ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1728-2276

КІБЕРНЕТИКА

10/2010

Засновано 1999 року

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.
Для викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.
For scientists, professors, aspirants and students.

Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 12.10.2009 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/6 від 12.06.02
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16271-47431 від 31.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 519.816

О. Волошин, д-р техн. наук, проф.,
М. Маляр, канд. техн. наук, доц.,
О. Швалагін, асп.

ПРОЦЕДУРИ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ І ВІДСІЮВАННЯ ВАРІАНТІВ В КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ З НЕЧІТКИМИ ФУНКЦІОНАЛАМИ

Пропонуються процедури послідовного аналізу і відсіювання варіантів в комбінаторних оптимізаційних задачах з нечіткими функціоналами з метою використання для побудови алгоритмів послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів. Розглядаються постановки оптимізаційних задач в умовах нечіткості, для яких є конструктивним застосування запропонованих процедур. Описується схема нечіткого алгоритму послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів.

In the article the procedures of the consecutive analysis and sifting variants in combinatorial optimizing problems and fuzzy functionals for the usage to build the algorithms of consecutive analysis, sifting and variants constructing are suggested. The formulations of optimizing problems in terms of fuzziness are concidered, for which the usage of the suggested procedures are constructive. The scheme of the indistinct algorithm of consecutive analysis, sifting and variants constructing is described here.

Вступ

Одним з найбільш ефективних методів розв'язання оптимізаційних задач різноманітних класів є метод послідовного аналізу варіантів (ПАВ), котрий запропоновано в 60-х роках XX ст. в Інституті кібернетики АН України Міхалевичем В. та Шором Н. [1]. З точки зору формальної логіки схема ПАВ зводиться до наступних дій:

– розбиття множини варіантів розв'язків задачі на підмножини з додатковими властивостями;
– використання цих властивостей при пошуку логічних протиріч в описі окремих множин;
– виключення з розгляду підмножин, в описі яких є протиріччя.

В [2] загальна схема ПАВ конкретизується для різних класів багатоваріантних задач, описуються алгоритми "послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів", зокрема, широко відомий алгоритм "Київський віник". Основним правилом відсіювання безперспективних варіантів в цих алгоритмах був принцип монотонної рекурсивності [1], споріднений критерію оптимальності динамічного програмування Беллмана [3]. Одночасно з відомими перевагами алгоритми покрокового конструювання мають і певні недоліки [4]. У розвиток загальних концепцій ПАВ в [5-7] запропоновано процедури паралельного відсіювання підваріантів, зокрема, одиничної довжини (алгоритм W [5]). При цьому виникає проблема конструювання повного варіанта, котра вирішується шляхом послідовного вводу обмежень на значення цільового функціонала і задача конструювання повного варіанта зводиться до побудови процедур аналізу і відсіювання підваріантів. Ефективність алгоритмів, що базується на запропонованих принципах, підтверджується обчислювальними експериментами, теоретичними оцінками та розв'язанням практичних задач [8-12]. В [6] запропоновано алгоритм ПАВ для знаходження "субоптимальних" розв'язків (ε-наближених по функціоналу і δ-наближених по обмеженнях). При цьому будь-які "ε, δ – відхилення" вважались "рівноприйнятними". В [13] процедури відсіювання були узагальнені на випадок нечіткості [14] в описі допустимих множин розв'язків і множин рівнів цільового функціоналу, множини можливих розв'язків і значень функціоналу вважались заданими чітко. В даній роботі процедури відсіювання алгоритму W узагальнюються на різні форми нечіткого задання функціоналу, зокрема, у вигляді бінарного відношення.

Постановка задачі

Нехай X – деяка множина. Нечіткою множиною C у X називається сукупність пар виду $\left\{\left(x,\mu_c(x)\right)\right\}$, де $x \in X$, а $\mu_C : X \to [0;1]$ – функція належності нечіткої множини C [14].

Носієм нечіткої множини C з функцією належності $\mu_C(x)$ називається множина виду $\operatorname{supp} A = \left\{x \mid x \in X, \mu_C(x) > 0\right\}$.

Множиною рівня α нечіткої множини C у X називається чітка множина $C_\alpha = \left\{x \mid x \in X, \mu_c(x) \ge \alpha\right\}$.

Нехай A і B – два нечітких числа у X з функціями належності $\mu_A(a)$, $a \in S_A$, $S_A \subset X$ і $\mu_B(b)$, $b \in S_B$, $S_B \subset X$ відповідно.

Нехай $S_C = \left\{c : c = a + b, a \in S_A, b \in S_B\right\}$ – нечітке число, що є результатом суми $A + B$, тоді [14]:

$$\mu_{S_C}(c) = \max_{a+b=c} \min\left\{\mu_A(a), \mu_B(b)\right\}. \tag{1}$$

Нехай задана деяка множина $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ можливих варіантів задачі, де X_j – множина можливих значень j – ої компоненти x_j (j-ий підваріант одиничної довжини). Множини X_j можуть задаватися множиною значень функції дискретного аргументу; задаватися таблично; бути множиною перестановок деякої базової множини параметрів. Вектор $p = \left(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}\right)$, де $x_{j_1} \in X_{j_1}$, $x_{j_2} \in X_{j_2}$,..., $x_{j_k} \in X_{j_k}$ $\left(1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\right)$ назвемо підваріантом довжини k. Множину всіх підваріантів позначимо через $P(X)$ і виділимо в ній множину допустимих підваріантів $D(X) \subseteq P(X)$. В множині $D(X)$ виділимо підмножину повних допустимих варіантів $D \subseteq D(X)$, яка визначається адитивними обмеженнями $G_i(x) \le G_i^*$ ($i = \overline{1,m}$).

Родовою множиною підваріанта $p \in D(X)$ назвемо множину $R(p)$, яка складається з тих варіантів x, що містять підваріант p. В свою чергу, допустимою родовою множиною $\overline{R}(p)$ підваріанта p назвемо таку підмножину родової множини $R(p)$, що складається з допустимих варіантів $x \in D$.

Величина $\Delta_p^i = \left\{ \left(\Delta g_p^i, \mu\left(\Delta g_p^i\right) \right), \Delta g_p^i \in \left[\Delta \underline{g}_p^i, \Delta \overline{g}_p^i \right] \right\}$ називається допуском для підваріанта p відносно множини D за i-им обмеженням, якщо з того, що $G_i(p) \overset{\alpha}{\succ} \Delta_p^i$ (де $\overset{\alpha}{\succ}$ – нечітке відношення переваги [14]), випливає, що допустима родова підмножина підваріанта p $\overline{R}(p) = \varnothing$. Позначимо через $Q(P) = \left\{\Delta_p^i\right\}$, $i = \overline{1,m}$, множину допусків відносно множини D для множини підваріантів P за всіма обмеженнями.

Розглядається таблиця $V^{(0)}$ можливих варіантів задачі, в якій кількість рядків дорівнює кількості змінних, число елементів в кожному рядку дорівнює кількості можливих значень відповідної змінної.

Нехай $F(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j)$ – нечіткий функціонал, де $F_j(x_j)$ – нечіткі числа з функціями належності $\mu_j(x_j)$, функція належності нечіткого числа $F(x)$, як суми нечітких чисел $F_j(x_j)$, визначається згідно принципу узагальнення (1).

Розглядаються наступні постановки нечітких оптимізаційних задач, для яких можна запропонувати ефективні процедури обчислення допусків [4], на основі яких можна побудувати процедури аналізу і відсіювання варіантів для нечіткого алгоритму W [12].

1. Знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує нечіткий функціонал $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\mathrm{Arg\,max}}\, \mathrm{supp}\, F(x)$.

2. Серед допустимих варіантів, функція належності критеріального функціоналу на яких приймає значення більші заданого порогу α_1, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує функціонал $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\mathrm{Arg\,max}}\, F_{\alpha_1}(x)$.

3. Серед допустимих варіантів, функція належності критеріального функціоналу на яких набуває максимального значення, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\mathrm{Arg\,max}}\, F_{\alpha_2}(x)$, де $\alpha_2 = \max_{x \in D} \mu_F(x)$.

4. Серед допустимих варіантів, функції належності компонент критеріального функціоналу на яких приймають значення більші заданого порогу, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує функціонал $F(x)$:

$$x \in \underset{x \in D}{\mathrm{Arg\,max}}\, \mathrm{supp}\ F(x), \mu_{F_j}\left(F_j\left(x_j\right)\right) \ge \alpha_3 .$$

5. Знайти варіант, який задовольняє таким обмеженням: $G_{*i} \le \inf \mathrm{supp}\, G_i(x)$, $\sup \mathrm{supp}\, G_i(x) \le G_i^*$ ($i = \overline{1,m}$), де G_{*i} та G_i^* – задані нижня та верхня межі зміни обмежень, $G_i(x) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(x_j)$ – нечіткі функціонали обмежень.

6. Знайти варіант серед тих, що належать такій множині допустимих варіантів:

$$D(X) = \left\{ p \mid G_i(p) \overset{\alpha}{\prec} G_i,\ p \in P(X),\ \alpha > 0 \right\}.$$

7. Знайти варіант серед тих, функції належності компонент обмеження яких приймають значення, більші за певний поріг: $G_i(v) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(x_j)$, $\mu_{G_{ij}}\left(G_{ij}\left(x_j\right)\right) \ge \alpha'$.

Позначимо $D(X) = \left\{ p \mid G_{*i} \le \inf \mathrm{supp}\, G_i(p), \sup \mathrm{supp}\, G_i(p) \le G_i^* \right\}$, $G_i(p) = \left\{ \left(g_i(p), \mu_{g_i}\left(g_i(p)\right) \right) \right\}$, $i = \overline{1,m}$.

$G_i(p) = \sum_j G_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right)$ – нечіткі функціонали підваріанта p, $G_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right) = \left\{ \left(g_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right), \mu_{g_{ij}}\left(g_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right)\right) \right) \right\}$ – нечіткі функціонали відповідних значень змінних.

Схема нечіткого алгоритму W [5, 13]

Пропонуються універсальні процедури послідовного аналізу та відсіювання варіантів, що можуть застосовуватись до розглянутих вище оптимізаційних постановок 1-7.

Для врахування додаткових обмежень на цільові функціонали і функціонали обмежень здійснюються наступні перетворення:

$$\mathrm{supp}\, G_{ij}(x_j) := \left\{ g_{ij}(x_j) \in \mathrm{supp}\, G_{ij}(x_j), \mu_{g_{ij}}\left(g_{ij}(x_j)\right) \ge \alpha_1 \right\},$$

$$\mathrm{supp}\, F_j(x_j) := \left\{ f_j(x_j) \in \mathrm{supp}\, F_j(x_j), \mu_{f_j}\left(f_j(x_j)\right) \ge \alpha_2 \right\}.$$

Елементи таблиці можливих варіантів задачі V, для яких $\mathrm{supp}\, G_{ij}(x_j) = \varnothing$ або $\mathrm{supp}\, F_j(x_j) = \varnothing$, виключаються з розгляду.

Перша ітерація процедури $\tilde{W}_1$:

Крок 1. Будується таблиця $V_1^{(0)}$ впорядковуванням рядків V за зростанням значень функції G_1: $\inf \mathrm{supp}\, G_1$.

Елемент $u_{j(l_j)}$ розміщується "лівіше" за елемент $u_{j(s_j)}$, якщо $\inf \mathrm{supp}\, G_1\left(u_{j(l_j)}\right) < \inf \mathrm{supp}\, G_1\left(u_{j(s_j)}\right)$.

Аналогічно будується таблиця $V_2^{(0)}$, елементи якої впорядковуються за спаданням функції G_1: $\sup \mathrm{supp}\, G_1$.

Крок 2. Позначимо v_0^1 і v_0^2 перші стовпці таблиць $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$ відповідно.

Для них перевіряється виконання умови $\inf \mathrm{supp}\, G_1\left(v_0^{(1)}\right) \le G_1^*$, $\sup \mathrm{supp}\, G_1\left(v_0^{(2)}\right) \ge G_{*1}$. Якщо хоча б одна з них не виконується, то задача не має розв'язку. Інакше, переходимо до Кроку 3.

Крок 3. Обчислюється значення функції G_1 для всіх елементів перших стовпців $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$ без елементів першого рядка: $\underline{G}_1 = \inf \operatorname{supp} G_1\left(v_0^1 \setminus u_{1(1)}^{(1)}\right)$, $\overline{G}_1 = \sup \operatorname{supp} G_1\left(v_0^2 \setminus u_{1(1)}^{(2)}\right)$.

Знаходяться "вертикальні" допуски $\Delta G_1^{*(1)} = G_1^* - \underline{G}_1$ $\Delta G_{*1}^{(1)} = G_{*1} - \overline{G}_1$.

Переглядаються по черзі елементи першого рядка таблиці $V_1^{(0)}$ і здійснюються такі перетворення з їх носіями: $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) := \left\{x \in \operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right), x \le \Delta G_1^{*(1)}\right\}$.

Аналогічно здійснюються перетворення з елементами першого рядка таблиці $V_2^{(0)}$: $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) := \left\{x \in \operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right), x \ge \Delta G_{*1}^{(1)}\right\}$. Елементи, для яких $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) = \varnothing$, виключаються з розгляду.

Крок 3 проводимо для всіх рядків таблиць $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$, виключаючи з таблиці $V_1^{(0)}$ елементи, відсіяні в таблиці $V_2^{(0)}$. В результаті отримаємо таблицю $V_1^{(1)}$. Аналогічно формується таблиця $V_2^{(1)}$.

Крок i. Здійснюється відсів елементів у таблицях $V_1^{(i-1)}$ і $V_2^{(i-1)}$ за *i*-им обмеженням виду $G_{*i} \le G_i(v) \le G_i^*$ аналогічно до кроку 1.

Друга ітерація процедури $\tilde{W}_1$:

В результаті виконання першої ітерації виконується відсів елементів за всіма обмеженнями і утворюються таблиці $V_1^{(n)}$ і $V_2^{(n)}$. На другій ітерації проводиться відсів за всіма обмеженнями задачі в таблицях $V_1^{(n)}$ і $V_2^{(n)}$.

l -а (заключна) ітерація процедури $\tilde{W}_1$: відповідно до загальної схеми ПАВ, у випадку, коли $V_1^{(l-1)}$ і $V_2^{(l-1)}$ збігаються з таблицями $V_1^{(l)}$ і $V_2^{(l)}$ виконання процедури $\tilde{W}_1$ завершується. В результаті отримуємо звужену множину $X^{(s_0)}$.

Позначимо $V^{(l)} = V_1^{(l)} \cap V_2^{(l)}$ – таблицю елементів, що залишилися після роботи процедури $\tilde{W}_1$. Якщо $V^{(l)} = \varnothing$, то початкова задача недопустима. У випадку, коли $V^{(l)}$ достатньо мала, оптимальний розв'язок знаходиться прямим перебором. Якщо, прямий перебір неможливий за прийнятний час, то згідно із загальною схемою алгоритму W, вводяться додаткові обмеження на значення функціоналу і застосовується оператор Ω.

На функціонал вводиться додаткове обмеження:

$$F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}, \quad 0 \le \beta \le 1, \tag{3}$$

де $F^{*(\gamma)} \in \left[\min\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x}),\ \max\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x})\right]$ – нечіткий параметр з функцією належності $\nu\left(F^{*(\gamma)}\right)$. Позначимо множину варіантів, які задовольняють (3) при обраному значенні $F^{*(\gamma)}$, через $D_F^\gamma = \left\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}\right\}$ і множину допустимих варіантів у множині D_F^γ через $D_\gamma = D \cap D_F^\gamma$.

Позначимо через $\wp = \cup P$ скінченне сімейство множин підваріантів $P \subseteq P(X)$, для якої справедливо, що $R(\wp) = X$, $\overline{R}(\wp) = D$. Позначимо через $P\left(X^{(s_0)}\right)$ множину всіх підваріантів. Сформуємо сімейство $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$ множин підваріантів $P^\gamma \subseteq P\left(X^{(s_0)}\right)$ таке, що $R\left(\wp_\gamma\right) = X^{(s_0)}$ і $\overline{R}\left(\wp_\gamma\right) = D_F^\gamma$. Величина ΔF_p^γ називається допуском для множини підваріантів $P^\gamma \subseteq \wp_\gamma$ відносно множини D_F^γ по функціоналу, якщо з того, що $F(p) \overset{\beta}{\prec} \Delta F_p^\gamma$ випливає, що допустима родова множина $\overline{R}^\gamma(p) = R(p) \cap D_\gamma$ підваріанту p порожня.

Вилучення варіантів з множини $X^{(s_0)}$ за обмеженнями здійснюється шляхом відсіву за допомогою допусків тих підваріантів $p \in P^\gamma$, котрі не входять до максимальних варіантів.

Позначимо систему допусків для сімейства $\wp_\gamma$ через $Q\left(\wp_\gamma\right) = \cup\left\{\Delta F_p^\gamma\right\}$. Система допусків обчислюється за допомогою оператора апроксимації Ω, визначеного на сімействах $\wp_\gamma$ и $\wp$. В результаті отримаємо повну систему допусків $Q\left(\wp, \wp_\gamma\right) = Q(\wp) \cup Q\left(\wp_\gamma\right)$. Тоді схема роботи "нечіткого" оператора Ω буде такою:

Крок 0. Для заданого значення $F^{*(\gamma)}$ обчислюємо для сімейств $\wp^{(0)} = \wp$ и $\wp_\gamma^{(0)} = \wp_\gamma$ повну систему допусків $Q\left(\wp^{(0)}, \wp_\gamma^{(0)}\right)$, де $\wp = \cup P$, $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$.

Крок s. На множинах $P^{(s-1)}$ и $P^{\gamma(s-1)}$, обраних із сімейств $\wp^{(s-1)}$ и $\wp^{(s)}$ при заданій повній системі допусків $Q\left(\wp^{(s-1)}, \wp_\gamma^{(s-1)}\right)$, застосовується оператор відсіву E. В результаті отримуються нові сімейства $\wp^{(s)} = \cup P^{(s)}$, $\wp^{(s)} \subseteq \wp^{(s-1)}$ и $\wp_\gamma^{(s)} = \cup P^{\gamma(s)}$, $\wp_\gamma^{(s)} \subseteq \wp_\gamma^{(s-1)}$ і множина $X_\gamma^{(s)}$ така, що $X_\gamma^{(s)} \subseteq X_\gamma^{(s-1)} \subseteq X$. Для сімейств $\wp^{(s)}$ та $\wp_\gamma^{(s)}$ обчислюється повна система допусків $Q\left(\wp^{(s)}, \wp_\gamma^{(s)}\right)$. При обчисленні допусків пропонується використовувати нечіткі множини *α*-рівнів [13] і зміщення вправо нижньої границі інтервалу допуску. Якщо

$Q\left(\wp^{(s-1)},\wp_{\gamma}^{(s-1)}\right)=Q\left(\wp^{(s)},\wp_{\gamma}^{(s)}\right)$, то обчислення закінчуються, при цьому $X_{\gamma}^{(s_0)}=X_{\gamma}^{(s)}$, інакше – до кроку s+1.

Множина варіантів $X_{\gamma}^{(s_0)}$, котрі створюються в результаті застосування оператора Ω, є апроксимацією множин допустимих варіантів $D_{\gamma}\subseteq X_{\gamma}^{(s_0)}$, серед яких вибирається максимальний варіант $\mathbf{x}^*$, котрий перевіряється на оптимальність. У випадку, коли він є допустимим, але не оптимальним, то він обирається в якості наближеного. Якщо він є недопустимим, то на сімействах $\wp^{(s_0)}$ і $\wp_{\gamma}^{(s_0)}$ застосовується оператор конструювання κ, котрий будує множину $\tilde{\wp}=\wp\cup\wp_{\gamma}$ і формує агреговану задачу A_{γ}: максимізувати $F\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots p_r\right)$ при $g_i\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_r\right)\le g_i^*,\ i=\overline{1,m}$, $\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_r\right)\in\tilde{\wp},\ r\le n,\ \cup p_j=\mathbf{x}\in X_{\gamma}^{(s_0)}$.

Якщо для максимального варіанту $\mathbf{x}=\cup p_j$ не справджується критерій оптимальності, то розв'язується задача A_{γ} і на оптимальність перевіряється отриманий розв'язок [7].

1. Михалевич В.С., Шор Н.З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Труды IV Всесоюз.мат.съезда, М.,1961. – С.91. 2. Михалевич В.С., Шор Н.З. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных решений. – Киев: Наукова думка, 1977. – 178с. 3. Беллман Р. Динамическое программирование. – Москва: Иностранная литература.,1960. – 400 с. 4. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова думка, 1984. – 216 с. 5. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика, 1978, №4. – С. 99-105. 6. Сергиенко И.В., Волошин А.Ф. и др. Нахождение субоптимальных решений в дискретных оптимизационных задачах методом ПАВ // Вычислительные аспекты в пакетах прикладных программ. – Киев, ИК АН УССР, 1980. – С.25-35. 7. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Доклады АН СССР, 1987, том 293, №3. – С.549-553. 8. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем. – Киев: Наукова думка, 1993. – 312 с. 9. Методы анализа статических балансовых эколого-экономических моделей большой размерности // Издательство "Педагогика", Научные записки, том 7, Киев, 2004. – С.43-55. (укр. яз.). 10. Волошин А., Кудин В., Богаенко В. Анализ малых возмущений линейных экономико-математических моделей // International Book Series "Information Science&Computing", N10, 2009. – P.67-73. 11. Гаращенко Ф.Г., Волошин А.Ф. и др. Развитие методов и технологий моделирования и оптимизации сложных систем: Монография. – Киев: Издательство "Сталь", 2009. – 668 с. 12. Волкович В.Л., Волошин А.Ф и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова думка, 1984. – 216 с. 13 Волошин А., Маляр Н., Швалагин О. Нечеткий алгоритм последовательного анализа вариантов // Information science & computing, Number 15. Sofia, Bulgaria, 2009. – P.189-194. 14. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 208 с. 15. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – К.: Издательский Дом "Слово", 2008. – 344 с.

Надійшла до редколегії 08.07.10

УДК 517.929

І. Джалладова, канд. фіз.-мат. наук

ОПТИМІЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядаються системи нелінійних диференціальних і різницевих рівнянь, праві частини яких залежать від напівмарковського процесу. За допомогою функцій Ляпунова, отримано матричні диференціальні і різницеві рівняння типу Ріккати, інтегрування яких дозволяє здійснити синтез оптимального керування.

We consider the system of non-linear differential and difference equation, witch right part depending from Semi-Markov process. With help Lyapunov functions we receive matrix differential equations Riccaty type. Integrating this equation we made the syntheses optimal control.

Вступ

В [1, 2] розглядається стохастичні динамічні системі, яка визначається системою лінійних різницевих рівнянь з напівмарковськими переключеннями на ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,F), F=\left\{\Im_t,\forall t\ge 0\ \right\}\subset\Im$ [3].

Простір розв'язків таких систем часто інтерпретують як фазовий простір станів випадкового середовища, вимірні підмножини якого є сукупністю станів цього середовища. В якості фазового простору станів розглядають повний метричний сепарабельний простір, як правило евклидов простір або скінчену множину з σ-алгеброю всіх підмножин X. При певних умовах в задачах такого типу, кажуть про розв'язки в сенсі сильного розв'язку задачі Коші [4]. Наша задача – отримання надійного і простого методу дослідження оптимізації розв'язків такого класу систем, а також його обґрунтування шляхом застосування функцій Ляпунова для дослідження стійкості розв'язків системи [5]. Ми розглядаємо конкретні нелінійні системи диференціальних та різницевих рівнянь з параметрами, які залежать від напівмарковських процесів, і ставимо задачу отримання умов для синтезу оптимального керування.

1. Оптимізація розв'язків системи нелінійних різницевих рівнянь з напівмарковською правою частиною

Нехай на ймовірносному просторі $(\Omega,\Im,\mathrm{P})$ задано систему нелінійних різницевих рівнянь

$$X_{k+1}=F\left(k,X,U_k,\xi_k\right)\ \ ,F\left(k,0,0,\xi_k\right)\equiv 0\left(k=0,1,2...\right) \quad (1)$$

з початковою умовою $\mathrm{X}(0)=x_0\in E_m$, де ξ_n – напівмарковський ланцюг, який набуває значення $\theta_1,...,\theta_n$ з інтенсивностями $q_{ls}\left(k\right)\left(l,s=1....n;k=1,2...\right)$, що задовольняють умови [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}q_{js}\left(k\right)=1,\ \ q_{js}\left(k\right)\ge 0\ \ \left(j,s=1,2,...,n;\ k=1,2,...\right).$$

$$q_s\left(k\right)=\sum_{j=1}^{n}q_{js}\left(k\right),\ \ \sum_{s=1}^{\infty}q_s\left(k\right)=1.$$

$$\psi_s(k)=\sum_{j=k+1}^{\infty}q_s(j),\quad \psi_s(0)=1\ \ (s=1,\ ...,\ n;\ k=0,1,2,...),$$

Права частина системи (1) задовольняє умови Ліпшиця:

$$\left\|F(k,X_1,U_1,\xi_k)-F(k,X_2,U_2,\xi_k)\right\|\le\left\|X_1-X_2\right\|+\rho\left\|U_1-U_2\right\|.$$

Нехай функції в правій частині системи рівнянь (1) є напівмарковськими. Тоді система (1) визначає супроводжуючи системи (в кожному із станів напівмарковського процесу існують n детермінованих систем керування)

$$X_{k+1}=F_s(k,X,U_k,\xi_k),F_s(k,0,0,0)\equiv 0\,(s=1,...,n),$$

таких, що при $k_j\le k<k_{j+1},\xi_n=\theta_s$ система рівнянь (1) набуває вигляду

$$X_{k+1}=F_s(k-k_j,X_k,U_k).$$

Означення. Функціонал

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle w(k,X_k,U_k,\xi_n)\right\rangle, \qquad (2)$$

де функція $w(k,x,U,\xi_k)$ напівмарковська, додатно визначена і задовольняє умови

$$w(k,0,0,\xi_k)\equiv 0,\qquad w(k,X,U,\xi)>0\qquad \text{при } \|X\|+\|U\|>0$$

називатимемо критерієм якості керування U.

Вектор

$$U_k=S(k,X_k,\xi_n)\ (k=0,1,2...), \qquad (3)$$

де функція $S(k,X_k,\xi_n)$ є напівмарковською, на якому досягає мінімуму критерій якості (2) називатимемо оптимальним керуванням.

Теорема 1. Для системи (1) оптимальне керування (3), визначається із системи рівнянь

$$\min_{U_k^{(s)}}\Bigg(z_s\left(k+1,F_s\left(k,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)-z_s\left(k,X_k^{(s)}\right)+$$
$$+\Psi_s(k)w_s\left(k,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k+1)z_l\left(0,F_s\left(0,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)\Bigg)\qquad (s=1,...,n). \qquad (4)$$

$$v_s(x)\equiv z_s(0,x)\ (s=1,...,n).$$

Доведення. Введемо позначення:

$$H(k,X_k,\xi_n)\equiv F(k,X_k,S_k(k,X_k,\xi_k),\xi_n);$$

$$g(k,X_k,\xi_n)\equiv w(n,X_k,S_k(k,X_k,\xi_k),\xi_k).$$

Тоді система рівнянь (1) перетворюється до системи різницевих рівнянь з напівмарковською правою частиною:

$$X_{n+1}=H(k,X_n,\xi_n)\ (k=0,1,...), \qquad (5)$$

для якої шукається значення функціоналу

$$\mathrm{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle g\left\langle k,X_k,\xi_n\right\rangle\right\rangle \qquad (6)$$

Вводимо основні функції Ляпунова за формулою

$$v_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle g(k,X_k,\xi_n)\mid X_0=x,\xi_n=\theta_s\right\rangle\qquad (s=1,...,n).$$

які задовольняють систему функціональних рівнянь [1]:

$$v_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_s(k)g_s(k,X_k(k,x))+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)v_l(N_s(k,x))\ (s=1,...,n) \qquad (7)$$

де $X_k=N_s(k,X_0)$ – розв'язки систем різницевих рівнянь:

$$X_{k+1}=H_s(k,X_k)\ (s=1,...,n).$$

Якщо функції $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ відомі, то значення функціоналу (6) може бути знайдено за формулою

$$R=\int_{E_m}\sum_{s=1}^{n}v_s(x)f_s(0,x)dx,dx=dx_1...dx_m. \qquad (8)$$

Оскільки $f_s(0,x)\ge 0\ (s=1,...,n)$, то для мінімізації функціоналу (6) матимемо задачі мінімізації значень $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ при кожному фіксованому значенні x. Значення функцій $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ не залежать від початкових значень $f_s(0,x)\ge 0\ (s=1,...,n)$ для випадкового розв'язку системи (1). Отже, вважаючи

$$f_s(0,x)\ge 0,f_j(0,x)\equiv 0\ (j\ne s;\ j=1,...,n)$$

перетворюємо (8) до вигляду:

$$R=\int_{E_m}v_s(x)f(0,x)dx.$$

Нехай обрано закон керування (3) такий, що нульовий розв'язок системи (1), (5) буде L_2-стійким тобто існують функції Ляпунова $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ (7). Значення функцій $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ залежить від вибору вектор-функцій $U_k=S_s(k,x)\ (s=1,...,n)$. Якщо здійснено синтез оптимального керування (3), то існує мінімальне при кожному x значення функцій $v_s(x)$ і це мінімальне значення досягається при одному виборі оптимального керування

$$R\ (x)=\min_{U_s(k,X),k\ge 0}v_s(x)=$$
$$\min_{U_s(k,X),k\ge 0}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{\Psi}\ (k)g_s(k,N_s(k,x))+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)V_l(N_s(k,x))\ (s=1,...,n). \qquad (9)$$

Вважатимемо для спрощення запису $q_{ls}(0)=0$ $(l,s=1,...,n)$. При цьому система рівнянь (9) набуває вигляду:

$$v_s(x)=\min_{U_s(k,X),k\ge 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(k)g_s(k,N_s(k,x))+\sum_{l=1}^{\infty}q_{ls}(k)V_l(N_s(k,x))\right)(s=1,...,n). \quad (10)$$

Позначимо індексом s розв'язок системи рівнянь:

$$X_{k+1}^{(s)}=H_s\left(k,X_k^{(s)}\right)(s=1,...,n;k=0,1,2,...),$$

і вважатимемо

$$U_k^{(s)}=S_s\left(k,X_k^{(s)}\right)(s=1,...,n;k=0,1,2,...).$$

Застосовуючи ідеї Р. Беллмана [7] введемо допоміжні функції:

$$v_s\left(k,X_k^{(s)}\right)=\min_{U_s(j,X),j\ge k}\sum_{j=k}^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(j)g_s\left(k,X_k^{(s)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}q_{ls}(j)v_l\left(X_j^{(s)}\right)\right)(s=1,...,n;k=0,1,2,...). \quad (11)$$

Тоді справедливі рівності $v_s(x)=v_s(0,x)$ $(s=1,...,n)$.

Відокремлюючи один доданок в сумі (11) отримаємо рівняння типу Белмана:

$$v_s\left(k,X_k^{(s)}\right)=\min_{U_k^{(s)}}\left(\mathbf{\Psi}_s(k)w_s\left(k,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)v_l\left(X_k^{(s)}\right)+v_s\left(k+1,X_{k+1}^{(s)}\right)(s=1,...,n),$$

які перетворюються до вигляду

$$\min_{U_k^{(s)}}\left(v_s\left(k+1,F_s\left(k,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)\right)-v_s\left(k,X_k^{(s)}\right)+\mathbf{\Psi}_s(k)w_s\left(k,X_s^{(s)},U_s^{(s)}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)v_s\left(0,X_k^{(s)}\right)=0\ (s=1,...,n). \quad (12)$$

Система рівнянь (12) визначає необхідні умови оптимальності і придатна для пошуку оптимального рівняння $U_k^{(k)}$. Систему рівнянь (10) можна записати у вигляді:

$$v_s(x)=\min_{U_s(k,X),k\ge 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(k)g_s(k,N_s(k,x))+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}q_{ls}(k+1)v_l(N_s(k+1,x))\right)(s=1,...,n). \quad (13)$$

Вводимо допоміжні функції:

$$z_s\left(k,X_k^{(s)}\right)=\min_{U_s(k,X),j\ge k}\sum_{j=k}^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(j)g_s\left(j,X_j^{(s)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}q_{ls}(j+1)v_l\left(X_{j+1}^{(s)}\right)\right)(s=1,...,n;k=0,1,2,...). \quad (14)$$

Виокремлюючи один доданок в сумі (14), дістанемо систему рівнянь:

$$z_s\left(k,X_k^{(s)}\right)=\min_{U_k^{(s)}}\left(\mathbf{\Psi}_s(k)w_s\left(k,X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}q_{ls}(k+1)v_l\left(X_{k+1}^{(s)}\right)+z_s\left(k+1,X_{k+1}^{(s)}\right)\right)(s=1,...,n),$$

яку можна записати у вигляді (4).

Система рівнянь (4) рівносильна системі рівнянь (13) і визначає необхідні умови оптимальності. Відзначимо, що

$$v_s(x)\equiv z_s(0,x)\ (s=1,...,n). \blacksquare$$

Наслідок. Нехай ξ_n – марковський ланцюг, системи рівнянь (1) є автономними і мають вигляд

$$X_{k+1}=F_s(X_k,U_k),F_s(0,0)=0\ (s=1,...,n),$$

а функція $w(k,x,U,\xi)$ не залежить явно від часу k. Критерій якості задається функціоналом

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle w(X_k,U_k,\xi_n)\right\rangle.$$

Тоді оптимальні керування виду $U_k=S_s(X_k)$ $(s=1...n;k=0,1,2...)$, задовольняють систему рівнянь

$$\min_{U_k^{(s)}}\left(z_s\left(k+1,F_s\left(X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)-z_s\left(k,X_k^{(s)}\right)+\right.$$
$$\left.+\pi_{ss}^k w_s\left(X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)+\sum_{\substack{l=1\\l\ne s}}^{n}\pi_{ls}\pi_{ss}^k\left(0,F_s\left(X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)\right). \quad (15)$$

Зауваження. Заміною змінної

$$z_s(k,x)=\pi_{ss}^k v_s(x)\ (s=1,...,n;k=0,1,2...),$$

систему рівнянь (15) зводимо до системи рівнянь типу Беллмана:

$$\min_{U_k^{(s)}}\sum_{l=1}^{n}\pi_{ls}v_l\left(F_s\left(X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)\right)-v_s\left(X_k^{(s)}\right)+w_s\left(X_k^{(s)},U_k^{(s)}\right)=0\ (s=1,..,n). \quad (16)$$

Оптимальне керування $U_k^{(s)}$ залежить тільки від $X_k^{(s)}$ і не залежить явно від часу k. Система рівнянь (16) визначає необхідні умови оптимальності розв'язку системи рівнянь (1) у випадку, коли випадковий процес ξ_n є марковським.

2. Необхідні умови оптимальності розв'язків системи нелінійних диференціальних рівнянь

На ймовірносному базисі $(\Omega,\Im,\mathrm{P},\mathbb{F}\equiv\{\mathbf{F_t},t\ge 0\})$ розглядається система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX(t)}{dt}=F(t,X(t),U(t),\xi(t)), \quad (17)$$

з початковою умовою $\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0$, де ξ_k – напівмарковський випадковий процес, який набуває значення $\theta_1,...,\theta_n$. Нехай ξ_k має стрибки в моменти

$t_j\left(j=0,1,2,...\right)$, $t_0=0<t_1<t_2...$. Припускаємо, що права частина системи (17) є напівмарковською, тобто існують n детермінованих систем рівнянь:

$$\frac{dX(t)}{dt}=F\left(t,X(t),U(t),\xi(t)\right),\ F_s(t,0,0)\equiv 0\ \left(s=1,...,n\right),$$

таких, що при $t_j\le t<t_{j+1},\ \xi(t)=\theta_s$ система рівнянь (17) набуває вигляду:

$$\frac{dX(t)}{dt}=F_s\left(t-t_j,X(t),U(t)\right).$$

Для системи (17) шукається оптимальне керування:

$$U(t)=S\left(t,X(t),\xi(t)\right),S(t,0,\xi)=0, \tag{18}$$

за умови мінімуму функціоналу:

$$V=\int_0^{\infty}\left\langle w\left(t,X(t),U(t),\xi(t)\right)\right\rangle dt. \tag{19}$$

Теорема 2. Нехай вектор-функція $S\left(t,x,\xi(t)\right)$ і функція $w\left(t,x,U,\xi(t)\right)$ є напівмарковськими тобто для n детермінованих вектор-функцій $U=S_s(t,x)\ (s=1,...,n)$ при $t_j\le t<t_{j+1},\ \xi(t)=\theta_s$ виконано рівності:

$$S\left(t,X(t),\xi(t)\right)=S_s\left(t-t_j,X(t)\right).$$

n детермінованих додатно визначених функцій $w_s(t,x,U)\ (s=1,...,n)$ таких, що

$$w_s(t,x,U)\ge 0,w_s(t,0,0)=0\ (s=1,...,n).$$

при $t_j\le t<t_{j+1},\ \xi(t)=\theta_s$ виконується рівність

$$w\left(t,X(t),U(t),\xi(t)\right)=w_s\left(t-t_j,X(t),U(t)\right).$$

Вектор-функції $w_s(t,x,U),S_s(t,x)\ (s=1,...,n)$ неперервні відносно t, задовольняють умови Ліпшиця відносно x,U, функції $w_s(t,x,U)$ – неперервні відносно t та двічі диференційовані відносно x,U і обмежені зверху. Для системи рівняння (17) існує оптимальне керування вигляду (18) яке мінімізує значення функціоналу (19).

Тоді оптимальне керування $U_s=S_s(t,x)\ (s=1,...,n)$, визначається із системи рівнянь

$$\min_U\left\{\frac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}+\frac{Dv_s(t,x)}{Dx}F_s(t,x,U_s)+\right.$$
$$\left.+\mathbf{\Psi}_s(t)w_s(t,x,U_s)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(t)v_l(0,x)\right\}=0\ (s=1,...,n),$$

або

$$\begin{gathered}\min_{U_s}\left\{\frac{\partial z_s(t,x)}{\partial t}+\frac{Dz_s(t,x)}{Dx}F_s(t,x,U_s)+w_s(t,x,U_s)+\right.\\ \left.+\sum_{l=1}^{n}\frac{q_{ls}(t)}{\mathbf{\Psi}_s(t)}\left(z_l(0,x)-z_s(t;x)\right)\right\}=0\ (s=1,...,n).\end{gathered} \tag{20}$$

де

$$v_s(t,x)=\mathbf{\Psi}_s(t)z_s(t,x);$$
$$v_s(0,x)=z_s(t,x)=v_s(x)\ (s=1,...,n).$$

Доведення. Введемо позначення:

$$H\left(t,X(t),\xi(t)\right)\equiv F\left(t,X(t),S\left(t,X(t),\xi(t)\right),\xi(t)\right);$$
$$g\left(t,X(t),\xi(t)\right)\equiv F\left(t,X(t),S\left(t,X(t),\xi(t)\right),\xi(t)\right).$$

Для знаходження функціонала

$$V=\int_0^{\infty}\left\langle g\left(t,X(t),\xi(t)\right)\right\rangle dt,g\left(t,0,\xi(t)\right)\equiv 0 \tag{21}$$

де $X(t)$ –розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt}=H\left(t,X(t),\xi(t)\right),\ H\left(t,0,\xi(t)\right)\equiv 0,$$

введемо основні функції Ляпунова:

$$v_s(x)=\int_0^{\infty}\left\langle g\left(t,X(t),\xi(t)\right)\mid\xi(0)=\theta_k,X(0)=x\right\rangle dt\ (s=1,...,n),$$

які дозволяють знайти функціонал (21) за формулою

$$V=\int_{E_m}\sum_{k=1}^{n}v_k(x)f_k(0,x)dx,dx\equiv dx_1...dx_m.$$

Нехай для системи рівнянь (17) існує оптимальне керування вигляду (18), яке мінімізує значення функціоналу (19) незалежно від початкових значень $X(0),\xi(0)$. При цьому мінімізуються значення функцій $v_k(x)\ (k=1,...,n)$ при кожному X, що слідує з довільності вибору функцій $f_k(0,x)(k=1,...,n)$. Для основних функцій Ляпунова $v_s(x)\ (s=1,...,n)$ матимемо

$$v_s(x)=\min_{s_s(t,X)t\ge 0}v_s(t,x)\ (s=1,...,n).$$

В параграфі 4.4 знайдено систему функціональних рівнянь:

$$v_s(x)=\min_{U_s(t),t\ge 0}\int_0^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(t)w_s\left(t,X_s(t),U_s(t)\right)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(t)v_l\left(X_s(t)\right)\right)dt\ (s=1,...,n),$$

де $X_s(t)$ –розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX_s(t)}{dt}=F_s\left(t,X_s(t),U_s(t)\right)\ (s=1,...,n).$$

Для пошуку оптимального керування $U_s(t)$ використаємо ідею Р. Беллмана [7].

Вводимо допоміжні функції

$$v_s(t,x)=\min_{U_s(\tau),\tau\ge t}\int_t^{\infty}\left(\mathbf{\Psi}_s(\tau)w_s\left(\tau,X_s(\tau),U_s(\tau)\right)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(\tau)v_l\left(X_s(\tau)\right)\right)dt\ (s=1,...,n).$$

Наочно, що виконується рівність

$$v_s(0,x)\equiv v_s(x)\ \ (s=1,...,n).$$

Тоді матимемо систему рівнянь типу Беллмана для пошуку функцій $v_s(t,x)\ (s=1,...,n)$ і вектор-функцій

$U_s = S_s(t,x)\ (s=1,...,n)$ з необхідними умовами оптимальності у вигляді (18).

Наслідок. Нехай напівмарковський процес $\xi(t)$ в системі рівнянь (17) перетворюється в марковський. Тоді система рівнянь (20) набуває вигляду

$$\min_{U_s}\left\{\frac{\partial z_s(t,x)}{\partial t}+\frac{Dz_s(t,x)}{Dx}F_s(x,U_s)+w_s(x,U_s)+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq 1}}^{n}\alpha_{ls}\left(z_l(0,x)-z_s(t;x)\right)\right\}=0\ (s=1,...,n). \quad (22)$$

Розв'язок системи рівнянь Беллмана (22) можна шукати у вигляді

$$z_s(t,x)=z_s(0,x)\equiv z_s(x)\ (s=1,...,n).$$

Тоді система рівнянь (22) перетворюється до вигляду

$$\min_{U_s}\left\{\frac{Dz_s(x)}{Dt}F_s(x,U_s)+w_s(x,U_s)+\sum_{l=1}^{n}\alpha_{ls}z_l(x)=0\right\}(s=1,...,n).$$

Зауваження. Важливо відмітити, що навіть для стаціонарної системи рівнянь зі стаціонарним функціоналом оптимальне керування буде залежати від часу t. Лише у випадках, ергодичності марковського процесу можливе існування оптимального керування, яке не залежить явно від часу t.

Наслідок. Нехай розв'язки системи рівнянь (17) зазнають випадкових перетворень, що відбуваються одночасно зі стрибками випадкового процесу $\xi(t)$ тобто в момент стрибка t_j, $\xi(t_j-0)=\theta_s, \xi(t_j+0)=\theta_l$, матимемо

$$X(t_j+0)=\Phi_{ls}\left(X(t_j-0)\right)(l,s=1,...,n),$$

де $\Phi_{ls}(x)$ –вектор-функції, які задовольняють умовам Ліпшиця, $\Phi_{ls}(0)=0\ \ (l,s=1,...,n)$.

Тоді необхідні умови оптимальності (22), які дозволяють здійснити синтез оптимального рівняння, набувають вигляду:

$$\min_{U_s}\left\{\frac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}+\frac{Dv_s(t,x)}{Dx}F_s(t,x,U_s)+\boldsymbol{\Psi}_s(t)w_s(t,x,U_s)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(t)v_l\left(0,\Phi_{ls}(x)\right)\right\}=0\ (s=1,...,n).$$

Якщо $\xi(t)$–марковський скінченнозначний випадковий процес, який визначається системою рівнянь

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=-\lambda p_1(t)+\lambda p_2(t),\ \frac{dp_2(t)}{dt}=\lambda p_1(t)-\lambda p_2(t),\ \lambda>0,$$

то необхідні умови оптимальності (22) набувають вигляду:

$$\min_{U_s}\left\{\frac{\partial z_s(x)}{Dx}F_s(x,U_s)+w_s(x,U_s)+\sum_{l=1}^{n}\alpha_{ls}z_l\left(\Phi_{ls}(x)\right)=0\right\}(s=1,...,n),$$

де вважатимемо $\Phi_{ss}(x)\equiv x \qquad (s=1,...,n)$.

1. Валеев К.Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами : монография / К.Г. Валеев, О.Л. Карелова, В.И. Горелов. – М. : Из-во РУДН, 1996. – 258 с. 2. Валєєв К.Г. Оптимізація випадкових процесів / К.Г.Валєєв, І.А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2006. – 310 с. 3. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – К. : Наук. думка, 1989. – 210 с. 4. Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 496 с. 5. Джалладова І.А. Оптимізація стохастичних систем / И.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2005. – 284 с. 6. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М. : Сов. радио, 1977. – 488 с. 7. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

Надійшла до редколегії 25.06.10

УДК 519.21

С. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
О. Орлов, студ.

ОБЧИСЛЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ЧАСУ ВИКОНАННЯ РОБІТ В СТОХАСТИЧНІЙ ЗАДАЧІ ДЖОНСОНА

Для тандемної системи, яка складається з двох машин, а часи виконання робіт мають показниковий розподіл, розроблений алгоритм обчислення часу проходження робіт.

For two storge open shop system with exponentially olistributed jobs the makespan calculation algorithm was created.

Розглянемо тандемну систему, яка містить дві машини та n однакових робіт. Припускається, що кожна робота має виконатись спочатку на першій, а потім на другій машині, часи виконання робіт є незалежними показниково розподіленими випадковими величинами з параметрами λ_i, μ_i відповідно. Нехай треба знайти порядок проходження робіт, при якому математичне сподівання інтервалу часу T від початку виконання першої роботи на першій машині до закічення останньої роботи на другій машині було б мінімальним. Розв'язок даної задачі носить назву правило Тальвара (див. наприклад, [1], [2]) і полягає в слідуючому. Порядок проходження робіт (який називається розкладом) повинен бути однаковим на обох машинах та визначатись спадним порядком величин $\lambda_i - \mu_i$.При цьому має місце навіть більш сильний результат, а саме: для вказаного рокладу значення T набуває стохастичного мінімуму. Однак, означений результат не з'ясовує, як обчислити M(T) і наскільки оптимальний розклад є кращим за інші. Метою даної статті є відповідь саме на це запитання.

Спочатку припустимо, що всі λ_i рівні між собою і рівні λ та всі μ_i рівні між собою і рівні μ. Стан системи будемо описувати вектором (k,m), де k- кількість робіт, ще не виконаних на 1-й машині, m – кількість робіт, що надійшли з 1-ї машини на 2-гу та ще не виконались на ній (враховуючи й роботу, яка виконується). Тоді в початковий момент часу система знаходиться в стані (n, 0). Розглянемо вкладений ланцюг Маркова, який побудовано по моментах $\tau_k + 0$ закінчення виконання робіт на обох машинах. Розглянемо ймовірності переходів між станами. Зі стану (n,0) система переходить в (n-1,1), а зі стану (m,0) – в (m-1,1) з ймовірністю 1. Зі стану (i,j), j≠0 можливі лише переходи в (i-1,j+1) або (i,j-1) з ймовірностями $\lambda/(\lambda+\mu)$ та $\mu/(\lambda+\mu)$ відповідно. Будемо вважати множину станів (0,m), m=1,n термінальною множиною, в якій припиняється спостереження процесу проходження робіт. Можна також виключити стани (k,0) з розгляду, поклавши при цьому (i,j)→(i-1,j+1) або (i,j-1) з ймов. $\lambda/(\lambda+\mu)$ та $\mu/(\lambda+\mu)$ відповідно при j≥2 та (i,1)→(i-1,2) або (i-1,1) з ймов. $\lambda/(\lambda+\mu)$ та $\mu/(\lambda+\mu)$ відповідно. Множина станів системи та можливі переходи між ними у вихідному випадку та з виключеною множиною станів (k, 0) представлені на рис. 1, 2 відповідно.

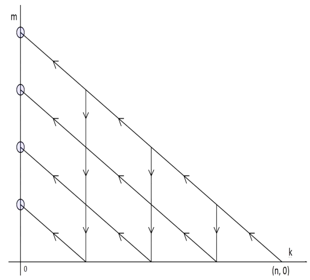


Рис. 1

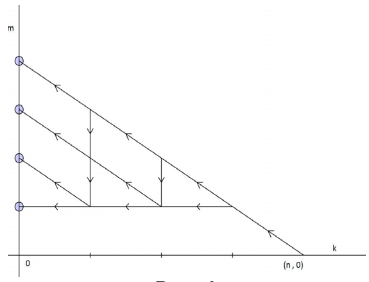


Рис. 2

Розіб'ємо інтервал T на два підінтервали: T_1 – час виконання всіх робіт на 1-й машині, T_2 – інтервал від моменту закінчення T_1 до закінчення виконання останньої роботи на 2-й машині. За побудовою $T=T_1+T_2$, отже $M(T)=M(T_1)+M(T_2)$, де $M(T_1)=n/\lambda$. Розглянемо процедуру обчислення $M(T_2)$ за допомогою введеного вище ланцюга Маркова. Відлік інтервалу T_2 починається з моменту попадання в один з термінальних станів (0,m). На множині станів системи (i,j) введемо функцію $\varphi(i,j) = M\left(T_2 \middle| (i,j)\right)$ – матсподівання тривалості інтервалу T_2 за умови, що система перебуває у стані (i,j), тоді $\varphi(0,j) = j/\mu$ та $M(T_2) = \varphi(1,n-1)$. Щоб обчислити $\varphi(1,n-1)$, треба попередньо обчислити значення функції φ у всіх інших точках. Процедура обчислення $\varphi(i,j)$ відбувається по діаграмі "зліва-направо, знизу-вверх", використовуючи формули

$$\varphi(i,1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(i-1,1) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(i-1,2)$$

$$\varphi(i,j) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(i,j-1) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(i-1,j+1), j \geq 2 \quad (1)$$

Покладемо n=3, λ=μ=1 та проведемо обчислення за формулами (1) "вручну".

$$\varphi(0,1)=1,\ \varphi(0,2)=2,\ \varphi(0,3)=3,\ \varphi(1,1)=\frac{1}{2}\varphi(0,1)+\frac{1}{2}\varphi(0,2)=\frac{3}{2}$$

$$\varphi(1,2)=\frac{1}{2}\varphi(0,3)+\frac{1}{2}\varphi(1,1)=\frac{9}{4},\ \varphi(2,1)=\frac{1}{2}\varphi(1,1)+\frac{1}{2}\varphi(1,2)=\frac{15}{8}$$

$$M(T_2)=\varphi(3,0)=\varphi(2,1)=\frac{15}{8},\ M(T_1)=\frac{3}{1}=3$$

$$M(T)=M(T_1)+M(T_2)=\frac{39}{8}.$$

Рекурентні обчислення за формулою (1) можуть бути запрограмовані. Результати розрахунків M(T) для μ=1 та деяких значень λ та n наведено в таблиці 1:

Таблиця 1

n\λ	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
3	31.106	16.218	7.519	4.875	3.759	3.244	3.111
5	51.111	26.244	11.721	7.461	5.860	5.249	5.111
10	101.111	51.250	21.907	13.524	10.953	10.250	10.111

Розглянемо випадок, коли λ_i, μ_i можуть набувати різних значень. Зафіксуємо розклад та перенумеруємо роботи так, щоб λ_i, μ_i були параметрами роботи, що виконується i-ю. Аналогічно попередньому (простому) випадку стан системи будемо описувати вектором (k,m), який має такий самий зміст. Це означає, що на 1-й/2-й машині знаходяться роботи (n-k+1,…,n) та (n-k-m+1,…,n-k) відповідно, а інтенсивності виконання робіт на 1-й/2-й машині в стані (k,m) дорівнюють λ_{n-k+1} та $\mu_{n-k-m+1}$ відповідно, $M(T_1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$, $\varphi(0,j)=\sum_{k=n-j+1}^{n}\frac{1}{\mu_k}$, а формули (1) набувають вигляду

$$\varphi(i,1)=\frac{\mu_{n-i}}{\lambda_{n-i+1}+\mu_{n-i}}\varphi(i-1,1)+\frac{\lambda_{n-i+1}}{\lambda_{n-i+1}+\mu_{n-i}}\varphi(i-1,2)$$
$$\varphi(i,j)=\frac{\mu_{n-i-j+1}}{\lambda_{n-i+1}+\mu_{n-i-j+1}}\varphi(i,j-1)+\frac{\lambda_{n-i+1}}{\lambda_{n-i+1}+\mu_{n-i-j+1}}\varphi(i-1,j+1),\ j\ge 2 \quad (2)$$

На підставі формул (2) було складено програму для обчислення M(T). Розглянемо результати обчислення на наступному прикладі. Нехай n=10, λ_i=i, μ_i=11-i. Тоді, згідно правила Тальвара, даний розклад є найгіршим, а зворотній до нього – найкращим (у сенсі, що M(T) набуває найбільшого/найменшого значення відповідно).

Згідно розрахунків, для найгіршого/найкращого випадків маємо відповідно:

$M(T_1)=2.929, M(T_2)=2.026, M(T)=4.955$ та

$M(T_1)=2.929, M(T_2)=0.773, M(T)=3.702$.

Для всіх інших розкладів, M(T_2) та M(T) будуть мати проміжні значення, а M(T_1) для всіх розкладів буде однаковим, оскільки зміна розкладу лише міняє місцями доданки $1/\lambda_i$, які входять до суми в формулі T_1.

Слід відзначити, що формула у явному вигляді для обчислення M(T) як функція від параметрів λ_i та μ_i є дуже громіздким дрібно-раціональним виразом навіть для невеликих n. Такі вирази для n=2 та 3 було отримано в [3]. Також обчислення D(T) виявляється складною проблемою, оскільки T_1 та T_2 є залежними випадковими величинами.

Розглянемо процедуру обчислення M(T) у випадку, коли тривалості робіт на першій машині є показниково розподіленими величинами з параметром λ, а на другій машині мають довільний розподіл з заданою функцією розподілу G(x). Процес проходження робіт на другій машині еквівалентний процесу обслуговування вимог в (M/G/1/∞) системі, в яку може надійти лише n вимог, після чого вхідний потік "закривається". Розглянемо вкладений ланцюг Маркова, побудований по моментах τ_k+0 закінчення виконання робіт на другій машині. Нехай стан системи характеризується вектором (k,m), де k – кількість робіт, ще не виконаних на 1-й машині, m – кількість робіт, що знаходяться на 2-й машині (включаючи й ту, що виконується).

В початковий момент часу система знаходиться у стані (n,0), потім переходить у стан (n-1,1). Позначимо ймовірність того, що за час виконання однієї роботи на 2-й машині з 1-ї машині надійде j робіт за припущення, що кількість робіт, що залишилися на 1-й машині була б необмежена

$$\pi_j=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}dG(t) \quad (3)$$

Нехай P_j^k – величина, аналогічна π_j за припущення, що кількість робіт, що може надійти з 1-ї машини, обмежена величиною k, тоді

$$P_j^k=\begin{cases}\pi_j,\ j<k\\ 1-\sum\limits_{j=0}^{k-1}\pi_j,\ j=k\end{cases} \quad (4)$$

Нехай система знаходиться в стані (k,m), k≥1, m≥1. З даного стану система перейде в один з станів (k-j,m-1+j), j=0;k з ймовірністю P_j^k . Якщо система попадає в стан (k,0), то це означає, що на 2-й машині відбувається простій, який триває показниково розподілений час з параметром λ, після чого з ймовірністю 1 система переходить у стан (k-1,1).

Нехай f(k,m) – математичне сподівання кількості простоїв 2-ї машини від даного моменту часу до закінчення виконання всіх робіт. Тоді

$$f(0,m)=0 \quad (5.1)$$

$$f(k,m)=\sum_{j=0}^{k}P_j^k f(k-j,m-1+j),\ m\ge 1 \quad (5.2)$$

$$f(k,0)=f(k-1,1)+1 \quad (5.3)$$

Можна виключити з розгляду стани (k,0), поклавши при цьому

$$f(k,m)=\sum_{j=0}^{k}P_j^k f(k-j,m-1+j),\ m\ge 2 \quad (6.1)$$

$$f(k,1)=\sum_{j=1}^{k}P_j^k f(k-j,j)+P_0^k\left(f(k-1,1)+1\right) \quad (6.2)$$

Беручи до уваги, що $f(0,m)=0$ для всіх m і таким чином, останні (k-ті) доданки сум дорівнюють нулю та те, що згідно (4) $P_j^k=\pi_j, j<k$, формули (6.1), (6.2) набувають вигляду

$$f(k,m)=\sum_{j=0}^{k-1}\pi_j f(k-j,m-1+j),\ m\ge 2 \quad (7.1)$$

$$f(k,1)=\sum_{j=1}^{k-1}\pi_j f(k-j,j)+\pi_0\left(f(k-1,1)+1\right) \quad (7.2)$$

Після початкового моменту часу відбувається перший "початковий" простій, після чого система попадає в стан (n-1,1). Таким чином, від початкового моменту часу до закінчення виконання останньої роботи на 2-й машині в системі відбувається в середньому $1+f(n-1,1)$ простоїв, середня тривалість яких складає $\frac{1}{\lambda}\left(1+f(n-1,1)\right)$. Середній час, необхідний другій мащині для безпосереднього виконання n робіт складає ng, де $g=\int_0^\infty x\,dG(x)$, і таким чином,

$$M(T)=\frac{f(n,0)}{\lambda}+ng+=\frac{1}{\lambda}\left(1+f(n-1,1)\right)+ng \quad (8)$$

При цьому, значення $f(n-1,1)$ обчислюється рекурентно, використовуючи (7.1), (7.2).

Покладаємо f(0,m)=0, m=1,n

Обчислюємо f(1,1), f(1,2),…,f(1,m-1). Попередньо обчисливши f(k,m) для всіх m=1,n-k можна послідовно обчислити f(k+1,m), m=1,n-k-1 і таким чином дійти до f(n-1,1).

Розглянемо техніку обчислення f(n-1,1) для n=3 та 4.

n=3:

$$f(0,1)=0, f(0,2)=0$$
$$f(1,1)=\pi_0\left(f(0,1)+1\right)=\pi_0$$
$$f(2,1)=\pi_1 f(1,1)+\pi_0(f(1,1)+1)=\pi_0\left(1+\pi_0+\pi_1\right)$$
$$f(3,0)=1+f(2,1)=1+\pi_0\left(1+\pi_0+\pi_1\right) \quad (9.1)$$

n=4: врахуємо обчислення для n=3

$$f(1,2)=\pi_0 f(1,1)=\left(\pi_0\right)^2$$
$$f(3,1)=\pi_1 f\left(2,1\right)+\pi_2 f\left(1,2\right)+\pi_0\left(f(2,1)+1\right)=\pi_0(1+\pi_0(1+\pi_0+\pi_1+\pi_2)+\pi_1(1+\pi_0+\pi_1)$$
$$f(4,0)=1+f(3,1)=1+\pi_0(1+\pi_0(1+\pi_0+\pi_1+\pi_2)+\pi_1(1+\pi_0+\pi_1)) \quad (9.2)$$

Припускаючи, що g=1 (завжди можна вибрати відповідне мірило часу), обчислимо значення M(T) для різних розподілів та різних значень λ. Для n=3 та 4 обчислення проводились за формулами (9.1), (9.2), а для n=10 – це результати обчислення програми, складеної на підставі формул (7.2).

Таблиця 2.1

n=3

λ	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
Показниковий	31.107	16.218	7.519	4.875	3.759	3.244	3.111
Рівномірний	31.072	16.152	7.397	4.748	3.681	3.224	3.106
Вироджений	31.054	16.116	7.317	4.639	3.595	3.201	3.100

Таблиця 2.2

n=4

λ	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
Показниковий	41.110	21.236	9.638	6.188	4.818	4.247	4.111
Рівномірний	41.074	21.161	9.477	6.088	4.714	4.225	4.106
Вироджений	41.055	21.121	9.377	5.862	4.609	4.201	4.100

Таблиця 2.3

n=10

λ	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
Показниковий	101.111	51.250	21.907	13.523	10.954	10.250	10.111
Рівномірний	101.055	51.165	21.609	13.106	10.771	10.225	10.106
Вироджений	101.056	51.125	21.482	12.814	10.626	10.201	10.100

Одержані результати розрахунків можуть служити ілюстративним прикладом при дослідженні залежності M(T) від виду розподілу часу проходження робіт на другій машині, яке буде проведено нижче.

Означення. Для двох невід'ємних випадкових величин має місце друга стохастична нерівність (позначається $\xi_1 \overset{(2)}{\le} \xi_2$), якщо для відповідних функцій розподілу для будь-якого x виконується нерівність $\int_x^\infty (1-F_1(y))dy \le \int_x^\infty (1-F_2(y))dy$. Якщо ж до того при x=0 нерівність перетворюється на рівність (тобто $M(\xi_1) = M(\xi_2)$), то розподіл F_1 називають більш регулярним, ніж F_2.

Відомо, що друга стохастична нерівність задовольняє умовам рефлексивності, антисиметричності та транзитивності, а також є інваріантною відносно згортки. Обширний огляд стохастичних нерівностей та їхніх властивостей міститься в [4]. Доведемо у вигляді леми ще одну властивість, яка буде потрібна надалі.

Лема. Нехай ξ_1, ξ_2, η -деякі невід'ємні випадкові величини та $\xi_1 \overset{(2)}{\le} \xi_2$. Тоді $(\xi_1 - \eta)_+ \overset{(2)}{\le} (\xi_2 - \eta)_+$.

Доведення. Нехай $\xi_1 \overset{(2)}{\le} \xi_2$, тобто $(\forall x \ge 0)\left(\int_x^\infty P\{\xi_1 > y\}dy \le \int_x^\infty P\{\xi_2 > y\}dy\right)$.

Дана умова еквівалентна умові $M(f(\xi_1)) \le M(f(\xi_2))$ для будь-якої опуклої неспадної функції f, заданої на R^+ (див. наприклад [4]). Для будь-яких фіксованих $t \in R, x \ge 0$ функція $g(z) = \max((z-t)_+, x)$ є опуклою та неспадною, тому $M(\max((\xi_1 - t)_+, x)) \le M(\max((\xi_2 - t)_+, x))$.

Звідси випливає $M\left(\max\left((\xi_1-\eta)_+, x\right)\right) = \int M\left(\max((\xi_1 - t)_+, x)\right) dP(\eta \le t) \le$

$$\le \int M\left(\max\left((\xi_2 - t)_+, x\right)\right) dP(\eta \le t) = M\left(\max\left((\xi_2-\eta)_+, x\right)\right).$$

Враховуючи, що $M\left(\max\left((\xi-\eta)_+, x\right)\right) = \int_x^\infty P\left\{(\xi-\eta)_+ > y\right\}dy + x$, маємо: $(\xi_1-\eta)_+ \overset{(2)}{\le} (\xi_2-\eta)_+$.■

Для системи масового обслуговування (Gi|Gi|1|∞) введемо такі позначення: t_k – час надходження, s_k – час обслуговування, W_k – час очікування початку обслуговування, Z_k – час перебування в системі, T_k – час закінчення обслуговування для k-ї вимоги ($T_k=t_k+Z_k$), $\tau_k=t_k-t_{k-1}$ – інтервал між надходженням (k-1)-ї та k-ї вимоги. Для означених величин відомі такі рекурентні співвідношення:

$$W_1 = 0, W_{k+1} = \left(W_k + s_k - \tau_k\right)_+ ; \quad Z_1 = s_1, Z_{k+1} = \left(Z_k - \tau_k\right)_+ + s_{k+1} \qquad (10).$$

Розглянемо тепер дві системи, які відрізняються лише часом обслуговування однієї (j-ї) вимоги, тобто $t_k^/ = t_k$ для всіх k, $s_k^/ = s_k, k \ne j$ та $s_k^/ \overset{(2)}{\le} s_k$. Тоді $Z_k^/ \overset{st}{=} Z_k, k < j$, та $Z_k^/ \overset{(2)}{\le} Z_k, k \ge j$ (в силу інваріантності згортки) та наведеної вище леми. Звідси $Z_n^/ \overset{(2)}{\le} Z_n$, $M(Z_n^/) \le M(Z_n)$ і отже $M(T_n^/) \le M(T_n)$. У [4] було наведено результат, який є наслідком даного: якщо в (Gi|Gi|1|∞) системі завантаження менше 1, то зменшення (в сенсі $\overset{(2)}{\le}$) розподілу часу обслуговування вимог веде до зменшення (у тому самому сенсі) розподілів віртуального часу очікування початку обслуговування та кількості вимог в системі. Проведемо аналогію між задачею Джонсона та (Gi|Gi|1|∞) системою. Якщо трактувати τk та sk, $k = \overline{1,n}$ як часи виконання робіт в задачі Джонсона на 1-й та 2-й мащині відповідно, то T (у задачі Джонсона) – це те ж саме, що й T_n (у СМО). Наступний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо в задачі Джонсона час проходження будь-якої роботи на будь-якій з двох машин замінити на інший, менший (в сенсі $\overset{(2)}{\le}$), то це призведе до зменшення T у тому самому сенсі, і як наслідок, не збільшить M(T).

Доведення. Для випадку другої машини результат випливає з того, що як зазначено вище, $Z_n^l \overset{(2)}{\le} Z_n$, отже $T_n^l \overset{(2)}{\le} T_n$ і зазначеної аналогії між задачею Джонсона та СМО. Щоб довести результат для першої машини, скористаємось відомим результатом, що значення T не зміниться, якщо поміняти дві машини місцями і одночасно переписати розклад проходження робіт в зворотньому порядку (назвемо таку операцію інверсією). Отже, зміна часу проходження роботи на 1-й машині еквівалентна послідовним інверсії, зміні (вже на 2-й машині), і ще одній інверсії. ■

Наслідок. τ_k та s_k , $k = \overline{1,n}$ – часи виконання робіт в задачі Джонсона на 1-й та 2-й мащині відповідно. Тоді

$$M(T) \ge \max_k \left(\sum_{i=1}^{k} \overline{\tau_i} + \sum_{i=k}^{n} \overline{s_i} \right).$$

Доведення. Послідовна заміна τ_k та s_k на кожному кроці на їхні середні значення не збільшує M(T), а правою частиною нерівності є значення T для детермінованого випадку.

Те, що в таблицях 2.1, 2.2 значення M(T) спадають по стовпцях, закономірно та є наслідком теореми 1 та того факту, що при фіксованому середньому значенні вироджений розподіл є регулярнішим, ніж будь-який інший, а рівномірний розподіл в свою чергу є регулярнішим, ніж показниковий.

1. J.Kamburowski. Stochastically minimizing the makespan in two machine flow shops without blocking. European Journal of Operations Research, 112 (1999), 304-309. 2. P.S.Ku, S.C.Nju. On Johnson's two machine flow shop with random processing times. Operations Research, 34 (1986), 130-136. 3. С.І.Доценко. Задача Джонсона з випадковими часами виконання робіт. Вісник Київського університету, серія фіз-мат науки, 2010, N1. 4. R.Szekli. Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability. Springer-Verlag, 1997.

Надійшла до редколегії 30.08.10

УДК 517.929

О. Кухаренко, асп.,
Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук,
М. Верейкіна, канд. фіз.-мат. наук

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ КОЛИВАННЯ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ У ВИГЛЯДІ РЯДУ

В запропонованій роботі розглянута система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із запізнюванням, розв'язки якої представлені у вигляді рядів за допомогою спеціально введених функцій – запізнюючогося синуса і косинуса. Наведено умови збіжності цих рядів, тобто доведено умови існування розв'язків систем диференціальних рівнянь у вигляді рядів.

The system of two linear homogeneous second order partial differential equations with constant coefficients and constant delay has been considered in this paper. Special functions called the delay sine and cosine have been introduced. The solution of the boundary value problem is presented in the form of formal series. It is shown that when certain conditions are satisfied the series converge and their representation is the solution of system of partial delay differential equations.

Вступ

Останнього часу досить поширеним стало дослідження процесів, які описуються диференціальними рівняннями з післядією [1-4]. Це обумовлено тим, що динаміка процесів в біології, розвитку популяцій, економіці залежить як від поточного, так і від попереднього стану. Особливо ефект запізнювання відчувається при керуванні системами такого виду [2]. Системи з післядією більш адекватно описують динаміку досліджуваних процесів. Слід зауважити, якщо системи звичайних диференціальних рівнянь зустрічаються досить часто, то рівняння з розподіленими параметрами, а особливо, системи диференціально-різницевих рівнянь з розподіленими параметрами в літературі майже не зустрічаються. В запропонованій роботі продовжуються дослідження лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь з запізнюванням, що проведені в [5-9]. В цих роботах за допомогою спеціально введених функцій представлено розв'язок систем диференціальних рівнянь у вигляді рядів.

1. Зображення розв'язку системи з запізнюванням

В роботі [7] розглянута система диференціальних рівнянь другого порядку вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_{11} \dfrac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{12} \dfrac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a_{21} \dfrac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{22} \dfrac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Невідомі функції $u(x,t)$, $v(x,t)$ визначені у півсмузі $t \ge -\tau$, $0 \le x \le l$ і задовольняють наступним початковим та крайовим умовам

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),\ v(0,t) = \theta_1(t),\ v(l,t) = \theta_2(t),\ t \ge -\tau,$$
$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ v(x,t) = \psi(x,t)\ \ 0 \le x \le l,\ -\tau \le t \le 0, \tag{1.2}$$

де $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ – довільні двічі неперервно-диференційовані функції.

Причому виконані, так звані, "умови узгодженості"

$$\mu_1(t) = \varphi(0,t),\ \mu_2(t) = \varphi(l,t),\ \theta_1(t) = \psi(0,t),\ \theta_2(t) = \psi(l,t),\ -\tau \le t \le 0 .$$

Завжди існує неособлива матриця S, яка зводить матрицю A до жорданової форми. І за допомогою лінійного не виродженого перетворення

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi(x,t) \\ \eta(x,t) \end{pmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix},\ \det S \ne 0$$

система (1.1) зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \eta(x,t-\tau)}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

де Λ – жорданова форма матриці A. В роботі [7] отримано розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2), для випадку, коли корені характеристичного рівняння матриці A дійсні, різні, додатні, тобто $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \ne \lambda_2$. В цьому випадку матриця Жордана Λ має діагональний вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

і система (1.3) розщеплюється на два окремих рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = \lambda_2 \frac{\partial^2 \eta(x,t-\tau)}{\partial x^2} . \qquad (1.4)$$

Початкові та крайові умови набувають вигляду

$$\xi(0,t) = \bar{\mu}_1(t),\ \xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t),\ \eta(0,t) = \bar{\theta}_1(t),\ \eta(l,t) = \bar{\theta}_2(t),\ t \ge -\tau ,$$

$$\xi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t),\ \eta(x,t) = \psi(x,t),\ 0 \le x \le l,\ -\tau \le t \le 0 ,$$

де

$$\begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(t) \\ \bar{\theta}_1(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \theta_1(t) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \bar{\mu}_2(t) \\ \bar{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_2(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x,t) \\ \bar{\psi}(x,t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(x,t) \\ \psi(x,t) \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Для отримання розв'язку кожного з рівнянь системи (1.4) вводяться спеціальні функції [10].

Означення 1.1. Запізнюючимся косинусом $\cos_\tau(\omega,t)$ назвемо функцію, яка на проміжках $(k-1)\tau \le t < k\tau$ має вигляд

$$\cos_\tau(\omega,t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \le t < 0, \\ 1 - \omega^2 \dfrac{t^2}{2!}, & 0 \le t < \tau, \\ \dots & \dots \\ 1 - \omega^2 \dfrac{t^2}{2!} + \omega^4 \dfrac{(t-\tau)^4}{4!} + \dots + (-1)^k \omega^{2k} \dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau \\ \dots & \end{cases}$$

полінома степеня $2k$, "склеєного" у вузлах $\omega = const$, $t = k\tau,\ k = 0,1,2,\dots$.

Означення 1.2. Запізнюючимся синусом $\sin_\tau(\omega,t)$ назвемо функцію, яка на проміжках $(k-1)\tau \le t < k\tau$ має вигляд

$$\sin_\tau(\omega,t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ \omega(t+\tau), & -\tau \le t < 0, \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \dfrac{t^3}{3!}, & 0 \le t < \tau, \\ \dots & \dots \\ \omega(t+\tau) - \omega^3 \dfrac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \omega^{2k+1} \dfrac{[t-(k-1)\tau)]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau \\ \dots & \end{cases}$$

полінома степеня $(2k+1)$, "склеєного" у вузлах $\omega = const$, $t = k\tau,\ k = 0,1,2,\dots$.

1. Розв'язок розщеплених підсистем

Розглянемо першу крайову задачу для диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial t^2},\ \lambda_1 > 0 , \qquad (1.6)$$

$$\xi(0,t) = \bar{\mu}_1(t),\ \xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t),\ t \ge -\tau ,$$

$$\xi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t),\ -\tau \le t \le 0,\ 0 \le x \le l . \qquad (1.7)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) + \xi_3(x,t) ,$$

доданки якої визначаються наступним чином:

1) $\xi_1(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi_1(x,t)}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} , \qquad (1.8)$$

із початковими умовами

$$\xi_1(x,t) = \Phi(x,t),\ \Phi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) - \bar{\mu}_1(t) - \frac{x}{l}\left[\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)\right] \qquad (1.9)$$

і нульовими крайовими умовами

$$\xi_1(0,t)=0\,,\ \xi_1(l,t)=0\,,\ t\ge -\tau\,;$$

2) $\xi_2(x,t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2\xi_2(x,t)}{\partial t^2}=\lambda_1\frac{\partial^2\xi_2(x,t-\tau)}{\partial x^2}+f(x,t)\,, \qquad (1.10)$$

$$f(x,t)=-\bar{\mu}_1''(t)-\frac{x}{l}\left[\bar{\mu}_2''(t)-\bar{\mu}_1''(t)\right],\ 0\le x\le l\,,\ t\ge-\tau\,, \quad (1.11)$$

із нульовими крайовими та початковими умовами

$$\xi_2(0,t)=0\,,\ \xi_2(l,t)=0\,,\ t\ge-\tau\,, \qquad (1.12)$$

$$\xi_2(x,t)\equiv 0\,,\ 0\le x\le l,\ -\tau\le t\le 0\,; \qquad (1.13)$$

3) $\xi_3\left(x,t\right)=\bar{\mu}_1\left(t\right)+\frac{x}{l}\left[\bar{\mu}_2\left(t\right)-\bar{\mu}_1\left(t\right)\right],\ 0\le x\le l,\ t\ge-\tau$ – допоміжна функція.

1.1. Розглянемо однорідне рівняння з нульовими крайовими умовами (1.8). Його розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій $\xi_1(x,t)=X(x)T(t)$, $0\le x\le l$, $t\ge-\tau$. Після підстановки отримуємо

$$X\left(x\right)T''\left(t\right)=\lambda_1X''\left(x\right)T\left(t\right).$$

Перепишемо у вигляді

$$\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}=\frac{T''\left(t\right)}{\lambda_1T\left(t\right)}=-\mu^2\,.$$

Після розділення змінних отримуємо два звичайних диференціальні рівняння

$$X''(x)+\mu^2X(x)=0\,,\ X(0)=0\,,\ X(l)=0\,. \qquad (1.14)$$

$$T''(t)+\mu^2\lambda_1T(t-\tau)=0\,. \qquad (1.15)$$

Ненульовими розв'язками задачі Штурма-Ліувіля (1.14) будуть

$$X_n(x)=a_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ \mu_n=\frac{\pi n}{l}\,,\ n=1,2,3,\ldots\,.$$

Підставивши одержані власні числа у рівняння (1.15), отримаємо лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталим запізнюванням

$$T''(t)+\omega_n^2T(t-\tau)=0\,,\ \omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\,,\ n=1,2,3,\ldots\,. \quad (1.16)$$

Початкові умови для кожного із рівнянь (1.16) обчислимо шляхом розкладу функції $\Phi\left(x,t\right)$ у ряд по повній системі власних функцій рівняння (1.15). Отримаємо

$$T_n(t)=\varsigma_n(t)\,,\ -\tau\le t\le 0\,,\ n=1,2,3,\ldots\,,$$

$$\varsigma_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\bar{\varphi}(s,t)\sin\frac{n\pi}{l}s\,ds+\frac{2}{\pi n}\left[\left(-1\right)^n\bar{\mu}_2(t)-\bar{\mu}_1(t)\right]. \quad (1.17)$$

Використовуючи введені функції – запізнюючийся синус $\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)$ та запізнюючийся косинус $\cos_\tau\left(\omega_n,t\right)$, а також їх властивості, представимо розв'язок задачі Коші для рівняння (1.16) в інтегральному вигляді.

Теорема 1.1. Розв'язок $T_{1,n}(t)$ рівняння

$$T''(t)+\omega_n^2T(t-\tau)=0\,,\ \omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\,,\ t\ge 0\,,\ \tau>0\,,\ n=1,2,3,\ldots$$

який задовольняє початкову умову $T_{1,n}(t)\equiv\varsigma_n(t)$, $-\tau\le t\le 0$, має вигляд

$$T_{1,n}\left(t\right)=\varsigma_n\left(-\tau\right)\cos_\tau\left(\omega_n,t\right)+\frac{1}{\omega_n}\varsigma_n'\left(-\tau\right)\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)+\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)\varsigma_n''\left(\zeta\right)d\zeta\,. \qquad (1.18)$$

Доведення. Доведення теореми проводиться аналогічно, приведеному в роботі [10].

Враховуючи результати наведеної теореми, розв'язок першої крайової задачі рівняння (1.9) запишемо у вигляді

$$\xi_1\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varsigma_n\left(-\tau\right)\cos_\tau\left(\omega_n,t\right)+\frac{1}{\omega_n}\varsigma_n'\left(-\tau\right)\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)+\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)\varsigma_n''\left(\zeta\right)d\zeta\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$\omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\,,\ \varsigma_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\bar{\varphi}(s,t)\sin\frac{n\pi}{l}s\,ds+\frac{2}{\pi n}\left[\left(-1\right)^n\bar{\mu}_2(t)-\bar{\mu}_1(t)\right].$$

1.2. Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного рівняння (1.10) з нульовими крайовими та початковими умовами. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$\xi_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_{2n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

по повній системі власних функцій $X_n\left(x\right)=\sin\frac{\pi n}{l}x$ першої крайової задачі (1.14). Розклавши функцію

$$f(x,t)=-\bar{\mu}_1''(t)-\frac{x}{l}\left[\bar{\mu}_2''(t)-\bar{\mu}_1''(t)\right]$$

в ряд Фур'є, отримаємо

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[\left(-1\right)^n\bar{\mu}_2''(t)-\bar{\mu}_1''(t)\right],\ n=1,2,3,\ldots\,.$$

Звідси для кожної функції $T_{2,n}\left(t\right)$ можна записати систему відповідних лінійних неоднорідних рівнянь із запізнюванням

$$T''(t)+\omega_n^2T(t-\tau)=f_n(t)\,,\ \omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\,,\ t\ge 0\,,\ \tau>0\,,\ n=1,2,3,\ldots \qquad (1.19)$$

що задовольняють нульову початкову умову.

Для розв'язку задачі Коші для рівняння (1.19) із нульовою початковою умовою справедливою буде наступна теорема.

Теорема 1.2. Розв'язок $T_{2,n}(t)$ неоднорідного рівняння (1.19), що задовольняє нульову початкову умову $T(t)\equiv 0$, $-\tau\le t\le 0$, має вигляд

$$T_{2,n}\left(t\right)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)f_n\left(\zeta\right)d\zeta\,,\ f_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[\left(-1\right)^n\bar{\mu}_2''(t)-\bar{\mu}_1''(t)\right],\ n=1,2,3,\ldots \qquad (1.20)$$

Доведення. Доведення теореми наведено в роботі [10].

Враховуючи результати, що наведені вище, розв'язок неоднорідного хвильового рівняння із чистим запізнюванням (1.10) із нульовими крайовими та початковою умовами, можна записати у вигляді

$$\xi_2\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)f_n\left(\zeta\right)d\zeta\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Склавши всі доданки, запишемо формальне представлення розв'язку вихідної крайової задачі (1.6), (1.7)

$$\xi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varsigma_n(-\tau)\cos_\tau(\omega_n,t)+\frac{1}{\omega_n}\varsigma_n'(-\tau)\sin_\tau(\omega_n,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\left(\sin_\tau(\omega_n,t-\tau-\zeta)\right)\varsigma_n''(\zeta)d\zeta+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\left(\sin_\tau(\omega_n,t-\tau-\zeta)\right)f_n(\zeta)d\zeta\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+\bar\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\bar\mu_2(t)-\bar\mu_1(t)\right],\quad(1.21)$$

$$\varsigma_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\bar\varphi(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\bar\mu_2(t)-\bar\mu_1(t)\right],$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\bar\mu_2''(t)-\bar\mu_1''(t)\right],\ \omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1},\ n=1,2,3,\dots.\quad(1.22)$$

Аналогічно, розв'язок $\eta(x,t)$ другого з рівнянь системи (1.4) має вигляд

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\rho_n(-\tau)\cos_\tau(w_n,t)+\frac{1}{w_n}\rho_n'(-\tau)\sin_\tau(w_n,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{w_n}\int_{-\tau}^{0}\left(\sin_\tau(w_n,t-\tau-\zeta)\right)\rho_n''(\zeta)d\zeta+\frac{1}{w_n}\int_0^t\left(\sin_\tau(w_n,t-\tau-\zeta)\right)g_n(\zeta)d\zeta\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+\bar\rho_1(t)+\frac{x}{l}\left[\bar\rho_2(t)-\bar\rho_1(t)\right],\quad(1.23)$$

$$\rho_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\bar\psi(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\bar\theta_2(t)-\bar\theta_1(t)\right],$$

$$g_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\bar\rho_2''(t)-\bar\rho_1''(t)\right],\ w_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_2},\ n=1,2,3,\dots.\quad(1.24)$$

Якщо матриця S і обернена S^{-1} мають вигляд

$$S=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{bmatrix},\ S^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\beta_2&-\alpha_2\\-\beta_1&\alpha_1\end{bmatrix},\ \Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

$(\alpha_1,\alpha_2)^T$, $(\beta_1,\beta_2)^T$ – власні вектори, що відповідають власним числам λ_1, λ_2, то розв'язок вихідної крайової задачі (1.1), (1.2) має вигляд

$$u(x,t)=\alpha_1\xi(x,t)+\alpha_2\eta(x,t),\ v(x,t)=\beta_1\xi(x,t)+\beta_2\eta(x,t),\quad(1.25)$$

де розв'язки $\xi(x,t)$, $\eta(x,t)$ розщеплених рівнянь системи визначені в (1.21), (1.23), а функції $\bar\mu_1(t)$, $\bar\mu_2(t)$, $\bar\varphi(x,t)$, $\bar\theta_1(t)$, $\bar\theta_2(t)$, $\bar\psi(x,t)$, які задають початкові та крайові умови, визначені в (1.22), (1.24).

Зауваження 1.1. Для систем з чистим запізнюванням, взагалі кажучи, коректною є не крайова задача, а задача Коші [9]. Це означає, що крайові умови, тобто функції $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ є не довільними функціями, а функціоналами від початкових умов, тобто

$$\mu_1(t)=\Psi[\varphi(0,t)],\ \mu_2(t)=\Psi[\varphi(l,t)],\ \theta_1(t)=\Omega[\psi(0,t)],\ \theta_2(t)=\Omega[\psi(l,t)].$$

2. Умови збіжності

Представлені залежності (1.21), (1.23) мають вигляд рядів Фур'є. Наклавши умови збіжності, отримаємо наступні теореми про зображення розв'язку крайової задачі для систем із запізнюванням. Спочатку розглянемо ряд (1.21).

Теорема 2.1. Нехай функції $\bar\varphi(x,t)$, $\bar\mu_1(t)$ і $\bar\mu_2(t)$ такі, що для коефіцієнтів $\varsigma_n(t)$, $f_n(t)$, які обчислюються згідно залежностей (1.22), на проміжку $-\tau\le t\le t^*$, $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ виконуються умови "швидкої збіжності"

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le t^*}|f_n(t)|n^{2k+1}=0,\quad(2.1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{-\tau\le t\le 0}|\varsigma_n'(t)|n^{2(k+1)}=0,\ \lim_{n\to\infty}|\varsigma_n(-\tau)|n^{2(k+1)}=0.\quad(2.2)$$

Тоді розв'язок крайової задачі (1.6), (1.7) при $0\le x\le l$, $0\le t<t^*$ має вигляд (1.21), (1.22). При цьому можливе двократне почленне диференціювання ряду по x і по t, отримані ряди збігаються абсолютно та рівномірно при $0\le x\le l$, $0\le t<t^*$.

Доведення. Розглянемо ряд (1.21). Запишемо його у вигляді суми чотирьох рядів

$$\xi(x,t)=S_1(x,t)+S_2(x,t)+S_3(x,t)+S_4(x,t)+\bar\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\bar\mu_2(t)-\bar\mu_1(t)\right],$$

де

$$S_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_3(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_4(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$A_n(t)=\left(\cos_\tau(\omega_n,t)\right)\varsigma_n(-\tau),\ B_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\left(\sin_\tau(\omega_n,t)\right)\varsigma_n'(-\tau),$$

$$C_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\left(\sin_\tau(\omega_n,t-\tau-\zeta)\right)\varsigma_n''(\zeta)d\zeta,\ D_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{0}^{t}\left(\sin_\tau(\omega_n,t-\tau-\zeta)\right)f_n(\zeta)d\zeta,$$

$$\varsigma_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\overline{\varphi}(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\overline{\mu}_2(t)-\overline{\mu}_1(t)\right],\ f_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\overline{\mu}_2''(t)-\overline{\mu}_1''(t)\right],\ \omega_n=\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1},\ n=1,2,3,\ldots$$

Визначимо умови збіжності та диференційованості рядів.

1. Розглянемо коефіцієнти першого ряду

$$A_n(t)=\cos_\tau(\omega_n,t)\varsigma_n(-\tau),\ \varsigma_n(-\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l\overline{\varphi}(s,-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}sds+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\overline{\mu}_2(-\tau)-\overline{\mu}_1(-\tau)\right],\ n=1,2,\ldots.$$

Для довільного фіксованого моменту часу t^* : $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ буде виконуватись наступне

$$A_n\left(t^*\right)=\left(\cos_\tau\left(\omega_n,t^*\right)\right)\varsigma_n(-\tau)=$$

$$=\left[1-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{\left(t^*\right)^2}{2!}+\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^4\frac{\left(t^*-\tau\right)^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k}\frac{\left[t^*-(k-1)\tau\right]^{2k}}{(2k)!}\right]\varsigma_n(-\tau).$$

І кожний з коефіцієнтів $A_n\left(t^*\right)$ по змінній n являє собою многочлен степеня $2k$, що залежить від t^*: $k=\left[\frac{t^*}{\tau}\right]$,

$[\bullet]$ – функція цілої частини числа, тобто

$$A_n\left(t^*\right)=\varsigma_n(-\tau)\sum_{i=0}^{k}a_{2i}\left(t^*\right)n^{2i},\ a_{2i}\left(t^*\right)=(-1)^i\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[t^*-(i-1)\tau\right]^{2i}}{(2i)!}.$$

Нехай коефіцієнти Фур'є $\varsigma_n(-\tau)$ такі, що на проміжку $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ виконується умова "швидкої збіжності"

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varsigma_n(-\tau)\right|\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{(2i)!}\left(\frac{\pi}{l}t^*\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}n^{2i}=0,\ k=\left[\frac{t^*}{\tau}\right], \tag{2.3}$$

Тоді на проміжку $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ ряд

$$S_1(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

збігається абсолютно та рівномірно.

2. Розглянемо коефіцієнти другого ряду

$$B_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\left(\sin_\tau(\omega_n,t)\right)\varsigma_n'(-\tau),\ \varsigma_n'(-\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l\overline{\varphi}_t'(s,t)\Big|_{t=-\tau}\sin\frac{\pi n}{l}sds+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\overline{\mu}_2'(-\tau)-\overline{\mu}_1'(-\tau)\right],\ n=1,2,\ldots.$$

Для довільного фіксованого моменту часу t^*, $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ буде виконуватись наступне

$$B_n\left(t^*\right)=\frac{1}{\omega_n}\left(\sin_\tau\left(\omega_n,t^*\right)\right)\varsigma_n'(-\tau)=\varsigma_n'(-\tau)\frac{l}{\pi n\sqrt{\lambda_1}}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)\frac{\left(t^*+\tau\right)}{1!}-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^3\frac{\left(t^*\right)^3}{3!}+\ldots+(-1)^k\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k+1}\frac{\left[t^*-(k-1)\tau\right]^{2k+1}}{(2k+1)!}\right].$$

При фіксованому t^* кожний з коефіцієнтів $B_n\left(t^*\right)$ по змінній n являє собою многочлен степеня $2k$, $k=\left[\frac{t^*}{\tau}\right]$, тобто

$$B_n\left(t^*\right)=\varsigma_n'(-\tau)\sum_{i=0}^{k}b_{2i}\left(t^*\right)n^{2i},\ b_{2i}\left(t^*\right)=(-1)^i\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[t^*-(i-1)\tau\right]^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

І якщо коефіцієнти Фур'є $\varsigma_n(t)$ такі, що виконується умова "швидкої збіжності" похідної

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varsigma_n'(-\tau)\right|\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{\pi}{l}t^*\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i+1}n^{2i}=0,\ k=\left[\frac{t^*}{\tau}\right],$$

то ряд

$$S_2(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

на проміжку $0\le t\le t^*$ також збігається абсолютно та рівномірно.

3. Розглянемо коефіцієнти третього ряду

$$C_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\left(\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)\right)\varsigma_n''\left(\zeta\right)d\zeta\ ,\ n=1,2,...\ .$$

Взявши інтеграл по частинам, отримаємо

$$C_n\left(t\right)=C_{n1}\left(t\right)-C_{n2}\left(t\right)+C_{n3}\left(t\right),$$

де $C_{n1}\left(t\right)=\frac{1}{\omega_n}\varsigma_n'\left(0\right)\sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau\right)$, $C_{n2}\left(t\right)=\frac{1}{\omega_n}\varsigma_n'\left(-\tau\right)\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)$, $C_{n3}\left(t\right)=\int_{-\tau}^{0}\varsigma_n'\left(\zeta\right)\cos_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)d\zeta$.

Якщо коефіцієнти $\varsigma_n'\left(0\right)$, $\varsigma_n'\left(-\tau\right)$ такі, що виконуються умови

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varsigma_n'\left(0\right)\right|\sum_{i=0}^{k}\left(-1\right)^i\frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{\pi}{l}t^*\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i+1}n^{2i}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left|\varsigma_n'\left(-\tau\right)\right|\sum_{i=0}^{k}\left(-1\right)^i\frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{\pi}{l}t^*\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i+1}n^{2i}=0\ ,\ k=\left[\frac{t^*}{\tau}\right],$$

то, як випливає з попереднього пункту, ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

на проміжку $0\le t\le t^*$ також збігаються абсолютно та рівномірно.

Розглянемо ряд $C_{n3}\left(t\right)$. Зробивши заміну $t-\tau-\zeta=s$, отримаємо

$$C_{n3}\left(t\right)=\int_{t-\tau}^{t}\varsigma_n'\left(t-\tau-s\right)\cos_\tau\left(\omega_n,s\right)ds\ .$$

Нехай t^*, $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$. Розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів і запишемо

$$C_{n3}\left(t\right)=\int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s\right)\cos_\tau\left(\omega_n,s\right)ds+\frac{1}{\omega_n}\int_{(k-1)\tau}^{t^*}\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s\right)\cos_\tau\left(\omega_n,s\right)ds=$$

$$=\int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}\left[1-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s^2}{2!}+\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^4\frac{\left(s-\tau\right)^4}{4!}-...+\left(-1\right)^{k-1}\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k-2}\frac{\left[s-\left(k-2\right)\tau\right]^{2k-2}}{(2k-2)!}\right]\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s\right)ds+$$

$$+\int_{(k-1)\tau}^{t^*}\left[1-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s^2}{2!}+\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^4\frac{\left(s-\tau\right)^4}{4!}-...+\left(-1\right)^{k}\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k}\frac{\left[s-\left(k-1\right)\tau\right]^{2k}}{(2k)!}\right]\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s\right)ds\ .$$

Використовуючи теорему про середнє, знайдемо величини s_1, s_2

$$t^*-\tau\le s_1\le\left(k-1\right)\tau\ ,\ \left(k-1\right)\tau\le s_2\le t^*,$$

при яких буде виконуватися наступне

$$\left|C_{3n}\left(t^*\right)\right|\le\tau\left[1-n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s_1^2}{2!}+...+n^{2k-2}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k-2}\frac{\left[s_1-(k-2)\tau\right]^{2k-2}}{\left[2k-2\right]!}\right]\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_1\right)\right|+$$

$$+\tau\left[1-n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s_2^2}{2!}+...+n^{2k}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k}\frac{\left[s_2-\left(k-1\right)\tau\right]^{2k}}{(2k)!}\right]\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_2\right)\right|.$$

Для фіксованого моменту часу t^*: $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ кожний з коефіцієнтів $C_n\left(t^*\right)$ задовольняє нерівності

$$\left|C_n\left(t^*\right)\right|\le\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_1\right)\right|\sum_{i=0}^{k-1}n^{2i}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[s_1-\left(i-1\right)\tau\right]^{2i}}{(2i)!}+$$

$$+\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_2\right)\right|\sum_{i=0}^{k}n^{2i}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[s_2-\left(i-1\right)\tau\right]^{2i}}{(2i)!}.$$

І, якщо величини $\varsigma_n'\left(t\right)$ такі, що виконується умова "швидкої збіжності"

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_1\right)\right|\sum_{i=0}^{k-1}n^{2i}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[s_1-\left(i-1\right)\tau\right]^{2i}}{(2i)!}+$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\left|\varsigma_n'\left(t^*-\tau-s_2\right)\right|\sum_{i=0}^{k}n^{2i}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2i}\frac{\left[s_2-\left(i-1\right)\tau\right]^{2i}}{(2i)!}=0\ .$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}C_{n3}(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$ на проміжку $0\le t\le t^*$ збігається абсолютно та рівномірно, а отже, і ряд $S_3\left(x,t^*\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(t^*\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$.

4. Розглянемо коефіцієнти четвертого ряду

$$D_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin_\tau\left(\omega_n,t-\tau-\zeta\right)f_n(\zeta)d\zeta\ ,\ n=1,2,\dots .$$

Для фіксованого моменту часу t^* : $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$ проведемо заміну $t^*-\tau-\zeta=s$ і представимо інтеграл сумою інтегралів, у яких функція $\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)$ має однакову структуру

$$D_n\left(t^*\right)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^{t^*}\sin_\tau\left(\omega_n,t^*-\tau-\zeta\right)f_n\left(\zeta\right)d\zeta=\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{t^*-\tau}\sin_\tau\left(\omega_n,s\right)f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds==\frac{1}{\omega_n}\int_{-\tau}^{0}\sin_\tau\left(\omega_n,s\right)f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds+$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\int_0^{\tau}\sin_\tau\left(\omega_n,s\right)f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds+\frac{1}{\omega_n}\int_{\tau}^{2\tau}\sin_\tau\left(\omega_n,s\right)f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds+\dots+\frac{1}{\omega_n}\int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau}\sin_\tau\left(\omega_n,s\right)f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds .$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо. Використовуючи представлення функції $\sin_\tau\left(\omega_n,t\right)$, отримаємо

$$D_n\left(t^*\right)=\int_{-\tau}^{0}\frac{(s+\tau)}{1!}f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds+\int_0^{\tau}\left[\frac{(s+\tau)}{1!}-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s^3}{3!}\right]f_n\left(t^*-\tau-s\right)ds+$$

$$+\dots+\int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau}\left[\frac{(s+\tau)}{1!}-\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s^3}{3!}+\dots+(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi n}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2k-1}\frac{\left[s-(k-2)\tau\right]^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]f_n\left(t-\tau-s\right)ds .$$

Використовуючи теорему про середнє, знайдемо величини

$$-\tau\le s_1\le 0\ ,\ 0\le s_2\le\tau\ ,\dots ,\ (k-2)\tau\le s_k\le t^*-\tau\ ,$$

при яких буде виконуватися рівність

$$D_n\left(t^*\right)=\tau f_n\left(t^*-\tau-s_1\right)+\tau\left[1-n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s_2^3}{3!}\right]f_n\left(t^*-\tau-s_2\right)+\dots+\left[t^*-(k-1)\tau\right]\times$$

$$\times\left[(s_k+\tau)-n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{s_k^3}{3!}+\dots+(-1)^{k-1}n^{2(k-1)}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2(k-1)}\frac{\left[s_k-(k-2)\tau\right]^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]f_n\left(t^*-\tau-s_k\right) .$$

Звідси

$$\left|D_n\left(t^*\right)\right|\le\tau\max_{-\tau\le s\le t^*-\tau}\left|f_n(s)\right|\left[(k-1)+(k-2)n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{\left(t^*\right)^3}{3!}+\dots+n^{2(k-1)}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2(k-1)}\frac{\left[t^*-(k-2)\tau\right]^{2k-1}}{(2k-1)!}\right].$$

І, якщо коефіцієнти $f_n\left(t\right)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{-\tau\le s\le t^*-\tau}\left|f_n(s)\right|\left[(k-1)+(k-2)n^2\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^2\frac{\left(t^*\right)^3}{3!}+\dots+n^{2(k-1)}\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\lambda_1}\right)^{2(k-1)}\frac{\left[t^*-(k-2)\tau\right]^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]=0$$

то ряд

$$S_4(x,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

на проміжку $0\le t\le t^*$ збігається абсолютно та рівномірно

Таким чином показано, що для абсолютної та рівномірно збіжність рядів $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$, $S_4\left(x,t\right)$ необхідно "швидке" зменшення по індексу n коефіцієнтів Фур'є. Збіжність похідних розв'язку випливає із властивостей диференційованості запізнюючихся синуса та косинуса. Для ряду (1.23) умови аналогічні.

1. Jack K. Hale, Sjoerd M. Verduyn Lunel. Introduction to Functional Differential Equations. – Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg – London – Paris – Tokyo – Hong Kong – Barselona – Budapest. – 1993. – 447 p. 2. Chukwu E.N. Stability and Time-Optimal Control of Hereditary Systems. With Applicatin to the Economic Dynamics of the Us. 2-nd Edition. World Scientific, New Jersey – London – Singapoure – Hhong Kong. – 2001. – 495 p. 3. Xiaoxin Liao, Liqiu Wang, Pei Yu. Stability of Dynamical Systems, ELSEIVIER, Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San Diego – Singapoure – Sydney – Tokio. – 2007. – 706 p. 4. E-Kebir Boukas, Z–Kuan Liu. Deterministic and Stochastic Time Delay Systems. – Birkhauser, Boston – Basel – Berlin, 2002. – 423 p. 6. Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Коварж И.В. Решение одного уравнения теплопроводности с запаздыванием // Нелінійні коливання, Т.12, №2, С.251-272. 7. Хусаінов Д.Я., Верейкіна М.Б. Зображення розв'язків задачі Коші одного класу систем рівнянь з частинними похідними із запізнюванням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, №4, 2007. – С.213-216. 8. Верейкіна М.Б., Хусаінов Д.Я. Зображення розв'язків одного класу крайових задач для систем рівнянь з частинними похідними другого порядку із запізнюванням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, №2, 2008. – С.76-72. 9. Верейкіна М.Б., Хусаінов Д.Я. Існування зображення розв'язку першої крайової задачі для систем з частинними похідними із чистим запізнюванням у вигляді ряду // Обчислювальна та прикладна математика, №3, 2009. – С. 30-37 10. Коварж И.В., Иванов А.Ф., Хусаинов Д.Я. Зависимость между краевыми и начальными условиями в задачах для уравнений гиперболического типа с чистым запаздыванием // Журнал обчислювальної та прикладно-математики, №1 (94), 2007. – С.42-47. 11. Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Ружичкова М., Лукачова Я. Представление решения задачи Коши для колебательной системы с чистым запаздыванием // Нелінійні коливання, Т.11, №2, 2008. – С. 261-270.

Надійшла до редколегії 17.06.10

УДК 517.929

А. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Робота присвячена дослідженню стійкості розв'язків квазілінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь за допомогою асимптотичного методу усереднення.

This article is devoted to research of stability of decisions of quasilinear stochastic differential-functional equations with the help of asymptotical method of averaging.

1. Усереднення в стохастичних диференціальних рівняннях без післядії.

На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, P, \mathrm{F})$, ($\mathrm{F} \equiv \{F_t, t \ge 0\}$ – потік σ-алгебр) розглянемо стохастичне диференціальне рівняння з малим параметром вигляду

$$dx = \varepsilon\{a(t,x)dt + b(t,x)dW(t) + \int_U c(t,x,u)\tilde{\nu}(dt,du)\}, \quad (1.1)$$

де $t \ge 0$, $x \in \mathrm{R}^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $W(t) \in \mathrm{R}^n$ – стандартний n-вимірний вінеровий процес [11], [14], $\tilde{\nu}$ – центрована пуассонова випадкова міра [4], яка не залежить від $W(t)$ і задовольняє умовам $M\{\tilde{\nu}(dt,du)\} = 0$, $M\{|\tilde{\nu}(dt,du)|^2\} = \Pi(du)dt$ [2]. Рівняння (1.1) назвемо рівняннями у стандартній формі [5], [17]. Покладемо, що функції $a(t,x)$, $b(t,x)$ і $c(t,x,u)$ вимірні за сукупністю змінних, задовольняють глобальній умові Ліпшиця у формі

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2 + \\ + \int_U |c(t,x,u) - c(t,yu)|^2\, \Pi(du) \le L\,|x-y|^2 \quad (1.2)$$

та умові рівномірної обмеженості в нулі

$$|a(t,0)|^2 + |b(t,0)|^2 + \int_U |c(t,0,u)|^2\, \Pi(du) \le \alpha^2 \quad (1.3)$$

при всіх $x, y \in \mathrm{R}^n$ і $t \ge 0$. Сильний розв'язок (1.1) за початковими даними $x(s) = x$ позначимо $x(t,s,x)$. За початкові дані можна брати випадкові величини, для яких існує другий момент і які є вимірними відносно σ-алгебри F_0, яка не залежить від $W(t)$ і $\tilde{\nu}(t,A)$, $A \in U$. Позначимо F_t мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні прирости процесу $W(t)$ та міри $\tilde{\nu}(t,A)$ на відрізку $[0,t]$ і яка містить F_0. Легко бачити, що процес $x(t,s,x)$ узгоджений з потоком F_t при всіх F_0-вимірних x і $t \ge s \ge 0$. Покладемо, що рівномірно по $s \ge 0$ та x з довільної кулі фіксованого радіуса існує границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} a(t,x)dt = \bar{a}(x). \quad (1.4)$$

Звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{a}(\bar{x}) \quad (1.5)$$

називається рівнянням усередненого руху для (1.1). Для подальших досліджень наведемо результат, що міститься в §14 розділу 3 частини II монографії [5].

Теорема 1.1. *Нехай виконуються перелічені вище умови і крім того:*

1) функція $a(t,x)$ двічі неперервно диференційовна по x, причому друга похідна задовольняє глобальній умові Ліпшиця рівномірно по $t \ge 0$;

2) для будь-якого розв'язку (1.5) $\bar{x}(t)$ при всіх $t \in [0,T]$ виконуються співвідношення:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t [a(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau))d\tau - \bar{a}(\bar{x}(\tau))]d\tau = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \nabla a(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau))d\tau = \int_0^t g(\tau)d\tau;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t [b(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau))b^T(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau)) + \\ + \int_U c(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau), u)c^T(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau), u)\Pi(du)]d\tau = \int_0^t f(\tau)f^T(\tau)d\tau;$$

$$|c(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau), u)| \le r(u);$$

$$\int_U r^2(u)\Pi(du) < \infty,$$

де $g(t)$ та $f(t)$ – неперервні матричні фукнкції, індекс "T" означає транспонування.

Тоді при $\varepsilon \to 0$ нормована різниця

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[x(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \bar{x}(0)) - \bar{x}(t)] \quad (1.6)$$

слабко збігається до розв'язку $\eta(t)$ лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння Іто [5]

$$d\eta = g(t)\eta dt + f(t)dW(t), \quad (1.7)$$

де W(t) – стандартний n-вимірний винеровий процес.

Наступний результат є допоміжним.

Теорема 1.2. *Нехай для $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x,u)$ виконані глобальна умова Ліпшиця (1.2), умова (1.3), існує границя (1.4) та при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ і всіх $t \ge 0$ виконується нерівність*

$$\left|\int_0^t a(\frac{s}{\varepsilon}, \bar{x}(s))ds - \bar{a}(\bar{x}(s))ds\right|^2 \le c_1(\varepsilon,t)(|\bar{x}(0)| + \alpha^2), \quad (1.8)$$

причому для всіх t>0

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_1(\varepsilon,t) = 0.$$

Тоді існує така функція $g(\varepsilon,T)$, що при деякому $\varepsilon_0 > 0$ і будь-яких $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і $T \ge 0$ виконується нерівність

$$M\{\sup_{0<t\le \frac{T}{\varepsilon}} |x(t,0,\bar{x}(0)) - \bar{x}(\varepsilon t)|^2 \le g_1(\varepsilon,T)(|x(0)|^2 + \alpha^2),$$

причому для всіх T>0 виконується співідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon,T) = 0.$$

Для доведення цього твердження можна, використовуючи мартингальну властивість стохастичних інтегралів [8], [11], записати нерівність

$$M\{\sup_{0\le\tau\le t} |x(\tau,0,\bar{x}(0)) - \bar{x}(\varepsilon t)|^2\} \le \\ \le 4\varepsilon^2\{\sup_{0\le\tau\le t} \left|\int_0^t [a(s,\bar{x}(\varepsilon s)) - \bar{a}(\bar{x}(\varepsilon s))]ds\right|^2 +$$

$$+16\varepsilon^2\int_0^t M\{|\,b(s,x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\}ds+$$

$$+16\varepsilon^2\int_0^t\int_U M\{|\,c(s,x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\}\Pi(du)ds+$$

$$+4\varepsilon^2 Lt\int_0^t M\{\sup_{0\le s\le\tau}|\,x(s,0,\bar{x}(0))-\bar{x}(\varepsilon s)\,|^2\}d\tau\,.$$

Для розв'язків (1.1) отримаємо оцінку [21]

$$\sup_{0\le s\le t} M\{|\,x(s,0,\bar{x}(0))\,|^2\}\le g_2(\varepsilon,t)(|\,x(0)\,|^2+\alpha^2)\,,$$

причому для всіх *T>0* і для деякого *C(T)>0* и достатньо малих $\varepsilon>0$ виконується нерівність

$$\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}[M\{|\,b(s,x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\}+$$

$$+\int_U M\{|\,c(s,x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\,\Pi(du)\}ds\le QT(|\,\bar{x}(0)\,|^2+\alpha^2)\,.$$

Залишилось застосувати до (1.10) лему Гронуолла и потрібний результат випливає з нерівності (1.8), якщо покласти в (1.10) $t=T/\varepsilon$.

Наслідок 1.1. Нехай $a(t,x)\equiv A(t)x$, матриці рівномірно обмежені, задовольняють умові Ліпшиця по t і

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{s\ge 0}\|\frac{1}{T}\int_s^{s+T}A(t)dt-\bar{A}\,\|=0\,. \qquad (1.11)$$

Якщо для $B(t,x)$ і $C(t,x,u)$ виконуються умови теореми 1.2 з $\alpha=0$, то для кожного $T>0$ і всіх достатньо малих $\varepsilon>0$ виконується нерівність

$$M\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon}|\,x(t,0,\bar{x}(0))-\bar{x}(\varepsilon t)\,|^2\}\le g_1(\varepsilon T)\,|\,\bar{x}(0)\,|^2\,,$$

причому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}g_1(\varepsilon,T)=0.$$

Доведення. Нерівність (1.8) у цьому випадку буде випливати з співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t(A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A})e^{\bar{A}s}ds\,|=0\,. \qquad (1.12)$$

Для кожного фіксованого $T>0$ для будь-якого $\delta>0$ можні підібрати таке число $\Delta>0$, що матрична функція $e^{\bar{A}s}$ буде відрізнятись від кусково сталої функції

$$F(t)=e^{\bar{A}s}\ \text{при}\ t\in[k\Delta,(k+1)\Delta],k=0,1,2,...$$

не більш, ніж на δ, причому $\|F(t)\|\le e^{\bar{A}T}$. Тоді

$$\int_0^t\|\,A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A}\,\|\|\,e^{\bar{A}s}-F(s)\,\|\,ds\le Ct\delta$$

при всіх $t\in[0,T]$. Отже, на підставі довільного вибору $\delta>0$ достатньо показати, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}\|\int_0^t(A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A})F(s)ds\,\|=0\,.$$

Оскільки при фіксованому $T>0$ і будь-якому $\Delta>0$

$$\sup_{\substack{0\le t\le\Delta\\ 0\le\tau\le T}}\int_\tau^{\tau+t}\|\,A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A}\,\|\|\,F(s)ds\,\|\le C_1\Delta$$

для деякого $C_1>0$, то твердження наслідку 1.1 буде доказано, якщо покажемо, що при фіксованих $T>0$ і $\Delta>0$ справджується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{[\frac{T}{\varepsilon}]}\|\int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta}(A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A})ds\,\|\|\,F(k\Delta)\,\|=0\,.$$

Але

$$\|\int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta}(A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A})ds\,\|=\|\,\varepsilon\int_{\frac{k\Delta}{\varepsilon}}^{\frac{k\Delta}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}}(A(\tau)-\bar{A})d\tau\,\|\le$$

$$\le\Delta\sup_{s\ge 0}\|\frac{\varepsilon}{\Delta}\int_s^{s+\frac{\Delta}{\varepsilon}}(A(\tau)-\bar{A})d\tau\,\|\to 0$$

для $\varepsilon\to 0$ та кожного $\Delta>0$ за умовою (1.11).

Тому

$$\sum_{k=0}^{[\frac{T}{\Delta}]}\|\int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta}(A(\frac{s}{\varepsilon})-\bar{A})ds\,\|\le$$

$$\le T\sup_{s\ge 0}\|\frac{\varepsilon}{\Delta}\int_s^{s+\frac{\Delta}{\varepsilon}}(A(\tau)-\bar{A})d\tau\,\|\to 0$$

для $\varepsilon\to 0$ і наслідок 1.1 встановлено.

2. Усереднення в стохастичних диференціально-функціональних рівняннях

На імовірнісному базисі (Ω,F,P,F), розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння з малим параметром $\varepsilon>0$

$$dx(t)=\varepsilon\{a(t,x_t)dt+b(t,x_t)dW(t)+\int_U c(t,x_t,u)\tilde{\nu}(dt,du)\}\,, \qquad (2.1)$$

де $x_t=\{x(t+\theta),\theta\in[-h,0]\}$; $a(\cdot,\cdot),b(\cdot,\cdot)$ – вимірні відображення $R_+\times D_n([-h,0])$ в R^n, $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ – вимірне відображення $R_+\times D_n([-h,0])\times U$ в R^n, яке задовольняє умові рівномірної обмеженості в нулі для всіх $t\ge 0$

$$|\,a(t,0)\,|^2+|\,b(t,0)\,|^2+\int_U|\,c(t,0,u)\,|^2\Pi(du)\le\alpha^2\,, \qquad (2.2)$$

і глобальній умові Ліпшиця

$$|\,a(t,\varphi)-a(t,\psi)\,|^2+|\,b(t,\varphi)-b(t,\psi)\,|^2+$$

$$+\int_U|\,c(t,\varphi,u)-c(t,\psi,u)\,|^2\Pi(du)\le L\,\|\,\varphi-\psi\,\|^2\,, \qquad (2.3)$$

де $\varphi,\psi\in D_n([-h,0])$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [2], [12], [20]; $t\in R_+$, $\|\varphi\|=\sup_{-h\le\theta\le 0}|\,\varphi(\theta)\,|$.

Для $\varphi\in D_n([-h,0])$ позначимо $\hat{\varphi}$ функцію на $[-h,0]$, тотожно рівну $\varphi(0)$. Для x_t в (2.1) $\hat{x}_t$ означає елемент $C_n([-h,0])$, тотожно по $\theta\in[-h,0]$ рівний $x(t)$. Поряд з (2.1) розглянемо рівняння

$$dy(t)=\varepsilon\{\hat{a}(t,y(t))dt+\hat{b}(t,y(t))dW(t)+$$

$$+\int_U\hat{c}(t,y(t),u)\tilde{\nu}(dt,du)\}\,, \qquad (2.4)$$

де $\hat{a}(t,y(t))=a(t,\hat{y}_t)$, $\hat{b}(t,y(t))=b(t,\hat{y}_t)$, $\hat{c}(t,y(t),u)=c(t,\hat{y}_t,u)$.

Покладемо, що при всіх $x\in R^n$ рівномірно по $s\ge 0$ існує границя

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_s^{s+T}\hat{a}(t,x)dt=\bar{a}(x) \qquad (2.5)$$

і поряд з (2.1) розглянемо рівняння усередненого руху

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{a}(\bar{x})\,. \qquad (2.6)$$

Оцінимо нормовану різницю

$$\eta_\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[x(\frac{t}{\varepsilon},0,\varphi)-\bar{x}(t,0,\varphi(0))]\,. \qquad (2.7)$$

Спочатку доведемо допоміжне твердження:

Теорема 2.1. *Якщо виконані умови (2.2) и (2.3), то при всіх* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varphi \in D_n([-h,0])$ *и* $T \ge 0$ *для різниці розв'язків (2.1) и (2.4) має місце нерівність*

$$M\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon} | x(t,0,\varphi) - y(t,0,\varphi(0))|^2\} \le g(\varepsilon,T)\varepsilon^2(\|\varphi\|^2 + \alpha^2), \quad (2.8)$$

де $g(\varepsilon,T)$ *для кожного* $T > 0$ *задовольняє співвідношенню*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon,T) = C(T) < \infty. \quad (2.9)$$

Доведення. Для скорочення записів позначимо

$$x(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0), \\ x(t,0,\varphi), & t \ge 0; \end{cases}$$

$$y(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0), \\ y(t,0,\varphi(0)), & t \ge 0. \end{cases}$$

З мартингальної властивості стохастичних інтегралів [8], [4], умови Ліпшиця і рівномірної обмеженості можна отримати нерівність

$$M\{\sup_{0\le t\le\tau} |y(t)|^2\} \le 4|\varphi(0)|^2 + 8\varepsilon^2\tau(\tau+4)\alpha^2 +$$

$$+8\varepsilon^2 L(\tau+4)\int_0^\tau M\{\sup_{0\le t\le s}|y(t)|^2\}ds,$$

з якої, згідно леми Гронуолла [1],

$$M\{\sup_{-h\le t\le\tau}|y(t)|^2\} \le C_1(\varepsilon,\tau')(\|\varphi'\|^2 + \alpha^2);$$

де

$$c_1(\varepsilon,\tau) = 4(1+2\varepsilon^2\tau(\tau+4))\exp\{8L\varepsilon^2\tau(\tau+4)\}.$$

Тому при всіх $t \in [0,\tau]$ виконується нерівність

$$M\{\sup_{0\le\theta\le h}|y(t+\theta)-y(t)|^2\} \le$$

$$\le \varepsilon^2 M\{\sup_{0\le\theta\le h}(\int_t^{t+\theta}|a(s,y_s)|ds + |\int_t^{t+\theta} b(s,y_s)dW(s)| +$$

$$+|\int_t^{t+\theta}\int_U c(s,y_s,u)\tilde{\nu}(dt,du)|)^2\} \le \varepsilon^2 c_2(\varepsilon,\tau),$$

де

$$c_2(\varepsilon,\tau) = 6(h+4)[Lc_1(\varepsilon,\tau)(\|y\|^2 + \alpha^2) + \alpha^2 h].$$

Таким чином, для всіх $T \ge 0$ і $\tau \in [0,\frac{T}{\varepsilon}]$ можна записати

$$M\{\sup_{0\le t\le\tau}|x(t)-y(t)|^2\} \le 6\varepsilon^2 M\{(\int_0^\tau |a(s,y_s) -$$

$$-a(s,\hat{y}_s)|ds)^2 + 4\int_0^\tau |b(s,y_s)-b(s,\hat{y}_s)|^2 ds +$$

$$+4\int_0^\tau\int_U |c(s,y_s,u)-c(s,\hat{y}_s,u)|^2\Pi(du)ds\} +$$

$$+c\varepsilon^2(\frac{T}{\varepsilon}+4)[\int_0^\tau [M\{|a(s,y_s)-a(s,x_s)|^2 + M\{|b(s,y_s) -$$

$$-b(s,x_s)^2\} + \int_U M\{|c(s,y_s,u)-c(s,x_s,u)|^2\}\Pi(du)]ds \le$$

$$\le 6\varepsilon^2\{8h(h+2)Lc_1(\varepsilon,h)(\|y\|^2 + \alpha^2) + 2L(T+2\varepsilon)\times$$

$$\times Tc_2(\varepsilon,\frac{T}{\varepsilon}) + 6\varepsilon^2(\frac{T}{\varepsilon}+4)L\int_0^\tau M\{\sup|y(t)-x(t^2)|^2\}ds,$$

звідки, за лемою Гронуолла, випливає (2.8), (2.9). ■

З цієї теореми на підставі результатів [5], сформульованих у пункті 1, справедливе наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і, крім того:*

1) відображення $a(t,\varphi)$ *двічі неперервно диференційовне за Фреше по другому аргументу, причому друга похідна задовольняє глобальній умові Ліпшиця по другому аргументу рівномірно по* t;

2) для будь-якого розв'язку усередненого рівняння (2.6) при всіх $t \in [0,T]$ *виконуються співвідношення:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t [a(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}}_\tau) - \bar{a}(\bar{x}(\tau))]d\tau = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \nabla\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon},\bar{x}(\tau))d\tau = \int_0^\tau g(\tau)d\tau;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t [b(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}}_\tau)b^T(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}}_\tau)d\tau + \int_U c(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}}_\tau,u)\times$$

$$\times c^T(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}}_\tau,u)\Pi(du)]d\tau = \int_0^t f(\tau)f^T(\tau)d\tau,$$

$$|c(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{\bar{x}},u)| \le r(u), \quad \int_U r^2(u)\Pi(du) < \infty,$$

де $g(t)$ і $f(t)$ – неперервні матричні функції, $\hat{a}(t,\varphi(0)) = a(t,\hat{\varphi})$.

Тоді при $\varepsilon \to 0$ нормована різниця (2.7) збігається на відрізку $[0,T]$ до розв'язку лінійного неоднорідного стохастичного рівняння Іто (1.7).

3. Усереднення у квазілінійних стохастичних диференціально-функціональних рівняннях

Розглянемо квазілінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (КСДФР) на імовірнісному базисі $(\Omega, F, P, \mathrm{F})$ у вигляді

$$dx(t) = f(x_t)dt + \varepsilon\{a(t,x_t)dt + b(t,x_t)dW(t) +$$

$$+\int_U c(t,x_t,u)\tilde{\nu}(dt,du)\}, \quad (3.1)$$

з початковими умовами

$$x(t)|_{h\le t\le 0} = \varphi(\omega), \quad (3.1^*)$$

де f – лінійне неперервне відображення $C_n([-h,0])$ в R^n, а решта відображень з пункту 2. Надалі нам знадобиться твірний оператор A_0 розв'язної напівгрупи [20] для (3.1) у випадку $\varepsilon = 0$. Покладемо, що

$$\begin{aligned} &\sigma(A_0) = \sigma^0 \cup \sigma^\rho, \sigma^0 \subset \{z \in C : \mathrm{Re}\, z = 0\}, \\ &\sigma^\rho = \{z \in C : \mathrm{Re}\, z < -\rho < 0\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

причому алгебраїчна кратність σ^0 співпадає з геометричною. Позначимо P – проектор у кореневий підпростір оператора A_0, який відповідає σ^0. Позначимо:

$$H_0(t) \equiv \Pi_0 e^{tA_0}P\mathbf{1};\; H_1(t) \equiv \Pi_0 e^{tA_0}(J-P)\mathbf{1};$$

$$u(t) \equiv \Pi_0 e^{tA_0}P;$$

$$y_0(t) \equiv \Pi_0 e^{tA_0}P_\varphi;\; y_1(t) \equiv \Pi_0 e^{tA_0}(J-P)\varphi;$$

$$\mathbf{1} \in C([-h,0] \to M_n(R));\; \mathbf{1}(\theta) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \theta \in [-h,0), \\ 1 & \text{при} \quad \theta = 0, \end{cases}$$

а оператор Π_0 діє на векторні (або матричні) функції на відрізку $[-h,0]$ за правилом $\Pi_0\varphi = \varphi(0)$. Тоді КСДФР (3.1) можна очевидно переписати у вигляді системи інтегральних рівнянь:

$$u(t) = y_0(t) + \varepsilon\int_0^t H_0(t-\tau)a(\tau,u_\tau + v_\tau)d\tau +$$

$$+\varepsilon\int_0^t H_0(t-\tau)b(\tau,u_\tau + v_\tau)dW(\tau) + \quad (3.3)$$

$$+\varepsilon\int_0^t\int_U H_0(t-\tau)c(\tau,u_\tau + v_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du),$$

$$v(t)=y_1(t)+\varepsilon\int_0^t H_1(t-\tau)a(\tau,u_\tau+v_\tau)d\tau+$$
$$+\varepsilon\int_0^t H_1(t-\tau)b(\tau,u_\tau+v_\tau)dW(\tau)+ \qquad (3.4)$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_U H_1(t-\tau)c(\tau,u_\tau+v_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\,,$$

з початковою умовою

$u(\theta)=(P\varphi)(\theta)$, $v(\theta)=\varphi(\theta)-u(\theta)$ при $\theta\in[-h,0]$.

Поряд з (3.3) – (3.4) розглянемо "спрощену" систему рівнянь:

$$\breve{u}(t)=y_0(t)+\varepsilon\int_0^t H_0(t-\tau)a(\tau,\breve{u}_\tau)d\tau+\varepsilon\int_0^t H_0(t-\tau)b(\tau,\breve{u}_\tau)dW(\tau)+$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_U H_0(t-\tau)c(\tau,\breve{u}_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\,, \qquad (3.5)$$
$$\breve{v}(t)=y_1(t)+\varepsilon\int_0^t H_1(t-\tau)a(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau)d\tau+$$
$$+\varepsilon\int_0^t H_1(t-\tau)b(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau)dW(\tau)+$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_U H_1(t-\tau)c(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\,, \qquad (3.6)$$

с тими ж початковими умовами 3.1*.

Означення 3.1. *Назвемо тривіальний розв'язок (3.1) експоненціально стійким у середньому квадратичному з показником $\varepsilon\gamma>0$, якщо для всіх $\varphi\in D_n([-h,0])$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і $t\ge 0$ виконується нерівність*

$$M\{\|x_t(s,\varphi)\|^2\}\le Me^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\|\varphi\|^2 \qquad (3.7)$$

при деякому $M>0$. Відповідне означення для (3.5) має виду:

$$M\{\|\breve{u}_t(s,\varphi)\|^2\}\le Me^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\|\varphi\|^2\,. \qquad (3.8)$$

Лема 3.1. *Якщо виконуються (3.2), глобальна умова Ліпшиця (2.3), умова (2.2) при $\alpha=0$ і розв'язок (3.5) допускає оцінку (3.8), то розв'язок (3.6) має оцінку*

$$M\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le Me^{-\varepsilon\gamma_1(t-s)}\|\varphi\|^2\varepsilon^2 \qquad (3.9)$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $t\ge s\ge 0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$ і деяких $M_1>0$, $\gamma_1>0$, $\varepsilon_0>0$.

Доведення. Легко переконатись в тому, що справедливі нерівності

$$\|y_{1t}(s,\varphi)\|^2\le Ce^{-2\rho_1(t-s)}\|\varphi\|^2,\ \|H_1(t)\|^2\le Ce^{-2\rho_1(t)}\|\varphi\|^2 \qquad (3.10)$$

при деяких $C>0$, $\rho_1>0$ та всіх $t\ge s\ge 0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$. Крім того, з умов леми і нерівності Шварца [7] легко отримати нерівність

$$\left|\int_s^t H_1(t-\tau)a(\tau,\varphi)d\tau\right|^2\le$$
$$\le\left|\int_s^t e^{-\frac{\rho_1}{2}(t-\tau)}e^{\frac{\rho_1}{2}(t-\tau)}H_1(t-\tau)a(\tau,\varphi)d\tau\right|^2\le$$
$$\le C\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}d\tau\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}|a(\tau,\varphi)|^2\,d\tau\le$$
$$\le\frac{C}{\rho}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\|\varphi\|^2\,d\tau$$

для всіх $t\ge s\ge 0$ і $\varphi\in D_n([-h,0])$. За означенням $H_1(t)=0$ при всіх $t<0$ і тому з нерівності Ліпшиця і мартингальної властивості стохастичних інтегралів [8] випливає нерівність

$$M\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}H_1(t+\theta-\tau)b(\tau,z_\tau)dW(\tau)\right|^2\}+$$
$$+M\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}H_1(t+\theta-\tau)c(\tau,z_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\right|^2\}=$$
$$=M\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}H_1(t-\tau)b(\tau,z_\tau)dW(\tau)\right|^2\}+$$
$$+M\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}H_1(t-\tau)c(\tau,z_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\right|^2\}\le$$
$$\le 4LC\int_s^t M\{\|z_\tau\|^2\}e^{-2\rho_1(t-\tau)}d\tau$$

для довільного випадкового процесу $z(t)$, узгодженого з потоком F_t. Тому

$$M\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le\varepsilon^2\{\frac{16C}{\rho_1}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\times$$
$$\times e^{-\rho_1(\tau-s)}d\tau\|\varphi\|^2+\frac{8C}{\rho_1}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}M\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau+$$
$$+64CL\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}M\{\|\breve{v}_\tau(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}d\tau+$$
$$+64C^2L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}e^{-2\rho_1(\tau-s)}ds+$$
$$+32CL\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}M\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau\le$$
$$\le\varepsilon^2C_2(\|\varphi\|^2+\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}M\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau+$$
$$+\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}M\{\|\breve{v}_\tau(s,\varphi)-y_{1\tau}(s,\varphi)\|^2\}d\tau$$

для деякого $C_2>0$. На підставі оцінки (3.8) можна записати нерівність

$$\int_s^t e^{-\rho_1(t-s)}M\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau\le\frac{M_2\|\varphi\|^2}{\rho_1-\varepsilon\gamma}e^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\,.$$

Значить,

$$e^{\varepsilon r(t-s)}M\{\|\breve{v}(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le\varepsilon^2C_3(\|\varphi\|^2e^{-(\rho_1-\varepsilon\gamma)(t-s)}+$$
$$+\int_0^{t-s}e^{\varepsilon\gamma\tau}M\{\|\breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)-y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)\|^2\}d\tau$$

для деякого $C_3>0$. Звідси та з нерівності Гроноулла на підставі (3.10) справедлива оцінка

$$M\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le M_3e^{(-\varepsilon\gamma+\varepsilon^2C_2)(t-s)}\|\varphi\|^2\varepsilon^2,$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $t\ge s\ge 0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$ і деякого $M_3>0$, яка еквівалентна (3.9) для достатньо малого $\varepsilon_0>0$. Лему 3.1 доведено.

Позначимо $\breve{x}(t,s,\varphi)=\breve{u}(t,s,\varphi)+\breve{v}(t,s,\varphi)$ та оцінимо різницю

$$m(t,\varphi)=M\{\|x_{t+s}(s,\varphi)-\breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\}\,.$$

Лема 3.2. *В умовах леми 3.1. існує таке $\varepsilon_0>0$, що для будь-яких $T>0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $s\ge 0$, $t\in[0,\frac{T}{\varepsilon}]$ виконується нерівність*

$$M\{\| x_{t+s}(s,\varphi) - \breve{x}_{t+s}(s,\varphi) \|^2\} \le \varepsilon g(\varepsilon,T) \|\varphi\|^2 \quad (3.11)$$

причому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon,T) = C(T) < \infty .$$

Доведення. З (3.1), (3.5) та (3.6), використовуючи умову Ліпшиця, властивість функцій $H_0(t)$ і $H_1(t)$ та мартингальну властивість стохастичних інтегралів, легко для $m(t,\varphi)$ отримати нерівність

$$m(t,\varphi) \le 6\varepsilon^2 L\breve{H}(t+4)\{\int_0^t M\{\| \breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)\|^2\}d\tau + \int_0^t m(\tau,\varphi)d\tau ,$$

де $\breve{H} = \sup_{t\ge 0}\{\| H(t)\|^2, H_0(t)\|^2\}$. Далі, з (3.9) випливає

$$\int_0^t M\{\| \breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)\|^2\}d\tau \le 2\int_0^t M\{\| \breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi) - y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)\|^2\}d\tau +$$

$$+2\int_0^t \||\, y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)|^2\, d\tau \le \varepsilon^2 M_1 \int_0^t e^{-\varepsilon\gamma_1\tau}d\tau \|\varphi\|^2 + C\int_0^t e^{-\varepsilon\rho_1\tau}d\tau \|\varphi\|^2 \le$$

$$\le (\varepsilon M_1 \frac{1}{\gamma_1} + \frac{C}{2\rho_1})\|\varphi\|^2 .$$

Тому з нерівності Гронуолла маємо

$$m(\frac{T}{\varepsilon},\varphi) \le 6\varepsilon^2 \breve{H}(\frac{T}{\varepsilon}+4)(\varepsilon M_1\frac{1}{\gamma_1} + \frac{C}{2\rho_1})\|\varphi\|^2 e^{6\varepsilon L\breve{H}} ,$$

Звідки випливає (3.11). Лему 3.2 доведено.

Перепишемо (3.5) в базисі $F = \{f_1,\dots,f_n\}$ простору $V = PC_n([-h,0])$. Оскільки σ^0 є симетричним відносно $\operatorname{Im} z = 0$, то можна вибрати елементи базису $f_j, j = 1,\dots,m$ дійсними. Тоді існують такі матриці $D \in M_m(R)$ та $\Psi \in M_m(R)$ і вектори $X(t) \in R^m$, $\Phi \in R^m$, що

$$A_0 F = FD;\ P\mathbf{1} = F\Psi;\ \breve{u}_t = FX(t);$$

$$P\varphi = F\Phi;\ y_{0t} = Fe^{tD}\Phi;\ H_{0t} = Fe^{tD}\Psi .$$

Рівняння (3.5) породжує стохастичне диференціальне рівняння для $X(t) \equiv X(t,\omega)$

$$\frac{dX(t)}{dt} = DXdt + \varepsilon\Psi\{\alpha(t,FX(t))dt +$$

$$+b(t,FX(t))dW(t) + \int_U c(t,FX(t),u)\tilde{v}(dt,du)\} ,$$

яке можна заміною $X(t) = e^{tD}Y(t)$ звести до стандартної форми (1.1):

$$\frac{dY}{dt} = \varepsilon e^{-tD}\Psi\{a(t,Fe^{tD}Y)dt +$$

$$+b(t,Fe^{tD}Y)dW(t) + \int_U c(t,Fe^{tD}Y,u)\tilde{v}(dt,du)\} . \quad (3.12)$$

Початкові умови знаходяться з нерівності $P\varphi = FY(0)$. Позначимо

$$\bar{a}(Y) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_s^{s+t} e^{-\tau D}\Psi a(\tau,Fe^{\tau D}Y)d\tau . \quad (3.13)$$

Якщо ця границя існує рівномірно по s, то можна для (3.12) скористатись теоремою 1.2 і записати нерівність:

$$M\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon} |Y(t) - \bar{Y}(\varepsilon t)|^2\} \le g_1(\varepsilon,T)|Y(0)|^2 , \quad (3.1.4)$$

де $\bar{Y}(t)$ – розв'язок повністю спрощеного рівняння

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} = a(\bar{Y}),\ \bar{Y}(0) = Y(0). \quad (3.15)$$

Використовуючи спряжений базис и обмеженість операторів P і e^{tD} можна замість (3.14) записати нерівність

$$M\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon} |X(t) - e^{tD}\bar{Y}(\varepsilon t)|^2\} \le g_1(\varepsilon,T)|Y(0)|^2 , \quad (3.16)$$

де $\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon,T) = 0$ для всіх $T \ge 0$, причому $|Y(0)|^2 \le C\|\varphi\|^2$ для деякого $C > 0$.

Теорема 3.1. *Якщо існує рівномірно по* $s \ge 0$ *границя (3.13), виконується (3.1), глобальна умова Ліпшиця (2.3), умова (2.2) при* $\alpha = 0$ *і спектр матриці* $A = (\nabla\bar{a})(0)$ *розташований у півплощині* $\{z \in C : \operatorname{Re} z < 0\}$, *то тривіальний розв'язок (3.1) буде експоненціально стійким в середньому квадратичному з показником* $\varepsilon\gamma > 0$ *для всіх* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *і достатньо малого* $\varepsilon_0 > 0$.

Доведення. Потрібно переконатись в тому, що в умовах теореми виконується нерівність (3.7). Представимо

$$M\{\| x_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} \le 2M\{\| x_{t+s}(s,\varphi) - \breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} +$$

$$+2M\{\| \breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\}$$

і оцінимо окремо обидва доданки з правої частини цієї нерівності. Оскільки тривіальний розв'язок (3.15) експоненціально стійкий, то при всіх F_s-вимірних $Y(0)$, $T > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і для достатньо малого $\varepsilon_0 > 0$ можна отримати для умовного математичного сподівання нерівності

$$E\{\sup_{\frac{T}{\varepsilon}-h\le t\le\frac{T}{\varepsilon}} |Y(t+s,s,Y(0))|^2 / F_s\} \le 2\sup_{\frac{T}{\varepsilon}-h\le t\le\frac{T}{\varepsilon}} |\bar{Y}(\varepsilon t)|^2 +$$

$$+2E\{\sup_{0\le t\le\frac{T}{\varepsilon}} |Y(t+s,s,Y(0)) - \bar{Y}(\varepsilon t)|^2 / F_s\} \le$$

$$\le 2(Me^{-\gamma(T-h\varepsilon)} + g_1(\varepsilon,T))|Y(0)|^2$$

для деяких $\gamma > 0$ і $M > 0$. Тепер можна вибрати настільки великим, а потім $\varepsilon_0 > 0$ настільки малим, щоб при даному $T > 0$ і всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ виконувалась нерівність

$$Me^{-\gamma(T-h\varepsilon)} + g_1(\varepsilon,T) < \frac{1}{4} .$$

Для будь-якого розв'язку (3.12) можна при $\tau \geq s+h$ і вибраних $T > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ записати нерівність

$$E\{\sup_{\frac{T}{\varepsilon}-h\leq t\leq \frac{T}{\varepsilon}} |Y(t+\tau,\tau,Y(\tau,s,Y(0)))|^2 / F_s\} =$$

$$E\{E\{\sup_{\frac{T}{\varepsilon}-h\leq t\leq \frac{T}{\varepsilon}} |Y(t+\tau,\tau,Y(\tau,s,Y(0)))|^2 / F_\tau\} / F_s\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}E\{|Y(\tau,s,Y(0))|^2 / F_s\} \leq \frac{1}{2}E\{\sup_{-h\leq\tau\leq 0} |Y(\tau,s,Y(0))|^2 / F_s\}$$

для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Тому, позначивши

$$\mu_k = E\{\sup_{\frac{kT}{\varepsilon}\leq t\leq (k+1)\frac{T}{\varepsilon}} |Y(t+s,s,Y(0))|^2 / F_s\},$$

можна записати для всіх $k \in N$ рекурентну нерівність $\mu_k \leq 1/2\mu_{k-1}$, а потім підібрати такі числа $M_1 > 0$ і $\gamma_1 > 0$, щоб для даного $T > 0$ і всіх $k \in N$ виконувалась нерівність $\mu_k \leq M_1 e^{-\gamma T k} |Y(0)|^2$. З цієї нерівності випливає оцінка (3.8). Значить, на підставі леми 3.1

$$E\{\|\breve{v}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} \leq 2M_1 e^{-\varepsilon\gamma_1 t}\varepsilon^2 \|\varphi\|^2 + M_2 e^{-\rho_2 t}\varepsilon^2 \|\varphi\|^2 \quad (3.17)$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varphi \in C_n([-h,0])$, $t \geq 0$ та деяких додатних M_1, M_2, γ_1 і ρ_2.

Тут використано рівність $FX(t) = Fe^{tD}Y(t)$ і нерівність $|Y_1(0)| \leq C\|\varphi\|$ для деякого $C > 0$. Отже, при фіксоваих $T > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ вірна нерівність

$$M\{\|\breve{x}_{s+\frac{T}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\} \leq 2M\{\|\breve{u}_{s+\frac{T}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\} +$$

$$+2M\{\|\breve{v}_{s+\frac{T}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\} \leq M_3(e^{-\gamma_3 T} + e^{-\rho_2\frac{T}{\varepsilon}})\|\varphi\|^2$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varphi \in C_n([-h,0])$ і деяких $M_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, $\rho_2 > 0$. Крім того, з леми 3.1 при тих же значеннях параметрів маємо оцінку (3.11). Тому

$$M\{\|x_{s+\frac{T}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\} \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \quad (3.18)$$

для всіх $s \geq 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і $\varphi \in D_n([-h,0])$. Поклавши у попередній нерівності $s = \tau + k\frac{T}{\varepsilon}$, маємо для довільних $\tau \geq 0$ і $k \in N$:

$$M\{\|\breve{x}_{\tau+k\frac{T}{\varepsilon}}(\tau,\varphi)\|^2\} \leq (\frac{1}{2})^k \|\varphi\|^2 .$$

Тепер, використовуючи F_t-узгодженість розв'язків (3.5), (3.6), можна при всіх $\tau \geq s \geq 0$ з нерівностей (3.14) і (3.17) довести оцінку

$$\sup_{\frac{kT}{\varepsilon}\leq t\leq (k+1)\frac{T}{\varepsilon}} M\{\|x_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} \leq M_5(T)M\{\|x_{s+\frac{kT}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\} \leq$$

$$\leq M_5(t)\frac{1}{2}M\{\|x_{s+(k-1)\frac{T}{\varepsilon}}(s,\varphi)\|^2\};$$

тобто, для деякого $M_s > 0$ вірна нерівність

$$\sup_{\frac{kT}{\varepsilon}\leq t(k+1)\frac{T}{\varepsilon}} M\{\|x_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} \leq M_3 e^{-k\ln 2\|\varphi\|^2} .$$

Тому $\forall t \geq 0$ буде виконуватись

$$M\{\|x_{t+s}(s,\varphi)\|^2\} \leq M_3 e^{-\ln 2[\frac{t\varepsilon}{T}]}\|\varphi\|^2 \leq Me^{-\varepsilon\gamma t}\|\varphi\|^2$$

для деякого $M > 0$ і $\gamma = \frac{\ln 2}{T}$, що і потрібно було довести.

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с. 2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с. 3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1962. – 412 с. 4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с. 5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 354 с. 6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с. 7. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. 1. Общая теория. – М.: НЛ, 1962. – 895 с. 8. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. – М.: НЛ, 1965. – 605 с. 9. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с. 10. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.1. – М.: Наука, 1994. – 544 с. 11. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.2. – М.: Наука, 1996. – 628 с. 12. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с. 13. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М. Наука, 1981. – 448 с. 14. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. – В 3-х томах. – Т.3. – Випадкові процеси. Комп'ютерне моделювання. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. – 798 с. 15. Пинни Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1961. – 248 с. 16. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М. Наука, 1969. – 287 с. 17. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 1987. – 328 с. 18. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с. 19. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с. 20. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 429 с. 21. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Изд-во "Ориентир", 1990. – 314 с. 22. Шахгильдян В.В., Ляховкин Л.А. Фазовая автоподстройка частоты. – М.: Изд-во "Связь", 1972. – 447 с. 23. Korolyuk V.S., Limnions W. Stochastic systems in merging Phase Space. – London: World Scientific, 2006. – 331 p. 24. Самойленко А.М., Станжицький О.М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. – Київ: Наукова думка, 2009. – 336 с.

Надійшла до редколегії 12.07.10

УДК 519.21

В. Стоян, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
О. Когут, асп.,
Я. Крисак, ст. викл.

ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ РОЗПОДІЛЕНИХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ПРОЦЕСІВ

Пропонується алгоритм переходу від математичної моделі розподіленого просторово-часового процесу, поданої системою диференціальних рівнянь, до її інтегрального представлення. Розглянуто приклади.

The algorithm of transition from mathematical model of separate spatial-temporal process represented by the system of the differential equations to its integral representation is proposed. Examples are suggested.

Питання дослідження матричних лінійно-диференціальних моделей на предмет побудови функції стану та керування нею давно стали класичними. Це відноситься як до систем із зосередженими так і (в меншій мірі) з розподіленими параметрами. Запропоновані в [1, 2] підходи дозволяють розв'язувати ці задачі в умовах неповноти інформації про їх початково-крайовий стан. Будуються вони з використанням функції одиничного джерела (функції Гріна для необмеженої просторово-часової області), яка будучи добре дослідженою [2, 3] для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних не вивчена для систем таких рівнянь. На усунення цього недоліку і направлена дана публікація. Будуть записані аналітичні представлення такої функції для систем лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Будуть наведені приклади використання отриманих математичних результатів для побудови інтегральних представлень лінійних диференціальних моделей конкретних процесів.

1. Розглянемо розподілений в необмеженій просторово-часовій області $S = \{s = (x,t) : x \in R^{\nu}, -\infty < t < \infty\}$ просторово-часовий процес, функція $y(s)$ стану якого задовольняє співвідношенню:

$$L(\partial_s)\vec{y}(s) = \vec{u}(s) \quad (s \in S), \tag{1}$$

де $\vec{u}(s) \in R^m$, $\vec{y}(s) \in R^n$ $\forall s \in S$, а $L(\partial_s)$ – матричний розмірності $m \times n$ диференціальний оператор, в якому $\partial_s = \partial_{x_1},...,\partial_{x_n},\partial_t$.

Побудуємо матричну функцію $G(s-s') \in R^{n\times m}$ таку, щоб

$$\vec{y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')\vec{u}(s')ds'. \tag{2}$$

Неважко бачити, що визначена таким чином функція $G(s-s')$ задовольнятиме рівнянню

$$L(\partial_s)G(s-s') = \Delta(s-s'), \tag{3}$$

в якому

$$\Delta(s-s') = diag(\delta(s-s'), i = \overline{1,m}),$$

де $\delta(s-s')$ – δ - функція Дірака.

Для розв'язання (3) будемо виходити з того, що [4]

$$\delta(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T(s-s')} d\lambda, \tag{4}$$

де i – уявна одиниця, $s = (x_1,...,x_\nu,t)^T$, $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_\nu,\mu)^T$, $d\lambda = d\lambda_1...d\lambda_\nu d\mu$.

Враховуючи, що

$$(\partial_s)^{\pm N}\delta(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^{\pm N} e^{i\lambda^T(s-s')} d\lambda$$

для всякого цілого додатного N, отримаємо, що розв'язком (3) може бути функція

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} [L(i\lambda)]^{+} e^{i\lambda^T(s-s')} d\lambda, \tag{5}$$

в якій знаком "+" позначена операція псевдообернення [1, 2] матриці.

Поклавши $i\lambda = p$ та позначивши через $\Delta(p)$ визначник матриці $L(p)$, а через $\overline{L}(p) = \Big[(-1)^{k=l} L_{lk}(p)\Big]_{k,l=1}^{k=n,l=m}$ матрицю, в якій $L_{lk}(p)$ – алгебраїчне доповнення до (k,l)-елемента матриці $L(p)$, від представлення (5) функції $G(s-s')$ перейдемо до наступного

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi i)^{\nu+1}} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(p)e^{p^T(s-s')} dp. \tag{6}$$

Тут $F(p) = \dfrac{\overline{L}(p)}{\Delta(p)}$, $p = (p_1,...,p_\nu,q)$, $p^T(s-s') = \sum_{j=1}^{\nu} p_j(x_j - x'_j) + q(t-t')$, а решта позначень відповідають прийнятим вище.

Звідки знаходимо, що

$$G(s-s') = \sum_{k_1=1}^{K_1} \mathrm{Res}[...\mathrm{Res}[\sum_{k_{\nu-1}=1}^{K_{\nu-1}} \mathrm{Res}[\sum_{k_\nu=1}^{K_\nu} \mathrm{Res}[\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}[F(p)\times \\ \times e^{p^T(s-s')}, q_k^*], p^*_{\nu,k_\nu}], p^*_{\nu-1,k_{\nu-1}}], p^*_{\nu-2,k_{\nu-2}}],...,p^*_{1,k_1}], \tag{7}$$

де q_k^* та p^*_{i,k_i} $(i = \overline{1,\nu})$ – k-ті та k_i-ті полюси функції $F(p)$ за змінними q та p_i, K та K_i – їх кратності, а $\mathrm{Res}[<\textit{функція}>,<\textit{полюс}>]$ – інтегральний лишок відповідної <функції> у відповідному <полюсі> за змінною q та p_i $(i = \overline{1,\nu})$ відповідно.

На першому етапі обчислення <полюси> ці визначатимуться коренями функцій $\Delta(p)$ за змінною q, а на наступних етапах – коренями знаменників раціональних функцій $\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}\Big[F(p)e^{p^T(s-s')}, q_k^*\Big]$, $\sum_{k_j=1}^{K_j} \mathrm{Res}[...]$ $(j = \overline{\nu,1})$ за змінними p_i $(i = \overline{\nu,1})$.

При цьому [5]

$$\mathrm{Res}\Big[F(p), q_k^*\Big] = \frac{\varphi(q_k^*)}{\psi'(q_k^*)}, \tag{8}$$

якщо $F(p)=\dfrac{\varphi(q)}{\psi(q)}$, а q_k^* – простий корінь рівняння $\psi(q)=0$, або

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(q)}{\psi(q)},q_k^*\right]=\frac{1}{(K-1)!}\lim_{q\to q_k^*}\frac{d^{K-1}}{dp^{K-1}}\left[(q-q_k^*)^K\frac{\varphi(q)}{\psi(q)}\right], \quad (9)$$

якщо q_k^* – корінь рівняння $\psi(q)=0$ кратності K.

Співвідношеннями (8), (9), записаними стосовно змінних $p_v,p_{v-1},...,p_1$, визначатимуться інтегральні лишки і на наступних етапах.

Частинним випадком (5) буде той, коли $m=n=1$, а досліджувана модель представлена лінійним диференціальним рівнянням

$$L(\partial_t)y(t)=u(t),$$

де $L(\partial_t)=\partial_t^n+a_1\partial_t^{n-1}+...+a_n$.

При цьому

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{p(t-t')}}{L(p)}dp=\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}\left[\frac{e^{p(t-t')}}{L(p)},p_k\right], \quad (10)$$

де N – кількість коренів полінома $L(p)$, а p_k $(k=\overline{1,N})$ – самі корені.

Зауважимо, що представлення (8), (9) матимуть місце за умов аналітичності <функції> за відповідними змінними в усій комплексній площині за винятком скінченого числа ізольованих точок.

2. Розглянемо приклади використання запропонованого вище підходу до побудови функцій $G(s-s')$, а отже і розв'язки конкретних рівнянь.

Для простоти зупинимось на випадку, коли $v=0$, $s\equiv t$, а:

$$1)\ L(\partial_s)\overset{\Delta}{=}L(\partial_t)=\partial_t^2-a^2, \quad (t\in[0,T]) \quad (11)$$

(одновимірне стаціонарне рівняння дифузії) [6];

$$2)\ L(\partial_s)\overset{\Delta}{=}L(\partial_t)=\partial_t^2+a^2, \quad (t\in[0,T]) \quad (12)$$

(гармонічне рівняння) [1].

Згідно [3] розв'язок рівняння

$$L(\partial_t)y(t)=u(t), \quad (13)$$

запишемо у вигляді

$$y(t)=\int_0^t G(t-t')u(t')dt', \quad (14)$$

де згідно (10)

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{p(t-t')}}{p^2-a^2}dp=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{p(t-t')}}{p^2-a^2},a\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{p(t-t')}}{p^2-a^2},-a\right]. \quad (15)$$

Звідки з врахуванням (8) отримаємо:

$$G(t-t')=-\frac{e^{a(t-t')}}{2a}+\frac{e^{-a(t-t')}}{-2a}. \quad (16)$$

Оскільки знайдена згідно (16) функція $G(t-t')$ є розв'язком рівняння (13) для випадку, коли $u(t)=\delta(t-t')$, то, як і всякий розв'язок рівняння (13), вона повинна задовольняти умовам затухання на нескінченності, тобто

$$G(t-t')\to 0 \text{ при } t>t' \text{ та } t\to+\infty;$$
$$G(t-t')\to 0 \text{ при } t<t' \text{ та } t\to-\infty.$$

З врахуванням останнього з (16) отримаємо

$$G(t-t')=\begin{cases}-\dfrac{1}{2a}e^{a(t-t')}, & t<t';\\ -\dfrac{1}{2a}e^{-a(t-t')}, & t>t'.\end{cases} \quad (17)$$

Вираз (17) функції $G(t-t')$, знайдений згідно (10), порівняємо з розв'язком [6] рівняння (3), яким ця функція визначається. Будемо виходити з того, що рівняння (3) у нашому випадку має вигляд

$$(\partial_t^2-a^2)G(t-t')=\delta(t-t'). \quad (18)$$

Інтегруючи (18) в околі точки t' отримуємо

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{d^2G(t-t')}{dt^2}dt-a^2\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}G(t-t')dt=\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\delta(t-t')dt,$$

звідки при $\varepsilon\to 0$ маємо наступне:

$$\left.\frac{dG(t-t')}{dt}\right|_{t'+\varepsilon}-\left.\frac{dG(t-t')}{dt}\right|_{t'-\varepsilon}=1. \quad (19)$$

Позначивши через $G^+(t-t')$ та $G^-(t-t')$ функцію $G(t-t')$ для $t>t'$ та $t<t'$ відповідно та враховуючи, що

$(\partial_t^2-a^2)G^+(t-t')=0$ для $t>t'$, $G^+(t-t')\to 0$ при $t\to+\infty$,

$(\partial_t^2-a^2)G^-(t-t')=0$ для $t<t'$, $G^-(t-t')\to 0$ при $t\to-\infty$, маємо

$$G^+(t-t')=\beta^+e^{-a(t-t')}0, \quad t>t';$$
$$G^-(t-t')=\alpha^-e^{a(t-t')}0, \quad t<t';$$

де α^-, β^+ – константи, значення яких знайдемо з (19) з врахуванням умов неперервності функції $G(s-s')$. При цьому $\alpha^-=\beta^+=-\dfrac{1}{2a}$. З врахуванням останнього отримуємо функцію $G(t-t')$, вигляд якої співпадає з наведеним в (17).

Зауважимо, що аналогічно (15), (16) можна легко побудувати функцію $G(t-t')$ і для системи (12), (13). При цьому

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{q(t-t')}}{q^2+a^2}dq=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{q(t-t')}}{q^2+a^2},ia\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{q(t-t')}}{q^2+a^2},-ia\right]=$$
$$=\frac{1}{2a}\sin a(t-t'), \quad (20)$$

що співпадає з виразом цієї функції, отриманим іншим [1] методом.

3. Побудуємо розв'язок одного із розглянутих вище рівнянь, а саме – рівняння (12), (13), з використанням функції $G(t-t')$, знайденої згідно (6) для системи рівнянь, яка відповідає (12), (13). Для цього рівняння (12), (13) подамо системою

$$\partial_t y(t)=y_1(t),$$
$$a^2y(t)+\partial_t y_1(t)=u(t),$$

або, що еквівалентно, рівнянням (1), в якому

$$L(\partial_t)=\begin{pmatrix}\partial_t & -1\\ a^2 & \partial_t\end{pmatrix},\quad \bar{y}(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\ y_1(t)\end{pmatrix},\quad \bar{u}(t)=\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix}.$$

При цьому, згідно (2),(6),

$$\bar{y}(t)=\int_0^t \bar{G}(t-t')\bar{u}(t')dt',$$

де

$$\bar{G}(t-t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\bar{L}(p)}{p^2+a^2}e^{p(t-t')}dp=\frac{1}{2ia}\begin{pmatrix}ia & 1\\ -a^2 & ia\end{pmatrix}e^{ia(t-t')}+\frac{1}{-(2ia)}\begin{pmatrix}-ia & 1\\ -a^2 & -ia\end{pmatrix}e^{-ia(t-t')}$$

Звідки з врахування умов затухання на нескінченності отримаємо

$$\bar{G}(t-t')=\frac{1}{2ia}\begin{pmatrix}ia & -1\\ a^2 & ia\end{pmatrix}e^{-ia(t-t')},$$

а $y(t)=\frac{1}{2a}\int_0^t u(t')\sin a(t-t')dt'$,

що співпадає з розв'язком розглядуваної системи, отриманим згідно (14), (20).

1. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динамічних систем з розподіленими параметрами. – К.: "Наукова думка", 2001. – 361 с. 2. Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – К.: Вид-во "Сталь", 2008. – 316 с. 3. Стоян В.А. До побудови функцій Гріна для систем з розподіленими параметрами // Журн. обчисл. та прикл. матем. – Вип.81. – 1998. – с.108-111. 4. Соколов А.А. Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики // Труды Свердловск. горно-геолог. ин-та. – Свердловск, 1946. – Вип.VI. – 46 с. 5. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Изд-во Киевск. ун-та, 1968. – 103 с. 6. Гладкий А.В., Сергієнко І.В., Скопецький В.В., Гладка Ю.А. Основи математичного моделювання в екології. – К.: НТУУ "КПІ", 2009. – 240 с.

Надійшла до редколегії 22.12.09

УДК 519.6

В. Стоян, магістр

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Будується та досліджується на точність та однозначність загальний розв'язок лінійних алгебраїчних систем, коефіцієнти яких є лінійним перетворенням шуканого вектора.

The general solution of linear algebraic systems is constructed and researched on exactness and clarity. The coefficients of these systems are linear substitution of the searching vector.

Проблеми поглибленого і більш точного вивчення природних процесів і явищ заставляють уточнювати і добре відомі їх математичні моделі. Одним із варіантів такого уточнення є перехід [1, 2, 3] від класично лінійних моделей до нелінійних математичних моделей. Вивченню цього питання для лінійних алгебраїчних систем і присвячена дана публікація. З використанням апарату псевдоінверсної алгебри [4, 5, 6] та методики його поширення на нелінійні алгебраїчні системи, запропонованого в [7], буде побудовано та досліджено загальний розв'язок, а за його відсутності – найкраще середньоквадратичне наближення до нього, для систем алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти яких поліноміально (більш загально, ніж в [7]) залежать від самого розв'язку.

1. Розглянемо лінійну алгебраїчну систему

$$Ax=b \tag{1}$$

за відомих $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^m$.

Розв'язком

$$\hat{x}=\arg\min_{x\in\Omega_x}\|Ax-b\|^2 \tag{2}$$

системи (1) при

$$\Omega_x=\{x\in R^n:\ \|Ax-b\|^2\to\min_x\} \tag{3}$$

буде [6]

$$\hat{x}=A^TP_1^+b=P_2^+A^Tb, \tag{4}$$

де $P_1=AA^T$, $P_2=A^TA$, а знаком "+" позначена операція псевдообернення [5] матриці. При цьому

$$\Omega_x=\{x:\ x=\hat{x}+v-A^+Av,\ \forall v\in R^n\}. \tag{5}$$

Зауважимо, що множина Ω_x буде:

1) точним і однозначним розв'язком (1), якщо

$$\varepsilon^2=b^Tb-b^TP_1P_1^+b=0, \tag{6}$$
$$\det P_2>0;$$

2) множиною точних розв'язків (1), якщо

$$\varepsilon^2=\det P_2=0; \tag{7}$$

3) однозначним середньоквадратичним наближенням до розв'язку, якщо

$$\varepsilon^2>0,\quad \det P_2>0; \tag{8}$$

4) множиною середньоквадратичних наближень до розв'язку, якщо

$$\varepsilon^2>0,\ \det P_2=0. \tag{9}$$

Точність такого наближення визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2=\min_{x\in\Omega_x}\|Ax-b\|^2. \tag{10}$$

2. Дослідимо систему (1) для випадку, коли при заданому $b\in R^m$ стовпці $a_1,\dots,a_n$ ($a_i\in R^m$) матриці A визначаються співвідношеннями

$$a_i=A_ix\ \ (i=\overline{1,n}), \tag{11}$$

де A_i – відомі матриці розмірності $m\times n$, $x=(x_1,\dots,x_n)^T$.

У цьому випадку

$$(A_1x,\dots,A_nx)x=b, \tag{12}$$

або, що еквівалентно,

$$\bar{A}\alpha=b, \tag{13}$$

де

$$\alpha=col((x_ix_j,\ j=\overline{1,n}),\ i=\overline{1,n}), \tag{14}$$
$$\bar{A}=str(A_i,i=\overline{1,n}).$$

Для рівняння (13) згідно (4), (5) знаходимо

$$\Omega_\alpha=\{\alpha\in R^{n^2}:\ \|\bar{A}\alpha-b\|^2\to\min_\alpha\}=\hat{\alpha}+\bar{v}-\bar{A}^T\bar{P}_1^+\bar{A}\bar{v} \tag{15}$$
$$\forall\bar{v}\in\{v:\ \alpha^2_{(i-1)M+j}=\alpha_{(i-1)M+i}\alpha_{(j-1)M+j}\},$$

де

$$\hat{\alpha}=\arg\min_{x\in\Omega_\alpha}\|\bar{A}\alpha-b\|^2=\bar{A}^T\bar{P}_1^+b, \tag{16}$$

а $\bar{P}_1=\bar{A}\bar{A}^T$.

З урахуванням визначення (14) вектора α, з (15) знаходимо компоненти x_i $(i=\overline{1,n})$ вектора x, який є розв'язком (13), а отже і (12). При цьому

$$x \in \Omega_x = \{x = col(x_i, i=\overline{1,n}): \ x_i \in \Omega_i \ \ i=\overline{1,n}\}, \qquad (17)$$

де

$$\Omega_i = \{x_i : x_i^2 = \alpha_{(i-1)n+2} \ \ (i=\overline{1,n})\}.$$

Згідно (6) – (10), точність, з якою знайдений з врахуванням (17) вектор x задовольнятиме (12), визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_x \|(A_1x,\ldots,A_nx)x - b\|^2 = b^Tb - b^T\bar{P}_1\bar{P}_1^+ b. \qquad (18)$$

Множина ж Ω_i $(i=\overline{1,n})$ знайдених таким чином векторів x буде однозначною $(\bar{v}\equiv 0)$ за умови, коли

$$\det(\bar{A}^T\bar{A}) > 0. \qquad (19)$$

3. Узагальнимо отримані вище результати на задачу середньоквадратичного обернення нелінійної (порядку K) алгебраїчної системи вигляду

$$A(x) = b, \qquad (20)$$

де $b \in R^m$, $A(x) = str(\ldots str(A_{i_1\ldots i_{K-1}}x, \ i_{K-1}=\overline{1,n})x\ldots, i_1=\overline{1,n})x \ \ \forall x \in R^n$.

Як і вище, знаходження множини

$$\Omega_x = \{x \in R^n : \ \|A(\xi) - b\|^2 \to \min_\xi\}$$

розв'язків (або середньоквадратичних наближень до нього) системи (20) зведеться до середньоквадратичного обернення рівняння (13), в якому тепер

$$\alpha = col(\ldots(x_{i_1}\ldots x_{i_K}, i_K=\overline{1,n})\ldots, i_1=\overline{1,n}), \qquad (21)$$

$$\bar{A} = str(\ldots(A_{i_1\ldots i_{K-1}}, i_{K-1}=\overline{1,n})\ldots, i_1=\overline{1,n}). \qquad (22)$$

З розв'язку (15) цього рівняння аналогічно (17) знаходимо компоненти x_i $(i=\overline{1,n})$ вектора x і для розглядуваного випадку. Вони будуть наступними:

$$x_i^K = \alpha_{(i-1)n^{K-1}+\ldots+(i-1)n+i} \ \ (i=\overline{1,n}). \qquad (23)$$

При цьому

$$\bar{v} \in \{v: \ \alpha^K_{(i_1-1)n^{K-1}+\ldots+(i_{K-1}-1)n+i_K} = \prod_{k=1}^K \alpha_{(i_k-1)n^{K-1}+\ldots+(i_k-1)n+i_k}\}.$$

Точність та однозначність розв'язку (23) рівняння (20), як і вище, визначатиметься згідно (18), (19) з врахуванням прийнятих тут позначень.

Зауважимо на завершення, що нелінійні алгебраїчні системи (1), (12) та (20), досліджені нами вище, є узагальненнями нелінійних алгебраїчних систем

$$Ax \otimes Bx = b, \qquad (24)$$

$$A_1x \otimes \ldots \otimes A_nx = b \qquad (25)$$

(тут $\otimes$ – знак декартового множення, A, B, A_i $(i=\overline{1,n})$ – прямокутні матриці розмірності $m\times n$) розглядуваних в [7], оскільки елементи $a_{kl}^{(i)}$ $(i=\overline{1,n}, k=\overline{1,m}, l=\overline{1,n})$ матриць A_i $(i=\overline{1,n})$ системи (1), (12) виражатимуться через елементи a_{kl} $(k=\overline{1,m}, l=\overline{1,n})$ та b_{ki} $(k=\overline{1,m}, i=\overline{1,n})$ матриць A та B системи (24) співвідношенням

$$a_{kl}^{(i)} = a_{kl}b_{ki}.$$

Перевага ж систем (1), (12) та (20) над системами (24) та (25) в тому, що системи ці, будучи більш загальними по відношенню до (24), (25):

1) логічніше будуються шляхом узагальнення лінійних алгебраїчних моделей;

2) легше отримуються з нелінійних алгебраїчних моделей, побудованих на основі логічних міркувань, які випливають з фізики суті процесу.

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наукова думка, 2007. – 291 с. 2. Скопецький В.В.,Стоян В.А., Зваридчук Б.В. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – К.: Сталь, 2008. – 316 с. 3. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Возмущение псевдообратных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Проблемы управления и информатики. – 2001. – №1. – С.6-23. 4. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 305 с. 5. Гантмахер А.Ф. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 287 с. 6. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. – 1995. – №1. – С.114-127. 7. Стоян В.В. Псевдоінверсний підхід до розв'язання одного класу нелінійних алгебраїчних рівнянь // Доповіді НАН України. – 2008. – №3. – С.45-49.

Надійшла до редколегії 16.03.10

УДК 519.14+519.17

Н. Тимофієва, д-р техн. наук

КОМБІНАТОРНІ, БІОЛОГІЧНІ, МОВЛЕННЄВІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ПРОСТОРИ

Пропонується новий погляд на комбінаторні простори, які існують в двох станах: згорнутому (спокої) і розгорнутому (динамічному). Показано, що біологічні, інформаційні, мовленнєві простори мають комбінаторну природу і також існують в двох станах: згорнутому і розгорнутому.

A new look is offered to combinatorial spaces which are examined in two states: to convolute (rests) and unfolded (to dynamic). It is shown that biological, informative, speech spaces have combinatorial nature and also exist in two states: to convolute and unfolded.

Вступ

В статті показано, що біологічні, інформаційні, мовленнєві простори мають комбінаторну природу і аналогічно комбінаторним просторам існують в двох станах: спокої (згорнутому) і динаміці (розгорнутому). Для цих просторів визначено комбінаторні конфігурації, завдяки утворенню і упорядкуванню яких розгортаються часткові або повні простори певних типів. Уводиться означення рекурентного комбінаторного оператора і розглядаються правила переходу комбінаторного простору від одного стану до іншого.

Основна частина

Описані в літературі метричні комбінаторні простори розглядаються як задана множина W, точками якого є комбінаторні конфігурації певного типу між якими уведено віддаль $r(x,y)$, $x,y \in W$ [1–6]. Метрика $r(x,y)$ являє собою оператор, завдяки якому комбінаторні конфігурації певного типу утворюються з елементів заданої множини $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ або одна з другої і задовольняє трьом аксіомам метричного простору: 1) $r(x,y)=0$ тоді і лише тоді, коли $x=y$;

2) $r(x,y)=r(y,x)$ (аксіома симетрії); 3) для будь-яких трьох елементів x, y і z $r(x,y)\le r(x,z)+r(z,y)$ (аксіома трикутника).

На практиці при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації використовують упорядковані множини комбінаторних конфігурацій, для яких проводиться їхня нумерація. Тому метричні комбінаторні простори розглядаються і як простори упорядкувань [2]. Деякі автори, наприклад [7–8], точки комбінаторного простору розглядають як рекурсивні функції. В літературі також описано евклідові комбінаторні простори [9].

Але характерною особливістю комбінаторних просторів є не просто існування заданої множини точок комбінаторного характеру, між якими уведено віддаль, а утворення їх із елементів однієї або кількох базових множин з використанням заданої системи правил [10]. Для задання комбінаторного простору достатньо увести одну або кілька базових множин, із елементів яких проводиться формування його точок, тип комбінаторної конфігурації і систему правил, за допомогою яких він розгортається.

Оскільки точками комбінаторного простору є комбінаторні конфігурації, розглянемо їхнє утворення і упорядкування. Термін комбінаторна конфігурація (комбінаторний об'єкт) вживається як загальне означення таких понять як престановка, вибірки різних типів, розбиття числа, розбиття n-елементної множини на підмножини тощо. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$. Позначимо її упорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$. Під символом $w_j^k\in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), $\eta\in\{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k, $W=\{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k\in\{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W. Залежно від умови задачі η позначатимемо без індексу або з верхнім індексом η^k.

Означення 1. Множину $A=\{a_1,...,a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, назвемо базовою.

Означення 2. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k.

В подальшому для зручності вживаємо термін оператор або операція, що має той же зміст.

Лема 1. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються трьома рекурентними комбінаторними операторами: вибирання $\alpha(A^0)$, $A^0\subseteq A$; транспозиція $\alpha'(w_j^k,w_l^k)$, де $w^k=(w_1^k,...,w_n^k)$ – перестановка; арифметичний $\alpha''(w_j^k-x_t,w_l^k+\bar{x}_s)$, де $x_t,\bar{x}_s\in\{1,...,n-1\}$,

$$\sum_{j=1}^{p}x_j=\sum_{j=1}^{p'}\bar{x}_j=x,\qquad x<n,\qquad \{w_j^k,w_l^k,x_t,\bar{x}_s,x\}\in N,$$

$t,s,p,p'\in\{1,...,n-1\}$.

Справедливість леми 1 випливає з аналізу утворення комбінаторних конфігурацій різних типів.

Ураховуючи вищевикладене, узагальнимо способи утворення комбінаторних конфігурацій.

Лема 2. Комбінаторні конфігурації w^k утворюються з елементів базової множини A рекурентним комбінаторним оператором вибирання.

Доведення очевидне.

Лема 3. Комбінаторна конфігурація w^k у множині W утворюється з $w^i\in W$, $k<i$, рекурентним комбінаторним оператором транспозиції або арифметичним. Перша w^1 утворюється з елементів множини A операцією вибирання.

Доведення. Дійсно, якщо w^k – перестановка, то вона містить усі елементи з базової множини A. Тому наступна w^k утворюється оператором транспозиції з будь-якого попереднього w^i. Якщо w^k – розбиття числа, то сума його компонент є число n і наступна w^k утворюється арифметичною операцією з будь-якого попереднього w^i. Бінарна послідовність w^k утворюється з w^i арифметичною операцією.

Якщо w^k – вибірка певного типу і відрізняється від попередніх хоча б одним елементом a_j, який вибирається лише з базової множини A, то w^k неможливо утворити з будь-якої попередньої w^i операцією вибирання, тобто рекурентним комбінаторним оператором вибирання w^k утворюється з будь-якої w^i, $i<k$, якщо w^i містить усі елементи, необхідні для формування w^k.

Оскільки базова множина A містить усі елементи, необхідні для формування $w^k\in W$, то перша $w^1\in W$ для усіх типів комбінаторних конфігурацій утворюється з A оператором вибирання.

Лему 3 доведено.

Означення 3. Дві комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k=\eta^i$.

Комбінаторні конфігурації w^k і w^i, які складаються з підмножин w_j^k, w_s^k назвемо ізоморфними, якщо кількість w_j^k і w_s^k у них однакова, і для будь-якої підмножини $w_j^k\subset w^k$ можна знайти у множині w^i підмножину w_s^i, яка не відрізняється від w_j^k ні кількістю елементів ні самими елементами.

Бінарні послідовності w^k і w^i, які містять однакову кількість одиниць, ізоморфні.

Означення 4. Підмножину $W_\eta\subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Рекурентні комбінаторні оператори вибирання і арифметичний породжують як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації $w^k\in W$.

Множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η.

Зауваження. Якщо комбінаторні конфігурації одного і того ж типу утворюються кількома рекурентними комбінаторними операторами, то їхня множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій. Оскільки операція транспозиції змінює лише порядок слідування елементів у $w^k\in W$, то множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Враховуючи оговорене вище, у множині W виділимо підмножину $W^* \subset W$, будь-який елемент якої утворений одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, і підмножини $W^{**} \subset W$, комбінаторні конфігурації яких утворено іншим оператором. Назвемо $W^* \subset W$ підмножиною базових комбінаторних конфігурацій.

Комбінаторні конфігурації можуть бути упорядковані випадково (хаотично) або за строгими правилами. Таким правилом є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення $w^k \in W$ і полягає в тому, що їхні множини упорядковані інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними і тими самими правилами.

Для генерування множин комбінаторних конфігурацій з урахуванням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал σ-го рангу [11–12].

Виходячи з утворення і упорядкуваня комбінаторних конфігурацій, сформулюємо характерні особливості комбінаторних просторів.

1. Комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутий) і в динаміці (розгорнутий).

2. Згорнутий простір задається інформаційним кодом $\Re = < A,\ T, \Im, \Xi >$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A – одна або кілька базових множин, з елементів яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори; T – тип комбінаторного простору; $\Im$ – правила розгортання комбінаторного простору; Ξ – правила згортання простору певного типу з точок як одного так і кількох просторів. Згорнутий простір містить властивості просторів, з яких він згорнувся.

3. Утворення із згорнутого розгорнутих комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами.

4. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення і упорядкування комбінаторних конфігурацій.

Із згорнутого комбінаторного простору утворюються такі простори: частково розгорнуті, повні розгорнуті, однорідні, неоднорідні. Вважатимемо, що підмножина $W^* \subset W$ – частково розгорнутий комбінаторний простір.

Аналогічне спостерігаємо в живій природі.

В біології існують явища, пов'язані з комбінаторними числами. При формуванні суцвіття деяких квітів, луски шишок, розміщенні листя дерев та інших рослин утворюються правильні спіралі, число рядів яких збігається з числами Фібоначчі. При рості раковин деяких видів молюсків утворюються логарифмічні спіралі. При генеруванні ж комбінаторних множин з використанням властивості періодичності одержані числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, також утворюють комбінаторні числа, наприклад арифметичний трикутник, що являє собою біноміальні коефіцієнти для множини сполучень без повторень [12].

Насінину чи клітину – код живого організму певного типу – розглянемо як згорнутий простір (інформаційний код $\Re = < A,\ T, \Im, \Xi >$). Під дією певних чинників (для рослин – це тепло, волога і земля) утворюється живий об'єкт – розгорнутий простір, який має здатність до згортання.

Отже, згорнутим біологічним простором назвемо інформаційний код, який містить базові множини і систему правил, за допомогою яких комбінацією елементів цих множин розгортається живий організм – розгорнутий біологічний простір**.** Сукупність клітин назвемо частково розгорнутим біологічним простором. Ритмічні (пульсуючі) процеси у живій природі пов'язані з рекурентним способом утворення розгорнутих просторів. Біологічні простори, як і комбінаторні, мають властивість із точок розгорнутого (одного або кількох однотипних) згортатися. Новий згорнутий простір має властивості тих просторів, з яких він утворений.

Інформаційний простір має комбінаторну природу і також існує в двох станах: спокої і динаміці. Згорнутий задається інформаційним кодом $\Re = < A,\ T, \Im, \Xi >$. Інформація перш за все пов'язана з функціонуванням людського мозку і перебуває в підсвідомості чи свідомості у вигляді образів, фрагментів мовлення тощо. Вважатимемо, що згорнутий інформаційний простір це – підсвідомість, елементи a_{l_j} базових множин $A_l \in A$ – образи, фрагменти мовлення. Активізується підсвідомість мисленням – системою правил $\Im$, завдяки якій із елементів базових множин розгортається частково розгорнутий інформаційний простір – свідомість, що характеризується поняттями, думкою, а комбінаторна конфігурація в ньому є розміщення з повтореннями. Передача інформації (думки) проводиться за допомогою розгорнутого інформаційного простору, а саме: через мовленнєвий простір, завдяки жестам, рухам, за допомогою письма, графічних зображень. Згортання і розгортання інформаційного простору в телепатії проводиться безпосередньо можливостями, закладеними в головному мозку.

Інформаційний простір, який існує поза межами людського організму і створений людиною, назвемо штучним інформаційним простором. Він також існує в двох станах: спокої і динаміці. Книги, рукописи, електронні бібліотеки – штучний згорнутий інформаційний простір. Для його розгортання необхідно знати певні правила (правила читання, доступу до електронних бібліотек тощо).

Інформаційний простір передається за допомогою мовленнєвого простору, який також існує в двох станах [13]. Активні і пасивні органи творення мови розділяють на мовленнєвий тракт і голосові зв'язки. Назвемо усі ці органи мовленнєвим трактом і побудуємо математичну модель творення природного мовленнєвого сигналу на основі комбінаторики.

Згорнутим мовленнєвим простором назвемо інформаційний код $\Re = < A,\ T, \Im, \Xi >$. Елементам $a_j \in A$ базової множини A відповідають органи мовленнєвого тракту. Для утворення мовленнєвого сигналу із мовленнєвого центру кори головного мозку поступає сигнал до легень і мускулів активних органів мовлення – системи правил, за допомогою яких комбінацією $a_j \in A$ утворюються різноманітні звуки. Сукупність цих звуків назвемо частково розгорнутим мовленнєвим простором. З використанням певних правил комбінацією точок частково розгорнутого мовленнєвого простору утворюється повний розгорнутий мовленнєвий простір. Тобто, аналогічно з комбінаторним простором, мовленнєвий простір складається із згорнутого, який містить базову множину (активні і пасивні органи творення мови), правила, за якими творяться звуки (частково розгорнутий мовленнєвий простір), і правила, за якими із звуків (комбінацією точок частково розгорнутого мовленнєвого простору) твориться мова, мовленнєві сигнали (розгорнутий мовленнєвий простір). Відповідно, згорнутий мовленнєвий простір містить усі ознаки розгорнутого.

Розгорнутий мовленнєвий простір завдяки слуховому апарату має здатність до згортання з точок як одного так і кількох мовленнєвих просторів. Відповідно, інформаційний простір згортається із розгорнутих мовленнєвого та різних звукових просторів, а також образів з використанням зорового апарату. Для передачі розгорнутого мовленнєвого простору необхідне повітря. Точками мовленнєвого простору є розміщення з повтореннями.

Висновок. Виходячи з викладеного, можна сказати, що біологічні, інформаційні, мовленнєві простори мають комбінаторну природу і існують у спокої і динаміці. Згорнуті простори задаються інформаційним кодом $\Re = \langle A, T, \Im, \Xi \rangle$, який містить усі ознаки розгорнутого. Точкою цих просторів є комбінаторні конфігурації різних типів. Усі ці простори мають властивість згортатися з точок як одного так і кількох просторів.

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 281 с. 2. Бурдюк В.Я. Дискретное метрическое пространство. – Днепропетровск, ДГУ, 1982. – 99 с. 3. Bichara Alessandro. Ruled sets imbedden in a combinatorial spase // Atti Semin. Mat. e fis. Univ. Modena. – 1982. – 31, № 2. – P. 213–218. 4. Golenko-Ginzburg Dvitri. Metrics in the permutation spase // Appl. Math. Lett. – 1991. – 4, № 2. – P. 5–7. 5. Brown T.C. Affine and combinatorial binary-spaces // "J. Combin Theory, 1985, A39, №1. P. 25–34. 6. Малыгин В.В. Основные свойства пространства допустимых распределений задач в вычислительной сети // Электронный журнал "Труды МАИ". – 2003, №11. – http://www.mai.ru. 7. Сосков И. Связь простой вычислимости с рекуррентностью в функциональных комбинаторных пространствах // Мат. теория программирования: Сб. науч.тр. – Новосибирск, 1985. – С. 4–11. 8. Д. Скордев. Полукомбинаторные пространства // Доклады БАН. – 1980. – 33, № 6. – С.739-742. 9. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. – Харьков, 1982. – 33 с. – (Препринт АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 173). 10. Тимофієва Н.К. Про комбінаторні простори // YIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (11-14 травня 2000 р. м. Київ); Матеріали конференції. – Київ, Національний технічний Університет України (КПІ). – 2000. – С. 372; 11. Тимофеева Н.К. К вопросу о перестановках / Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН УССР. – К., 1989. – 22 с. Деп. в ВИНИТИ 17.05.89, № 3286-В89. – Реф. в: Математика. – 1989. – № 8. 12. Тимофеева Н.К. Об особенностях формирования и упорядочения выборок // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 3. – С. 174–182. 13. Тимофієва Н.К. Мовний сигнал як розгорнутий комбінаторний простір // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. XIV Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 90-річчю з дня народження проф. О.М.Костовського, Львів, 2-4 жовтня 2007 року. – Львів. – 2007. – С. 135.

Надійшла до редколегії 08.09.09

УДК 517.929.4

Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
А. Шатирко, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

У роботі розглядаються нелінійні системи регулювання, що описуються різницевими системами з інтервально заданими коефіцієнтами із запізнюванням. При отриманні тверджень використовується метод функціоналів Ляпунова-Красовського у вигляді суми квадратичної складової від передісторії і інтеграла від нелінійності. Отримані достатні умови стійкості.

В работе рассматриваются нелинейные системы регулирования, которые описываются разностными системами с запаздыванием с интервально заданными коэффициентами. При получении утверджений используется метод функционалов Ляпунова-Крассовского в виде суммы квадратичной составляющей от предистории и интеграла от нелинейности. Получены достаточные условия устойчивости.

Вступ

Задачі абсолютної стійкості систем регулювання пов'язані з проблемами стабілізації програмного керування при заданій структурі функції керування [1-4]. У роботах [4, 5] умови абсолютної стійкості були сформульовані в частотних термінах, в роботах [6, 7] в термінах функцій Ляпунова. Спочатку дослідження проводилися для систем, які описані звичайними диференціальними рівняннями. Надалі розглядалися системи різницевих рівнянь [8-9] і диференціально-різницевих рівнянь із запізнюванням і нейтрального типу [10, 11]. Нарешті, в роботах [12, 13] стали вивчатися дискретні системи з неточно заданими параметрами, тобто почали досліджуватися задачі інтервальної стійкості.

У запропонованій роботі розглядаються проблеми абсолютної інтервальної стійкості нелінійних систем регулювання, що описуються різницевими рівняннями із запізнюванням. Дослідження проводиться з використанням другого методу Ляпунова. Використовуються функціонали Ляпунова-Красовського виду суми інтеграла від нелінійності і квадратичних форм передісторії. Отримані достатні умови інтервальної абсолютної стійкості різницевих систем із запізнюванням.

1. Абсолютна інтервальна стійкість різницевих систем

Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(k+1) = Ax(k) + bf(\sigma(k)),\ \sigma(k) = c^T x(k),\ k = 0,1,2,... \qquad (1.1)$$

нелінійна частина $f(\sigma)$ якої є неперервною функцією, що задовольняє умовам "сектора"

$$\left[M\sigma - f(\sigma)\right] f(\sigma) > 0 \qquad (1.2)$$

і обмеженню

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi)d\xi \le L_1 f(\sigma)\Delta\sigma + \frac{1}{2}L_2(\Delta\sigma)^2. \qquad (1.3)$$

Тут A – квадратна матриця з сталими коефіцієнтами, b, c – вектори, L_1, L_2 сталі.

Система (1.1) називається абсолютно стійкою, якщо її нульовий розв'язок є глобально асимптотично стійким при довільній нелінійній функції $f(\sigma)$, що задовольняє "секторному обмеженню" (1.2). Для отримання умов абсолютної стійкості використовуватимемо функцію Ляпунова

$$V(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi)d\xi, \qquad (1.4)$$

де H – симетрична, додатно визначена матриця, $\beta > 0$ деякий параметр. Позначимо

$$\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)=\lambda_{\min}(H),\ \bar{\lambda}_{\max}(\beta)=\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta Mc^2,$$

$$C_1(H)=\begin{bmatrix} H-A^THA & -A^THb \\ -b^THA & -b^THb \end{bmatrix},\ C_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_2(A-I)^Tcc^T(A-I) & -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right](A-I)^Tc \\ -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^T(A-I) & -\left(b^Tc\right)\left[2L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right] \end{bmatrix},$$

$$C_3=\begin{bmatrix} \Theta & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Тут $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ – мінімальне і максимальне власні числа матриці H, T – одинична матриця, Θ – нульова матриця. У роботі [14] отримано наступний результат.

Теорема 1.1. Хай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0$ і $\nu>0$, при яких матриця $C(H,\beta,\nu)=C_1(H)+\beta C_2+\nu C_3$ буде додатно визначеною. Тоді система (1.1) буде абсолютно стійкою. І для її розв'язків матиме місце наступна оцінка збіжності

$$|x(k)|<\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)}}\left[1-\frac{\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\right]^{\frac{1}{2}k}|x(0)|. \tag{1.6}$$

Тут і далі під нормами будемо розуміти

$$|x(k)|=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2(k)\right\}^{1/2},\ |A|=\left\{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)\right\}^{1/2},\ \|\Delta A\|=\max_{|\Delta a_{ij}|\le\alpha_{ij}}\left\{|\Delta A|\right\}.$$

Розглянемо систему з неточно заданими параметрами

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+bf(\sigma(k)),\ \sigma(k)=c^Tx(k). \tag{1.7}$$

Тут $\Delta A=\left\{\Delta a_{ij}\right\}$, $i,j=\overline{1,n}$ – матриця, елементи якої можуть приймати свої значення з деяких заданих інтервалів $\left|\Delta a_{ij}\right|\le\alpha_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Визначення 1.1. Система (1.1) називається абсолютно інтервально стійкою, якщо є абсолютно стійкою система (1.7) при довільній матриці ΔA, елементи якої приймають свої значення з інтервалів $\left|\Delta a_{ij}\right|\le\alpha_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи (1.1)

Теорема 1.2. Хай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0$ і $\nu>0$, при яких матриця $C(H,\beta,\nu)=C_1(H)+\beta C_2+\nu C_3$ також буде додатно визначеною і виконується нерівність

$$\|\Delta A\|<\frac{\sqrt{b^2+4a\bar{c}}-b}{2a},$$

$$a=\left|H+L_2cc^T\right|,\ b=\left|A^TH+\beta L_2(A-I)^Tcc^T\right|+\left|b^TH+\beta\left(L_1+L_2b^Tc\right)\right|,\ \bar{c}=\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right] \tag{1.8}$$

Тоді система (1.1) буде абсолютно інтервально стійкою, причому для її розв'язків буде виконуватись наступна оцінка збіжності

$$|x(k)|<\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)}}\left[1-\frac{\gamma}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\right]^{\frac{1}{2}k}|x(0)|, \tag{1.9}$$

$$\gamma=\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right]-\left[\left|A^TH+\beta L_2(A-I)^Tcc^T\right|+\left|b^TH+\beta\left(L_1+L_2b^Tc\right)c^T\right|\right]\|\Delta A\|-\left|H+L_2cc^T\right|\|\Delta A\|^2>0.$$

Доведення. Як випливає з вигляду функції Ляпунова (1.4) для неї виконуватимуться двосторонні нерівності

$$\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)|x|^2\le V(x)\le\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)|x|^2,\ |x|=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}^{1/2}. \tag{1.10}$$

Перша різниця функції Ляпунова $V(x(k))$ в силу системи (1.7) має вигляд

$$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))=x^T(k+1)Hx(k+1)-x^T(k)Hx(k)+\beta\int_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)}f(\xi)d\xi\le$$

$$\le x^T(k+1)Hx(k+1)-x^T(k)Hx(k)+\beta L_1f(\sigma(k))\left[\sigma(k+1)-\sigma(k)\right]+\frac{1}{2}\beta L_2\left[\sigma(k+1)-\sigma(k)\right]^2.$$

Підставимо замість $\sigma(k)$ і $x(k+1)$ їх значення, визначені в (1.7). Отримуємо

$$\Delta V(x(k))\le\left[(A+\Delta A)x(k)+bf(\sigma(k))\right]^TH\left[(A+\Delta A)x(k)+bf(\sigma(k))\right]-x^T(k)Hx(k)+$$

$$+\beta L_1f(\sigma(k))c^T\left[(A-I)x(k)+bf(\sigma(k))\right]+\frac{1}{2}\beta L_2\left[c^T\left[(A-I)x(k)+bf(\sigma(k))\right]\right]^2.$$

Розкривши дужки, маємо

$$\Delta V\left(x(k)\right)\le x^T(k)(A+\Delta A)^T HAx(k)+x^T(k)(A+\Delta A)^T Hbf\left(\sigma(k)\right)+f\left(\sigma(k)\right)b^T HAx(t)+f^2\left(\sigma(k)\right)b^T Hb-$$

$$-x^T(k)Hx(k)+\beta L_1 f\left(\sigma(k)\right)c^T(A-I)x(k)+\beta L_1 f^2\left(\sigma(k)\right)b^T c+$$

$$+\frac{1}{2}\beta L_2\left\{x^T(k)(A-I)^T cc^T(A-I)x(k)+2f\left(\sigma(k)\right)x^T(k)(A-I)^T cc^T b+\left(b^T c\right)^2 f^2\left(\sigma(k)\right)\right\}.$$

Використовуючи векторно-матричну форму запису, запишемо

$$\Delta V\left(x(k)\right)=\left(x^T(k),f\sigma(k)\right)\begin{bmatrix}(A+\Delta A)^T H(A+\Delta A)-H & (A+\Delta A)^T Hb\\ b^T H(A+\Delta A) & b^T Hb\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}L_2(A+\Delta A-I)^T cc^T(A-I) & \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right](A+\Delta A-I)^T c\\ \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(A+\Delta A-I) & b^T c\left[2L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}.$$

Використовуючи $S-$ процедуру, запропоновану в [15], отримаємо

$$\Delta V\left(x(k)\right)=\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}(A+\Delta A)^T H(A+\Delta A)-H & (A+\Delta A)^T Hb\\ b^T H(A+\Delta A) & b^T Hb\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}L_2(A+\Delta A-I)^T cc^T(A+\Delta A-I) & \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right](A+\Delta A-I)^T c\\ \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(A+\Delta A-I) & b^T c\left[2L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\nu\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}\Theta & \frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}c^T & -\frac{1}{M}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}-\nu\left[\sigma(k)-\frac{1}{M}f\left(\sigma(k)\right)\right]f\left(\sigma(k)\right).$$

Тут $\Theta-$ нульова матриця. Перепишемо отриманий вираз, виділивши окремо матриці, з нечітко заданими параметрами

$$\Delta V\left(x(k)\right)=\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}A^T HA-H & A^T Hb\\ b^T HA & b^T Hb\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}A^T H\Delta A+(\Delta A)^T HA & \Delta A^T Hb\\ b^T H\Delta A & b^T Hb\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}++\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}(\Delta A)^T H\Delta A & \Theta\\ \Theta & \Theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}L_1(A-I)^T cc^T(A-I) & \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right](A-I)^T c\\ \left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(A-I) & b^T c\left[2L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}L_2(\Delta A)^T cc^T(A-I)+L_2(A-I)^T cc^T\Delta A & \left[1+L\left(b^T c\right)\right](\Delta A)^T c\\ \left[1+L\left(b^T c\right)\right]c^T\Delta A & \Theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}L_2(\Delta A)^T cc^T\Delta A & \Theta\\ \Theta & \Theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\nu\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\begin{bmatrix}\Theta & \frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}c^T & -\frac{1}{M}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}-\nu\left[\sigma(k)-\frac{1}{M}f\left(\sigma(k)\right)\right]f\left(\sigma(k)\right).$$

Позначимо

$$C_4(H,\Delta A)=\begin{bmatrix}-A^T H\Delta A-(\Delta A)^T HA & -\Delta AHb\\ -b^T H\Delta A & \Theta\end{bmatrix},\ C_5(H,\Delta A)=\begin{bmatrix}-(\Delta A)^T H\Delta A & \Theta\\ \Theta & \Theta\end{bmatrix},$$

$$C_6(\Delta A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-L_2(\Delta A)^T cc^T(A-I)-L_2(A-I)^T cc^T\Delta A & -\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right](\Delta A)^T c\\ -\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(\Delta A) & \Theta\end{bmatrix},\ C_7(\Delta A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-L(\Delta A)^T cc^T\Delta A & \Theta\\ \Theta & \Theta\end{bmatrix}.$$

Тоді для першої різниці матиме місце співвідношення

$$\Delta V\left(x(k)\right)=\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\left\{C_1(H)+\beta C_2+\nu C_3\right\}\begin{pmatrix} x(t) \\ f\left(\left(\sigma(k)\right)\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\left(x^T(k),f\left(\sigma(k)\right)\right)\left\{C_4(H,\Delta A)+C_5(H,\Delta A)+\beta\left(C_6(\Delta A)+C_7(\Delta A)\right)\right\}\begin{pmatrix} x(k) \\ f\left(\sigma(k)\right)\end{pmatrix}.$$

За означенням норми маємо

$$\left|C_4(H,\Delta A)+C_5(H,\Delta A)+\beta\left[C_6(\Delta A)+C_7(\Delta A)\right]\right|\le\left|C_4(H,\Delta A)+\beta C_6(\Delta A)\right|+\left|C_5(H,\Delta A)+\beta C_7(\Delta A)\right|\le$$

$$\le\left[\left|A^TH+\beta L_2(A-I)^T cc^T\right|+\left|b^TH+\beta\left(L_1+L_2b^Tc\right)c^T\right|\right]\|\Delta A\|+\left|H+L_2cc^T\right|\|\Delta A\|^2,$$

Нехай знайдуться додатно визначена матриця H і сталі β і ν, при яких матриця

$$C(H,\beta,\nu)=C_1(H)+\beta C_2+\nu C_3$$

також буде додатно визначеною. Тоді при виконанні нерівності

$$\gamma=\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right]-\left[\left|A^TH+\beta L_2(A-I)^T cc^T\right|+\left|b^TH+\beta\left(L_1+L_2b^Tc\right)c^T\right|\right]\|\Delta A\|-\left|H+L_2cc^T\right|\|\Delta A\|^2>0, \qquad (1.11)$$

для першої різниці функції Ляпунова буде виконуватись

$$\Delta V\left(x(k)\right)\le-\gamma\left|x(k)\right|^2,$$

тобто система (1.7) буде абсолютно стійкою. Використовуючи двосторонню оцінку функції Ляпунова і нерівність для першої різниці, отримаємо наступну оцінку збіжності розв'язків

$$\left|x(k)\right|<\sqrt{\frac{\bar\lambda_{\max}(H,\beta)}{\bar\lambda_{\min}(H,\beta)}}\left[1-\frac{\gamma}{\bar\lambda_{\max}(H,\beta)}\right]^{\frac{1}{2}k}\left|x(0)\right|.$$

А для виконання нерівності (1.11) достатньо, щоб

$$\|\Delta A\|<\frac{\sqrt{b^2+4a\bar c}-b}{2a},\; a=\left|H+L_2cc^T\right|,\; b=\left|A^TH+\beta L_2(A-I)^T cc^T\right|+\left|b^TH+\beta\left(L_1+L_2b^Tc\right)\right|,\; \bar c=\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right].$$

Тобто тримали твердження теореми 1.2.

2. Системи регулювання із запізнюванням

Розглянемо системи нелінійних різницевих рівнянь з одним запізнюванням

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+f\left(\sigma(k)\right),\; x(k)\in R^n,\; k=0,1,2,\dots \qquad (2.1)$$

Тут $\Delta A=\left\{\Delta a_{ij}\right\}$, $\Delta B=\left\{\Delta b_{ij}\right\}$, $i,j=\overline{1,n}$ – матриці, елементи яких можуть приймати свої значення з деяких наперед заданих фіксованих інтервалів $\left|\Delta a_{ij}\right|\le\alpha_{ij}$, $\left|\Delta b_{ij}\right|\le\beta_{ij}$ $i,j=\overline{1,n}$.

Для отримання умов абсолютної інтервальної стійкості знов використовуватимемо другий метод Ляпунова. Скористаємося функціоналом Ляпунова-Красовського вигляду

$$V\left[x(k)\right]=x^T(k)Hx(k)+\sum_{j=0}^{m}x^T(k-j)Gx(k-j)+\beta\int_0^{\sigma(k)}f(\xi)d\xi,\; \sigma(k)=c^Tx(k). \qquad (2.2)$$

Введемо наступні матричні норми

$$\|x(k)\|_{2\gamma}=\left\{\sum_{j=0}^{m}\gamma^j\left|x(k-j)\right|^2\right\}^{1/2},\; \|x(k)\|_2=\left\{\sum_{j=0}^{m}\left|x(k-j)\right|^2\right\}^{1/2},\; \|x(k)\|_m=\max_{j=\overline{0,m}}\left\{\left|x(k-j)\right|\right\}.$$

У разі позитивної визначеності матриць H і G для функціонала (2.2) будуть виконуватись двосторонні оцінки

$$\bar\lambda_{\min}(H,\beta)\left|x(k)\right|^2+\lambda_{\min}(G)\|x(k)\|_2^2\le V\left[x(k)\right]\le\bar\lambda_{\max}(H,\beta)\left|x(k)\right|^2+\lambda_{\max}(G)\|x(k)\|_2^2. \qquad (2.3)$$

Наведемо один допоміжний результат.

Лема 2.1. Для довільних матриць L_1, L_2, L_3, векторів $x(k)$, $x(k-m)$, l та скалярів $f\left(\sigma(k)\right)$, ξ мають місце наступні нерівності

$$x^T(k)L_1^TL_2x(k-m)+x^T(k-m)L_2^TL_1x(k)\le\xi^2x^T(k)L_1^TL_1x(k)+\frac{1}{\xi^2}x^T(k-\tau)L_2^TL_2x(k-m),$$

$$x^T(k)L_1^Tlf\left(\sigma(k)\right)+f\left(\sigma(k)\right)l^TL_1x(k)\le\xi^2x^T(k)L_1^TL_1x(k)+\frac{1}{\xi^2}f^2\left(\sigma(k)\right)l^Tl, \qquad (2.4)$$

$$x^T(k-m)L_2^Tlf\left(\sigma(k)\right)+f\left(\sigma(k)\right)l^TL_2x(k-m)\le\xi^2x^T(k-m)L_2^TL_2x(k-m)+\frac{1}{\xi^2}f^2\left(\sigma(k)\right)l^Tl.$$

Доведення. Для довільних матриць L_1, L_2, векторів $x(k)$, $x(k-m)$ і скаляру ξ, розкривщи нерівність, отримаємо наступне

$$\left[\xi L_1 x(k) - \frac{1}{\xi} L_2 x(k-m)\right]^T \left[\xi L_1 x(k) - \frac{1}{\xi} L_2 x(k-m)\right] = \xi^2 x^T(k) L_1^T L_1 x(k) + \frac{1}{\xi^2} x^T(k-\tau) L_2^T L_2 x(k-\tau) -$$
$$x^T(k) L_1^T L_2 x(k-m) - x^T(k-\tau) L_2^T L_1 x(k) \ge 0 .$$

Звідси маємо

$$x^T(k) L_1^T L_2 x(k-m) + x^T(k-m) L_2^T L_1 x(k) \le \xi^2 x^T(k) L_1^T L_1 x(k) + \frac{1}{\xi^2} x^T(k-m) L_2^T L_2 x(k-m),$$

Тобто першу нерівність з (2.4). Інші нерівності отримуємо аналогічно.
Мають місце наступні умови абсолютної стійкості.
Введемо наступні позначення

$$C_7(G,H) = \begin{bmatrix} H - A^T(H+G)A & -A^T(H+G)B & -A^T(H+G)b \\ -B^T(H+G)A & G - B^T(H+G)B & -B^T(H+G)b \\ -b^T(H+G)A & -b^T(H+G)B & -b^T(H+G)b \end{bmatrix}, C_9 = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta & -\frac{1}{2}c \\ \Theta & \Theta & \theta \\ -\frac{1}{2}c^T & \theta^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

$$C_8 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_2(A-I)^T cc^T(A-I) & -L_2(A-I)^T cc^T B & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right](A-I)^T c \\ -L_2 B^T cc^T(A-I) & -L_2 B^T cc^T B & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]B^T c \\ -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]c^T(A-I) & -\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]c^T B & -\left[2L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]\left(b^T c\right) \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Хай функція $f(\sigma)$ задовольняє умові сектора (1.2), нерівності (1.3) і існують сталі $\beta > 0$, $\nu > 0$ і додатно визначені матриці H і G, при яких матриця

$$C(G,H,\beta,\nu) = C_7(G,H) + \beta C_8 + \nu C_9 ,$$

також буде додатно визначеною. Тоді при виконанні умови

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{N_1^2}\left[\sqrt{\left(N_1^1\right)^2 + N_1^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} - N_1^1\right],$$
$$\|\Delta B\| < \frac{1}{N_2^2}\left[\sqrt{\left(N_2^1\right)^2 + N_2^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} - N_2^1\right]. \tag{2.6}$$

де

$$N_1^1 = \left|(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T\right|,$$

$$N_1^2 = 2\xi^2 + |H+G| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\eta^2\right) + L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} +$$
$$+2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right| + \left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)},$$
$$N_2^1 = \left|(H+G)B\right| + \left|B^T cc^T\right|, \tag{2.7}$$
$$N_2^2 = \frac{2}{\xi^2}\left|(H+G)(H+G)\right| + |H+G| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\frac{1}{\varsigma^2}\right) + (L_2+1)\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} +$$
$$+2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right| + \left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]\left|cc^T\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)},$$

$0 < \eta_1^2 < 1$, $0 < \eta_2^2 < 1$, ξ, η – довільні сталі, тоді система (2.1) буде абсолютно інтервально стійкою при будь-якому запізнюванні m.

Доведення. Обчислимо першу різницю функціонала (2.2) уздовж розв'язків системи (2.1). Отримуємо

$$\Delta V\left[x(k)\right] = V\left[x(k+1)\right] - V\left[x(k)\right] =$$
$$= \left\{x^T(k+1)Hx(k+1) + x^T(k+1)Gx(k+1) + \sum_{j=1}^{m} x^T(k+1-j)Gx(k+1-j)\right\} -$$
$$-\left\{x^T(k)Hx(k) + x^T(k-m)Gx(k-m) + \sum_{j=0}^{m-1} x^T(k-j)Gx(k-j)\right\} + \beta\int_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)} f(\xi)d\xi .$$

Змінивши індекс сумування і провівши відповідні скорочення, отримуємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]=x^T(k+1)(G+H)x(k+1)-x^T(k)Hx(k)-x^T(k-m)Gx(k-m)+\beta\int\limits_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)}f(\xi)d\xi .$$

Використовуючи, як і в попередньому параграфі, умову (1.3), а також підставивши замість, $\sigma(k)$ і $x(k+1)$ їх значення, маємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le$$

$$\le\left[(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+bf(\sigma(k))\right]^T(H+G)\left[(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+bf(\sigma(k))\right]-$$

$$-x^T(k)Hx(k)-x^T(k-m)Gx(k-m)+\beta L_1 f(\sigma(k))c^T\left[((A+\Delta A)-I)^T x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+bf(\sigma(k))\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\beta L_2\left[((A+\Delta A)-I)^T x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+bf(\sigma(k))\right]^T\times$$

$$\times cc^T\left[((A+\Delta A)-I)x(k)+(B+\Delta B)x(k-m)+bf(\sigma(k))\right].$$

Застосовуючи векторно-матричну форму запису, отримуємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}(A+\Delta A)^T(H+G)(A+\Delta A)-H & (A+\Delta A)^T(H+G)(B+\Delta B) & (A+\Delta A)^T(H+G)b\\ (B+\Delta B)^T(H+G)(A+\Delta A) & (B+\Delta B)^T(H+G)(B+\Delta B)-G & (B+\Delta B)^T(H+G)b\\ b^T(H+G)(A+\Delta A) & b^T(H+G)(B+\Delta B) & b^T(H+G)b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ x(k-m)\\ f(\sigma(k))\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}L_2((A+\Delta A)-I)^T cc^T((A+\Delta A)-I) & L_2((A+\Delta A)-I)^T cc^T(B+\Delta B) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]((A+\Delta A)-I)^T c\\ L_2(B+\Delta B)^T cc^T((A+\Delta A)-I) & L_2(B+\Delta B)^T cc^T(B+\Delta B) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right](B+\Delta B)^T c\\ \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]c^T((A+\Delta A)-I) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]c^T(B+\Delta B) & \left[2L_1+L_2(b^Tc)\right](b^Tc)\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}x(k)\\ x(k-m)\\ f(\sigma(k))\end{pmatrix}.$$

Використовуючи подану вище $S-$ процедуру [15], запишемо вираз для першої різниці у вигляді

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}(A+\Delta A)^T(H+G)(A+\Delta A)-H & (A+\Delta A)^T(H+G)(B+\Delta B) & (A+\Delta A)^T(H+G)b\\ (B+\Delta B)^T(H+G)(A+\Delta A) & (B+\Delta B)^T(H+G)(B+\Delta B)-G & (B+\Delta B)^T(H+G)b\\ b^T(H+G)(A+\Delta A) & b^T(H+G)(B+\Delta B) & b^T(H+G)b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ x(k-m)\\ f(\sigma(k))\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}L_2((A+\Delta A)-I)^T cc^T((A+\Delta A)-I) & L_2((A+\Delta A)-I)^T cc^T(B+\Delta B) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]((A+\Delta A)-I)^T c\\ L_2(B+\Delta B)^T cc^T((A+\Delta A)-I) & L(B+\Delta B)^T cc^T(B+\Delta B) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right](B+\Delta B)^T c\\ \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]c^T((A+\Delta A)-I) & \left[L_1+L_2(b^Tc)\right]c^T(B+\Delta B) & \left[2L_1+L_2(b^Tc)\right](b^Tc)\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}x(k)\\ x(k-m)\\ f(\sigma(k))\end{pmatrix}$$

$$-\nu\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\begin{bmatrix}\Theta & \Theta & -\frac{1}{2}c\\ \Theta & \Theta & \theta\\ -\frac{1}{2}c^T & \theta^T & \frac{1}{M}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(k)\\ x(k-m)\\ f(\sigma(k))\end{pmatrix}-\nu\left[\sigma(k)-\frac{1}{M}f(\sigma(k))\right]f(\sigma(k)).$$

Розіб'ємо матриці на нормальні і "збурені" і отримаємо наступне

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_7\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$

$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{10}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$

$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{11}(\Delta^2)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$

$$-\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\beta C_8\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$

$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{12}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{13}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right),$$
$$-\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\nu C_9\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right).$$

де матриці C_7, C_8, C_9 визначені в (2.5), або

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\left[C_7(G,H,\beta)+\beta C_8+\nu C_9\right]C_7\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\beta C_{10}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\beta C_{11}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\nu C_{12}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\nu C_{13}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right),$$

де

$$C_{10}(\Delta)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta A^T(H+G)A+A^T(H+G)\Delta A & \Delta A^T(H+G)B+A^T(H+G)\Delta B & \Delta A^T(H+G)b\\ \Delta B^T(H+G)A+B^T(H+G)\Delta A & \Delta B^T(H+G)B+B^T(H+G)\Delta B & \Delta B^T(H+G)b\\ b^T(H+G)\Delta A & b^T(H+G)\Delta B & 0\end{bmatrix},$$

$$C_{11}\left(\Delta^2\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta A^T(H+G)\Delta A & \Delta A^T(H+G)\Delta B & \theta\\ \Delta B^T(H+G)\Delta A & \Delta B^T(H+G)\Delta B & \theta\\ \theta^T & \theta^T & 0\end{bmatrix},$$

$$C_{12}(\Delta)=\begin{bmatrix}L_2\left[\Delta A^Tcc^T(A-I)+(A-I)^Tcc^T\Delta A\right] & L_2\left[\Delta A^Tcc^TB+(A-I)^Tcc^T\Delta B\right] & \left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\Delta A^Tc\\ L_2\left[\Delta B^Tcc^T(A-I)+B^Tcc^T\Delta A\right] & L_2\left[\Delta B^Tcc^TB+B^Tcc^T\Delta B\right] & \left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\Delta B^Tc\\ \left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^T\Delta A & \left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^T\Delta B & 0\end{bmatrix},$$

$$C_{13}\left(\Delta^2\right)=\begin{bmatrix}L_2\left[\Delta A^Tcc^T\Delta A\right] & L_2\left[\Delta A^Tcc^T\Delta B\right] & \theta\\ L_2\left[\Delta B^Tcc^T\Delta A\right] & L_2\left[\Delta B^Tcc^T\Delta B\right] & \theta\\ \theta^T & \theta^T & 0\end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

За умовою теореми матриця $C(G,H,\beta,\nu)=C_7(G,H)+\beta C_8+\nu C_9$ є додатно визначеною. Тому для першої різниці отримуємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)\left[\left|x(k)\right|^2+\left|x(k-m)\right|^2+f^2(\sigma(k))\right]+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\beta C_{10}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\beta C_{11}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\nu C_{12}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T+$$
$$+\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)\nu C_{13}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T.$$

Розглянемо кожну квадратичну форму окремо.

1) Для першої квадратичної форми будемо мати

$$\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{10}(\Delta)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T=$$
$$x^T(k)S_{10}^{11}x(k)+\left[x^T(k)S_{10}^{12}x(k-m)+x^T(k-m)\left(S_{10}^{12}\right)^Tx(k)\right]+\left[x^T(k)S_{10}^{13}f(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left(S_{10}^{13}\right)^Tx(k)\right]+$$
$$+x^T(k-m)S_{10}^{22}x^T(k-m)+\left[x^T(k-m)S_{10}^{23}f(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left(S_{10}^{23}\right)^Tx(k-m)\right].$$

Використовуючи результати леми 2.1, проведемо оцінку для кожної з форм.

1.1. $x^T(k)S_{10}^{11}x(k) = x^T(k)\left[\Delta A^T(H+G)A + A^T(H+G)\Delta A\right]x(k) \le 2\left|(H+G)A\right|\left|\Delta A\right|\left|x(k)\right|^2$,

1.2. $x^T(k)S_{10}^{12}x(k-m) + x^T(k-m)\left(S_{10}^{12}\right)^T x(k) = x^T(k)\left[\Delta A^T(H+G)B + A^T(H+G)\Delta B\right]x(k-m) +$

$+x^T(k-m)\left[\Delta B^T(H+B)A + B^T(H+G)\Delta A\right]x(k) =$

$=\left[x^T(k)\Delta A^T(H+G)Bx(k-m) + x^T(k-m)B^T(H+B)\Delta Ax(k)\right] +$

$+\left[x^T(k)A^T(H+G)\Delta Bx(k-m) + x^T(k-m)\Delta B^T(H+B)Ax(k)\right] \le$

$\le\left\{\xi_1^2 x^T(k)\Delta A^T\Delta Ax(k) + \frac{1}{\xi_1^2}x^T(k-m)\Delta B^T(H+G)(H+G)\Delta Bx(k-m)\right\} +$

$+\left\{\xi_2^2 x^T(k)A^T(H+G)(H+G)Ax(k) + \frac{1}{\xi_2^2}x^T(k-m)\Delta B^T\Delta Bx(k-m)\right\}$

1.3. $x^T(k)S_{10}^{13}f(\sigma(k)) + f(\sigma(k))\left(S_{10}^{13}\right)^T x(k) = x^T(k)\Delta A^T(H+G)bf(\sigma(k)) + f(\sigma(k))b^T(H+G)\Delta Ax(k) \le$

$\le \xi_3^2 x^T(k)\Delta A^T\Delta Ax(k) + \frac{1}{\xi_3^2}f^2(\sigma(k))b^T(H+G)(H+G)b$.

1.4. $x^T(k-m)S_{10}^{22}x(k-m) = x^T(k-m)\left[\Delta B^T(H+G)B + B^T(H+G)\Delta B\right]x(k-m) \le 2\left|(H+G)B\right|\left|\Delta B\right|\left|x(k-m)\right|^2$.

1.5. $x^T(k-m)S_{10}^{23}f(\sigma(k)) + f(\sigma(k))\left(S_{10}^{23}\right)^T x(k-m) =$

$= x^T(k-m)\Delta B^T(H+G)bf(\sigma(k)) + f(\sigma(k))b^T(H+G)\Delta Bx(k-m) \le$

$\xi_4^2 x^T(k-m)\Delta B^T\Delta Bx(k-m) + \frac{1}{\xi_4^2}f^2(\sigma(k))b^T(H+G)(H+G)b$.

2) Для другої квадратичної форми будемо мати

$$\left(x^T(k), x^T(k-m), f(\sigma(k))\right)C_{11}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k), x^T(k-m), f(\sigma(k))\right)^T =$$

$$x^T(k)S_{11}^{11}x(k) + \left[x^T(k)S_{11}^{12}x(k-m) + x^T(k-m)\left(S_{11}^{12}\right)^T x(k)\right] + x^T(k-m)S_{11}^{22}x^T(k-m).$$

Використовуючи результати леми 2.1, проведемо оцінку для кожної з форм.

2.1. $x^T(k)S_{11}^{11}x(k) = x^T(k)\Delta A^T(H+G)\Delta Ax(k) \le \left|(H+G)\right|\left|\Delta A\right|^2\left|x(k)\right|^2$,

2.2. $x^T(k)S_{11}^{12}x(k-m) + x^T(k-m)\left(S_{11}^{12}\right)^T x(k) = x^T(k)\Delta A^T(H+G)\Delta Bx(k-m) +$

$x^T(k-m)\Delta B^T(H+G)\Delta Ax(k) \le \left\{\xi_5^2 x^T(k)\Delta A^T\Delta Ax(k) + \frac{1}{\xi_5^2}x^T(k-m)\Delta B^T(H+G)(H+G)\Delta Bx(k-m)\right\}$,

2.3. $x^T(k-m)S_{11}^{22}x(k-m) = x^T(k-m)\Delta B^T(H+G)\Delta Bx(k) \le \left|(H+G)\right|\left|\Delta B\right|^2\left|x(k-m)\right|^2$,

3) Для третьої квадратичної форми будемо мати

$$\left(x^T(k), x^T(k-m), f(\sigma(k))\right)C_{12}(\Delta)\left(x^T(k), x^T(k-m), f(\sigma(k))\right)^T =$$

$$= x^T(k)S_{12}^{11}x(k) + \left[x^T(k)S_{12}^{12}x(k-m) + x^T(k-m)\left(S_{12}^{12}\right)^T x(k)\right] + \left[x^T(k)S_{12}^{13}f(\sigma(k)) + f(\sigma(k))\left(S_{12}^{13}\right)^T x(k)\right] +$$

$$+x^T(k-m)S_{12}^{22}x^T(k-m) + \left[x^T(k-m)S_{12}^{23}f(\sigma(k)) + f(\sigma(k))\left(S_{12}^{23}\right)^T x(k-m)\right].$$

Використовуючи результати леми 2.1, проведемо оцінку для кожної з форм.

3.1. $x^T(k)S_{12}^{11}x(k) = x^T(k)L_2\left[\Delta A^T cc^T(A-I) + (A-I)^T cc^T\Delta A\right]x(k) \le 2L_2\left|(A-I)^T cc^T\right|\left|\Delta A\right|\left|x(k)\right|^2$, 3.2. $\left[x^T(k)S_{12}^{12}x(k-m)+x^T(k-m)\left(S_{12}^{12}\right)^T x(k)\right]=x^T(k)L_2\left[\Delta A^T cc^T B+(A-I)^T cc^T\Delta B\right]x(k-m)+$

$+x^T(k-m)L_2\left[\Delta B^T cc^T(A-I)+B^T cc^T\Delta A\right]x(k)=L_2\left[x^T(k)\Delta A^T cc^T Bx(k-m)+x^T(k-m)B^T cc^T\Delta Ax(k)\right]+$

$+L_2\left[x^T(k)(A-T)^T cc^T\Delta Bx(k-m)+x^T(k-m)\Delta B^T cc^T(A-I)x(k)\right]\le$

$\le L_2\left\{\xi_6^2 x^T(k)(A-I)^T cc^T cc^T(A-I)x(k)+\frac{1}{\xi_6^2}x^T(k-m)\Delta B^T\Delta Bx(k-m)\right\}+$

$+L_2\left\{\xi_7^2 x^T(k)\Delta A^T\Delta Ax(k)+\frac{1}{\xi_7^2}x^T(k-m)(A-I)^T cc^T cc^T(A-I)x(k-m)\right\},$

3.3. $x^T(k)S_{12}^{13}f(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left(S_{12}^{13}\right)^T x(k)=$

$=x^T(k)\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\Delta A^T cf(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T\Delta Ax(k)\le$

$\le\xi_8^2\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]x^T(k)\Delta A^T\Delta Ax(k)+\frac{1}{\xi_8^2}\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]f^2(\sigma(k))c^T c.$

3.4. $x^T(k-m)S_{12}^{22}x(k-m)=x^T(k-m)L_2\left[\Delta B^T cc^T B+B^T cc^T\Delta B\right]x(k-m)\le 2\left|B^T cc^T\right|\left|\Delta B\right|\left|x(k-m)\right|^2.$

3.5. $x^T(k-m)S_{12}^{23}f(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left(S_{12}^{23}\right)^T x(k-m)=$

$=x^T(k-m)\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\Delta B^T cf(\sigma(k))+f(\sigma(k))\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]c^T\Delta Bx(k-m)\le$

$\le\xi_9^2\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]x^T(k-m)\Delta B^T\Delta Bx(k-m)+\frac{1}{\xi_9^2}\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]f^2(\sigma(k))c^T c.$

4) Для четвертої квадратичної форми буде

$$\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)C_{13}\left(\Delta^2\right)\left(x^T(k),x^T(k-m),f(\sigma(k))\right)^T=$$

$$x^T(k)S_{13}^{11}x(k)+\left[x^T(k)S_{13}^{12}x(k-m)+x^T(k-m)\left(S_{13}^{12}\right)^T x(k)\right]+x^T(k-m)S_{13}^{22}x^T(k-m).$$

Використовуючи результати леми 2.1, проведемо оцінку для кожної з форм.

4.1. $x^T(k)S_{13}^{11}x(k)=x^T(k)L_2\left[\Delta A^T cc^T\Delta A\right]x(k)\le L_2\left|cc^T\right|\left|\Delta A\right|^2\left|x(k)\right|^2,$

4.2. $x^T(k)S_{13}^{12}x(k-m)+x^T(k-m)\left(S_{13}^{12}\right)^T x(k)=x^T(k)L_2\left[\Delta A^T cc^T\Delta B\right]x(k-m)+x^T(k-m)L_2\left[\Delta B^T cc^T\Delta A\right]x(k)\le$

$\le\left\{\xi_{10}^2 L_2 x^T(k)\Delta A^T cc^T\Delta Ax(k)+\frac{1}{\xi_{10}^2}L_2 x^T(k-m)\Delta B^T cc^T\Delta Bx(k-m)\right\},$

4.3. $x^T(k-m)S_{13}^{22}x(k-m)=x^T(k-m)L_2\left[\Delta B^T cc^T\Delta B\right]x(k-m)\le L_2\left|cc^T\right|\left|\Delta B\right|^2\left|x(k-m)\right|^2.$

Підсумовуючи всі складові, отримаємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\theta_1[\bullet]\left|x(k)\right|^2-\theta_2[\bullet]\left|x(k-m)\right|^2-\theta_3[\bullet]f^2(\sigma(k)),$$

де

$\theta_1[\bullet]=\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-$

$-2\left|(H+G)A\right|\left|\Delta A\right|-\xi_1^2\left|\Delta A\right|^2-\xi_2^2\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|-\xi_3^2\left|\Delta A\right|^2-\left|H+G\right|\left|\Delta A\right|^2-\xi_5^2\left|\Delta A\right|^2-2L_2\left|(A-I)^T cc^T\right|\left|\Delta A\right|-$

$-L_2\xi_6^2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|-L_2\xi_7^2\left|\Delta A\right|^2-\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\xi_8^2\left|\Delta A\right|^2-L_2\left|cc^T\right|\left|\Delta A\right|^2-L_2\xi_{10}^2\left|cc^T\right|\left|\Delta A\right|^2,$

$\theta_2[\bullet]=\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-$

$-\frac{1}{\xi_1^2}\left|(H+G)(H+G)\right|\left|\Delta B\right|^2-\frac{1}{\xi_2^2}\left|\Delta B\right|^2-2\left|(H+G)B\right|\left|\Delta B\right|-\xi_4^2\left|\Delta B\right|^2-\frac{1}{\xi_5^2}\left|(H+G)(H+G)\right|\left|\Delta B\right|^2-\left|H+G\right|\left|\Delta B\right|^2-$

$-L_2\frac{1}{\xi_6^2}\left|\Delta B\right|^2-L_2\frac{1}{\xi_7^2}\left|(A-I)^T cc^T cc^T(A-I)\right|-2\left|B^T cc^T\right|\left|\Delta B\right|-\xi_9^2\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\left|\Delta B\right|^2-\frac{1}{\xi_{10}^2}L_2\left|cc^T\right|\left|\Delta B\right|^2-L_2\left|cc^T\right|\left|\Delta B\right|^2,$

$\theta_3[\bullet]=\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-$

$$-\frac{1}{\xi_3^2}\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|-\frac{1}{\xi_4^2}\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|-\frac{1}{\xi_8^2}\left[L_1++L_2\left(b^T c\right)\right]\left|c^T c\right|-\frac{1}{\xi_9^2}\left[L_1+L_2\left(b^T c\right)\right]\left|c^T c\right|$$

Виберемо сталі ξ_i^2, $i=\overline{1,10}$, таким чином, щоб $\theta_1[\bullet]>0$, $\theta_2[\bullet]>0$, $\theta_3[\bullet]=0$.

I. Для довільних η_1: і η_2: $0<\eta_2^2<1$ покладемо

$$\xi_2^2=\xi_6^2=\frac{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|},\quad \xi_7^2=\frac{L_2\left|(A-I)^T cc^Tcc^T(A-I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}.$$

Тоді отримаємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\Bigg\{\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-2\left[\left|(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T\right|\right]\left|\Delta A\right|-$$

$$-\left[\xi_1^2+\xi_3^2+\left|H+G\right|+\xi_5^2+L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^Tcc^T(A-I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\xi_8^2+L_2\left|cc^T\right|+\xi_{10}^2L_2\left|cc^T\right|\right]\left|\Delta A\right|^2\Bigg\}\left|x(k)\right|^2-$$

$$-\Bigg\{\left(1-\eta_2^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-2\left[\left|(H+G)B\right|+\left|B^Tcc^T\right|\right]\left|\Delta B\right|-$$

$$\Bigg[\frac{1}{\xi_1^2}\left|(H+G)(H+G)\right|+\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+\xi_4^2+\frac{1}{\xi_5^2}\left|(H+G)(H+G)\right|+\left|H+G\right|+$$

$$+L_2\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+\xi_9^2\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]+\frac{1}{\xi_{10}^2}L_2\left|cc^T\right|+L_2\left|cc^T\right|\Bigg]\left|\Delta B\right|^2\Bigg\}\left|x(k-m)\right|^2-$$

$$-\Bigg\{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-\Bigg[\frac{1}{\xi_3^2}\left|B^T(H+G)(H+G)B\right|+\frac{1}{\xi_4^2}\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\frac{1}{\xi_8^2}\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\xi_9^2}\left[L_1++L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|cc^T\right|\Bigg]\Bigg\}f^2\left(\sigma(k)\right).$$

Далі покладемо

$$\xi_3^2=\xi_4^4=\xi_8^2=\xi_9^2=2\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|c^Tc\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}.$$

Тоді для першої різниці функціонала Ляпунова-Красовського отримаємо

$$\Delta V\left[x(k)\right]\le-\Bigg\{\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-2\left[\left|(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|\right]\left|\Delta A\right|-$$

$$-\Bigg[\xi_1^2+2\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|c^Tc\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+\left|H+G\right|+\xi_5^2+L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^Tcc^T(A-I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+$$

$$+2\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|c^Tc\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+L_2\left|cc^T\right|+\xi_{10}^2L_2\left|cc^T\right|\Bigg]\left|\Delta A\right|^2\Bigg\}\left|x(k)\right|^2-$$

$$-\Bigg\{\left(1-\eta_2^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)-2\left[\left|(H+G)B\right|+\left|B^Tcc^T\right|\right]\left|\Delta B\right|-$$

$$-\Bigg[\frac{1}{\xi_1^2}\left|(H+G)(H+G)\right|+\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+$$

$$+2\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|c^Tc\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+\frac{1}{\xi_5^2}\left|(H+G)(H+G)\right|+\left|H+G\right|+$$

$$+L_2\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T(A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+2\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}+$$

$$+\frac{1}{\xi_{10}^2}L_2\left|cc^T\right|+L_2\left|cc^T\right|\Bigg]\left|\Delta B\right|^2\Bigg\}\left|x(k-m)\right|^2.$$

Покладемо $\xi_1^2 = \xi_5^2 = \xi^2$, $\xi_{10}^2 = \eta^2$.

Тоді остаточно отримуємо

$$\Delta V\left[x(k)\right] \le -\left\{\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right) - 2\left[\left|(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T (A-I)\right|\right]\left|\Delta A\right| - \right.$$

$$-\left[2\xi^2 + \left|H+G\right| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\eta^2\right) + L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^T cc^T (A-I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} + \right.$$

$$\left.\left. +2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T (H+G)(H+G)b\right| + \left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]\left|c^T c\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}\right]\left|\Delta A\right|^2\right\}\left|x(k)\right|^2 -$$

$$-\left\{\left(1-\eta_2^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right) - 2\left[\left|(H+G)B\right| + \left|B^T cc^T\right|\right]\left|\Delta B\right| - \right.$$

$$-\left[\frac{2}{\xi^2}\left|(H+G)(H+G)\right| + \left|H+G\right| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right) + \left(L_2+1\right)\frac{\left|A^T (H+G)(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T (A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} + \right.$$

$$\left.\left. +2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T (H+G)(H+G)b\right| + \left[L_2 + L_1\left(b^T c\right)\right]\left|cc^T\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}\right]\left|\Delta B\right|^2\right\}\left|x(k-m)\right|^2.$$

Або отримали

$$\Delta V\left[x(k)\right] \le -\theta_1[\bullet]\left|x(k)\right|^2 - \theta_2[\bullet]\left|x(k-m)\right|^2 - \theta_3[\bullet] f^2\left(\sigma(k)\right),$$

де

$$\theta_1[\bullet] = \left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right) - 2N_1^1\left|\Delta A\right| - N_1^2\left|\Delta A\right|^2, \ \theta_2[\bullet] = \left(1-\eta_2^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right) - 2N_2^1\left|\Delta A\right| - N_2^2\left|\Delta A\right|^2,$$

$$N_1^1 = \left|(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T\right|,$$

$$N_1^2 = 2\xi^2 + \left|H+G\right| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\eta^2\right) + L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^T cc^T (A=I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} +$$

$$+2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T (H+G)(H+G)b\right| + \left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)},$$

$$N_2^1 = \left|(H+G)B\right| + \left|B^T cc^T\right|,$$

$$N_2^2 = \frac{2}{\xi^2}\left|(H+G)(H+G)\right| + \left|H+G\right| + L_2\left|cc^T\right|\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right) + \left(L_2+1\right)\frac{\left|A^T (H+G)(H+G)A\right| + L_2\left|(A-I)^T cc^T (A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} +$$

$$+2\left[L_1 + L_2\left(b^T c\right) + 1\right]\frac{\left|b^T (H+G)(H+G)b\right| + \left[L_1 + L_2\left(b^T c\right)\right]\left|cc^T\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)}.$$

Розв'язуючи квадратні нерівності

$$\theta_1[\bullet] > 0, \ \theta_2[\bullet] > 0,$$

отримаємо, що для додатної визначеності першої різниці функціоналу Ляпунова-Красовського достатньо, щоб збурення систем ΔA і ΔB задовольняли умовам

$$\left|\Delta A\right| < \frac{1}{N_1^2}\left[\sqrt{\left(N_1^1\right)^2 + N_1^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} - N_1^1\right], \ \left|\Delta B\right| < \frac{1}{N_2^2}\left[\sqrt{\left(N_2^1\right)^2 + N_2^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu)\right)} - N_2^1\right].$$

Таким чином при виконанні умов (2.6) перша різниця функціоналу Ляпунова-Красовського буде від'ємно визначеною і система абсолютно інтервально стійкою.

3. Обчислення оцінок збіжності розв'язків систем регулювання з запізнюванням

Покажемо, що асимптотична стійкість має експоненціальний характер. Обчислимо величини, які характеризують швидкість експоненціального згасання. Для отримання оцінок згасання візьмемо неавтономний функціонал вигляду

$$V\left[x(k),\gamma\right] = x^T(k)Hx(k) + \sum_{j=0}^{m}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) + \beta\int_0^{\sigma(k)} f(\xi)d\xi, \ \sigma(k) = c^T x(k). \qquad (3.1)$$

Для такого функціонала будуть справедливими наступні двосторонні оцінки

$$\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)|x(k)|^2+\lambda_{\min}(G)\|x(k)\|_{2\gamma}^2\le V\left[x(k),\gamma\right]\le\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)|x(k)|^2+\lambda_{\max}(G)\|x(k)\|_{2\gamma}^2 . \quad (3.2)$$

Введемо наступні позначення

$$C(G,H,\beta,\nu,\gamma)=C_{10}(G,H,\gamma)+\beta C_8+\nu C_9 ,$$

$$C_{10}(G,H,\gamma)=\begin{bmatrix} H-A^T(H+G)A & -A^T(H+G)B & -A^T(H+G)b \\ -B^T(H+G)A & \gamma^{m+1}G-B^T(H+G)B & -B^T(H+G)b \\ -b^T(H+G)A & -b^T(H+G)B & -b^T(H+G)b \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\phi_{11}(H)=\frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)},\ \phi_{12}(G,H)=\frac{\lambda_{\max}(G)}{\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)},\ \phi_{21}(G,H)=\frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(G)},\ \phi_{22}(G)=\frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)} . \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. *Хай функція $f(\sigma)$ задовольняє умовам (1.2), (1.3) і існують сталі $\beta>0$, $\nu>0$, $0<\gamma<1$ і додатно визначені матриці H, G, при яких матриця $C(H,G,\beta,\nu,\gamma)$ також додатно визначена, а збурення ΔA і ΔB задовольняють умовам*

$$\|\Delta A\|<\frac{1}{N_1^2}\left[\sqrt{\left(N_1^1\right)^2+N_1^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)}-N_1^1\right],\ \|\Delta B\|<\frac{1}{N_2^2}\left[\sqrt{\left(N_2^1\right)^2+N_2^2\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)}-N_2^1\right].$$

де

$$N_1^1=\left|(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T\right| ,$$

$$N_1^2=2\xi^2+|H+G|+L_2\left|cc^T\right|\left(1+\eta^2\right)+L_2\frac{\left|(A-I)^T cc^T cc^T (A=I)\right|}{\eta_2^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)}+$$

$$+2\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)+1\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)} ,$$

$$N_2^1=\left|(H+G)B\right|+\left|B^Tcc^T\right| ,$$

$$N_2^2=\frac{2}{\xi^2}\left|(H+G)(H+G)\right|+|H+G|+L_2\left|cc^T\right|\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)+(L_2+1)\frac{\left|A^T(H+G)(H+G)A\right|+L_2\left|(A-I)^T cc^T (A-I)\right|}{\eta_1^2\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)}+$$

$$+2\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)+1\right]\frac{\left|b^T(H+G)(H+G)b\right|+\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left|cc^T\right|}{\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)} ,$$

$0<\eta_1^2<1$, $0<\eta_2^2<1$, ξ, η – довільні сталі, тоді система (2.1) буде абсолютно інтервально стійкою при будь-якому запізнюванні m. І для поведінки розв'язків будуть справедливі оцінки:

$$|x(k)|\le\left[\sqrt{\phi_{11}(H)}\,|x(0)|+\sqrt{\phi_{12}(G,H)}\,\|x(0)\|_{2\gamma}\right],\rho^{\frac{1}{2}k} ,$$

$$\|x(k)\|_{2\gamma}\le\left[\sqrt{\phi_{21}(G,H)}\,|x(0)|+\sqrt{\phi_{22}(G)}\,\|x(0)\|_{2\gamma}\right]\rho^{\frac{1}{2}k} , \quad (3.5)$$

де

$$\rho=\min\left\{1-\frac{\theta[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)},\quad 1-\frac{(1-\gamma)\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(G)}\right\} , \quad (3.6)$$

$$\theta[\bullet]=\left(1-\eta_1^2\right)\lambda_{\min}\left(C(G,H,\beta,\nu,\gamma)\right)-2N_1^1|\Delta A|-N_1^2|\Delta A|^2 ,$$

Доведення. Якщо матриці H і G додатно визначені, то справедлива двостороння оцінка (3.2). Розглянемо першу різницю функціонала $V\left[x(k),\gamma\right]$ уздовж розв'язків $x(k)$ системи (2.1). При цьому розіб'ємо першу суму у функціоналів на два доданки

$$\Delta V\left[x(k),\gamma\right]=V\left[x(k+1),\gamma\right]-V\left[x(k),\gamma\right]=$$

$$=\left\{x^T(k+1)Hx(k+1)+x^T(k+1)Gx(k+1)+\sum_{j=1}^{m}\gamma^j x^T(k+1-j)Gx(k+1-j)\right\}-$$

$$-\left\{x^T(k)Hx(k)+\sum_{j=0}^{m-1}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j)\right\}+\beta\int_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)}f(\xi)d\xi .$$

Помінявши індекс сумування в першій сумі і об'єднавши два доданки в першій дужці, отримаємо

$$\Delta V\left[x(k),\gamma\right] = x^T(k+1)(H+G)x(k+1) + \gamma\sum_{j=0}^{m-1}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) - x^T(k)Hx(k) -$$

$$-\sum_{j=0}^{m}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) + \beta\int_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)} f(\xi)d\xi .$$

Додамо до першої суми доданок $\gamma^{m-1}x^T(k-m)Gx(k-m)$ і віднімемо від всієї суми. Об'єднавши суми і замінивши інтеграл, отримаємо

$$\Delta V\left[x(k),\gamma\right] = x^T(k+1)(H+G)x(k+1) + (\gamma-1)\sum_{j=0}^{m}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) -$$

$$-\gamma^{m+1}x^T(k-m)Gx(k-m) - x^T(k)Hx(k) + \beta\int_{\sigma(k)}^{\sigma(k+1)} f(\xi)d\xi .$$

Замінимо інтеграл його оцінкою згідно (1.3) і підставимо замість $x(k+1)$ його значення з системи (2.1)

$$\Delta V\left[x(k)\right] \le \left[(A+\Delta A)x(k) + (B+\Delta B)x(k-m) + bf(\sigma(k))\right]^T \times$$

$$\times(H+G)\left[(A+\Delta A)x(k) + (B+\Delta B)x(k-m) + bf(\sigma(k))\right] +$$

$$+(\gamma-1)\sum_{j=0}^{m}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) - \gamma^{m+1}x^T(k-m)Gx(k-m) - x^T(k)Hx(k) +$$

$$+\beta L_1 f(\sigma(k))c^T\left[(A+\Delta A-I)^T x(k) + (B+\Delta B)x(k-m) + bf(\sigma(k))\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\beta L_2\left[(A+\Delta A-I)^T x(k) + (B+\Delta B)x(k-m) + bf(\sigma(k))\right]^T cc^T \times$$

$$\times\left[(A+\Delta A-I)x(k) + (B+\Delta B)x(k-m) + bf(\sigma(k))\right].$$

Використовуючи введений параметр $0<\gamma<1$ і перетворення, наведені в попередній теоремі, перепишемо отриманий вираз у наступній формі

$$\Delta V\left[x(k)\right] \le -\theta_4[\bullet]\left|x(k)\right|^2 - \theta_5[\bullet]\left|x(k-m)\right|^2 - (1-\gamma)\sum_{j=0}^{m}\gamma^j x^T(k-j)Gx(k-j) ,$$

де залежності $\theta_4[\bullet]$, $\theta_5[\bullet]$ відрізняються відповідно від $\theta_1[\bullet]$, $\theta_2[\bullet]$ лише значенням $\lambda_{\min}(C(G,H,\beta,\nu,\gamma))$, що наведене в (3.3). Таким чином для функціонала і його першої різниці отримали нерівності

$$\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)\left|x(k)\right|^2 + \lambda_{\min}(G)\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 \le V\left[x(k),\gamma\right] \le \bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)\left|x(k)\right|^2 + \lambda_{\max}(G)\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 ,$$

$$\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -\theta_4[\bullet]\left|x(k)\right|^2 - \theta_5[\bullet]\left|x(k-m)\right|^2 - (1-\gamma)\lambda_{\min}(G)\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 . \qquad (3.7)$$

Скористаємося цими нерівностями для отримання оцінок збіжності розв'язків $x(k)$ системи (2.1).

Введемо позначення

$$a_1 = \bar{\lambda}_{\min}(H,\beta),\ a_2 = \lambda_{\min}(G),\ b_1 = \bar{\lambda}_{\max}(H,\beta),\ b_2 = \lambda_{\max}(G),\ c_1 = \theta_4[\bullet],\ c_2 = (1-\gamma)\lambda_{\min}(G) . \qquad (3.8)$$

Нерівності (3.7) приймуть вигляд

$$a_1\left|x(k)\right|^2 + a_2\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 \le V\left[x(k),\gamma\right] \le b_1\left|x(k)\right|^2 + b_2\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 \qquad (3.9)$$

$$\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -c_1\left|x(k)\right|^2 - c_2\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 . \qquad (3.10)$$

Перепишемо праву частину нерівності (3.9) у вигляді

$$-V\left[x(k),\gamma\right] \ge -b_1\left|x(k)\right|^2 - b_2\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2 . \qquad (3.11)$$

Розглянемо два випадки.

1. Перепишемо отриману нерівність (3.11) у вигляді $-\left|x(k)\right|^2 \le -\frac{1}{b_1}\left[V\left[x(k),\gamma\right] - b_2\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2\right]$.

Підставимо отриманий вираз в (3.10) і запишемо $\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -\frac{c_1}{b_1}V\left[x(k),\gamma\right] - \left(c_2 - \frac{c_1 b_2}{b_1}\right)\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^2$.

Якщо параметри системи такі, що $\frac{c_2}{c_1} \ge \frac{b_2}{b_1}$, то $\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -\frac{c_1}{b_1}V\left[x(k),\gamma\right]$.

Розв'язавши отриману різницеву нерівність, запишемо

$$V\left[x(k),\gamma\right] \le V\left[x(0),\gamma\right]\left(1-\frac{c_1}{b_1}\right)^k . \qquad (3.12)$$

2. Перепишемо нерівність (3.11) у вигляді

$$-\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^{2} \le -\frac{1}{b_2}\left[V\left[x(k),\gamma\right]-b_1\left|x(k)\right|^{2}\right].$$

Підставим отриманий вираз в (3.10) і запишемо $\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -\frac{c_2}{b_2}V\left[x(k),\gamma\right]-\left(c_1-\frac{c_2 b_1}{b_2}\right)\left|x(k)\right|^{2}$.

Якщо параметри системи такі, що $\frac{c_2}{c_1} \le \frac{b_2}{b_1}$, то $\Delta V\left[x(k),\gamma\right] \le -\frac{c_2}{b_2}V\left[x(k),\gamma\right]$.

Розв'язавши записану різницеву нерівність, отримаємо

$$V\left[x(k),\gamma\right] \le V\left[x(0),\gamma\right]\left(1-\frac{c_2}{b_2}\right)^{k}. \tag{3.13}$$

Використовуючи нерівності (3.12), (3.13) і враховуючи двосторонні нерівності (3.2), отримуємо

$$\bar{\lambda}_{\min}(H,\beta)\left|x(k)\right|^{2}+\lambda_{\min}(G)\left\|x(k)\right\|_{2\gamma}^{2} \le \left[\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)\left|x(0)\right|^{2}+\lambda_{\max}(G)\left\|x(0)\right\|_{2\gamma}^{2}\right]\rho^{k},$$

де

$$\rho=\begin{cases}1-\dfrac{c_1}{b_1}, & \textit{якщо} \;\; \dfrac{c_2}{c_1} \ge \dfrac{b_2}{b_1}\\[2mm] 1-\dfrac{c_2}{b_2}, & \textit{якщо} \;\; \dfrac{c_2}{c_1} < \dfrac{b_2}{b_1}\end{cases}.$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми 3.1.

1. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с. 2. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36. 3. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с. 4. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с. 5. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М., Наука, 1970. – 453 с. 6. Громова П.С., Пелевина А.Ф. Достаточные условия абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования с запаздыванием. – Труды семинара по дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом, Т.10, 1977. – С.79-90. 7. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с. 8. Чеховой Ю.Н. Устойчивость дискретных автоматических систем, содержащих нелинейные и квазилинейные блоки // Автоматика, №6, 1984. – С.75-77. 9. Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно импульсной модуляцией. – Киев, Техніка, 1970. – 340 с. 10. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с. 11. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Киращук Д.Д. Використання функціоналів Ляпунова-Красовського для дослідження лінійних функціонально-різницевих систем з запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 2001. – С.306-314. 12. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев, Наукова думка, 2006. – 365 с. 13. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика, №12, 2008. – С.105-118. 14. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Абсолютная устойчивость разностных систем с запаздыванием // Обчислювальна та прикладна математика, в.2(98), 2009. – С.95-107. 15. Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник Ленинградского университета. Математика-механика-астрономия, №1, 1971. – С.62-77.

Надійшла до редколегії 02.06.10

УДК 531.37

О. Шкуліпа, асп.

ЕЛІПТИЧНА МОДЕЛЬ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ МЕДИЧНИХ ДАНИХ

Представлено алгоритм та реалізацію кластеризації медичних даних за допомогою побудови еліпсів мінімальної площі. Наведено результати кластеризації для визначення етіологічного чинника токсемії у хворого.

Medical data clustering algorithm and implementation based on smallest enclosing ellipse is covered. The results of clustering to determine the causative factor in toxemia patients are presented.

Вступ

В роботі розглядається побудова алгоритму кластеризації для знаходження етіологічного чинника токсемії у хворого. Важливою умовою для кластеризації даних наприклад з використанням дискримінантного аналізу [3], t-критерію Стьюдента [3] або ж інших статистичних методів є те що для їх використання дані повинні бути розподілені за нормальним законом. Так як для медичних даних часто ця умова не виконується, то виникає необхідність розробки нового алгоритму позбавленого обмеження що накладає необхідність розподілення даних за нормальним законом. Запропонований метод кластеризації етіологічного чинника токсемії використовує алгоритм побудови еліпсу мінімальної площі що дозволяє не проводити перевірку нормальності розподілу даних.

Задача визначення етіологічного фактору на підставі особливостей прояву ендотоксемії зводиться до наступної математичної моделі:

Для заданого хворого $x=(x_1,...,x_n)$ необхідно визначити етіологічний чинник виникнення хвороби.

Уведемо позначення, що будуть використовуватись в наступному аналізі:

- $g=\{g_1,g_2\}$ – класи кластеризації, $k=1,2$
- n_k – кількість спостережень в k-тій етіології.
- n – загальна кількість спостережень $n=65$.
- x_{ikm} – величина змінної i_s для m-го спостереження в k-тій етиології $i_s \in I$
- $I=\{i_1,i_2,...,i_{29}\}$ – множина токсикометричних показників

Умовно алгоритм ділиться на дві частини: формування множини еліпсів для кластеризації та власне визначення етіологічного чинника токсемії у хворого.

В основі формування множини еліпсів для визначення етіологочного чинника ендотоксемії покладено метод кластеризації даних, шляхом знаходження випуклої оболонки серед множини точок на площині та подальшої побудови еліпсів мінімальної площі (ЕМП), що апроксимують шукані кластери. З метою усунення впливу помилкових даних, для побудови кластерів нами було відібрано лише ті токсикометричні показники, які здійснюють найбільший вплив на кластеризацію етіологій. Для цього на початку був проведений аналіз випуклих оболонок [1] для кожної пари етіологічних чинників, а потім застосована побудова еліпсу мінімальної площі [2] для однієї з пари етіологій. Визначення етіологічного чинника токсемії у хворого проводиться шляхом перевірки знаходження хворого в побудованому еліпсі мінімальної площі.

Крок 1

Для $l, m \in I, l \neq m$ *будуються випуклі оболонки для кожного з класів* g *по* x_{ikm} *, якщо випуклі оболонки не перетинаються або їх можна розділити кривою другого порядку, то* l, m *переходять до наступного кроку, в протилежному випадку відкидаються.*

Крок 2

Для отриманих l, m *будується еліпс мінімальної площі* e_1 *для* g_1

Крок 3

Для отриманих l, m *будується еліпс мінімальної площі* e_2 *для* g_2

В результаті отримуються кластеризуючі еліпси, що дозволяють однозначно визначити етіологічний чинник токсемії у хворого за допомогою перевірки:

Якщо для токсикометричних показників l та m *виконується умова, що* x_{ikm} *лежить в середині* e_1*, то хворого буде віднесенно до класу* g_1*, в іншому випадку виконується аналогічна перевірка для* e_2.

Так як для таких пар токсикометричних показників l, m визначається кілька еліпсів, то запропонований алгоритм дозволяє з великою точністю визначити етіологічний чинник токсемії у хворого.

Алгоритм розпізнавання за допомогою еліптичного підходу на прикладі факторів "Аномалії печінки" та "Аномалії нирок".

Для визначення тих токсикометричних параметрів, які є значимими при розділенні зазначених етіологічних чинників токсемії проведено їх попарне групування в двовимірному просторі.

У табл. 1 зображена матриця з токсикометричними параметрами, які групуються.

Таблиця 1

Матриця порівнянь

Токсикометричні параметри	НСТ-Гсп.	НСТ-Гінд.	НСТ-М сп.	.	ЦАЛс-МВ	ЦІК	КрЛг
НСТ-Гсп.	0	$i_{1,2}$	$i_{1,3}$	.	$i_{1,27}$	$i_{1,28}$	$i_{1,29}$
НСТ-Гінд.	0	0	$i_{2,3}$	.	$i_{2,27}$	$i_{2,28}$	$i_{2,29}$
НСТ-М сп.	0	0	0	.	$i_{3,27}$	$i_{3,28}$	$i_{3,29}$
.	.	.	.	.	.	.	.
ЦАЛс-МВ	0	0	0	.	0	$i_{27,28}$	$i_{27,29}$
ЦІК	0	0	0	.	0	0	$i_{28,29}$
КрЛг	0	0	0	.	0	0	0

Примітка:

1. НСТ-Гсп. – спонтанний НСТ-тест гранулоцитів.
2. НСТ-Гінд. – індукований НСТ-тест гранулоцитів.
3. НСТ-Мсп. – спонтанний НСТ-тест моноцитів.
4. ЦАЛс-МВ – цитолітична активність вільноциркулюючих ендотоксинів із розміром молекул < 10 нм.
5. ЦІК – циркулюючі імунні комплекси.
6. КрЛг – кріолабільні глобуліни.
7. $i_{1,2}$ означає, що етіопатогенетичні чинники "Аномалії печінки" та "Аномалії нирок" порівнюються за токсикометричними параметрами "НСТ-Гсп." та "НСТ-Гінд.
8. "0" означає, що такі групи відкидаються з аналізу, так як вони симетричні.

Кількість таких комбінацій буде дорівнювати $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = C_{29}^2 = 406$. Використання попарного аналізу є зручним тому, що він може бути проведений у двохвимірному просторі. За допомогою методу Грехема [3], у кожному з випадків $i_{l,m}$ може бути побудована випукла оболонка для кожного із двох етіопатогенетичних чинників ендотоксемії.

Приклади побудови випуклих оболонок наведено на рис. 1, 2.

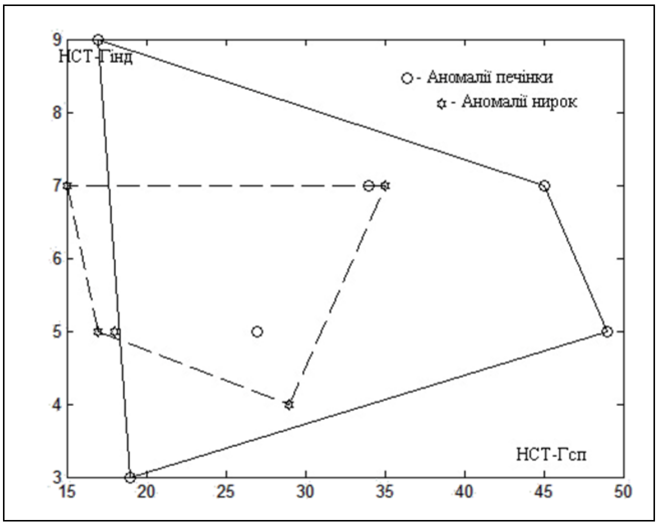


Рис. 1. Випуклі оболонки у випадку НСТ-Гсп. та НСТ-Гінд

Примітка:

1. НСТ-Гсп. – спонтанний НСТ-тест гранулоцитів.
2. НСТ-Гінд. – індукований НСТ-тест гранулоцитів.

На рис.1 зображено результат кластеризації етіопатогенетичних чинників ендотоксемії за токсикометричними показниками НСТ-Гсп. та НСТ-Гінд. Отримані дані свідчать про досить проблематичну кластеризацію, так як, по-перше – випуклі оболонки перетинаються; по-друге – токсикометричні показники хворого, у якого ендотоксемія спричинена етіопатогенетичним чинником "Аномалії печінки" попадає в випуклу оболонку, що створена етіопатогенетичним чинником "Аномалії нирок".

На рис. 2 зображена протилежна ситуація, коли за допомогою токсикометричних параметрів АроЛк-БВ та ЦаЛг-МВ можна провести кластеризацію.

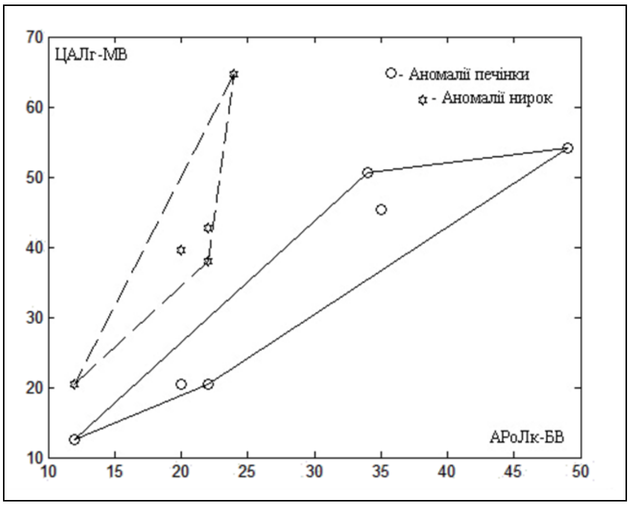


Рис. 2. Випуклі оболонки у випадку АРОЛк-БВ та ЦАЛг-МВ

Примітка:

1. АРОЛк-БВ – автоімунна активність цитомембранних ендотоксинів із розміром часток > 200 нм.
2. ЦАЛг-МВ – цитолітична активність глобулінасоційованих ендотоксинів із розміром молекул < 10 нм.

Після аналізу отриманих результатів побудови випуклої оболонки, залишились тільки ті токсикометричні показники, в яких випуклі оболонки або не перетинались, або їх можна розділити за допомогою кривої другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{21}y + a_{33} = 0$ (рис. 3, 4).

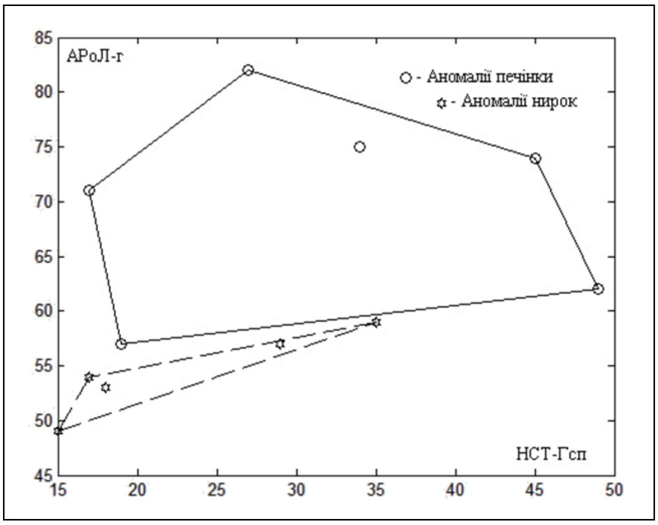


Рис. 3. Тоскикометричні показники (АРОЛ-г та НСТ-Гсп.) що розділяють етіопатогенетичні чинники

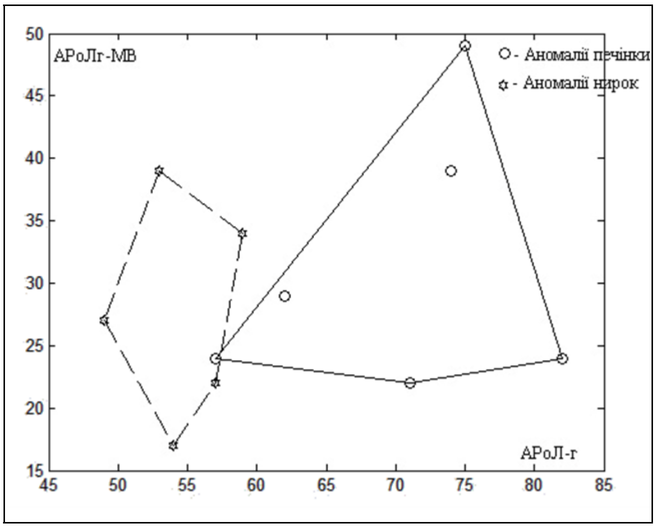


Рис. 4. Тоскикометричні показники що розділяють етіопатогенетичні чинники

Таким чином, було отримано 33 пари. Провідним показником, що розділяє етіопатогенетичні чинники (в нашому прикладі), був "АРоЛ-г" (його рівень був визначальним для розділення-розпізнавання етіопатогенетичного чинника в 51,5 % випадків); наступним за значимістю виявився показник "ЦАЛс-МВ" (його рівень був визначальним у 15,15 % випадків).

Для подальшої кластеризації було побудовано ЕМП для одного з етіопатогенетичних чинників та проведено перевірку отриманих результатів на контрольній вибірці хворих (рис. 5, 6).

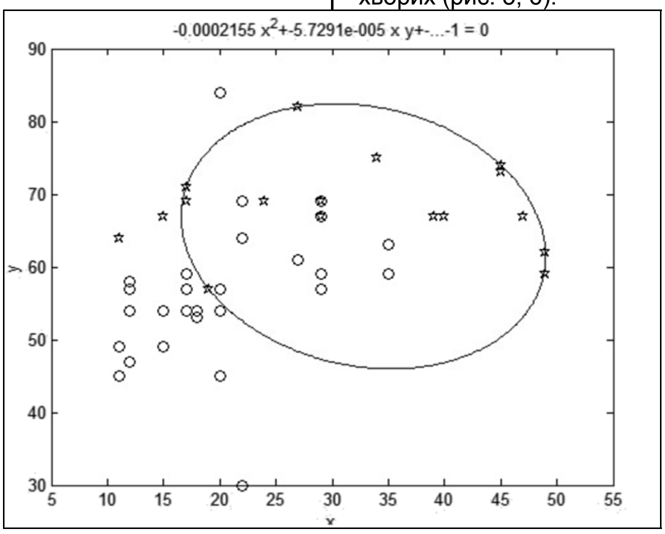


Рис. 5. Кластеризація даних за токсикометричними показниками НСТ-Гсп та АРоЛ-г

Примітка (тут та надалі):

1) На рисунках знаком * позначені параметри ендотоксемії у хворих з етіопатогенетичним чинником "Аномалії печінки";

2) Знаком – параметри ендотоксемії у хворих з етіопатогенетичним чинником "Аномалії нирок".

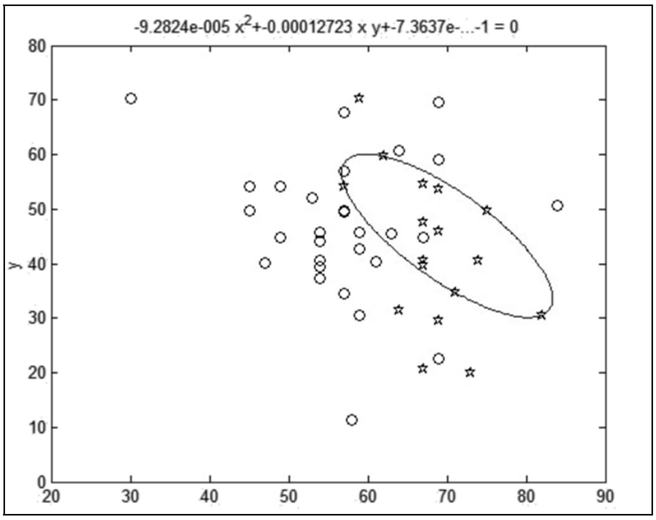


Рис. 6. Кластеризація за токсикометричними показниками АРоЛ-г та ЦАЛа-МВ

У результаті проведених досліджень були отриманні рівняння еліпсів що кластеризують два токсикометричних показники. Для токсикометричних показників НСТ-Гсп. та АРоЛ-г рівняння еліпсу мінімальної площі набуває вигляду:

$$f(x,y) = -0.0002155x^2-5.7291e\text{-}005xy-0.00017068y^2+0.017807x+0.02379y-1 = 0$$

З метою перевірки отриманого нами рівняння еліпсу мінімальної площі для показників НСТ-Гсп. та АРоЛ-г були проведені тестові дослідження з використанням токсикометричних параметрів ендотоксемії в пацієнтів контрольної групи (табл. 2).

Таблиця 2

Результати тестових досліджень розпізнавання етіопатогенетичного чинника ендотоксемії по параметрам НСТ-Гсп. та АРоЛ-г

Етіопатогенетичний чинник ендотоксемії	Кількість випадків правильного розпізнавання (%)
Аномалії печінки	91,17
Аномалії нирок	60,00

Для випадку токсикометричних показників НСТ-Гінд та АРоЛ-г рівняння ЕМП набуває вигляд:

$$f(x,y) = -9.2824e\text{-}005x^2-0.00012723xy-7.3637e\text{-}005y^2+0.018738x+0.015551y-1 = 0$$

Результати перевірки алгоритму на тестових даних для НСТ-Гінд. та АРоЛ-г наведено у табл. 3:

Таблиця 3

Результати тестових досліджень розпізнавання етіопатогенетичного чинника ендотоксемії по параметрам НСТ-Гінд. та АРоЛ-г

Етіопатогенетичний чинник ендотоксемії	Кількість випадків правильного розпізнавання (%)
Аномалії печінки	97,05
Аномалії нирок	66,70

Результатом роботи алгоритму є знайдене рівняння еліпса, що кластеризує етіології:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{21}y + a_{33} = 0$$

Тобто якщо токсикометричні параметри хворого попадають усередину еліпсу, то ендотоксемія за етіопатогенетичним чинником відноситься до "Аномалії печінки"; Важливим є встановлений результат, який указує на існування декількох пар токсикометричних показників за якими можна з імовірністю більше 70 % визначити етіопатогенетичний чинник хворого. Можна стверджувати, що пошук оптимальної математичної моделі розпізнавання етіопатогенетичного чинника ендотоксемії повинен відкрити нові підходи до діагностики в медицині та сприяти оперативному застосуванню методів етіотропної терапії в лікуванні різних захворювань.

Висновки:

1. Для розпізнавання етіопатогенетичного чинника захворювання в графічних образах ендотоксемії можна застосовувати еліптичну математичну модель.
2. Метод, заснований на побудові еліпсів мінімальної площі для різних пар токсикометричних параметрів дозволяє з високою точністю (від 60,00 % до 97,05 %) визначати етіпатогенетичний чинник ендотоксемії у хворого.

Роботи з пошуку оптимальної математичної моделі розпізнавання етіопатогенетичного чинника ендотоксемії в пацієнтів із різними захворюваннями продовжуються.

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. / Мир, 1989. – 478 с. 2. Рубльов Б.В., Петунін Ю.І., Милейко Ю.Ю. Геометричні властивості еліпса мінімальної площі та деякі суміжні питання / К.:Київський університет, 2000. – 73 с. 3. Amiya Nayak, Ivan Stojmenovic Handbook of applied algorithm. Solving scientific, engineering and practical problem. – Willey interscience, 2008 – 541 p.

Надійшла до редколегії 08.02.10

УДК 004.8

Ю. Крак, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
А. Тернов, асп.

СИНТЕЗ МІМІКИ ТА ЕМОЦІЙ НА ОБЛИЧЧІ ЛЮДИНИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЖЕСТОВОЇ МОВИ

Запропоновано нові алгоритми побудови мімічних і емоційних проявів на обличчі людини для моделювання жестової мови.

The new algorithms of human face mimic and emotional displays construction for sign language modelling are offered.

Вступ. Обмеження в існуючих засобах відображення жестової мови вимагають розробки більш гнучких технологій за допомогою яких можна було б створювати нові комп'ютерні системи навчання та комунікації для людей з вадами слуху. У роботах [1, 2] авторами запропонована концепція інформаційної технології невербального спілкування для людей з вадами слуху. Комплексна інформаційна технологія містить у собі функціональність по синтезу: рухів жестової мови, дактильної абетки, артикуляційної й емоційної міміки на тривимірній моделі людини. У даній роботі розглянуто аспект синтезу емоційної та артикуляційної складових моделювання жестової мови на тривимірній моделі людини.

У жестовій мові окрім самого жесту каналами передачі інформації слугують емоції та артикуляція. Тому, для правильної інтерпретації необхідно враховувати весь комплекс інформації, що супроводжує жест, бо один і той самий жест має багато значень в усному мовленні. Частиною розмови-кальки є процес мануральної (від лат. manus – рука й oralis – усний) системи мови для уточнення слова (його фонетичної конструкції, змісту), що передається жестом. Отже, для простоти розуміння й сприйняття інформації, дуже важлива правильна артикуляція губ перекладача [3-5]. Для математичної моделі голови людини це трансформується в задачу синтезу правильної артикуляції.

Існує досить багато систем моделювання процесу анімації при мовотворенні [6, 7]. Обличчям людини керують 26 м'язів. Для того щоб досягти максимальної схожості з реальним прототипом, його тривимірна модель повинна мати відповідну систему м'язів або імітувати їх роботу. При моделюванні голови людини необхідно враховувати такі елементи, які майже завжди є самостійними об'єктами: очі, щелепи й зуби, язик і волосся. Наявність зазначених об'єктів підвищує ступінь керованості моделі, але і ускладнює її в цілому. Для анімації емоцій і мовного процесу, зазвичай, застосовуються технології морфінгу, коли відбувається плавна модифікація каркасної сітки від базової форми до форми цільового об'єкту. На такому принципі побудоване керування обличчям в Poser, Victoria, FaceGen і багатьох інших редакторах [6-8].

Процес анімація обличчя персонажів при звичайному мовленні включає в себе як налаштування губ моделі для імітації анімації проголошення одиниць мови, так і синхронізацію рухів губ з відповідним звуковим файлом. Для анімація мовленнєвого процесу для ряду мов (англійської, німецької, іспанської) розроблені бібліотеки фонем (складових частин мови). Процес синтезу анімації наступний:

- у програму тривимірного моделювання імпортується звуковий файл;
- визначаються ключові кадри, що відповідають вимові того або іншого звуку й тих моментів, коли персонаж мовчить (початок і закінчення звуку, складу або слова);
- до кожного ключового кадру з бібліотеки завантажується необхідна фонема. Зовнішні артикулятори (губи і язик) персонажу в цей момент, тобто у даному кадрі, змінюють своє положення відповідно до фонеми.

Додатково враховується час підготовки людини до мовлення, коли його губи починають рухатися до того, як ми чуємо звук. При наявності інструментів по розпізнаванню мови, наприклад для англомовних персонажів у програмі Poser, процес синхронізації може здійснюватися в автоматичному режимі.

Але усі зазначені технології орієнтовані на створення систем синтезу аудіовізуальної мови і не передбачають синхронізацію мовного процесу з жестом. Особливістю досліджуваної задачі, що вимагає адаптації й перегляду існуючих підходів, є те, що процес артикуляції для людей з вадами слуху припускає більш експресивний (яскраво виражений) акцентований рух губ при формуванні візуальних портретів інформації що передається, а також наявність проблеми синхронізації міміки губ з жестом, а не з аудіо-сигналом.

Проведений аналіз існуючих результатів і робіт з даної тематики, визначив напрямок досліджень і постановку задачі.

Постановка задачі. Необхідно синтезувати артикуляційну та емоційну складову процесу візуалізації жестової мови на тривимірній моделі людини. Процес синтезу припускає:

- одержання бібліотеки візем для української мови;
- синхронізацію міміки обличчя й артикуляції губ з жестом.

Алгоритми вирішення задачі. Для моделювання процесу анімації артикуляційної й емоційної складових запропоновано використовувати механізм морфінгу – алгоритм плавного переходу від одного стану об'єкта до іншого. При застосуванні морфінгу використовуються тільки опорні стани, за допомогою яких розраховуються проміжні стани й моделюється процес анімації.

Відображення або побудова міміки на обличчі тривимірної моделі досягається при застосуванні відносного (сегментного) морфінга до моделі. Формула відносного морфінга для M морфів у формалізмі моделі буде мати такий вигляд:

$$V' = V + \sum_{m=1}^{M} w_m \cdot TM_m .$$

де w_m – вагові коефіцієнти, V – меш базової моделі без морфінгу, TM_m – вхідний меш (морф) для блендінгу. Результатом операції є лінійна комбінація мешів моделі й міміки.

Метод сегментного морфінгу дає можливість формувати кілька виразів обличчя на основі невеликої кількості морфів і змінювати стан обличчя при анімації мовлення. Додатковою перевагою сегментного морфінгу є те, що можна анімувати щелепу незалежно від губ та очей (моргання), незалежно від емоційного прояву на обличчі.

Для анімації слова, комбінації слів запропоновано використовувати два відеоряди, які відповідають за жест (анімацію рухів тіла) – відео ряд жесту; і міміку (міміка з артикуляцією) – відео ряд міміки. Образом кожного відеоряду є слово (наприклад, "ВСТАНОВЛЮЄТЬСЯ" (рис. 1)) У відеоряді жесту інформація про слово передається жестом, а у відео ряді міміки – за допомогою артикуляції та емоцій.

Рис. 1. Приклад частини відеоряду жесту й міміки для слова "ВСТАНОВЛЮЄТЬСЯ"

Якісно відеоряд міміки складається із процесу анімації правильної артикуляції й процесу анімації емоції (запитальний вираз обличчя, подив, радість, тощо).

Алгоритми процесу синтезу правильної артикуляції можуть мати різну складність реалізації. Це залежить від моделі та елементів синтезу. У роботі пропонується здійснювати синтез за допомогою морфінгу візем української мови в процесі промовляння губами вербальної інформації. Візема – це характерний вираз обличчя, що є візуальним портретом фонеми або іншої базової звукової одиниці в розмовній мові. Використовуючи віземи, люди з порушеннями слуху сприймають розмовну мову візуально. Морфінг-мішень віземи вважається одиницею візуальної інформації. Тому для розв'язання задачі синтезу правильної артикуляції при спілкуванні людей з дефектами слуху було проведено дослідження, спрямовані на отримання морфінгів-мішеней візем української мови.

В українській мові розрізняють 15 візем і стан спокою (табл. 1):

Таблиця 1

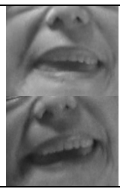
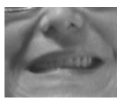
Віземи української мови

візема	*фонеми*	*візема*	*фонеми*
1	а	9	п, б, м
2	е	10	в, ф
3	о	11	т, д, н, л
4	у	12	с, з, ц, дз
5	і, и	13	р
6	й	14	л', р'
7	Ш, ж, ч, дж	15	т', д', н'
8	к, г, х, ґ	16	**стан спокою**

По тестовій вибірці фонем української мови було отримано відеоряд процесу артикуляції професійного сурдоперекладача, на основі якого, з урахуванням будови моделі голови людини були побудовані морфінги-мішені візем української мови (табл. 2). Аналогічним чином були отримані морфінги-мішені емоцій.

Таблиця 2

Морфінг-мішені візем української мови

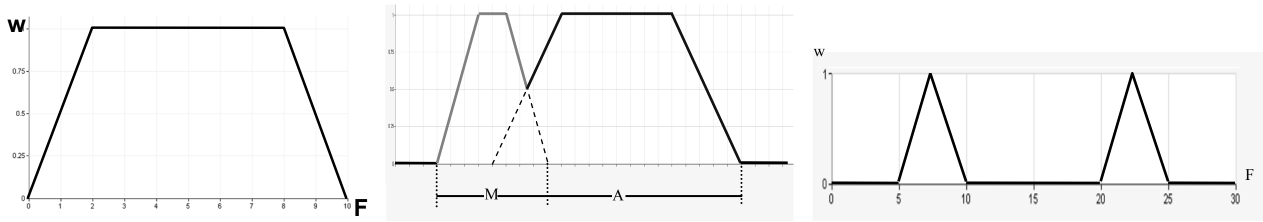
Візема	Тестове слово	Зображення	Візема	Тестове слово	Зображення
1	р**А**к		7	**Ш**ум, **Ж**ах, **Ч**ас, **ДЖ**міль	
2	ст**Е**п		9	**П**ар, **Б**ик, **М**еч	
3	с**О**н		10	**В**ир, **Ф**ах	
4	р**У**х		11	**Д**ар, **Н**ас, **Л**ан	
5	к**И**т, к**І**т		12	**С**ум, **З**ал, **ДЗ**ига, **Ц**е	

Для візуалізації процесу артикуляції слова використовується його фонетична транскрипція. Текст розбивається на фонетичні склади за правилами словотворення української мови. Кожний склад являє собою комбінацію голосних і приголосних звуків. Всі звуки по таблиці відповідності мають свої віземи (візуальні портрети). Комбінацію візем для моделювання складу дає "змішана" морфінг-мішень – нормована сума відповідних морфінгів-мішеней візем.

Морфінг із використанням морфінгів-мішеней візем здійснюється з урахуванням вагових коефіцієнтів w_{v_i} :

- визначається кількість кадрів для анімації;
- визначається набір емоцій присутніх у слові;
- по фонетичній транскрипції розраховується набір візем для візуалізації процесу артикуляції;
- для візем v_i розраховуються тривалості етапів анімації й точки появи віземи – мінімальний номер кадру в якому $w_{v_i} > 0$.

На основі отриманої інформації для кожного кадру будується набір візем й емоцій з їхніми ваговими коефіцієнтами. Формули розрахунку вагових коефіцієнтів подані графіками (рис.2).



для одної віземи (емоції) для комбінації візем для процесу моргання

Рис. 2. Графічні подання алгоритму розрахунку вагових коефіцієнтів

Варто виділити три етапи анімації: зародження ($w < 1$ і зростає), зеніт ($w = 1$) і згасання ($w < 1$ і спадає). Характеристикою кожного етапу буде тривалість етапу – кількість кадрів необхідних для його анімації.

Для синхронізації з відеорядом жесту проводиться прив'язка другого ряду до першого. У дослідженнях, на основі аналізу відзнятого матеріалу, було отримано, що початок і кінець анімації міміки артикуляції повинні збігатися з початком і кінцем анімації жесту. Звідси випливає зв'язок між тривалістями етапів анімації візем і часом показу жесту.

Кількість кадрів для зародження й згасання віземи розраховується залежно від часу показу жесту, а також від кількості і якості візем (фонем) слова, що передається жестом. Під якістю віземи розуміється місце, яке вона займає у послідовності анімаційного ряду візем слова і належність віземи до однієї з 15-ти груп (табл. 1).

Реалізація. Для тестування запропонованого підходу використовувалася система відображення жестової мови з використанням тривимірних моделей [3], що відтворює методику викладання жестової мови в спеціальних загальноосвітніх школах для глухих дітей, за основу якого було взято рекомендовану міністерством освіти програму [4] для початкових класів.

Для відтворення процесу анімації жестів, артикуляційної й емоційної міміки тривимірною моделлю людини створено базовий клас, що реалізує морфемну (для відтворення артикуляційної й емоційної міміки) анімацію. У класі реалізовані відповідні методи, які, використовуючи тривимірне API OPENGL, відтворюють по описаних параметрах модель людини й, з використанням алгоритмів скінінгу й морфінгу, реалізують анімацію. У кожному кадрі може бути присутня комбінація емоції, віземи або комбінація візем (рис. 3, 4). Емоція розповсюджується на все слово. Кількість кадрів анімації слова дорівнює довжині відповідного жесту, що є його образом.

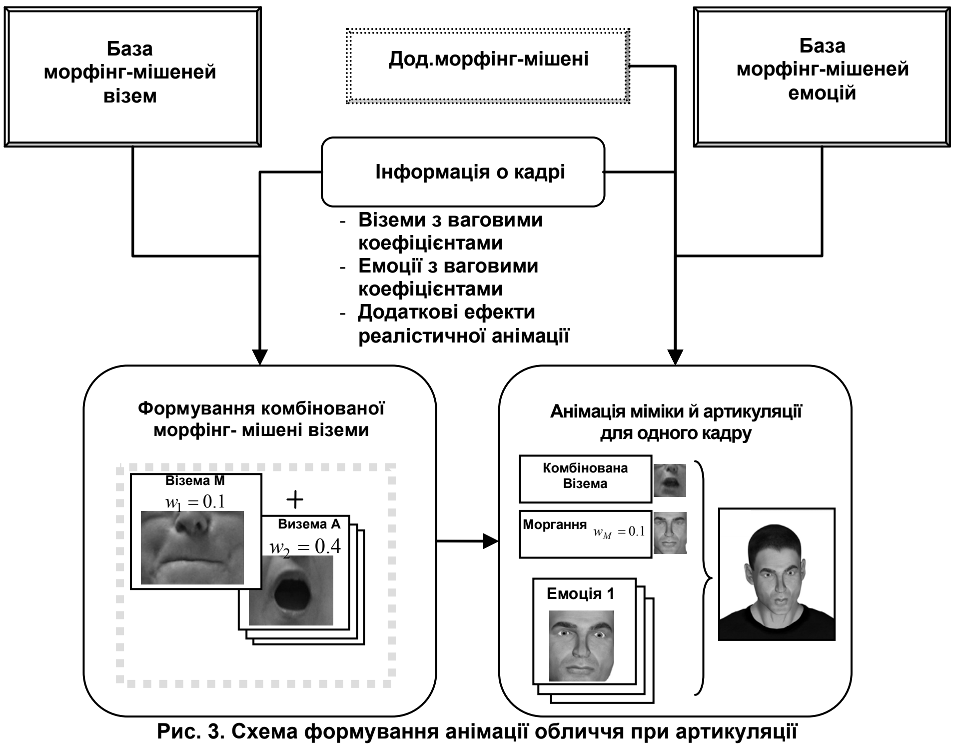


Рис. 3. Схема формування анімації обличчя при артикуляції

Візема "У" | Запитальний вираз обличчя | Результат застосування віземи "У" з вагою 0.7 і питального виразу обличчя

Рис. 4. Морфінг-мішені візем та емоцій

Використовуючи модель для фіксації рухів, які відтворюють українську жестову мову, було відцифровано множину з 50-ти жестів. Відтворення жестів із цієї множини зі застосуванням запропонованої анімації обличчя персонажу показало можливість запропонованої технології досить реалістично відтворювати рухи, які отримані з відеозображення конкретної людини – носія жестової мови.

Базові тривалості візем і комбінованих візем, які використаються для перерахування тривалості візем з урахуванням тривалості анімації жесту, були отримані на основі даних про тривалість звучання відповідних їм звукових частин звукового синтезатора (один з модулів системи [9]). Набори комбінованих візем, які є образами складів, також отримані на основі сегментного подання слів у синтезаторі.

Для аналізу якості результату синтезу використовувалась суб'єктивна модель оцінки сприйняття, що має за основу оцінку (висновок), отриманий від експерта в області сурдоперекладу.

Висновки. Для одержання більше якісної моделі синтезу артикуляції губ при візуалізації моноральної системи української мови необхідно провести додаткові дослідження в області фонетики української мови для опису різноманітних винятків й особливостей при словотворенні.

Подальші дослідження будуть спрямовані на поліпшення реалістичності й універсальності модуля анімації артикуляції й міміки, плавності переходу між деякими групами візем.

1. Кривонос Ю.Г. Інформаційна технологія невербального спілкування людей з вадами слуху / Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Бармак О.В. [та ін.] // Штучний інтелект. – 2008. – №3. – С. 325-331. 2. Крак Ю.В. Компьютерная система виртуального общения людей с проблемами слуха / Крак Ю.В., Бармак О.В., Тернов А.С. [та ін.] // Advanced Studies in Software and Knowledge Engineering, International Book Series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING", Number 4, Supplement to the International Journal "INFORMATION TECHNOLOGIES & KNOWLEDGE". – 2008. № 2. – P. 161-165. 3. Beskow J. Analysis and synthesis of multimodal verbal and non-verbal interaction for animated interface agents / J.Beskow, B.Granstrom, D. House // International Workshop on Verbal and Nonverbal Communication Behaviours – Proceedings, vol.4775 of Lecture Notes in Computer Science, 2007. P.250–263. 4. Grauwinkel K. Visualization of Internal Articulator Dynamics and Its Intelligibility in Synthetic Audio-Visual Speech / K. Grauwinkel, B. Dewitt and S. Fagel // International Congress on Phonetic Sciences 2007, Germany, August, 2007 – Proceedings P. 2173-2176. 5. Ouni S. Visual Contribution to Speech Perception: Measuring the Intelligibility of Animated Talking Heads / Ouni, S., Cohen, M. M., Ishak, H. [та ін.] // EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing, 2007. 6. Флемінг Б. Методы анимации лица. Мимика и артикуляция / Флемінг Б., Доббс Д.; пер. с англ. – М.: ДМК Пресс, 2002. – 336 с. 7. Parke F. Computer Facial Animation / Frederic I. Parke, Keith Waters; A.K. Peters Ltd, Wellesley, 2008. – 454 p. 8. Ratne P. 3-D Human Modeling and Animation, Second Edition / Peter Ratner; John Wiley & Sons Inc., New York, 2003. – 336 p. 9. Кривонос Ю.Г. Інформаційна технологія для моделювання української мови жестів / Ю.Г.Кривонос, Ю.В.Крак О.В.Бармак [та ін.] // Штучний інтелект. – 2009. №3. – С. 186-197. 10. Адамюк Н.Б. Програма-комплекс "Українська жестова мова": http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/programs_gluh.

Надійшла до редколегії 08.02.10

Н а у к о в е   в и д а н н я

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 10

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 20.12.10. Формат $60x84^{1/8}$. Вид. № К1. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 300. Ум. друк. арк. 6,05. Обл.-вид. арк. 6,5. Зам. № 210-5460.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; (38044) 239 31 58; факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua