КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№2 2022

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2022,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем і факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Геращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.
Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 2, 2022.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets’ Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
DOI*:* https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 Р dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Гопкало О.М., Сахно Л.М., ВасиликО.І. Властивості розв’язків лінійного рівняння KdV із φ-субгауссовими початковими умовами 11
Ламін А., Ямненко Р.Є., Оцінювання ймовірності банкрутства біноміально розподіленого числа φ-субгауссових позовів 20
Сахно Л.М. Деякі застосування узагальнених дробових похідних 28

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батюк Л. В., Кізілова Н. М. Реологічні моделі біологічних клітин 37
Затула Н.І., Затула Д.В. Математичне моделювання напруженого стану в'язкопружної напівплощини з включеннями 42
Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л.В. Поліпшення якості оптоакустичної візуалізації: співставлення фізичного та числового експерименту 46
Чайковський А.В., Лагода О.А. Обмежені розв’язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів 57

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Герасимюк Ю.С., Розора І.В., Пашко А.О. Про оцінку ймовірності переповнення буферу для мереж зв’язку 64
Ковальчук М., Харченко В., Яворський А., Бєда І., Панченко Т., Класифікація ЕКГ сигналів методами машинного навчання 70
Пащук І.О., Лівінська Г.В. Моделювання функцій життєдіяльності та смертності по даних для населення України 78

СУЧАСНА ФІЗИКА

Купріянчук В.М., Будник М.М., Розрахунок границь робочої зони круглого магнітного аплікатора 86

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Hopkalo O.M., Sakhno L.M., Vasylyk O.I. Properties of solutions to linear KdV equations with φ-sub-Gaussian initial conditions 11
Lamin A., Yamnenko R.Ye. Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ-sub-Gaussian claims 20
Sakhno L.M. Some applications of generalized fractional derivatives 28

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Batyuk L. V., Kizilova N. M. Rheological models of biological cells 37
Zatula N. I., Zatula D. V. Mathematical modeling of the stressed state of a viscoelastic half-plane with inclusions 42
Rudnitskii A.G., Rudnytska M.A., Tkachenko L.V. Improving the quality of optoacoustic imaging: a comparison of physical and numerical experiment 46
Chaikovs'kyi A., Lagoda O. Bounded solutions of a second order difference equation with jumps of operator coefficient 57

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Herasymiuk Y.S. , Rozora I.V., On probability estimation of buffer overflow for communication networks 64
Kovalchuk M., Kharchenko V., Yavorskyi A. , Bieda I., Panchenko T., ECG signal classification using machine learning techniques 70
Pashchuk I.O., Livinska H.V. Modeling of health and mortality functions based on data for the population of Ukraine 78

MODERN PHYSICS

V. M. Kupriianchuk, M. M. Budnyk, Calculation of boundaries of the working zone of the round magnetic applicator 86

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.1

О.М. Гопкало[1] *к.ф.-м.н., асистент*
Л.М. Сахно[2], *д.ф.-м.н, с.н.с.*
О.І. Василик[3], *д.ф.-м.н., доцент*

Властивості розв'язків лінійного рівняння KdV із φ-субгауссовими початковими умовами

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: olia_gopkalo@ukr.net
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua
[3]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

O.M. Hopkalo[1], *Ph.D., Assistant Professor*
L.M. Sakhno[2], *Dr.of Sci., Senior Researcher*
O.I. Vasylyk[3], *Dr.of Sci., Associate Professor*

Properties of solutions to linear KdV equations with φ-sub-Gaussian initial conditions

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: olia_gopkalo@ukr.net
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua
[3]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

Важливий практичний аспект оцінювання статистичних властивостей фізичних систем спирається на ефективне представлення зв'язку між розв'язками рівнянь з частинними похідними та випадковими початковими умовами. У цій роботі досліджуються властивості траєкторій випадкових процесів, що задають розв'язки (в $L_2(\Omega)$) для рівняння Айрі з φ-субгауссовими стаціонарними випадковими початковими умовами. Властивості субгауссовості та φ-субгауссовості є важливими характеристиками випадкових процесів, оскільки вони дають можливість оцінити різні функціонали від цих процесів, і, зокрема, дослідити поведінку їх супремумів. Основні результати роботи – це оцінки для розподілів супремумів випадкових процесів, що задають розв'язки для рівняння Айрі, на обмежених множинах. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладах у випадках гауссових початкових умов з різними допустимими функціями та φ-субгауссових початкових умов з певними функціями φ, зокрема $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1, x \in \mathbb{R}$.

Ключові слова: φ-субгауссові процеси, рівняння Айрі, випадкові початкові умови, розподіл супремуму

In this paper, there are studied sample paths properties of stochastic processes representing solutions (in $L_2(\Omega)$ sense) to the linear Korteweg–de Vries equation (called also the Airy equation) with random initial conditions given by φ-sub-Gaussian stationary processes. The main results are the bounds for the distributions of the suprema for such stochastic processes considered over bounded domains. Also, there are presented some examples to illustrate the results of the study.

Key Words: φ-sub-Gaussian processes, Airy equation, random initial condition, distribution of supremum

1 Introduction

It is well known that effects of dispersion play the important role in the description of linear and nonlinear wave motion.

The Korteweg–de Vries equation is the one of the most popular and well studied nonlinear dispersive partial differential equation used in many areas of physics. In its classical form

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + 6u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) + \frac{\partial^3}{\partial^3 x}u(t,x) = 0,$$

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, this equation was derived by Korteweg and de Vries in 1895 to model the unidirectional propagation of small amplitude long water waves in a shallow canal. Now many generalizations of this equation have been

© О.М. Гопкало, Л.М. Сахно, О.І. Василик 2022

investigated and applied in various areas including fluid dynamics, acoustics, electrodynamics, plasma physics, in modeling shock waves formation, solitons, waves in elastic media, turbulence, traffic flows, mass transport. The above equation with nonlinear term droped is called the linear Korteweg–de Vries equation or the Airy equation.

The purpose of this paper is to investigate sample paths properties of stochastic processes representing solutions of the linear Korteweg–de Vries equation with random initial conditions given by φ-sub-Gaussian stationary processes.

The general theory of φ-sub-Gaussian processes is presented in the classical monograph [4] and its further development can be found in numerous recent studies (see, e.g., [3, 15, 19] and references therein). The properties of sub-Gaussianity and φ-sub-Gaussianity are important characteristics of random processes, as they make it possible to estimate different functionals from these processes, and, in particular, the behavior of their suprema. The theory of φ-sub-Gaussian random processes provides us with powerful techniques and tools suitable not only for obtaining asymptotic results, but also for deriving many useful bounds on the distributions of such processes.

Partial differential equations with random initial conditions have been intensively studied in the literature from different points of view, starting from the papers by J. Kampé de Feriet (1955) and M. Rosenblatt (1967) who introduced rigorous probabilistic tools in this area. In [13, 14] solutions to PDE subject to random initial conditions were investigated by means of Fourier methods, representations of solutions by uniformly convergent series and their approximations in different functional spaces were developed.

The present paper is most closely related to the papers [2, 5, 7, 8, 10, 11, 17]. We continue to investigate properties of solutions to different types of partial differential equations with random initial conditions, in particular, we derive estimates for the distribution of suprema of solutions.

The paper is organized as follows. Section 2 collects important definitions and facts on φ-sub-Gaussian processes needed for our study. In Section 3 we consider stochastic processes representing solutions (in $L_2(\Omega)$ sense) of the Airy equation with random φ-sub-Gaussian initial conditions and state the bounds for the distributions of the suprema for such stochastic processes. Section 4 presents some examples to illustrate the results.

2 φ-sub-Gaussian variables and processes

We present basic definitions and facts on φ-sub-Gaussian variables and processes which will be used in the paper.

Definition 2.1. [4, 16] Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be a continuous even convex function. The function φ is an Orlicz N-function if $\varphi(0) = 0, \varphi(x) > 0$ as $x \neq 0$ and the following conditions hold: $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$.

Condition Q. Let φ be an N-function which satisfies $\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$, where the case $c = \infty$ is possible.

Definition 2.2. [4, 12] Let φ be an N-function satisfying condition Q and $\{\Omega, L, \mathbf{P}\}$ be a standard probability space. The random variable ζ belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if $\mathsf{E}\zeta = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\}$ exists for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and there exists a constant $a > 0$ such that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E\exp\{\lambda\zeta\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

The space $Sub_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm

$$\tau_\varphi(\zeta) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\zeta)\right)}{|\lambda|},$$

which can be written equivalently as $\tau_\varphi(\zeta) = \inf\{a > 0 : E\exp\{\lambda\zeta\} \le \exp\{\varphi(a\lambda)\}$, and it is called the φ-sub-Gaussian standard of the random variable ζ.

Definition 2.3. [9] A family Δ of random variables $\zeta \in Sub_\varphi(\Omega)$ is called strictly φ-sub-Gaussian if there exists a constant C_Δ such that for all countable sets I of random variables $\zeta_i \in \Delta$, $i \in I$, the following inequality holds:

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\zeta_i\right) \le C_\Delta \left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\zeta_i\right)^2\right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

The constant C_Δ is called the *determining* constant of the family Δ.

The linear closure of a strictly φ-sub-Gaussian family Δ in the space $L_2(\Omega)$ is the strictly φ-sub-Gaussian with the same determining constant ([9]).

Definition 2.4. [9] Random process $\zeta = \{\zeta(t), t \in T\}$ is called (strictly) φ-sub-Gaussian if the family of random variables $\{\zeta(t), t \in T\}$ is (strictly) φ-sub-Gaussian with a determining constant C_ζ.

Let K be a deterministic kernel and suppose that the process $X = \{X(t), t \in T\}$ can be represented in the form $X(t) = \int_T K(t,s)\,d\xi(s)$, where $\xi(t)$, $t \in T$, is a strictly φ-sub-Gaussian random process and the integral above is defined in the mean-square sense. Then the process $X(t)$, $t \in T$, is strictly φ-sub-Gaussian random process with the same determining constant (see [9]).

Definition 2.5. [4, 16] Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be an N-function. The function φ^* defined by

$$\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$$

is called the Young-Fenchel transform (or convex conjugate) of the function φ.

For a φ-sub-Gaussian random variable ζ the following estimate holds for its tail distribution:

$$P\{|\zeta| > u\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{\tau_\varphi(\zeta)}\right)\right\}. \qquad (2.2)$$

For φ-sub-Gaussian random processes one can evaluate the distribution of their suprema in terms of the function φ^* using entropy methods (see [4]).

To derive the main results in Section 3 we will need additional notions and statements.

Lemma 2.1. *[6] Let $Z(u), u \ge 0$ be a continuous monotonically increasing function such that $Z(u) > 0$ and $\frac{u}{Z(u)}$ is nondecreasing for $u \ge u_0$, where $u_0 \ge 0$ is a constant. Then for $u > 0, v > 0$*

$$\min(\frac{u}{v}, 1) < \frac{Z(u+u_0)}{Z(v+u_0)}.$$

Definition 2.6. [10] The function $Z(u), u \ge 0$, is called admissible for the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if for Z the conditions of Lemma 2.1 hold and for some $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \Psi\Big(\ln\Big(Z^{(-1)}\Big(\frac{1}{s}\Big) - u_0\Big)\Big)ds < \infty,$$

where $\Psi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}, v > 0$.

Consider a separable φ-sub-Gaussian process defined on a separable metric space (T, d), where $T = \{a_i \le t_i \le b_i, i = 1, 2\}$ and $d(t,s) = \max_{i=1,2}|t_i - s_i|$, $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2)$.

Theorem 2.1. *[10] Assume that $X = \{X(t), t \in T\}$ is a separable φ-sub-Gaussian process such that*

$$\sup_{\substack{d(t,s)\le h,\\ t,s\in T}} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h), \qquad (2.3)$$

where $\{\sigma(h),\ 0 < h \le \max_{i=1,2}|b_i - a_i|\}$ is a monotonically increasing continuous function such that $\sigma(h) \to 0$ as $h \to 0$ and for some $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \Psi\Big(\ln\frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\Big)\,du < \infty, \qquad (2.4)$$

where $\Psi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$. Then

$$P\big\{\sup_{t\in T}|X(t)| > u\big\} \le 2A(u,\theta)$$

for all $0 < \theta < 1$ and

$$u > \frac{2I_\varphi(\min(\theta\varepsilon_0, \gamma_0))}{\theta(1-\theta)},$$

where
$$A(u,\theta) = \\ = \exp\Big\{-\varphi^*\Big(\frac{1}{\varepsilon_0}\Big(u(1-\theta) - \frac{2}{\theta}I_\varphi(\min(\theta\varepsilon_0,\gamma_0))\Big)\Big)\Big\},$$

and

$$\varepsilon_0 = \sup_{t\in T}\tau_\varphi(X(t)), \quad \gamma_0 = \sigma(\max_{i=1,2}|b_i - a_i|),$$

$\varphi^*(u)$ is the Young-Fenchel transform of the function φ,
$$I_\varphi(\delta) = \\ \int_0^\delta \Psi\left[\ln\left[\Big(\frac{b_1 - a_1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big)\Big(\frac{b_2 - a_2}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big)\right]\right]du.$$

3 Results

Consider the Airy equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial^3 x},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (3.1)$$

subject to the random initial condition

$$u(0,x) = \eta(x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad (3.2)$$

where η is a stochastic process satisfying the condition below.

A $\eta(x), x \in \mathbb{R}$ is a real, measurable, mean-square continuous stationary (in wide sense) stochastic process, which is strictly φ-sub-Gaussian with the determining constant c_η.

Let $B(x), x \in \mathbb{R}$, be a covariance function of η, therefore, we have the representation

$$B(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda x) dF(\lambda), \qquad (3.3)$$

where $F(\lambda)$ is a spectral measure, and for η the spectral representation holds

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} M(d\lambda). \qquad (3.4)$$

The stochastic integral is considered as $L_2(\Omega)$ integral. The complex-valued orthogonal random measure M is such that $\mathsf{E}|M(d\lambda)|^2 = F(d\lambda)$.

Consider the process $u(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}$, defined by

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g(t, x-y)\eta(y)dy, \qquad (3.5)$$

where the function g is the fundamental solution to equation (3.1):

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x - i\alpha^3 t}\, d\alpha \qquad (3.6)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x + \alpha^3 t)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[3]{3t}} Ai\Big(\frac{x}{\sqrt[3]{3t}}\Big),\ t>0,\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

and

$$Ai(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha^3}{3}\right) d\alpha,\ x \in \mathbb{R},$$

is the Airy function of the first kind.

Taking into account (3.4), we can write the following representation of the process given by (3.5):

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big\{ i\lambda x + i\lambda^3 t \Big\} M(d\lambda). \qquad (3.7)$$

The process (3.7) can be interpreted as the mean-square or $L_2(\Omega)$ solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.2) (see [1]).

From the representation (3.7) the covariance of the field u can be calculated:

$$\begin{aligned} &Cov\big(u(t,x), u(s,y)\big) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda(x-y) + i\lambda^3(t-s))dF(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda(x-y) + i\lambda^3(t-s))dF(\lambda) \qquad (3.8) \end{aligned}$$

From (3.8) we see that the random field u is stationary with respect to time and space variables.

Theorem 3.1. *Let $u(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}$, be the random field given by (3.7) and assumption A hold. Assume that $Z(u), u \geq 0$, is a function satisfying conditions of Lemma 2.1 and the following integral converges:*

$$C_Z^2 = \int_{\mathbb{R}} Z^2\Big(\frac{1}{2}|\lambda|(1+\lambda^2)+u_0\Big)F(d\lambda) < \infty. \qquad (3.9)$$

Then

$$\sigma(h) := \sup_{\max\{|t-t_1|,|x-x_1|\}\leq h} \tau_\varphi(u(t,x)-u(t_1,x_1)) \leq$$
$$\leq c_\eta C_Z \Big(Z\Big(\frac{1}{h}+u_0\Big)\Big)^{-1}. \qquad (3.10)$$

Proof. Since the random field u is strictly φ-sub-Gaussian, we have:

$$\sup_{\max\{|t-t_1|,|x-x_1|\}\leq h} \tau_\varphi(u(t,x)-u(t_1,x_1)) \leq$$

$$\leq c_\eta \sup_{\max\{|t-t_1|,|x-x_1|\}\leq h} \Big(\mathsf{E}(u(t,x)-u(t_1,x_1))^2\Big)^{1/2}, \qquad (3.11)$$

$$\mathsf{E}\Big(u(t,x)-u(t_1,x_1)\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}} |b(\lambda)|^2 F(d\lambda), \qquad (3.12)$$

where

$$b(\lambda) = \exp\{i(\lambda x + \lambda^3 t)\} - \exp\{i(\lambda x_1 + \lambda^3 t_1)\}.$$

$$|b(\lambda)|^2 \leq 4\sin^2\Big(\frac{\lambda(x-x_1)+\lambda^3(t-t_1)}{2}\Big),$$

and for $|t-t_1| \leq h, |x-x_1| \leq h$:

$$|b(\lambda)|^2 \leq 4\Big(\min\Big(\frac{h}{2}(\lambda+\lambda^3), 1\Big)\Big)^2.$$

Using Lemma 2.1 we can write the bound

$$|b(\lambda)|^2 \leq 4\frac{Z^2(\frac{|\lambda+\lambda^3|}{2}+u_0)}{Z^2(\frac{1}{h}+u_0)}. \qquad (3.13)$$

Substituting (3.13) in (3.12) and using inequality (3.11), we obtain (3.10).

Theorem 3.2. *Let $u(t,x), a \leq t \leq b, c \leq x \leq d$, be a separable modification of the stochastic process given by (3.7) and assumption A hold. Assume that $Z(u), u \geq 0$, is an admissible function for the space $Sub_\varphi(\Omega)$, and the integral (3.9) converges. Then for $0 < \theta < 1$ and*

$$u > \frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0))}{\theta(1-\theta)}$$

the following inequality hold true:

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b;\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le 2A(u,\theta), \tag{3.14}$$

where

$$A(u,\theta)=$$
$$=\exp\Big\{-\varphi^*\Big(\frac{1}{\Gamma}(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0)))\Big)\Big\};$$
$$\hat{I}_\varphi(\sigma)=$$
$$=\int_0^\sigma\Psi\Big(\ln\Big[\Big(\frac{b-a}{2}\Big(Z^{(-1)}\Big(\frac{c_\eta C_Z}{s}\Big)-u_0\Big)+1\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{d-c}{2}\Big(Z^{(-1)}\Big(\frac{c_\eta C_Z}{s}\Big)-u_0\Big)+1\Big)\Big]\Big)ds; \tag{3.15}$$
$$\Gamma=c_\eta\Big(\int_{\mathbb{R}}F(d\lambda)\Big)^{1/2},\quad \Psi(u)=\frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)},$$
$$\gamma_0=\frac{c_\eta C_Z}{Z(\frac{1}{\varkappa}+u_0)},\ \varkappa=\max(b-a,d-c);$$

C_Z is defined in (3.9).

Proof. The assertion of this theorem follows from Theorems 2.1 and 3.1.

Note that from Theorem 3.1 we have that condition (2.3) of Theorem 2.1 holds with $\sigma(h)=c_\eta C_Z\Big(Z(\frac{1}{h}+u_0)\Big)^{-1}$. We also have

$$\varepsilon_0=\sup_{(t,x)\in[a,b]\times[c,d]}\tau_\phi(u(t,x))\le$$
$$\le c_\eta\sup_{(t,x)\in[a,b]\times[c,d]}\Big(\mathsf{E}(u(t,x))^2\Big)^{1/2}\le$$
$$\le c_\eta\Big(\int_{\mathbb{R}}F(d\lambda)\Big)^{1/2}=:\Gamma<\infty.$$

Remark 3.1. On convergence of the integral (3.7). Following [1], in the present paper we treat the solution to the Airy equation with stationary random initial condition as a mean square solution, that is, integral (3.7) is in $L_2(\Omega)$. In the papers [2], [10] the integral functionals (with kernels of a particular form) of φ-sub-Gaussian random processes were studied as solutions of higher order partial differential equations with random initial conditions. It follows directly from the results in [2], that under the conditions of Theorem 3.2 the integral given by formula (3.7), that is,

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}}\exp\Big\{i\lambda x+i\lambda^3t\Big\}M(d\lambda).$$

converges with probability 1 for $|x|\le A$, $0\le t\le T$, where $A>0$ and $T>0$ are some constants.

4 Examples

Example 4.1. Let $\eta=\{\eta(u),u\in\mathbb{R}\}$ be a centered Gaussian random process satisfying Assumption A. Then $c_\eta=1$, $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$, $\varphi^*(x)=\frac{x^2}{2}$, $\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/2}$. Consider the following admissible function

$$Z(u)=\ln^\alpha(u+1),\quad u\ge 0,\quad \alpha>1/2.$$

In this case

$$u_0=e^\alpha-1,\quad Z^{(-1)}(v)=\exp\Big\{v^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-1,$$
$$Z(v+u_0)=\ln^\alpha(v+e^\alpha),$$
$$C_Z^2=\int_{\mathbb{R}}\ln^{2\alpha}\Big(\frac{|\lambda|(1+\lambda^2)}{2}+e^\alpha\Big)F(d\lambda).$$

The above integral converges if the following integral converges

$$\int_{\mathbb{R}}\ln^{2\alpha}\Big(|\lambda|+e^\alpha\Big)F(d\lambda)<\infty. \tag{4.16}$$

That is, if condition (4.16) holds true, then Theorem 3.2 holds. It follows from (3.15) that

$$\hat{I}_\varphi(\delta)=\int_0^\delta\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\ln\Big[\Big(\frac{b-a}{2}\Big(\exp\Big\{\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-$$
$$-e^\alpha\Big)+1\Big)\times\Big(\frac{d-c}{2}\Big(\exp\Big\{\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-$$
$$-e^\alpha\Big)+1\Big)\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\ ds.$$

Let $\frac{d-c}{2}e^\alpha>1$ and $\frac{b-a}{2}e^\alpha>1$, then

$$\hat{I}_\varphi(\delta)\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\times\int_0^\delta\Big(\ln\Big(\frac{d-c}{2}\frac{b-a}{2}\exp\Big\{2\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}ds$$
$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\delta\ln\Big(\frac{(d-c)(b-a)}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}ds$$
$$+\int_0^\delta\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{2\alpha}}ds$$
$$=\frac{\delta}{\sqrt{2}}\Big(\ln\Big(\frac{(d-c)(b-a)}{4}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\delta\Big(\frac{C_Z}{\delta}\Big)^{\frac{1}{2\alpha}}\Big(1-\frac{1}{2\alpha}\Big)^{-1}. \tag{4.17}$$

It follows from (3.14) that in this case for

$$u>\frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))}{\theta(1-\theta)}$$

we have

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$

$$\le\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))\Big)\Big)^2\Big\},$$

$$\gamma_0=\frac{C_Z}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{\varkappa}+e^\alpha\right)}.$$

If θ is such that $\theta\Gamma<\gamma_0$ $\left(\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right)$, then for

$$u>\sup_{0<\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}}\frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

we get the estimate

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$

$$\le\inf_{0<\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big)^2\Big\},$$

and if $\frac{\gamma_0}{\Gamma}>1$ then for

$$u>\sup_{0<\theta<1}\frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

we get

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$

$$\le\inf_{0<\theta\le1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big)^2\Big\}.$$

Example 4.2. Let $\eta=\{\eta(u),u\in\mathbb{R}\}$ be a centered Gaussian random process, as in example 4.1. Consider the admissible function $Z(u)=|u|^\alpha$, $0<\alpha\le1$. In this case

$$u_0=0,\quad Z^{(-1)}(u)=u^{\frac{1}{\alpha}},\quad u>0,$$

$$C_Z^2=\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{|\lambda|(1+\lambda^2)}{2}\Big)^{2\alpha}F(d\lambda)=$$
$$=4^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\lambda^{2\alpha}(1+\lambda^2)^{2\alpha}F(d\lambda).\qquad(4.18)$$

This integral converges if the next integral converges

$$\int_{\mathbb{R}}\lambda^{6\alpha}F(d\lambda)<\infty.\qquad(4.19)$$

That is, if (4.19) holds, then Theorem 3.2 holds. It follows from (3.15) that

$$\hat{I}_\varphi(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\delta\Big(\ln\Big[\Big(\frac{b-a}{2}\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}+1\Big)\times\Big(\frac{d-c}{2}\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}+1\Big)\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}ds.$$

For $0\le\beta<1$, $x>0$, $y>0$, we have

$$\ln((1+x)(1+y))\le\frac{1}{\beta}\big(x^\beta+y^\beta\big),$$

therefore, in the case of $\beta<\alpha$ we obtain

$$\hat{I}_\varphi(\delta)\le\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\big(C_Z\big)^{\frac{\beta}{2\alpha}}\delta^{(1-\frac{\beta}{2\alpha})}\frac{1}{1-\frac{\beta}{2\alpha}}\Big[\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^{\frac{\beta}{2}}+\Big(\frac{d-c}{2}\Big)^{\frac{\beta}{2}}\Big]=:\hat{J}_\varphi(\delta,\beta).\qquad(4.20)$$

It follows from (3.14) that in this case for

$$u>\frac{2\hat{J}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0),\beta)}{\theta(1-\theta)},\quad\gamma_0=C_Z\varkappa^\alpha$$

we get the estimate

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$

$$\le\inf_{\theta,\beta}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{J}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0),\beta)\Big)\Big)^2\Big\}.$$

Example 4.3. Let $y=\{y(u),\,u\in R\}$ be a φ-sub-Gaussian random process with

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{\alpha}, & |x|\le1,\alpha>2,\\ \frac{|x|^\alpha}{\alpha}, & |x|\ge1,\alpha>2.\end{cases}$$

In this case for p such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}=1$

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}\alpha x^2/4, & 0\le|x|\le2/\alpha,\\ |x|-1/\alpha, & 2/\alpha<|x|\le1,\\ x^p/p, & |x|>1,\end{cases}$$

and

$$\Psi(u)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha^{1/2}}u^{1/2}, & 0<u<\frac{1}{\alpha},\\ \frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}u^{1-\frac{1}{\alpha}}, & u>\frac{1}{\alpha}.\end{cases}$$

Let $Z(u)$ be admissible function for this space. Then for

$$u>\max\Big(1,\frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))}{\theta(1-\theta)}\Big),$$

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b\\ c\le x\le d}}|U(t,x)|>u\Big\}$$

$$\le 2\exp\Big\{-\frac{1}{p}\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))\Big)\Big)^p\Big\}.$$

Example 4.4. Consider

$\varphi(x)=\exp\{|x|\}-|x|-1, x\in\mathbb{R}$.

Then

$\varphi^*(x)=(|x|+1)\ln(|x|+1)-|x|$.

Let us take the admissible function

$$Z(u)=\ln^\alpha(u+1), u\ge 0, \alpha>1.$$

In this case

$$u_0=e^\alpha-1,$$
$$Z^{(-1)}(v)=\exp\Big\{v^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-1,$$
$$Z(v+u_0)=\ln^\alpha(v+e^\alpha),$$

$$C_Z^2=\int_{\mathbb{R}}\ln^{2\alpha}\Big(\frac{|\lambda|(1+\lambda^2)}{2}+e^\alpha\Big)F(d\lambda).$$

The above integral converges if the following integral converges

$$\int_{\mathbb{R}}\ln^{2\alpha}\Big(|\lambda|+e^\alpha\Big)F(d\lambda)<\infty. \tag{4.21}$$

That is, if condition (4.21) holds true, then Theorem 3.2 holds. It follows from (3.15) that

$$\hat{I}_\varphi(\delta)=\int_0^\delta\Psi\Big(\ln\Big[\Big(\frac{b-a}{2}\Big(\exp\Big\{\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-$$
$$-e^\alpha\Big)+1\Big)\times\Big(\frac{d-c}{2}\Big(\exp\Big\{\Big(\frac{C_Z}{s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}-$$
$$-e^\alpha\Big)+1\Big)\Big]\Big)\,ds.$$

It follows from (3.14) that in this case for

$$u>\frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))}{\theta(1-\theta)}$$

we have

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$
$$\le\exp\Big\{-\Big[\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)\ln\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)-\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma,\gamma_0))\Big)\Big|\Big]\Big\},$$

where $$\gamma_0=\frac{C_Z}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{\varkappa}+e^\alpha\right)}.$$

If θ is such that $\theta\Gamma<\gamma_0$ $\left(\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right)$, then for

$$u>\sup_{0<\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}}\frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

we get the estimate

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$
$$\le\inf_{0<\theta<\frac{\gamma_0}{\Gamma}}\exp\Big\{-\Big[\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)\times\ln\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)-\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|\Big]\Big\},$$

and if $\frac{\gamma_0}{\Gamma}>1$ then for

$$u>\sup_{0<\theta<1}\frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

we get

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\le t\le b,\\ c\le x\le d}}|u(t,x)|>u\Big\}\le$$
$$\le\inf_{0<\theta\le 1}\exp\Big\{-\Big[\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)\times\ln\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|+$$
$$+1\Big)-\Big|\frac{1}{\Gamma}\Big(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)\Big)\Big|\Big]\Big\}.$$

Список використаних джерел

1. *Beghin L.* Gaussian Limiting Behavior of the Rescaled Solution to the Linear Korteweg de Vries Equation with Random Initial Conditions. / L. Beghin, V. Knopova, N. Leonenko, E. Orsingher // J. Stat. Phys. – 2000. – Vol. 99, Iss. 3/4. – P. 769–781.
2. *Beghin L.* On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions. / L. Beghin, Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno // J. Stat. Phys. – 2007. – Vol. 127, Iss. 4. – P. 721–739.
3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables. / R. Giuliano

Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5). – 2003. – Vol. 27. – P. 92–124.

4. *Buldygin V. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

5. *Hopkalo O.* Investigation of sample paths properties for some classes of φ-sub-Gaussian stochastic processes. / Hopkalo O., Sakhno L. // Modern Stoch. Theory Appl. – 2021. – Vol.8, Iss.1. – P. 41–62.

6. *Hopkalo O.* Properties of φ-sub-Gaussian processes related to the heat equation with random initial conditions / O. M. Hopkalo, L. M. Sakhno, O. I. Vasylyk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2020. – Vol. 1-2. – P. 17-24.

7. *Kozachenko Yu.V.* Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Methods Func. Anal. Topol. – 2002. – Vol. 8, Iss. 3. – P. 46–49.

8. *Kozachenko Yu.V.* Extremal behavior of the heat random field. / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Extremes. – 2006. – Vol. 8. – P. 191–205.

9. *Kozachenko Yu.V.* Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_{\varphi}(\Omega)$. / Yu. V. Kozachenko, Yu. A. Koval'chuk // Ukr. Math. J. – 1998. – Vol. 50, No. 4. – P. 572–585.

10. *Kozachenko Yu.* Estimates for functional of solution to higher-order heat-type equation with random initial condition. / Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk // J. Stat. Phys. – 2018. – Vol. 72, No. 6. – P.1641–1662.

11. *Kozachenko Yu.* Estimates for distribution of suprema of solutions to higher-order partial differential equations with random initial conditions. / Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk // Modern Stoch. Theory Appl. – 2020. – Vol.7, Iss.1. – P. 79 - 96.

12. *Kozachenko Yu. V.* Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theor. Probab. Math. Stat. – 1985. – No. 32. – P. 42–53.

13. *Kozachenko Yu. V.* Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions. / Yu. V. Kozachenko, G. I. Slivka // Theor. Probab. Math. Stat. – 2004. –Vol. 69. – P. 67-83.

14. *Kozachenko Yu. V.* On the increase rate of random fields from space $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ on unbounded domains / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Stat. Optim. Inf. Comput. – 2014. –Vol. 2, No. 2. – P. 79–92.

15. *Kozachenko Yu.* Lipschitz conditions for $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$-processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk // Theor. Probab. Math. Stat. – 2011. – Vol. 82. – P. 57–73.

16. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

17. *Sakhno L. M.* Investigation of solutions to higher-order dispersive equations with φ-sub-Gaussian initial conditions. / L. M. Sakhno, O. I. Vasylyk // Bulletin of Taras Shevchenko National Universiry of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2021. – Vol.2. – P. 78 - 84.

18. *Tao T.* Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis / T. Tao // CBMS Regional Conf. Ser. in Math., AMS, 2006. – V. 106. – 373p.

19. *Василик О.І.* φ-субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

References

1. BEGHIN, L., KNOPOVA, V., LEONENKO, N., ORSINGHER, E. (2000) Gaussian Limiting Behavior of the Rescaled Solution to the Linear Korteweg de Vries Equation with

Random Initial Conditions. *J. Stat. Phys.* Vol. 99, Iss. 3/4, p. 769–781.

2. BEGHIN, L., KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L. (2007) On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions. *J. Stat. Phys.* Vol. 127, Iss. 4, p. 721–739.
3. GIULIANO ANTONINI R., KOZACHENKO YU., NIKITINA T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5).* Vol. 27. P. 92–124.
4. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI. 257 p.
5. HOPKALO, O., SAKHNO, L. (2021) Investigation of sample paths properties for some classes of φ-sub-Gaussian stochastic processes. *Modern Stoch. Theory Appl.* Vol. 8, Iss. 1. P. 41–62.
6. HOPKALO, O. M., SAKHNO, L. M., VASYLYK, O. I. (2020) Properties of φ-sub-Gaussian processes related to the heat equation with random initial conditions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* Vol. 1-2. P. 17-24.
7. KOZACHENKO, YU., V., LEONENKO, G. M. (2002) Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field. *Methods Func. Anal. Topol.* Vol. 8, No. 3. P. 46–49.
8. KOZACHENKO, YU., V., LEONENKO, G. M. (2006) Extremal behavior of the heat random field. *Extremes.* Vol. 8. P. 191–205.
9. KOZACHENKO, YU. V., KOVAL'CHUK, YU. A. (1998) Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_\varphi(\Omega)$. *Ukr. Math. J.* 50, p. 572–585.
10. KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L., VASYLYK, O. (2018) Estimates for functional of solution to higher-order heat-type equation with random initial condition. *J. Stat. Phys.*. Vol. 72. P. 1641–1662.
11. KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L., VASYLYK, O. (2020) Estimates for distribution of suprema of solutions to higher-order partial differential equations with random initial conditions. *Modern Stoch. Theory Appl.*, Vol. 7, Iss. 1, p. 79–96.
12. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. *Theor. Probab. Math. Stat.* No. 32, p.42–53.
13. KOZACHENKO, YU. V., SLIVKA, G.I. (2004). Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions. *Theor.Probab. Math. Stat.* Vol. 69. P. 67-83.
14. KOZACHENKO, YU. V., SLIVKA-TYLYSHCHAK, A. I. (2014) On the increase rate of random fields from space $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ on unbounded domains. *Stat. Optim. Inf. Comput.* 2, No. 2. P. 79–92.
15. KOZACHENKO, YU., SOTTINEN T., VASYLYK, O. (2011) Lipschitz conditions for $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments. *Theor. Probab. Math. Stat.* Vol. 82. P. 57–73.
16. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* P.Noordhoff Ltd, Groningen. 249p.
17. SAKHNO, L. M., VASYLYK, O. I. (2021) Investigation of solutions to higher-order dispersive equations with φ-sub-Gaussian initial conditions. *Bulletin of Taras Shevchenko National Universiry of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* Vol.2. P. 78 - 84.
18. TAO, T. (2006) Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis. *CBMS Regional Conf. Series in Math.* V.106, AMS. 373p.
19. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process.* Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

Received: 02.04.2022

УДК 519.21
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2

Ауналлах Ламін[1], *аспірант*
Ростислав Ямненко[2], *д.ф.-м.н., доцент*

Оцінювання ймовірності банкрутства біноміально розподіленого числа φ-субгауссових позовів

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua

Aounallah Lamin[1], *Ph.D. student*
Rostyslav Yamnenko[2], *Dr.Sc., Associate Professor*

Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ-sub-Gaussian claims

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601, e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua

У роботі досліджуються властивості класичного процесу ризику $X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, який утворений біноміальною сумою строго φ-субгауссових ризиків. Отримано оцінки для ймовірності виходу такої суми за монотонно зростаючу неперервну функцію. Зокрема, за лінійного надходження премій отримано оцінку банкрутства для відповідного процесу ризику.

Ключові слова: біноміальний розподіл, φ-субгауссові випадкові величини, ймовірність банкрутства.

In this paper, we study the properties of a classical risk process $X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ with binomially distributed number of events $\mathbf{P}(N_t = k) = C_n^k \theta(t)^k (1-\theta(t))^{n-k}$, and claim sizes that after centering are considered as strictly φ-sub-Gaussian random variables. Recall, that ξ is a φ-sub-Gaussian random variable, if $\mathsf{E}\xi = 0$ and there exists such a constant $a > 0$ that $\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \le \exp(\varphi(a\lambda))$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

We assume also that probability of event $\theta(t)$ satisfies assumption that $|\theta(t) - \theta(s)| \le \mu|t-s|$ for some $\mu > 0$, and amount $f(t)$ of insurance premiums received during time t is a continuous monotonically increasing function, such that $|f(u)-f(v)| \le \delta(u-v)$ for some continuous monotonically increasing function δ.

Estimates for probability $\mathbf{P}\left(\sup_t (\sum_{i=1}^{N_t} Y_i - f(t)) > x\right)$ of exceeding a monotone increasing continuous curve by such a binomial sum of risks are obtained for any level $x > 0$. In particular, the ruin probability estimate is derived for the risk process in case of linearly incoming premiums.

Key Words: binomial distribution, φ-sub-Gaussian random variables, ruin probability.

Communicated by Dr. Rozora I.V.

1 Вступ

Розглянемо портфель страхової компанії із n незалежних однорідних ризиків, кожен з яких може викликати не більше однієї страхової події (наприклад, критичної хвороби чи смерті застрахованої особи). Запишемо відповідний процес ризику в такому вигляді:

$$X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \ge 0, \tag{1.1}$$

де u – початковий капітал страхової компанії, $C > 0$ – інтенсивність надходження страхових внесків та

(I) N_t – процес, що описує число страхових подій, які сталися на інтервалі від 0 до t відпвовідно до біноміального розподілу $\mathbf{P}(N_t = k) = C_n^k \theta(t)^k (1-\theta(t))^{(n-k)}$, $0 \le k \le n$, де $\theta(t)$ – неперервна функція, що описує ймовірність настання страхової події вродовж часу $[0,t]$, тобто $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 1$, $\theta(t_1) \le \theta(t_2)$ для довільних $t_1 < t_2$. Крім того, вважатимемо, що числа подій, що сталися на неперетинних часових інтервалах, є незалежними.

(II) Y_i – незалежні однаково розподілені випадкові величини страхових виплат.

(III) N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \ldots)$ – незалежні.

© А. Ламін, Р. Ямненко, 2022

Процес ризику (1.1) також можна подати так:

$$X(t) = u+Ct-\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i+\alpha) = u+(C-\alpha\mu)t-\sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

де α – середній розмір страхової виплати. Припустимо також, що

(IV) Y_i належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин.

Про властивості класів φ-субгауссових та строго φ-субгауссових випадкових величин і процесів можна дізнатися в книгах Булдигіна В.В. і Козаченка Ю.В. [2], Василик О.І., Козаченка Ю.В. і Ямненка Р.Є. [1].

Надалі ми будемо вивчати властивості суми виплат вигляду

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1.2}$$

для яких виконуються вищенаведені умови.

Зауважимо, що в роботах [6, 7] досліджуються властивості подібних сум із φ-субгауссовими доданками, де число доданків $N(t)$ описується пуассонівським процесом.

Робота складається зі вступу та двох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей сум (1.2). Основні результати наведено у розділі 3, а саме, отримано оцінки для ймовірності перевищення такими φ-субгауссовими сумами заданої кривої.

2 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення [1, 2, 3] та результати, отримані для φ-субгауссових випадкових величин та процесів [1, 4].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга–Фенхеля функції φ.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [2] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \quad (2.1)\\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

де $C > 0$ *— деяка стала.*

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція $H_T(\varepsilon) := \ln N_T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, де $N_T(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T, тобто, кількість елементів у найменшому ε-покритті цієї множини.

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \leq C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Нехай (T, ρ) – псевдометричний сепарабельний простір із псевдометрикою ρ. Розглянемо сепарабельний φ-субгауссовий процес $X = (X(t), t \in T)$. Припустимо, що існує неперевна функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, яка монотонно зростає і $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h). \tag{2.3}$$

Зокрема, таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ є неперервним у нормі τ_φ.

3 Біноміальні φ-субгауссові суми

Отже, розглянемо суму випадкового числа φ-субгауссових виплат вигляду (1.2).

Лема 3.1. *Нехай* $\{S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i, t \ge 0\}$ *– випадковий процес, для якого виконуються припущення (I)–(IV). Тоді для всіх* $0 \le st < s$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються такі нерівності:*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda S(t)\} \le \left(\theta(t)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t)\right)^n, \tag{3.1}$$

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda(S(t) - S(s))\} \le$$
$$\left((\theta(t) - \theta(s))\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t) + \theta(s)\right)^n \tag{3.2}$$

та

$$\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k\right)^2 = n|\theta(t) - \theta(s)|\mathsf{E}Y_1^2. \tag{3.3}$$

Доведення. Оскільки $S(t)$ має складний біноміальний розподіл, то з (2.1) випливає, що

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda S(t)\} = \mathsf{E}\exp\{\lambda \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\}$$

$$= \mathsf{E}\prod_{i=1}^{N_t}\exp\{\lambda Y_i\} = \mathsf{E}\sum_{m=0}^{n}\prod_{i=1}^{m}\exp\{\lambda Y_i\} I_{\{N_t=m\}}$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m}\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_i\}\right)\mathbf{P}(N_t = m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\left(\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_1\}\right)^m C_n^m \theta(t)^m (1-\theta(t))^{n-m}$$

$$= \left(\theta(t)\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_1\} + 1 - \theta(t)\right)^n$$

$$\le \left(\theta(t)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t)\right)^n.$$

Аналогічно, враховуючи, що $N_s \le N_t$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda(S(t) - S(s))\} = \mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sum\limits_{i=N_s+1}^{N_t} Y_i\right\} = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{m}(\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_i\})^{m-k}\mathbf{P}(\{N_t = m\} \cap \{N_s = k\}) = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{m}(\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_i\})^{m-k}\mathbf{P}(\{N_t = m\}/\{N_s = k\})\mathbf{P}(N_s = k) = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{m}(\mathsf{E}\exp\{\lambda Y_i\})^{m-k} C_{n-k}^{m-k}(\theta(t)-\theta(s))^{m-k}(1-\theta(t)+\theta(s))^{n-m+k}C_n^k\theta(s)^k(1-\theta(s))^{n-k} = \big((\theta(t) - \theta(s))\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t) + \theta(s)\big)^n$.

Так як $D(S(t) - S(s)|N_t = k, N_s = l) = D\left(\sum_{i=l+1}^{k} Y_i\right) = (k - l)DY_i$, то $D(S(t) - S(s)|N_t, N_s) = (N_t - N_s)DY_1$. Отже, $D(S(t) - S(s)) = n(\theta(t) - \theta(s))\mathsf{E}Y_1^2$. □

Дослідимо оцінки ймовірності перевищення сумами (1.2) рівня $x \ge 0$ над деякою неперервною функцією $f(t)$, яка відображає величину надходження страхових премій за час t. Розглянемо спершу умови обмеженості супремуму різниці $S(t) - f(t)$ та оцінки для експоненціального моменту цього супремуму.

Припустимо, що $|\theta(t) - \theta(s)| \le \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Тоді, користуючись тотожністю (3.3), у якості функції $\sigma(h)$, що задовольняє припущення (2.3) для процесу $S(t)$, виберемо

$$\sigma(h) = \left(\mu h \mathsf{E}Y_1^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Лема 3.2. *Нехай* $X(t) = S(t) - f(t)$, *де* $\{S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i, t \ge 0\}$ *– випадковий процес, для якого виконуються припущення (I)–(IV). Нехай також* $|\theta(t) - \theta(s)| \le \mu|t - s|$ *для деякого* $\mu > 0$. *Припустимо, що прирости неперервної функції* $f = \{f(t), t \in \mathbf{T}\}$ *обмежені монотонно зростаючою функцією* $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$: $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u, v))$, *а* $\{q_k, k \in \mathsf{N}\}$ *– деяка послідовність, така що* $q_k > 1$ *і* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k} \le 1$.

Тоді для всіх $\lambda > 0$ і $p \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in B} X(t)\right\} \le \prod_{k=1}^{\infty}\left(\mathsf{N}_B\left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right)\right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\times \sup_{u\in B}\Big[\left(\theta(u)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(u)\right)^{\frac{n}{q_1}} \times$$

$$\times \exp\{-\lambda f(u)\}\Big]\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mathsf{E}Y_1^2}\exp\{\varphi(q_k\lambda\tau_\varphi(Y_1))\} + 1\right)^{\frac{n}{q_k}} \times$$

$$\times \exp\left\{\lambda\delta\left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\right)\right\}. \qquad (3.5)$$

Доведення. Покладемо $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right) = \frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}$ і позначимо через V_{ε_k} множину центрів замкнених куль радіусу ε_k, яка утворює мінімальне покриття компакту B. Кількість точок у множині V_{ε_k} дорівнює $\mathsf{N}_B(\varepsilon_k)$. Із леми 3.1 і нерівності Чебишова випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{|S(t) - S(s)| > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k\right)^2$$

$$= \varepsilon^{-2} n\mu|\theta(t) - \theta(s)|\mathsf{E}Y_1^2.$$

Отже, процес $S(t)$ і, відповідно, процес $X(t) = S(t) - f(t)$ неперервні за ймовірністю. Якщо сепарабельний випадковий процес на (B,ρ) неперервний за ймовірністю, тоді будь-яка зліченна скрізь щільна по відношенню до ρ множина може розглядатися як множина сепарабельності цього процесу. Таким чином, множина $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ є сепарантою процесу X, і з ймовірністю одиниця виконується рівність

$$\sup_{t\in B} X(t) = \sup_{t\in V} X(t). \qquad (3.6)$$

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(t), n = 0,1,\ldots\}$ множини V в V_{ε_n}, де $\alpha_n(t)$ – точка з множини V_{ε_n} така, що $\rho(t,\alpha_n(t)) = |t - \alpha_n(t)| < \varepsilon_n$. Якщо $t \in V_{\varepsilon_n}$, тоді $\alpha_n(t) = t$. Якщо ж існує кілька таких точок з множини V_{ε_n}, що $\rho(t,\alpha_n(t)) < \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них і позначимо через $\alpha_n(t)$. Застосуємо нерівність Чебишова. Із (2.1) і леми 3.1 випливає, що

$$\mathbf{P}\left\{|S(t) - S(\alpha_n(t))| > p^{\frac{n}{2}}\right\} \le \frac{\mathsf{E}(S(t) - S(\alpha_n(t)))^2}{p^n}$$

$$= \frac{n\mu Y_1^2|t - \alpha_n(t)|}{p^n} < \frac{n\mu Y_1^2\varepsilon_n}{p^n} = \frac{\beta^2 p^n}{\mu Y_1^2}. \qquad (3.7)$$

Остання нерівність означає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|S(t) - S(\alpha_n(t))| > p^{\frac{n}{2}}\right\} < \infty.$$

Тому з леми Бореля-Кантеллі випливає, що $S(t) - S(\alpha_n(t)) \to 0$ і, відповідно, $X(t) - X(\alpha_n(t)) \to 0$ при $n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Множина V зліченна, отже, $X(t) - X(\alpha_n(t)) \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх t одночасно. Нехай t – довільна точка з множини V. Позначимо через $t_m = \alpha_m(t)$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $\ldots$, $t_1 = \alpha_1(t_2)$ для будь-якого $m \ge 1$. Тоді для всіх $m \ge 2$ виконується така нерівність: $X(t) = X(t_1) + \sum_{k=2}^{m}(X(t_k) - X(t_{k-1})) + X(t) - X(\alpha_m(t)) \le \max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}(X(u) - X(\alpha_{k-1}(u)) + X(t) - X(\alpha_m(t)))$. Тому з (3.6) випливає, що з імовірністю одиниця $\sup_{t\in B} X(t) = \sup_{t\in V} X(t) \le \lim_{m\to\infty}\inf\Big(\max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}\left(X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))\right)\Big)$.

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера і лему Фату, для всіх $\lambda > 0$ отримаємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B} X(t)\right\} \le \mathsf{E}\liminf_{m\to\infty}\exp\Big\{\lambda\Big(\max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u)$$

$$+\sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}\left(X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))\right)\Big)\Big\}$$

$$\le \liminf_{m\to\infty}\mathsf{E}\exp\Big\{\lambda\Big(\max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}(X(u) -$$

$$X(\alpha_{k-1}(u)))\Big)\Big\} \le \liminf_{m\to\infty}\Big(\mathsf{E}\exp\{q_1\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u)\}\Big)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times\prod_{k=2}^{m}\Big(\mathsf{E}\exp\Big\{q_k\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}(X(u) - X(\alpha_{k-1}(u)))\Big\}\Big)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\le \left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_1}} X(u)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{\infty} \left(\mathsf{E} \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \left(X(u) - X(\alpha_{k-1}(u)) \right) \right\} \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$= I_1 \cdot \prod_{k=2}^{\infty} I_k.$$

Розглянемо окремо кожен множник I_k. Із леми 3.1 випливає, що

$$\mathsf{E} \exp \{q_1 \lambda S(u)\} \le (\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(u))^n.$$

Відповідно, $I_1 \le$

$$\Big(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} \mathsf{E} \exp \{q_1 \lambda S(u)\} \exp \{-q_1 \lambda f(u)\} \Big)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\le \Big(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} \left(\mu u \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 \right)^n$$

$$\exp\{-q_1 \lambda f(u)\} \Big)^{\frac{1}{q_1}} \le \Big(\mathsf{N}_B(\varepsilon_1) \Big)^{\frac{1}{q_1}} \times$$

$$\times \sup_{u \in B} \Big[\left(\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(u) \right)^{\frac{n}{q_1}} \times$$

$$\times \exp\{-\lambda f(u)\} \Big].$$

Із (3.2) також випливає, що $\mathsf{E} \exp \{q_k \lambda \left(S(u) - S\left(\alpha_{k-1}(u)\right) \right)\} \le \big(|u - \alpha_{k-1}(u)| \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - |u - \alpha_{k-1}(u)| \big)^n \le \big(\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 \big)^n$.

А значить, із припущення про обмеженість приростів функції f, маємо

$$I_k \le \Big(\mathsf{N}_B(\varepsilon_k) \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \mathsf{E} \exp\{q_k \lambda (S(u) -$$

$$S(\alpha_{k-1}(u)))\} \exp \left\{ -q_k \lambda \left(f(u) - f\left(\alpha_{k-1}(u)\right) \right) \right\} \Big)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\le \left(\mathsf{N}_B\left(\varepsilon_k\right) \right)^{\frac{1}{q_k}} \Big(\max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \big(\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1))\} +$$

$$+ 1 \big)^n \exp\{q_k \lambda \delta(\rho\left(u, \alpha_{k-1}(u)\right))\} \Big)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\le \left(\mathsf{N}_B\left(\varepsilon_k\right) \right)^{\frac{1}{q_k}} \left(\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 \right)^{\frac{n}{q_k}}$$

$$\times \exp\{\lambda \delta\left(\varepsilon_k\right)\} = \left(\mathsf{N}_B \left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \right) \right)^{\frac{1}{q_k}} \times$$

$$\times \Big(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mathsf{E} Y_1^2} \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 \Big)^{\frac{n}{q_k}}$$

$$\times \exp \left\{ \lambda \delta \left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \right) \right\}.$$

Звідки і випливає твердження леми. $\square$

Лема 3.3. *Припустимо, що умови леми 3.2 виконуються та*

$$\int_0^\beta \mathsf{H}_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) du < \infty, \tag{3.8}$$

Тоді для всіх $p \in (0,1)$, $0 \le \beta \le \left(\frac{\mu(b-a) \mathsf{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\beta p^2 \le \mathsf{E} Y_1^2$ *і* $\lambda > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathsf{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) \right\} \le Z(\lambda, p, \beta), \tag{3.9}$$

де $Z(\lambda, p, \beta) =$

$$= \exp \left\{ W(\lambda, p, \beta) + \frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} \mathsf{H}_B \left(\frac{u^2}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \right) du \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ n \frac{\beta^2 (1-p)}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p) p^{k-1}} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \right) \right\},$$

$$W(\lambda, p, \beta) = \inf_{v \ge \frac{1}{1-p}} \Big(\frac{1}{v} \mathsf{H}_B \Big(\frac{(\beta p)^2}{\mu \mathsf{E} Y_1^2} \Big) +$$

$$+ \sup_{u \in B} \Big[\frac{n}{v} \ln \big(\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(u) \big) - \lambda f(u) \Big] \Big).$$

Доведення. З леми 3.2 випливає, що для всіх $q_k > 1$, $k \in \mathsf{N}$, таких що $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \le 1$, та довільного $\lambda > 0$ справедлива нерівність

$$\mathsf{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \right\} \le \exp \Big\{ \frac{1}{q_1} \mathsf{H}_B(\varepsilon_1) +$$

$$\sup_{u \in B} \Big[\frac{n}{q_1} \ln \left(\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(u) \right) - \lambda f(u) \Big] \Big\}$$

$$\times \exp \Big\{ \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta(\varepsilon_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \Big[\mathsf{H}_B(\varepsilon_k) +$$

$$+ n \ln \Big(\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 \Big) \Big] \Big\}. \tag{3.10}$$

де $\varepsilon_k = \frac{(\beta p^k)^2}{\mu \mathsf{E} Y_1^2}$.

Нехай $q_1 = v$, де v – таке число, що $v \ge \frac{1}{1-p}$, і для $k = 2, 3, \ldots$

$$q_k = \frac{1}{\lambda \tau_\varphi(Y_1)} \varphi^{(-1)} \Big(\ln \Big[-1 + \tag{3.11}$$

$$+\frac{1}{\mu\varepsilon_k}\exp\left\{\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)+\varphi\Big(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\Big)\right\}\Big]\Big),$$

Так як для всіх $k \geq 2$ при $\beta p^2 \leq \mathsf{E}Y_1^2$ маємо $\frac{1}{q_k} < \frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left[-1+\frac{1}{\mu\varepsilon_k}\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)\right\}\right]\right)}$ $\leq \frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)\right)} = p^{k-1}(1-p)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k} < \sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}(1-p) = 1.$$

Розглянемо $\tilde{Z}(p,\lambda) =$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)+n\ln\Big(\mu\varepsilon_k\exp\{\varphi(q_k\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}+1\Big)}{q_k}.$$

Для послідовності q_k із (3.11) маємо $\tilde{Z}(p,\lambda) =$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)}{q_k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n}{q_k}\Big(\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)+\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\Big)$$

$$<(n+1)(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)p^{k-1}+$$

$$+\frac{\beta^2(1-p)}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\sum_{k=2}^{\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right). \quad (3.12)$$

Функція $\mathsf{H}_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\right) = \mathsf{H}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)$ є спадною при $u > 0$. Тоді

$$\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k}\mathsf{H}_B\big(\sigma^{(-1)}(u)\big)\mathrm{d}u \geq \mathsf{H}_B\big(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\big)\beta p^k(1-p). \quad (3.13)$$

Із нерівностей (3.12) і (3.13) маємо, що

$$\tilde{Z}(p,\lambda) \leq \frac{n+1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\mathsf{H}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\mathrm{d}u+$$

$$+\frac{\beta^2(1-p)}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\sum_{k=2}^{\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right). \quad (3.14)$$

Тому оцінка (3.8) випливає з нерівностей (3.10) та (3.14). □

Застосовуючи нерівність Чебишова до леми 3.3, можна отримати теорему, що містить умови обмеженості з ймовірністю одиниця та оцінки ймовірності виходу траєкторій процесу $S(t)$ за рівень, визначений деякою кривою.

Теорема 3.1. *Нехай для процесу $\{S(t), t \in B\}$, виконуються умови леми 3.3, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ – така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, а $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, є опуклою функцією. Тоді якщо $\int_0^{\beta} r\left(\mathsf{N}_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\right)\right)du < \infty$, то для всіх $0 \leq \beta \leq \left(\frac{\mu(b-a)\mathsf{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t)) > x\right\} \leq Z_r(\beta,x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}(S(t)-f(t)) < -x\right\} \leq Z_r(\beta,x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|S(t)-f(t)| > x\right\} \leq 2Z_r(\beta,x),$$

де $Z(p,\beta,x) =$

$$=\inf_{p\in(0,1)}r^{(-1)}\left(\frac{n+1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}r\Big(\mathsf{N}_B\Big(\frac{u^2}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\Big)\Big)du\right)\times$$

$$\times\inf_{\lambda>0}\exp\left\{\frac{n\beta^2(1-p)}{\mathsf{E}Y_1^2}\sum_{k=2}^{\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+W(\lambda,p,\beta)+\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\delta\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\right)-\lambda x\right\},$$

$$W(\lambda,p,\beta)=\inf_{v\geq\frac{1}{1-p}}\Big(\frac{1}{v}\mathsf{H}_B\Big(\frac{(\beta p)^2}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\Big)+$$

$$+\sup_{u\in B}\Big[\frac{n}{v}\ln\big(\theta(u)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}+1-\theta(u)\big)-\lambda f(u)\Big]\Big).$$

Доведення. Скористаємось доведенням леми 3.3. Вибравши відповідні q_k (див. (3.11)), матимемо для довільних $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ і $v \geq \frac{1}{1-p}$

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}X(t)\right\} \leq \exp\Big\{\frac{1}{v}\mathsf{H}_B(\varepsilon_1)+$$

$$\sup_{u\in B}\Big[\frac{n}{v}\ln\left(\theta(u)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}+1-\theta(u)\right)-\lambda f(u)\Big]$$

$$+\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\delta\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n+1}{q_k}\mathsf{H}_B(\varepsilon_k)+$$

$$+n\frac{\beta^2(1-p)}{\mathsf{E}Y_1^2}\sum_{k=2}^{\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)\Big]\Big\}. \quad (3.15)$$

Згідно умови теореми функція $s(t) = r(\exp\{t\})$ є опуклою, тому для будь-яких $x_i \geq 0$

та $\delta_i > 0, i = \overline{1,\infty}$, таких, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i = 1$, маємо $s\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i x_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i s(x_i)$. Якщо ж $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i < 1$, то

$$s\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i x_i\right) = s\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i x_i + 0\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\right)\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i s(x_i) + \left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\right)s(0) = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i s(x_i). \tag{3.16}$$

Із нерівностей (3.15) і (3.16) випливає, що

$$\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n+1}{q_k}H_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\} =$$

$$r^{(-1)}\Big(r\Big(\exp\Big\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n+1}{q_k}\ln \mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\Big\}\Big)\Big)$$

$$\le r^{(-1)}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n+1}{q_k}s\left(\ln \mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\Big)$$

$$\le r^{(-1)}\Big((n+1)(1-p)\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{\infty}p^{k-1}r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\Big). \tag{3.17}$$

Функція $\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) = \mathsf{N}_B\left(\frac{u^2}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right)$ спадає при $u > 0$. Тоді $\int\limits_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u \ge r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right)\right)\beta p^k(1-p)$ та

$$(n+1)\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)p^{k-1}r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)$$

$$\le \frac{n+1}{\beta p}\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{n+1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u. \tag{3.18}$$

Отже, твердження цієї теореми випливає з (3.15), (3.17), (3.18) та нерівності Чебишова. □

Теорема 3.2. *Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\{S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t}Y_i, t \ge 0\}$ – випадковий процес, для якого виконуються припущення (I)–(IV). Нехай також $|\theta(t)-\theta(s)| \le \mu|t-s|$ для деякого $\mu > 0$. Припустимо, що прирости неперервної функції $f = \{f(t), t \in \mathbf{T}\}$ обмежені монотонно зростаючою функцією $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$: $|f(u)-f(v)| \le \delta(\rho(u,v))$, а $r = \{r(u), u \ge 1\}$ – така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, а $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, є опуклою функцією. Тоді для всіх $0 \le \beta \le \left(\frac{\mu(b-a)\mathsf{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac12}$ справджуються нерівності*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t)) > x\right\} \le Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}(S(t)-f(t)) < -x\right\} \le Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|S(t)-f(t)| > x\right\} \le 2Z_r(\beta, x),$$

де $Z_r(\beta, x) =$

$$= \inf_{p\in(0,1)} r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\times$$

$$\times \inf_{\lambda>0}\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}n\ln\Big(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mathsf{E}Y_1^2}\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\Big)\Big\}\right.$$

$$\left.+1\Big) + \eta_\varphi(\lambda,p) + \lambda\delta\left(\frac{\left(\beta p^{k-1}\right)^2}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right)\right) - \lambda x\Bigg\},$$

$$\eta_\varphi(\lambda,p) = \sup_{u\in B}\Big[n(1-p)\times$$

$$\times\ln\left(\theta(u)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}+1-\theta(u)\right)-\lambda f(u)\Big]\Big\}.$$

Доведення. Використаємо лему 3.2, вибравши послідовність $q_k = \frac{1}{(1-p)p^{k-1}}$, де $p\in(0,1)$. Покладемо також $\eta_\varphi(\lambda,p) = \sup\limits_{u\in B}\Big[n(1-p)\times$

$$\times\ln\left(\theta(u)\exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}+1-\theta(u)\right)-\lambda f(u)\Big]\Big\}.$$

Тоді $\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}X(t)\right\} \le$

$$\le \exp\left\{\eta_\varphi(\lambda,p) + \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}H_B\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right) + \right.$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}n\ln\Big(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mathsf{E}Y_1^2}\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\Big)\Big\}+1\Big)$$

$$\left. + \lambda\delta\left(\frac{\left(\beta p^{k-1}\right)^2}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right)\right)\Bigg\}. \tag{3.19}$$

Із властивостей функції $r(t)$ випливає, що

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}H_B\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu \mathsf{E}Y_1^2}\right)\right\} =$$

$$r^{(-1)}\left(r\Big(\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\ln \mathsf{N}_B\Big(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathsf{E}Y_1^2}\Big)\Big\}\Big)\right)$$
$$\le r^{(-1)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\right)$$
$$\le r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r\left(\mathsf{N}_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u\right), \quad (3.20)$$

де функція $\sigma(u)$ визначена в (3.4). Тоді твердження теореми випливає з леми 3.2, нерівностей (3.19), (3.20) і Чебишова. $\square$

Висновки

У роботі отримано оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику, що описується сумою випадкового біноміально розподіленого числа доданків, які є φ-субгауссовими випадковими величинами позовів, а інтенсивність надходження премій є монотонно зростаючою неперервною кривою, зокрема, лінійною.

Список використаних джерел

1. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 231 с.

2. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

4. *Kozachenko Yu.* Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function /Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // Random Oper. Stoch. Equ., 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.

5. *Yamnenko R.* Random process from the class $V(\varphi,\psi)$: Exceeding a curve / R. Yamnenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol.13 (29), no.4. – P. 219–232.

6. *Vasylyk, O.* Some properties of random Poisson sums with φ-sub-Gaussian terms / O. Vasylyk, R. Yamnenko // Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat. – 2007. – Vol.1. – P. 133–148.

7. *Saienko M.I.* Sub-Gaussian risk processes with dependent moments of claims incoming and contracts signing/ M.I. Saienko, R.E. Yamnenko // Nauk. visnyk Uzngorod. Un-ty. – 2013. – Vol.24, Iss.2. – P. 176–184.

References

1. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: VPC “Kyivskyi Universytet”, 231 p. (In Ukrainian)

2. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

3. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

4. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.

5. YAMNENKO, R., VASYLYK O. (2007) Random process from the class $V(\varphi,\psi)$: Exceeding a curve. *Theory of Stochastic Processes.* Vol.13 (29), no.4, p. 219–232.

6. VASYLYK O., YAMNENKO, R. (2007) Some properties of random Poisson sums with φ-sub-Gaussian terms. *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.* Vol.1., p. 133–148.

7. SAIENKO M.I., YAMNENKO R.E. (2013) Sub-Gaussian risk processes with dependent moments of claims incoming and contracts signing. *Nauk. visnyk Uzngorod. Un-ty.* Vol.24, iss.2, p. 176–184.

Received: 12.03.2022

УДК 519.21 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.3

Л.М. Сахно, *д.ф.-м.н, с.н.с.*

Деякі застосування узагальнених дробових похідних

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua

L.M. Sakhno, *Dr.of Sci., Senior Researcher*

Some applications of generalized fractional derivatives

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua

У роботах Кочубея (2011) і Тоальдо (2015) були представлені нові типи диференціальних операторів, названі диференціально–згортковими операторами, або похідними типу згортки відносно функцій Бернштейна. Ці похідні узагальнюють класичні дробові похідні Капуто–Джрбашяна і Рімана–Ліувілля та дозволяють, зокрема, описувати властивості субординаторів та обернених субординаторів. У сучасній літературі інтенсивно досліджуються нові класи диференціальних рівнянь із узагальненими дробовими операторами, що можуть бути використані у багатьох теоретичних та прикладних задачах, зокрема для опису аномальних дифузій та інших складних процесів. У цій статті наведено стислий огляд основних властивостей узагальнених дробових похідних та проілюстовано їх застосування у рівняннях, що визначають деякі класи випадкових полів на сфері.

Ключові слова: узагальнені похідні типу згортки, функції Бернштейна, субординатори, власні функціїї, диференціальні рівняння з узагальненими дробовими операторами, випадкові початкові умови, випадкові поля на сфері

The paper presents a concise summary of main properties of generalized fractional derivatives, so-called convolution type derivatives with respect to Bernštein functions. Applications are considered to modeling time dependent random fields on the sphere as solutions to partial differential equations with the generalized fractional derivative in time and random initial condition.

Key Words: generalized convolution–type derivatives, Bernštein functions, subordinators, eigenfunctions, differential equations with generalized fractional derivatives, random initial conditions, random fields on the sphere

1 Introduction

In the papers by Kochubei [8] and Toaldo [12] the new types of differential operators are presented which are related to Bernštein functions and generalize the classical Caputo-Djrbashian and Reimann-Liuville fractional derivatives. These operators are called differential-convolution operators in [8], or convolution-type derivatives with respect to Bernštein functions in [12]. It is shown in [12] that these derivatives provide the unifying framework for the study of subordinators and their inverse processes, and, in particular, the governing equations for densities of subordinators and their inverses are obtained in terms of the convolution-type derivatives. The introduction of these derivatives has inspired numerous recent studies devoted to new types of generalized fractional equations, their probabilistic interpretation and use in various applied areas, in particular, for modeling anomalous diffusions and other complicated processes.

This paper presents a concise summary of main properties of generalized fractional derivatives. We discuss, in particular, the equations for probability densities of subordinators and their inverse processes and the eigenvalue problem for generalized fractional operators. Note that the knowledge of eigenfunctions of generalized fractional operators allows to construct the representations of solutions to corresponding partial differetial equations by using the method of separation of variables.

As applications, we consider the models of time dependent random fields on the sphere arising as solutions to partial differential equations with the generalized fractional derivative in time and random initial condition represented by a Gaussian random field.

Papers [6], [5] develop the approach to

© Л.М. Сахно 2022

construct time dependent random fields on the sphere through coordinates change and subordination by means of partial differential equations with fractional operators of a particular form. The representations of the fields are given by the Karhunen-Loève expansion, and also as a coordinate changed random field. In [7] generalization of the results of the mentioned papers was presented via introducing the convolution–type derivatives in time into the corresponding equations. It was suggested in [7] that considering equations with the tempered fractional derivative in time can lead to the exact formulas for terms involved in the Karhunen-Loève expansion, since the formulas for the density of the inverse tempered stable subordinator are available, e.g., in [1]. In the present paper we consider the example with the tempered fractional derivative in more detail and show that the terms in the expansions of the fields can be given in the exact form.

The paper is organized as follows. Section 2 collects the basic definitions and facts on the generalized fractional derivatives. In Section 3 we consider models of random fields on the sphere driven by equations with fractional operators.

2 Generalized fractional derivatives

In this section we review the main definitions and some important facts on the generalized fractional derivatives. (For more details see, e.g., [11, 12].)

Let $f(x)$ be a Bernštein function:

$$f(x) = a + bx + \int_0^\infty \left(1 - e^{-xs}\right) \overline{\nu}(ds), \qquad (2.1)$$

$x > 0$, $a, b \geq 0$, $\overline{\nu}(ds)$ is a non-negative measure on $(0, \infty)$ (the Lévy measure for $f(x)$) such that

$$\int_0^\infty (s \wedge 1)\, \overline{\nu}(ds) < \infty.$$

The generalized Caputo-Djrbashian (C-D) derivative, or convolution-type derivative, with respect to the Bernštein function f is defined on the space of absolutely continuous functions as follows ([12], Def. 2.4):

$$\mathfrak{D}_t^f u(t) = b\frac{d}{dt}u(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}u(t-s)\nu(s)ds, \quad (2.2)$$

where $\nu(s) = a + \overline{\nu}(s, \infty)$ is the tail of the Lévy measure $\overline{\nu}(s)$ of the function f.

In the papers [8] and [4] the authors provided respectively the following representations of the generalized fractional derivative (notation of the authors):

$$\left(\mathbb{D}_{(k)}u\right)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau - k(t)u(0)$$

and

$$\partial_t^w f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t w(t-s)\big(f(s) - f(0)\big)ds,$$

where $k(\cdot)$ and $w(\cdot)$ are some fractional kernels associated with f.

In the present paper the generalized fractional derivative defined in (2.2) will be used.

In the case when $f(x) = x^\alpha, x > 0, \alpha \in (0,1)$, the derivative (2.2) becomes:

$$\mathfrak{D}_t^f u(t) = \mathfrak{D}_t^\alpha u(t),$$

where $\mathfrak{D}_t^\alpha u(t)$ is the fractional C-D derivative:

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}ds.$$

If $f(x) = x$, the convolution-type derivative coincides with the standard first-order derivative. For the Laplace transform of the derivative (2.2) the following relation holds ([12], Lemma 2.5):

$$\mathcal{L}\left[\mathfrak{D}_t^f u\right](s) = f(s)\mathcal{L}\left[u\right](s) - \frac{f(s)}{s}u(0), s > s_0,$$

for u such that $|u(t)| \leq \mathsf{M}e^{s_0 t}$, M and s_0 are some constants. Similarly to the C-D fractional derivative, the convolution type derivative can be alternatively defined via its Laplace transform.

The generalization of the classical Riemann-Liouville (R-L) fractional derivative is introduced in [12] by means of another convolution-type derivative with respect to f given by the following formula:

$$\mathbb{D}_t^f u(t) = b\frac{d}{dt}u(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t u(t-s)\nu(s)ds.$$

The derivatives $\mathfrak{D}_t^f$ and $\mathbb{D}_t^f$ are related as follows:

$$\mathbb{D}_t^f u(t) = \mathfrak{D}_t^f u(t) + \nu(t)u(0).$$

Bernštein functions are associated in a natural way with subordinators.

Let $H(t), t \geq 0$, be a subordinator, that is, nondecreasing Lévy process. Its Laplace transform is of the form: $\mathcal{L}[H(t)](s) = \mathsf{E}e^{-sH(t)} = e^{-tf(s)}$, where the function f, called the Laplace exponent, is a Bernštein function. Consider a subordinator H with the Laplace exponent f given by (2.1), and let L be its inverse process defined as

$$L(t) = \inf\left\{s \ge 0 : H^f(s) > t\right\}. \tag{2.3}$$

It was shown in [12] that the distribution of the inverse process L has a density $l(t,x) = \mathrm{P}\{L(t) \in dx\}/dx$ and its Laplace transform with respect to t has the form

$$\mathcal{L}_t\left(l(t,x)\right)(r) = \frac{f(r)}{r}e^{-xf(r)},$$

provided that the following condition holds: **Condition I.** $\overline{\nu}(0,\infty) = \infty$ and the tail $\nu(s) = a + \overline{\nu}(s,\infty)$ is absolutely continuous.

The convolution-type derivatives $\mathfrak{D}_t^f$ and $\mathbb{D}_t^f$ are useful tools which allow to study the properties of subordinators and their inverses in the unifying manner ([12, 11]). In particular, the governing equations for their densities can be given in terms of convolution-type derivatives. The density $l(t,u)$ of the inverse process L satisfies the following equation ([12], Theorem 4.1):

$$\mathbb{D}_t^f l(t,u) = -\frac{\partial}{\partial u}l(t,u),$$

subject to

$$l(t,u/b) = 0,\ l(t,0) = \nu(t),\ l(0,u) = \delta(u).$$

The following fact is important for deriving representations of solutions to various classes of partial differential equations involving generalized fractional derivatives.

Proposition 2.1. ([7]) *Let L be the inverse process for a subordinator with Bernštein function f, and assume that Condition I holds. The space Laplace transform of the density $l(t,x)$ of the inverse process L*

$$\tilde{l}(t,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} l(t,x)dx = \mathrm{E}e^{-\lambda L(t)} \tag{2.4}$$

is an eigenfunction of the operator $\mathfrak{D}_t^f$, that is

$$\mathfrak{D}_t^f \tilde{l}(t,\lambda) = -\lambda\tilde{l}(t,\lambda). \tag{2.5}$$

Remark 2.1. The proof of the above Proposition has been derived, by different approaches, in [3, 8, 11]. In particular, in [3], the authors consider the time-changed Poisson process N_{L_t} (with L_t being an inverse subordinator independent of the process N) and show that its marginal distributions $p_x(t) = \mathrm{P}(N_{L_t} = x)$, $x = 0, 1, \ldots$, satisfy the difference-differential equations

$$\mathfrak{D}_t^f p_x(t) = -\lambda\left[p_x(t) - p_{x-1}(t)\right]$$

with initial condition $p_x(0) = 1, x = 0$ and $p_x(0) = 0, x \ge 1$. Then (2.5) is deduced as a consequence of the above equation, since

$$p_0(t) = \mathrm{P}(N_{L_t} = 0) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}l(t,x)dx = \tilde{l}(t,\lambda).$$

Tempered fractional derivative is defined by choosing in (2.2) the following Bernštein function:

$$g(x) = (x+\beta)^\alpha - \beta^\alpha,\ \alpha \in (0,1), \beta > 0, \tag{2.6}$$

the corresponding Lévy measure is given by the formula:

$$\overline{\nu}(ds) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\alpha e^{-\beta s}s^{-\alpha-1}ds;$$

and its tail is

$$\nu(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\alpha\beta^\alpha\Gamma(-\alpha,s),$$

where

$$\Gamma(\alpha,s) = \int_s^\infty e^{-z}z^{\alpha-1}dz$$

is the upper incomplete Gamma function defined for all $\alpha, s \in \mathbb{R}$ which is real-valued for $s \ge 0$.

The corresponding subordinator H is called the tempered stable subordinator.

The generalized convolution-type derivative (2.2), for g given by (2.6), becomes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_t^g u(t) &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}u(t-s)\Gamma(-\alpha,s)ds \\ &:= \mathcal{D}_t^{\alpha,\beta}u(t).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Equations with tempered fractional derivatives represent currently a topic of intensive studies.

In particular, the following fact presented in [2] concerns the question on eigenfunctions of tempered fractional operators.

Proposition 2.2. ([2, Lemma 1]) *The solution to the tempered relaxation equation*

$$\mathcal{D}_t^{\alpha,\beta}u(t) = -\beta^\alpha u(t) \tag{2.8}$$

with initial condition $u(0) = 1$ is given by

$$\varphi(t;\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha,\beta t)/\Gamma(\alpha), \tag{2.9}$$

thus, $\varphi(t;\alpha,\beta)$ is an eigenfunction of the operator $\mathcal{D}_t^{\alpha,\beta}$ corresponding to the eigenvalue β^α.

In the next section we consider generalized fractional derivatives for the case $a = b = 0$ in (2.1) and assuming Condition I to hold.

3 Equations with generalized fractional derivatives for modeling random fields on the sphere

Let $T(x)$, $x \in \mathbb{S}_1^2$, be a real-valued, zero-mean, isotropic Gaussian random field on the unit sphere $\mathbb{S}_1^2$. We can write the spectral representation

$$T(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(x), \qquad (3.1)$$

where

$$a_{lm} = \int_{\mathbb{S}^2} T(x) Y_{lm}^*(x) \mu(dx) \qquad (3.2)$$

are Fourier random coefficients, Y_{lm} are spherical harmonics, $\mu(dx)$ is the Lebesgue measure on the unit sphere $\mathbb{S}_1^2$. Convergence in (3.1) holds in the mean square sense, both in $L^2(dP \times \mu(dx))$ and in $L^2(dP)$ for fixed $x \in \mathbb{S}_1^2$ (see, e.g., [9]).

We recall that for a fixed l the spherical harmonics Y_{lm} (or linear combination of them) solve the eigenvalue problem

$$\Delta_{\mathbb{S}_1^2} Y_{lm} = -\mu_l Y_{lm}, \quad l \geq 0, \ |m| \leq l \qquad (3.3)$$

where the eigenvalues are given by

$$\mu_l = l(l+1)$$

and $\Delta_{\mathbb{S}_1^2}$ is the spherical Laplace operator (called also Laplace-Beltrami operator).

In [7] models of random fields on the sphere are presented which are driven by equations involving the generalized fractional derivative in time $\mathfrak{D}_t^f$ and the fractional Laplacian $\psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2})$ associated with Bernštein functions f and ψ respectively.

Let the function f correspond to the subordinator H, which inverse process L possesses the density l with Laplace transform $\widetilde{l}$ as introduced in Proposition 2.1 in formula (2.4).

Theorem 3.1. ([7, Theorem 1]) *The solution in $L^2(dP \times d\lambda)$ to the fractional equation*

$$\left(\gamma - \psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2}) + \mathfrak{D}_t^f\right) X_t(x) = 0, \qquad (3.4)$$
$$x \in \mathbb{S}_1^2, \ t \geq 0, \gamma > 0,$$

with initial condition $X_0(x) = T(x)$ is a time-dependent random field on the sphere $\mathbb{S}_1^2$ written as

$$X_t(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} \, \widetilde{l}(t, \gamma + \psi(\mu_l)) Y_{lm}(x) \qquad (3.5)$$

where a_{lm} are given by (3.2).

The generalized Laplace operator $\psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2})$ is defined in terms of the transition semigroup of the subordinate rotational Brownian motion $B^{\psi}(t) = B(F(t))$, where F is a subordinator with the Laplace exponent ψ. This covers, in particular, the case of fractional Laplace operator $(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2})^{\alpha}$. We refer to [5, 6, 7] for more detail on this operator. To make the paper self-contained, some definitions are given in Appendix.

Note that the essential component of the proof of Theorem 3.1 is the knowledge of eigenfunctions for the operators involved into the equation. For the generalized convolution-type derivative we have (see Proposition 2.1):

$$\mathfrak{D}_t^f \widetilde{l}(t, \lambda) = -\lambda \, \widetilde{l}(t, \lambda), \quad \lambda > 0, \qquad (3.6)$$

and for the generalized Laplace operator $\psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2})$ we know that ([6]):

$$\psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2}) Y_{lm}(x) = -\psi(\mu_l) Y_{lm}(x). \qquad (3.7)$$

Example 3.1. *Equations with fractional Caputo-Djrbashian derivative.* If $f(x) = x^{\beta}$, that is, L is the inverse process for stable subordinator, the derivative $\mathfrak{D}_t^f$ becomes the fractional Caputo-Djrbashian derivative and the Laplace transform $\widetilde{l}(t, \mu)$ is given by the Mittag-Leffler function: $\widetilde{l}(t, \mu) = E_{\beta}(-t^{\beta}\mu)$. The one-parameter Mittag–Leffer function is defined as

$$E_{\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta k + 1)}, \ x \in \mathbb{R}, \ \beta > 0.$$

Theorem 3.1 reduces to first part of Theorem 1 in [6].

Example 3.2. *Equations with tempered fractional derivative.* It was suggested in [7] that equation (3.4) can be considered with the tempered fractional derivative in time, and, correspondingly, in the representation of the solution (3.5) we will have the Laplace transform $\widetilde{l}(t, \lambda)$ of the density of the inverse tempered stable subordinator, expressions for this density are given, e.g., in [1].

We present here all the details for the case of equation (3.4) with the tempered fractional derivative and give the representation of solution in the explicit form.

Following [10], define the R-L tempered fractional derivative of order $0 < \beta < 1$ as follows:

$$\mathbb{D}_t^{\beta,\lambda} u(t) = e^{-\lambda t} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\lambda s} u(s) ds}{(t-s)^{\beta}} - \lambda^{\beta} u(t),$$

and the C-D tempered fractional derivative of order $0 < \beta < 1$:

$$\mathfrak{D}_t^{\beta,\lambda} u(t) = \mathbb{D}_t^{\beta,\lambda} u(t) - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\beta)} \int_t^\infty e^{-\lambda r} \beta r^{-\beta-1}\, dr. \tag{3.8}$$

Let $H_\lambda(x)$ be the tempered stable subordinator with the Laplace exponent

$$f_\lambda(s) = (s+\lambda)^\beta - \lambda^\beta.$$

Consider the inverse process $L_\lambda(t)$ and denote its density by $g_\lambda(t,x)$.

It was established in [10, Lemma 3.3.] that the Laplace transform $\widetilde{g}_\lambda(t,\mu) = \mathsf{E}e^{-\mu L_\lambda(t)}$ is a solution to the eigenvalue problem for $\mathfrak{D}_t^{\beta,\lambda}$:

$$\mathfrak{D}_t^{\beta,\lambda} \widetilde{g}_\lambda(t,\mu) = -\mu \widetilde{g}_\lambda(t,\mu)$$

with $\widetilde{g}_\lambda(0,\mu) = 1$. Moreover, it was shown in [10, Theorem 3.4.] that for any $\lambda, \mu > 0$, $\mu \neq \lambda^\beta$ the function $\widetilde{g}_\lambda(t,\mu)$ can be written in the form:

$$\widetilde{g}_\lambda(t,\mu) = \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-t(r+\lambda)}}{r+\lambda} \Phi(r,1) dr, \tag{3.9}$$

where

$$\Phi(r,1) = \frac{r^\beta \sin(\beta\pi)}{r^{2\beta}\sin^2(\beta\pi) + (\mu - \lambda^\beta + r^\beta \cos(\beta\pi))^2}.$$

We present in the next theorem the solution to the equation (3.4) with tempered fractional derivative (3.8).

Theorem 3.2. *The solution in $L^2(dP \times d\lambda)$ to the fractional equation*

$$\left(\gamma - \psi(-\Delta_{\mathbb{S}_1^2}) + \mathfrak{D}_t^{\beta,\lambda}\right) X_t(x) = 0, \tag{3.10}$$
$$x \in \mathbb{S}_1^2,\ t \geq 0, \gamma > 0,$$

with initial condition $X_0(x) = T(x)$ given by (3.1) and tempered fractional derivative $\mathfrak{D}_t^{\beta,\lambda}$ given by (3.8) , is a time-dependent random field on the sphere $\mathbb{S}_1^2$ written as

$$X_t(x) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}\, \widetilde{g}_\lambda(t, \gamma + \psi(\mu_l)) Y_{lm}(x), \tag{3.11}$$

where a_{lm} are given by (3.2) and the function $\widetilde{g}_\lambda(t,\mu)$ is given by (3.9).

Analogously to [7], the expressions for the covariance function and higher order moments of the field (3.11) can be calculated and given in terms of the angular power spectrum of the random initial condition field T and the function $\widetilde{g}_\lambda(t,\mu)$ given by (3.9), thus, all the characteristics of the field (3.11) can be evaluated explicitly. In particular, we have the following expressions for the moments of the field (3.11):

$$\mathbf{E}[(X_t(x))^n] = \sum_{l_1=0}^\infty \cdots \sum_{l_n=0}^\infty \Big(\prod_{j=1}^n \widetilde{g}_\lambda(t, \gamma + \psi(\mu_{l_j})) \Big) \times \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^n (2l_j+1)}{(4\pi)^n}} \mathbf{E}[a_{l_1 0} \cdots a_{l_n 0}],$$

$$\mathbf{E}[(X_t(x))^2] = \sum_{l=0}^\infty \frac{2l+1}{4\pi} (\widetilde{g}_\lambda(t, \gamma + \psi(\mu_l)))^2 C_l,$$

where the coefficients a_{lm}, $l \geq 0$, $|m| \leq l$, are from the representation of initial condition field (3.1) and the power spectrum $C_l = \mathbf{E}|a_{lm}|^2$, $l \geq 0$.

We refer to [7] for more details on calculation of characteristic of the field (3.11).

Appendix. Generalized fractional Laplacian on the sphere

Consider $f \in L^2(\mathbb{S}_1^2) = L^2(\mathbb{S}_1^2, \mu)$, where μ is the Lebesgue measure on the unit sphere $\mathbb{S}_1^2$: $\mu(dx) = \mu(d\vartheta, d\varphi) = d\varphi\, d\vartheta \sin\vartheta$ with $x = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

The set of spherical harmonics $\{Y_{lm} : l \geq 0,\ m = -l, \dots, +l\}$ represents an orthogonal basis for the space $L^2(\mathbb{S}_1^2)$. For a fixed l the spherical harmonics solve the eigenvalue problem

$$\Delta_{\mathbb{S}_1^2} Y_{lm} = -\mu_l\, Y_{lm}, \quad l \geq 0,\ |m| \leq l,$$

where $\mu_l = l(l+1)$ and the operator

$$\Delta_{\mathbb{S}_1^2} = \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right),$$
$$\vartheta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

The spherical harmonics are defined as

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} Q_{lm}(\cos\vartheta) e^{im\varphi},$$

where the associated Legendre functions

$$Q_{lm}(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_l(z),$$

and the Legendre polynomials Q_l are given by the Rodrigues' formula

$$Q_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l.$$

For $f \in L^2(\mathbb{S}_1^2)$ we have the representation

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}Y_{lm}(x), \quad x \in \mathbb{S}_1^2,$$

which holds in the L^2 sense, where

$$\begin{aligned} f_{lm} &= \int_{\mathbb{S}_1^2} f(x)Y_{lm}^*(x)\,dx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi, \\ &|m| \le l,\ l = 0,1,2,\ldots. \end{aligned}$$

(see, e.g., the Peter-Weyl representation theorem on the sphere in [9]).

The angular power spectrum of f is defined as

$$f_l = \sum_{|m|\le l} |f_{lm}|^2, \quad l = 0,1,2,\ldots. \tag{3.12}$$

Define the generalized fractional Laplace operators on the sphere following [5], [6].

Let $F(t)$, $t \ge 0$ be a Lévy subordinator with the Laplace exponent

$$\Psi(\lambda) = b\lambda + \int_0^{\infty}\left(1 - e^{-\lambda z}\right)M(dz),\ b \ge 0,\ \lambda \ge 0,$$

with M being the corresponding Lévy measure.

Let B_t, $t \ge 0$, be a Brownian motion on the unit sphere $\mathbb{S}_1^2$. Its transition density can be written as follows ([5, 6]):

$$\begin{aligned} Pr\{x+B_t \in dy\}/dy &= Pr\{B_t \in dy \,|\, B_0 = x\}/dy \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} e^{-t\mu_l}\mathcal{Y}_{l,m}(y)\mathcal{Y}_{l,m}^*(x). \end{aligned}$$

Consider the the initial-value problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathbf{S}_1^2}u, & x \in \mathbf{S}_1^2,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

for $f \in L^2(\mathbf{S}_1^2)$. The solution to the above problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} u(x,t) = P_t f(x) &= \mathbb{E}f(x+B_t) \\ &= \int_{\mathbf{S}_1^2} f(y)Pr\{x+B_t \in dy\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} e^{-t\mu_l}\mathcal{Y}_{l,m}(x)f_{lm}. \end{aligned}$$

In [5] the following operator acting on $f \in L^2(\mathbf{S}_1^2)$ was introduced:

$$\Psi(-\Delta_{\mathbf{S}_1^2})f(x) := \int_0^{\infty}(P_t\,f(x) - f(x))\,M(dt).$$

It was shown in [5] (see also [6]) that

$$\Psi(-\Delta_{\mathbf{S}_1^2})Y_{lm}(x) = -\Psi(\mu_l)Y_{lm}(x),$$

thus, $Y_{lm}(x)$ are the eigenfunctions of the operator $\Psi(-\Delta_{\mathbf{S}_1^2})$ with the eigenvalues $-\Psi(\mu_l)$.

Basing on the above fact, the action of the operator $\Psi(-\Delta_{\mathbf{S}_1^2})$ can be also defined by means of a series representation as given below.

Let us consider the space of functions

$$H^s(\mathbb{S}_1^2) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}_1^2) : \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^{2s}f_l < \infty \right\},$$

where f_l is the angular spectrum of f given by (3.12).

Definition. Let $f \in H^s(\mathbb{S}_1^2)$ and $s > 5/4$. Then

$$\Psi(-\Delta_{\mathbf{S}_1^2})f(x) := \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} f_{lm}Y_{lm}(x)\Psi(\mu_l).$$

Список використаних джерел

1. *Alrawashdeh M.S.* Applications of inverse tempered stable subordinators / M.S. Alrawashdeh, J.F. Kelly, M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler // Comput. Math. Appl. – 2017. – Vol. 73, no. 6. – P. 892–905.

2. *Beghin L.* Tempered relaxation equation and related generalized stable processes / L. Beghin, J. Gajda // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2020. – Vol. 23(5). – P. 1248–1273.

3. *Buchak K.* On the governing equations for Poisson and Skellam processes time-changed by inverse subordinators / K. Buchak, L. Sakhno // Theor. Probab. Math. Stat. – 2019. – Vol. 98. – P. 91–104.

4. *Chen Z.-Q.* Time fractional equations and

probabilistic representation / Z.-Q. Chen // Chaos, Solitons & Fractals. – 2017. – Vol. 102. – P. 168–174.

5. *D'Ovidio M.* Coordinates changed random fields on the sphere / M. D'Ovidio // J. Stat. Phys. – 2014. – Vol. 154. – P. 1153–1176.

6. *D'Ovidio M.* Fractional spherical random fields / M. D'Ovidio, N. Leonenko and E. Orsingher // Stat. Probab. Lett. – 2016. – Vol. 116. – P. 146–156.

7. *D'Ovidio M.* Models of space-time random fields on the sphere / M. D'Ovidio, E. Orsingher, L. Sakhno. // Modern Stoch. Theory Appl. – 2022. – Vol.9, Issue 2. – P. 139–156.

8. *Kochubei A. N.* General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes / A.N. Kochubei // Integral Equ. Oper. Theory. – (2011). – Vol. 71, no. 4. – P. 583–600.

9. *Marinucci D.* Random Fields on the Sphere: Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications. / D. Marinucci, G. Peccati. – Cambridge University Press, 2011. – 356 p.

10. *Meerschaert M.M.* Transient anomalous subdiffusion on bounded domains / M.M. Meerschaert, E. Nane, P. Vellaisamy // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – Vol. 141(2). – P. 699–710.

11. *Meerschaert M.M.* Relaxation patterns and semi-Markov dynamics / M.M. Meerschaert, B. Toaldo // Stoch. Proc. Appl. – 2019. – Vol. 129, Issue 8. – P. 2850-2879.

12. *Toaldo B.* Convolution-type derivatives, hitting-times of subordinators and time-changed C_0-semigroups/ B. Toaldo//Potential Analysis. – 2015. – Vol. 42. – P. 115–140.

References

1. ALRAWASHDEH, M.S., KELLY, J.F., MEERSCHAERT, M.M., SCHEFFLER, H.-P. (2017) Applications of inverse tempered stable subordinators. *Comput. Math. Appl.,* Vol. 73, no. 6, p. 892–905.

2. BEGHIN, L., GAJDA, J. (2020) Tempered relaxation equation and related generalized stable processes. *Fract. Calc. Appl. Anal.,* Vol. 23(5), p. 1248–1273.

3. BUCHAK, K., SAKHNO, L. (2019) On the governing equations for Poisson and Skellam processes time-changed by inverse subordinators. *Theor. Probab. Math. Stat.,* Vol. 98, p. 91–104.

4. CHEN, Z.-Q. (2017) Time fractional equations and probabilistic representation. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 102, p. 168–174.

5. D'OVIDIO, M. (2014) Coordinates changed random fields on the sphere. *J. Stat. Phys.*, Vol. 154, p. 1153–1176 .

6. D'OVIDIO, M., LEONENKO, N., ORSINGHER, E. (2016) Fractional spherical random fields. *Stat. Probab. Lett.*, Vol. 116, p. 146–156.

7. D'OVIDIO, M., ORSINGHER, E., SAKHNO, L. (2022) Models of space-time random fields on the sphere *Modern Stoch. Theory Appl.*, Vol.9, Issue 2, p. 139–156.

8. KOCHUBEI, A.N.(2011) General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes. *Integral Equ. Oper. Theory.* Vol.71, no. 4, p. 583–600.

9. MARINUCCI, D., PECCATI, G. (2011) *Random Fields on the Sphere: Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications.* Cambridge University Press, 356 p.

10. MEERSCHAERT, M.M., NANE, E., VELLAISAMY, P. (2013) Transient anomalous sub-diffusion on bounded domains. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 141(2), p. 699–710.

11. MEERSCHAERT, M.M., TOALDO, B.(2019) Relaxation patterns and semi-Markov dynamics. *Stoch. Proc. Appl.* Vol. 129, Issue 8, p. 2850–2879.

12. TOALDO, B.(2015) Convolution-type derivatives, hitting-times of subordinators and time-changed C_0-semigroups. *Potential Analysis.* Vol. 42, p. 115–140.

Received: 01.03.2022

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 532.5 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.4

Батюк Л. В. [1], к. ф.-м. н., доцент,
Кізілова Н. М. [2], д. ф.-м. н., проф.

Реологічні моделі біологічних клітин

[1] Харківський національний медичний університет, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 2,
[2] Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

L. V. Batyuk[1], PhD, docent,
N. M. Kizilova[2], DSc, prof.

Rheological models of biological cells

[1] V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
[2] V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

У роботі наведений перелік найбільш важливих експериментальних методів дослідження механічних властивостей клітин, а також найбільш поширених реологічних моделей, серед яких є дискретні моделі мікро/наноструктури клітини і континуальні моделі, які дозволяють обчислити модулі пружності і в'язкості клітини в нормі і патології. Наведений перелік континуальних моделей із зазначенням їх особливостей і відрізнень. Запропонована нова континуальна модель клітини як багатошарової оболонки, яка заповнена в'язкопружною рідиною. Отримані рівняння моделі і її розв'язки для випадків ізотонічного, ізометричного і динамічного експериментів. Досліджені особливості механічної поведінки моделей в залежності від ідентифікованих параметрів. Проведено порівняння з даними експериментальних вимірювань. Показано, що запропонована багатошарова модель дозволяє оцінювати окремий вклад механічних властивостей цитоскелету, мембрани, адсорбованих речовин і гідратної оболонки, що важливо для клінічної діагностики захворювань шляхом вимірювань механічних властивостей клітин.
Ключові слова: Реологічна модель, Мембрана, Еритроцит, Деформація, В'язкопружність.

The most important experimental methods of studying the mechanical properties of cells, as well as the most common rheological models, among which the discrete models of the micro/nanostructure of the cell and continuous models that allow calculating the modulus of elasticity and viscosity of the cell in normal and pathological conditions are discussed. A review of continuous models is given with an indication of their features and differences. A new continuum model of the cell as a multi-layer shell filled with a viscoelastic fluid is proposed. Equations of the model and their solutions for cases of isotonic, isometric and dynamic experiments are obtained. Peculiarities of the mechanical behavior of the models depending on the identified parameters are investigated. A comparison with the data of experimental measurements is given. It is shown that the proposed multi-layer model allows evaluation of separate contribution of the mechanical properties of the cytoskeleton, membrane, adsorbed substances and the hydrated shell, which is important for clinical diagnosis of diseases by measuring the mechanical parameters of cells.
Key Words: Rheological model, Membrane, Erythrocyte, Deformation, Viscoelasticity.

Статтю представив чл.- кор. НАН України Жук Я. О.

1. Вступ

Всі клітини протягом життя постійно піддаються механічним навантаженням як з боку зовнішнього середовища, так і через внутрішні фізіологічні умови – скорочення м'язів, переміщення органів, течії крові та інших біологічних рідин [1]. Залежно від величини, напрямку та розподілу цих механічних впливів клітини можуть реагувати різними способами, наприклад, орієнтуватися вздовж течії, змінювати свою форму і жорсткість за рахунок перебудови цитоскелету і т.д. Різні біологічні процеси, такі як міграція, зростання, диференціація, апоптоз та ін. суттєво залежать від змін у формі та структурі клітин і будь-яке відхилення в їх структурних і механічних властивостях може призвести до порушення цих фізіологічних функцій і до хвороб [2,3]. Так, еритроцити транспортують O_2 до різних частин тіла і можуть проходити крізь

© Л.В. Батюк, Н.М. Кізілова, 2022

капіляри завдяки своєї здатності до деформацій [1]. Таким чином, механічні і зв'язані з ними термічні і електричні властивості клітин, дуже важливі для розуміння фізіологічних процесів в тканинах. Сучасні успіхи експериментальної техніки дозволяють проводити експерименти з окремими клітинами. Для біомеханічної інтерпретації результатів цих вимірювань потрібні відповідні реологічні моделі [4] як здорових клітин, так і пошкоджених або змінених певним захворюванням.

Універсальним підходом є розробка механічної моделі з параметрами, які найкраще відповідають експериментальним даним. Основною метою моделювання в цьому контексті є кількісна оцінка механічних властивостей і відгуку клітин на дію постійного або періодичного навантаження.

В роботі наведений стислий огляд існуючих реологічних моделей біологічних клітин і обговорюються відповідні постановки задач механіки.

2. Типи експериментів з клітинами.

Бурхливе розвинення нанотехнологій протягом останнього десятиріччя привело до можливості візуалізувати мембрану і внутрішню мікроструктуру клітин, а також вимірювати переміщення і деформації на рівні $h \sim 10^{-12}$м. Серед найбільш поширених експериментальних методів вивчення механічних властивостей окремих клітин запропоновані:

1) Інтрузія магнітної частинки і вимірювання деформації мембрани (Рис.1а) за рахунок переміщення частинки в магнітному полі (Crick F.H.C., Hughes A.F.W., 1950);
2) Аспірація поверхні клітини мікропіпеткою (Рис.1б) була вперше використана на клітинах морських їжаків (Mitchison J.M., Swann M.M., 1954), а потім на еритроцитах (Band R.P., Burton A.C., 1964);
3) Розплющення клітини між паралельними поверхнями і вимірювання деформації (Рис.1в);
4) Продавлення поверхні, cell poking (Petersen N.O. et al., 1982);
5) Відстеження руху (Geerts H. et al., 1987) ;
6) Магнітно-скручувальна цитометрія (Рис.1г), МСЦ (Wang, N. et al., 1993);
7) Коливальна магнітно-скручувальна цитометрія, КМСЦ (Maksym G.N., et al., 2000);
8) Атомно-силова мікроскопія (Рис.1д) (Hoh J.H., Schoenenberger C.A., 1994);
9) Мікроманіпуляції з поверхнею (Thoumine O., Ott A., 1997);
10) Наноіндентометрія (Рис.1е) (Shin D., Athanasiou K., 1999);
11) Вимірювання електричного імпедансу клітини і субстрату в поєднанні з магнітним витягуванням кульок (Lo C.M., et al., 1998);
12) Оптичні пінцети (Henon S., et al., 1999) і тест на розтягнення (Рис.1є) (Miyazaki H., et al., 2000; Nagayama K., et al., 2005);
13) Взаємодія з потоком рідини (Рис.1ж).

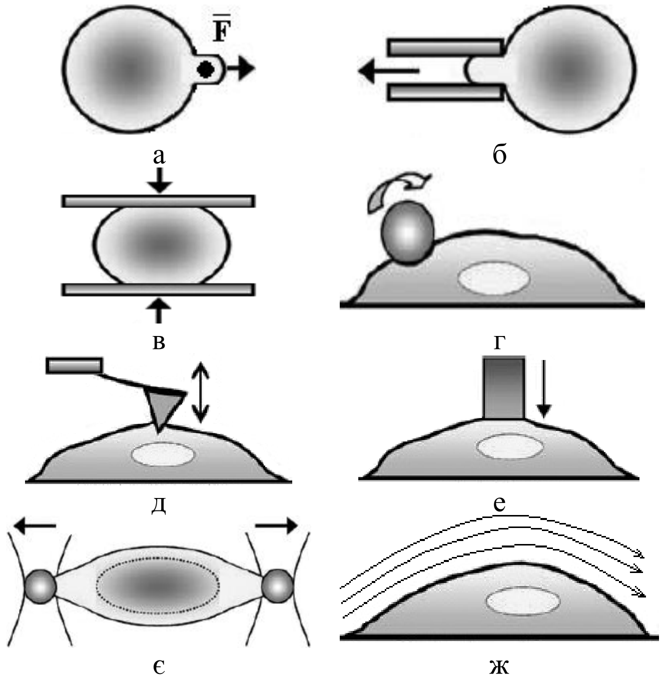


Рис.1. Типи реологічних експериментів з біологічними клітинами (пояснення в тексті).

Прикладена сила може бути або зосередженою (атомно-силова мікроскопія) або розподіленою (стискання між пластинами), внутрішньо-клітинною (магнітна частинка всередені) або на поверхні клітини (МСЦ), тимчасовою (аспірація мікропіпеткою) або динамічна (КМСЦ).

Результати експериментів 1)-12) мають вигляд або безперервних кривих сила-деформація $\sigma(\varepsilon)$, де σ - механічні напруження, ε - деформації, або дискретних виміряних точок $\{\sigma_j(\varepsilon_j)\}_{i=1}^{n}$, для яких відповідна залежність $\sigma(\varepsilon)$ може бути отримана за допомогою апроксимацій.

3. Механічні моделі клітин

Для розуміння результатів експериментів (Рис.1а-ж) з клітинами, оцінки модулів пружності і прогнозування механічної поведінки клітин і клітинних суспензій використовуються математичні моделі.

3.1. Дискретні мікро/наноструктурні моделі розглядають структуру клітини, яка складається з мембрани, цитоскелету і внутрішньої мікроструктури. Всі компоненти утворені мікроволокнами і мікротрубочками, які розглядаються як просторовій набір пружин з різними жорсткостями. Розрахунки деформацій і руху клітин в таких моделях проводиться методами структурної механіки (пакет Structural mechanics в AnSys та ін. пакетах прикладних програм) або методами динаміки частинок [5].

3.2. Континуальні моделі розглядають клітини як заповнені рідиною оболонки, матеріал яких може бути анізотропним і неоднорідним. Для матеріалів оболонки і рідини вибираються відповідні реологічні моделі, параметри яких потім визначаються з експериментальних кривих $\sigma(\varepsilon)$, наприклад, методом найменших квадратів. Хоча цей підхід дає менше розуміння детальних молекулярних механічних подій, його легше та зрозуміліше використовувати для обчислення механічних властивостей клітин і їх біомеханічної відповіді на механічний стимул. Континуальні моделі надають більш детальну інформацію про розподіл механічних напружень і деформацій, що, у свою чергу, може бути корисним для визначення розподілу та передачі цих сил до мембрани, цитоскелету і елементів субклітинної структури. Наприкінці це дозволяє розробляти більш точні дискретні моделі мікро- і наноструктур [6].

3.2.1. Модель пружної частинки розглядає клітину як сферу, еліпсоїд або дискоїд з однорідного лінійно-пружного матеріалу, так що зв'язок між тензорами пружності і деформацій має вигляд $\sigma_{ik} = E\varepsilon_{ik}$, де E - модуль Юнга, який можна оцінити з простих експериментів з навантаження клітини і вимірювання її висоти h (відстані між паралельними поверхнями на Рис.1б) як функції прикладеної сили. Деформації зсуву (горизонтальні переміщення верхньої пластини відносно нижньої на Рис.1б) дозволяють вимірювати модуль зсуву G, де $\tau_{ik} = G\dot{\gamma}_{ik}$, τ_{ik} і $\dot{\gamma}_{ik}$ - тензори зсувних напружень і швидкостей деформацій зсуву, крапка відповідає похідній за часом. Якщо модель пружної частини є коректною, повинне виконуватися відоме співвідношення $E = 2G(1+\nu)$, де ν - коефіцієнт Пуасона матеріалу. Оскільки численні експерименти з клітинами дають значення E і G, які не задовольняють це співвідношення, модель потребує узагальнення.

3.2.2. Модель пружної оболонки, яка заповнена ньютонівською рідиною має найпростіший вигляд у випадку мембранної моделі оболонки (Yeung A., Evans E. 1989) [1]

$$(T_1 + T_2) = 2T_0 + \eta_d\gamma_d, \quad (T_1 - T_2) = \eta_s\gamma_s, \quad (1)$$

де T_0 - напруження в оболонці до навантаження, T_1 і T_2 - ортогональні головні напруження після навантаження, γ_d і γ_s - швидкості навантажень розтягнення і зсуву, η_d і η_s - в'язкості поверхні оболонки до розтягнення і зсуву; часто приймають $\eta_d = 3\eta_s$. Оболонка заповнена ньютонівською рідиною з реологічним законом $\tau_{ik} = 2\mu v_{ik}$, де μ - динамічна в'язкість рідини. Моделювання експериментів (Рис.1а,б,в) базується на використанні закону Лапласа для клітини або її напівсферичного виростка (Рис.1а,б).

Модель сферичної або сплющеної опуклої геометрії, а також двовгнута оболонки розглядалися в якості моделі еритроцита [1,2]. Більшість клітин мають внутрішні органи, тому для них використовують модель оболонки, яка включає в рідному вмісті менші оболонки, які заповнені рідинами з іншими в'язкостями і відповідають органелам клітин.

Оскільки реальні клітини проявляють властивості неміттєвої відповіді на механічний стимул і релаксаційними властивостями, особливо в експериментах з періодичним навантаженням [4,5], використовуються моделі цитоплазми і органел клітин як неньютонівських рідин

3.2.3. Модель пружної оболонки, яка заповнена неньютонівською рідиною відповідає реології біологічних рідин, які мають в'язкопластичні властивості і для них реологічний закон має вигляд $\tau_{ik} = 2\mu(I_{2v})v_{ik}$, де I_{2v} - другий інваріант тензора швидкостей деформацій, або у одновимірному випадку $\tau = \mu(\dot{\gamma})\dot{\varepsilon}$, причому $\mu(\dot{\gamma})$ - спадна функція. В ряді експериментів було показано, що в'язкість цитоплазми дійсно зменшується зі збільшенням перепаду тисків аспірації клітини піпеткою (Рис.1б) або середньої швидкості зсуву за степеневим законом $\tau = \mu_0(\dot{\gamma}_m)^{-k}\dot{\gamma}$, де $\mu_0 = \text{const}$, $\dot{\gamma}_m$ - зсувна деформація, осереднена по поверхні клітини. Значення k оцінювалися з експериментів для різних типів клітин [1].

3.2.4. Модель краплі вязкопружної рідини була запропонована як на основі реологічного закону Фойхта

$$\tau_{ik} = E\varepsilon_{ik} + \mu\dot{\varepsilon}_{ik}, \quad (2)$$

так і реологічного закону Максвела

$$\mu\dot{\tau}_{ik} + E\tau_{ik} = E\mu\dot{\varepsilon}_{ik}, \quad (3)$$

де E - модуль Юнга пружної компоненти цитоплазми клітин (мікроволокон і мікротрубок).

Реологія (2) характеризується релаксацією деформацій в ізотонічних експериментах і миттєвим появленням механічних напружень як при постійних ($\varepsilon = \text{const}$), так і при лінійних ($\dot{\varepsilon} = \text{const}$) деформаціях. Модель (3), навпаки, проявляє релаксацію механічних напружень в ізометричних експериментах і необмежені лінійні деформації $\varepsilon \sim t$ при постійному навантаженні ($\tau = \text{const}$).

Обидва варіанта поведінки не є природними, тому ведеться пошук більш складних реологічних моделей, наприклад, моделей в'язкопружних тіл Кельвіна-Фойхта і Зінера [1,2], відповідно

$$\mu\dot{\tau}_{ik} + E_c\tau_{ik} = E_mE_c\varepsilon_{ik} + \mu(E_m + E_c)\dot{\varepsilon}_{ik}, \qquad (4)$$

$$\mu\dot{\tau}_{ik} + (E_m + E_c)\tau_{ik} = E_mE_c\varepsilon_{ik} + \mu E_c\dot{\varepsilon}_{ik}, \qquad (5)$$

де E_m і E_c - це пружності мембрани і мікроструктури цитоплазми.

Також для обробки даних експериментів використовуються моделі клітини як вязкопружної краплі у вигляді поєднання в'язкого елемента з тілом Фойхта послідовно, або з тілом Максвела паралельно [1,4], відповідно

$$(\mu_m + \mu_c)\dot{\tau}_{ik} + E_c\tau_{ik} = E_c\mu_m\dot{\varepsilon}_{ik} + \mu_m\mu_c\ddot{\varepsilon}_{ik}, \qquad (6)$$

$$\mu_m\dot{\tau}_{ik} + E_c\tau_{ik} = E_c(\mu_m + \mu_c)\dot{\varepsilon}_{ik} + \mu_m\mu_c\ddot{\varepsilon}_{ik}, \qquad (7)$$

де μ_m і μ_c відповідають в'язкостям мембрани і мікроструктури цитоплазми.

Пари рівнянь (4)-(5) і (6)-(7) мають схожі релаксаційні залежності $\tau(t)$ і $\varepsilon(t)$ для ізометричних ($\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$), ізотонічних ($\sigma = \sigma^* = \text{const}$) і динамічних ($\sigma = \sigma_0\exp(i\omega t)$) експериментів, де σ_0 - амплітуда напружень, але реологічні параметри E_m, E_c, μ_m, μ_c входять до них по-різному. Таким чином, ідентифікація моделей (4)-(7) на основі тих самих експериментальних кривих дасть різні набори значень параметрів моделей. Саме тому питання про найбільш точну реологічну модель клітини як рідкої краплі в оболонці є до сих пір відкритим [2].

4. Результати і обговорення

На основі порівняльного аналізу континуальних моделей біологічних клітин як пружних або в'язкопружних матеріалів запропонована модель клітини як неньютонівської рідини (цитоплазма) в багатошаровій оболонці (Рис.2). Всі матеріали моделюються як трикомпонентні в'язкопружні середовища, а саме: реологічна модель (6) для цитоплазми з органелами всередині і модель (5) для кожного з шарів моделі.

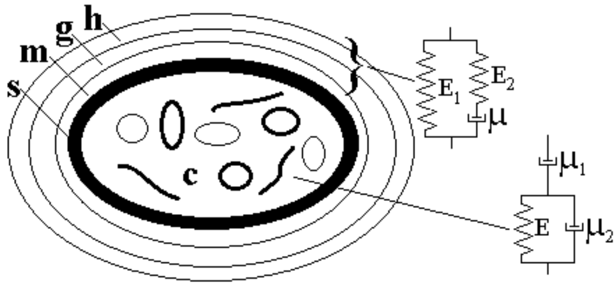


Рис.2. Схема будови клітини і відповідні реологічні моделі складових: цитоплазма (c), цитоскелет (s), мембрана (m), глікокалікс (g) і гідратна оболонка (h).

Загальна система рівнянь у випадку одновимірної задачі стискання клітини між пластинами (Рис. 1в) має вигляд

$$\mu_j\dot{\tau}_j + (E_{1j} + E_{2j})\tau_j = E_{1j}E_{2j}\varepsilon_j + \mu_jE_{2j}\dot{\varepsilon}_j, \qquad (8)$$

$$(\mu_c + \mu_o)\dot{\tau}_c + E_o\tau_c = E_o\mu_c\dot{\varepsilon}_c + \mu_c\mu_o\ddot{\varepsilon}_c, \qquad (9)$$

де j={s,m,g,h}, o - відповідає органелам.

Операторні перетворення рівнянь (8)-(9) дозволяють отримати загальне реологічне співвідношення для повних деформацій клітини $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_s + \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_h$ і повних механічних напружень $\tau = \tau_c + \tau_s + \tau_m + \tau_g + \tau_h$ у вигляді

$$\begin{aligned}\Xi_h\Xi_g\Xi_m\Xi_s\Xi_c\varepsilon = \big[&\Xi_h\Xi_g\Xi_m\Xi_s\Theta_c + \Xi_h\Xi_g\Xi_m\Theta_c\Xi_c + \\ &+\Xi_h\Xi_g\Xi_s\Theta_m\Xi_c + \Xi_h\Xi_m\Xi_s\Theta_g\Xi_c + \Xi_g\Xi_m\Xi_s\Theta_h\Xi_c\big]\tau,\end{aligned} \qquad (10)$$

де $\Xi_j = E_{2j}\left[E_{1j}I + \mu_j d/dt\right]$, $\Theta_c = \left[E_oI + (\mu_c + \mu_o)d/dt\right]$, $\Theta_j = \left[(E_{1j} + E_{2j})I + \mu_j d/dt\right]$, I – одиничний оператор, $\Xi_c = \mu_c\left[\mu_o d^2/dt^2 + E_o d/dt\right]$.

Підстановка $\tau = \tau^*$ в реологічне рівняння (10) дає закон навантаження-розвантаження $\varepsilon(t)$ для ізотонічного експерименту; підстановка $\varepsilon = \varepsilon^*$ дає співвідношення $\tau(t)$ для ізотонічного експерименту; а підстановка $\tau = \tau_0\exp(i\omega t)$ дає закон коливань клітини (відстані між пластинами на Рис.1в) $\varepsilon = \varepsilon_0\exp(i\omega t + \varphi)$, де φ - зсув фаз між коливаннями напружень і деформацій, який обумовлений в'язкими властивостями кожної з компонент моделі (Рис.2).

Як видно з (10), рівняння релаксації деформацій і напружень в ізотонічному і ізометричному експериментах представлені звичайними диференціальними рівняннями 6-го порядку і для кожного з експериментів відповідний розв'язок має вигляд $\{\varepsilon(t),\tau(t)\}=\sum_{i=1}^{6}C_i\exp(\lambda_i t)$, де λ_i - розв'язки характеристичного рівняння, C_i - постійні інтегрування, для визначення яких треба задати початкові умови як для самої величини, так і для її 1-5 похідних. Слід зазначити, що якщо умови для величини і її першої похідної є фізично зрозумілими, то інші умови удаються штучними і не можуть бути задані однозначно. Таким чином, потрібне дослідження чутливості моделей вигляду (10) до варіацій не тільки коефіцієнтів в рівняннях, але й граничних умов для старших похідних. Остаточні вирази для розв'язків (1) не наводяться в силу громіздкості.

На Рис.3 наведені результати розрахунків кривих навантаження моделі (10) постійною силою $\tau=\tau^*$ $(t\in[0,t_1])$ з наступним розвантаженням $\tau=0$ $(t>t_1)$ при значеннях параметрів, які відповідають еластичним біологічним волокнам типу актину (E~$10^{5\text{-}6}$Па) і колагену (E~$10^{7\text{-}8}$Па), а також в'язким рідинам у стані золю ($\mu\sim$1-10сПз) і гелю ($\mu\sim$1-10 Пз) [1,2]. Запропонована модель краще відповідає даним вимірювань [1,2] ніж даним [4,5] (точки на Рис.3)

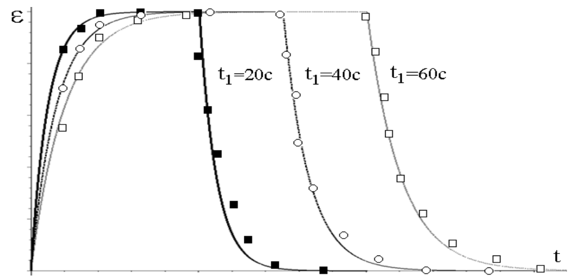


Рис.3. Залежності $\varepsilon(t)$ для моделі (10) в ізотонічному експерименті для деяких наборів параметрів (деталі наведені в тексті).

5. Висновки

Наведений огляд математичних моделей дозволяє порівнювати властивості їх розв'язків з даними експериментальних вимірювань. Запропонована нова математична модель клітини як багатошарової в'язкопружної оболонки дозволяє оцінити вклад кожного шару і точніше відобразити багатофазову динаміку релаксацій напружень і деформацій, яка властива біологічним клітинам.

Список використаних джерел

1. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. Berlin: Springer-Verlag,1981.
2. Jen C.J., Jhiang S.-J., Chen H.-I. Cellular responses to mechanical stress. // J. Appl. Physiol. – 2000. – 89 (4). – P. 1657–1662.
3. Kizilova N.N., Logvenkov S.A., Stein A.A. Mathematical modeling of transport-growth processes in multiphase biological continua. // Fluid Dynamics. – 2012. – № 47(1). – P. 1–9.
4. Кізілова Н.М., Солов'йова О.М. Аналіз дискретных реологічних моделей біоактивних м'яких і рідких матеріалів. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2017. – т.35. – С.21–30.
5. Баранець В. А., Кізілова Н. М. Дискретне моделювання агрегації і осідання мікро- і наночастиц в суспензіях. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2018. – т.40. – С.4–14.

References

1. FUNG Y.C. (1981) *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. Berlin: Springer-Verlag.
2. JEN C.J., JHIANG S.-J., CHEN H.-I. (2000) Cellular responses to mechanical stress. J. Appl. Physiol. 89 (4). p. 1657–1662.
3. KIZILOVA N.N., LOGVENKOV S.A., STEIN A.A. (2012) Mathematical modeling of transport-growth processes in multiphase biological continua. *Fluid Dynamics*. № 47(1). p. 1–9.
4. KIZILOVA N.M., SOLOVJOVA O.M. (2017) Analys of discrete rheological models of soft and liquid biological materials. Visnyk V.N. Karazin Kharkov National University, ser. «Mathematical modeling. Information technologies. Automated Control Systems». 35. p.21–30.
5. BARANETS V.A., KIZILOVA N.M. (2018) Discrete modeling of aggregation and sedimentation of micro- and nanoparticles in suspensions. Visnyk V.N. Karazin Kharkov National University, ser. «Mathematical modeling. Information technologies. Automated Control Systems». 40. p.4–14.

Надійшла до редколегії 27.04.2022

УДК 539.376 + 519.642.2 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.5

Н.І. Затула[1], *к.ф.-м.н., доц.*
Д.В. Затула[2], *к.ф.-м.н.*

Математичне моделювання напруженого стану в'язкопружної напівплощини з включеннями

[1] Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр-т. Гузара Любомира 1,
e-mail: nelli.zatula@npp.nau.edu.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: dm_zatula@univ.kiev.ua

N. I. Zatula[1], *Ph.D., Associate Prof.*
D. V. Zatula[2], *Ph.D.*

Mathematical modeling of the stressed state of a viscoelastic half-plane with inclusions

[1] National Aviation University, 03058, Kyiv, 1 Liubomyra Huzara ave.,
e-mail: nelli.zatula@npp.nau.edu.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: dm_zatula@univ.kiev.ua

Розглянуто застосування методу граничних інтегральних рівнянь при дослідженні напруженого стану плоских в'язкопружних тіл із включеннями. Метод базується на використанні комплексних потенціалів та апарату узагальнених функцій. Отримано аналітичний розв'язок задачі для напівплощини із довільними за формою включеннями. Для чисельного дослідження зміни напруженого стану залежно від часу та геометрії включень було розроблено дискретний аналог системи гранично-часових інтегральних рівнянь.

Ключові слова: в'язкопружність, плоске в'язкопружне тіло, комплексні потенціали, метод граничних інтегральних рівнянь, в'язкопружні характеристики областей, резольвентні оператори.

The application of the method of boundary integral equations is considered for studying the stress state of flat viscoelastic bodies with inclusions. The method is based on the use of complex potentials and the apparatus of generalized functions. An analytical solution of the problem is obtained for a half-plane with inclusions of arbitrary shape. For a numerical study of the change in the stress state depending on the time and geometry of the inclusions, a discrete analogue of the system of boundary-time integral equations has been developed.

Key Words: viscoelasticity, flat viscoelastic body, complex potentials, method of boundary integral equations, viscoelastic characteristics of regions, resolvent operators.

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

The method of boundary integral equations is one of the most popular methods for solving various problems in the theory of elasticity and viscoelasticity. Using this method, one can quite simply and accurately take into account infinitely distant boundaries, reduce the dimension of the problem by one, and also reveal the interactions of contacting areas in a natural way.

Let us consider a viscoelastic half-plane occupying a region D and containing a finite number of inclusions D_p of arbitrary shape ($p = \overline{1, n}$, where n is the number of inclusions). The outer contour goes to infinity, and the inclusions are bounded by piecewise-smooth contours. The half-plane is subjected to distributed tangential and normal loads [8].

To determine the stress state of the given region, we use the statement of the second main problem of the theory of elasticity for inhomogeneous bodies in movements [3], as well as the approach proposed for studying the stress state of a plane viscoelastic piecewise-isotropic body [8].

Let us assume that there are no mass forces, and also that the unknown densities of potentials are the stresses on the contours of inclusions. Then, based on the properties of the generalized functions, and due to Maxwell's theorem, the expressions for the components of the vector of movements can be written as:

© N.I. Zatula, D.V. Zatula, 2022

$$u_k(x,t) = \int_{\Gamma_0} g_i(\xi,t)\, U_k^i(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi) - $$
$$- \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij}^{(p)}(\xi,t)\, n_j(\xi)\, U_k^i(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi), \tag{1}$$

where $\overline{E}_0$ and $\overline{E}_p$ are viscoelastic operators of homogeneous regions belonging to the class of resolvent operators [5, 6];

$$U_k^i\,(x,\xi,t) = \dot{U}_k^i\,(x,\xi,t) + \widehat{U}_k^i\,(x,\xi,t)\,,$$

$\dot{U}_k^i\,(x,\xi,t)$ is the fundamental solution for problems of two-dimensional flat-strain state of a viscoelastic infinite body, and $\widehat{U}_k^i\,(x,\xi,t)$ is an additional term, which provides that the condition $g_k^i(x,\xi,t) = 0$ is satisfied $\forall x \in \Gamma$ and $\forall \xi \in D$; $g_i(\xi,t)$ — given densities along the contour Γ_0; $\sigma_{ij}^{(p)}(\xi,t)\, n_j(\xi)$ — unknown densities of potentials along the contours Γ_p.

Using the Cauchy relations, Hooke's law, and formulas (1), the stress tensor components can be expressed in the following form:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \left(1 + \frac{\overline{E}_q - \overline{E}_0}{\overline{E}_0}\, S\big(D_q\big)\right) \times$$
$$\times \left(\int_{\Gamma_0} g_k(\xi,t)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi) - \right.$$
$$\left. - \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\, n_l(\xi)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi)\right), \tag{2}$$

where $\overline{E}_q$ is viscoelastic operator of homogeneous region belonging to the class of resolvent operators; $S\big(D_q\big)$ is the characteristic function of the region D_q and $U_{ij}^k(x,\xi,t)$ are stresses arising in a viscoelastic homogeneous body occupying region D under the action of unit concentrated forces at the point $\xi \in D$.

To determine the unknown densities, multiply both sides of (2) by $n_j(x)$ and obtain the system of boundary-time integral equations:

$$\sigma_{ij}^{(q)}(x,t)\, n_j(x) = \frac{2\overline{E}_q}{\overline{E}_q + \overline{E}_0} \times$$
$$\times \left(\int_{\Gamma_0} g_k(\xi,t)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, n_j(x)\, d\gamma(\xi) - \right.$$
$$- \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \times$$
$$\left. \times \int_{\Gamma_p} \sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\, n_l(\xi)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, n_j(x)\, d\gamma(\xi)\right). \tag{3}$$

In order to apply the integral representations (1) and (2) for the semi-infinite region, it is necessary to set additional conditions for the functions used. These conditions concern the behavior of functions at infinity and are defined as regularity conditions [1]. In this case, the functions $u_k(x,t)$ and $\sigma_{ij}(x,t)$ behave at infinity as fundamental solutions:

$$u_k(x,t) \;\sim\; U_k^i(x,\xi,t) = \begin{cases} o\,(\ln\rho + 1), & i = k, \\ o\,(1), & i \neq k; \end{cases}$$

$$\sigma_{ij}(x,t) \;\sim\; U_{ij}^k(x,\xi,t) = o\left(\rho^{-1}\right).$$

Note that the expressions for fundamental movements and corresponding stresses for the case of an elastic half-plane are given in [1].

Based on this, we write integral representations for the components of the movement vector and the stress tensor:

$$u_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} X_i(\xi,t)\, U_k^i(x,\xi,t)\, d\xi_2\, d\xi_1 -$$
$$- \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{D_p} X_i(\xi,t)\, U_k^i(x,\xi,t)\, dS(\xi) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(\xi_1,t)\, U_k^i(x,\xi,t)\, d\xi_1 -$$
$$- \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij}^{(p)}(\xi,t)\, n_j(\xi)\, U_k^i(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi), \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \left(1 + \frac{\overline{E}_q - \overline{E}_0}{\overline{E}_p}\, S\big(D_q\big)\right) \times$$
$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} X_k(\xi,t)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, d\xi_2\, d\xi_1 - \right.$$
$$- \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{D_p} X_k(\xi,t)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, dS(\xi) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\xi_1,t)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, d\xi_1 -$$
$$\left. - \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\, n_l(\xi)\, U_{ij}^k(x,\xi,t)\, d\gamma(\xi)\right). \tag{5}$$

In the absence of mass forces, the expressions for movements (4) and stresses (5) take the following form:

$$u_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(\xi_1,t)\,U_k^i(x,\xi,t)\,d\xi_1 - \\ - \frac{\overline{E}_p-\overline{E}_0}{\overline{E}_p}\int_{\Gamma_p}\sigma_{ij}^{(p)}(\xi,t)\,n_j(\xi)\,U_k^i(x,\xi,t)\,d\gamma(\xi), \tag{6}$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \left(1+\frac{\overline{E}_q-\overline{E}_0}{\overline{E}_0}\,S\big(D_q\big)\right)\times \\ \times\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\xi_1,t)\,U_{ij}^k(x,\xi,t)\,d\xi_1 - \right.\\ \left.- \frac{\overline{E}_p-\overline{E}_0}{\overline{E}_p}\int_{\Gamma_p}\sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\,n_l(\xi)\,U_{ij}^k(x,\xi,t)\,d\gamma(\xi)\right). \tag{7}$$

Using relations (3), we write down the equations that allow us to determine the stresses on the contours of the inclusions:

$$\sigma_{ij}^{(q)}(x,t)\,n_j(x) = \frac{2\overline{E}_q}{\overline{E}_q+\overline{E}_0}\times \\ \times\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\xi_1,t)\,U_{ij}^k(x,\xi,t)\,d\xi_1 - \right.\\ \left.- \frac{\overline{E}_p-\overline{E}_0}{\overline{E}_p}\int_{\Gamma_p}\sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\,n_l(\xi)\,U_{ij}^k(x,\xi,t)\,d\gamma(\xi)\right]\cdot \\ \cdot\, n_j(x),\ x\in\Gamma_q. \tag{8}$$

For the numerical solution of the system (8), the contours of the inclusions were discretized by linear elements, which are characterized by the coordinates of their midpoints.

In accordance with [2, 8], unknown densities of potentials for n-th boundary element of the p-th inclusion were approximated using the function $f\big(x_n^{(p)},\xi,t\big)$. For inclusions bounded by contours that do not contain angular points, the density of potential along each boundary element was assumed to be constant.

Moreover, as it turned out, the function $f\big(x_n^{(p)},\xi,t\big)$, which approximates the stresses on each boundary element, is equal to 1 and does not depend on time t if the nodal point $x_n^{(p)}$ belongs to an ordinary boundary element, and $f\big(x_n^{(p)},\xi,t\big) = \left(\dfrac{r}{d}\right)^{s_1(t)-1}$ if the nodal point $x_n^{(p)}$ belongs to an angular boundary element, where d is the length of this element, a_i $(i=\overline{1,2})$ are the coordinates of the angular point, $r = \left[(\xi_i-a_i)\,(\xi_i-a_i)\right]^{\frac{1}{2}}$.

The unknown densities of potentials for n-th boundary element of the p-th inclusion can be represented as follows:

$$\sigma_{kl}^{(p)}(\xi,t)\,n_l(\xi) = \\ = A_{kl}\left(x_n^{(p)},t\right)f\left(x_n^{(p)},\xi,t\right)n_l\left(x_n^{(p)}\right), \tag{9}$$

where $A_{kl}\left(x_n^{(p)},t\right)$ are unknown constants; $n_l\left(x_n^{(p)}\right)$ — components of the outward normal vector to the contour of the inclusion at the point $x_n^{(p)}$.

Unknown constants $A_{kl}\left(x_n^{(p)},t\right)$ are determined from a system of linear algebraic equations for a given $t=t_s$:

$$A_{ij}\left(x_n^{(q)},t_s\right)f\left(x_n^{(q)},\xi,t_s\right)n_j\left(x_n^{(q)}\right) = \frac{2\overline{E}_q}{\overline{E}_q+\overline{E}_0}\times \\ \times\left[\left(\sum_{m=0}^{M} g_k\left(\xi_m^*,t\right)\int_{\xi'_m}^{\xi'_{m+1}} U_{ij}^k\left(x_n^{(q)},\xi,t_s\right)d\gamma(\xi) - \right.\right.\\ - \sum_{p=1}^{N}\frac{\overline{E}_p-\overline{E}_0}{\overline{E}_p}\sum_{m=1}^{M_p}A_{kl}\left(x_m^{(p)},t_s\right)n_l\left(x_m^{(p)}\right)\times \\ \left.\times\int_{\xi_m^{(p)}}^{\xi_{m+1}^{(p)}} f\left(x_m^{(p)},\xi,t_s\right)U_{ij}^k\left(x_n^{(q)},\xi,t_s\right)d\gamma(\xi)\right)\times \\ \left.\times\, n_j\left(x_n^{(q)}\right)\right], \tag{10}$$

where $x_n^{(p)}$ are coordinates of the n-th nodal point of the p-th inclusion; M_p is the number of boundary elements on the p-th inclusion; $\xi_n^{(p)}$, $\xi_{n+1}^{(p)}$ — coordinates of the n-th boundary element of the p-th inclusion; ξ'_m, ξ'_{m+1} — coordinates of the m-th discrete element belonging to contour Γ; ξ_m^* is the middle of this element $(m=\overline{1,M})$.

Integrals over segments $\left[\xi_m^{(p)},\,\xi_{m+1}^{(p)}\right]$ should be understood in the sense of Cauchy principal value [4].

Discrete analogs for the stress tensor components have the form

$$\sigma_{ij}(x,t_s) = \left(1+\frac{\overline{E}_q-\overline{E}_0}{\overline{E}_0}\,S\big(D_q\big)\right)\times \\ \times\left(\sum_{m=0}^{M} g_k\left(\xi_m^*,t\right)\int_{\xi'_m}^{\xi'_{m+1}} U_{ij}^k(x,\xi,t_s)\,d\gamma(\xi) - \right.\\ - \sum_{p=1}^{N}\frac{\overline{E}_p-\overline{E}_0}{\overline{E}_p}\sum_{m=1}^{M_p}A_{kl}\left(x_m^{(p)},t_s\right)n_l\left(x_m^{(p)}\right)\times$$

$$\times \int_{\xi_m^{(p)}}^{\xi_{m+1}^{(p)}} f\left(x_m^{(p)}, \xi, t_s\right) U_{ij}^k(x, \xi, t_s)\, d\gamma(\xi)\Bigg),\ x \in D.$$

Thus, the constructed mathematical model with its subsequent numerical implementation makes it possible to determine the stress state of a viscoelastic half-plane with arbitrary inclusions, taking into account the rheological parameters of materials at any given time.

Список використаних джерел

1. *Бреббиа К.* Методы граничных элементов / К. Бреббиа, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир., 1987.
2. *Kaminskii A.A.* Investigation of the stress-strain state of viscoelastic piecewise-homogeneous bodies by the method of boundary integral equations / A.A. Kaminskii, N.I. Zatula, V.N. Dyakon // Mechanics of composite materials. — 2002. — № 38 (3). — С. 209-214.
3. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. — М.: Изд. МГУ., 1976. — 368 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости: Основные уравнения: Плоская теория упругости: Кручение и изгиб / Н.И. Мусхелишвили. — М.: АН СССР, 1949.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 752 с.
6. *Савін Г.М.* Елементи механіки спадкових середовищ / Г.М. Савін, Я.Я. Рущицький. — К.: Вища школа, 1976. — 252 с.
7. *Wineman A.* Nonlinear viscoelastic solids — a review. / A. Wineman // Mathematics and mechanics of solids. — 2009. — № 14 (3). — С. 300-366.
8. *Zatula N.I.* Stressed-strained state of a viscous half-plane with circular inclusions / N.I. Zatula, V.I. Lavrenyuk // International applied mechanics. — 1995. — № 31 (9). — С. 754-760.
9. *Zatula N.I.* Approximation of density of potentials for the flat viscoelastic bodies with inclusions, bounded by a piecewise smooth contours / N.I. Zatula, D.V. Zatula // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. — 2021. — № 1. — С. 39-42.

References

1. Brebbia K., Telles, Zh. and Vroubel, L., 1987. *Metody granichnyh jelementov.* M.: Mir.
2. Kaminskii, A.A., Zatula, N.I. and Dyakon, V.N., 2002. Investigation of the stress-strain state of viscoelastic piecewise-homogeneous bodies by the method of boundary integral equations. *Mechanics of composite materials*, 38(3), pp.209-214. DOI: 10.1023/A:1016079000224
3. Lomakyn, V.A., 1976. *Teorija uprugosti neodnorodnyh tel: Uchebnoe posobie.* MGU.
4. Mushelishvili, N.I., 1949. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti: Osnovnye uravnenija: Ploskaja teorija uprugosti: Kruchenie i izgib.* M.: AN SSSR.
5. Rabotnov, Ju.N., 1966. *Polzuchest' jelementov konstrukcij.* M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.
6. Savin, G.M. and Rushhyc'kyj, Ja.Ja., 1976. *Elementy mehaniky spadkovyh seredovyshh.* K.: Vyshha shkola.
7. Wineman, A., 2009. Nonlinear viscoelastic solids — a review. *Mathematics and mechanics of solids*, 14(3), pp.300-366. DOI: 10.1177/1081286509103660
8. Zatula, N.I. and Lavrenyuk, V.I., 1995. Stressed-strained state of a viscous half-plane with circular inclusions. *International applied mechanics*, 31(9), pp.754-760. DOI: 10.1007/BF00846863
9. Zatula, N.I. and Zatula, D.V., 2021. Approximation of density of potentials for the flat viscoelastic bodies with inclusions, bounded by a piecewise smooth contours. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, (1), pp.39-42. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/1.4

Received: 04.05.2022

УДК 539.376 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.6

Рудницький О. Г., к.ф.-м.н., с.н.с.
Рудницька М. О., пров. інж.
Ткаченко Л.В., к.ф.-м.н., н.с.

Поліпшення якості оптоакустичної візуалізації: співставлення фізичного та числового експерименту

Інститут гідромеханіки НАНУ,
03680, м. Київ, вул. Капніс 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

A.G.Rudnitskii, PhD (Phys.- Math.)
M.A.Rudnytska , Senior engineer
L.V.Tkachenko, PhD (Phys.- Math.)

Improving the quality of optoacoustic imaging: a comparison of physical and numerical experiment

Institute of hydromechanics NASU,
03680, Kyiv, Kapnis str. 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

Оптоакустична візуалізація заснована на генерації термопружних хвиль шляхом нагрівання об'єкта в оптично неоднорідному середовищі коротким лазерним імпульсом. Сгенеровані ультразвукові хвилі містять інформацію про розподіл структур з переважним оптичним поглинанням. Виявленні на поверхні об'єкта акустичні збурення та застосування алгоритмів реконструкції дозволяють відтворити картину поглиненої енергії всередині середовища. Звичайні методи реконструкції призводять до артефактів через особливості алгоритму відновлення. Це дослідження пропонує ітераційну процедуру для зменшення цих шкідливих спотворень. Алгоритм мінімізує похибку між виміряними сигналами та сигналами, розрахованими з відновленого зображення. У роботі порівнюються результати обробки оптоакустичних сигналів, реалізованих у чисельних експериментах, з результатами фізичних експериментів. Показано, що якість відновлених зображень покращується навіть при невеликій кількості ітерацій.

Ключові слова: обробка зображень, оптоакустика, чисельне моделювання, k-Wave toolbox.

Optoacoustic imaging is based on the generation of thermoelastic waves by heating an object in an optically inhomogeneous medium with a short laser pulse. The generated ultrasonic waves contain information about the distribution of structures with predominant optical absorption. Detection of acoustic perturbations on the surface of the object and the application of the backprojection algorithm are used to create a picture of the absorbed energy inside the environment. Conventional reconstruction methods lead to artifacts due to the peculiarities of the recovery algorithm. This study proposes an iterative procedure to reduce these artifacts. The algorithm minimizes the error between the measured signals and the signals calculated from the recovered image. The paper compares the results of processing optoacoustic signals implemented in numerical experiments with the results of physical experiments. It is shown that the quality of the recovered images improves even with a small number of iterations.

Keywords: image processing, optoacoustics, numerical simulation, k-Wave toolbox.

Вступ

Останнім часом у наукових дослідженнях та в клінічній практиці широко застосовуються такі методи неінвазивної неушкоджуючої діагностики, як магнітно-резонансна та комп'ютерна томографія. Величезне значення цих методів відмічено світовою науковою спільнотою присудженням їх авторам Нобелівських премій з фізіології та медицини. На жаль, використання в цих підходах потенційно небезпечних для здоров'я людини жорстких магнітних полів та випромінювань накладає серйозні обмеження на їхнє застосування. Значним потенціалом, з точки зору екологічності та отримання надійної діагностично значущої інформації, мають оптична когерентна та оптична дифузійна томографія. Проте, через сильне поглинання та розсіювання світлових хвиль у біологічних тканинах суто оптичні методи ефективно візуалізують структури лише у приповерхневих областях. У зв'язку з означеним одним із найперспективніших і найбезпечніших напрямків медичної діагностики вважається підхід, заснований на оптоакустичному (ОА) ефекті.

© Рудницький О.Г., Рудницька М.О., Ткаченко Л.В, 2022

Оптоакустична візуалізація заснована на ефекті термопружності, коли при поглинанні оптичного випромінювання неоднорідностями середовища відбувається перетворення оптичної енергії у теплову. При помірній щільності енергії, що виділяється в області поглинання, не відбувається фазових перетворень і наслідком теплового оптичного поглинання є генерація звукових хвиль. Завдяки поєднанню переваг ультразвукових та оптичних методів біомедична оптоакустична візуалізація дозволяє отримувати зображення біотканин з високим контрастом та субміліметровою просторовою роздільною здатністю на глибинах від кількох міліметрів до кількох сантиметрів. При цьому якість зображення значною мірою визначається алгоритмом оптоакустичної реконструкції. Спотворення та артефакти у реконструйованому зображенні можуть виникати як через специфіку методу відновлення, так і внаслідок неминучих у реальних дослідженнях перешкод та шумів різної природи. Зазвичай ОА-зображення містять інтенсивний нестаціонарний фон з артефактами, структурно подібними сигналам, відношення сигнал/фон як правило невелике, а цифрове зображення має невисоку якість, невелику кількість рівнів квантування, плямистий характер і нечіткі границі. Тому завдання усунення спотворень та артефактів при побудові оптоакустичних зображень надзвичайно актуальне [1].

Мета цієї роботи полягає у співставленні результатів числових експериментів по усуненню спотворень та артефактів при відновленні оптоакустичних зображень, описаних у роботах [2,3], з результатами ОА-реконструції, проведеної у модельному фізичному експерименті. Спочатку коротко описуються розроблені алгоритми шумоподавлення та корекції відновлених ОА-зображень, а також формулюються пряма та обернена задачі оптоакустики. Далі детально описується модельний фізичний експеримент, результати застосування розроблених алгоритмів до обробки експериментальних даних та їх співставлення з результатами числових експериментів. У Висновках наведено висновки та перспективи розробленого алгоритму.

1. Придушення шумів

Відомо, що частотна смуга ОА-сигналу залежить як від тривалості зондуючого світлового імпульсу, так і від розміру цільового об'єкту [4]. Це призводить до того, що спектральний діапазон ОА-сигналів може бути досить широким (кілька десятків МГц). Крім того, ОА-сигнали дуже чутливі до фонових шумів: турбулентність повітря, низькочастотні коливання приміщення, ступінчастий двигун лазера, нестабільність параметрів лазерного випромінювання, точність юстування тощо. У кінцевому підсумку перелічені фактори призводять до зниження як роздільної здатності, так і співвідношення сигнал/шум у реконструйованому зображенні. Тому цілком природно, що процедура шумоподавлення знаходиться на самому початку обробки зареєстрованих ОА-сигналів. Якість цього кроку обробки істотно впливає на результати наступних етапів, а його неадекватність може призвести до серйозних спотворень зображення і навіть втрати корисних деталей цільових об'єктів. Навпаки, надійне шумозаглушення може запобігти завищенню фону зображення і допомагає виділити слабкі, але суттєві особливості, одночасно запобігаючи утворенню хибних ознак [5]. Важливість цього етапу зумовлена також тією обставиною, що задачі оптоакустичної томографії зазвичай вимагають використання погано зумовлених операторів. Тому максимально очищені від похибок початкові дані можуть мати вирішальне значення для якісної реконструкції досліджуваних об'єктів.

Важливо також відзначити, що більшість існуючих методів зниження рівня шумів в ОА-сигналах засновані на квазі-тривимірному підході, коли сигнали, зареєстровані на поверхні зразка, очищаються від шумів послідовно – від попереднього моменту часу до наступного. Потім з таких очищених фрагментів шар за шаром формується тривимірне відфільтроване зображення досліджуваного об'єкта. Тобто, такий підхід передбачає перетворення послідовності двовимірних просторових зображень на тривимірне просторово-часове зображення. На жаль, такий метод руйнує тісний зв'язок між фрагментами у часовому просторі. У результаті залишковий шум і артефакти на відфільтрованих шарах відрізняються від кадру до кадру, викликаючи неприємний суб'єктивно і шкідливий для реконструкції ефект «мерехтіння». Результати реконструкції, заснованої на такому підході, практично можуть давати спотворений, незадовільний результат. Крім того, в ОА-зображенні проблема реконструкції завжди тривимірна. Це з пов'язано з характером оптоакустичного ефекту, коли для задовільної реконструкції об'єкта потрібна інформація з усього обсягу пов'язаних між собою тривимірних даних. Все вищесказане означає, що більш доцільним, обґрунтованим і природним підходом є тривимірна фільтрація, коли об'єктом фільтрації є оригінальне об'ємне 3D-зображення, а не послідовність двовимірних кадрів.

Дуже важливим моментом при придушенні шумів у ОА-сигналах є вибір фільтра. Останній визначається статистичними характеристиками оброблюваного сигналу, вимогами до швидкодії алгоритму фільтрації та зручності його налаштування.

У реальній практиці види та склад шуму, що спотворює зображення, апріорі не відомі. Крім того, дуже часто оператору необхідно проаналізувати програмним пакетом велику кількість зображень. Очевидно, що в цьому випадку сценарій зміни налаштувань фільтра до різних видів шуму може бути досить складним та займати багато часу та зусиль. Одне з можливих рішень цієї проблеми – використовувати фільтр, який забезпечував би найкращу продуктивність для одночасного придушення шумів різних видів. При цьому налаштування такого фільтра має бути максимально простим – бажано користуватися лише одним параметром.

Серед методів придушення шумів, які могли б задовольняти цим умовам, слід виділити наступні: усереднення сигналу по вибірці зразків, «ковзаюче усереднення» і частотна фільтрація. На жаль, ці методи, задовольняючи вимогам простоти, значно програють більш продвинутим підходам видалення завад. Високу ефективність демонструють фільтри, засновані на вервлет-перетворенні, коли сигнал (функція) розкладається по деякому ортонормованого базису, основними властивостями якого є частотно-часова локалізація та масштабованість. Якщо при цьому вдало підібрати базові функції вейвлетів, метод фільтрації і параметри фільтра, то результати обробки для деяких видів шумів можуть бути дуже ефективними. На жаль, наявність великої кількості комбінацій вхідних параметрів (особливо в тривимірному випадку) не дає можливості оперативно віддавати перевагу будь-якій з комбінацій при настроюванні таких фільтрів у реальних умовах. Крім того, ефективність таких фільтрів істотно залежить від апріорної інформації як про сам об'єкт, так і про шуми, що спотворюють зображення. У біомедичних дослідженнях та умовах клінічної практики це можливе лише при роботі *in vitro*, коли досліджувач має досить часу для копіткої процедури налаштування.

У зв'язку з цим, одним із завдань нашого дослідження була розробка простого та швидкого тривимірного (3D) фільтра для ефективного придушення невідомих апріорі шумів різних видів, що співіснують в ОА-сигналах.

Для реалізації цього завдання були розроблені та модифіковані тривимірні Ітеративний відсікаючий фільтр (ІТМ) та Модифікований медіанний фільтр (MMedian) [2]. На основі підходу багатокритеріальної оптимізації методів нечіткої логіки було показано, що ці фільтри дозволяють ефективно придушувати шум, одночасно зберігаючи незмінними краї та морфологію деталей зображення. Для налаштування цих фільтрів потрібен лише один інтуїтивно зрозумілий параметр – розмір фільтруючого вікна. Крім того, було показано, що оскільки ІТМ-фільтр використовує лише арифметичні операції, його швидкодія перевищує цей показник у інших фільтрів.

2. Видалення спотворень та артефактів

Відновлення оптоакустичних зображень за зареєстрованими на поверхні об'єкта ультразвуковими сигналами, реалізується завдяки алгоритмам оптоакустичної реконструкції. При цьому, спотворення та артефакти в реконструйованому зображенні можуть бути наслідком не лише неминучих в реальних дослідженнях перешкод та шумів різної природи, але й через специфіку методу реконструкції.

Одним із завдань нашої роботи була розробка та дослідження алгоритму, призначеного коректувати спотворення, що виникають у результаті роботи алгоритму відновлення ОА-зображень.

Сформулюємо пряму задачу ОА-томографії: визначити поле тиску $p(\mathbf{r},t)$ за відомим розподілом теплових джерел $H(\mathbf{r},t)$ (тут $\mathbf{r}$ – просторова координата точки, а t – час), збуджених короткочасним світловим (лазерним) імпульсом (рис. 1).

В акустично однорідному нескінченному середовищі шукана просторово-часова залежність $p(\mathbf{r},t)$ визначається рівнянням [6]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] p(\mathbf{r},t) = -\frac{\beta}{c_p}\frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{r},t), \quad (1)$$

де c – швидкість звуку, β – коефіцієнт ізобаричного розширення, c_p – теплоємність при постійному тиску, що припадає на одиницю маси. Якщо теплове джерело $H(\mathbf{r},t)$ представити у вигляді добутку поглиненої енергії та часової функції підсвічування $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})\cdot I(t)$, то у разі короткого імпульсу $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})\cdot\delta(t)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака.

З іншого боку, початковий акустичний тиск, що виникає за рахунок поглинання імпульсного випромінювання оптичними неоднорідностями в момент часу $t = 0$, можна представити у вигляді $p_0(\mathbf{r}) = \Gamma\cdot Q(\mathbf{r})$, де Γ – безрозмірний коефіцієнт Грюнайзена, що характеризує ефективність перетворення у звук світла, що було поглинуто неоднорідністю.

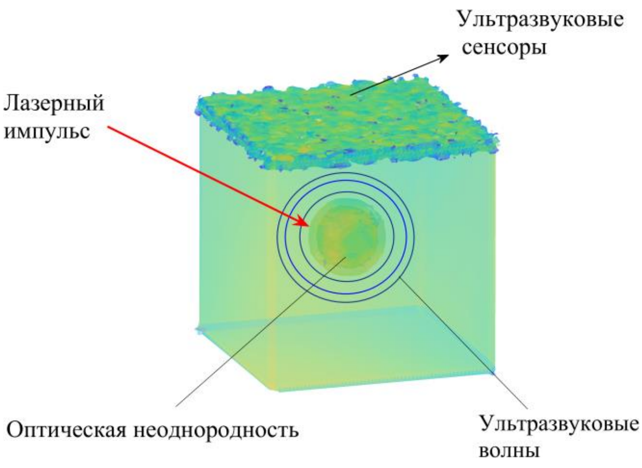


Рис. 1. Схема оптоакустичного зондування

В акустично однорідному нескінченному середовищі шукана просторово-часова залежність $p(\mathbf{r},t)$ визначається рівнянням [5]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p(\mathbf{r},t) = -\frac{\beta}{c_p}\frac{\partial}{\partial t}H(\mathbf{r},t), \quad (1)$$

де c – швидкість звуку, β – коефіцієнт ізобаричного розширення, c_p – теплоємність при постійному тиску, що припадає на одиницю маси. Якщо теплове джерело $H(\mathbf{r},t)$ представити у вигляді добутку поглиненої енергії та часової функції підсвічування $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})\cdot I(t)$, то у разі короткого імпульсу $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})\cdot\delta(t)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака.

З іншого боку, початковий акустичний тиск, що виникає за рахунок поглинання імпульсного випромінювання оптичними неоднорідностями в момент часу $t = 0$, можна представити у вигляді $p_0(\mathbf{r}) = \Gamma\cdot Q(\mathbf{r})$, де Γ – безрозмірний коефіцієнт Грюнайзена, що характеризує ефективність ОА-перетворення у звук світла, що було поглинуто неоднорідністю.

У цьому випадку, розв'язок прямої задачі задається виразом [5]:

$$p(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_{V'}\frac{\frac{\partial}{\partial t}(p_0(\mathbf{r}')\delta(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV',$$

де V' – об'єм, в якому розподілені ОА-джерела.

Відновлення розподілу початкового акустичного тиску $p_0(\mathbf{r},t{=}0) = p_0(\mathbf{r})$, за сигналами тиску $p_s(\mathbf{r},t)$, зареєстрованими на поверхні S об'єму V', становить суть оберненої задачі оптоакустики [6].

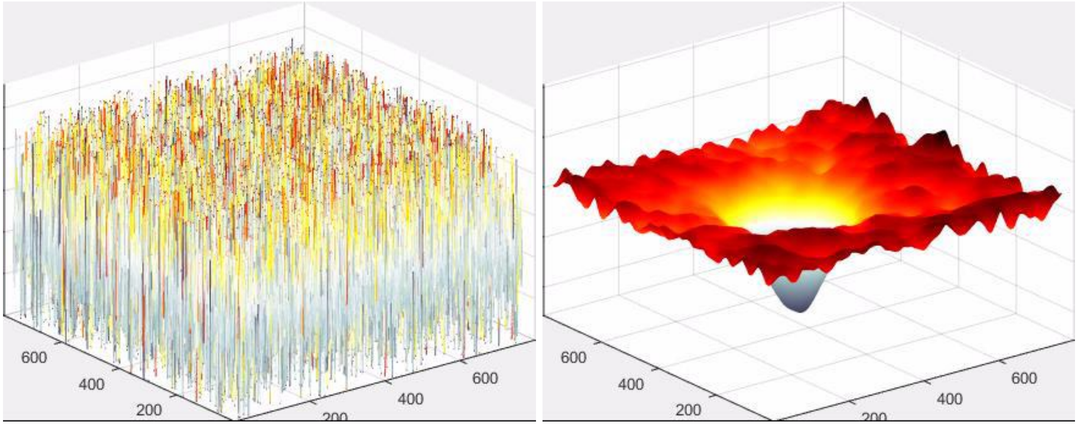
Існує декілька підходів до відновлення розподілу джерел у середовищі: алгоритм Фур'є-реконструкції, алгоритм обернення у часі, метод обернених проекцій [7,8].

Метод обернених проекцій, який використовувався у нашій роботі, є класичним способом ОА-реконструкції. Він може реалізовуватися або в просторово-часовій, або в Фур'є-області для різних конфігурацій детектування в плоскій [9], циліндричній [9] або в сферичній геометрії [10]. При цьому розв'язки будуть справедливі лише для замкнутої ідеальної поверхні (приймачем є кожна точка поверхні). Крім того, зазвичай вважається, що цільовий об'єкт розташовано в нескінченно-однорідному середовищі без дисперсії з постійними швидкістю звуку, коефіцієнтами поглинання та густиною.

Оскільки у реальних ситуаціях ці умови не виконуються, це призводить до спотворень зображень, що реконструюються. Специфіка цих спотворень різна при використанні різних методів реконструкції, різному розташуванні приймачів та різній геометрії об'єкта, що реконструюється.

Для компенсації спотворень та подолання сильної залежності якості відновленого зображення від зазначених факторів нами було розроблено метод ітеративної корекції спотворень ОА-зображень [3]. При розробці метода припускалося, що інтенсивність артефактів менша за інтенсивність реконструйованого сигналу, а однакові джерела породжують однаковий розподіл тиску поверхні об'єкта. Крім того, вважалося, що подібні джерела породжують подібні артефакти.

На першому кроці розробленої схеми коректування проводиться реконструкція зображення об'єкту за даними, зареєстрованими на поверхні, обраним класичним алгоритмом (у нашому випадку – метод обернених проекцій). Відновлене таким чином зображення можна вважати новим джерелом акустичних хвиль. Розв'язуючи тепер для цього джерела пряму задачу оптоакустики можна отримати нові штучні дані на поверхні об'єкту. За даними, змодельованими в результаті розв'язання такої прямої задачі, можна відновити нове зображення (друге відновлене зображення). Відмінність між останнім (уявним) зображенням і першим, відновленим з вихідних експериментальних даних, є тим коригуючим фактором, який дозволяє внести поправку в первинне відновлене зображення, зменшити інтенсивність артефактів та наблизити реконструйоване зображення до оригіналу. Цей процес триває до тих пір, поки змодельоване поле тиску на поверхні об'єкта, отримане в результаті розв'язання прямої задачі, не досягне максимальної схожості з полем тиску на поверхні об'єкта, отриманим в результаті експерименту.



a) b)

Рис.2. Результат фільтрації експериментальних даних (зміщення поверхні) в один із моментів часу: а) вихідні дані; b) результат фільтрації.

Таким чином, у запропонованому методі поліпшення якості реконструйованого зображення досягається шляхом урахування помилок первинної реконструкції з подальшим порівнянням результатів розв'язання прямої задачі оптоакустики для відкоригованого зображення з експериментальними даними.

Розроблений ітеративний метод реконструкції був застосований як до фантомних числових об'єктів, так і до даних, отриманих експериментально. Результати числового моделювання представлені у роботі [3]. Процедура була реалізована в програмному пакеті *k*-wave MatLab і про демонструвала суттєве покращення якості реконструйованого зображення порівняно із зображеннями, відновленими традиційним методом навіть після невеликої кількості ітерацій

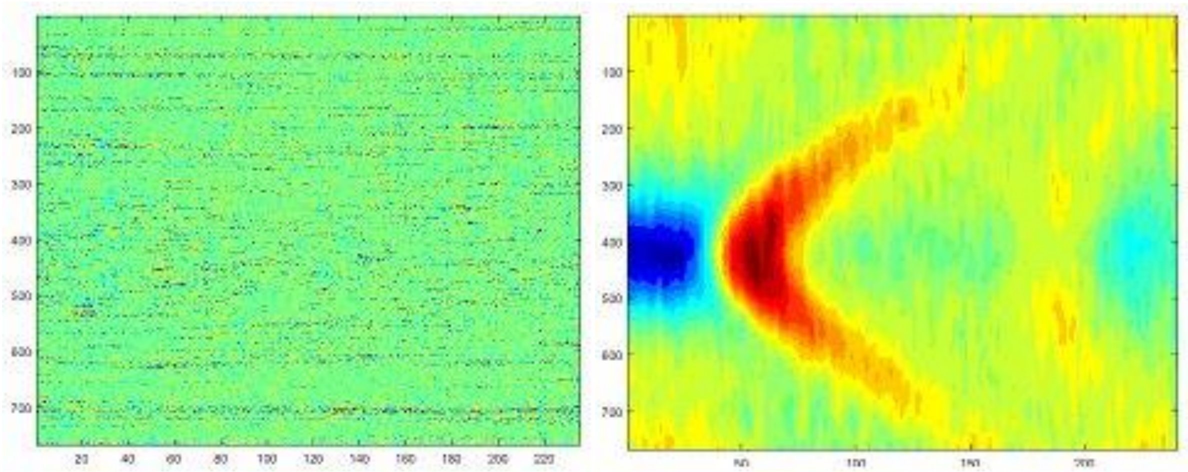
Тестування запропонованого ітеративного алгоритму на модельному фізичному експерименті описано в наступному розділі.

3. Порівняння результатів числового та фізичного моделювання

Для порівняння результатів числового та фізичного моделювання використовувався прозорий силіконовий кубик розміром 10 ×10мм×10 мм (Wacker Silicones RT604 A/B) із густиною $\rho_0 = 790$ *кг/м*^{3} та швидкістю звуку $c_0 = 960$ *м/с*. У якості оптичного поглинача виступала вміщена у кубик чорна силіконова куля діаметром 1 мм, розташована на глибині 1 мм з коефіцієнтом оптичного поглинання 0.296 м$^{-1}$ і коефіцієнтом теплового розширення 3×10^{-4} K^{-1}. Такі значення фізичних характеристик приблизно відповідають м'яким біологічним тканинам.

Реєстрація збурень на поверхні зразка здійснювалася безконтактним способом, який має цілу низку переваг перед існуючими контактними методами [12]. Метод був розроблений Medizinisches Laserzentrum Lübeck GmbH, Institute of Biomedical Optics, Universität zu Lübeck, Germany та заснований на використанні інтерферометра Маха-Цендера. У класичному інтерферометрі Маха-Цендера напівпрозоре дзеркало (світлодільник) на вході розщеплює вхідний лазерний світловий пучок на два кoліміновані пучки – опорний і вимірювальний. Ці пучки зводяться разом другим напівпрозорим дзеркалом після відображення двох непрозорих дзеркал, а результат накладання вимірювального і опорного променів відображається на екрані (фотоприймачі). У вимірювальному плечі інтерферометра довжина променевого шляху змінюється внаслідок зміщень поверхні, викликаних фотоакустичним сигналом, згенерованим збуджуючим лазером. Фазова розбіжнсть між опорним і вимірювальним променями визначає інтерференційну картину, яка реєструється високошвидкісною камерою і дозволяє визначити зміщення на досліджуваній поверхні без прямого контакту з об'єктом [13].

Як зазначалося у розділі 1, найважливішим етапом обробки фотоакустичних сигналів є їхня фільтрація. На рис. 2а показані зміщення поверхні верхньої грані силіконового кубика в деякий момент часу, викликані оптоакустичним сигналом. Зауважимо, що корисний сигнал практично не проглядається на рівні шумів. Зміщення поверхні в цей же момент часу після фільтрації запропонованим у [3] алгоритмом, представлені на рис. 2б). Зазначимо, що перш ніж використовувати запропонований тривимірний алгоритм фільт-



a) b)

Рис.3. Результат фільтрації експериментальних даних (зміщення поверхні): a) вихідні дані; b) результат фільтрації.

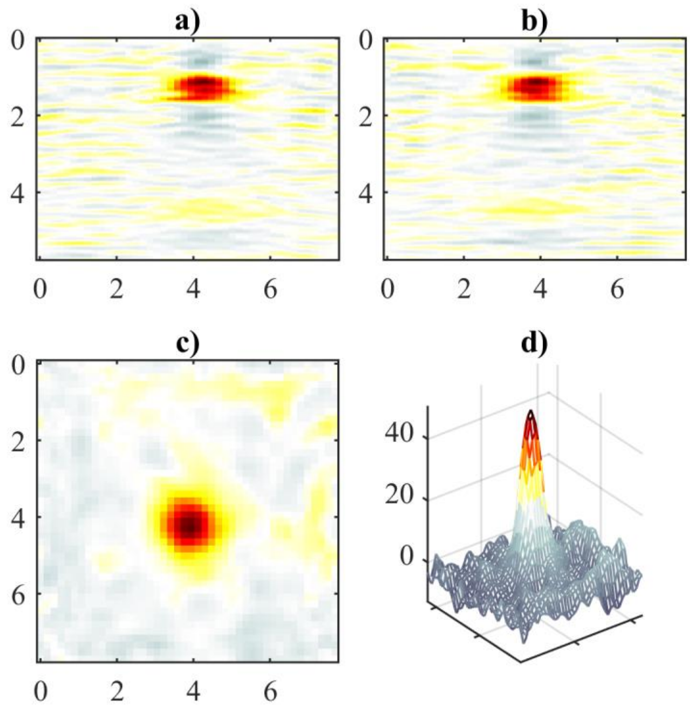


Рис.4. Реконструкція абсорбера алгоритмом пакету *k*-Wave у різних перерізах; a) *x-y* переріз; b) *x-z* переріз; c) *y-z* переріз; d) *y-z* переріз в аксонометрії.

рації, у вибірці, що оброблялася, проводилося вирівнювання нерівномірної засвітки з використанням методів нечіткої логіки [14]. Цей прийом дозволив додатково покращити якість відновлення зашумлених тривимірних сигналів.

На рис. 3 представлені зміщення поверхні зразка в координатах простір-час. По осі ординат відкладено реєстрацію зміщень поверхні в одному з центральних перерізів на верхній грані силіконового кубика, по осі абсцис відкладено часові відліки в які ці зсуви фіксувалися, а кольором позначена амплітуда зміщень (червоний край палітри – високі значення, синій край – найнижчі). Як і на попередньому рисунку, рис. 3а демонструє

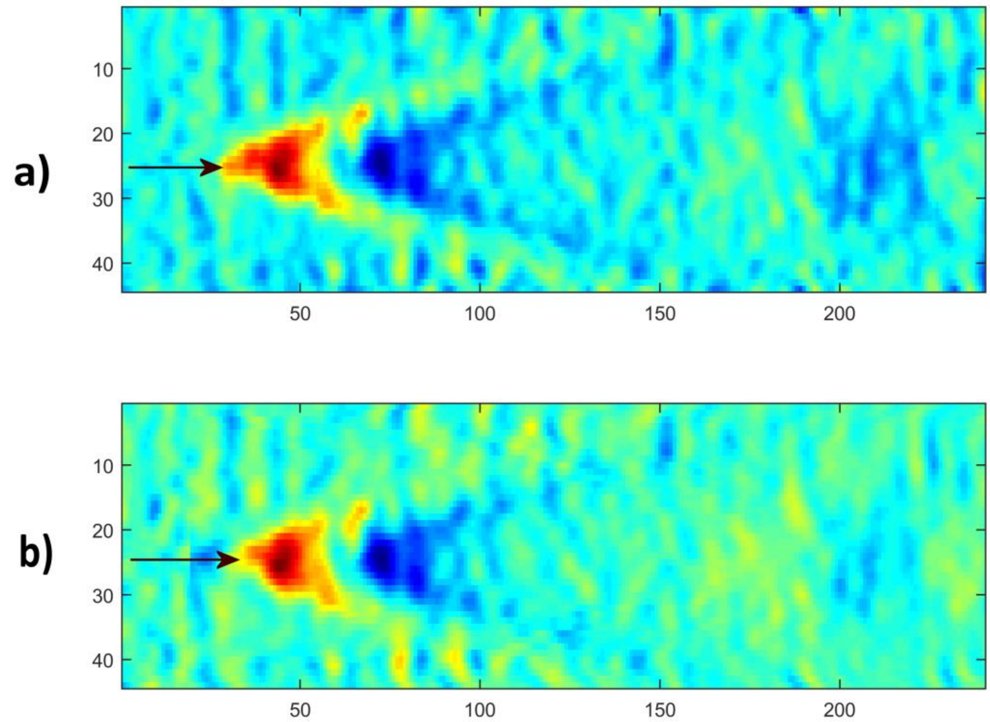


Рис.5. Розподіл тиску в перерізі на верхній грані у координатах простір-час: а) експеримент; б) змодельовані дані (нульова ітерація - *k*-Wave).

картину зміщень до обробки, а рис. 3b – після запропонованого алгоритму тривимірної фільтрації сигналу (час і просторові координати – у пікселях). Для розв'язання задачі реконструкції образу вбудованого в середовище об'єкта – чорного сферичного абсорбера – використовувався програмний пакет *k*-Wave – набір інструментів для середовища МАТЛАБ. Використання цього пакета дозволяє моделювати системи з акустичними джерелами та приймачами довільних форм та розмірів у середовищі із заданими густиною та швидкістю звуку. При цьому числова модель ґрунтується на переході в *k*-простір. Просторові градієнти в цьому просторі обчислюються за допомогою схеми швидкого перетворення Фур'є.
При обчисленні часових градієнтів використовується скоригована *k*-просторова різницева схема [15]. Оскільки МАТЛАБ оптимізований для роботи з матричними операціями, використання пакета *k*-Wave дозволяє розв'язувати задачі розповсюдження звуку та реконструкції ОА-зображень із досить високою швидкістю обчислень.

На рис. 4а – 4с показані перерізи реконструйованого *k*-Wave алгоритмом ОА-джерела – сфери на глибині 1 мм (чим темніший колір – тим більша інтенсивність). На рис. 4d реконструкція цього абсорбера в *x*-*y* перерізі представлена в ізометрії (інтенсивність джерела відкладена по осі аплікат).

Згідно до запропонованого ітеративного алгоритму, реконструйоване таким чином джерело тепер саме може виступати джерелом звукових сигналів. Нульова ітерація цього алгоритму (тобто результат, отриманий алгоритмом пакету *k*-Wave) представлена рис. 5б. Тут відображено картину розподілу тиску на поверхні в тих же координатах, що й на рис. 3, тобто по осі ординат відкладено координати реєстрації тиску на поверхні в одному з перерізів верхньої грані силіконового кубика, по осі абсцис відкладено часові відліки, а кольором відображено відповідні значення тиску у відносних одиницях. Для порівняння розподіл тиску, отриманий в ході експерименту представлено на рис. 5а.

Для більш детального та наглядного співставлення експериментальних та змодельованих даних на рис.6 представлені центральні перерізи рисунків 5a та 5b (місце перерізу показано на рис.5 чорною стрілкою). З рисунків 5 та 6 видно, що так само, як і в числовому експерименті, описаному в роботі [5] (і відповідно до нього), амплітуда синтезованих значень тиску на сенсорах верхньої грані виявляється заниженою у порівнянні з експериментальними даними з зміщеними краями. При реконструкції це призводить до погіршення контрастності відновленого зображення та похибки при визначенні координат країв об'єкту (а саме ці параметри особливо важливі при візуальному медичному моніторингу).

У результаті ітеративного процесу синтезовані дані поступово наближаються до експеримент-

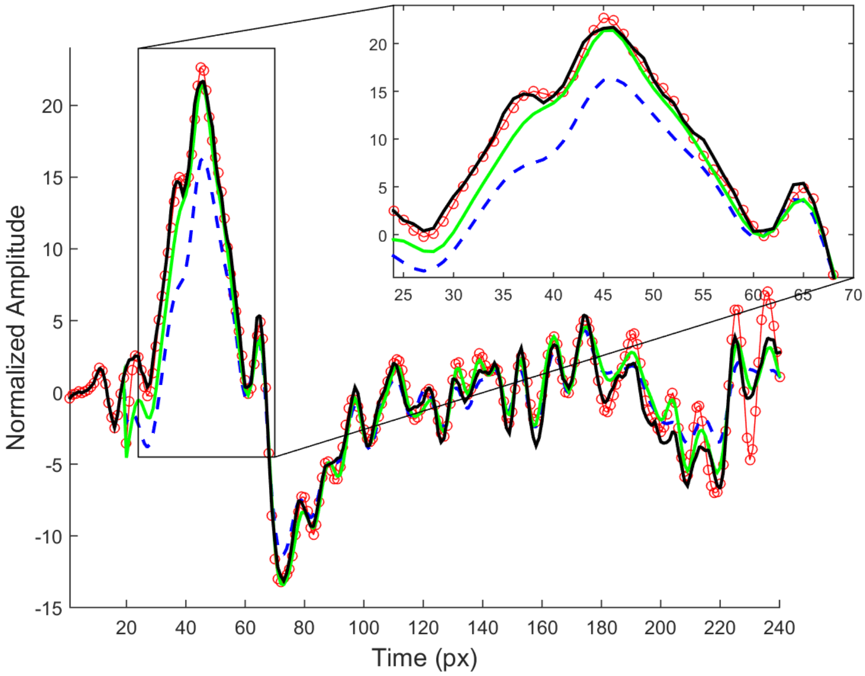


Рис.6. Зміна тиску на верхній грані за часом: суцільна чорна - експеримент; штрихова (- - -) нульова ітерація; суцільна зелена – перша ітерація; –o– 4-та ітерація.

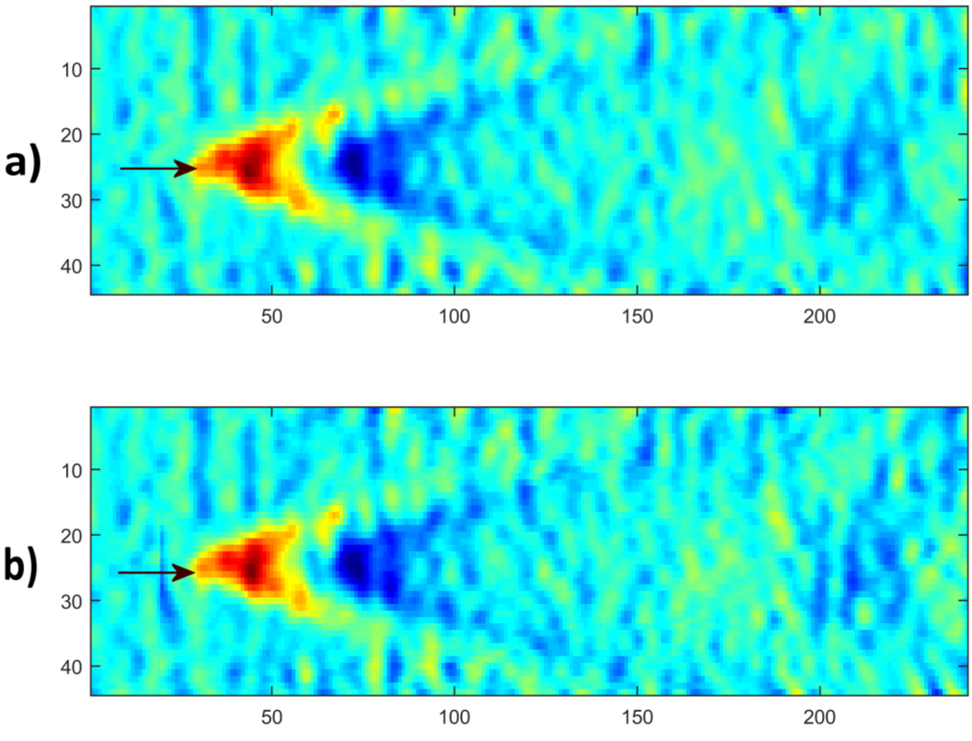


Рис.7. Зміна тиску на верхній грані за часом: а) експеримент; б) змодельовані дані (4-а ітерація).

тальних. На рис.6 порівнюються оригінальні дані з нульовою, першою та четвертою ітераціями в одномірному поданні. На врізці ясно видно, що вже 1-а ітерація (перше коригування), (на рис. позначена суцільною зеленою лінією), дуже близько підходить до експериментальних даних (суцільна чорна крива), що свідчить про хорошу збіжність алгоритму. Четверта ітерація гарно відтворює навіть невеликі деталі цільової кривої. Ця ж особливість була відзначена і у відповідному числовому експерименті [3]. У двовимірному представленні експериментальні дані і 4-та ітерація візуально майже не розрізняються (див рис. 7)

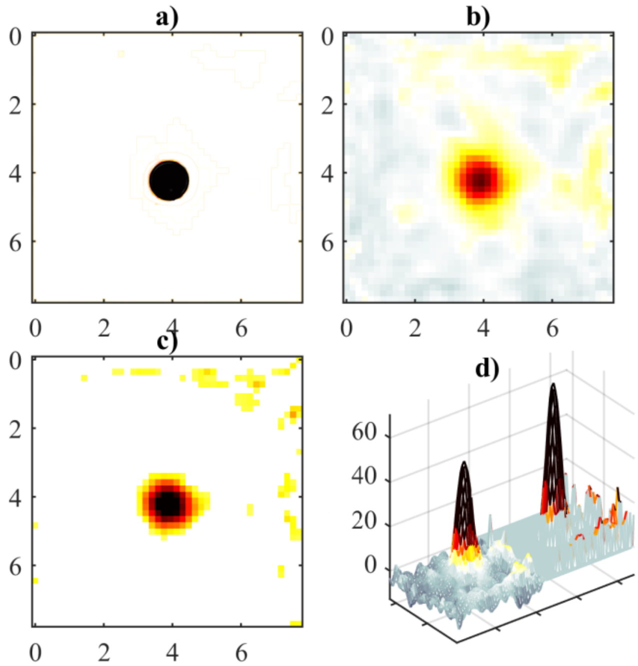


Рис.8. Реконструкція образу сфери у *y-z* перерізі: a) проекція реальної сфери; b) нульова ітерація; c) четверта ітерація; d) співставлення 0-ї і 4-ї ітерацій в аксонометрії..

Кількісна оцінка відповідності експери-мен-тальних та синтезованих даних проводилась за допомогою індекса структурної подібності SSIM (від англ. *sructure similarity*) [16]. Цей індекс вважається неофіційним стандартом оцінки якості зображень при наявності еталону. SSIM оцінює близькість зображень на основі комбінації трьох їхніх характеристик: яскравості, контрасту та структури. Отриманий індекс SSIM приймає значення від –1 до 1. Значення 1 досягається лише у випадку двох однакових наборів даних.

Для першої ітерації індекс SSIM між експериментальними та синтезованими даними дорів нює SSIM=0.52, для четвертої – SSIM=0.66.

Таким чином, як і в числовому експерименті роботи [3], наближення синтезованих у ході розв'язання прямої задачі оптоакустики даних, до даних, отриманих експериментально, свідчить про поступове наближення реконструйованого образу неоднорідності до реального. Тобто, досягається головна мета дослідження – найбільш адекватно відтворити образ шуканої неоднорідності.

З точки зору якості реконструйованого зображення такі особливості алгоритму покращують контрастність відновленого образу і чіткість відтворення його кромок. Особливо добре це помітно на рис.8 де для наглядності реконструкція сферичної неоднорідності в перерізі *y-z* представлена в аксонометрії

4. Висновки

Основна мета цієї роботи – протестувати у реальному фізичному експерименті алгоритми обробки оптоакустичних сигналів, запропоновані та реалізовані у роботах [2,3]. У цих роботах висока ефективність розроблених алгоритмів була перевірена у числових експериментах, моделюючих тривимірне біологічне середовище з просторово однорідним акустичним поглинанням і довільним просторовим розподілом поглинання оптичної енергії з плоскою акустичною антеною, розташованою на поверхні досліджуваного зразка. У даній роботі ці результати співставлялись з результатами фізичного експерименту. Для цього використовувався прозорий силіконовий куб з вміщеною в нього чорною силіконовою сферою в якості оптичного поглинача з показниками, що моделюють біологічні тканини. Реєстрація оптоакустичних збурень на поверхні зразка виконувалася безконтактно з використанням інтерферометра Маха–Цендера за методикою, розробленою у Medizinisches Laserzentrum Lübeck GmbH та Institute of Biomedical Optics, Universität zu Lübeck, Germany.

Фільтрація отриманих сигналів виконувалась спроектованими тривимірними нелінійними адаптивними просторовими MMedian та ITM фільтрами. Ці фільтри дозволяють ефективно придушувати шум, потребуючи мінімальний об'єм апріорної інформації і одночасно зберігаючи незмінними краї та морфологію деталей зображення [2].

Для корекції артефактів і спотворень, що виникають внаслідок роботи конкретного алгоритму реконструкції ОА-образів та конкретних умов експерименту, таких як кути огляду реконструйованого об'єкта, його геометричні характеристики і.т.п, використовувався ітеративний алгоритм покращення якості зображення, запропонований у [3].

Проведений у роботі аналіз показав, що розроблені алгоритми демонструють високу ефективність не лише *in silico* в умовах числових експериментів, але й за умов реального лабораторного експерименту.

Acknowledgements

A.G. Rudnitskii and M.A. Rudnytska were supported by VW Foundation program "Modeling, Analysis, and Approximation Theory toward application in tomography and inverse problems".

Список використаних джерел

1. *Sandbichler M, Krahmer F, Berer T, Burgholzer P, Haltmeier M.* A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography.// SIAM J Appl Math. – 2015. – V. 75. – №6. – P.2475–2494.
2. *Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л.В.* Застосування нечіткої логіки при пошуку оптимального фільтру в задачах оптоакустики// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки– 2021. – №1. – P. 43-54
3. *Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л.В.* Ітеративний метод корекції артефактів при оптоакустичній реконструкції// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2021. – №4. – P. 98-107.
4. *Li C., Wang L. V.,* Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine// Physics in Medicine and Biology. – 2009. – V.54. – № 19. – P. 59-97.
5. *Marengo E., Robotti E., Antonucci F., Cecconi D. et al.,* Numerical approaches for quantitative analysis of twodimensional maps: a review of commercial software and home-made systems. //Proteomics. – 2005. – V.5. – P. 654–666.
6. *Гусев В.Е., Карабутов А.А.* Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991. 304 с.
7. *Хохлова Т.Д., Пеливанов И.М., Карабутов А.А* Методы оптико-акустической диагностики биотканей. //Акуст. Журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 672–683.
8. *Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D.* Acoustic inversion in optoacoustic

References

1. SANDBICHLER M, KRAHMER F, BERER T, BURGHOLZER P, HALTMEIER M. (2015) A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography. *SIAM J Appl Math*. V. 75., №6., P.2475–2494.
2. RUDNITSKII A.G., RUDNYTSKA. M.A, TKACHENKO L.V. (2021) The use of fuzzy logic in the search for the optimal filter in optoacoustic problems// *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University Series of physical and mathematical sciences* – 2021. – No. 1. - P. 43-54
3. RUDNITSKII A.G., RUDNYTSKA. M.A, TKACHENKO L.V. (2021) Iterative method of artefact correction during optoacoustic reconstruction// *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series of physical and mathematical sciences.* No. 4., P. 98-107.
4. LI C., WANG L. V. (2009) Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine// *Physics in Medicine and Biology*. V.54, № 19. P. 59-97.
5. MARENGO E., ROBOTTI E., ANTONUCCI F., CECCONI D. et al., (2005) Numerical approaches for quantitative analysis of twodimensional maps: a review of commercial software and home-made systems. //*Proteomics*. V.5. P. 654–666.
6. HUSEV V.E., KARABUTOV A.A. (1991) *Laser Optoacoustics. Moscow:* Nauka, 1991. 304 p
7. KHOKHLOVA T.D., PELIVANOV I.M., KARABUTOV A.A. (2009) Methods of optical-acoustic diagnostics of bio-tissues. // *Acoustic Journal* , Vol. 55., No. 4–5. P. 672–683.
8. ROSENTHAL A., NTZIACHRISTOS V.,

tomography: A review. // Current medical imaging reviews. – 2013. – V. 9. № 4. P. 318–336.

9. *Kuchment P, Kunyansky L*. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography// Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer.–2011. .–pp. 817–865.
10. *Kuchment P., Kunyansky L*. Mathematics of thermoacoustic tomography.// European Journal of Applied Mathematics. 2008. V. 19. № 2. P. 191–224.
11. *Xu M., Wang L. V.* Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography.// Biomedical Optics 2005 Intern. Society for Optics and Photonics.– 2005.–pp. 251–254.
12. *Buj C., Horstmann J., Munter M., Brinkmann R.* Speckle-based holographic detection for non-contact Photoacoustic Tomography// Proc. Biomed. Tech. – 2014. – V.59. – P. 844-848.
13. *J. Horstmann et al.,* Full-field speckle interferometry for non-contact photoacoustic tomography// Phys. Med. Biol. – 2015. – V. 60, №10. – P. 4045-4058. doi: 10.1088/0031-9155/60/10/4045
14. *Ahmed M.N., Yamany S.M.,Mohamed N.,Farag A.A, Moriarty T.* A modified fuzzy c-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data //IEEE Transactions on Medical Imaging. – 2002. – №3. – V21. – P. 193-199.
15. *Bradley E. Treeby* Modeling nonlinear wave propagation on nonuniform grids using a mapped k-space pseudospectral method// IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. . – 2013 – № 10, .– P. 2208–2213.
16. Wang Zhou, Bovik, Alan C., Sheikh, Hamid R., and Simoncelli, Eero P. Image Qualifty Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. //IEEE Transactions on Image Processing. – 2004. – V.13. – №4. – З. 600–612.

RAZANSKY D. (2013) Acoustic inversion in optoacoustic tomography: A review. // *Current medical imaging reviews*. V. 9, № 4. P. 318–336.

9. KUCHMENT P., KUNYANSKE L. (2011) Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. // *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer*. pp. 817–865.
10. KUCHMENT P., KUNYANSKE L. *(*2008*)* Mathematics of thermoacoustic tomography*.// European Journal of Applied Mathematics.* V. 19. № 2. P. 191–224.
11. XU M., WANG L. V. (2005) Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography.// *Biomedical Optics 2005 Intern. Society for Optics and Photonics*. pp. 251–254.
12. BUJ C., HORSTMANN J., MUNTER M., BRINKMANN R. (2014) Speckle-based holographic detection for non-contact Photoacoustic Tomography// *Proc. Biomed. Tech.* V.59, P. 844-848.
13. J. HORSTMANN et al., (2015) Full-field speckle interferometry for non-contact photoacoustic tomography// *Phys. Med. Biol.* V. 60, №10. P. 4045-4058. doi: 10.1088/0031-9155/60/10/4045
14. AHMED M.N., YAMANY S.M., MOHAMED N., FARAG A.A, MORIARTY T. (2002) A modified fuzzy c-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data //*IEEE Transactions on Medical Imaging.* №3. V21. P. 193-199.
15. BRADLEY E. TREEBY (2013) Modeling nonlinear wave propagation on nonuniform grids using a mapped k-space pseudospectral method// *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control.* № 10, P. 2208–2213.
16. WANG ZHOU, BOVIK, ALAN C., SHEIKH, HAMID R., and SIMONCELLI, EERO P.(2004) Image Qualifty Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. //*IEEE Transactions on Image Processing.* V.13, №4. – З. 600–612.

Надійшла до редакції:13.03.2022

УДК 517.929.2 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.7

А.В.Чайковський[1], *д.ф.-м.н., доц.*
О.А. Лагода[2], *к.ф.-м.н., доц.*

Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4Е,
e-mail: chaikovskiyav@ukr.net
[2] Київський національний університет технологій та дизайну, 01011, м. Київ, вул. Немировича-Данченка 2,
e-mail: oksala@ukr.net

Andrii Chaikovs'kyi[1], *Dr.Sci., Assoc. Prof.*
Oksana Lagoda[2], *Ph.D., Assoc. Prof.*

Bounded solutions of a second order difference equation with jumps of operator coefficient

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4e Glushkova str.,
e-mail: chaikovskiyav@ukr.net
[2]Kyiv National University of Technologies and Design, 01011, Kyiv, 2 Nemyrovycha-Danchenka str.,
e-mail: oksala@ukr.net

В роботі вивчається питання існування единого обмеженого розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Для випадку скінченного числа стрибків операторного коефіцієнта отримано необхідні та достатні умови.

Ключові слова: Різницеве рівняння, обмежений розв'язок, банахів простір .

We study the problem of existence of a unique bounded solution of a difference equation of the second order with a variable operator coefficient in a Banach space. In the case of a finite number of jumps of an operator coefficient necessary and sufficient conditions are obtained.

Key Words: Difference equation, bounded solution, Banach space.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

1 Introduction

Let $(X, ||\cdot||)$ be a complex Banach space, $L(X)$ be the space of linear continuous operators in X, $I \in L(X)$ be the identity operator. Let denote as $\sigma(A)$ the spectrum of an operator $A \in L(X)$. Let denote as $S = \{z \in \mathbf{C} \; ||z| = 1\}$ the unit circle in the complex plane.

Let us consider the difference equation

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n-1} + y_n, \; n \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

where $\{A_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset L(X)$, $\{B_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset L(X)$, $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ are known sequences, $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ is a desired sequence. In the paper we investigate the question of existence and uniqueness of a bounded solution to the equation (1).

It is known [1, chapter 7.6] that the equation (1) of the first order has a unique bounded solution $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ for any bounded sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ iff an operators sequence fulfills a condition of discrete dichotomy (by analogy with an exponential dichotomy which is well known in the theory of differential equations). However, checking of discrete dichotomy conditions is very hard, so we need simpler conditions of existence and uniqueness of a bounded solution for special operators sequences.

I.V.Gonchar and M.F.Gorodnii investigated the equation (1) in the papers [3, 4] for the case of first order and one jump of an operator coefficient.

In the article [5] the equation (1) was investigated in the case of the first order and several jumps.

To formulate main obtained results we need the following spectral decomposition. Assume $A \in L(X)$ and the condition

$$\sigma(A) \cap S = \varnothing$$

is true. Then the spectrum of the operator A is decomposed into two parts, one of them is inside of the unit circle S, the other is outside. Using the theorem about decomposition [2, p. 445], we can derive:

1) an existence of projectors $P_-(A), P_+(A) \in L(X)$ such that

$$P_-(A) + P_+(A) = I;$$

© А.В.Чайковський, О.А. Лагода, 2022

2) decomposition of the space X to the direct sum

$$X = X_-(A)\dot{+}X_+(A), \tag{2}$$

where

$$X_-(A) = P_-(A)X,\ X_+(A) = P_+(A)X$$

are subspaces in which corresponding operators

$$A_- = P_-(A)A,\ A_+ = P_+(A)A$$

have spectra

$$\begin{aligned} \sigma(A_-) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}, \\ \sigma(A_+) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\} \end{aligned} \tag{3}$$

accordingly.

In the paper [4] the following result was proved.

Theorem 1.1. *Let X be a complex Banach space and G, U be some operators from $L(X)$, which satisfy the following conditions:*

1) $\sigma(G) \cap S = \varnothing,\ \sigma(U) \cap S = \varnothing$;

2) $X = X_-(G)\dot{+}X_+(U)$.

Then the difference equation

$$\begin{cases} x_{n+1} = Gx_n + y_n, & n \geqslant 1, \\ x_{n+1} = Ux_n + y_n, & n \leqslant 0, \end{cases}$$

has a unique bounded in X solution $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ for any bounded in X sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

In [5] this result was generalized to the case of a first order equation with several operator jumps

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_0x_n + y_n, & n \leqslant 0, \\ x_{n+1} = A_nx_n + y_n, & 1 \leqslant n \leqslant N-1, \\ x_{n+1} = A_Nx_n + y_n, & n \geqslant N. \end{cases} \tag{4}$$

Assume the conditions $\sigma(A_0) \cap S = \varnothing$, $\sigma(A_N) \cap S = \varnothing$ are true. Then each of the operators A_0, A_N produces spectral decomposition of the form (2). Let us denote

$$P_{0-} := P_-(A_0),\ P_{0+} := P_+(A_0),$$

$$P_{N-} := P_-(A_N),\ P_{N+} := P_+(A_N),$$

$$X_{0-} := X_-(A_0),\ X_{0+} := X_+(A_0),$$

$$X_{N-} := X_-(A_N),\ X_{N+} := X_+(A_N).$$

Theorem 1.2. *Let $\sigma(A_0) \cap S = \varnothing, \sigma(A_N) \cap S = \varnothing$ and $A_{N-1}A_{N-2} \cdot \ldots \cdot A_1$ is injection. Then the equation (5) has a unique bounded solution $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ for any bounded sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ iff*

$$X = W\dot{+}X_{N-},$$

where

$$W = \{A_{N-1}A_{N-2} \cdot \ldots \cdot A_1x \mid x \in X_{0+}\}.$$

In this article we consider a generalization of this result for a second order equation with an operator coefficient which changes a finite number of times:

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_0x_n + B_0x_{n-1} + y_n, & n \leqslant 0, \\ x_{n+1} = A_nx_n + B_nx_{n-1} + y_n, & 1 \leqslant n \leqslant N-1, \\ x_{n+1} = A_Nx_n + B_Nx_{n-1} + y_n, & n \geqslant N. \end{cases} \tag{5}$$

In the paper the result of the theorem 1.2 is generalized to a second order equation (5).

2 Main results

First we rewrite our equation in the space X^2, where norm is defined as

$$||(x_1, x_2)|| = \sqrt{||x_1||^2 + ||x_2||^2}.$$

Lemma 1. *The equation* (5) *has a unique bounded solution $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ for any bounded sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ iff an equation*

$$u_{n+1} = C_nu_n + v_n,\ n \in \mathbf{Z}, \tag{6}$$

where

$$C_n := \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ I & O \end{pmatrix},\ n \in \mathbf{Z},$$

has a unique bounded solution $\{u_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X^2$ for any bounded sequence $\{v_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X^2$.

Proof. Necessity. For any bounded sequence $\{v_n = (v_n^1, v_n^2) \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X^2$ we have system

$$\begin{cases} u_{n+1}^1 = A_nu_n^1 + B_nu_n^2 + v_n^1,\ n \in \mathbf{Z}, \\ u_{n+1}^2 = u_n^1 + v_n^2,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Since equation

$$u_{n+1}^1 = A_nu_n^1 + B_nu_{n-1}^1 + B_nv_{n-1}^2 + v_n^1,\ n \in \mathbf{Z}$$

has a unique bounded solution, so the system has too.

Sufficiency. Let for any bounded sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ put $v_n = (y_n, 0), \ n \in \mathbf{Z}$. Then there is a unique bounded solution $\{u_n = (u_n^1, u_n^2) \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X^2$ of the equation (6) which is equivalent to a system

$$\begin{cases} u_{n+1}^1 = A_n u_n^1 + B_n u_n^2 + y_n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ u_{n+1}^2 = u_n^1, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

So, $\{x_n = u_n^1 \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ is the unique bounded solution of (5). □

Let

$$C_n := \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ I & O \end{pmatrix}, \ n \in \mathbf{Z}.$$

If for some $n \in \mathbf{Z}$ we have $\sigma(C_n) \cap S = \varnothing$, let denote as V_{n+} the subspace of X^2, corresponding to the part of the spectra which is situated outside of S in the spectral decomposition for C_n and V_{n-} the subspace X^2, corresponding to the part of the spectra which is situated inside of S in the spectral decomposition.

Theorem 2.1. *Let*

$$\forall z \in S \ \exists (zA_0 - z^2 I + B_0)^{-1} \in L(X),$$

$$\exists (zA_N - z^2 I + B_N)^{-1} \in L(X)$$

and

$$Ker(C_{N-1}C_{N-2} \cdot ... \cdot C_1) \cap V_{0+} = \{\vec{0}\}.$$

Then the equation (5) has a unique bounded solution $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ for any bounded sequence $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ iff

$$X^2 = W \dot{+} V_{N-},$$

where

$$W = \{C_{N-1}C_{N-2} \cdot ... \cdot C_1 x \mid x \in V_{0+}\}.$$

Proof. Using multiplication directly, it is not difficult to be ensured that the resolvents of the operators C_0, C_N in some neighbourhood U of the unit circle S look like

$$R_z(C_n) = \begin{pmatrix} zF_n(z) & zF_n(z)(zI - A_n) + I \\ F_n(z) & zF_n(z)(zI - A_n) \end{pmatrix},$$

$$z \in U, \ n \in \{0, N\}, \tag{7}$$

where the operators

$$F_n(z) = (zA_n - z^2 I + B_n)^{-1}, \ z \in U, \ n \in \{0, N\}$$

exist because they exist on the unit circle and a resolvent set is open.

Therefore, the spectra of the operators C_0, C_N do not intersect the unit circle, particularly the subspaces V_{N-}, V_{0+} are defined.

Corresponding to the lemma, let consider the equation (6). We can apply the theorem 1.2. Besides injection, all the demands of the theorem are satisfied. However, according to the proof of this theorem in the article [5], we can note that injection was used only for the proof of the lemma 3 and exceptionally for the restriction of the operator $C_{N-1}C_{N-2} \cdot ... \cdot C_1$ on the set V_{0+}. But such a simplified weakened condition is following from the condition of the theorem. □

3 Partial cases

1. Let apply the theorem 2.1 in the case when $B_n = O, \ n \in \mathbf{Z}$.

The condition of the existence of the inverse operators is equivalent to $\sigma(A_0) \cap S = \varnothing, \sigma(A_N) \cap S = \varnothing$. In this case

$$V_{n+} = \{(u, v) \mid u \in X_{n+}, \ v \in X\},$$

$$V_{n-} = \{(u, \vec{0}) \mid u \in X_{n-}\}, \ n = 0, N.$$

Really,

$$C_n^k = \begin{pmatrix} A_n & O \\ I & O \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_n^k & O \\ A_n^{k-1} & O \end{pmatrix}, \ k \in \mathbf{N},$$

therefore,

$$||C_n^k(u, v)|| = ||(A_n^k u, A_n^{k-1} u)|| =$$

$$= \sqrt{||A_{n+}^k u||^2 + ||A_{n+}^{k-1} u||^2} \to +\infty, \ u \in X_{n+} \backslash \{\vec{0}\},$$

$$||C_n^k(u, \vec{0})|| = ||(A_n^k u, A_n^{n-k} u)|| =$$

$$= \sqrt{||A_{n-}^k u||^2 + ||A_{n-}^{n-k} u||^2} \to 0, \ u \in X_{n-}.$$

The condition $Ker(C_{N-1}C_{N-2} \cdot ... \cdot C_1) \cap V_{0+} = \{\vec{0}\}$ means that the kernel of the operator

$$C_{N-1}C_{N-2} \cdot ... \cdot C_1 = \begin{pmatrix} A_{N-1}A_{N-2} \cdot ... \cdot A_1 & O \\ A_{N-2} \cdot ... \cdot A_1 & O \end{pmatrix}$$

does not include the elements from the set $\{(u, v) \mid u \in X_{0+}, \ v \in X\}$, in other words

$$Ker(A_{N-1}A_{N-2} \cdot ... \cdot A_1) \cap X_{0+} = \{\vec{0}\}.$$

Eventually, the condition of a decomposition in a direct sum will look

$$\forall (x_1,x_2)\in X^2 \quad \exists!(w_1,w_2)\in W \quad \exists! v\in X_{N-} \ :$$

$$(x_1,x_2)=(w_1+v,w_2).$$

Here the operator $C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1$ is the injection on V_{0+}, that is why the condition can be rewrited as

$$\forall (x_1,x_2)\in X^2 \ \ \exists! u_1\in X_{0+} \ \ \exists! u_2\in X \exists! v\in X_{N-} \ :$$

$$(x_1,x_2)=(A_{N-1}A_{N-2}\cdot\ldots\cdot A_1u_1+v,u_2).$$

Summary, the next statement is true.

Corollary 1. *Let* $B_0=\ldots=B_N=O$, $\sigma(A_0)\cap S=\varnothing, \sigma(A_N)\cap S=\varnothing$ *and*

$$Ker(A_{N-1}A_{N-2}\cdot\ldots\cdot A_1)\cap X_{0+}=\{\vec{0}\}.$$

Then the equation (5) has a unique bounded solution $\{x_n \mid n\in\mathbf{Z}\}\subset X$ *for any bounded sequence* $\{y_n \mid n\in\mathbf{Z}\}\subset X$ *iff*

$$\forall x\in X \quad \exists! u\in X_{0+} \quad \exists! v\in X_{N-} \ :$$

$$x=A_{N-1}A_{N-2}\cdot\ldots\cdot A_1u+v.$$

This statement is some improvement of the result of the theorem 1.2 in the partial case which is considering.

2. Let apply the theorem 2.1 in the case when $A_n=O,\ n\in\mathbf{Z}$.

The condition of the existence of the inverse operators is equivalent to the condition

$$\sigma(B_0)\cap S=\varnothing, \sigma(B_N)\cap S=\varnothing.$$

Here

$$V_{n+}=X_+(B_n),\ V_{n-}=X_-(B_n),\ n=0,N.$$

Дійсно,

$$C_n^{2k}=\begin{pmatrix} O & B_n \\ I & O\end{pmatrix}^{2k}=\begin{pmatrix} B_n & O \\ O & B_n\end{pmatrix}^{k}=$$

$$=\begin{pmatrix} B_n^k & O \\ O & B_n^k\end{pmatrix}, \quad k\in\mathbf{N},$$

therefore

$$||C_n^{2k}(u,v)||=||(B_n^ku,B_n^kv)||=$$

$$=\sqrt{||B_{n+}^ku||^2+||B_{n+}^kv||^2}\to+\infty,$$

$$u,v\in X_{n+}\backslash\{\vec{0}\},$$

$$||C_n^{2k}(u,v)||=||(B_n^ku,B_n^kv)||=$$

$$=\sqrt{||B_{n-}^ku||^2+||B_{n-}^kv||^2}\to 0,\ u,v\in X_{n-}.$$

Note that

$$C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1=$$

$$=\begin{pmatrix} B_{2k}B_{2k-2}\cdot\ldots\cdot B_2 & O \\ O & B_{2k-1}B_{2k-3}\cdot\ldots\cdot B_1\end{pmatrix}$$

when $N=2k+1,\ k\in\mathbf{N}$, i

$$C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1=$$

$$=\begin{pmatrix} O & B_{2k-1}\cdot\ldots\cdot B_1 \\ B_{2k-2}B_{2k-4}\cdot\ldots\cdot B_2 & O\end{pmatrix}$$

when $N=2k,\ k\in\mathbf{N}$.

Therefore, the condition

$$Ker(C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1)\cap V_{0+}=\{\vec{0}\}$$

means that the kernels of the operators

$$B_{N-1}\cdot B_{N-3}\cdot\ldots\cdot B_{N+1-2[N/2]},$$

$$B_{N-2}\cdot B_{N-4}\cdot\ldots\cdot B_{N-2[(N-1)/2]}$$

do not include the nontrivial elements of X_{0+}.

Eventually, the condition of decomposition in a direct sum will look

$$\forall (x_1,x_2)\in X^2 \ \exists!(w_1,w_2)\in W \ \exists!(v_1,v_2)\in X_{N-} \ :$$

$$(x_1,x_2)=(w_1+v_1,w_2+v_2),$$

or equivalently

$$\forall x\in X^2 \ \ \exists! w=C_1u,\ u\in X_{0+}^2 \ \ \exists! v\in X_{N-}^2 \ :$$

$$x=C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1u+v.$$

Here the operator $C_{N-1}C_{N-2}\cdot\ldots\cdot C_1$ is injection on V_{0+}, that is why the condition can be rewrited as a union of two conditions

$$\forall x\in X^2 \ \ \exists! u\in X_{0+} \ \ \exists! v\in X_{N-} \ :$$

$$x=B_{N-1},B_{N-2}\cdot\ldots\cdot B_{N+1-2[N/2]}u+v,$$

$$\forall x\in X^2 \ \ \exists! u\in X_{0+} \ \ \exists! v\in X_{N-} \ :$$

$$x=B_{N-2}\cdot\ldots\cdot B_{N-2[(N-1)/2]}u+v.$$

So, such a statement appears to be true:

Corollary 2. *Let* $A_0 = ... = A_N = O$, $\sigma(B_0) \cap S = \varnothing, \sigma(B_N) \cap S = \varnothing$ *and*

$$Ker(B_{N-1} \cdot B_{N-3} \cdot ... \cdot B_{N+1-2[N/2]}) \cap X_{0+} = \{\vec{0}\},$$

$$Ker(B_{N-2} \cdot B_{N-4} \cdot ... \cdot B_{N-2[(N-1)/2]}) \cap X_{0+} = \{\vec{0}\}.$$

*Then the equation (*5*) has a unique bounded solution* $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ *for any bounded sequence* $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ *iff*

$$\forall x \in X^2 \quad \exists! u \in X_{0+} \quad \exists! v \in X_{N-} \quad :$$

$$x = B_{N-1} \cdot B_{N-3} \cdot ... \cdot B_{N+1-2[N/2]} u + v,$$

and

$$\forall x \in X^2 \quad \exists! u \in X_{0+} \quad \exists! v \in X_{N-} \quad :$$

$$x = B_{N-2} \cdot B_{N-4} \cdot ... \cdot B_{N-2[(N-1)/2]} u + v.$$

Список використаних джерел

1. *Хенрі Д.* Геометрична теорія напівлінійних параболічних рівнянь/ Д. Хенрі — Москва: Мир, 1985. — 376 с.

2. *Рісс Ф.* Лекції з функціонального аналізу [вид. 2-е, переробл. і доп.] / Ф.Рісс, Б.Секефальві-Надь — Москва: Мир, 1979. — 592 с.

3. Гончар І.В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2016. № 2. С. 25-28.

4. Городній М.Ф., Гончар І.В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом. *Доповіді НАН України.* 2016. № 12. С. 12-16.

5. Чайковський А.В., Лагода О.А. Обмежені розв'язки різницевого рівняння зі скінченною кількістю стрибків операторного коефіцієнта. *Карпатські математичні публікації.* 2020. № 1. С.165-172.

References

1. HENRY, D. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Berlin: Springer.

2. RISS F.and SEKEFAL'VI NAD' (1996) *Lectures on functional analysis.* Moscow: Mir.

3. GONCHAR, I. (2016) On the bounded solutions of a difference equation with a jump of an operator coefficient. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* 2. p.25-28.

4. GORODNII, M. & GONCHAR, I.(2016) On the bounded solutions of a difference equation with variable operator coefficient. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine* 12. p.12-16.

5. CHAIKOVS'KYI, A. & LAGODA, O.(2020) Bounded solutions of a difference equation with finite number of jumps of operator coefficient. *Carpathian Mathematical Publications* 12(1). p.165-172.

Надійшла до редколегії 29.01.2022

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.8

Герасимюк Ю.С. [1], студ.,
Розора І.В.[2], д.ф.-м.н., доц.
Пашко А.О.[3], д.ф.-м.н., проф.

Про оцінку ймовірності переповнення буферу для мереж зв'язку

[1,2,3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: [1]yulyagerakyiv@gmail.com, [2]irozora@knu.ua, [3]aapashko@gmail.com

Herasymiuk Y.S. [1], stud.,
Rozora I.V.[2], D.Sci., Associate Prof.
Pashko A.O.[3], D.Sci., Prof.

On probability estimation of buffer overflow for communication networks

[1,2,3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: [1]yulyagerakyiv@gmail.com, [2]irozora@knu.ua, [3]aapashko@gmail.com

У даній статті досліджується трафік у телекомунікаційних мережах, ймовірність переповнення буфера трафіку. Для цього у роботі проаналізовано процеси у телекомунікаційних мережах, зокрема залежності трафіку; проведено дослідження можливостей представлення реальних процесів у вигляді випадкових процесів на основі використання статистичного імітаційного моделювання; підібрано та проаналізовано необхідні математичні, статистичні моделі; програмно реалізовано дані моделі за допомогою середовища Matlab; побудовано необхідні графіки для порівняння отриманих даних; проведено аналіз отриманих моделей.

Ключові слова: випадковий процес, гауссівський процес, дробовий броунівський рух, індекс Хюрста, оцінка ймовірності, самоподібний трафік, статичне імітаційне моделювання, телекомунікаційний трафік

In recent years, a large number of research of telecommunications traffic have been conducted. It was found that traffic has a number of specific properties that distinguish it from ordinary traffic. Namely: it has the properties of self-similarity, multifractality, long-term dependence and distribution of the amount of load coming from one source.

At present, many other models of traffic with self-similarity properties and so on have been built in other researched works on this topic. Such models are investigated in this paper, which considers traffic in telecommunications networks, the probability of overflow traffic buffer. Statistical models are built to analyze traffic in telecommunications networks, in particular to research the probability of buffer overflow for communication networks.

The article presents the results of the analysis of processes in telecommunication networks, in particular traffic; research of possibilities of representation of real processes in the form of random processes on the basis of use of statistical simulation model; the necessary mathematical and statistical models are selected and analyzed; software-implemented models using the Matlab environment; visual graphs for comparison of the received data are given; the analysis of the received models is carried out.

Keywords—Gaussian process, fractional Brownian motion, Hurst index, probability estimation, random process, self-similar traffic, statistical simulation modeling, telecommunication traffic

© Ю.С.Герасимюк, І.В. Розора, 2022

Вступ

За останні роки проведено велику кількість досліджень трафіку телекомунікаційних систем. Було виявлено, що трафік має ряд специфічних властивостей, які відрізняють його від звичайного трафіку. А саме: властивості самоподібності, мультифрактальності, тривалої залежності та розподілу величини навантаження, що надходить від одного джерела.

Наразі в інших досліджених роботах з даної тематики вже було побудовано чимало моделей трафіку, які мали задані властивості самоподібності тощо. У роботі досліджуються такі моделі, методи моделювання трафіку та його перевантаження. Отримано оцінки ймовірності перевищення буфера самоподібного трафіку.

Об'єктом дослідження даної статті є трафік у телекомунікаційних мережах, предметом – ймовірність переповнення буфера такого трафіку.

Метою даної роботи є побудова статистичних моделей для аналізу трафіку у телекомунікаційних мережах, зокрема для дослідження ймовірності переповнення буферу для мереж зв'язку.

Основна частина

Розглянемо тепер детальніше дробовий броунівський рух, використовуючи наступні математичні позначення. Нехай (Ω, B, P) – стандартний імовірнісний простір. Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссівський процес $B_\alpha(t), t \in [0,1]$, якщо $B_\alpha(0)=0$, $EB_\alpha(t)=0$ і він має наступну функцію кореляції

$$R_\alpha(t,s)=\frac{1}{2}\left(|t|^{2\alpha}+|s|^{2\alpha}-|t-s|^{2\alpha}\right)$$

При α = 1/2 маємо стандартний вінерівський процес.

Далі введемо деякі позначення. Нехай $A(t)$ це буде обсяг трафіку, який надходить у мережу за певний проміжок часу $[0,T]$. Приріст позначимо як $A(s,t)=A(t)-A(s), \quad t>s>0$. Використовуючи введені позначення, зобразимо вхідний трафік у наступному вигляді $A(t)=mt+\sqrt{am}B_\alpha(t)$, де m – середня швидкість трафіку, $B_\alpha(t)$ – ДБР з індексом Хюрста $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, a – деяка константа.

Так, якщо в мережі є один пристрій зі швидкістю обслуговування $C>m$, процес завантаження визначається за формулою $Q(t) \cong \sup_{s\le t}(A(s,t)-C(t-s))$. Враховуючи n незалежних ідентично завантажених пристроїв отримуємо $Q_n(t) \cong \sup_{s\le t}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i(s,t)-nC(t-s)\right)$, де символ $\cong$ означає ідентично розподілену кількість.

Тепер перейдемо до дослідження ймовірності перевантаження з порогом b для $Q(t)$ на деякому інтервалі часу $[0,T]$. Будемо використовувати далі такі позначення $Q \cong \sup_{t\in[0,T]}(Q(t))$, $\pi(b)=P\{Q \ge b\}$.

Для знаходження верхньої оцінки ймовірності перевантаження

$P\{Q \ge b\} \le P\left\{\sup_{t\in[0,T]}(Q(t))>b\right\}$ виконаємо наступне

$$Q(t) \cong \sup_{s\le t}(A(s,t)-C(t-s))=$$
$$=\sup_{s\le t}\left(\sqrt{am}(B_\alpha(t)-B_\alpha(s))-(C-m)(t-s)\right)\le$$
$$\le 2\sqrt{am}(|B_\alpha(t)|)-(C-m)t.$$
$$Q \cong \sup_{t\in[0,T]}(Q(t))=\sup_{t\in[0,T]}\left(2\sqrt{am}(|B_\alpha(t)|)-(C-m)t\right)=$$
$$=2\sqrt{am}\sup_{t\in[0,T]}(|B_\alpha(t)|)-T(C-m).$$

Тоді отримаємо

$$P\{Q \ge b\} \le P\left\{\sup_{t\in[0,T]}(|B_\alpha(t)|)>\frac{b+T(C-m)}{2\sqrt{am}}\right\}$$

Покладемо

$$x=\frac{b+T(C-m)}{2\sqrt{am}} \qquad (1)$$

Таким чином виконується наступна теорема (Теорема 1):

Для $x \ge D$ маємо

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]}(|B_\alpha(t)|)>x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{(x-D)^2}{2A}\right\},$$ де

$D=\sqrt{2}(T)$ і $A=\frac{\gamma}{1-p}+\frac{p\beta^2}{(1-p)^2}$

Тоді, якщо виконується умова (1), дана теорема справедлива.

Наведемо ще одну теорему (Теорема 2):

Якщо $x \ge D$, то маємо

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]}(|B_\alpha(t)|)>x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{(x-D)^2}{2V}\right\},$$

де $D=\sqrt{2}\left(T^{\alpha}\ln^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{\alpha}}+1)+4\int\limits_{0}^{\frac{T^{\alpha}}{4}}\ln^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{u^{\frac{1}{\alpha}}}+1\right)du\right)$,

та $V=4T^{2\alpha}$.

Використовуючи отримані оцінки, можемо визначити, яким має бути поріг, щоб ймовірність перевищення була меншою за задану.

Таким чином, $P\left\{\sup\limits_{t\in[0,T]}\left(\left|B_{\alpha}(t)\right|\right)>x\right\}\le\varepsilon_b$, якщо $x\ge D$ і $2\exp\left\{-\frac{(x-D)^2}{2V}\right\}\le\varepsilon_b$.

І поріг має бути $b\ge 2D\sqrt{am}-T(C-m)$.

У разі передачі сигналу в деякій системі слід враховувати не тільки процес введення, а й реакцію системи. Для цих цілей можна використати розподіл супремум квадратно-гауссових процесів.

Розглянемо інваріантну в часі лінійну систему з інтегрованою в квадраті функцією імпульсної характеристики $H(\tau)$, яка визначена в кінцевій області $\tau\in[0,\mathrm{T}]$. Це означає, що реакція системи на вхідний сигнал $X(\mathrm{t})$, який спостерігається на проміжку $[-\mathrm{T},\mathrm{T}]$, має такий вигляд

$$Y(\mathrm{t})=\int\limits_{0}^{T}H(\tau)\,\mathrm{X}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau,\quad t\in[0,\mathrm{T}] \qquad (2)$$

та $H\in L_2([0,\mathrm{T}])$.

Дробовий броунівський рух можна зобразити у вигляді випадкового ряду

$$B_{\alpha}(t)=X_{\alpha}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sin(x_k t)X_k+b_k\left(1-\cos(y_k t)\right)Y_k\right)$$

(3), де $\{X_k,Y_k\}$- незалежні стандартні гауссові випадкові величини,

$\{x_k\}$- нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,

$\{y_k\}$- нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k=\frac{\pi^{\alpha}\sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1}J_{1-\alpha}(x_k)},\qquad b_k=\frac{\pi^{\alpha}\sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1}J_{-\alpha}(y_k)},$$

$$C=\frac{\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Для обчислення нулів функцій Бесселя можна використати наступне зображення.

$$x_n=\left(n+\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\pi-\frac{4\alpha^2-1}{2\pi(4n+3-2\alpha)}+\ldots$$

$$y_n=\left(n+\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\pi-\frac{4(1-\alpha)^2-1}{2\pi(4n+1+2\alpha)}+\ldots. \qquad (4)$$

А для обчислення функцій Бесселя можна використати таке зображення.

$$J^2_{1-\alpha}(x_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi x_n}}\left(\cos\left(x_n+\frac{2\alpha\pi-\pi}{4}\right)-\frac{4\alpha^2-1}{8x_n}\sin\left(x_n+\frac{2\alpha\pi-\pi}{4}\right)\right),$$

$$J^2_{-\alpha}(y_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi y_n}}\left(\cos\left(y_n+\frac{2(1-\alpha)\pi-\pi}{4}\right)-\frac{4(1-\alpha)^2-1}{8y_n}\sin\left(y_n+\frac{2(1-\alpha)\pi-\pi}{4}\right)\right). \qquad (5)$$

Припустимо, що функція імпульсної характеристики відома. Ми також припускаємо, що вхідним сигналом у системі є ДБР із індексом Хюрста α. З цього випливає, що вихід системи можна $Y(\mathrm{t})$ представити у вигляді $Y(t)=Y_{\alpha}(\mathrm{t})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\xi_k\cdot\mathrm{c}_k(t)+\eta_k\cdot\mathrm{s}_k(t))$, де функції $c_k(\mathrm{t}),\ \mathrm{s}_k(\mathrm{t})$ рівні

$$\mathrm{c}_k(\mathrm{t})=b_k\int\limits_{0}^{T}H(\tau)(1-\cos(\mathrm{y}_k(\mathrm{t}-\tau)))\,\mathrm{d}\,\tau,$$

$$s_k(\mathrm{t})=a_k\int\limits_{0}^{T}H(\tau)\sin(\mathrm{x}_k(\mathrm{t}-\tau))\,\mathrm{d}\,\tau. \qquad (6)$$

Так, наприклад, для $H(\tau)=1$ функції $c_k(\mathrm{t}),\ \mathrm{s}_k(\mathrm{t})$ дорівнюють

$$s_k(t)=\frac{2a_k}{x_k}\sin\left(x_k t-\frac{x_k T}{2}\right)\sin\left(\frac{x_k T}{2}\right)$$

$$c_k(t)=b_k T-\frac{2b_k}{y_k}\cos\left(y_k t-\frac{y_k T}{2}\right)\sin\left(\frac{y_k T}{2}\right). \quad (7)$$

Розглянемо перевантаження системи вхідним сигналом ДБР $X(\mathrm{t})$ з урахуванням реакції системи (вихідного процесу). Для отримання таких результатів ми використовуємо теорію квадратно-гауссових випадкових величин і процесів. Іноді вхідний процес невідомий, і можна побудувати модель процесу, а потім оцінити ймовірність переповнення.

Позначимо

$$\phi^1_{kl}=\phi^1_{kl}(\mathrm{t})=\mathrm{b}_k\,a_l(1-\cos(\mathrm{y}_k\,t))(1-\cos(\mathrm{y}_l\,t))+c_k(\mathrm{t})\,\mathrm{c}_l(\mathrm{t});$$

$$\phi^2_{kl}=\phi^2_{kl}(\mathrm{t})=2(\mathrm{b}_k\,a_l(1-\cos(\mathrm{y}_k\,t))\sin(\mathrm{x}_l\,t)+c_k(\mathrm{t})\,\mathrm{s}_l(\mathrm{t}));$$

$$\phi^3_{kl}=\phi^3_{kl}(\mathrm{t})=a_k a_l\sin(\mathrm{x}_k\,t)\sin(\mathrm{x}_l\,t)+s_k(\mathrm{t})\,\mathrm{s}_l(\mathrm{t}).$$

Тоді маємо, що процес $\xi(t)$ можна записати у такому вигляді

$$\xi\ (\mathrm{t})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(\phi^1_{kl}(\mathrm{t})\xi_k\xi_l+\phi^2_{kl}(\mathrm{t})\xi_k\eta_l+\phi^3_{kl}(\mathrm{t})\eta_k\eta_l).$$

Позначимо прирости функцій наступним чином

$$\Delta\phi_{kl}^{1} = \phi_{kl}^{1}(t) - \phi_{kl}^{1}(s);\ \ \Delta\phi_{kl}^{2} = \phi_{kl}^{2}(t) - \phi_{kl}^{2}(s);$$

$$\Delta\phi_{kl}^{3} = \phi_{kl}^{3}(t) - \phi_{kl}^{3}(s).$$

Для виконання основного результату ми спочатку представляємо допоміжні співвідношення щодо середнього, дисперсії та дисперсії приростів для процесу $\xi(t)$.

Наведемо наступну лему.

Лема 1.

$$E\xi\ (t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_{kk}^{1}(t) + \phi_{kk}^{3}(t));$$

$$D\xi\ (t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(2(\phi_{kl}^{1}(t))^2 + (\phi_{kl}^{2}(t))^2 + 2(\phi_{kl}^{3}(t))^2\right);$$

$$D(\xi(t) - \xi(s)) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(2(\Delta\phi_{kl}^{1})^2 + (\Delta\phi_{kl}^{2})^2 + 2(\Delta\phi_{kl}^{3})^2\right).$$

Наступна теорема дає верхню оцінку переповнення буфера системи з урахуванням вхідного та вихідного процесу з рівними ваговими показниками.

Теорема 4. Припустимо, що вхідним процесом системи є ДБР $X_\alpha(t)$. Якщо $x_0 > \dfrac{2\sqrt{2}\max\{\delta_0, K(T/2)^{\beta}\}}{\beta}$, тоді виходить наступна нерівність

$$P\{Q > b\} < 4e^{\frac{3}{\beta}} \exp\left\{-\frac{x_0}{2\sqrt{2}\delta_0}\right\}\left(\frac{x\beta}{2\sqrt{2}\delta_0}\right)^{2/\beta}\left(1 + \frac{2x_0}{\sqrt{2}\delta_0}\right)^{1/2}.$$

Результати статистичного моделювання (обчислювального експерименту)

Як результати обчислювальних експериментів наведемо декілька різних програмних реалізацій моделювань для функцій Бесселя, дробово броунівського руху, індекса Хюрста.

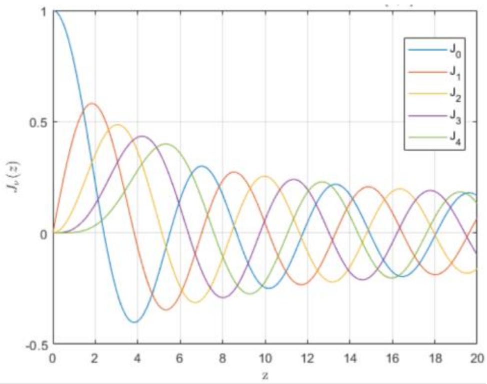


Рис. 1 – Вигляд функцій Бесселя

Спочатку розглянемо вигляд графіків функцій Бесселя (4),(5) першого роду для вхідних параметрів 0, 1, 2, 3, та 4, побудованих за допомогою середовища Matlab (див. рис.1).

На рис.2 та рис.3 приведені результати побудови графіків для (6) і (7), наприклад, при заданих параметрах a = 1; b = 1; T = 10 функції $c_k(t)$, $s_k(t)$ мають такий вигляд на відрізку [-1,1].

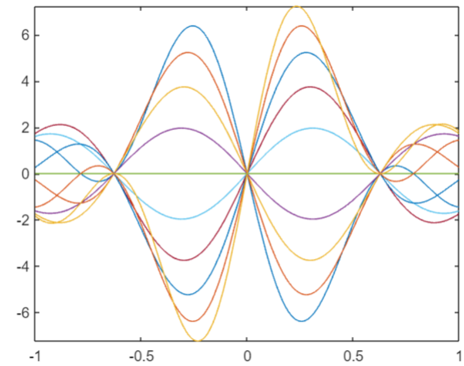


Рис. 2 – Вигляд функції $s_k(t)$

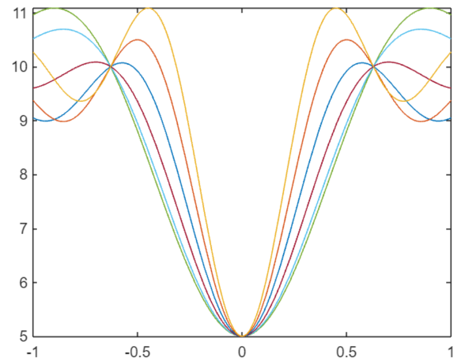


Рис. 3 – Вигляд функції $C_k(t)$

Далі наведемо результати експериментів з дробовим броунівським рухом з різними індексами Хюрста.

Відповідно до значення параметра Хюрста (α), ДБР виявляє для далеку залежність і для коротку або проміжну залежність. Продемонструємо кожний із цих двох випадків на графіках.

Як можна побачити на рис.4 на рис.5, чим вище параметр Хюрста, тим плавнішою буде крива.

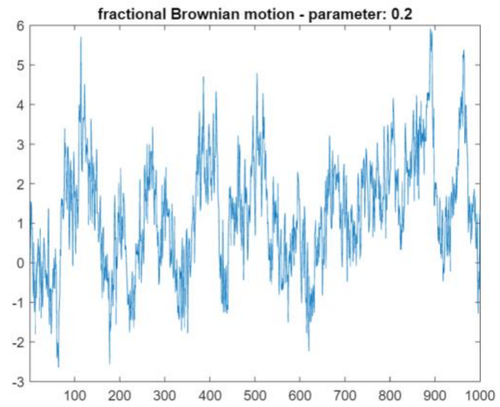


Рис. 4 – Графік ДБР з індексом Хюрста 0.2

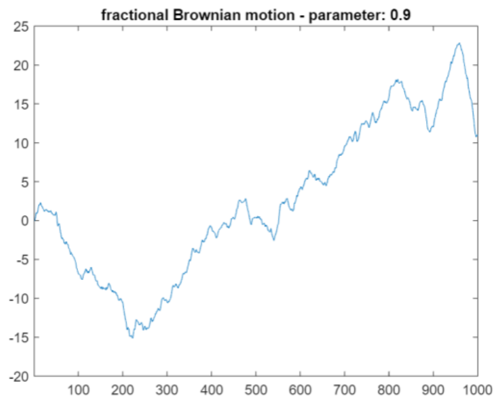


Рис. 5 – Графік ДБР з індексом Хюрста 0.9

Як уже згадувалося раніше, при $\alpha = 1/2$ маємо стандартний вінерівський процес – рис.6.

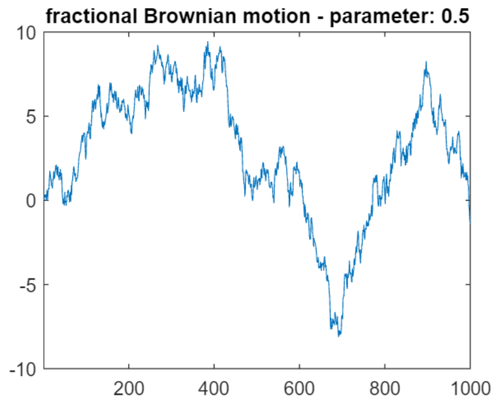


Рис.6 – Графік процесу з індексом Хюрста 0.5

Розглянемо залежності верхньої межі переповнення буферу на практичних розрахунках та побудовах. Скористаємося для цього наступними позначеннями m – середня швидкість трафіку, C – швидкість обслуговування (необхідно, щоб C>m), α – індекс Хюрста, T – часовий період, на якому розглядається процес обслуговування, a – деякий коефіцієнт трафіку, ймовірність переповнення буферу менше за задану ε_b.

Використовуючи Теорему 2 та підставляючи наступні значення у вище описані параметри: $\varepsilon_b = 0.05$; C = 100; m = 90; a = 1; T = 1; $\alpha = 0.9$, отримаємо наступну оцінку верхньої межі b >= 62,6. А для $\varepsilon_b = 0.05$; C = 100; m = 90; a = 1; T = 1; $\alpha = 0.2$ поріг буде b >= 131.2.

Так, якщо задати $\alpha = 0.7$, маємо верхню межу b >= >= 69,8, а для $\alpha = 0.3$ буде b >= 106.

Таким чином, змінюючи значення індексу Хюрста α як вхідного параметра (та не змінюючи значення швидкості обслуговування C та середньої швидкості надходження трафіку m), маємо наступну залежність, зображену на рис.7.

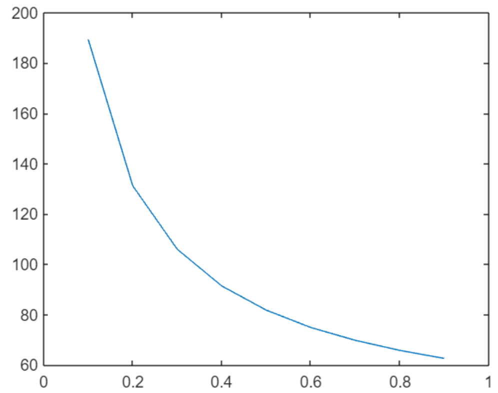


Рис. 7 – Залежність порогу від індексу Хюрста

Висновки

У даній роботі було поставлено та вирішено наступні задачі: проаналізовано процеси у телекомунікаційних мережах, зокрема залежності трафіку; проведено дослідження можливостей представлення реальних процесів у вигляді випадкових процесів на основі використання статистичного імітаційного моделювання; підібрано та проаналізовано необхідні математичні, статистичні моделі; програмно реалізовано дані моделі за допомогою середовища Matlab; побудовано необхідні графіки для порівняння отриманих даних; проведено аналіз отриманих моделей.

Список використаних джерел

1. *Пашко А.О.* Аналіз точності моделювання дробового броунівського руху в рівномірній метриці / А.О. Пашко, ., І.В.Розора // Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. –2018.– №1.– С.60-65.
2. *Gautam N.* Stochastic Models in Telecommunications for Optimal Design, Control and Performance Evaluation, chapter 7.– Handbook of Statistics.–2003.– Elsevier, Vol. 21.– P. 243-284. https://doi.org/10.1016/S0169-7161(03)21009-9.
3. *Nomos I.* On the Use of Fractional Brownian Motion in the Theory of Connectionless Networks / IEEE journal on selected areas in communications.-1995.–vol. 13, No. 6.–P. 953-962.
4. *Pashko A.,* Estimation of the Probability of Buffer overflow for self-similar Traffic /A. Pashko, I.Rozora // 2021 IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology, PIC S and T 2021.–2021.– P.28-32.
5. *Козаченко Ю.В* Моделювання дробового броунівського руху у просторі Lp([0, T]) / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко, О.І.Василик// Теорія ймовірностей та математична статистика.–2017.– Вип. 97.–С.97-108.
6. *Dieker T.* Simulation of fractional Brownian motion. Master thesis, University of Twente, Amsterdam. – 2004. http://www.columbia.edu/~ad3217//fbm/thesis.pdf
7. *Воропаєва В.Я.,* Теорія телетрафіку: навч. посіб. /В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб, В.В.Турупалов// Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ».–2011. – 202 с.
8. *Документація MATLAB* [Електронний ресурс] / https://ch.mathworks.com/help

References

1. PASHKO A., ROZORA I. (2018) Analysis of the accuracy of fractional Brownian motion modeling in a uniform metric / *Bulletin of the Taras Shevchenko National University. Series Physics and Mathematics*, vol. 1, pp. 60-65.
2. GAUTAM. N. (2003) *Stochastic Models in Telecommunications for Optimal Design, Control and Performance Evaluation , chapter 7*, Handbook of Statistics, Elsevier, Vol. 21., p. 243-284. https://doi.org/10.1016/S0169-7161(03)21009-9.
3. NOMOS I. (1995). On the Use of Fractional Brownian Motion in the Theory of Connectionless Networks / *IEEE journal on selected areas in communications*, Vol. 13, No. 6, p.953-962.
4. PASHKO A., ROZORA I. (2021) Estimation of the Probability of Buffer overflow for self-similar Traffic / 2021 IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology, PIC S and T 2021.–2021.– P.28-32.
5. KOZACHENKO YU., PASHKO A., VASILYK O. (2017) Modeling of fractional Brownian motion in space Lp ([0, T]) / *Probability theory and mathematical statistics*, Vol. 97, p.97-108.
6. DIEKER T. (2004). Simulation of fractional Brownian motion. Master thesis, University of Twente, Amsterdam. http://www.columbia.edu/~ad3217//fbm/thesis.pdf
7. VOROPAEVA V., BESSARAB V., TURUPALOV V. (2011). *Theory of teletraffic: textbook.* Donetsk: DonNTU, 202 p.
8. MATLAB Documentation [Electronic resource] / https://ch.mathworks.com/help

Надійшла до редакції 15.01.2022

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.9
УДК 004.4, 004.6, 004.942, 004.021: 519.6, 616.12

М. Ковальчук[1], студент
В. Харченко[1], студентка
А. Яворський[1], аспірант
І. Бєда[1], аспірант
Т. Панченко[1], доцент

Класифікація ЕКГ сигналів методами машинного навчання

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 03022, м.Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Д, 03022
e-mail: taras.panchenko@gmail.com

M. Kovalchuk[1], student
V. Kharchenko[1], student
A. Yavorskyi[1], PhD student
I. Bieda[1], PhD student
T. Panchenko[1], PhD, Associate Professor

ECG signal classification using machine learning techniques

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4D, Academician Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03022
e-mail: taras.panchenko@gmail.com

Важливість аналізу електрокардіограм (ЕКГ) важко переоцінити. Ритм життя, стреси та інші фактори впливають на частоту захворювань та їх ранні прояви. Разом з тим, технологізація (цифровізація) життя та апаратно-програмних комплекси, такі як мобільні електронні кардіографи та носимі пристрої загалом, що бурхливо розвиваються останнім часом, відкривають нові можливості для швидкого аналізу стану людини за певними показниками, а також дозволяють проводити діагностику на новому рівні практично у реальному часі.

Існує багато методів для аналізу кардіограм. В даній роботі авторами запропоновано новий підхід, що ефективно розв'язує задачу аналізу ЕКГ. Дослідження базується на наборі даних PhysioNet Computing in Cardiology Challenge 2017 та MIT-BIH Arrhythmia Database. Алгоритм складається з таких етапів: фільтрація даних, локалізація R піків, передискретизація ЕКГ, визначення класу ЕКГ за допомогою ансамблю з 1D CNN та підсумкового класифікатора.

Запропонований метод показує високу точність за метрикою F_1, тому являє собою цінність для подальших досліджень, оптимізації та впровадження.

Ключові слова: електрокардіограма, ЕКГ, класифікація ЕКГ, одновимірні згорткові нейронні мережі, 1D CNN.

The importance of electrocardiogram (ECG) analysis is difficult to overestimate. Rhythm of life, stress and other factors affect the frequency of diseases and their early appearance. At the same time, the technologization (digitalization) of life and hardware-software complexes, such as mobile electronic cardiographs and wearable devices in general, which are rapidly developing, open new opportunities for rapid analysis of human state by certain indicators, as well as allow to diagnose on the new higher level in almost real time.

There are many methods for analyzing cardiograms. In this paper, the authors propose a new approach based on an ensemble of individual classifiers, which effectively solves the problem of ECG analysis. The study is based on the PhysioNet Computing in Cardiology Challenge 2017 and the MIT-BIH Arrhythmia Database. The algorithm consists of the following stages: data filtering using moving average and Butterworth filters, R-peak localization via threshold and grouping method, ECG resampling for the better comparability, "Noisy" vs "NotNoisy" classification as the most hard-to-identify class, final classification as "Normal", "Atrial Fibrillation", "Other" using an ensemble of 1D CNN classifiers and a final classifier of selection using logistic regression, random forest or support vector machine (SVM).

The proposed method shows high accuracy by the metric F_1, so it gives the background for further research, optimization and implementation. This way this algorithm could help to save human's life by in-time detection of problems with cardiovascular system (CVS) at early stage.

Keywords: electrocardiogram, ECG, ECG classification, one-dimensional convolutional neural networks, 1D CNN.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

© М. Ковальчук, В. Харченко, А. Яворський, І. Бєда, Т. Панченко, 2022

Вступ

За статистикою Всесвітньої організації охорони здоров'я великий відсоток захворювань людей пов'язаний із серцево-судинною системою. Велику кількість проблем та ускладнень можна запобігти з допомогою неперервного моніторингу та постійного аналізу стану, зокрема знімаючи сигнали людського тіла та вчасно обробляючи їх. Одним з таких способів є аналіз серцевої діяльності в реальному часі за допомогою зчитування електрокардіограми (ЕКГ) [1].

Запропоновано багато методів для класифікації ЕКГ [2-7]. Вони різняться підходами, точністю, швидкістю опрацювання та іншими показниками ефективності.

Дане дослідження використовує набір даних PhysioNet / Computing in Cardiology Challenge 2017 [2,8], широко відомий для досліджень та розробки алгоритмів аналізу ЕКГ. Розглянуто декілька підходів та запропоновано комбінований метод аналізу, що спирається на 1D-згорткові нейронні мережі (CNN) та класифікатори для прийняття рішення. Запропонований метод робить висновок про кардіограму щодо відхилень у ній, а саме – наявності аритмії. Також відділяються надто зашумлені кардіограми та інші типи аритмій (без розподілу).

Порівняння з іншими методами [3] наведено наприкінці статті. Отримані авторами результати є адекватними та мають високе значення основної метрики аналізу якості таких методів – F_1. Це робить метод придатним до подальшого впровадження та використання у зв'язці з мобільним кардіографом, подальшого дослідження та застосування.

Вхідні дані

Для розробки та тестування алгоритмів використовувався набір кардіограм з датасету PhysioNet / Computing in Cardiology Challenge-2017 [2]. Датасет містить в собі 8528 однополюсних ЕКГ-сигналів, записаних за допомогою пристрою AlivCor з частотою 300 Гц. Кожен із записів був позначений експертом, одним з чотирьох класів: нормальний синусовий ритм, миготлива аритмія, інший вид ритму або зашумлена кардіограма, які позначалися як "N", "AF", "O" та "~" відповідно. Відсоткове співвідношення кожного класу та приклади ЕКГ показано в таблиці 1 та на рис. 1.

Таблиця 1. Співвідношення кардіограм різних класів в наборі даних PhysioNet / Computing in Cardiology Challenge 2017 [2]

Клас	N (Normal)	AF (Atrial Fibrillation)	O (Other)	~ (Noise)
Кількість	5076	758	2415	279
Відсоток	59.5%	8.9%	28.3%	3.3%

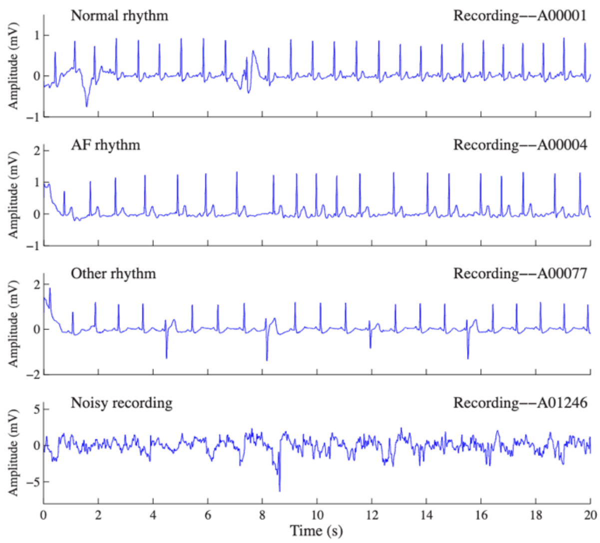


Рис. 1. Приклади ЕКГ з набору даних PhysioNet / Computing in Cardiology Challenge 2017 [2]

Огляд методу

Було розроблено модель, призначену для класифікації ЕКГ на чотири класи: нормальний ритм, миготлива аритмія, інші захворювання, зашумлена ЕКГ ("Normal", "Atrial Fibrillation", "Other", "Noisy" [2]). В основі моделі лежать 5 одновимірних згорткових нейронних мереж (CNN). Перед подачею даних нейронній мережі виконується попередня обробка ЕКГ, а саме: фільтрація, локалізація R піків (рис. 2), «розрізання» ЕКГ на менші частини і передискретизація. Після класифікації «розрізаних» частин окремо, результати об'єднуються і обирається кінцевий клас для всієї ЕКГ. Було досліджено різні варіанти вибору кінцевого класу, а саме: зважений максимум ймовірностей за допомогою логістичної регресії, випадкових дерев та методу опорних векторів.

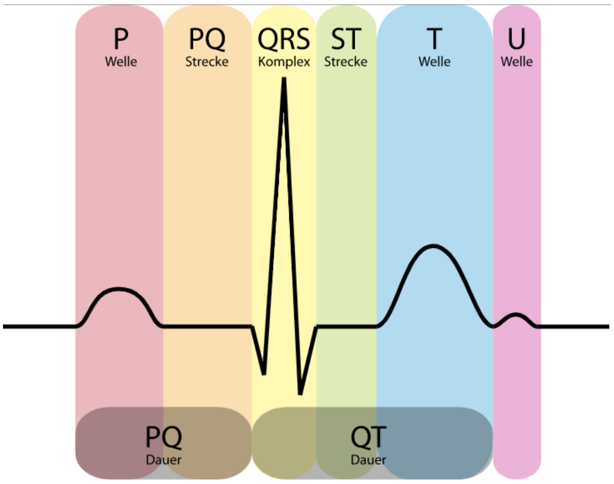


Рис. 2. Структура циклу ЕКГ та R піки

На першому кроці відділяємо зашумлені ЕКГ від інших. З проведених дослідів, цей клас гірше піддається класифікації, тому попередньо відокремлюємо такі кардіограми від решти. Для цього ЕКГ «розрізається» на частини по три секунди та кожна частина класифікується за допомогою CNN окремо (структура мережі подана далі). Розрізання ЕКГ необхідне для більш швидкого навчання нейронною мережею, адже проміжок (кількість даних) стає меншою, а кількість даних для навчання за обмеженої вибірки – більше. Складність класифікації полягає в тому, що деякі ЕКГ можуть суміщати кілька типів (класів фінальної класифікації) одночасно. Наприклад, одна частина ЕКГ – нормальна, а інша – зашумлена.

Наступний крок полягає у фільтрації ЕКГ, де ми застосовуємо рухоме середнє і фільтр Баттерворта [11]. Далі застосовуємо алгоритм знаходження R піків. На останньому кроці «розрізаємо» ЕКГ на частини, кожна з яких має кілька RR циклів, класифікуємо кожну частину, використовуючи CNN, і поєднуємо результати для всієї ЕКГ.

Попередня обробка даних

До того, як дані потрапляють на вхід нейронної мережі, вони проходять передобробку і первинний аналіз. При аналізі ЕКГ дослідників цікавить періодичний PQRST комплекс (рис. 2). Для відсіювання низьких частот використовуємо рухоме середнє, яке віднімаємо від результату. Для очищення сигналу від шумів використовуємо низькочастотний фільтр Баттерворта [11]. На рис. 3 показано результат застосування побудованого фільтру Баттерворта на дуже зашумленій ЕКГ.

Для покращення точності нейронної мережі вирівнюємо дані по R-R циклах. Для цього необхідно в автоматичному режимі локалізувати QRS комплекс. Автори пропонують алгоритм знаходження R піків, який складається з наступних кроків (рис. 4):

1. Трансформація сигналу за формулами (1), (2), (3), наведеними нижче. Цей крок допомагає виділити різкі зміни в амплітуді, характерні лише для QRS комплексу. Також на даному кроці R-піки, напрямлені вниз, перевертаються догори.
2. Виділення потенційних R піків. На даному кроці використовується рухоме вікно, в якому виділяються точки, вищі 97 квантиля.
3. Групування потенційних R піків, якщо вони знаходяться близько один до одного, і вибір найкращого кандидата в групі.

$$\boldsymbol{UpPeak_k} = \left|\underline{\min_{j=k-9,k-1}}(x_j) - x_k\right| + \left|\underline{\min_{j=k+1,k+9}}(x_j) - x_k\right| \quad (1)$$

$$\boldsymbol{DownPeak_k} = \left|\underline{\max_{j=k-9,k-1}}(x_j) - x_k\right| + \left|\underline{\max_{j=k+1,k+9}}(x_j) - x_k\right| \quad (2)$$

$$\boldsymbol{Tr_k} = \max(\boldsymbol{UpPeak_k}, \boldsymbol{DownPeak_k}) \quad (3)$$

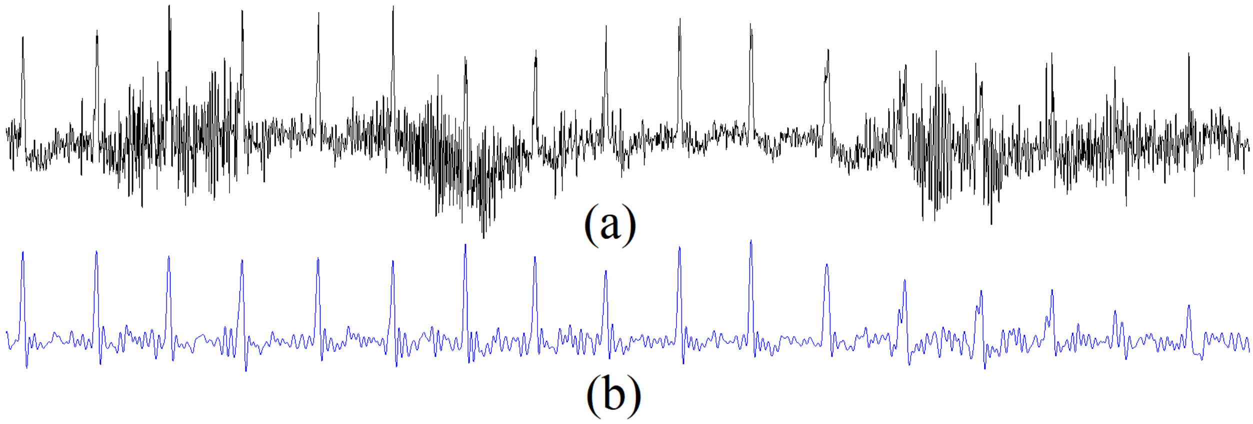


Рис. 3. Фрагмент ЕКГ 104 після фільтрації високочастотного шуму: a – вхідна ЕКГ; b – відфільтрована ЕКГ

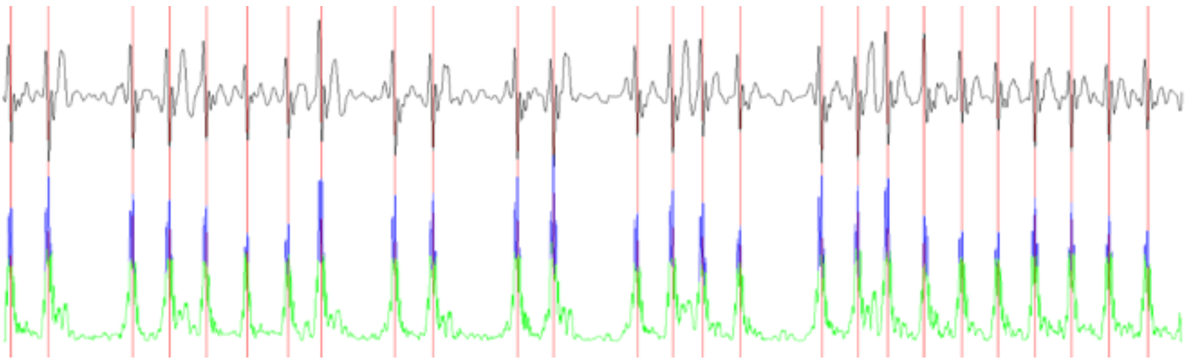


Рис. 4. Локалізація R піків (чорний – вхідна ЕКГ A00706, зелений – трансформована, синій – потенційні R піки, червоний – визначені R піки)

Для тестування алгоритму і підбору параметрів було використано датасет MIT-BIH Arrhythmia Database [9,10]. Він складається з 48 ЕКГ, кожна по 30 хвилин. Датасет також містить розмічені R-піки та їх класифікацію. Основними показниками якості алгоритму визначення R піків є:

- $\boldsymbol{T_p}$ – кількість правильно визначених R піків,
- $\boldsymbol{F_p}$ – кількість хибнопозитивно визначених R піків,
- $\boldsymbol{F_n}$ – кількість хибнонегативно визначених R піків,
- похибка $\boldsymbol{F_d}$.

В таблиці 2 наведено результати порівняння з методом, запропонованим у [12] (ECG Enhancement and R-Peak Detection Based on Window Variability).

Таблиця 2. Характеристика точності визначення R-піків у порівнянні з [12]

Запропонований алгоритм			**[111]**		
F_p	F_n	$\boldsymbol{F_d}$	F_p	F_n	$\boldsymbol{F_d}$
40	141	**0.2256**	244	192	**0.5759**

Після визначення R піків «розрізаємо» кардіограму по декілька R-R циклів. Оскільки довжина циклів може відрізнятися, навіть між парами сусідніх піків, проводимо передискретизацію виділених R-R циклів так, щоб результуюча послідовність мала задану в нейронній мережі довжину.

Класифікація ЕКГ

В результаті аналізу існуючих рішень, наукових статей та здійснених авторами попередніх спроб класифікації ЕКГ було виявлено, що згорткові нейромережі показують одні з кращих результатів. Саме тому для побудови моделі використовується згорткова 1D нейронна мережа (1D CNN), тобто застосовувалась одновимірна згортка. В результаті, отримано 5 різних, але дуже схожих за архітектурою, нейронних мереж. З набору даних [2] було взято ~ 91% ЕКГ для тренування та ~ 9 % як тестову вибірку. Архітектура мереж зображена на рис. 5 та рис. 6.

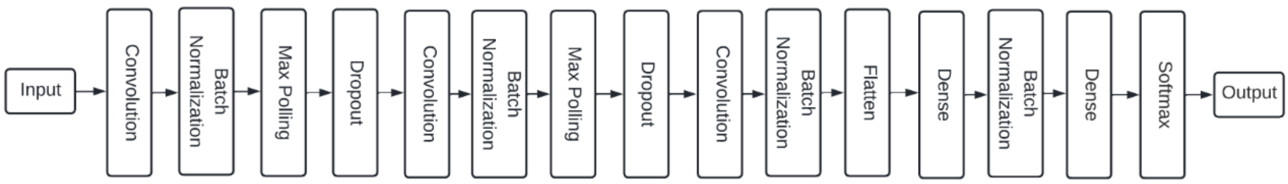


Рис. 5. Архітектура мережі для класифікації на зашумлені та чисті ЕКГ

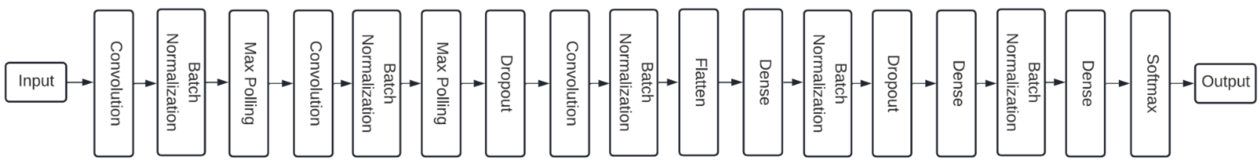


Рис. 6. Архітектура мережі для класифікації ЕКГ на класи “N”, “A” та “O”

При навчанні моделі було використано оптимізатор Adam, функцію активації ReLU та Softmax для вихідного шару. В якості функції помилки використовується категоріальна крос-ентропія (categorical cross-entropy). Також для всіх згорткових шарів використовувався L2 регуляризатор. Швидкість навчання була встановлена на рівні 0.001 з використанням експоненційного згасання (Exponential Decay).

Першим етапом класифікації було визначення зашумлених кардіограм. Для цього ЕКГ розділялись на частини по 3 секунди з різними зсувами. В результаті їх розділено на класи “Noisy”, “NotNoisy”. Саме для цієї класифікації брались чисті дані без використання фільтрів, щоб не спотворювати результат. Отримана точність нейронної мережі F_p = 0,6167 (рис. 7).

Наступним етапом класифікації була розробка ще 3 нейронних мереж для виявлення кардіограм, що мають нормальний ритм, аритмію та інший тип ритму, а саме для наступних бінарних класифікацій: “N” - “NotN”, “AF” - “NotAF”, “O” - “NotO”, а також розробка мережі для класифікації на 3 класи: “N”, “AF”, “O” (“Normal”, “Atrial Fibrillation”, “Other”). Для цього ЕКГ розділялись на частини по кілька RR циклів з різними зсувами.

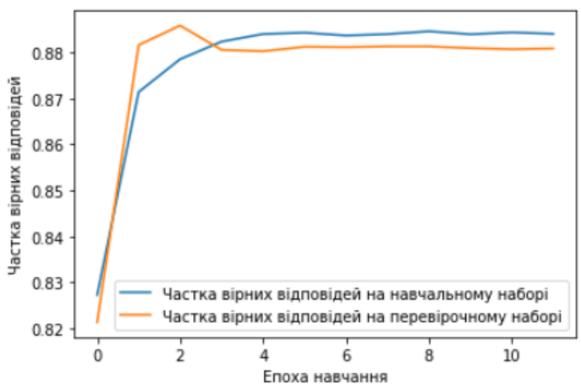


Рис. 7. Графік точності нейронної мережі протягом навчання “Noisy” - “NotNoisy”

На виході з нейронних мереж отримано ймовірності $\boldsymbol{b_N, b_A, b_O}$ для бінарних класифікаторів і $\boldsymbol{t_N, t_A, t_O}$ для тернарного класифікатора. Щоб поєднати результати різних нейронних мереж введено зважені ймовірності наступним чином:

$$\boldsymbol{w_N = b_N\sqrt{t_N}, b_A = b_A\sqrt{t_A}, b_O = b_O\sqrt{t_O}}\ .$$

Остаточний клас обирався на основі найбільшої зваженої імовірності. Також проведено класифікацію на основі випадкових дерев, методу опорних векторів і логістичної регресії. Для цього використано бібліотеку SKLearn в Python. Всі параметри, окрім min_samples_leaf = 100 для випадкових дерев, обирались класифікаторами автоматично.

Кожний з методів навчався на кортежах з 6, 9 та 21 параметрів. Кортежі параметрів складалися наступним чином:

$$(\boldsymbol{b_N, b_A, b_O, t_N, t_A, t_O})$$

$$(\boldsymbol{b_N, b_A, b_O, t_N, t_A, t_O, w_N, w_A, w_O})$$

$$(\boldsymbol{b_N, b_A, b_O, t_N, t_A, t_O, w_N, w_A, w_O, b_N^2, b_A^2, b_O^2, t_N^2, t_A^2, t_O^2, \sqrt{b_N b_A}, \sqrt{b_N b_O}, \sqrt{b_A b_O}, \sqrt{t_N t_A}, \sqrt{t_N t_O}, \sqrt{t_A t_O}})$$

Результати

Для оцінки роботи всієї моделі класифікації використано запропоновану в PhysioNet / Computing in Cardiology Challenge-2017 метрику $\boldsymbol{F_1}$ [2,6]:

Таблиця 3. Матриця крос-валідації

		Прогноз				
		Normal	AF	Other	Noisy	Разом
Справжнє значення	Normal	*Nn*	*Na*	*No*	*Np*	Σ*N*
	AF	*An*	*Aa*	*Ao*	*Ap*	Σ*A*
	Other	*On*	*Oa*	*Oo*	*Op*	Σ*O*
	Noisy	*Pn*	*Pa*	*Po*	*Pp*	Σ*P*
	Разом	Σ*n*	Σ*a*	Σ*o*	Σ*p*	

$$\boldsymbol{F_{1n}} = \frac{\boldsymbol{2\,Nn}}{\boldsymbol{\Sigma N+\Sigma n}} \quad \boldsymbol{F_{1a}} = \frac{\boldsymbol{2\,Aa}}{\boldsymbol{\Sigma A+\Sigma a}}$$

$$\boldsymbol{F_{1o}} = \frac{\boldsymbol{2\,Oo}}{\boldsymbol{\Sigma O+\Sigma o}} \quad \boldsymbol{F_{1p}} = \frac{\boldsymbol{2\,Pp}}{\boldsymbol{\Sigma P+\Sigma p}}$$

$$\textit{Final Score} = \boldsymbol{F_1} = \frac{\boldsymbol{F_{1n}+F_{1a}+F_{1o}}}{\boldsymbol{3}}$$

Результаті обчислень подано у таблиці 4.

Таблиця 4. Значення метрики $\boldsymbol{F_1}$ для різних моделей підсумкового класифікатора

Назва методу	Кількість параметрів	$\boldsymbol{F_{1n}}$	$\boldsymbol{F_{1a}}$	$\boldsymbol{F_{1o}}$	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_1}$ валідація
Maximal $\boldsymbol{w_x}$	6	0.8975	0.8531	0.7485	0.8330	0.8243
Logistic regression	6	0.9031	0.8676	0.7672	0.8460	0.8194
Logistic regression	9	0.9028	0.8709	0.7674	0.8470	0.8219
Logistic regression	21	0.9042	0.8715	0.7733	**0.8497**	0.8195
Random forest	6	0.9037	0.8728	0.7674	0.8480	0.8246
Random forest	9	**0.9050**	0.8686	0.7718	0.8485	0.8225
Random forest	21	**0.9050**	0.8690	**0.7740**	0.8493	0.8173
SVM	6	0.9048	**0.8735**	0.7682	0.8489	0.8205
SVM	9	0.9023	0.8705	0.7619	0.8449	0.8262
SVM	21	0.9022	0.8712	0.7632	0.8455	**0.8278**

Кращі результати класифікації виділено жирним шрифтом у таблиці. Отже, точнішу класифікацію по окремих класах переважно дає метод випадкових дерев (Random Forest), як і у [6], а кращі загальні результати підсумкового класифікатора дає метод опорних векторів (SVM), хоч і з невеликою перевагою.

В цілому ж точність – порівнювана з кращими відомими моделями [3-5] та навіть переважає по окремих класах.

Отже, в цілому метод може бути адаптований для інтеграції з мобільними кардіографами для подальшого впровадження та використання у сценаріях з аналізом стану ЕКГ у реальному часі.

Висновки

У даній роботі запропоновано новий метод класифікації ЕКГ, який складається з наступних етапів:

1) фільтрація даних (рухоме середнє і Баттерворта),
2) локалізація R піків,
3) «розрізання» ЕКГ і передискретизація,
4) класифікація “Noisy” - “NotNoisy”
5) класифікація “Normal”, “Atrial Fibrillation”, “Other” за допомогою ансамблю класифікаторів з 1D CNN та підсумкового ансамблевого класифікатора.

Запропонований метод має високі показники точності за метрикою $\boldsymbol{F}_1$ та ефективності застосування (точність+швидкість).

Також авторами запропонований новий метод локалізації R-піків QRS циклів кардіограм, який показав себе ефективним за метрикою точності.

Запропонована авторами модель може бути основою для наступних досліджень за рахунок нової комбінації ансамблевої структури прийняття рішення про класифікацію, а також покращень та впровадження через інтеграцію у систему «повного циклу» аналізу із застосуванням мобільних зчитувачів ЕКГ з метою попереднього виявлення відхилень у кардіограмі та швидкого попереднього діагностування.

Список використаних джерел

1. *Панченко Т.В.* Моніторинг стану здоров’я в реальному часі за допомогою ЕКГ-аналізу / Т.В. Панченко, В.О. Будіченко // Штучний інтелект. – Київ. – 2016. – № 4 (74). – С.98-100.
2. *Clifford G.D.* AF Classification from a Short Single Lead ECG Recording: The PhysioNet – Computing in Cardiology Challenge 2017 / G.D. Clifford, Ch. Liu, B. Moody, L.H. Lehman, I. Silva, Q. Li, A.E. Johnson and R.G. Mark // Computing in Cardiology. – 2017. – P.1-4.
3. *Chen D.* Electrocardiogram Classification and Visual Diagnosis of Atrial Fibrillation with DenseECG (Preprint) / D. Chen, D. Li, X. Xu, R. Yang and S.-K. Ng // ArXiV. – 2021. – 10p.
4. *Yavorskyi A*. Efficient ECG Analysis with High F_1 Score and Low Computation Complexity / A. Yavorskyi, B. Tyshchenko, T. Panchenko // The 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS’2021). – 2021. – P. 348-352.
5. *Panchenko T.* Electrocardiogram Effective Analysis Based on the Random Forest Model with Preselected Parameters / T. Panchenko, A. Yavorskyi, Zh. Hu // Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. – 2022. – Vol. 135. – P. 137-145.
6. *Яворський А.Б.* Аналіз та обробка сигналів кардіограми у реальному часі / А.Б. Яворський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – Київ. – 2021. – Вип. 1. – С. 108–113.
7. *Yavorskii A*. ECG Analysis with High Precision and Recall / A. Yavorskii, T. Panchenko, B. Tyshchenko // In Proc.: Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2021). – Skhidnytsia, Ukraine. – 2021. – P. 78-79.
8. *Goldberger A.* PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals / A. Goldberger, L. Amaral, L. Glass, J. Hausdorff, P.C. Ivanov, R. Mark, J.E. Mietus, G.B. Moody, C.K. Peng, and H.E. Stanley // Circulation [Online]. – 2000. – # 101 (23). – P. e215–e220.
9. *Moody G.B*. A new method for detecting atrial fibrillation using R-R intervals / G.B. Moody, R.G. Mark // Computers in Cardiology. – 1983. – No. 10. – P. 227-230.
10. *Moody G.B*. The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database / G.B. Moody, R.G. Mark // IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine. – 2001. – Vol. 20, No. 3. – P. 45-50.
11. *Butterworth S.* On the Theory of Filter Amplifiers / S. Butterworth // Experimental Wireless and the Wireless Engineer. – 1930. – No. 7. – P. 536–541.
12. *Wu L.* ECG Enhancement and R-Peak Detection Based on Window Variability / L. Wu, X. Xie,

Y. Wang // Healthcare. – Basel. – 2021. – No. 9 (2). – P. 227.

References

1. PANCHENKO, T.V., BUDICHENKO, V.O. (2016): *Real-time Health Monitoring via ECG Analysis*, "Artificial Intelligence", No. 4 (74), pp. 98-100.
2. CLIFFORD, G.D., LIU, Ch., MOODY, B., LEHMAN, L.H., SILVA, I., LI, Q., JOHNSON, A.E., MARK, R.G. (2017): *AF Classification from a Short Single Lead ECG Recording: The PhysioNet – Computing in Cardiology Challenge 2017*, "Computing in Cardiology", pp.1-4, doi: 10.22489/CinC.2017.065-469.
3. CHEN, D., LI, D., XU, X., YANG, R., NG, S.-K. (2021): *Electrocardiogram Classification and Visual Diagnosis of Atrial Fibrillation with DenseECG*, 10 p., https://arxiv.org/pdf/2101.07535.pdf
4. YAVORSKYI, A., TYSHCHENKO, B., PANCHENKO, T. (2021): *Efficient ECG Analysis with High F_1 Score and Low Computation Complexity*, "Proc. 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS'2021)", pp. 348-352.
5. PANCHENKO, T., YAVORSKYI, A., HU, ZH. (2022): *Electrocardiogram Effective Analysis Based on the Random Forest Model with Preselected Parameters*, "Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies", Vol. 135, pp. 137-145.
6. YAVORSKYI, A. (2021): *Real-Time Analysis and Processing of Cardiogram Signals*, "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics", No. 1, pp. 108–113.
7. YAVORSKYI, A., PANCHENKO, T., TYSHCHENKO, B. (2021): *ECG Analysis with High Precision and Recall*, "Proc. Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2021)", pp. 78-79.
8. GOLDBERGER, A., AMARAL, L., GLASS, L., HAUSDORFF, J., IVANOV, P.C., MARK, R., MIETUS, J.E., MOODY, G.B., PENG, C.K., STANLEY, H.E. (2000): *PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals*, # 101 (23), pp. e215–e220, https://physionet.org/content/challenge-2017
9. MOODY, G.B., MARK, R.G. (1983): *A new method for detecting atrial fibrillation using R-R intervals*, "Computers in Cardiology", No. 10, pp. 227-230.
10. MOODY, G.B., MARK, R.G. (2001): *The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database*, "IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine", Vol. 20, No. 3, pp. 45-50.
11. BUTTERWORTH, S. (1930). *On the Theory of Filter Amplifiers*, "Experimental Wireless and the Wireless Engineer", No. 7, pp. 536–541.
12. WU, L., XIE, X., WANG, Y. (2021): *ECG Enhancement and R-Peak Detection Based on Window Variability*, "Healthcare" (Basel), 9 (2), P. 227; doi: 10.3390/healthcare9020227.

Надійшла до редколегії 14.02.2022

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.10

Пащук І.О.[1], студ.
Лівінська Г.В.[1], к.ф.-м.н., доц.

Моделювання функцій життєдіяльності та смертності по даних для населення України

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: pashchuk.ira@gmail.com
livinskaav@gmail.com

I.O. Pashchuk[1] ,stud.
H.V. Livinska[1] Ph.D.(Phys.-Math.), Ass.Professor

Modeling of health and mortality functions based on data for the population of Ukraine

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkov ave, 4d,
e-mail: pashchuk.ira@gmail.com
livinskaav@gmail.com

В роботі наведено підхід до моделювання наборів даних таблиці життя. Також досліджуються межі очікуваної тривалості життя на основі стохастичного моделювання смертності та застосування теорії першого досягнення критично низького рівня.
Ключові слова: Функція стану здоров'я, стохастичне моделювання, модель Гомперца, час першого досягнення критичного рівня, інтенсивність смертності.

In the work the approach to modeling of data sets of the life table is given. Life expectancy limits based on stochastic mortality modeling and the application of the critically low first achievement theory are also investigated. Particular attention is paid to the representation of the function of health, together with a well-established theory of the Force of Mortality, as well as life tables. The parameters of the model are estimated and analyzed according to the data of demographic tables for the population of Ukraine.
Key words: The State Health function, stochastic modeling, Gompertz model, the first exit time, the Force of Mortality.

Вступ. Динаміка старіння населення — напрямок у вивченні старіння за допомогою методів популяційної динаміки, тобто вивчення вікової структури старіючих біологічних популяцій і того, як ця залежність змінюється залежно від типу організму та умов середовища. Найбільший інтерес представляє динаміка старіння в різних організмах, включаючи людей, де старіння відбувається та прогресує через тривалий час після статевого дозрівання. Популяційні методи враховують залежність чисельності популяції від біологічного віку. Метою такого підходу є виявлення закономірностей у часі на основі чисельності популяції, яка використовується для визначення швидкості процесу старіння. У свою чергу, ці дані можуть бути використані для перевірки моделей старіння, отриманих від фізіологічних і генетичних механізмів або за допомогою загальних системних механізмів.

Також на основі даних про смерть та популяцію можна дослідити стан здоров’я людини. Здоров’я людини можна розглядати як стохастичну змінну, оскільки воно тісно пов’язане з невизначеністю, обумовленою різними факторами як навколишнього середовища, так і внутрішнього механізму та інформації, що міститься в ДНК і генах. Ймовірність раптових змін стану здоров’я людини внаслідок захворювань чи нещасних випадків досить велика, що підтверджує припущення, що стан здоров’я людини можна розглядати як стохастичну змінну. Смерть настає, коли траєкторія стохастичного процесу, який описує стан здоров'я, вперше перетинає

© І.О. Пащук, Г.В. Лівінська, 2022

нульову лінію, що представляє нульовий рівень життєвої сили або нульовий стан здоров'я.

Перші моделі старіння. Однією з перших і найпоширеніших математичних моделей, що використовуються для опису старіння багатьох організмів, є так званий закон смерті Гомперца-Мейхама, або скорочено Гомперца, згідно з яким ймовірність смерті з віком зростає експоненційно:

$$p = a + b^x \qquad (1)$$

де x — вік, а p — ймовірність смерті за певний проміжок часу, a і b — коефіцієнти.

Таким чином, розмір популяції знижується з віком за подвійною експонентою:

$$s(x) = exp[-m(b^x + c)] \qquad (2)$$

Закон Гомперца-Макхема найкраще описує динаміку смертності людей у віковому діапазоні 30-80 років. У літніх людей смертність зростає не так швидко, як цей закон смертності, явище, відоме як зниження смертності в більш пізньому віці.

Наприкінці 20 століття почали з'являтися багато нових моделей смертності населення. Наявність великої кількості нових даних (часто для гетерогенних популяцій) призвело до нових способів аналізу таблиць смертності. Оскільки лінійне зниження функцій організму відоме давно, необхідно співвідносити цю тенденцію з віком експоненційного зростання та відносною смертністю. Першим поясненням цього явища була модель Стрелера-Мілдвана.

Модель Стрелера-Мілдвана пропонує обґрунтування експоненціального збільшення інтенсивності смертності $\mu(t)$, і описує деякі формальні властивості кривої смертності Гомперца:

$$\mu(t) = ae^{bt} \qquad (3)$$

Протягом кількох десятиліть кореляція теорії Стрелера-Мілдвана вважалася універсальним демографічним законом, дійсним як для даних про період, так і для когортної смертності. Проте деякі відхилення від цієї моделі також спостерігалися.

Систематичний збір інформації про народжуваність та смертність в країнах дали початок теоретичним і прикладним дослідженням як у якісних, так і в кількісних галузях демографії, ймовірності та статистики, прикладної математики, а останнім часом і комп'ютерних досліджень та моделювання.

Стан здоров'я або життєздатність організму можна оцінити за наборами даних про народження та смерть. З точки зору якісних досліджень можна сказати, що гарний стан здоров'я населення призведе до збільшення тривалості життя. Проте кількісна відповідь має включати дані народжуваності та смертності.

Але як кількісно оцінити та змоделювати стан здоров'я населення, передбачивши функцію стану здоров'я за віком? Причина відсутності розвитку кількісної теорії переважно пов'язана з тим, що здоров'я людини — це стохастичний процес, а смерть — це "кінець" цього процесу, коли стан здоров'я падає нижче межі, що називається бар'єром, тобто в момент першого досягнення рівня (бар'єра) цим стохастичним процесом. В подальшому для стохастичного процесу, пов'язаного зі станом («кількістю») здоров'я людини, момент першого досягнення критично низького рівня будемо називати «моментом (або часом) першого виходу».

Стохастична модель і пов'язані з нею параметри. Смерть виникає як наслідок втрати життєвих сил або здоров'я, що можна розглядати як випадковий процес. Змоделювати цей процес можна простим стохастичним диференціальним рівнянням[1]:

$$dS_t = \mu_t^* dt + \sigma_t dW_t \qquad (4)$$

Тут $S_t -$ це стан здоров'я або життєва сила людини, $\mu_t^* -$ функція, що виражає втрату життєвих сил або швидкість зниження стану здоров'я залежно від віку t, $\sigma_t -$ дисперсія здоров'я людини, яка вважається сталою для даної моделі, *W(t)* – стандартний вінерівський процес.

Шляхом прямого інтегрування S_t визначатиметься як:

$$S_t = S_0 + \int_{t_0}^{t} \mu_s^* ds + \sigma_s[W_t - W_0] \qquad (5)$$

де S_0 – значення S_t у момент $t = 0$. Тепер наше головне завдання – отримати аналітичнийвигляд функції μ_t^*. Вважаємо, що математичне сподівання значення S_t є функцією $H = H_t$, заданою формулою

$$H_t = E|S_t| = S_0 + \int_{t_0}^{t} \mu_s^* ds \qquad (6)$$

ми отримаємо

$$\mu_t^* = \frac{dH_t}{dt} \qquad (7)$$

де $H_t -$ функція стану здоров'я.

Основна проблема тут полягає не в тому, щоб знайти розв'язок (4), а в переході до щільності неперервної випадкової величини. З (4) ми можемо перейти до пов'язаного диференціального рівняння Фоккера-Планка [1]:

$$\frac{\partial p(S_t,t)}{\partial t} = -\mu_t^* \frac{\partial p(S_t,t)}{\partial S_t} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 p(S_t,t)}{\partial S_t^2} \qquad (8)$$

Розв'язок, буде мати вигляд:

$$p(t) = \frac{1}{\left[2\pi \int_0^t \sigma_S^2 ds\right]^{1/2}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\int_0^t \sigma_S^2 ds}} \qquad (9)$$

Для сталого значення σ ця формула набуває вигляд

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \qquad (10)$$

Знаходження функції щільності, що виражає розподіл часу першого досягнення критично низького рівня надано Е. Шредінгером [2] і М. Смолуховським [3] у двох роботах, опублікованих незалежно в одному номері журналу. Пізніше А. Зігерт [4] дав інтерпретацію, ближчу до нашого сучасного позначення, тоді як в роботах [3]-[7] дано найцікавішу форму функції щільності першого виходу. Для простого випадку, представленого раніше (9), запропонована форма:

$$g(t) = \frac{|a|}{t} p(a,t) = \frac{|a|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2 t}} \qquad (11)$$

К. Дженнен [5] запропонував більш загальну форму для випадку криволінійної межі, використовуючи дотичну апроксимацію щільності першого виходу. Застосування цієї теорії до моделювання смертності призводить до наступної форми [1], [8]:

$$g(t) = \frac{|H_t - tH_t'|}{t} p(t) = \frac{|H_t - tH_t'|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \qquad (12)$$

Як бачимо з останньої формули $|H_t - tH_t'|$ враховує локальну лінеаризацію і в кількох випадках може розглядатися як константа. У цьому випадку виникає простіша форма:

$$g(t) = \frac{k}{t} p(t) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \qquad (13)$$

Або форма запропонована в [1]:

$$g(t) = \frac{k}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2t}} \qquad (14)$$

Без втрати загальності ми можемо встановити $\sigma = 1$ в рівнянні (10) для *g(t)* і продовжити використання простої форми моделі представленою в (14), де новий параметр $k = k^*/\sqrt{2\pi}$.

Тепер можемо перейти до оцінки форми невідомої функції стану здоров'я *H(t)*, підставивши в попереднє рівняння та виразивши *H(t)* як функцію *g(t)*. Отримана функція має вигляд

$$H_t = \left|\left(-2t \ln \frac{g(t)\sqrt{t^3}}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \qquad (15)$$

Щоб забезпечити позитивний знак члену в дужках у правій частині останньої формули, має виконуватись таке співвідношення:

$$k \geq g(t)\sqrt{t^3} \qquad (16)$$

Необхідні дані для дослідження – це кількість померлих у віці x протягом року *(dx)*, а також спостережувана чисельність населення за віком *x* в певному році *(lx)*. Тоді інтенсивність смертності в точці *x* (у віці *x*) μ_x визначається як

$$\mu_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad (17)$$

Коли дані надані в термінах μ_x, ми переходимо до безпосереднього пошуку H_x. Оскільки в наших розрахунках нам потрібні дані для оцінки функції щільності ймовірності *g(x)*, ми можемо знайти цю функцію з визначення μ_x з формули

$$\mu_x = \frac{g(x)}{1 - \int_0^x g(t)dt} \qquad (18)$$

Після перегрупування та диференціювання отримуємо

$$g_x = \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt} \qquad (19)$$

Формула для g_x надає функцію щільності ймовірності *g(x)* як функцію μ_x. Відповідно, ми можемо знайти наступну форму для функції стану здоров'я

$$H_x = \left|\left(-2x \ln \frac{\sqrt{x^3}\mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \qquad (20)$$

Параметр *k* тепер визначається як

$$k = \max_{x \in (0;\infty)} \left(\sqrt{x^3}\mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}\right) \qquad (21)$$

Моделювання на основі даних про населення для України. Дослідження проведено на основі даних наданих базою даних про смертність людей https://www.mortality.org/. З вказаної бази даних було використано кількість померлих у віці *x* протягом року, а також спостережувана чисельність населення за віком *x* в певному році. Дане оцінювання було проведено за допомогою середовища MS Excel.

Застосувавши формулу (20) було змодельовано функцію стану здоров'я дя жінок та чоловіків України у 2000 році (Рисунок 1).

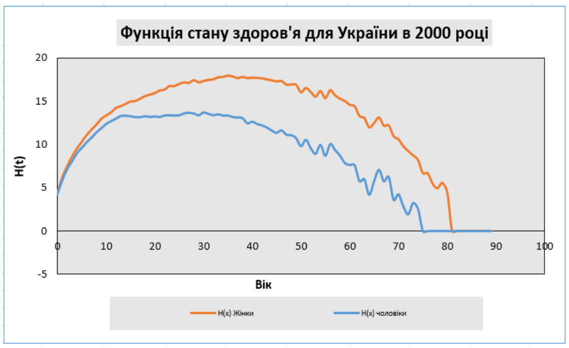


Рисунок 1 - Функція стану здоров’я чоловіків і жінок в Україні

Отримані графіки для *H(x)* забезпечують несиметричну форму, подібну до параболи. Ця функція описує середнє значення стану здоров’я населення за конкретний рік як функцію віку. Стан здоров'я починається з низького рівня при народженні та зростає до максимального значення стану здоров'я, а потім знижується до нуля у віці максимальної смертності.

Оскільки графіки мають форму параболи для функції *H(x)*, ми можемо знайти вік *x*, де *H(x)* отримує максимум. Для випадку України в 2000 році він становить *x=36* років і *H(x)=17,94* для жінок та *x=31* рік і *H(x)=13,72* для чоловіків.

Для спостереження зміни значення функції життєвості для України за даними в різні роки була побудована модель за формулою (20) для жінок (Рисунок 2) та чоловіків (Рисунок 3) України за період з 2000 року по 2012 рік з інтервалом в 2 роки.

На основі розрахунків та графіків спостерігається чітка тенденція зростання стану здоров’я жінок: при відносно сталому максимальному значенні функції стану здоров’я, вік максимального значення стану здоров’я підвищується (Таблиця 1). Також, помітно різницю віку нульового значення стану здоров’я, в жінок він значно вищий, ніж в чолоків (Таблиця 2).

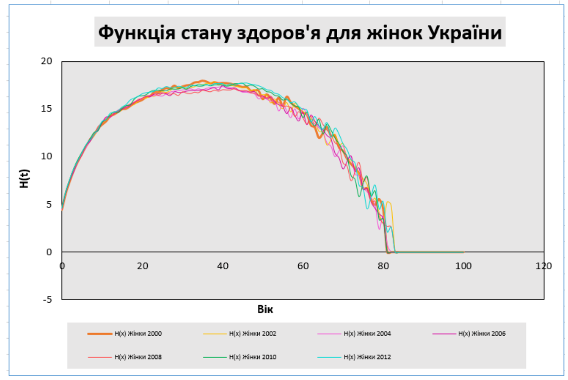


Рисунок 2 - Функція стану здоров’я (жінки 2000-2012р.)

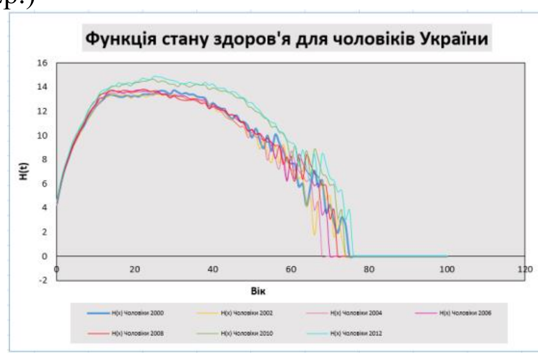


Рисунок 3 - Функція стану здоров’я (чоловіки 2000-2012р.)

Рік	Максимальне значення функції *H(x)*	Вік максимального значення стану здоров’я, р.	Вік нульового значення стану здоров’я, р.
1990	18,3	37	83
1992	18,1	34	82
1994	17,7	41	82
1996	17,5	35	78
1998	18,1	36	80

2000	17,94	36	82
2002	17,87	39	84
2004	17,32	41	83
2006	17,50	41	82
2008	17,09	44	84
2010	17,70	46	82
2012	17,75	47	84

Таблиця 1 - Порівняння значеннь функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я жінок в Україні

Рік	Максимальне значення функції *H(x)*	Вік максимального значення стану здоров'я, р.	Вік нульового значення стану здоров'я, р.
1990	14,9	29	78
1992	14,3	31	74
1994	13,9	29	76
1996	13,6	32	72
1998	14,0	31	80
2000	13,72	31	76
2002	13,44	29	75
2004	13,73	19	69
2006	13,76	22	71
2008	13,84	23	73
2010	14,64	26	75
2012	14,90	26	77

Таблиця 2 - Порівняння значеннь функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я чоловіків в Україні

Висновки. За результатими дослідження спостерігається чітка тенденція зростання стану здоров'я жінок: при відносно сталому максимальному значенні функції стану здоров'я, вік максимального значення стану здоров'я підвищується. Також, помітно різницю віку нульового значення стану здоров'я, в жінок він значно вищий, ніж в чолоків. Така різниця зумовлена сукупністю факторів, які можна узагальнити способом життя. Найсуттєвіший негативний вплив на здоров'я спричиняють: алкоголь, куріння та неправильне харчування. Також чоловіки більш схильні до ризику та мають більш небезпечні форми зайнятості.

Список використаних джерел

1. *Janssen J.* Dynamic modelling of life-table data/ J. Janssen and C. H. Skiadas// Applied Stochastic Models and Data Analysis - 1995, -11, N1. -P. 35-49.
2. *Schrödinger E.* Zur theorie der fall- und steigversuche an teilchenn mit Brownsche bewegung/ E. Schrödinger// Phys. Zeit. - 1915, -16. – P. 289-295.
3. *Smoluchowsky M.* Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung/ M. Smoluchowsky// Phys. Zeit. – 1915, -16, - P. 318.
4. *Siegert, A.J.F.* On the first passage time probability problem/ A.J.F. Siegert// Physical Review – 1951, -81, - P. 617-623.
5. *Jennen C.* Second-order approximation for Brownian first exit distributions/ C. Jennen// Ann. Probab. – 1985, - 13, - P. 126-144.
6. *Lerche H. R.* Boundary crossing of Brownian motion/ H. R. Lerche // SpringerVerlag – 1986.
7. *Jennen C.* First exit densities of Brownian motion through one-sided moving boundaries/ C. Jennen, C. Lerche and H. R. Lerche// Z. Wahrsch. Uerw – 1988, - 55, - P. 133-148.
8. *Skiadas C. H.* A modeling approach to life table data, in Recent Advances in Stochastic Modeling and Data

Analysis/ C. H. Skiadas and C. Skiadas// World Scientific – 2007, - P. 350–359.

References

1. J. JANSSEN & C. H. SKIADAS (1995) Dynamic modelling of life-table data. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. 11(1). p. 35-49.
2. E. SCHRÖDINGER (1915) Zur theorie d fall- und steigversuche an teilchenn mit Brownsche bewegung. *Phys. Zeit.*, 16. p. 289-295.
3. M. SMOLUCHOWSKY (1915) Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung. *Phys. Zeit.* 16. p. 318.
4. A.J.F. SIEGERT (1951) On the first passage time probability problem. *Physical Review*. 81. p. 617-623.
5. C. JENNEN (1985) Second-order approximation for Brownian first exit distributions. *Ann. Probab.* 13. p. 126-144.
6. H. R. LERCHE (1986) Boundary crossing of Brownian motion. *SpringerVerlag.*
7. C. JENNEN & C. LERCHE & H. R. LERCHE (1988) First exit densities of Brownian motion through one-sided moving boundaries. *Z. Wahrsch. Uerw.* 55. P. 133-148.
8. C. H. SKIADAS & C. SKIADAS (2007) A modeling approach to life table data, in Recent Advances in Stochastic Modeling and Data Analysis. *World Scientific.* p. 350-359.

Надійшла до редакції 23.03.2022

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 537.8
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.11

Купріянчук В.М.[1], аспірант
Будник М.М.[2], д.т.н., с.н.с.

Розрахунок границь робочої зони круглого магнітного аплікатора

[1]Національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова 4Г,
e-mail: kupriianchuk.vladd@gmail.com

[2]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, 03680, м. Київ, проспект. Академіка Глушкова 4Г,
e-mail: budnyk@meta.ua

V. M. Kupriianchuk[1], PhDstudent,
M. M. Budnyk[2], Dr. Sci., Assoc. Prof.

Calculation of boundaries of the working zone of the round magnetic applicator

[1]Taras Shevchenko National University , 03680, Kyiv, Academician Glushkov avenue, 4G
e-mail: kupriianchuk.vladd@gmail.com

[2]Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Science of the Ukraine, 03680, Kyiv, AcademicianGlushkov avenue, 4G,
e-mail: budnyk@meta.ua

Розглянута задача моделювання магнітного аплікатора круглої форми, призначеного для дії на об'єкт (мішень) постійним чи змінним магнітним полем. У зв'язку з тим, що магнітне поле монотонно спадає з ростом відстані до аплікатора, модель включає 3 аплікатори з різними радіусами, а задача вирішується на основі їх порівняння. При цьому більший та менший аплікатори мають радіуси, які більше чи менше радіуса середнього аплікатора в однакову кількість раз (коефіцієнт масштабу k). В наближенні витка зі струмом знайдено аналітичні залежності від k ближньої, дальньої границі та середини проміжної зони, тобто робочої зони, в якій повинна знаходитися мішень. Знайдено асимптотики у крайніх випадках мінімального (k=1) та великого (k>>1) коефіцієнтів масштабу. Показано, що середина робочої зони при k=1 рівна $R/\sqrt{2}$, (R – радіус аплікатора),а при k>>1 росте як $(R/2)k^{1/3}$. Ці результати дають вирішення «прямої» задачі – для аплікатора певного радіусу підібрати параметри мішені – розмір та відстань до неї. Такий підбір критичний, коли мішені мають достатньо великий розмір та відстань до яких не може перевищувати певної критичної величини (глибини залягання), що має місце зокрема при дії магнітним полем на певні органи чи області локалізації магнітних (нано)матеріалів всередині біооб'єктів, в т. ч. людини чи тварини.

Ключові слова: аплікатор магнітного поля, робоча зона, наноматеріали, локалізація наночастинок

We considered the problem of modeling a magnetic applicator of round shape, designed to act on an object (target) with a constant or variable magnetic field. Due to the fact that the magnetic field monotonically decreases with increasing distance to the applicator, the model includes 3 applicators with different radii, and the problem is solved based on their comparison At the same time, the larger and smaller applicators have radii that are larger or smaller than the radius of the average applicator by the same number of times (scale factor k). Analytical dependences on k of the near, far boundary, and middle of the intermediate zone, i.e., the working zone, in which the target should be located, were found in the approximation of the current loop. Asymptotics were found in extreme cases of minimal (k=1) and large (k>>1) scale factors. It is shown that the middle of the working zone at k=1 is equal to $R/\sqrt{2}$, (R is the radius of the applicator), and at k>>1 it grows as $(R/2)k^{1/3}$. These results provide a solution to the "direct" problem of choosing target parameters for an applicator of a certain radius - size and distance to it. Such a selection is critical when the targets have a sufficiently large size and the distance to which cannot exceed a certain critical value (depth of occurrence), which takes place in particular for the action by magnetic field on certain organs or the area of localization of magnetic (nano)materials inside biological objects, including humans or animals.

Key Words: magnetic field applicator, working zone, nanomaterials, nanoparticles localization.

1. Вступ. Для направленої доставки ліків на магнітних носіях, необхідний зовнішній вплив магнітного поля, що має достатній градієнт для використання магнітних частинок в органі-мішені. Для його створення використовується аплікатор магнітного поля. Створення магнітного аплікатора, який має здатність утримувати магнітні наночастинки на необхідній відстані всередині біологічного об`єкта - це нова,складна і погано досліджена задача. Оскільки об`єкт– це монодоменні феромагнітні наночастинки, то величина магнітної сили, яка дієна них, визначається градієнтом магнітного поля, яке створено аплікатором [1].Такий аплікатор буде мати 3 зони: ближню, проміжну та дальню. В кожній з цих зон напруженість магнітного поля буде мати залежність від радіусу аплікатора, що використовується [2].

Крім того, магнітні наночастинки, які потрапляють у злоякісну клітину, здатні поглинати енергію зовнішнього змінного електромагнітного поля. В результаті можна очікувати локальний нагрів оточуючих тканин. Ця технологія називається магнітна гіпертермія й наразі активно досліджується [3]. Інші напрямки застосувань в біомедицині наведено в оглядах [4-5].

В роботі розглянута модель магнітного аплікатора круглої форми, призначеного для дії на об'єкт (мішень) постійним чи змінним магнітним полем. Ставиться задача підібрати параметри мішені – розмір та відстань до неї для аплікатора певного радіусу. На перший погляд задача тривіальна, тому що магнітне поле моно-тонно спадає з ростом відстані до аплікатора, та має лише один розв'язок, а саме – відстань повинна бути мінімальна, а розмір мішені не повинен перевищувати діаметра аплікатора.

Цей тривіальний розв'язок повністю справедливий з точки зору магнітостатики, проте, хибний для практичних застосувань, зокрема для створення магнітних аплікаторів. Для того, щоб підтвердити цю гіпотезу, розроблено теоретичну модель, яка включає 3 аплікатори з різними радіусами, а задача вирішується на основі їх порівняння. При цьому більший та менший аплікатори мають радіуси, які більше чи менше радіуса середнього аплікатора в одинакову кількість раз (коефіцієнт масштабу k).

2. Магнітне поле витка зі струмом

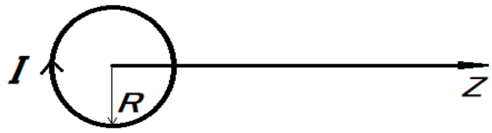


Рис. 1. Схематичне зображення витка зі струмом

Відомо, що напруженість магнітного поля (МП) має наступний вигляд:

$$H = \frac{wR^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}} \quad ,w = nI \qquad (1)$$

де *w*- ампер-витки, *n* - кількість витків, I - струм у витку, R - радіус витка, Z – відстань від центру.

Розглянемо найпростіший випадок де кількість витків *n* =1, тоді поле набуває вигляду:

$$H = \frac{IR^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

В нормованому вигляді враховуємо $H_0 = \frac{I}{R}$ та $z = \frac{Z}{R}$ тоді залежність від відстані z матиме наступний відомий вигляд (3):

$$H(z) = H_0 \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

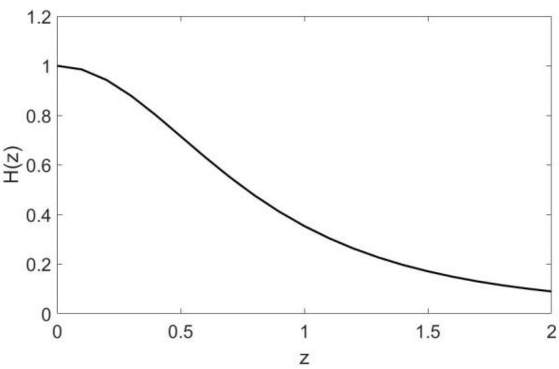


Рис. 2.Залежність амплітуди магнітного поля аплікатора на його осі від відстані *z*

З (1,3) можемо отримати вирази для ближньої (4а), проміжної (4б) та дальньої (4в) зон:

$$\mathrm{H_{БЗ}} = \mathrm{H_0} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}, \mathrm{z} \ll 1 \qquad (4а)$$

$$\mathrm{H_{ПЗ}} = \frac{\mathrm{H_0}}{2\sqrt{2}}, \mathrm{z} \approx 1 \qquad (4б)$$

$$\mathrm{H_{ДЗ}} = \frac{\mathrm{IR^2}}{\mathrm{z^3}}, \mathrm{z} \gg 1 \qquad (4в)$$

Бачимо, що в ближній зоні МП практично постійне H_0, далі у проміжній зоні воно

© В.М Купріянчук, М.М. Будник, 2022

зменшується в $2\sqrt{2} \approx 2.82$рази, в дальній зоні поле пропорційне $H_{ДЗ} \sim \frac{M}{z^3}$,де $M = IR^2$– відомий вираз для магнітного моменту диполя.

Недоліком виразу (4,б) є те, що середина проміжної зони є наближеною і вибрана нами без належного обґрунтування. Крім того, проміжна зона не має ширини, іншими словами – границь.

3. Визначення границь робочої зони для певного коефіцієнту масштабу. Введемо коефіцієнт масштабу *k*такий щоб:

$$R_1 = \frac{R_2}{k}, R_3 = R_2 k \quad (5)$$

$$z_1 = kz_2 \, , z_3 = \frac{z_2}{k} \quad (6)$$

Тоді з виразу (3) отримаємо залежності для 2-х аплікаторів з різними радіусами R_1та R_3.

$$H_{R1}(z) = \frac{Ik}{R_2}\left(\frac{1}{(1+(kz_2)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (7)$$

$$H_{R3}(z) = \frac{I}{kR_2}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{z_2}{k}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (8)$$

Припустимо, що ми маємо певний об'єкт на глибині *z*. Тоді виникає питання – аплікатор з яким радіусом (R_1, R_2, чи R_3) найкраще підійде для даної глибини *z*.? Для вирішення даної задачі скористаємось прикладом. Виберемо значення R_1, R_2,R_3 які будуть задовольняти умову:

$$R_1 < R_2 < R_3 \quad (9)$$

Наприклад, $R_1= 0.25$, $R_2 = 1$,$R_3 = 4$,отже $k = 4$.Тоді залежності (7,8) набудуть вигляду (поле H_2 дає ться відомим виразом (3)).

$$H_1(z) = 4I\left(\frac{1}{(1+16z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (10)$$

$$H_3(z) = \frac{I}{4}\left(\frac{1}{\left(1+(\frac{z}{4})^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (11)$$

Використовуючи графічне представлення можемо визначити дальню та ближню границі ПЗ, та її середину згідно виразів (12 - 14).

$$H_1(z_{min}) = H_2(z_{min}) \quad (12)$$

$$H_2(z_{max}) = H_3(z_{max}) \quad (13)$$

$$z_{сер} = \frac{z_{min}+z_{max}}{2} \quad 14)$$

В результаті отримаємо $z_{min} = 0.34$, $z_{max} = 1.34$, та $z_{сер} = 0.84$. Графічне представлення залежностей (12-14) подано на Рис. 3.

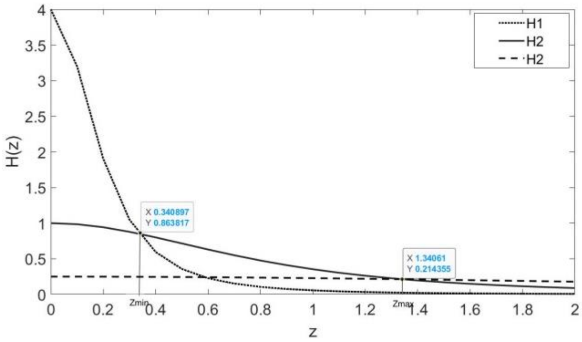


Рис. 3. Залежності напруженості МП для трьох аплікаторів з різними радіусами (R_1,R_2,R_3), z_{min},z_{max}– границі проміжної зони.

На цій основі можемо уточнити визначення (4) просторових зон для аплікатору з середнім радіусом R_2.

Для ближньої зони: $z_2 < z_{min}$отже $z_2 < 0.34$
Проміжна зона: $z_{min} < z_2 < z_{max}$
тоді $z_2 \epsilon (0.34; 1.34)$ (15)
Дальня зона: $z_2 > z_{max}$звідси $z_2 > 1.34$

Також визначимо ширину робочої зони:

$$\Delta z_2 = z_{max} - z_{min} = 1 \quad (16)$$

4.Обчислення границь робочої зони для довільного коефіцієнту масштабу.Значення границь робочої зон (15-16) стосуються лише випадку к=4. Для довільного випадку знову розглянемо поле витка (3) та врахуємо умову (9) для 3-х аплікаторів з різними радіусами.Тоді для дальної (z_{max}) та ближньої (z_{min}) границь робочої зони буде справджуватись рівність:

$$H_1(z_{min}) = H_2(z_{min}) \quad (17)$$

$$H_2(z_{max}) = H_3(z_{max}) \quad (18)$$

Звідси отримаємо:

$$z_{min} = f(R_1, R_2) \quad (19)$$

$$z_{max} = f(R_2, R_3) \quad (20)$$

На основі виразів (5) та (3) визначимо функцію для z_{min}:

$$\frac{1}{R_1\left(1+\left(\frac{Z_1}{R_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R_2\left(1+\left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (21)$$

$$R_1\left(1+\left(\frac{Z_1}{R_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = R_2\left(1+\left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

$$(R_1)^{\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{Z_1}{R_1}\right)^2\right) = (R_2)^{\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right) \quad (23)$$

Для того, щоб звільнитися від радикалів необхідно перейти до виразів через коефіцієнт масштабування k, такий щоб:

$$\left(\frac{R_2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}(1+(kz_{min})^2) = (R_2)^{\frac{2}{3}}(1+z_{min}{}^2) \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)(1+(kz_{min})^2) = 1+(z_{min})^2 \quad (25)$$

$$1-k^{-\frac{2}{3}} = z_{min}^2(k^{\frac{4}{3}}-1) \quad (26)$$

$$z_{min} = \frac{1}{k^{1/3}}\sqrt{\frac{k^{2/3}-1}{k^{4/3}-1}} \quad (27)$$

Можемо спростити вираз використовуючи відому математичну формулу $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$ при значенні $a=k^{2/3}$; $b=1$:

$$\left(k^{4/3}-1\right) = \left(k^{2/3}-1\right)\left(k^{2/3}+1\right) \quad (28)$$

$$z_{min} = \frac{1}{k^{1/3}}\sqrt{\frac{1}{k^{2/3}+1}} = \frac{Z_{min}}{R_2} \quad (29)$$

Аналогічно, на основі виразів (6) та (3) визначимо функцію z_{max}:

$$\frac{1}{R_2\left(1+\left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R_3\left(1+\left(\frac{Z_3}{R_3}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

$$(R_2)^{\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right) = (R_3)^{\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{Z_3}{R_3}\right)^2\right) \quad (31)$$

Переходимо до виразу через коефіцієнт масштабування k, тоді $z_{max}=f(k,R_2)$:

$$(R_2)^{\frac{2}{3}}(1+(z_{max})^2) = (kR_2)^{\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{z_{max}}{k}\right)^2\right) \quad (32)$$

$$1+z_{max}^2 = k^{\frac{2}{3}} + z_{max}^2 k^{-\frac{4}{3}} \quad (33)$$

$$1-k^{\frac{2}{3}} = z_{max}^2(k^{-\frac{4}{3}}-1) \quad (34)$$

$$z_{max} = k^{2/3}\sqrt{\frac{1-k^{2/3}}{1-k^{4/3}}} \quad (35)$$

Спростимо вираз знову використавши різницю квадратів $\left(1-(k^{2/3})^2\right)$:

$$z_{max} = k^{2/3}\sqrt{\frac{1}{1+k^{2/3}}} = \frac{Z_{max}}{R_2} \quad (36)$$

Таблиця 1

Результати обчислень z_{min}, z_{max}, та $z_{сер}$ при різних значення коефіцієнту масштабу k

k	z_{min}	z_{max}	z_{cep}
2	0.49	0.98	0.73
3	0.39	1.18	0.78
4	0.34	1.34	0.84

Оскільки ми використовували нормовані значення z_{max}та z_{min} :

$$Z_{min} = R_2 z_{min}\,; Z_{max} = R_2 z_{max} \quad (37)$$

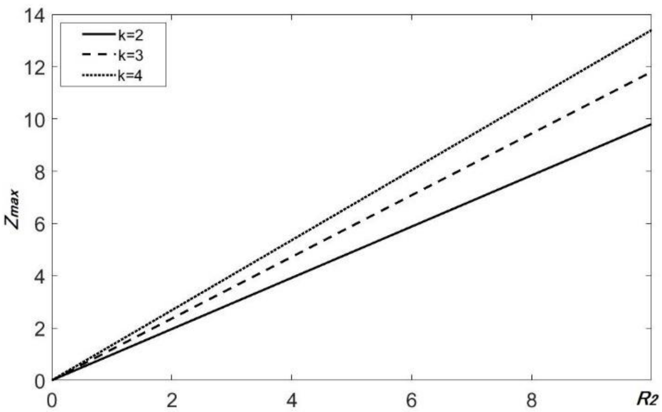


Рис.4. Залежність дальньої границі робочої зони від радіусу аплікатора

5. Асимптотика границь при граничних коефіцієнтах масштабу. Використовуючи вирази (29) та (37) побудуємо залежність z_{min}, z_{max}, та $z_{сер}$ при будь-яких значеннях k. Проведемо аналіз асимптот для значень z_{min}, z_{max}, та $z_{сер}$:

$$\text{k} \to 1\text{: всі } z_{min}, z_{max}, z_{сер} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, \quad (38)$$

$$\text{k} \gg 1\text{: } z_{min} \to k^{-\frac{1}{3}},\ z_{max} \to k^{\frac{1}{3}},\ z_{сер} \to \frac{1}{2}k^{\frac{1}{3}},$$

З даного графіку видно що z_{max} та $z_{сер}$ при k ≫ 1 будуть збільшуватися, при цьому дальня границя z_{max} буде зростати в 2 раз швидше за середину.

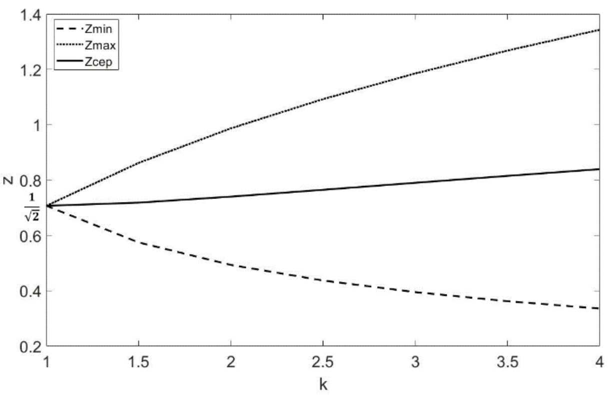


Рис.5. Залежність границь робочої зони від коефіцієнту масштабу k.

І навпаки, при $k \rightarrow 1$ обидві границі та середина робочої зони будуть наближатись до значення $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Висновки. В наближенні аплікатора як витка зі струмом знайдено аналітичні залежності від k ближньої, дальньої границі та середини робочої зони, в якій повинна знаходитися мішень. Знайдено асимпотики у крайніх випадках мінімального (k=1) та великого (k>>1) коефіцієнтів масштабу. Показано, що обидві границі та середина робочої зони при k=1 рівна $R/\sqrt{2}$, (R – радіус аплікатора), а при k>>1 ближня границя спадає як $Rk^{-2/3}$, дальня – росте як $(R)k^{1/3}$, а середина зони в 2 рази повільніше $(R/2)k^{1/3}$ (як середнє арифметичне від обох границь).

Отже, з асимптотичного аналізу маємо, що при збільшенні коефіцієнту масштабу робоча зона буде розширюватися, а її середина – повільно віддалятися від робочої поверхні аплікатора в напрямку до об’єкта (мішені).

Ці результати дають вирішення «прямої» задачі – для аплікатора певного радіусу підібрати параметри мішені – розмір та відстань до неї. Так, в 1-му наближенні (модель аплікатора як витка зі струмом) ширина робочої зони дає бли-зьку до оптимальної (квазиоптимальну) товщину (розмір) мішені. Також середина робочої зони – це по суті квазиоптимальна відстань до мішені. Квази, бо точну оптимальність автори розуміють як результат розв’язку певної екстремальної задачі, яка тут відсутня.

Це потрібно у сучасних застосуваннях, коли мішень має досить малий розмір та не може наблизитися до аплікатора ближче певної критичної відстані. Наприклад, у біомедичних застосуваннях при дії магнітним полем на певні органи чи магнітні (зокрема – нано) матеріали чи їх локалізації всередині біооб’єктів, в тому числі людини чи тварини.

Проте, для практики більш корисно вирішити «обернену» задачу - для мішені заданого розміру та відстані до неї знайти (виготовити) аплікатор з потрібними параметрами. Мовою математики це означає, що у подальшому потрібно вирішити задачу оптимізації параметрів конструкції аплікатора (в простій моделі витка зі струмом такий параметр лише один - радіус), і бажано не асимптотично, а «точно», тобто як результат розв’язку певної екстремальної задачі.

Подяки. Робота виконана за проєктом «Розробка, дослідна експлуатація та впровадження у виробництво біомедичних інформаційно-діагностичних систем та інтелектуальних сенсорних приладів» в рамках цільової програми наукових досліджень НАНУ «Розумні» сенсорні прилади нового покоління на основі сучасних матеріалів та технологій» на 2018-2022 рр.

Список використаних джерел

1. *Дудченко, А. К.*Магнитный апликатор для направленой доставки магнитных наночастиц в орган-мишень [Електронний ресурс] / А. К. Дудченко, Ю. А. Алексейцев, Н. А. Дудченко, О. М. Михайлик – Институт прикладных проблем физики и биофизики НАНУ – 2008. – С. 1-4. - Доступ за посиланням: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/ download/ 14013/12874/
2. *Будник М., Дудченко Н., Дудченко О., Алексєйцев Ю., Будник В*. Магнітна система аплікатора для концентрації магнітних матеріалів у локальній області всередині біологічного об’єкту // Патент України на кор. модель UA 29313, опубл. 10.01.2008, Бюл. «Промислова власність», №1, 2008.
3. *Jordan A.* Magnetic fluid hyperthermia // Journal of magnetism and magnetic materials. – 1999. – Issue 201. -PP. 413-419.
4. *Купріянчук, В. М., Будник, М.М*. Застосування магнітних наночастинок в

біології та медицині (огляд) // Book of Abstracts of VI Intern. Sci. and Practical Conf. “Trends and directions of development of scientific approaches and prospects of integration of Internet technologies into society”. Stockholm, Sweden 2021. Pp. 492-497.DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.VI URL: https://isg-konf.com.

5. *Купріянчук, В. М., Будник, М.М.* Метод флуоресцентної візуалізації наночастинок в тілі лабораторних тварин (огляд) // Book of Abstracts of XI Intern. Sci. And Practical Conf. “Topical issues of modern science and education”. Tallinn, Estonia 2021. Pp. 202-206. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.XI URL: https://isg-konf.com

References

1. DUDCHENKO, A., ALEKSEYTSEV, A., DUDCHEN-KO, N., MYKHAILYK, O. (2008) *Magnetic applicator for directed delivery of magnetic nanoparticles to the target organ*. [Online] p. 1–4 – Available from: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/download/14013/12874
2. BUDNYK M., DUDCHENKO N., DUDCHENKO O., ALEXEYTSEV YU., BUDNYK V. (2008) *Magnetic appli-cator system for concentration of magnetic materials in a local area inside a biological object* // Patent UA 29313, publ. 10.01.2008, Bull. "Industrial Property", No. 1, 2008.
3. JORDAN, A. (1989) *Magnetic fluid hyperthermia*, Issue. 201: Journal of magnetism and magnetic mat materials. – 1999. – Issue 201. -PP. 413-419.
4. KUPRIIANCHUK, V.M., BUDNYK, M.M. (2021) Appli-cation of magnetic nanoparticles in biology and medicine (review) // Book of Abstracts of VI Intern. Sci. and Practical Conf. “Trends and directions of development of scientific approaches and prospects of integration of Internet techno-logies into society”. Stockholm, Sweden 2021. Pp. 492-497.DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.VI URL: https://isg-konf.com.
5. KUPRIIANCHUK, V.M., BUDNYK, M.M. (2021) Method of fluorescence visualization of nanopartic-les in the body of laboratory animals // Book of Abstracts of XI Intern. Sci. and Practical Conf. “Topical issues of modern science and education”. Tallinn, Estonia 2021. Pp. 202-206. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.XI URL: https://isg-konf.com

Надійшла до редакції 21.01.2022