепишемо отриманий вираз у вигляді суми квадратичної форми зі "збуреннями"

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), t) = & -e^{\gamma t} (x^T(t), f(\sigma(t))) \times S_0[H, \beta, \gamma] \times (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + \\ & + 2e^{\gamma t} [x(t - \tau) - x(t)]^T \left[(I - D)^{-1} B \right]^T H x(t) + 2e^{\gamma t} [\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] \left[(I - D)^{-1} D \right]^T H x(t) + \\ & + \beta e^{\gamma t} f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} B[x(t - \tau) - x(t)] + \\ & + \beta e^{\gamma t} f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] + \gamma \beta e^{\gamma t} \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Використовуючи, так звану, S – процедуру [9] і властивості (5) функції $f(\sigma)$, запишемо отриманий вираз у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), t) = & -e^{\gamma t} (x^T(t), f(\sigma(t))) \times S_1[H, \beta, v, \gamma] \times (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + \\ & + 2e^{\gamma t} [x(t - \tau) - x(t)]^T \left[(I - D)^{-1} B \right]^T H x(t) + 2e^{\gamma t} [\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] \left[(I - D)^{-1} D \right]^T H x(t) + \\ & + \beta e^{\gamma t} f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} B[x(t - \tau) - x(t)] + \\ & + \beta e^{\gamma t} f(\sigma(t)) c^T (I - D)^{-1} D[\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] - v e^{\gamma t} f(\sigma(t)) \left[\sigma(t) - \frac{1}{k} f(\sigma(t)) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де матриця $S_1[H, \beta, v, \gamma]$ визначена в (17).

Розглянемо кожне з "збурень" в момент $(m - 1)\tau \leq t < m\tau$ окремо.

1. Використовуючи лему 3, для першого збурення отримаємо наступну оцінку

$$\begin{aligned} [x(T-\tau)-x(T)]^T [(I-D)^{-1} B]^T Hx(T) &\leq |HB(I-D)^{-1}| |x(T)| |x(T)-x(T-\tau)| \leq \\ &\leq |HB(I-D)^{-1}| \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Використовуючи лему 4, для другого збурення отримаємо

$$\begin{aligned} \left[\dot{x}(T-\tau) - \dot{x}(T) \right]^T [(I-D)^{-1} D]^T Hx(T) &\leq |HD(I-D)^{-1}| |\dot{x}(T)| |\dot{x}(T) - \dot{x}(T-\tau)| \leq \\ &\leq |HD(I-D)^{-1}| \left\{ 2|D|^{m-1} (1+|D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + K \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] \right\} |x(T)|. \end{aligned} \quad (23)$$

3. Знову використовуючи лему 3, для третього збурення маємо

$$\begin{aligned} \beta f(\sigma(T)) c^T (I-D)^{-1} B [x(T) - x(T-\tau)] &\leq \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} B| |x(T) - x(T-\tau)| |x(T)| \leq \\ &\leq \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} B| \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|. \end{aligned} \quad (24)$$

4. Для четвертого збурення

$$\begin{aligned} \beta f(\sigma(T)) c^T (I-D)^{-1} D [\dot{x}(T) - \dot{x}(T-\tau)] &\leq \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} D| |\dot{x}(T) - \dot{x}(T-\tau)| |x(T)| \leq \\ &\leq \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} D| \left\{ 2|D|(1+|D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + K \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] \right\} |x(T)|. \end{aligned} \quad (25)$$

Після підстановки отриманих оцінок збурень (22), (23), (24), (25) в повну похідну функції Ляпунова в момент часу $t = T$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(T), T) &\leq -e^{\gamma T} \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) |x(T)|^2 + 2e^{\gamma T} |HB(I-D)^{-1}| \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|^2 + \\ &+ 2e^{\gamma T} |HD(I-D)^{-1}| \left\{ 2|D|^{m-1} (1+|D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + K \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] \right\} |x(T)| + \\ &+ e^{\gamma T} \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} B| \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] |x(T)|^2 + \\ &+ e^{\gamma T} \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} D| \left\{ 2|D|^{m-1} (1+|D|) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + K \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] \right\} |x(T)| \end{aligned}$$

Перетворимо записаний вираз до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(T), T) &\leq -e^{\gamma T} \left\{ \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) - 2 \left(|HB(I-D)^{-1}| + |HD(I-D)^{-1}| K \right) \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \beta k |c| \left(|c^T (I-D)^{-1} B| + |c^T (I-D)^{-1} D| K \right) \left[1 + e^{\gamma\tau} \sqrt{\phi(H, \beta)} \right] \right\} |x(T)|^2 + \\ &+ 2e^{\gamma T} (1+|D|) |D|^{m-1} \left[|HD(I-D)^{-1}| + \beta k |c| |c^T (I-D)^{-1} D| \right] \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} |x(T)|. \end{aligned}$$

Використовуючи позначення (17), отримаємо

$$\frac{d}{dt} V(x(T), T) \leq -e^{\gamma T} \left\{ \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) - R_1(B, D) \right\} |x(T)|^2 + e^{\gamma T} |D|^{m-1} R_2(B, D) \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} |x(T)|.$$

Оскільки, за припущенням, $(m-1)\tau \leq T < m\tau$, тоді

$$|D|^{m-1} = \frac{1}{|D|} e^{-m \ln \frac{1}{|D|}} < \frac{1}{|D|} e^{-\frac{T}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}}.$$

Тому для оцінки повної похідної маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(T), T) &\leq -e^{\gamma T} \left\{ \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, v, \gamma]) - R_1(B, D) \right\} |x(T)|^2 + \\ &e^{\theta T} \frac{R_2(B, D)}{|D|} \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} |x(T)|, \quad \theta = \gamma - \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}. \end{aligned} \quad (26)$$

Якщо позначити (згідно (17))

$$M[\bullet] = \lambda_{\min}(S_1[H, \beta, \nu, \gamma]) - R_1(B, D), \quad N[\bullet] = \frac{R_2(B, D)}{|D|} \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau},$$

Тоді отримаємо, що виконуються умови (13) леми 2. Тому при $t \geq 0$ справедлива нерівність

$$\begin{aligned} |x(t)| &< \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\lambda_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{N[\bullet]}{M[\bullet] + (2\theta + \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \left[\exp\{(\theta - \gamma)t\} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\lambda_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right]. \end{aligned}$$

Й отримали перше твердження (18) теореми.

Покажемо, що експоненціальна стійкість буде й в метриці C^1 . Як витікає з результатів леми 1, для похідної $\dot{x}(t)$ в момент часу $(m-1)\tau \leq T < m\tau$ буде виконуватися співвідношення

$$\left| \dot{x}(T) \right| \leq |D|^m \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + |A| |x(T)| + |DA + B| \sum_{i=1}^{m-1} |D|^{i-1} |x(T - i\tau)| + |D|^{m-1} |B| \|x(0)\|_{\tau} + \sum_{i=0}^{m-1} |D|^i |b| |f(\sigma(T - i\tau))|.$$

Враховуючи обмеження (5), що накладаються на функцію $f(\sigma(t))$, $\sigma(t) = c^T x(t)$, отримаємо

$$|f(\sigma(T - i\tau))| \leq k |\sigma(T - i\tau)| \leq k |c| |x(T - i\tau)|.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \left| \dot{x}(T) \right| &\leq |D|^m \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + \\ &+ |D|^{m-1} |B| \|x(0)\|_{\tau} + [|A| + |D|k|b|c]|x(T)| + \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} |D|^{i-1} [|DA + B| + |D|k|b|c]|x(T - i\tau)| \end{aligned} \quad (27)$$

Підставивши замість $|x(T)|$ і $|x(T - i\tau)|$ їх верхні оцінки, отримаємо

$$\left| \dot{x}(T) \right| \leq |D|^m \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + |D|^{m-1} |B| \|x(0)\|_{\tau} + \left[|A| + \frac{k|b|c| + |DA + B|}{1 - |D|} \right] \max_{0 \leq s \leq T} |x(s)|.$$

Й оскільки

$$\begin{aligned} &|D|^m \left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + |D|^{m-1} |B| \|x(0)\|_{\tau} \leq \\ &\leq \left[\left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + \frac{|B|}{|D|} \|x(0)\|_{\tau} \right] e^{\frac{T}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}}, \end{aligned}$$

тоді для довільного t отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \dot{x}(t) \right| &\leq \left[\left\| \dot{x}(0) \right\|_{\tau} + \frac{|B|}{|D|} \|x(0)\|_{\tau} \right] e^{\frac{t}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}} + \left[|A| + \frac{k|b|c| + |DA + B|}{1 - |D|} \right] \times \left\{ \sqrt{\phi(H, \beta)} \|x(0)\|_{\tau} \times \right. \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\lambda_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{N[\bullet]}{M[\bullet] + (2\theta - \gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H, \beta)} \times \\ &\times \left[\exp\{(\theta - \gamma)t\} - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{M[\bullet]}{\lambda_{\max}(H, \beta)} + \gamma \right) t \right\} \right] \Bigg\}, \end{aligned}$$

Тобто нерівність (19) теореми.

Зауваження 1. В умовах абсолютної стійкості, які сформульовані в теоремі 1, вимагається існування додатно визначеної матриці H і параметрів $\beta > 0$, $\nu > 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}$, при яких матриця $S_1[H, \beta, \nu, \gamma]$ також додатно визначена. Знаходження конструктивних значень цих величин переходить в окрему задачу нелінійної оптимізації.

Зауваження 2. В умовах теореми накладаються значні обмеження на параметри системи. Завдяки цьому отримано умови абсолютної стійкості, рівномірної за запізненням.

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с. 2. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд-во АН СССР, 1963. – 261 с. 3. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Исследование устойчивости дифференциально функциональных систем методом функций Ляпунова. – Киев, Издательство Киевского университета, Киев, 1977. – 4. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки, в.3, 2009. – С.212-221. 5. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Абсолютна інтервальна стійкість диференціальних систем регулювання нейтрального типу // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. Збірник праць Інституту математики НАН України, Т.6, №3, 2009. – С.232-247. 6. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Абсолютна інтервальна стійкість систем непрямого регулювання нейтрального типу // Проблеми управління та інформатики, №3, 2009. – С.5-16. 7. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Баштинец Я., Риволова А. Оценки возмущений нелинейных систем непрямого регулирования нейтрального типа // Кибернетика и вычислительная техника, в.160 2010. – С.72-85. 8. Разумихин Б.С. Устойчивость эридитарных систем. – М., Наука, 1988/ – 112 с. 9. Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник Ленинградского университета. Математика-механика-астрономия. №1. 1971. – С.62-77.

Надійшла до редколегії 22.03.10

УДК 517.9

С. Чуйко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Стаття присвячена дослідженню проблеми знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків нелінійних нетерових крайових задач для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Одержано конструктивні умови існування розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для систем диференціальних рівнянь з перемиканнями та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Запропоновано збіжні ітераційні алгоритми побудови розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для систем імпульсних диференціальних рівнянь.

The abstract is devoted to the problem of finding constructive conditions for existence and construction solutions of non-linear boundary-value problems for the systems of differential equations with impulse influence. The constructive conditions for the existence of solutions Noetherian semi-nonlinear boundary-value problem for the semi-nonlinear system of the differential equations with switching and impulse influence have been proved. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the Noetherian semi-nonlinear boundary-value problems for the impulse differential equations have been proposed.

Досліджено задачу про знаходження умов існування і побудову розв'язків [1 – 5]

$$z(\cdot, \varepsilon) \in C^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}\}_1, \quad z(t, \cdot) \in C[o, \varepsilon_0]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями

$$dz/dt = A_i(t)z + f_i(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \quad i=1, 2, \dots, p, \quad (1)$$

які задовольняють крайову умову

$$Lz(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in R^m \quad (2)$$

і при $\varepsilon = 0$ перетворюються на розв'язки породжуючої задачі

$$dz_0/dt = A_i(t)z_0 + f_i(t), \quad t \neq \tau_i, \quad i=1, 2, \dots, p, \quad Lz_0(\cdot) = \alpha. \quad (3)$$

Тут $A_i(t)$ – неперервна за винятком точок τ_i матриця (в точках τ_i матриця $A_i(t)$, можливо, зазнає розриви першого роду), $Lz(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний векторний функціонал вигляду

$$Lz(\cdot, \varepsilon) = \sum_{i=0}^p \ell_i z(\cdot, \varepsilon),$$

де $\ell_i z(\cdot, \varepsilon) : C[\tau_i, \tau_{i+1}] \rightarrow R^m$, $f_i(t)$ – неперервна, за винятком точок τ_i вектор-функція (в точках τ_i функція $f_i(t)$, можливо, зазнає розриви першого роду). Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ неперервно-диференційовна по першому аргументу в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по другому аргументу на відрізку $[a, b]$ за винятком точок τ_i та неперервно-диференційовна по третьому аргументу на відрізку $[o, \varepsilon_0]$. Нелінійний векторний функціонал

$$J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}\}_1 \rightarrow R^m, \quad m \geq n$$

неперервно-диференційовний по першому аргументу (у сенсі Фреше) в малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперервно-диференційовний по другому аргументу в малому додатному околі нуля.

Поставлена задача узагальнює відомі задачі про знаходження умов існування і побудову розв'язків слабконелінійних крайових задач з невідродженим імпульсним впливом [1, 2] та впливом типу "interface conditions" [6], а також задачі про знаходження неперервно-диференційовних розв'язків слабо-нелінійних крайових задач [2].

Позначимо $X_0(t)$ – нормальну ($X_0(a) = I_n$) фундаментальну матрицю однорідної частини системи (3), $Q = [\ell_0 X_0(\cdot), \ell_1 X_0(\cdot), \dots, \ell_p X_0(\cdot)] - (m \times n(p+1))$ - вимірну матрицю та її ортопроектор [4] $P_Q = \text{col}[P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \dots, P_Q^{(p)}] : R^{n(p+1)} \rightarrow N(Q)$ розміром $(n(p+1) \times n(p+1))$, а також діагональні блоки цього ортопроектору $P_Q^{(i)} = \ell_i X_0(\cdot)$. Припустимо також, що

$$\max \text{rank } P_Q^{(i)} = \ell_i X_0(\cdot) = \text{rank } P_Q^{(i_0)},$$

$$\|X_0(\tau_{i_0} + 0)P_Q^{(i_0)}\| = p_0.$$

Рівняння (5.11) у випадку задачі (5.12) $F_0(c_r) := 1 + \cos^2 0 = 2$ не має дійсних коренів. Отже, згідно з теоремою 5.3.1 слабконелінійна задача (5.12) не має шуканих розв'язків.

Розв'язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі породжуючого $z_0(t, c_r^*)$. Для знаходження збурення $x(t, \varepsilon) \in C^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I, C[0, \varepsilon_0]\}$ одержуємо крайову задачу

$$dx/dt = A_i(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), t \neq \tau_i, Lx(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперервну диференційовність за третім аргументом на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, одержуємо розвинення

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + \\ + A_1(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Тут

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}}, \quad A_2(t) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}}. \text{ Залишок } R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \text{ більш високого порядку}$$

малості за x та ε в околі точок $x = 0$ й $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$R_1(z, t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \\ \frac{\partial R_1(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі та його неперервну диференційовність за другим аргументом на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, виділяємо лінійні $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ та $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ частини цього функціоналу і член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нульового порядку за ε в околі точок $x = 0$ та $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \\ + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ більш високого порядку малості за x і ε в малому околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0.$$

Достатні умови існування шуканих розв'язків вихідної задачі (1), (2) визначає наступна теорема.

Теорема. Нехай для породжуючої задачі (3), (4) має місце критичний випадок і виконуються умови лемми 3. В цьому разі для кожного вектора $c_r^* \in R^r$ за умов $P_{B_0}^* = 0$ та $F_1(c_r^*) = 0$ крайова задача (1), (2) має принаймні єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon)$:

$z(t, 0) \equiv z_0(t, c_r^*)$. Тут

$$F_1(c_r^*) = P_{B_0}^* P_{Q_d}^* \{ \ell_1 G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](\cdot) - LK[A_1(s)G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](s)](\cdot) \}, \\ B_0 = P_{Q_d}^* \{ \ell_1 X_r(\cdot) - LK[A_1(s)X_r(s)](\cdot) \} -$$

$(d \times r)$ – вимірна матриця, $P_{B_0}^* : R^d \rightarrow N(B_0^*)$ – ортопроектор. Цей розв'язок можна визначити за допомогою

збіжного для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ітераційного процесу $z_k(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$, де

$$x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](t); \\ x_2(t, \varepsilon) = X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + x_2^{(2)}(t, \varepsilon), \\ x_2^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[A_1(s)x_1 + \varepsilon A_2(z_0); \ell_1 x_1(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0)](t), \\ c_{r_1} = -B_0^+ P_{Q_d}^* \{ \ell_1 x_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - LK[A_1(s)x_2^{(1)} + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0 + x_1, s, \varepsilon)](\cdot) \} + P_\rho c_\rho, \\ x_{k+2}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}} + x_{k+2}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
x_{k+2}^{(2)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G[A_1(s)x_{k+1} + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \\
&\quad \ell_1 x_{k+1}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](t), \\
c_{r_{k+2}} &= -B_0^+ P_{Q_d}^* \{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\
&\quad -LK[A_1(s)x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon, s, \varepsilon))(\cdot)] \} + P_\rho c_\rho, \dots
\end{aligned}$$

Тут $c_\rho(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon^*]$, $P_\rho - (r \times \rho)$ -матриця, складена з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{B_0} : R^r \rightarrow N(B_0)$.

Теорема узагальнює відповідні твердження зі статті [6] на випадок систем із перемикуваннями. Актуальність одержаного твердження пов'язана з широким інтересом до так званих гібридних систем [7,8], частинним випадком яких є досліджена задача (1), (2).

Приклад 2. Умови теореми виконуються для задачі

$$dz/dt = A_i(t)z + \varepsilon z \ln z, \quad t \in [-1; 1], \quad t \neq 0, \quad Lz(\cdot) = \alpha, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}
A_i(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [-1; 0], \\ 2t-1, & t \in [0; 1] \end{cases}, \\
Lz(\cdot, \varepsilon) &= \begin{cases} z(-1, \varepsilon) \\ z(+0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) \end{cases}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Нормальна фундаментальна матриця

$$X_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1; 0] \\ e^{t^2-t}, & t \in [0; 1] \end{cases}$$

лінійної частини диференціальної системи (9) визначає матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рядки ортопроектора P_Q визначають нормовану фундаментальну матрицю

$$X_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 0] \\ e^{t^2-t}, & t \in [0; 1] \end{cases}$$

задачі (9). Оскільки $P_{Q^*} \neq 0$, то має місце критичний випадок. Оператор Гріна задачі Коші для лінійної частини диференціального рівняння (9) з довільною неоднорідністю $f_i(t)$ має вигляд

$$K[f_0(s)](t) = \int_{-1}^t f_0(s) ds, \quad t \in [-1, 0], \quad K[f_1(s)](t) = 0 \int_t^1 f_1(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

Породжуюча задача

$$dz_0/dt = A_i(t)z_0, \quad t \in [-1; 1], \quad t \neq 0, \quad Lz_0(\cdot) = \alpha$$

для слабконелінійної крайової задачі (9) розв'язна, оскільки виконується умова (4). Розв'язок породжуючої задачі $z_0(t, c) = X_i(t)c + G[o; \alpha]$, $c \in R^1$ має зображення

$$z_0(t, c) = \begin{cases} 1, & t \in [-1; 0], \\ ce^{t^2-t}, & t \in [0; 1] \end{cases}$$

Рівняння (7) для задачі (9)

$$F_0(c) = \int_{-1}^0 1 \cdot \ln 1 ds + \int_0^1 e^{s^2-s^2} ce^{s^2-s} \ln(ce^{s^2-s}) ds = c \ln c - \frac{c}{6} = 0$$

не має тривіального розв'язку $c^* = 0$. Єдиний нетривіальний розв'язок $c_1^* = e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18136$ цього рівняння фіксує породжуючий розв'язок

$$z_0(t, c^*) = \begin{cases} 1, & t \in [-1; 0], \\ c^* \cdot e^{t^2-t}, & t \in [0; 1] \end{cases}$$

і визначає похідну

$$A_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1; 0], \\ t^2 - t + \frac{7}{6}, & t \in [0; 1], \end{cases}$$

яка, в свою чергу, приводить до константи $B_0 = 1$. Оскільки $B_0 \neq 0$, то умова (5.20) виконується. Перше наближення до відхилення від породжуючого розв'язку має зображення

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 0], \\ \varepsilon e^{\frac{1}{6}t^2 - t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right), & t \in [0; 1] \end{cases}.$$

Оскільки умова збіжності $F_1(c_r^*) = 0$ виконується, то згідно з теоремою, задача (9) має єдиний розв'язок. Друге наближення до відхилення від породжуючого розв'язку зобразимо у вигляді

$$x_2(t, \varepsilon) = X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + x_2^{(2)}(t, \varepsilon),$$

при цьому

$$x_2^{(2)}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 0], \\ \varepsilon^2 \cdot e^{t^2 - t} \cdot e^{\frac{1}{6}t^2} \cdot \left(\frac{1}{18} \cdot t^6 - \frac{1}{6} \cdot t^5 + \frac{19}{72} \cdot t^4 - \frac{1}{4} \cdot t^3 + \frac{7}{72} \cdot t^2 \right), & t \in [0; 1] \end{cases}.$$

Функцію $c_{r_1}(\varepsilon) = B_0^+ P_{Q_d} LK[A_1(s)x_2^{(1)}(s, \varepsilon) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x_1(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)$ не можна виразити через елементарні функції, але можна знайти чисельно. Таким чином, друге наближення до розв'язку задачі (9)

$$z_2(t, \varepsilon) = e^{t^2 - t} \left(e^{\frac{1}{6}t^2} + c_{r_1}(\varepsilon) \right) + x_2^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + x_2^{(2)}(t, \varepsilon)$$

знайдено в явному вигляді з точністю до константи $c_{r_1}(\varepsilon)$. Останню константу можна знайти чисельними методами, наприклад $c_{r_1}(0,1) \approx -0,000\,032\,816$, $c_{r_1}(0,5) \approx -0,000\,820\,389$. Оцінити величини нев'язок перших трьох наближень до розв'язку крайової задачі (9) можна також з використанням середньоквадратичних нев'язок розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2)

$$\Delta(z_i(\cdot, \varepsilon)) = \left\{ \| A(t)x_i(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_i(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - dx_i(t, \varepsilon) / dt \|_{C[-1;1]}^2 + \| \ell_1 x_i(\cdot) - J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_i(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \|_{R^1}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Оскільки $Lz_i(\cdot, \varepsilon) \equiv 0$ за $i = 0, 1, 2$, то середньоквадратичні нев'язки набувають вигляду

$$\Delta(z_i(\cdot, \varepsilon)) = \| A(t)x_i(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_i(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - dx_i(t, \varepsilon) / dt \|_{C[-1;1]}.$$

Норму скалярної функції $\varphi(t)$ аналогічно [2] вважатимемо рівною $\| \varphi(t) \| = \sup_{t \in [-1;1]} |\varphi(t)|$. За $\varepsilon = 0,1$ знаходимо

середньоквадратичні нев'язки перших трьох наближень до розв'язку задачі (9)

$$\Delta(z_0(\cdot, c_r^*)) = \sup_{t \in [-1;1]} (\varepsilon Z(z_0(t, c_r^*), t, \varepsilon)) = \varepsilon \cdot \max_{t \in [0;1]} (Z(z_0(t, c_r^*), t, \varepsilon)) \approx 0,0196\,893.$$

Аналогічно

$$\Delta(z_1(\cdot, \varepsilon)) = \sup_{t \in [-1;1]} (A(t)x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - dx_1(t, \varepsilon) / dt) \approx 0,000\,163\,663,$$

$$\Delta(z_2(\cdot, \varepsilon)) = \sup_{t \in [-1;1]} (A(t)x_2(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_2(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - dx_2(t, \varepsilon) / dt) \approx 4,01\,074 \cdot 10^{-6}.$$

Для $\varepsilon = 0,01$ середньоквадратичні нев'язки перших трьох наближень до розв'язку крайової задачі (9) значно зменшуються

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 1,96893\,128 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 1,63\,550 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_2(\varepsilon) \approx 4,01\,054 \cdot 10^{-9}.$$

Послідовне суттєве зменшення середньоквадратичних нев'язок перших трьох наближень свідчить про збіжність ітераційної процедури до розв'язку крайової задачі (9).

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с. 2. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV. 317 p. 4. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения, 2001, – 37, – № 3. – С. 1132 – 1135. 5. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук (РАН). – 2001. – 379. – №2. – С. 170 – 172. 6. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – Т 10. – № 1, С. 51 – 65. 7. Чуйко О.С. Слабконелінійні крайові задачі з імпульсним впливом загального вигляду // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – № 5, – 2004. С. 51 – 52. 8. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences. № 251. Berlin, 2000. 9. Myshkis A.D. On the relation between systems with switching and hybrid systems // Funct. Differ. Equ. – 2004. – № 11. – P. 467 – 473.

Наукове видання



ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
КІБЕРНЕТИКА

Випуск 11

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Підписано до друку 14.11.11. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № К2. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 300. Ум. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 7,9. Зам. № 211-5839.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; (38044) 239 31 58; факс (38044) 239 31 28
E-mail: vpс_div.chief@univ.net.ua
WWW: vpс.univ.kiev.ua